



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

NELSON LEAL DOS SANTOS JÚNIOR

PROCESSOS DIFUSIVOS EM ESPAÇOS RIEMANNIANOS

Recife
2020

NELSON LEAL DOS SANTOS JÚNIOR

PROCESSOS DIFUSIVOS EM ESPAÇOS RIEMANNIANOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Área de Concentração: Geometria

Orientador (a): Solange da Fonseca Rutz

Coorientador (a): Peter Louis Antonelli

Recife
2020

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

S237p Santos Júnior, Nelson Leal dos
Processos difusivos em espaços riemannianos / Nelson Leal dos Santos Júnior. – 2020.
71 f.: il., fig.

Orientadora: Solange da Fonseca Rutz.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2020.
Inclui referências.

1. Geometria. 2. Geometria diferencial. I. Rutz, Solange da Fonseca (orientadora). II. Título.

516 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2020 - 184

NELSON LEAL DOS SANTOS JÚNIOR

PROCESSOS DIFUSIVOS EM ESPAÇOS RIEMANNIANOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 19/10/2020

BANCA EXAMINADORA

Prof.^a Dr.^a Solange da Fonseca Rutz (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Renato Portugal (Examinador Externo)
Laboratório Nacional de Computação Científica

Prof. Dr. Pablo Martin Rodriguez (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Aos meus avós (In Memoriam).

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me guiado e dado força para superar todas as dificuldades.

Aos meus pais Nelson Leal e Maria do Patrocínio e a minha irmã Márcia Paloma, pelo incentivo e amor incondicional que sempre me deram.

Com a escolha de não citar nomes, agradeço a todos os meus companheiros do DMAT, por estarem ao meu lado durante esta caminhada, pelas alegrias, tristezas e desafios compartilhados, sendo estes, parte importante na busca em conjunto pelo conhecimento.

Aos meus companheiros dos Apartamentos 102 e 201, Djardiel, Marconi, Josival, Ygor, Loandson e André. Assim como, aos meus companheiros de grupo de estudo, Jamilly e Rafael. Com vocês, as pausas entre um parágrafo, uma demonstração ou uma solução, é sempre melhor.

A todos os professores da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, que contribuíram nesta minha etapa acadêmica.

À minha orientadora Prof. Dra. Solange da Fonseca Rutz que não mediu esforços para dar apoio e contribuição na construção deste trabalho.

Ao professor Dr. Peter Louis Antonelli (In Memoriam) pelo pouco, porém valioso convívio e por todas as suas contribuições na matemática, entre elas, as que tornaram possível a realização desse estudo.

Aos membros da banca examinadora pela disponibilidade de participar da avaliação deste trabalho de dissertação.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro, certamente, sem a bolsa isto não seria possível.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação acadêmica.

Muito obrigado!

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é gerar uma fonte acessível de informações e ferramentas para dar suporte a elaboração de modelos envolvendo difusão em espaços Riemannianos. Trataremos difusão sob a perspectiva de um processo de Markov. Estes envolvem coeficientes de drift e de difusão, e uma função de densidade de probabilidade $f(s, x, t, y)$ chamada de função de transição do processo de Markov, que fornece a probabilidade de encontrar uma partícula no ponto y em um tempo t , dada a posição x em um tempo $s < t$. Numa abordagem local de uma geometria diferencial Riemanniana, tratamos tópicos como: gradiente, divergente, laplaciano, símbolos de Levi-Civita, derivada covariante, geodésicas e transporte paralelo. Discutimos então a existência de uma geometria associada à difusão, cuja métrica é dada pelo coeficiente de difusão do processo de Markov. Apresentamos ainda conceitos que são característicos de um espaço Riemanniano, tais como conexão e curvatura, além de resultados de aproximação da função de transição de um processo de difusão que satisfaz condições específicas, utilizando como ferramenta o desvio geodésico relacionado à trajetória mais curta que une os pontos x e y . Ao final, são apresentadas informações sobre difusão em espaços de curvatura constante.

Palavras-chaves: Difusão. Drift. Processos de Markov. Geometria Diferencial.

ABSTRACT

The main objective of this work is to offer an accessible source of information and tools to support the construction models of diffusion in Riemannian spaces. We shall treat diffusion under the perspective of Markov processes. These involve drift and diffusion coefficients, and a probability density function $f(s, x, t, y)$ called the Markov process transition function, which gives the probability of finding a particle at a point y in a time t , given the position x in a time $s < t$. In a local approach of a Riemannian differential geometry, we address topics such as: gradient, divergent, Laplacian, Levi-Civita symbols, covariant derivative, geodesics and parallel transport. We discuss the existence of a geometry associated with the diffusion process, whose metric is given by the diffusion coefficient of the Markov process. We also present characteristic concepts of a Riemannian space, such as connection and curvature, as well results on approximations of the transition function of a diffusion process that satisfies specific conditions, using as a tool the geodetic deviation related the trajectory more short that joins the points x and y . In the end, we present information about diffusion in spaces of constant curvature.

Keywords: Diffusion. Drift. Markov Process. Differential Geometry.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	PROCESSOS DE DIFUSÃO	11
2.1	PROCESSO DE MARKOV	11
2.1.1	Processo WFK	18
3	A GEOMETRIA DOS PROCESSOS DIFUSIVOS	22
3.1	TRANSFORMAÇÃO DOS COEFICIENTES DE DRIFT E DE DIFUSÃO	22
3.2	GEOMETRIA RIEMANNIANA DE DIFUSÃO	26
3.3	INVARIANTES DE UMA TEORIA GEOMÉTRICA DE DIFUSÃO	30
3.3.1	Operadores	30
3.3.2	Símbolos de Levi-Civita	33
3.3.3	Forma Invariante da equação backward de Kolmogorov	38
4	MAIS ALGUMAS ABORDAGENS	42
4.1	GEOMETRIA EM COORDENADAS LOCAIS	42
4.1.1	Derivada Covariante	42
4.1.2	Geodésicas	44
4.1.3	Transporte Paralelo	50
4.1.4	Conexão	52
4.1.5	Tensor de curvatura	54
4.1.6	Espaços de curvatura constante	60
4.2	DIFUSÃO EM VARIEDADES DE CURVATURA CONSTANTE	64
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	69
	REFERÊNCIAS	70

1 INTRODUÇÃO

A matemática é de fato uma ciência que ocupa lugar cativo no mundo contemporâneo, pois ela permite estabelecer relações diretas com outras áreas do conhecimento, como por exemplo, física, química, engenharia, biologia, entre outras.

De acordo com (CRANK, 1975, p. 1, tradução nossa¹), “Difusão é o processo pelo qual a matéria é transportada de uma parte de um sistema para outra como resultado de movimentos moleculares aleatórios.”. Dessa forma, um processo difusivo influencia na organização espacial de substâncias ou espécies.

Em termos físicos, são problemas que envolvem movimento ou transporte de partículas (íons, moléculas, etc) de áreas de maior concentração para áreas de menor concentração. Exemplos simples são a propagação de uma gota de tinta na água e o derretimento de um cubo de gelo. (HOLMES, 2007, p. 83, tradução nossa²).

A difusão em espaços Riemannianos ainda é uma área ativa de pesquisa em matemática pura e em aplicações em que a matemática usa geometria e topologia, bem como a probabilidade. Os processos de difusão proporcionam uma estrutura matemática bastante satisfatória. Muitos trabalhos tratam este tema sob uma perspectiva do cálculo estocástico, aqui, vamos inserir uma abordagem geométrica aos processos difusivos, no sentido que será possível descobrir se alguns elementos presentes em um processo de difusão são ou não objetos geometricamente invariantes.

Nosso principal objetivo é gerar uma fonte acessível de informações e ferramentas para facilitar a elaboração de modelos envolvendo difusão em espaços Riemannianos. Os materiais utilizados variam entre livros e artigos científicos. Ao longo deste trabalho, vamos apresentar toda teoria sobre geometria Riemanniana que fora necessária para o nosso contexto, trataremos estes espaços a partir de uma abordagem diferencial de um determinado sistema de coordenadas locais.

O Capítulo 2 consiste em fundamentar as noções matemáticas de um processo de difusão denominado de Processo de Markov, trabalhado sob a perspectiva de (KOLMOGOROV, 1931). Trataremos sobre os coeficientes de drift b^i e de difusão a^{ij} que se constituem como peças fundamentais para este processo e sobre a função de transição $f(s, x, t, y)$ de um processo de Markov, que nos oferece a probabilidade de que uma partícula que partiu do ponto x no momento s , esteja no ponto y em um tempo $t > s$. Iremos apresentar o Processo WFK, um estudo que trata sobre o desenvolvimento da teoria da difusão em genética de populações. Traremos ainda, alguns conceitos de cálculo tensorial como mudança de coordenadas e transformação de

¹ “DIFFUSION is the process by which matter is transported from one part of a system to another as a result of random molecular motions.”

² “In physical terms these are problems that involve motion or transport of particles (ions, molecules, etc.) from areas of higher concentration to areas of lower concentration. Simple examples are the spread of a drop of ink dropped into water and the melting of an ice cube.”

vetores e tensores a partir destas mudanças, a fim de caracterizar o comportamento dos coeficientes de drift e de difusão diante das mesmas.

No Capítulo 3, traremos alguns conceitos de cálculo tensorial como mudança de coordenadas e transformação de vetores e tensores a partir destas mudanças, a fim de caracterizar o comportamento dos coeficientes de drift e de difusão diante das mesmas, discutiremos sobre a existência de uma geometria associada à difusão cuja métrica é dada a partir do coeficiente de difusão a^{ij} do processo de Markov, introduziremos neste espaço uma fórmula de distância estocástica, o que caracteriza a geometria Riemanniana de difusão como um espaço métrico. Trataremos ainda o desenvolvimento de alguns conceitos relacionados a uma geometria de Riemann, tópicos como gradiente, divergente, Laplaciano e símbolos de Levi-Civita são apresentados numa abordagem diferencial local de uma variedade munida de uma métrica Riemanniana g_{ij} , a fim de finalizar o capítulo apresentando a forma invariante da equação backward de Kolmogorov, que recebe este nome pois explicita invariantes geométricos presentes em um processo de difusão.

O Capítulo 4 aborda conceitos que são característicos de um espaço Riemanniano, tais como, geodésicas, transporte paralelo, conexão e curvatura. Apresentaremos a construção do tensor de curvatura de Riemann, o qual é fundamental no contexto de uma geometria Riemanniana, além de algumas propriedades relacionadas ao mesmo. Abordamos o conceito de espaços de curvatura constante, usaremos várias informações apresentadas durante a seção para realizar a construção da pseudoesfera, um espaço de curvatura constante negativa. Traremos resultados de aproximação da função de transição $f(t, x_1, x_2)$ de um processo de difusão que atende às condições específicas em uma geometria Riemanniana, utilizando como ferramenta o desvio geodésico relacionado à $\gamma_{x_1 x_2}$, a trajetória mais curta que une os pontos x_1 e x_2 , analisaremos ainda tais informações sob o contexto de alguns espaços que tem curvatura constante.

2 PROCESSOS DE DIFUSÃO

Neste capítulo, iremos discutir um pouco sobre um processo de difusão relacionado ao movimento aleatório de uma partícula em \mathbb{R}^n . Apresentaremos alguns conceitos que dão alicerce a toda uma discussão que será feita sobre difusão em um espaço Riemanniano. Ao término da seção, traremos um tipo de processo de difusão em \mathbb{R} que se aplica à genética de populações.

2.1 PROCESSO DE MARKOV

Em probabilidade, dizemos que uma variável aleatória é contínua se toma um número não-enumerável de valores em algum conjunto Ω . Se X é uma variável aleatória contínua, a probabilidade de X tomar exatamente um determinado valor é zero. Todavia, podemos falar na probabilidade de X estar entre valores de um determinado subconjunto $A \subseteq \Omega$.

Sendo assim, podemos definir a existência de uma função não negativa f tal que

$$\int_{\Omega} f(x)dx = 1, \quad (2.1)$$

onde (2.1) nos indica um evento certo de que a variável esteja em algum lugar do espaço amostral. Definimos então a probabilidade de X estar dentro de um subconjunto $E \subseteq \Omega$ da forma

$$P(X \in E) = \int_E f(x)dx, \quad (2.2)$$

onde $f(x)$ é chamada de **função de densidade de probabilidade**.

Suponha então que uma “partícula” em \mathbb{R}^n esteja se movendo aleatoriamente. Além disso, suponha que a probabilidade $P(s, x, t, E)$ de encontrar tal partícula em um conjunto (digamos, aberto) arbitrário $E \subseteq \mathbb{R}^n$ em um instante t também arbitrário, é unicamente definida se a posição $x = (x_1, \dots, x_n)$ é dada no instante $s < t$. Tal movimento é chamado um **processo de Markov**. A completa caracterização deste movimento aleatório é dada pela função densidade de probabilidade $f(s, x, t, E)$ correspondente a $P(s, x, t, E)$, que neste caso, será chamada de **função de transição do processo de Markov**, e que obedece

$$P(s, x, t, E) = \int_{E \subseteq \mathbb{R}^n} f(s, x, t, y)dy, \quad (2.3)$$

com

$$f(s, x, t, y) \geq 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(s, x, t, y)dy = 1, \quad (2.4)$$

sendo válida a **igualdade de Markov**

$$f(s, x, t, y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(s, x, \tau, z)f(\tau, z, t, y)dz. \quad (2.5)$$

Isto quer dizer que podemos considerar que a probabilidade de ir de um estado (s, x) para um estado (t, y) pode ser encontrada por meio das probabilidades de ir de (s, x) a um estado

intermediário (τ, z) e de ir do estado (τ, z) para o estado final (t, y) e isto é feito considerando todos os estados intermediários possíveis.

Vamos considerar que seja válida a condição de **continuidade forte** para o processo de Markov, ou seja,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \int_{\|x-y\|>r} f(s-\Delta s, x, s, y) dy = 0, \quad \forall r > 0. \quad (2.6)$$

Note que a integral de (2.6) representa a probabilidade de encontrar a partícula fora da bola de centro x e raio r num tempo s , dado que no tempo $s - \Delta s$, a partícula se encontra na posição x . Usando a definição de limite, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\Delta s < \delta$ então, $P(s - \Delta s, x, s, B(x, r)^c) < \varepsilon \Delta s$. Daí, concluímos que a probabilidade de que a partícula fuja de um determinado raio de convergência em um pequeno intervalo de tempo é pequena. Isso equivale a dizer que a probabilidade da posição y se distanciar de x por um valor maior que ε é uma função ordem de Δs , ou seja, tal probabilidade vai pra zero mais rápido que o incremento de tempo. Esta propriedade também pode ser chamada de **continuidade do caminho** da partícula.

Também serão consideradas as seguintes condições:

1. As funções

$$\frac{\partial f(s, x, t, y)}{\partial s}, \quad \frac{\partial f(s, x, t, y)}{\partial x^i} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f(s, x, t, y)}{\partial x^i \partial x^j} \quad (2.7)$$

existem e são contínuas para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e para todo $s, t \in \mathbb{R}^+$, $s < t$.

2. Para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$ existem os seguintes limites

$$b^i(s, x) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \int_{\mathbb{R}^n} (y^i - x^i) f(s - \Delta s, x, s, y) dy, \quad (2.8)$$

$$a^{ij}(s, x) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \int_{\mathbb{R}^n} (y^i - x^i)(y^j - x^j) f(s - \Delta s, x, s, y) dy. \quad (2.9)$$

3. $a^{ij}(s, x)$ é uma matriz definida positiva para cada (s, x) .

Os valores $b^i(s, x)$ e $a^{ij}(s, x)$ são chamados respectivamente de coeficiente de **drift** e coeficiente de **difusão** do processo de Markov. O b^i é por vezes chamado de **campo de drift**.

Observação 2.1 A matriz $(a^{ij}(s, x))$ é simétrica para cada (s, x) por (2.9). Se esta matriz é independente de s , então a matriz inversa a_{ij} , define um funcional de comprimento de arco em \mathbb{R}^n , dado por

$$ds^2 = a_{ij}(x) dx^i dx^j.$$

Por exemplo, se $a^{ij} = \delta^{ij}$, então $ds^2 = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2$, que é o comprimento de arco Euclidiano em \mathbb{R}^n .

Definição 2.1 O processo de Markov será dito **homogêneo no tempo** se a função de transição $f(s, x, t, y)$ é estacionária, ou seja, se $s < t$, então

$$f(s, x, t, y) = f(s + \tau, x, t + \tau, y).$$

Observação 2.2 Ao longo do texto, sempre estaremos lidando com processos homogêneos no tempo.

Observação 2.3 Vale destacar que neste trabalho, apresentamos uma descrição informal do processo Markoviano. Para intuito de exemplo, a probabilidade discutida anteriormente não pode ser definida para qualquer E , há algumas questões de mensurabilidade sobre o conjunto que podem ser discutidas. Uma referência que pode ajudar o leitor a buscar algo mais detalhado é (HORSTHEMKE, LEFEVER, 1984).

(KOLMOGOROV, 1931, p. 458) conclui que sob as condições 1 e 2 acima, $f(s, x, t, y)$ como função de s e x satisfaz a **equação backward de Kolmogorov**,

$$-\frac{\partial f}{\partial s} = \sum_{i=1}^n b^i(s, x) \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(s, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}. \quad (2.10)$$

Este é um resultado de Andrei Kolmogorov (Figura 1), uma generalização para o caso em que $x, y \in \mathbb{R}$, apresentada no trabalho *Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung* que data do ano de 1931 e cuja versão traduzida para o inglês e intitulada *On analytic methods in the theory of probability* pode ser encontrada em (KOLMOGOROV, 1992, p. 62-108). Neste trabalho, para processos de Markov de tempo contínuo, são apresentadas a *first fundamental differential equation* e a *second fundamental differential equation*. Segundo (AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, 2000, p. 25) as equações são denominadas de *backward differential equation* e *forward differential equation*, e dadas respectivamente por

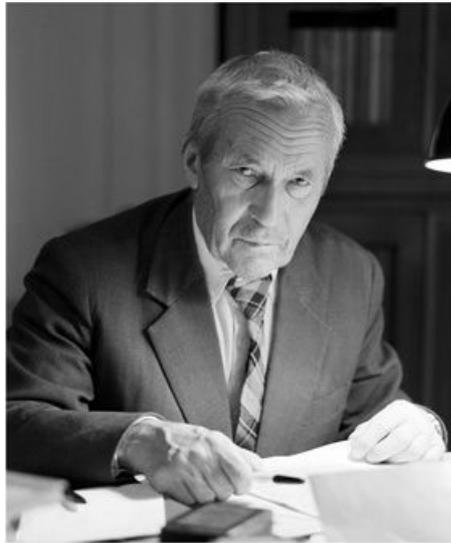
$$-\frac{\partial}{\partial s} f(s, x, t, y) = B(s, x) \frac{\partial}{\partial x} f(s, x, t, y) + \frac{1}{2} A^2(s, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, x, t, y), \quad (2.11)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} f(s, x, t, y) = -\frac{\partial}{\partial y} [B(t, y) f(s, x, t, y)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [A^2(t, y) f(s, x, t, y)], \quad (2.12)$$

onde A e B são respectivamente os coeficientes de difusão e drift.

Figura 1 – Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) - Matemático Russo.



Fonte: Site Pinterest (2020).

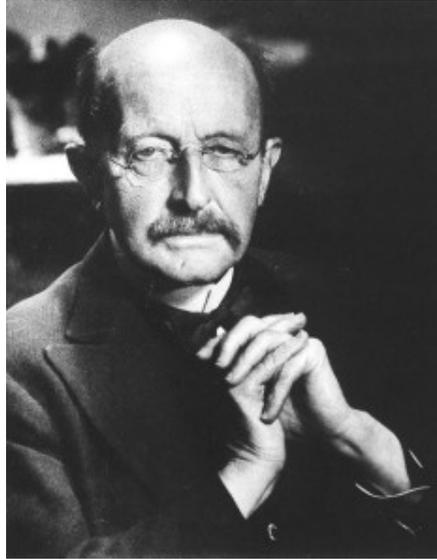
Uma curiosidade é que segundo (DYNKIN, 1989, p. 823), a equação forward apareceu anteriormente em trabalhos de Adriaan Fokker (Figura 2) e de Max Planck (Figura 3), respectivamente nos anos de 1914 e 1917. Em 1931, tais trabalhos não eram familiares para Kolmogorov, porém, um tempo depois, o russo chamou (2.12) de **equação de Fokker-Planck**. A equação backward (2.11) não havia aparecido anteriormente, nem mesmo na literatura da física.

Figura 2 – Adriaan Daniel Fokker (1887-1972) - Físico Indonésio.



Fonte: Site Huygens-Fokker Foundation (2020).

Figura 3 – Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858-1947) - Físico Alemão - Nobel de Física em 1918.



Fonte: Site Info Escola (2020).

As equações se diferenciam por estes nomes pelo fato de que a palavra *backward* indica o termo *para trás* e quer dizer que as derivadas são calculadas nas variáveis (s, x) , o primeiro estado do processo, enquanto que *forward* indica o termo *para frente* e quer dizer que as derivadas são calculadas nas variáveis (t, y) , o segundo estado do processo.

Exemplo 2.1 Se nas equações (2.11) e (2.12) temos $B(s, x) = B(t, y) = 0$ e $A(s, x) = A(t, y) = 1$, a função de distribuição

$$f(s, x, t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right], \quad t > s, \quad (2.13)$$

é solução das equações

$$-\frac{\partial}{\partial s} f(s, x, t, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, x, t, y), \quad (2.14)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} f(s, x, t, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(s, x, t, y). \quad (2.15)$$

Solução. Com efeito, calculando as derivadas separadamente, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \right) \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right] \frac{\partial}{\partial s} \left(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)} \right) \\ &= \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right] \left(\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{\pi}(t-s)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(y-x)^2}{2\sqrt{2}\sqrt{\pi}(t-s)^{\frac{5}{2}}} \right), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right] \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right] \left(\frac{y-x}{t-s}\right) \\
&= \frac{y-x}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}(t-s)^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y-x}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}(t-s)^{\frac{3}{2}}}\right) \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right] \\
&+ \frac{y-x}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}(t-s)^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right] \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right) \\
&= \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right] \left(\frac{(y-x)^2}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}(t-s)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}(t-s)^{\frac{3}{2}}}\right).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Multiplicando a expressão (2.16) por -1 , e a expressão (2.17) por $\frac{1}{2}$, temos a equação backward (2.14). Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\right) \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right] \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right] \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right) \\
&= \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right] \left(\frac{(y-x)^2}{2\sqrt{2}\sqrt{\pi}(t-s)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{\pi}(t-s)^{\frac{3}{2}}}\right),
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right] \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right] \left(-\frac{y-x}{t-s}\right) \\
&= \frac{x-y}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}(t-s)^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}(t-s)^{\frac{3}{2}}}\right) \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right] \\
&+ \frac{x-y}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}(t-s)^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right] \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right) \\
&= \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right] \left(\frac{(y-x)^2}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}(t-s)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}(t-s)^{\frac{3}{2}}}\right).
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Multiplicando (2.19) por $\frac{1}{2}$ e comparando com (2.18), temos a equação forward de (2.15).
 ■

Observação 2.4 Ademais, pode-se observar que no Exemplo 2.1, a função $f(s, x, t, y)$ é a densidade de uma variável aleatória com distribuição Normal com média $y - x$ e variância $t - s$.

De acordo com (HORSTHEMKE, LEFEVER, 1984, p. 67), a função $f(s, x, t, y)$ assume o caráter de uma função de distribuição delta de Dirac, no momento em que $s \rightarrow t$, ou seja,

$$\lim_{s \rightarrow t} f(s, x, t, y) = \delta(x - y). \quad (2.20)$$

Devemos assumir este comportamento para a nossa situação. Neste sentido, considere que para $r > 0$ e $\|x - y\| < r$, a função de transição $f(s, x, t, y)$ satisfaz

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\|x-y\| < r} \lim_{s \rightarrow t} f(s, x, t, y) G(y) dy = G(x), \quad (2.21)$$

onde G é uma função contínua e limitada. Isto é feito aplicando o Teorema do Valor Médio para Integrais para a função G .

Proposição 2.1 $f(s, x, t, y)$ é solução fundamental da equação (2.10). Isto significa que qualquer solução $u(s, x)$ de (2.10) é da forma

$$u(s, x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(s, x, t, y) G(y) dy, \quad (2.22)$$

sendo válida a condição inicial (pré-atribuída)

$$\lim_{s \rightarrow t} u(s, x) = G(x). \quad (2.23)$$

Demonstração. Diferenciando a equação (2.22) com respeito a s e x ,

$$-\frac{\partial u(s, x)}{\partial s} = \int_{\mathbb{R}^n} -\frac{\partial f(s, x, t, y)}{\partial s} G(y) dy, \quad (2.24)$$

$$\sum_{i=1}^n b^i(s, x) \frac{\partial u(s, x)}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} b^i(s, x) \frac{\partial f(s, x, t, y)}{\partial x^i} G(y) dy, \quad (2.25)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(s, x) \frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} a^{ij}(s, x) \frac{\partial^2 f(s, x, t, y)}{\partial x^i \partial x^j} G(y) dy. \quad (2.26)$$

Agora, somando (2.25) e (2.26), usando (2.10) e a equação (2.24), obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n b^i(s, x) \frac{\partial u(s, x)}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(s, x) \frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^i \partial x^j} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{i=1}^n b^i(s, x) \frac{\partial f(s, x, t, y)}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(s, x) \frac{\partial^2 f(s, x, t, y)}{\partial x^i \partial x^j} \right] G(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} -\frac{\partial f(s, x, t, y)}{\partial s} G(y) dy = -\frac{\partial u(s, x)}{\partial s}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Portanto, $u(s, x)$ como definida, realmente satisfaz (2.10). Vamos agora provar a condição inicial (2.23). Para isto, particionaremos a integral do lado direito da igualdade (2.22), em duas regiões, $\|x - y\| < r$ e $\|x - y\| \geq r$, com r fixo. Ou seja,

$$\lim_{s \rightarrow t} u(s, x) = \lim_{s \rightarrow t} \int_{\|x-y\| \geq r} f(s, x, t, y) G(y) dy + \lim_{s \rightarrow t} \int_{\|x-y\| < r} f(s, x, t, y) G(y) dy. \quad (2.28)$$

Na região $\|x - y\| \geq r$, temos

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} f(s - \Delta s, x, s, y) = 0,$$

pois, caso contrário, o limite aqui seria positivo, o que nos levaria a uma contradição com a continuidade do caminho do processo. Dessa forma, usando que o processo é homogêneo no tempo e a substituição $t - s = \Delta s$,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow t} \int_{\|x-z\| \geq r} f(s, x, t, y) G(y) dy &= \int_{\|x-z\| \geq r} G(y) \lim_{s \rightarrow t} f(s, x, t, y) dy \\ &= \int_{\|x-z\| \geq r} G(y) \lim_{s \rightarrow t} f(s - \Delta s, x, t - \Delta s, y) dy \\ &= \int_{\|x-z\| \geq r} G(y) \lim_{\Delta s \rightarrow 0} f(s - \Delta s, x, s, y) dy = 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Sendo assim,

$$\lim_{s \rightarrow t} u(s, x) = \lim_{s \rightarrow t} \int_{\|x-z\| < r} f(s, x, t, y) G(y) dy. \quad (2.30)$$

Agora, tomando o limite quando $r \rightarrow 0$ em (2.30) e usando (2.21),

$$\lim_{s \rightarrow t} u(s, x) = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{s \rightarrow t} \int_{\|x-z\| < r} f(s, x, t, y) G(y) dy = G(x), \quad (2.31)$$

o que prova o resultado. ■

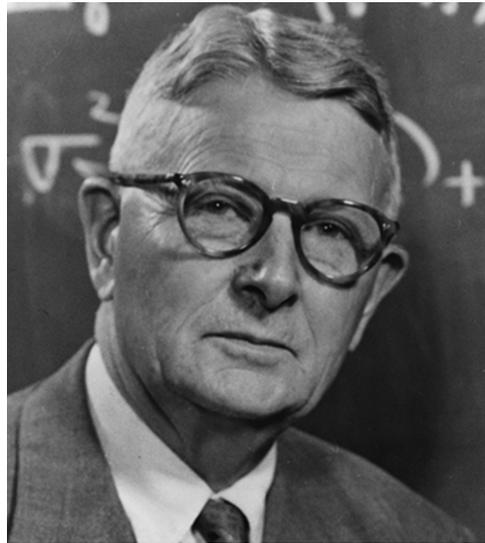
2.1.1 Processo WFK

O Processo WFK refere-se aos geneticistas Sewall Wright (Figura 4), Ronald Fisher (Figura 5) e Motoo Kimura (Figura 6), ele trata do desenvolvimento da teoria da difusão em genética de populações. Neste caso, a equação de Kolmogorov em genética é dada por

$$-\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{x(1-x)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (2.32)$$

com $x \in (0, 1)$, uma vez que (KIMURA, 1964, p. 192) apresenta $A(x) = x(1-x)$. Esta equação é chamada de **frequência de 2-aletas**. A função $f(s, x, t, y)$, neste caso, é chamada de **densidade de transição da difusão de Markov**. Note também que neste momento da abordagem, temos coeficiente de drift $B(x) = 0$.

Figura 4 – Sewall Green Wright (1889-1988) - Geneticista Estadunidense.



Fonte: Site Genetics (2020).

Figura 5 – Ronald Aylmen Fisher (1890-1962) - Geneticista e Estatístico Britânico.



Fonte: Site The Famous People (2020).

Figura 6 – Motoo Kimura (1924-1994) - Geneticista Japonês.



Fonte: Site Quanta Magazine (2020).

Fisher então, teve a ideia de transformar o processo e introduzir a **frequência angular de Fisher**, dada por $z = \arccos(1 - 2x)$. A partir disto, podemos reescrever a frequência de 2-aletas (2.32) em termos da variável z . Vamos verificar isto em mais detalhes. Pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{dx/dz} \frac{\partial f}{\partial z},$$

em que,

$$x = \frac{1 - \cos z}{2} \text{ e } \frac{dx}{dz} = \frac{\sin z}{2}.$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{\sin z} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

A partir daí,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{\sin z} \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{dz}{dx} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{2}{\sin z} \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{2}{\sin z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{2}{\sin z} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= \frac{2}{\sin z} \left(-\frac{2}{\sin^2 z} \cos z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{2}{\sin z} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) = -\frac{4 \cot z}{\sin^2 z} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{4}{\sin^2 z} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Além disso,

$$\frac{x(1-x)}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos z}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos z}{2} \right) = \frac{1 - \cos^2 z}{8} = \frac{\sin^2 z}{8}. \quad (2.34)$$

De (2.33) e (2.34), temos então,

$$\frac{x(1-x)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\sin^2 z}{8} \left(-\frac{4 \cot z}{\sin^2 z} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{4}{\sin^2 z} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) = -\frac{1}{2} \cot z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Portanto, substituindo em (2.32), obtemos a equação

$$-\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \cot z \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (2.35)$$

que é conhecida como **difusão de 2-aletas em termos da frequência angular de Fisher**.

Note que a partir da introdução da frequência angular de Fisher, obtemos novos coeficientes de difusão e drift, respectivamente, $\tilde{A}(z) = 1$ e $\tilde{B}(z) = -\frac{1}{2} \cot z$. Perceba também que o coeficiente de drift sofre uma drástica alteração durante a transformação do processo. Discussões sobre este acontecimento serão feitas no próximo capítulo.

3 A GEOMETRIA DOS PROCESSOS DIFUSIVOS

Este capítulo é destinado a apresentar a natureza geométrica que está presente nos processos que estão sendo abordados neste trabalho. Vamos investigar a existência de uma geometria de difusão, introduzir alguns conceitos de geometria Riemanniana, abordar a aleatoriedade dos processos difusivos, além de explicitar invariantes geométricos dos mesmos.

3.1 TRANSFORMAÇÃO DOS COEFICIENTES DE DRIFT E DE DIFUSÃO

Nesta seção, vamos apresentar alguns conceitos relacionados ao cálculo tensorial. É importante destacar que a partir deste momento, ao longo do texto, usaremos constantemente a notação de Einstein. Lembrando que, se um índice for repetido em um termo, tanto subscrito como sobrescrito, ali estará implícito um somatório em relação a esse índice. Uma referência principal para esta seção é (LAUGWITZ, 1965). Toda a discussão feita, culmina nas leis de transformação dos coeficientes de drift e difusão apresentados anteriormente.

Em cálculo tensorial, dado V um espaço vetorial real, seus elementos são chamados de vetores contravariantes e os elementos do espaço vetorial dual V^* são chamados de vetores covariantes. No que se trata de notação, as componentes dos vetores contravariantes carregam índices sobrescritos e as componentes dos vetores covariantes carregam índices subscritos. Em relação aos vetores da base, os elementos de V carregam índices subscritos e os elementos de V^* carregam índices sobrescritos.

Considere um vetor $u \in V$ tal que $u = x^i u_i$, este **vetor contravariante** se transforma mediante uma mudança de base, da forma

$$\tilde{x}^k = a_i^k x^i.$$

No caso de $f \in V^*$ tal que $f = y_j f^j$, a transformação por mudança de base deste **vetor covariante**, é dada por

$$\tilde{y}_j = b_j^l f_l.$$

Definição 3.1 Considere $C : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear e $u, v \in V$ tais que $u = x^i u_i$ e $v = y^j v_j$. Neste caso

$$C(u, v) = C(x^i u_i, y^j v_j) = x^i y^j C_{ij},$$

onde $C_{ij} = C(u_i, v_j)$. Fazendo uma mudança de base do tipo $\tilde{u}_k = a_k^i u_i$ e $\tilde{v}_l = a_l^j v_j$, segue que

$$\tilde{C}_{kl} = C(\tilde{u}_k, \tilde{v}_l) = C(a_k^i u_i, a_l^j v_j) = a_k^i a_l^j C_{ij}.$$

Esta forma bilinear é chamada de **tensor covariante de ordem 2** ou de posto 2.

Exemplo 3.1 Considere $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ e $M : V \rightarrow \mathbb{R}$ funcionais lineares. O produto $C : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $C(u, v) = L(u)M(v)$ é um tensor covariante de ordem 2.

Definição 3.2 Considere $C : V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear, $u \in V$ e $f \in V^*$ tais que $u = x^i u_i$ e $f = y_j f^j$. Neste caso

$$C(u, f) = C(x^i u_i, y_j f^j) = x^i y_j C_i^j,$$

onde $C_i^j = C(u_i, f^j)$. Fazendo uma mudança de base do tipo $\tilde{u}_k = a_k^i u_i$ e $\tilde{f}^l = b_j^l f^j$, segue que

$$\tilde{C}_k^l = C(\tilde{u}_k, \tilde{f}^l) = C(a_k^i u_i, b_j^l f^j) = a_k^i b_j^l C_i^j.$$

Esta forma bilinear é chamada de **tensor misto de ordem 2**, ou mesmo, de ordem $(1, 1)$.

Definição 3.3 Considere $C : V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear, $u \in V$ e $f \in V^*$ tais que $g = x_i g^i$ e $f = y_j f^j$. Neste caso

$$C(g, f) = C(x_i g^i, y_j f^j) = x_i y_j C^{ij},$$

onde $C^{ij} = C(g^i, f^j)$. Fazendo uma mudança de base do tipo $\tilde{g}^k = b_i^k g^i$ e $\tilde{f}^l = b_j^l f^j$, segue que

$$\tilde{C}^{kl} = C(\tilde{g}^k, \tilde{f}^l) = C(b_i^k g^i, b_j^l f^j) = b_i^k b_j^l C^{ij}.$$

Esta forma bilinear é chamada de **tensor contravariante de ordem 2** ou de posto 2.

Um dos princípios básicos do cálculo tensorial é que não fiquemos restritos a um único sistema de coordenadas, a fim de desenvolvermos relações que sejam válidas em qualquer sistema. Sendo assim, se estamos trabalhando em um sistema n -dimensional que tem coordenadas (x^1, \dots, x^n) , podemos pensar em trabalhar com um sistema que tem novas coordenadas $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$. Para isto, devemos considerar funções contínuas e diferenciáveis g^i de forma que

$$\tilde{x}^i = g^i(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

seja uma transformação não-singular, no sentido que a matriz jacobiana $\left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\right)$ tenha determinante diferente de zero. Esta condição permite inverter (3.1), de forma a obter

$$x^i = h^i(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

É importante destacar que sob uma mudança de coordenadas deste tipo, a partir das definições que já foram dadas, um conjunto de n^2 grandezas, D^{ij} e D_{ij} são respectivamente, tensores contravariante e um covariante se, e somente se, transformam-se respectivamente, da forma

$$\tilde{D}^{ij} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^l} D^{kl} \quad \text{e} \quad \tilde{D}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} D_{kl} \quad (3.3)$$

De modo análogo, um conjunto de n grandezas D^i e D_i são respectivamente, vetores contravariante e covariante se, e somente se, transformam-se sob mudança de coordenadas, da forma

$$\tilde{D}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} D^k \quad \text{e} \quad \tilde{D}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} D_k.$$

Até agora, foram apresentadas discussões sobre tensores de ordem 2, de três tipos, covariante, misto e contravariante. Vale destacar que isto pode ser generalizado de forma a considerarmos, por exemplo, um tensor $D_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r}$ de ordem (r, s) , ou seja, contravariante de ordem r e covariante de ordem s .

Com posse de ferramentas suficientes, chegamos à principal discussão desta seção. Considere uma mudança de coordenadas do tipo (3.1). Vamos reescrever os termos $b^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}$ e $\frac{1}{2} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ da equação de Kolmogorov (2.10). Usando a regra da cadeia,

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^j} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^j} \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{x}^l \partial \tilde{x}^k} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial^2 \tilde{x}^k}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Dessa forma,

$$\frac{1}{2} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{1}{2} a^{ij}(x) \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^j} \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{x}^l \partial \tilde{x}^k} + \frac{1}{2} a^{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial^2 \tilde{x}^k}{\partial x^i \partial x^j},$$

e

$$b^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i} = b^i(x) \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i}.$$

Somando as duas equações,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + b^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i} \\ &= \frac{1}{2} a^{ij}(x) \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^j} \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{x}^l \partial \tilde{x}^k} + \frac{1}{2} a^{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial^2 \tilde{x}^k}{\partial x^i \partial x^j} + b^i(x) \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Como os índices i, j, k, l , variam em $\{1, \dots, n\}$, podemos fazer uma troca de índices, e assim,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + b^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i} \\ &= \frac{1}{2} \left(a^{kl}(x) \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^l} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^j} + \left(\frac{1}{2} a^{kl}(x) \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^k \partial x^l} + b^k(x) \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \right) \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i} \\ &= \frac{1}{2} \tilde{a}^{ij}(\tilde{x}) \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^j} + \tilde{b}^i(\tilde{x}) \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i}, \end{aligned}$$

onde

$$\tilde{a}^{ij}(\tilde{x}) = a^{kl}(x) \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^l} \quad (3.4)$$

e

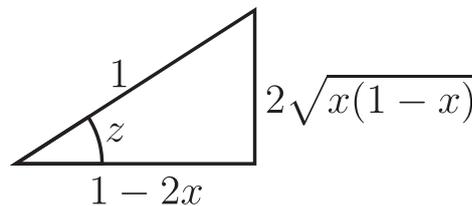
$$\tilde{b}^i(\tilde{x}) = \frac{1}{2} a^{kl}(x) \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^k \partial x^l} + b^k(x) \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}. \quad (3.5)$$

Note que de acordo com (3.4), o coeficiente de difusão a^{ij} é um tensor contravariante de ordem 2. Dessa forma, o seu inverso $a_{ij}(x)$ é um tensor covariante de ordem 2, pois, teremos

$$\tilde{a}_{ij}(\tilde{x}) = a_{kl}(x) \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j}. \quad (3.6)$$

Agora que sabemos como o coeficiente de drift se comporta sob mudança de coordenadas e notando que a alteração de Fisher para o Processo WFK é uma mudança deste tipo, podemos realizar uma nova investigação para o que acontece na transformação de (2.32) para (2.35), via frequência angular de Fisher $z = \arccos(1 - 2x)$, usando os valores como na Figura 7.

Figura 7 – Frequência angular de Fisher.



Fonte: Fonte própria (2020).

Perceba que de acordo com (2.32), $B(x) = 0$ e $A(x) = x(1 - x)$. Agora, usando (3.5), para essa transformação, temos

$$\tilde{B}(z) = \frac{1}{2}x(1-x) \frac{d^2z}{dx^2}.$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{dx} (\arccos(1 - 2x)) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

e

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \right) = -\frac{1-2x}{2(x(1-x))^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.7)$$

Logo, obtemos

$$\tilde{B}(z) = -\frac{1}{2}x(1-x) \frac{1-2x}{2(x(1-x))^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}} \right) = -\frac{1}{2} \cot z,$$

o que corrobora com o que foi visto anteriormente.

Vale destacar também que a expressão (3.5) é justificativa para que o coeficiente de drift $b^i(x)$ não seja um verdadeiro campo de vetores. Uma outra justificativa é a alteração que temos do drift dentro do processo WFK, uma vez que um vetor que se anula em um sistema de coordenadas, deve também se anular em qualquer outro sistema.

3.2 GEOMETRIA RIEMANNIANA DE DIFUSÃO

Nesta seção, vamos realizar algumas investigações à cerca de uma geometria Riemanianna motivada pelo coeficiente de difusão a^{ij} , que se comporta como um tensor contravariante de ordem 2, como discutido na seção anterior.

Definição 3.4 *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $f_\alpha : U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n em M tais que:*

1. $M = \bigcup_{\alpha} f_\alpha(U_\alpha)$;
2. Para todo par α, β , com $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $f_\alpha^{-1}(W)$ e $f_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$ são diferenciáveis;
3. A família (U_α, f_α) é máxima relativamente às condições (1) e (2).

Definição 3.5 *Seja M uma variedade diferenciável. Uma métrica Riemanniana em M é um campo de tensores covariantes de grau 2, simétrico e definido positivo em cada ponto de M , geralmente denotado por g_{ij} .*

Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana é chamada de **variedade Riemanniana**. Costumeiramente, o par (M, g_{ij}) é denominado de uma **geometria Riemanniana**.

Foi visto anteriormente que $a_{ij}(x)$ é um tensor covariante de ordem 2. Além disso, ele é definido positivo e pela Observação (2.1), é simétrico. Dessa forma, o inverso a_{ij} constitui uma métrica Riemanniana. Nessas condições, dada uma variedade M de dimensão n , podemos considerar uma **geometria Riemanniana de difusão** (M, a_{ij}) .

Vamos agora introduzir a chamada **distância estocástica** associada ao coeficiente de difusão a^{ij} . Com efeito, dados dois pontos $p_1, p_2 \in (M, a_{ij})$, considerando $u(t)$ um caminho suave que liga p_1 e p_2 , tal que $u(t_1) = p_1$ e $u(t_2) = p_2$, definimos

$$d_u(p_1, p_2) = \min_{u(t)} \int_{t_1}^{t_2} \left(a_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt, \quad (3.8)$$

cujos mínimo é tomado sobre todos os caminhos suaves e $a_{ij} = (a^{ij})^{-1}$ é considerada independente do tempo.

Uma observação é que a distância estocástica pode ser definida não apenas para caminhos suaves, como também, para caminhos que sejam diferenciáveis por partes.

O valor da integral

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(a_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt,$$

é o valor do comprimento do caminho $u(t)$. Isto será visto com mais detalhes e com maior generalidade na subseção 4.1.2.

Observe que a distância estocástica para uma dada equação de difusão é independente dos termos de drift linear. Ou seja, existe uma grande família de equações de difusão, todas com a mesma fórmula de distância estocástica. (ANTONELLI, 1997, p. 106, tradução nossa¹).

Exemplo 3.2 A distância estocástica para o processo WFK $d_u(0, x)$ é exatamente igual a frequência angular de Fisher $\arccos(1 - 2x)$.

Solução. Considere o processo WFK dado pela equação (2.32). Como este é um exemplo unidimensional, temos que $i = j = 1$ e vemos que neste caso,

$$a_{ij} = (a^{ij})^{-1} = \frac{1}{x(1-x)}.$$

Assim, dado $x_1 \in (0, 1)$, se $u(t_0) = 0$ e $u(t_1) = x_1$, segue que

$$d_u(0, x_1) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{x(1-x)} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \frac{du}{dt} dt.$$

Considerando a substituição $u(t) = x$ com $x \in (0, 1)$, teremos

$$\begin{aligned} d_u(0, x_1) &= \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \left(\arcsin(2x_1 - 1) + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(1 - 2x_1) \right) = \arccos(1 - 2x_1). \end{aligned}$$

■

Por este motivo, (ANTONELLI, 1997, p. 102) afirma que a frequência angular de Fisher tem uma extensão natural, através de técnicas da geometria de difusão Riemanniana. Esse é um ponto que pode ser tratado a partir do momento em que conseguimos generalizar para dimensões maiores o que é feito no Processo WFK.

Podemos investigar uma mudança de parâmetro no caminho entre p_1 e p_2 , digamos $\tilde{t} = g(t)$. Pela regra da cadeia,

$$\frac{du^i}{dt} = \frac{du^i}{d\tilde{t}} \frac{d\tilde{t}}{dt}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Daí, se $\tilde{t}_1 = g(t_1)$ e $\tilde{t}_2 = g(t_2)$, temos

$$\begin{aligned} d_u(p_1, p_2) &= \min_{u(t)} \int_{t_1}^{t_2} \left[a^{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right]^{\frac{1}{2}} dt = \min_{u(t)} \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \left(a^{ij} \frac{du^i}{d\tilde{t}} \frac{du^j}{d\tilde{t}} \left(\frac{d\tilde{t}}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \min_{u(t)} \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \left(a^{ij} \frac{du^i}{d\tilde{t}} \frac{du^j}{d\tilde{t}} \right)^{\frac{1}{2}} d\tilde{t} = d_u(p_1, p_2), \end{aligned}$$

pois $u^1(\tilde{t}_1), \dots, u^n(\tilde{t}_1)$ são as coordenadas de p_1 e $u^1(\tilde{t}_2), \dots, u^n(\tilde{t}_2)$ são as coordenadas de p_2 . Portanto, está provado que a d_u é invariante por mudança de parâmetros.

Além disso, podemos provar que d_u é definida positiva, reflexiva e também que cumpre a desigualdade triangular, ou seja, (M, a_{ij}) é um espaço métrico. Com efeito,

¹ “Notice that the stochastic distance for a given diffusion equation is independent of the linear drift terms. That is, there is a large family of diffusion equations all with the same stochastic distance formula.”

- i **(Definida Positiva)** Pela definição, segue que $d_u(p_1, p_2) \geq 0$ e $d_u(p_1, p_2) = 0$ se, e somente se, $p_1 = p_2$.
- ii **(Reflexiva)** Para provar que $d_u(p_1, p_2) = d_u(p_2, p_1)$ consideramos primeiramente que $u(t_1) = p_1$ e que $u(t_2) = p_2$. Agora, fazemos uma mudança $\tilde{t} = g(t)$ de forma que $\tilde{t}_1 = g(t_2)$ e que $\tilde{t}_2 = g(t_1)$. Assim, pondo $u(\tilde{t}_2) = p_2$ e $u(\tilde{t}_1) = p_1$ e usando que d_u é invariante por mudança de parâmetros, segue o desejado.
- iii **(Desigualdade Triangular)** Considere pontos $p_1, p_2, p_3 \in M$. Note que, como a distância entre pontos é dada pela minimização dos caminhos que os ligam, pela definição de ínfimo, para todo $\varepsilon > 0$, existe um caminho $u_1(t)$ que liga p_1 e p_2 , ou seja, $u_1(t_1) = p_1$ e $u_1(t_2) = p_2$, tal que

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(a_{ij} \frac{du_1^i}{dt} \frac{du_1^j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq \min_{u(t)} \int_{t_1}^{t_2} \left(a_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt + \frac{\varepsilon}{2} = d_u(p_1, p_2) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3.9)$$

onde $u(t)$ é qualquer caminho que liga p_1 e p_2 .

Analogamente, para todo ε , existe um caminho $u_2(t)$ que liga p_2 e p_3 , ou seja, $u_2(t_2) = p_2$ e $u_2(t_3) = p_3$, tal que

$$\int_{t_2}^{t_3} \left(a_{ij} \frac{du_2^i}{dt} \frac{du_2^j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq \min_{u(t)} \int_{t_2}^{t_3} \left(a_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt + \frac{\varepsilon}{2} = d_u(p_2, p_3) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.10)$$

Perceba agora que podemos unir os caminhos u_1 e u_2 , de forma a obter um caminho u_3 que liga p_1 e p_3 , passando pelo ponto p_2 , tal que $u_3(t_1) = p_1$, $u_3(t_3) = p_3$ e ainda, $u_3(t_2) = u_1(t_2) = u_2(t_2) = p_2$. Assim,

$$d_u(p_1, p_3) = \min_{u(t)} \int_{t_1}^{t_3} \left(a_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq \int_{t_1}^{t_3} \left(a_{ij} \frac{du_3^i}{dt} \frac{du_3^j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt. \quad (3.11)$$

Por outro lado, o comprimento de u_3 , será a soma dos comprimentos de u_1 e u_2 , daí,

$$\int_{t_1}^{t_3} \left(a_{ij} \frac{du_3^i}{dt} \frac{du_3^j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(a_{ij} \frac{du_1^i}{dt} \frac{du_1^j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt + \int_{t_2}^{t_3} \left(a_{ij} \frac{du_2^i}{dt} \frac{du_2^j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Usando (3.9), (3.10) e (3.11), para todo $\varepsilon > 0$,

$$d_u(p_1, p_3) \leq d_u(p_1, p_2) + d_u(p_2, p_3) + \varepsilon.$$

Como ε é qualquer, segue que

$$d_u(p_1, p_3) \leq d_u(p_1, p_2) + d_u(p_2, p_3).$$

Além disso, é possível, porém mais complicado, mostrar que d_u também é invariante por mudança no sistema de coordenadas usado. Para isto, devemos considerar uma mudança de coordenadas do tipo (3.1), que valha em todo ponto p de uma vizinhança coordenada $U \subseteq \mathbb{R}^n$ da variedade M .

Exemplo 3.3 *Vejam um exemplo de mudança de coordenadas cartesianas para polares em \mathbb{R}^2 . Vamos também investigar como se comportam diante desta transformação, o coeficiente a_{ij} e o determinante da matriz de mudança $\left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\right)$.*

Solução. Considere o exemplo Euclidiano $a^{ij} = \delta^{ij}$. Escreva a partir de (3.2),

$$x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \theta.$$

Note que neste caso $x^1 = x$, $x^2 = y$, $\tilde{x}^1 = r$ e $\tilde{x}^2 = \theta$. Assim,

$$\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} = \frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta,$$

$$\frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} = \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta.$$

Expandindo o somatório, como $a_{ij} = \delta_{ij}$, obtemos

$$\tilde{a}_{kl} = \tilde{\delta}_{kl}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^l} \delta_{ij}(x) = \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^l} + \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^l}.$$

Dessa forma, conseguimos em termos das novas coordenadas, os coeficientes

$$\tilde{\delta}_{11} = 1, \quad \tilde{\delta}_{12} = \tilde{\delta}_{21} = 0, \quad \tilde{\delta}_{22} = r^2.$$

Vale destacar que a matriz jacobiana

$$\left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\right)_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

tem determinante igual a r e portanto é diferente de zero em todo ponto menos a origem $(x^1, x^2) = (0, 0)$. ■

Durante as próximas seções, vamos tratar de conceitos que estão relacionados a uma geometria com uma métrica riemanniana g_{ij} qualquer, quando necessário, indicaremos se estamos utilizando a métrica de difusão a_{ij} .

Ademais, consideraremos (U, g_{ij}) como uma geometria Riemanniana local, onde U é uma vizinhança coordenada de uma variedade M , na qual é possível realizar mudança no sistema de coordenadas, como discutido anteriormente.

3.3 INVARIANTES DE UMA TEORIA GEOMÉTRICA DE DIFUSÃO

Nesta seção, vamos apresentar alguns conceitos de geometria Riemanniana que serão suficientes para a discussão desejada. O objetivo principal é obter ferramentas suficientes para poder reescrever a equação de difusão backward de Kolmogorov e explicitar invariantes geométricos presentes em um processo de difusão. A partir deste momento, no texto, dada uma métrica Riemanniana (g_{ij}) , denotaremos $g = \det(g_{ij})$.

3.3.1 Operadores

Definição 3.6 Em uma geometria Riemanniana (U, g_{ij}) , definimos as coordenadas do vetor *gradiente* de uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, da forma

$$\text{Grad}^i(f) := g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.12)$$

Exemplo 3.4 No caso em que $n = 2$ e $g^{ij} = \delta^{ij}$, temos

$$\begin{aligned} \text{Grad}(f) &= (\text{Grad}^1(f), \text{Grad}^2(f)) = \left(\sum_{j=1}^n \delta^{1j} \frac{\partial f}{\partial x^j}, \sum_{j=1}^n \delta^{2j} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \\ &= \left(\delta^{11} \frac{\partial f}{\partial x^1} + \delta^{12} \frac{\partial f}{\partial x^2}, \delta^{21} \frac{\partial f}{\partial x^1} + \delta^{22} \frac{\partial f}{\partial x^2} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2} \right), \end{aligned}$$

que é o vetor gradiente no espaço Euclidiano \mathbb{R}^2 .

Definição 3.7 Considere (U, g_{ij}) uma geometria Riemanniana. Definimos o *divergente* de um campo de vetores $A(x) = A^j(x)$ como sendo o escalar

$$\text{Div}A := \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} A^j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.13)$$

Exemplo 3.5 Considere $n = 3$ e $g^{ij} = \delta^{ij}$. Daí, se $F = (F^1, F^2, F^3)$ é um campo vetorial, segue que

$$\text{Div}F = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^j} (F^j) = \frac{\partial}{\partial x^1} (F^1) + \frac{\partial}{\partial x^2} (F^2) + \frac{\partial}{\partial x^3} (F^3) = \frac{\partial F^1}{\partial x^1} + \frac{\partial F^2}{\partial x^2} + \frac{\partial F^3}{\partial x^3},$$

que é o divergente na sua forma mais usual, no caso \mathbb{R}^3 .

Com posse das definições de gradiente e divergente, podemos também generalizar o operador Laplaciano.

Definição 3.8 Em uma geometria Riemanniana (U, g_{ij}) , definimos o *Laplaciano* de uma função f , da forma

$$\Delta_g f := \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{g} g^{jl} \frac{\partial f}{\partial x^l} \right), \quad j, l = 1, \dots, n. \quad (3.14)$$

Exemplo 3.6 Consideremos novamente o caso em que $g^{jl} = \delta^{jl}$. Daí

$$\begin{aligned}\Delta_e f &= \sum_{j,l=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\delta^{jl} \frac{\partial f}{\partial x^l} \right) = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\delta^{j1} \frac{\partial f}{\partial x^1} \right) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\delta^{jn} \frac{\partial f}{\partial x^n} \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\delta^{11} \frac{\partial f}{\partial x^1} \right) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x^n} \left(\delta^{nn} \frac{\partial f}{\partial x^n} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial (x^1)^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial (x^n)^2},\end{aligned}$$

que agora nos remete ao Laplaciano usual do espaço Euclidiano \mathbb{R}^n .

De acordo com (HOFRICHTER; JOST; TRAN, 2017, p. 74), o operador Laplaciano gera um movimento denominado de **movimento Browniano**, para a métrica g_{ij} . Neste caso, a densidade de probabilidade $f(x, t, y)$ do movimento de uma partícula que assume uma posição y no tempo t e que inicia movimento em x no tempo 0, satisfaz a equação

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta_g f, \quad (3.15)$$

onde Δ_g opera na variável y .

Exemplo 3.7 No caso Euclidiano em que $g_{ij} = \delta_{ij}$, a função

$$f(s, x, t, y) = \frac{1}{(2\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}} \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right], \quad (3.16)$$

é solução da equação

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta_e f, \quad (3.17)$$

com $\Delta_e f$ sendo calculado na variável y .

Solução. Com efeito, derivando com relação a t , temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{(2\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}} \right) \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] + \frac{1}{(2\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{(2\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}} \right) \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] + \frac{1}{(2\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}} \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right) \\ &= \frac{-n\pi}{(2\pi(t-s))^{\frac{n+2}{2}}} \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] + \frac{\|x-y\|^2}{2(2\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}(t-s)^2} \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] \\ &= \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] \left(\frac{\|x-y\|^2}{2^{\frac{n+2}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} (t-s)^{\frac{n+4}{2}}} - \frac{n}{2^{\frac{n+2}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} (t-s)^{\frac{n+2}{2}}} \right)\end{aligned} \quad (3.18)$$

Perceba que, calculando $\Delta_e f$ na variável y ,

$$\Delta_e f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^1 \partial y^1} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial y^n \partial y^n}.$$

Assim , derivando primeiramente com relação a y^i ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y^i} &= \frac{1}{(2\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}} \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}} \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] \frac{\partial}{\partial y^i} \left(-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right).\end{aligned}$$

Note agora que,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y^i} \left(-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right) &= -\frac{1}{2(t-s)} \frac{\partial}{\partial y^i} (\|x-y\|^2) \\ &= -\frac{1}{2(t-s)} \frac{\partial}{\partial y^i} [(x^1 - y^1)^2 + \dots + (x^i - y^i)^2 + \dots + (x^n - y^n)^2] \\ &= -\frac{1}{2(t-s)} 2(y^i - x^i) = \frac{(x^i - y^i)}{(t-s)}.\end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = \frac{1}{(2\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}} \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] \frac{(x^i - y^i)}{(t-s)} = \frac{(x^i - y^i)}{2^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} (t-s)^{\frac{n+2}{2}}} \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right].$$

Calculando a derivada de segunda ordem, com relação a y^i ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial y^i} &= \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\frac{(x^i - y^i)}{2^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} (t-s)^{\frac{n+2}{2}}} \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] \right) \\ &\quad + \frac{(x^i - y^i)}{2^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} (t-s)^{\frac{n+2}{2}}} \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] \right) \\ &= \frac{-1}{2^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} (t-s)^{\frac{n+2}{2}}} \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] + \frac{(x^i - y^i)}{2^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} (t-s)^{\frac{n+2}{2}}} \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] \frac{(x^i - y^i)}{(t-s)} \\ &= \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] \frac{(x^i - y^i)^2}{2^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} (t-s)^{\frac{n+4}{2}}} - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} (t-s)^{\frac{n+2}{2}}} \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right].\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \Delta_e f &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^1 \partial y^1} + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^n \partial y^n} \\ &= \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] \frac{(x^1 - y^1)^2}{2^{\frac{n+2}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} (t-s)^{\frac{n+4}{2}}} - \frac{1}{2^{\frac{n+2}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} (t-s)^{\frac{n+2}{2}}} \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] \\ &\quad + \dots + \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] \frac{(x^n - y^n)^2}{2^{\frac{n+2}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} (t-s)^{\frac{n+4}{2}}} - \frac{1}{2^{\frac{n+2}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} (t-s)^{\frac{n+2}{2}}} \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] \\ &= \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] \frac{(x^1 - y^1)^2}{2^{\frac{n+2}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} (t-s)^{\frac{n+4}{2}}} + \dots + \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] \frac{(x^n - y^n)^2}{2^{\frac{n+2}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} (t-s)^{\frac{n+4}{2}}} \\ &\quad - \frac{1}{2^{\frac{n+2}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} (t-s)^{\frac{n+2}{2}}} \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] - \dots - \frac{1}{2^{\frac{n+2}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} (t-s)^{\frac{n+2}{2}}} \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] \\ &= \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] \frac{\|x-y\|^2}{2^{\frac{n+2}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} (t-s)^{\frac{n+4}{2}}} - \frac{n}{2^{\frac{n+2}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} (t-s)^{\frac{n+2}{2}}} \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] \\ &= \exp \left[-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)} \right] \left(\frac{\|x-y\|^2}{2^{\frac{n+2}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} (t-s)^{\frac{n+4}{2}}} - \frac{n}{2^{\frac{n+2}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} (t-s)^{\frac{n+2}{2}}} \right).\end{aligned} \tag{3.19}$$

Comparando (3.18) e (3.19), segue o desejado. ■

(ANTONELLI, 1997, p. 108) aborda a aleatoriedade de um processo em \mathbb{R}^n gerado por um operador elíptico G a partir do grupo de transformações que preservam distância (rotações e translações) denominado grupo de isometrias de \mathbb{R}^n . Nesse contexto, dado um operador elíptico G , podemos falar no grupo de isometrias no qual G é invariante. Se isto acontece, dizemos que o processo de difusão correspondente é espacialmente homogêneo.

Para tais difusões invariantes, nenhuma direção específica é preferida em relação a qualquer uma outra e é natural falar de ótima aleatoriedade da difusão. Assim, o movimento Browniano é o processo de difusão essencialmente único em \mathbb{R}^n , que é espacialmente homogêneo ou perfeitamente aleatório. (ANTONELLI, 1997, p. 109, tradução nossa²).

Isto é possível pois (HELGASON, 1962, p. 397) prova que dado M um espaço Riemanniano, o operador diferencial Laplace-Beltrami Δ_g , a menos de multiplicação por uma constante, é invariante em relação ao grupo de isometrias de M .

Sendo assim, além do caso Euclidiano, o movimento Browniano para a métrica g_{ij} , se constituiu como um processo espacialmente homogêneo ou perfeitamente aleatório.

3.3.2 Símbolos de Levi-Civita

Definição 3.9 *Seja (g_{ij}) uma métrica Riemanniana, definimos os **símbolos de Levi-Civita**, como sendo os elementos da forma*

$$\left\{ \begin{array}{c} k \\ ij \end{array} \right\}_g = \frac{1}{2} g^{ks} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s} \right), \quad s = 1, \dots, n. \quad (3.20)$$

Note que, sendo (g_{ij}) simétrica, também teremos simetria para os símbolos de Levi-Civita, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{c} k \\ ij \end{array} \right\}_g = \left\{ \begin{array}{c} k \\ ji \end{array} \right\}_g.$$

Vale destacar que os símbolos de Levi-Civita são funções infinitamente diferenciáveis em (U, g_{ij}) , ou seja, dado um ponto $p \in (U, g_{ij})$ os coeficientes $\left\{ \begin{array}{c} k \\ ij \end{array} \right\}_g$ dependem de forma infinitamente diferenciável das coordenadas (x^1, \dots, x^n) do ponto p . Por simplicidade, calcularemos os coeficientes em p .

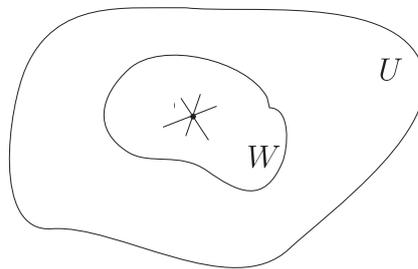
² “For such invariant diffusions, no specific direction is preferred over any other one and it is natural to speak of optimal randomness of the diffusion. Thus Brownian motion is the essentially unique diffusion process in \mathbb{R}^n which is spatially homogeneous or optimally random.”

Considere então um ponto qualquer p em (U, g_{ij}) , na vizinhança coordenada U deste ponto, existem as chamadas coordenadas normais em p , tal que

$$\left\{ \begin{array}{c} k \\ ij \end{array} \right\}_{\tilde{g}}(p) = 0.$$

Estas coordenadas são definidas considerando uma aplicação denominada de **aplicação exponencial**. Adentrar nessa questão não é o nosso objetivo, então, para mais informações, consulte a referência (LEE, 1997, p. 76-81).

Figura 8 – Coordenadas normais em p .



Fonte: Fonte própria (2020).

Denote estas novas coordenadas por $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ em W . Assim, transformando localmente $x \rightarrow \tilde{x}$ temos

$$\left\{ \begin{array}{c} k \\ ij \end{array} \right\}_g \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} k \\ ij \end{array} \right\}_{\tilde{g}} \text{ e } \left\{ \begin{array}{c} k \\ ij \end{array} \right\}_{\tilde{g}}(p) = 0.$$

Considerando agora uma mudança de coordenadas do tipo $\tilde{x}^i = g^i(x^1, \dots, x^n)$, podemos escrever os símbolos de Levi-Civita do novo sistema de coordenadas em termos dos símbolos do sistema original, através da **lei de transformação para os símbolos de Levi-Civita**

$$\left\{ \begin{array}{c} k \\ ij \end{array} \right\}_{\tilde{g}} = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^j} \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \gamma \end{array} \right\}_g + \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^j}, \quad (3.21)$$

onde os símbolos com letras gregas são do sistema x^i e os símbolos com as letras i, j, k são do novo sistema \tilde{x}^i .

Esta lei ainda pode ser reescrita, de modo a isolar o termo de derivada de segunda ordem, multiplicando a equação (3.21) por $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^k}$,

$$\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^j} = \left\{ \begin{array}{c} k \\ ij \end{array} \right\}_{\tilde{g}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^k} - \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^j} \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \beta \gamma \end{array} \right\}_g, \quad (3.22)$$

ou ainda, invertendo x por \tilde{x} , ou seja, fazendo $x^i = h^i(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$,

$$\frac{\partial^2 \tilde{x}^\lambda}{\partial x^i \partial x^j} = \left\{ \begin{array}{c} k \\ ij \end{array} \right\}_g \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^k} - \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^\gamma}{\partial x^j} \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \beta \gamma \end{array} \right\}_g. \quad (3.23)$$

Note que, pela equação (3.21), podemos ver que o segundo termo do lado direito, impede que os símbolos de Levi-Civita constituam um tensor de ordem $(1, 2)$. Outra justificativa para isto, segue do fato de que qualquer tensor de ordem (r, s) que se anula em algum sistema de coordenadas, deve se anular em qualquer outro sistema. Logo, os símbolos de Levi-Civita não são tensores, pois, $\left\{ \begin{array}{c} k \\ ij \end{array} \right\}_g = 0$ para o espaço Euclidiano com $n = 2$, entretanto, fazendo uma mudança para coordenadas polares e usando (3.21), segue que

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 22 \end{array} \right\}_g = -r, \quad \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 12 \end{array} \right\}_g \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 21 \end{array} \right\}_g = \frac{1}{r},$$

e que todos os outros símbolos se anulam, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 11 \end{array} \right\}_g = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 12 \end{array} \right\}_g = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 21 \end{array} \right\}_g = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 11 \end{array} \right\}_g = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 22 \end{array} \right\}_g = 0.$$

Afirmção 3.1 Para uma geometria com métrica (g_{ij}) , vale

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ rn \end{array} \right\}_g = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln g}{\partial x^r} = \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^r}, \quad n = 1, \dots, n.$$

Demonstração. Pela definição dos símbolos de Levi-Civita (3.20),

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ rn \end{array} \right\}_g = \frac{1}{2} g^{ts} \frac{\partial g_{ts}}{\partial x^r}. \quad (3.24)$$

Agora, relembre alguns fatos sobre determinantes. A saber, o (i, j) -cofator de (g_{rs}) é definido como $(-1)^{i+j} M_{ij}$, em que M_{ij} é o (i, j) menor de (g_{rs}) , ou seja, o determinante da submatriz de (g_{rs}) obtida retirando-se a i -ésima linha e a j -ésima coluna desta matriz. Assim, temos a famosa expansão de Laplace para $\det(g_{rs})$:

$$\begin{aligned} \det(g_{rs}) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i_0+j} g_{i_0 j} M_{i_0 j} \quad (\text{ao longo da linha } i_0) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j_0} g_{i j_0} M_{i j_0} \quad (\text{ao longo da coluna } j_0). \end{aligned}$$

Além disso

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ij}} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad (3.25)$$

Para ver isso, considere g como uma função dos n^2 termos de (g_{ij}) , assim, a partir da j_0 -ésima coluna (por exemplo), temos a expansão:

$$g = (-1)^{1+j_0} g_{1j_0} M_{1j_0} + (-1)^{2+j_0} g_{2j_0} M_{2j_0} + \cdots + (-1)^{n+j_0} g_{nj_0} M_{nj_0}.$$

Relembre agora que em termos da matriz inversa,

$$(g_{rs})^{-1} \equiv g^{rs} \equiv \left(\frac{1}{g} (-1)^{i+j} M_{ij} \right). \quad (3.26)$$

Assim, a partir de (3.25) e (3.26) temos:

$$g \cdot g^{rs} = \frac{\partial g}{\partial g_{rs}}.$$

Reescrevendo isto,

$$\frac{\partial \ln g}{\partial g_{ij}} = g^{ij}. \quad (3.27)$$

Pela regra da cadeia e por (3.27), vem

$$\frac{\partial}{\partial x^r} (\ln g) = \left(\frac{\partial \ln g}{\partial g_{lm}} \right) \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^r} = g^{lm} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^r}. \quad (3.28)$$

Portanto, por (3.24) e (3.28), temos

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ rn \end{array} \right\}_g = \frac{1}{2} g^{ts} \frac{\partial g^{ts}}{\partial x^r} = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln g}{\partial x^r} = \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^r}.$$

■

Afirmção 3.2 Com relação aos símbolos de Levi-Civita, vale a expressão

$$\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^t} + \left\{ \begin{array}{c} t \\ lt \end{array} \right\}_g g^{kl} = -g^{ij} \left\{ \begin{array}{c} k \\ ij \end{array} \right\}_g. \quad (3.29)$$

Demonstração. Pela equação (3.28), temos

$$\frac{\partial \ln g}{\partial x^t} = g^{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^t}. \quad (3.30)$$

Daí,

$$\begin{aligned} g^{ij} \left\{ \begin{array}{c} k \\ ij \end{array} \right\}_g &= \frac{1}{2} g^{kl} \left(g^{ij} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + g^{ij} \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{kl} g^{ij} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} \right) - \frac{1}{2} g^{kl} g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}. \end{aligned}$$

Pelo mesmo motivo de (3.24), segue que

$$g^{ij} \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_g = g^{kl} g^{ij} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{1}{2} g^{kl} g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}.$$

Usando a regra da cadeia para derivada parcial em j de $g^{kl} g_{il}$, temos

$$g^{kl} g^{ij} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} (g^{kl} g_{il}) - g^{ij} g_{il} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^j}. \quad (3.31)$$

Assim, por (3.30) e (3.31), teremos

$$g^{ij} \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_g = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} (g^{kl} g_{il}) - g^{ij} g_{il} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^j} - \frac{1}{2} g^{kl} \frac{\partial \ln g}{\partial x^l}.$$

Perceba agora que $g^{kl} g_{il} = \delta_i^k$ e $g^{ij} g_{il} = \delta_l^j$, e usando a Afirmação (3.1), segue que

$$g^{ij} \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_g = -\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^l} - g^{kl} \left\{ \begin{matrix} t \\ lt \end{matrix} \right\}_g.$$

■

Afirmação 3.3 Podemos escrever uma nova equação do Laplaciano,

$$\Delta_g f = g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - g^{ij} \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_g \frac{\partial f}{\partial x^k}. \quad (3.32)$$

Demonstração. Com efeito,

$$\Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{g} g^{jl} \frac{\partial f}{\partial x^l} \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^j} g^{jl} \frac{\partial f}{\partial x^l} + \frac{\partial g^{jl}}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^l} + g^{jl} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^l}.$$

Usando agora a Afirmação (3.1), temos

$$\begin{aligned} \Delta_g f &= \left\{ \begin{matrix} t \\ jt \end{matrix} \right\}_g g^{jl} \frac{\partial f}{\partial x^l} + \frac{\partial g^{jl}}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^l} + g^{jl} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^l} \\ &= g^{jl} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial f}{\partial x^l} \left(\frac{\partial g^{jl}}{\partial x^j} + \left\{ \begin{matrix} t \\ jt \end{matrix} \right\}_g g^{jl} \right) \\ &= g^{jl} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial f}{\partial x^l} \left(\frac{\partial g^{lj}}{\partial x^j} + g^{lj} \left\{ \begin{matrix} t \\ jt \end{matrix} \right\}_g \right) \end{aligned}$$

Fazendo $k = l$, $j = h$ e $l = j$ na equação (3.29) da Afirmação (3.2),

$$\Delta_g f = g^{jl} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^l} + g^{ih} \left\{ \begin{matrix} l \\ ih \end{matrix} \right\}_g \frac{\partial f}{\partial x^l}.$$

Note que os índices j, l, i, h se repetem em cada parcela, portanto, temos um somatório de 1 a n em cada índice, daí, podemos realizar uma troca de índices, e assim, segue a equação (3.32).

■

3.3.3 Forma Invariante da equação backward de Kolmogorov

Para concluir esta seção, considere a geometria com tensor métrico de difusão a_{ij} . Podemos reescrever a equação backward de Kolmogorov para a função de transição de um processo de Markov $f(s, x, t, y)$. Com efeito, usando as equações (2.10) e (3.32), temos

$$\begin{aligned} -\frac{\partial f}{\partial s} &= b^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{1}{2} a^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{1}{2} a^{kl} \left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\}_g \frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{1}{2} a^{ij} \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_g \frac{\partial f}{\partial x^k} \\ &= \frac{1}{2} \left(a^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - a^{ij} \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_g \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) + b^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{1}{2} a^{kl} \left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\}_g \frac{\partial f}{\partial x^i} \\ &\qquad\qquad\qquad \frac{1}{2} \Delta_a f + (b^i + ch^i) \frac{\partial f}{\partial x^i} \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde $ch^i = \frac{1}{2} a^{kl} \left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\}_g$ é chamado o “campo” de Christoffel, e não é um vetor contravariante.

A equação (3.33) é chamada de **forma invariante da equação backward de Kolmogorov** e recebe este nome pois explicita invariantes geométricos presentes em um processo de difusão. O teorema a seguir é peça fundamental para a constatação deste fato.

Teorema 3.1 *O termo $(b^i + ch^i)$ transforma sob mudança de coordenadas como vetor contravariante.*

Demonstração. Usando a definição do campo de Christoffel e as transformações (3.4) e (3.21), temos

$$\begin{aligned} \tilde{c}h^i &= \frac{1}{2} \tilde{a}^{kl} \left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(a^{st} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \right) \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^l} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \gamma \end{matrix} \right\}_g + \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial \tilde{x}^k \partial \tilde{x}^l} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(a^{st} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \right) \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^l} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \gamma \end{matrix} \right\}_g \right) + \left(a^{st} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \right) \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial \tilde{x}^k \partial \tilde{x}^l} \right) \right]. \end{aligned}$$

Trocando β, γ por s, t ,

$$\begin{aligned} \tilde{c}h^i &= \frac{1}{2} \left[\left(a^{st} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \right) \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^s}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial x^t}{\partial \tilde{x}^l} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ st \end{matrix} \right\}_g \right) + \left(a^{st} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \right) \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^t} \frac{\partial^2 x^t}{\partial \tilde{x}^k \partial \tilde{x}^l} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[a^{st} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^s}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial x^t}{\partial \tilde{x}^l} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ st \end{matrix} \right\}_g + a^{st} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^t} \frac{\partial^2 x^t}{\partial \tilde{x}^k \partial \tilde{x}^l} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[a^{st} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^\alpha} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ st \end{matrix} \right\}_g + a^{st} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^t} \frac{\partial^2 x^t}{\partial \tilde{x}^k \partial \tilde{x}^l} \right]. \end{aligned}$$

Trocando α por j ,

$$\tilde{c}h^i = \frac{1}{2} \left[a^{st} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \left\{ \begin{matrix} j \\ st \end{matrix} \right\}_g + a^{st} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^t} \frac{\partial^2 x^t}{\partial \tilde{x}^k \partial \tilde{x}^l} \right].$$

Dessa forma, usando (3.5),

$$\begin{aligned} \tilde{b}^i + \tilde{c}h^i &= \frac{1}{2} a^{st} \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^s \partial x^t} + b^j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} + \frac{1}{2} a^{st} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \left\{ \begin{matrix} j \\ st \end{matrix} \right\}_g + \frac{1}{2} a^{st} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^t} \frac{\partial^2 x^t}{\partial \tilde{x}^k \partial \tilde{x}^l} \\ &= b^j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \left(\frac{1}{2} a^{st} \left\{ \begin{matrix} j \\ st \end{matrix} \right\}_g \right) + \frac{1}{2} a^{st} \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^s \partial x^t} + \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^t} \frac{\partial^2 x^t}{\partial \tilde{x}^k \partial \tilde{x}^l} \right) \\ &= b^j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} ch^j + \frac{1}{2} a^{st} \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^s \partial x^t} + \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^t} \frac{\partial^2 x^t}{\partial \tilde{x}^k \partial \tilde{x}^l} \right) \end{aligned}$$

Logo, temos

$$\tilde{b}^i + \tilde{c}h^i = (b^j + ch^j) \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} + \frac{1}{2} a^{st} \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^s \partial x^t} + \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^t} \frac{\partial^2 x^t}{\partial \tilde{x}^k \partial \tilde{x}^l} \right). \quad (3.34)$$

Agora vamos calcular o valor do termo,

$$\frac{1}{2} a^{st} \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^s \partial x^t} + \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^t} \frac{\partial^2 x^t}{\partial \tilde{x}^k \partial \tilde{x}^l} \right).$$

Usando (3.23) e (3.22) no primeiro e no segundo termo de segunda ordem,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}a^{st} \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^s \partial x^t} + \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^t} \frac{\partial^2 x^t}{\partial \tilde{x}^k \partial \tilde{x}^l} \right) \\
&= \frac{1}{2}a^{st} \left[\left\{ \begin{matrix} u \\ st \end{matrix} \right\}_g \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^u} - \frac{\partial \tilde{x}^v}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^w}{\partial x^t} \left\{ \begin{matrix} i \\ vw \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} \right] \\
&+ \frac{1}{2}a^{st} \left[\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^t} \left(\left\{ \begin{matrix} u \\ kl \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} \frac{\partial x^t}{\partial \tilde{x}^u} - \frac{\partial x^v}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial x^w}{\partial \tilde{x}^l} \left\{ \begin{matrix} t \\ vw \end{matrix} \right\}_g \right) \right] \\
&= \frac{1}{2}a^{st} \left[\left\{ \begin{matrix} u \\ st \end{matrix} \right\}_g \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^u} \right] - \frac{1}{2}a^{st} \left[\frac{\partial \tilde{x}^v}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^w}{\partial x^t} \left\{ \begin{matrix} i \\ vw \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} \right] \\
&+ \frac{1}{2}a^{st} \left[\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^t} \left\{ \begin{matrix} u \\ kl \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} \frac{\partial x^t}{\partial \tilde{x}^u} \right] - \frac{1}{2}a^{st} \left[\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^t} \frac{\partial x^v}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial x^w}{\partial \tilde{x}^l} \left\{ \begin{matrix} t \\ vw \end{matrix} \right\}_g \right]
\end{aligned}$$

Nesta última equação, vamos trabalhar com o termo do lado direito. Do primeiro ao quarto termo, faça respectivamente, $u = t$, $v, w = k, l$, $u = l$ e $v, w = s, t$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}a^{st} \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^s \partial x^t} + \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^t} \frac{\partial^2 x^t}{\partial \tilde{x}^k \partial \tilde{x}^l} \right) \\
&= \frac{1}{2}a^{st} \left[\left\{ \begin{matrix} t \\ st \end{matrix} \right\}_g \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^t} \right] - \frac{1}{2}a^{st} \left[\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} \right] \\
&+ \frac{1}{2}a^{st} \left[\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^t} \left\{ \begin{matrix} l \\ kl \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} \frac{\partial x^t}{\partial \tilde{x}^l} \right] - \frac{1}{2}a^{st} \left[\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^t} \frac{\partial x^s}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial x^t}{\partial \tilde{x}^l} \left\{ \begin{matrix} t \\ st \end{matrix} \right\}_g \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[a^{st} \left\{ \begin{matrix} t \\ st \end{matrix} \right\}_g \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^t} \right] - \frac{1}{2}a^{st} \left[\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} \right] \\
&+ \frac{1}{2}a^{st} \left[\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \left\{ \begin{matrix} l \\ kl \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} \right] - \frac{1}{2} \left[a^{st} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^t} \left\{ \begin{matrix} t \\ st \end{matrix} \right\}_g \right].
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{1}{2}a^{st} \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^s \partial x^t} + \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^t} \frac{\partial^2 x^t}{\partial \tilde{x}^k \partial \tilde{x}^l} \right) = \frac{1}{2}a^{st} \left[\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^t} \left\{ \begin{matrix} l \\ kl \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} - \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} \right) \right].$$

Agora, substituindo em (3.34),

$$\tilde{b}^i + \tilde{c}^i = (b^j + ch^j) \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} + \frac{1}{2}a^{st} \left[\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^t} \left\{ \begin{matrix} l \\ kl \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} - \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} \right) \right],$$

ou ainda,

$$(b^j + ch^j) \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} = \tilde{b}^i + \tilde{c}h^i - \frac{1}{2} a^{st} \left[\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^t} \left\{ \begin{matrix} l \\ kl \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} - \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} \right) \right]. \quad (3.35)$$

Usando a regra da cadeia e a equação (3.35), vamos reescrever o termo $(b^i + ch^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}$,

$$\begin{aligned} (b^j + ch^j) \frac{\partial f}{\partial x^j} &= (b^j + ch^j) \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} = \left((b^j + ch^j) \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i} \\ &= (\tilde{b}^i + \tilde{c}h^i) \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i} - \frac{1}{2} a^{st} \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i} \left[\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^t} \left\{ \begin{matrix} l \\ kl \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} - \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Agora, na última equação, no segundo termo da direita, troque i por l . Obtemos,

$$(b^j + ch^j) \frac{\partial f}{\partial x^j} = (\tilde{b}^i + \tilde{c}h^i) \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i} - \frac{1}{2} a^{st} \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^l} \left[\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \left(\frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \left\{ \begin{matrix} l \\ kl \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} - \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^t} \left\{ \begin{matrix} l \\ kl \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} \right) \right]. \quad (3.36)$$

Assim, o último termo da direita de (3.36) se anula e está provado o teorema. ■

4 MAIS ALGUMAS ABORDAGENS

4.1 GEOMETRIA EM COORDENADAS LOCAIS

Em uma geometria mais familiar, como por exemplo, o espaço Euclidiano de três dimensões, facilmente podemos realizar adição e subtração entre vetores, como também, transportá-los paralelamente, além de discutir o que caracteriza a menor distância entre dois pontos. Verificar estas propriedades em uma geometria Riemanniana geral é parte do que veremos nesta seção. Apresentaremos ainda alguns conceitos que caracterizam completamente um espaço Riemanniano como conexão e curvatura.

4.1.1 Derivada Covariante

Definição 4.1 Definimos a *derivada covariante* de um vetor contravariante V^r , da forma

$$\frac{DV^r}{Dx^n} := \frac{\partial V^r}{\partial x^n} + \left\{ \begin{array}{c} r \\ mn \end{array} \right\}_g V^m. \quad (4.1)$$

Se $g_{ij} = \delta_{ij}$, como os símbolos de Levi-Civita dependem das derivadas da métrica, eles se anulam e a derivada covariante é apenas $\frac{\partial V^r}{\partial x^n}$, com (x^1, \dots, x^n) sendo as coordenadas cartesianas.

Afirmção 4.1 A derivada covariante de um vetor contravariante transforma sob mudança de coordenadas como tensor misto de ordem 2.

Demonstração. Com efeito, note que

$$\frac{\partial \tilde{V}^l}{\partial \tilde{x}^n} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^n} \left(\frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^j} V^j \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^j} V^j \right) \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^n} = \frac{\partial V^j}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^n} + V^j \frac{\partial^2 \tilde{x}^l}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^n}.$$

Usando a lei de transformação (3.23), podemos reescrever o termo de segunda derivada, daí

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}^l}{\partial \tilde{x}^n} &= \frac{\partial V^j}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^n} + V^j \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^n} \left(\left\{ \begin{array}{c} k \\ ij \end{array} \right\}_g \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^k} - \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^\gamma}{\partial x^j} \left\{ \begin{array}{c} l \\ \beta \gamma \end{array} \right\}_{\tilde{g}} \right) \\ &= \frac{\partial V^j}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^n} + V^j \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^n} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^k} \left\{ \begin{array}{c} k \\ ij \end{array} \right\}_g - V^j \frac{\partial \tilde{x}^\gamma}{\partial x^j} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^n} \left\{ \begin{array}{c} l \\ \beta \gamma \end{array} \right\}_{\tilde{g}}. \end{aligned}$$

Agora, na primeira parcela da última equação faça $j = k$, e além disso, perceba que

$$V^j \frac{\partial \tilde{x}^\gamma}{\partial x^j} = \tilde{V}^\gamma \text{ e } \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^n} = \delta_n^\beta.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}^l}{\partial \tilde{x}^n} &= \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^n} \frac{\partial V^k}{\partial x^i} + V^j \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^n} \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_g - \tilde{V}^\gamma \delta_n^\beta \left\{ \begin{matrix} l \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} \\ &= \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^n} \left(\frac{\partial V^k}{\partial x^i} + V^j \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_g \right) - \tilde{V}^\gamma \left\{ \begin{matrix} l \\ n\gamma \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} \\ &= \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^n} \frac{DV^k}{Dx^i} - \tilde{V}^\gamma \left\{ \begin{matrix} l \\ n\gamma \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{D\tilde{V}^l}{D\tilde{x}^n} = \frac{\partial \tilde{V}^l}{\partial \tilde{x}^n} + \tilde{V}^\gamma \left\{ \begin{matrix} l \\ n\gamma \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} = \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^n} \frac{DV^k}{Dx^i}.$$

■

O termo que contém os símbolos de Levi-Civita na definição da derivada covariante (4.1), serve como uma espécie de “termo corretivo” para que tal derivada se comporte como um tensor. Podemos generalizar a derivada covariante para um tensor de ordem maior, para isto, basta acrescentar um termo com símbolos de Levi-Civita conforme aumentamos a ordem do tensor. Vamos então apresentar a lei de diferenciação covariante de um tensor misto de ordem maior. Considere, por exemplo, um tensor B_{ij}^{lmk} contravariante de ordem 3 e covariante de ordem 2, o modelo para a sua derivada covariante será

$$\begin{aligned} \frac{DB_{ij}^{lmk}}{Dx^r} &= \frac{\partial B_{ij}^{lmk}}{\partial x^r} + \left\{ \begin{matrix} l \\ pr \end{matrix} \right\}_g B_{ij}^{pmk} + \left\{ \begin{matrix} m \\ pr \end{matrix} \right\}_g B_{ij}^{lpm} \\ &+ \left\{ \begin{matrix} k \\ pr \end{matrix} \right\}_g B_{ij}^{lmp} - \left\{ \begin{matrix} s \\ ir \end{matrix} \right\}_g B_{sj}^{lmk} - \left\{ \begin{matrix} s \\ jr \end{matrix} \right\}_g B_{is}^{lmk}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Um fato importante é que a derivada covariante satisfaz a regra do produto

$$\frac{D}{Dx^k} (P_t^{rs} Q_{mp}) = \frac{DP_t^{rs}}{Dx^k} Q_{mp} + \frac{DQ_{mp}}{Dx^k} P_t^{rs}. \quad (4.3)$$

A justificativa disto, deve-se simplesmente ao fato de que podemos usar as coordenadas normais em qualquer ponto p , assim todos os símbolos de Levi-Civita se anulam em p . Reduzimos o argumento para a regra do produto para diferenciação ordinária, que como sabemos, é verdadeira.

Afirmção 4.2 *A derivada covariante do tensor métrico g_{ij} e de seu inverso g^{ij} em relação a k é nula, estas condições são conhecidas como **condições de Ricci**.*

Demonstração. Vamos mostrar primeiramente para g_{ij} , note então que a partir de (3.20),

$$g_{ks} \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_g = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s} \right). \quad (4.4)$$

Agora, por (4.2),

$$\frac{Dg_{ij}}{Dx^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \left\{ \begin{matrix} p \\ ik \end{matrix} \right\}_g g_{pj} - \left\{ \begin{matrix} p \\ jk \end{matrix} \right\}_g g_{ip}. \quad (4.5)$$

Fazendo $k = p$, $s = j$ e $j = k$ e depois $k = p$, $s = i$ e $i = k$ em (4.4), temos respectivamente

$$\left\{ \begin{matrix} p \\ ik \end{matrix} \right\}_g g_{pj} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right) \text{ e } \left\{ \begin{matrix} p \\ jk \end{matrix} \right\}_g g_{ip} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \right). \quad (4.6)$$

Substituindo em (4.5),

$$\frac{Dg_{ij}}{Dx^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \right) = 0.$$

Agora, mostraremos a condição para g^{ij} . Perceba que $\delta_i^j = g_{ip}g^{pj}$ e que $\frac{D\delta_i^j}{Dx^k} = 0$. Daí, usando a regra do produto para a derivada covariante,

$$0 = \frac{D\delta_i^j}{Dx^k} = \frac{Dg_{ip}g^{pj}}{Dx^k} = \frac{Dg_{ip}}{Dx^k} g^{pj} + g_{ip} \frac{Dg^{pj}}{Dx^k} = g_{ip} \frac{Dg^{pj}}{Dx^k},$$

usando a primeira condição.

Dessa forma,

$$0 = g^{li} g_{ip} \frac{Dg^{pj}}{Dx^k} = \delta_p^l \frac{Dg^{pj}}{Dx^k} = \frac{Dg^{lj}}{Dx^k}.$$

■

4.1.2 Geodésicas

Primeiramente, vamos esclarecer algumas ideias. Trataremos uma curva em uma geometria Riemanniana, como uma função $\gamma: I \rightarrow (U, g_{ij})$ definida em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ cujos pontos são dados ou descritos por $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ em U para $t \in I$, posições que são identificadas na geometria a partir de uma relação 1-1. Se uma curva γ passa por um ponto $p \in (U, g_{ij})$, diremos que $\gamma(t_0) = p$, cuja posição é dada ou descrita por $x(t_0) = (x^1(t_0), \dots, x^n(t_0))$ em U para um determinado $t_0 \in I$.

Um **vetor tangente em** $p \in (U, g_{ij})$ é um vetor tangente a alguma curva γ que passa por p em um determinado tempo t_0 . O conjunto de vetores tangentes em p forma um espaço vetorial de dimensão n que é isomorfo a \mathbb{R}^n e será denominado de **espaço tangente em** p .

Os vetores velocidade $\gamma'(t)$ ao longo de uma curva γ descrita por $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ é visto em coordenadas como

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx^1}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt} \right),$$

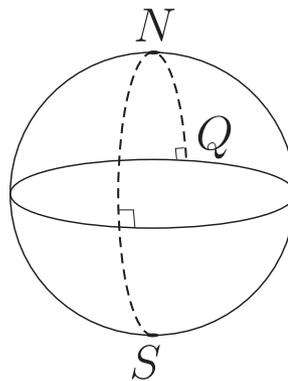
ele é um campo de vetores tangentes à γ e será denotado simplesmente por $\frac{dx^k}{dt}$.

Definição 4.2 Em uma geometria riemanniana (U, g_{ij}) , definimos as **geodésicas** como curvas $\gamma(s)$ descritas por $x(s) = (x^1(s), \dots, x^n(s))$, que minimizam distância entre pontos suficientemente próximos.

Exemplo 4.1 As geodésicas do plano são as retas e as geodésicas da esfera \mathbb{S}^2 são os grandes círculos, ou partes deles.

Refletindo um pouco sobre o que significa o termo “suficientemente próximos” visto anteriormente, imagine um arco de grande círculo sobre a esfera como mostrado na Figura 9, que vai do pólo sul em direção ao pólo norte, descendo para o equador, no outro lado da esfera. Isto é uma geodésica, mas ela não é o caminho mais curto de S para Q . Neste exemplo, o termo “suficientemente próximos” indica quaisquer dois pontos distintos contidos em alguma das regiões hemisféricas da esfera. A distância mais curta de S para Q , neste caso, seria a “geodésica complementar” que conecta estes dois pontos e que também pertence a mesma região hemisférica.

Figura 9 – Geodésica na esfera.



Fonte: Fonte própria (2020).

A partir de agora, nesta subseção, nosso objetivo é provar que as curvas que minimizam distância de pontos suficientemente próximos em uma geometria (U, g_{ij}) , satisfazem o sistema de equações

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_g \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0, \quad (4.7)$$

em que $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

As equações (4.7) são conhecidas como **equações das geodésicas**.

Para cumprir com nosso objetivo, vamos usar algumas técnicas de cálculo variacional. Por um momento, adotaremos a notação $\frac{dx^i}{dt} = \dot{x}^i(t)$.

Em uma geometria (U, g_{ij}) , a métrica Riemanniana g_{ij} tem o papel de associar a cada espaço tangente, uma estrutura de produto interno, e portanto, uma norma entre os vetores tangentes. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 4.3 Definimos o **comprimento de uma curva diferenciável** γ , dada por $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, definida em um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ e que liga dois pontos $p_1, p_2 \in (U, g_{ij})$, como sendo o valor

$$L(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}(t)\| dt. \quad (4.8)$$

Neste caso, L será denominado de **funcional de comprimento**.

Esta noção de comprimento pode ser estendida para curvas que sejam diferenciáveis por partes, basta considerar de forma conveniente uma partição $t_1 = s_0 < s_1 < \dots < s_{n-1} < s_n = t_2$ do intervalo $[t_1, t_2]$, e neste caso, teremos

$$L(\gamma) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Vale destacar que neste sentido, (U, g_{ij}) se comporta como um espaço métrico, onde a distância entre dois pontos p_1, p_2 é dada pela minimização do comprimento das curvas que os ligam. Desenvolvimento semelhante é feito na seção 3.2 para a distância estocástica. Também é importante lembrar que este comprimento pode ser obtido de forma global, ou seja, para curvas que ligam dois pontos quaisquer de uma variedade Riemanniana. Todavia, em um sistema de coordenadas locais, a equação (4.8) pode ser escrita da forma,

$$L(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} dt.$$

Com o intuito de usar teorias de cálculo variacional, o funcional de comprimento, pode ser escrito em termos da função Lagrangiana,

$$\mathcal{L}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = \mathcal{L}(x^1(t), \dots, x^n(t), \dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t)) = \sqrt{g_{ij}(x^1(t), \dots, x^n(t)) \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t)}.$$

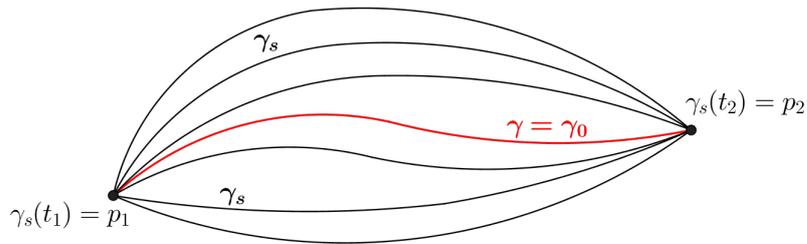
Definição 4.4 Considere $\{\gamma_s\}$ uma família de curvas em (U, g_{ij}) . Se para cada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ a curva $\gamma_s(t)$ é definida em um intervalo $[t_1, t_2]$ e se a aplicação

$$\begin{aligned} (-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_1, t_2] &\longrightarrow (U, g_{ij}) \\ (s, t) &\longmapsto \gamma_s(t) \end{aligned}$$

é diferenciável, dizemos que $\{\gamma_s\}$ é uma **família diferenciável de curvas**. Quando $\gamma_s(t_1) = p_1$ e $\gamma_s(t_2) = p_2$, para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, dizemos que a família $\{\gamma_s\}$ tem **extremidades fixas** em p_1 e p_2 .

Quando $\gamma_0 = \gamma$, trataremos γ_s como sendo uma variação da curva γ . Note também que, se estamos interessados em tratar do comprimento de curvas, podemos supor, sem perda de generalidade, que todas as curvas da família estão definidas no mesmo intervalo $[t_1, t_2]$, uma vez que o comprimento não sofre alteração por mudanças no parâmetro.

Figura 10 – Família de extremidades fixas em p_1 e p_2 .



Fonte: Fonte própria (2020).

Definição 4.5 Dizemos que γ é **extremo** do funcional L quando para toda família diferenciável $\{\gamma_s\}$ de curvas $\gamma_s : [t_1, t_2] \rightarrow (U, g_{ij})$ com extremidades fixas, tal que $\gamma_0 = \gamma$, vale

$$\left. \frac{dL(\gamma_s)}{ds} \right|_{s=0} = 0.$$

Afirmção 4.3 Se uma curva minimiza distância em (U, g_{ij}) , então ela é um extremo do funcional de comprimento L .

Demonstração. Com efeito, considere dois pontos $p_1, p_2 \in (U, g_{ij})$. Suponha que uma determinada curva γ minimiza o comprimento de arco entre estes dois pontos. Considere variações $\{\gamma_s\}$ de $\gamma = \gamma_0$, com $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Note que de imediato, teremos

$$L(\gamma_s) \geq L(\gamma_0).$$

Agora, construa uma função real,

$$\begin{aligned} h : (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto L(\gamma_s). \end{aligned}$$

Nessas condições,

$$h(s) = L(\gamma_s) \geq L(\gamma_0) = h(0).$$

Daí, segue que $s = 0$ é um ponto crítico da função h , ou seja, $h'(0) = 0$. Sendo assim,

$$\left. \frac{dL(\gamma_s)}{ds} \right|_{s=0} = h'(0) = 0.$$

Portanto, $\gamma = \gamma_0$ é um extremo do funcional L . ■

Proposição 4.1 *Se uma curva γ que liga dois pontos p_1 e p_2 é extremo do funcional L , escrito da forma*

$$L(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt,$$

então são satisfeitas as equações de Euler-Lagrange

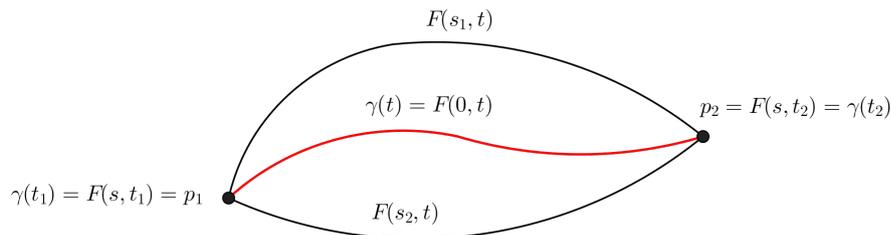
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.9)$$

Demonstração. Suponha que $\gamma: [t_1, t_2] \rightarrow (U, g_{ij})$ é uma curva dada por $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ que é extremo do funcional l . Agora, considere uma curva diferenciável arbitrária $\beta: [t_1, t_2] \rightarrow (U, g_{ij})$ descrita por $y(t) = (y^1(t), \dots, y^n(t))$ e que obedece a condição $y(t_1) = y(t_2) = 0$. Dessa forma, obtemos uma variação da curva γ ,

$$F_s(t) = F(s, t) = \gamma(t) + s\beta(t),$$

que é dada por $z(t) = x(t) + sy(t)$, para $s \in \mathbb{R}$.

Figura 11 – Variação da curva γ .



Fonte: Fonte própria (2020).

Agora, considere a função real diferenciável $f: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(s) = L(F_s) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(F_s, \dot{F}_s) dt.$$

Como $\gamma = F_0$ é extremo de L , segue que 0 é extremo de f , de modo que,

$$f'(0) = \left. \frac{dL(F_s)}{ds} \right|_{s=0} = 0.$$

Agora, derivando f sob o sinal de integração,

$$f'(s) = \frac{dL(F_s)}{ds} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathcal{L}(F_s, \dot{F}_s)}{ds} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathcal{L}(z^1(t), \dots, z^n(t), \dot{z}^1(t), \dots, \dot{z}^n(t))}{ds} dt.$$

Usando a regra da cadeia,

$$\frac{d\mathcal{L}(z^1(t), \dots, z^n(t), \dot{z}^1(t), \dots, \dot{z}^n(t))}{ds} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i} \frac{dz^i}{ds} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}^i} \frac{d\dot{z}^i}{ds}.$$

Note ainda que

$$\frac{dz^i}{ds} = \frac{d(x^i + sy^i)}{ds} = y^i \quad \text{e} \quad \frac{dz^i}{ds} = \frac{d(\dot{x}^i + s\dot{y}^i)}{ds} = \dot{y}^i.$$

Daí,

$$f'(s) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i} y^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}^i} \dot{y}^i dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i} y^i dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}^i} \dot{y}^i dt.$$

Usando integração por partes,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}^i} \dot{y}^i dt = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}^i} y^i \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}^i} \right) y^i dt.$$

Porém, $y(t_1) = y(t_2) = 0$. Dessa forma,

$$f'(s) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i} y^i - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}^i} \right) y^i dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}^i} \right) \right] y^i dt.$$

Perceba agora que quando $s = 0$, temos $z^i = x^i$ e $f'(0) = 0$, daí,

$$f'(0) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) \right] y^i dt = 0.$$

Como y^i não é identicamente nula, temos as equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) = 0. \quad (4.10)$$

■

Diante do que foi apresentado até o momento, concluímos que se uma curva γ minimiza distância para pontos suficientemente próximos, então ela obedece as equações de Euler-Lagrange. Sendo assim, a partir de (4.9), vamos obter equações para tais curvas minimizantes.

Com efeito, vamos calcular algumas derivadas separadamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^k} &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} \left(\sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} \right) = \frac{1}{2\sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} (g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j) \\ &= \frac{1}{2\mathcal{L}} \left[\dot{x}^j \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} (g_{1j} \dot{x}^1 + \dots + g_{kj} \dot{x}^k + \dots + g_{nj} \dot{x}^n) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\mathcal{L}} \left[\dot{x}^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} (g_{i1} \dot{x}^1 + \dots + g_{ik} \dot{x}^k + \dots + g_{in} \dot{x}^n) \right] \\ &= \frac{1}{2\mathcal{L}} [\dot{x}^j g_{kj} + \dot{x}^i g_{ik}] = \frac{1}{2\mathcal{L}} [2(\dot{x}^i g_{ik})] = \frac{1}{\mathcal{L}} (\dot{x}^i g_{ik}), \end{aligned}$$

e ainda,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} \right) = \frac{1}{2\mathcal{L}} \frac{\partial}{\partial x^k} (g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j) = \frac{1}{2\mathcal{L}} \dot{x}^i \dot{x}^j \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}.$$

Agora, para melhor comodidade, voltemos a notação de Leibniz para derivadas. Assim, das equações de Euler-Lagrange, temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\mathcal{L}} \frac{dx^i}{dt} g_{ik} \right) = \frac{1}{2\mathcal{L}} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}. \quad (4.11)$$

Reparametrizando a curva pelo comprimento de arco, considere um novo parâmetro

$$s = h(t) = \int \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt.$$

Assim, $\frac{ds}{dt} = \mathcal{L}$ e $\frac{1}{\mathcal{L}} = \frac{dt}{ds}$. Usando então a regra da cadeia, vamos analisar separadamente os termos de (4.11),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\mathcal{L}} \frac{dx^i}{dt} g_{ik} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{ds} \frac{dx^i}{ds} \frac{ds}{dt} g_{ik} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx^i}{ds} g_{ik} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx^i}{ds} \right) g_{ik} + \frac{dx^i}{ds} \frac{dg_{ik}}{dt} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dx^i}{dt} \right) g_{ik} + \frac{dx^i}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \frac{dx^l}{dt} \\ &= \frac{d}{ds} \left(\frac{dx^i}{ds} \frac{ds}{dt} \right) g_{ik} + \frac{dx^i}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \frac{dx^l}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d^2 x^i}{ds^2} \frac{ds}{dt} g_{ik} + \frac{dx^i}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \frac{dx^l}{ds} \frac{ds}{dt}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

e ainda,

$$\frac{1}{2\mathcal{L}} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \frac{dt}{ds} \frac{dx^i}{ds} \frac{ds}{dt} \frac{dx^j}{ds} \frac{ds}{dt} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \frac{ds}{dt} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}. \quad (4.13)$$

Substituindo (4.12) e (4.13) em (4.11), obtemos

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} \frac{ds}{dt} g_{ik} + \frac{dx^i}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \frac{dx^l}{ds} \frac{ds}{dt} - \frac{1}{2} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \frac{ds}{dt} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0.$$

Multiplicando a última expressão por $\frac{dt}{ds}$, trocando l por j , e i por t apenas no primeiro termo da esquerda, temos

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} g_{ik} + \frac{dx^i}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \frac{dx^j}{ds} - \frac{1}{2} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{d^2 x^t}{ds^2} g_{tk} + \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0. \quad (4.14)$$

Agora, multiplique (4.14) pelo inverso da métrica g^{tk} ,

$$\frac{d^2 x^t}{ds^2} + g^{tk} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \frac{d^2 x^t}{ds^2} + g^{tk} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0.$$

Trocando a ordem de i e j de forma conveniente em $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$,

$$\frac{d^2 x^t}{ds^2} + g^{tk} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = \frac{d^2 x^t}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} t \\ ij \end{matrix} \right\}_g \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0.$$

Estas são as equações das geodésicas, como afirmado anteriormente.

4.1.3 Transporte Paralelo

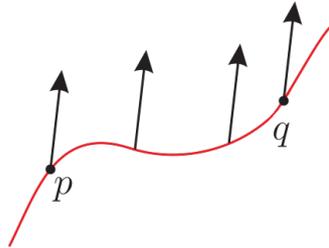
Para discutir sobre transporte paralelo, considere α uma curva suave em (U, g_{ij}) dada por $x(s) = (x^1(s), \dots, x^n(s))$ com o ponto p em α dado como $x(s_0)$ e com o ponto q em α dado como $x(s_1)$. Além disso, seja A^k um vetor contravariante em (U, g_{ij}) . O **transporte paralelo** de

V^k , ou seja, a obtenção em cada ponto da curva, de um vetor de mesmo tamanho e direção de V^k , portanto, em particular, na extremidades p e q , está definido quando, e somente quando

$$\frac{dA^k}{ds} + \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_g A^j \frac{dx^i}{ds} = 0, \quad (4.15)$$

em que $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Figura 12 – Transporte paralelo de vetores.



Fonte: Fonte própria (2020).

Afirmção 4.4 Se A^k é transportado paralelamente ao longo de uma curva α , então $\frac{DA^k}{Dx^i} = 0$.

Demonstração. Com efeito, usando a regra da cadeia, temos

$$\frac{dA^k}{ds} = \frac{\partial A^k}{\partial x^i} \frac{dx^i}{ds}.$$

Agora, como A^k é transportado paralelamente, temos

$$\frac{DA^k}{Dx^i} \frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial A^k}{\partial x^i} \frac{dx^i}{ds} + \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_g A^j \frac{dx^i}{ds} = \frac{dA^k}{ds} \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_g A^j \frac{dx^i}{ds} = 0. \quad (4.16)$$

■

Proposição 4.2 O campo de velocidades ao longo de uma geodésica γ ,

$$\frac{dx}{ds} = \left(\frac{dx^1}{ds}, \dots, \frac{dx^n}{ds} \right),$$

é transportado paralelamente ao longo de γ .

Demonstração. A equação de transporte paralelo (4.15) com $A^k = \frac{dx^k}{ds}$ coincide com a equação das geodésicas (4.7). ■

Perceba que examinando a Proposição (4.2) e as equações (4.7) e (4.15), segue que, em uma geodésica, temos automaticamente, o transporte paralelo dos vetores tangentes.

Definição 4.6 Definimos o ângulo θ entre dois vetores $A^i(s)$, $B^i(s)$, ao longo de uma curva α , em um ponto $\alpha(s_0)$, por meio de

$$\cos \theta = \frac{g_{ij}A^iB^j}{\|A\|_g\|B\|_g}, \quad (4.17)$$

em que $\|A(s_0)\|_g^2 = g_{ij}A^i(s_0)A^j(s_0)$ e $\|B(s_0)\|_g^2 = g_{ij}B^i(s_0)B^j(s_0)$.

Proposição 4.3 Se $A^i(s)$ e $B^i(s)$ são ambos transportados paralelamente ao longo de α , então θ é constante ao longo de α .

Demonstração. Note que, usando a regra do produto da diferenciação covariante,

$$\frac{D}{Dx^k}(g_{ij}A^iB^j) = \frac{Dg_{ij}}{Dx^k}A^iB^j + g_{ij}\frac{DA^i}{Dx^k}B^j + g_{ij}A^i\frac{DB^j}{Dx^k} = 0, \quad (4.18)$$

pois, pela Observação (4.4), $\frac{DA^i}{Dx^k} = \frac{DB^j}{Dx^k} = 0$, uma vez que, os vetores são ambos transportados paralelamente, e ainda, pela condição de Ricci, $\frac{Dg_{ij}}{Dx^k} = 0$.

Dessa forma, teremos

$$\frac{D}{Dx^k}(\cos \theta) = 0.$$

Mas, como a derivada covariante de um escalar (isto é, $\cos \theta$) é apenas a derivada parcial, temos que

$$\frac{\partial \cos \theta}{\partial x^k} = 0, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

E ainda,

$$\frac{d \cos \theta}{ds} = \frac{\partial \cos \theta}{\partial x^i} \frac{dx^i}{ds} = 0.$$

Assim $\cos \theta$ é constante ao longo da curva γ . ■

4.1.4 Conexão

Considere um conjunto de n^3 quantidades infinitamente diferenciáveis Γ_{jk}^i definidas em $U \subseteq \mathbb{R}^n$, que transforma por mudança de coordenadas de acordo com a equação (3.23), ou seja,

$$\Gamma_{ij}^k \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^k} = \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^\gamma}{\partial x^j} \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\lambda + \frac{\partial^2 \tilde{x}^\lambda}{\partial x^i \partial x^j}. \quad (4.19)$$

Nessas condições, $\Gamma = [\Gamma_{ij}^k]$ constitui uma **conexão linear** sobre U . Os coeficientes Γ_{ij}^k serão chamados de **coeficientes da conexão** Γ , podendo ser encontrados em algumas literaturas como **símbolos de Christoffel**.

Se

$$\Gamma_{ij}^k(x) = \Gamma_{ji}^k(x), \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad (4.20)$$

Γ é chamada **conexão linear simétrica** sobre U .

O transporte paralelo pode ser definido tal como em (4.15), isto é, um campo de vetores contravariantes $A^k(x)$ é transportado paralelamente ao longo da curva γ dada por $x^i(s), i = 1, \dots, n$, de acordo com

$$\frac{dA^k}{ds} + \Gamma_{ij}^k(x)A^j \frac{dx^i}{ds} = 0. \quad (4.21)$$

Além disso, se Γ é usado no lugar de $\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_g$ em (4.1), a diferenciação covariante de um vetor contravariante V^r é definida por

$$\frac{D_{\Gamma}V^r}{Dx^n} := \frac{\partial V^r}{\partial x^n} + \Gamma_{mn}^r V^m. \quad (4.22)$$

No caso de um tensor mais geral B_{ij}^{lmk} , para termos a diferenciação covariante, basta seguir a equação (4.2), ou seja,

$$\frac{D_{\Gamma}B_{ij}^{lmk}}{Dx^r} = \frac{\partial B_{ij}^{lmk}}{\partial x^r} + \Gamma_{pr}^l B_{ij}^{pmk} + \Gamma_{pr}^m B_{ij}^{lpmk} + \Gamma_{pr}^k B_{ij}^{lmp} - \Gamma_{ir}^s B_{sj}^{lmk} - \Gamma_{jr}^s B_{is}^{lmk}. \quad (4.23)$$

De acordo com (4.22), a condição de Ricci é generalizada para

$$\frac{D_{\Gamma}g_{ij}}{Dx^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^h g_{hj} - \Gamma_{jk}^h g_{ih} = 0. \quad (4.24)$$

Se é válida a condição de Ricci (4.24), dizemos que Γ é uma **conexão compatível com a métrica** g_{ij} , ou simplesmente, uma **conexão Riemanniana**.

Proposição 4.4 *Se uma geometria Riemanniana tem conexão que obedece (4.20) e (4.24), então*

$$\Gamma_{ij}^k = \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_g.$$

Demonstração. Usando (4.24), temos

$$\frac{D_{\Gamma}g_{ij}}{Dx^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ir}^s g_{sj} - \Gamma_{jr}^s g_{is} = 0, \quad (4.25)$$

$$\frac{D_{\Gamma}g_{kj}}{Dx^i} = \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \Gamma_{ki}^h g_{hj} - \Gamma_{ji}^h g_{kh} = 0, \quad (4.26)$$

$$\frac{D_{\Gamma}g_{ki}}{Dx^j} = \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \Gamma_{kj}^h g_{hi} - \Gamma_{ij}^h g_{kh} = 0. \quad (4.27)$$

Manipulando (4.25), (4.26) e (4.27) e usando a simetria de (4.20),

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = 2\Gamma_{ik}^h g_{hj}.$$

Daí,

$$\Gamma_{ik}^h = \frac{1}{2}g^{hj} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \right) = \left\{ \begin{matrix} h \\ ik \end{matrix} \right\}_g.$$

Um fato por vezes conhecido como **Lema Fundamental da Geometria Riemanniana** afirma que: “*Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão Γ simétrica e compatível com a métrica.*”. Detalhes sobre este resultado podem ser consultados em (CARMO, 2011, p. 61).

Unindo o resultado da Proposição 4.4 com o Lema Fundamental da Geometria Riemanniana, segue que dada uma variedade Riemanniana qualquer, sempre podemos considerar uma conexão que tem Γ_{ij}^k como sendo os símbolos de Levi-Civita.

4.1.5 Tensor de curvatura

A partir daqui, para a derivada parcial, adotaremos a notação $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Além disso, denote

$$G_j^i = \left\{ \begin{array}{c} i \\ jk \end{array} \right\}_g \frac{dx^k}{ds}.$$

Vamos introduzir o **operador de Berwald**, dado por

$$\delta_i := \partial_i - G_j^i \dot{\partial}_r, \quad (4.28)$$

em que $\dot{\partial}_r := \frac{\partial}{\partial \dot{x}^r}$ e $\dot{x}^r := \frac{dx^r}{ds}$.

Seja f uma função suave de x e \dot{x} , desejamos calcular o chamado **colchete de Lie**,

$$[\delta_i, \delta_j](f) := \delta_i(\delta_j f) - \delta_j(\delta_i f). \quad (4.29)$$

Considere então, cada termo de (4.29) separadamente,

$$\delta_i(\delta_j f) = \delta_i(\partial_j f - G_j^r \dot{\partial}_r f) = \delta_i(\partial_j f) - [\delta_i(G_j^r)] \dot{\partial}_r f - G_j^r [\delta_i(\dot{\partial}_r f)]. \quad (4.30)$$

Temos ainda,

$$G_j^r [\delta_i(\dot{\partial}_r f)] = G_j^r [\partial_i(\dot{\partial}_r f) - G_i^h (\partial_h(\dot{\partial}_r f))] = G_j^r [\partial_i(\dot{\partial}_r f)] - G_j^r G_i^h [\partial_h(\dot{\partial}_r f)], \quad (4.31)$$

e

$$\delta_i(\partial_j f) = \partial_i(\partial_j f) - G_i^s [\partial_s(\partial_j f)]. \quad (4.32)$$

Usando (4.30), (4.31) e (4.32), temos então,

$$\begin{aligned} \delta_i(\delta_j f) &= \partial_i(\partial_j f) - G_i^s [\partial_s(\partial_j f)] - [\delta_i(G_j^r)] \dot{\partial}_r f \\ &\quad - G_j^r [\partial_i(\dot{\partial}_r f)] + G_j^r G_i^h [\partial_h(\dot{\partial}_r f)]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

O termo $\delta_j(\delta_i f)$ é encontrado apenas trocando as posições de i e j em (4.33). Daí,

$$\begin{aligned} [\delta_i, \delta_j](f) &= \partial_i(\partial_j f) - G_i^s [\partial_s(\partial_j f)] - [\delta_i(G_j^r)] \dot{\partial}_r f \\ &\quad - G_j^r [\partial_i(\dot{\partial}_r f)] + G_j^r G_i^h [\partial_h(\dot{\partial}_r f)] - \partial_j(\partial_i f) + G_j^s [\partial_s(\partial_i f)] \\ &\quad + [\delta_j(G_i^r)] \dot{\partial}_r f + G_i^r [\partial_j(\dot{\partial}_r f)] - G_i^r G_j^h [\partial_h(\dot{\partial}_r f)] \\ &= (\delta_j G_i^r - \delta_i G_j^r) \dot{\partial}_r f, \end{aligned}$$

pois f é uma função suave.

Vamos então, usar a seguinte notação

$$[\delta_i, \delta_j](f) = \mathbb{R}_{ij}^r \dot{\delta}_r f.$$

Sendo assim, o tensor $\mathbb{R}_{ij}^r = \delta_j G_i^r - \delta_i G_j^r$ é chamado de **tensor fundamental de curvatura de Berwald a 3 índices**. Vale destacar que ele depende de $\dot{x} = \frac{dx}{ds}$.

Agora, defina o tensor misto de ordem $(1, 3)$,

$$\mathbb{R}_{lij}^k := \partial_l \mathbb{R}_{ij}^k.$$

Claramente, temos

$$\mathbb{R}_{lij}^k = \dot{\partial}_l \delta_j G_i^k - \dot{\partial}_l \delta_i G_j^k. \quad (4.34)$$

Considere agora a seguinte notação

$$G_{ji}^s = \dot{\partial}_i G_j^s.$$

Iremos calcular \mathbb{R}_{lij}^k , analisando separadamente os termos de (4.34). Com efeito, a partir de (4.28),

$$\dot{\partial}_l \delta_j = \dot{\partial}_l \partial_j - \dot{\partial}_l G_j^s \dot{\partial}_s = \dot{\partial}_l \partial_j - G_{jl}^s \dot{\partial}_s.$$

Daí,

$$\dot{\partial}_l \delta_j G_i^k = \dot{\partial}_l \partial_j G_i^k - G_{jl}^s \dot{\partial}_s G_i^k = \partial_j G_{il}^k - G_{jl}^s G_{is}^k. \quad (4.35)$$

Trocando as posições de i e j em (4.35), obtemos o segundo termo de (4.34). Dessa forma,

$$\mathbb{R}_{lij}^k = \partial_j G_{il}^k - G_{jl}^s G_{is}^k - \partial_i G_{jl}^k + G_{il}^s G_{js}^k. \quad (4.36)$$

A expressão em (4.36) representa a notação padrão para o **tensor fundamental de curvatura de Berwald a 4 índices**.

Agora, note que

$$G_{ji}^s = \dot{\partial}_i G_j^s = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \left(\left\{ \begin{matrix} s \\ ji \end{matrix} \right\}_g \dot{x}^i \right) = \left\{ \begin{matrix} s \\ ji \end{matrix} \right\}_g,$$

uma vez que $\left\{ \begin{matrix} s \\ ji \end{matrix} \right\}_g$ é independente de \dot{x}^i .

Assim, chegamos a expressão do **tensor de curvatura de Riemann a 4 índices**,

$$\mathbb{R}_{lij}^k = \partial_j \left\{ \begin{matrix} k \\ il \end{matrix} \right\}_g - \left\{ \begin{matrix} s \\ jl \end{matrix} \right\}_g \left\{ \begin{matrix} k \\ is \end{matrix} \right\}_g - \partial_i \left\{ \begin{matrix} k \\ jl \end{matrix} \right\}_g + \left\{ \begin{matrix} s \\ il \end{matrix} \right\}_g \left\{ \begin{matrix} k \\ js \end{matrix} \right\}_g. \quad (4.37)$$

Observação 4.1 *O 4-tensor de Berwald para curvatura foi publicado muito depois que o de Riemann. Berwald estava procurando uma generalização da geometria de Riemann. Esta generalização permitia que g_{ij} e Γ_{ij}^k dependessem de x e \dot{x} . Tais geometrias são conhecidas hoje como geometrias de Finsler, devido a Paul Finsler (1894-1970), que escreveu sua tese de doutorado sobre o tópico. A esse tipo de geometria, está associada a métrica Finsler que diferentemente da Riemanniana, não necessariamente é definida positiva.*

Observe que a partir de (4.37), concluímos que o tensor de curvatura de Riemann, possui a propriedade de antisimetria, ou seja,

$$\mathbb{R}_{lij}^k = -\mathbb{R}_{lji}^k. \quad (4.38)$$

Podemos também, baixar o índice contravariante de \mathbb{R}_{lij}^k para obter \mathbb{R}_{klij} , ou seja, um versão covariante pura do tensor de curvatura de Riemann, isto é feito da seguinte maneira

$$\mathbb{R}_{klij} := g_{ks} \mathbb{R}_{lij}^s. \quad (4.39)$$

Neste caso, também vale a antisimetria,

$$\mathbb{R}_{klij} = -\mathbb{R}_{klji}. \quad (4.40)$$

Vamos agora obter algumas propriedades do tensor de curvatura de Riemann. Considere um sistema de coordenadas normais em um ponto p . Sabemos que em p , $\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} = 0$. Perceba que em contra partida, suas derivadas não podem ser anular. Uma justificativa é que caso isso ocorra, o tensor de curvatura de Riemann se anula em p . Por se tratar de um tensor, teríamos $\mathbb{R}_{lij}^k = 0$ em qualquer sistema de coordenadas. O que não pode acontecer.

Afirmção 4.5 *Para o tensor de curvatura de Riemann, vale a primeira identidade de Bianchi ou identidade de Bianchi algébrica,*

$$\mathbb{R}_{lij}^k + \mathbb{R}_{ijl}^k + \mathbb{R}_{jli}^k = 0. \quad (4.41)$$

Demonstração. Usando coordenadas normais, temos:

$$\tilde{\mathbb{R}}_{lij}^k = \partial_j \left\{ \begin{matrix} k \\ il \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} - \partial_i \left\{ \begin{matrix} k \\ jl \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}},$$

$$\tilde{\mathbb{R}}_{ijl}^k = \partial_l \left\{ \begin{matrix} k \\ ji \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} - \partial_j \left\{ \begin{matrix} k \\ li \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}},$$

$$\tilde{\mathbb{R}}_{jli}^k = \partial_i \left\{ \begin{matrix} k \\ lj \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}} - \partial_l \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_{\tilde{g}}.$$

Assim,

$$\tilde{\mathbb{R}}_{lij}^k + \tilde{\mathbb{R}}_{ijl}^k + \tilde{\mathbb{R}}_{jli}^k = 0, \quad (4.42)$$

em coordenadas normais.

Como (4.42) é uma equação tensorial, será válida em qualquer sistema de coordenadas. ■

Afirmção 4.6 *Para o tensor de curvatura de Riemann, vale também a segunda identidade de Bianchi ou identidade de Bianchi diferencial,*

$$\frac{D\mathbb{R}_{lij}^k}{Dx^h} + \frac{D\mathbb{R}_{lhi}^k}{Dx^j} + \frac{D\mathbb{R}_{ljh}^k}{Dx^i} = 0. \quad (4.43)$$

Demonstração. Com efeito, usando novamente coordenadas normais em p ,

$$\frac{D\tilde{\mathbb{R}}_{lij}^k}{Dx^h} = \partial_h \tilde{\mathbb{R}}_{lij}^k, \quad \frac{D\tilde{\mathbb{R}}_{lhi}^k}{Dx^j} = \partial_j \tilde{\mathbb{R}}_{lhi}^k, \quad \text{e} \quad \frac{D\tilde{\mathbb{R}}_{ljh}^k}{Dx^i} = \partial_i \tilde{\mathbb{R}}_{ljh}^k.$$

Daí, teremos

$$\begin{aligned} & \frac{D\tilde{\mathbb{R}}_{lij}^k}{Dx^h} + \frac{D\tilde{\mathbb{R}}_{lhi}^k}{Dx^j} + \frac{D\tilde{\mathbb{R}}_{ljh}^k}{Dx^i} = \partial_h \left(\partial_j \begin{Bmatrix} k \\ il \end{Bmatrix}_{\tilde{g}} - \partial_i \begin{Bmatrix} k \\ jl \end{Bmatrix}_{\tilde{g}} \right) \\ & + \partial_j \left(\partial_i \begin{Bmatrix} k \\ hl \end{Bmatrix}_{\tilde{g}} - \partial_h \begin{Bmatrix} k \\ il \end{Bmatrix}_{\tilde{g}} \right) + \partial_i \left(\partial_h \begin{Bmatrix} k \\ jl \end{Bmatrix}_{\tilde{g}} - \partial_j \begin{Bmatrix} k \\ hl \end{Bmatrix}_{\tilde{g}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Assim como na primeira identidade, a equação (4.44) é tensorial, logo, vale em qualquer sistema de coordenadas. Portanto, está provada a segunda identidade. ■

As identidades de Bianchi também são válidas para o tensor de curvatura de Riemann em sua forma covariante pura \mathbb{R}_{klij} . Uma maior generalização pode ser vista em (LEE, 1997, p. 121-124).

Vamos introduzir os assim chamados **símbolos de Christoffel** de primeiro e segundo tipo. O primeiro tipo é dado por

$$[ij, k] := \frac{1}{2} (\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij}), \quad (4.45)$$

enquanto que o de segundo tipo é

$$\left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\}_g := g^{lk} [ij, k]. \quad (4.46)$$

Note que os símbolos de Christoffel são simétricos, ou seja, $[ij, k] = [ji, k]$. Além disso, percebe-se que os símbolos de Christoffel de segundo tipo são exatamente os símbolos de Levi-Civita.

Podemos reescrever (4.45), da seguinte forma,

$$[ij, k] = \delta_k^s [ij, s] = g_{kl} g^{ls} [ij, s] = g_{kl} \left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\}_g, \quad (4.47)$$

isto será importante na demonstração do próximo resultado.

Proposição 4.5 *Em todo lugar de (U, g_{ij}) , temos que*

$$\mathbb{R}_{klij} = \frac{1}{2}(\partial_j \partial_l g_{ik} + \partial_i \partial_k g_{jl} - \partial_j \partial_k g_{il} - \partial_i \partial_l g_{jk}) + g^{pt}([ki, p][jl, t] - [kj, p][il, t]). \quad (4.48)$$

Também, $\mathbb{R}_{klij} = -\mathbb{R}_{lkij} = \mathbb{R}_{ijkl}$.

Demonstração. Primeiramente, usando a lei (4.39),

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{klij} &= g_{kp} \mathbb{R}_{lij}^p = g_{kp} \partial_j \left\{ \begin{matrix} p \\ il \end{matrix} \right\}_g - g_{kp} \partial_i \left\{ \begin{matrix} p \\ jl \end{matrix} \right\}_g \\ &+ g_{kp} \left\{ \begin{matrix} s \\ il \end{matrix} \right\}_g \left\{ \begin{matrix} p \\ js \end{matrix} \right\}_g - g_{kp} \left\{ \begin{matrix} s \\ jl \end{matrix} \right\}_g \left\{ \begin{matrix} p \\ is \end{matrix} \right\}_g. \end{aligned}$$

Porém, pela regra do produto,

$$\partial_j \left(g_{kp} \left\{ \begin{matrix} p \\ il \end{matrix} \right\}_g \right) = \partial_j(g_{kp}) \left\{ \begin{matrix} p \\ il \end{matrix} \right\}_g + g_{kp} \partial_j \left\{ \begin{matrix} p \\ il \end{matrix} \right\}_g.$$

Daí, usando (4.47),

$$g_{kp} \partial_j \left\{ \begin{matrix} p \\ il \end{matrix} \right\}_g = \partial_j \left(g_{kp} \left\{ \begin{matrix} p \\ il \end{matrix} \right\}_g \right) - \partial_j(g_{kp}) \left\{ \begin{matrix} p \\ il \end{matrix} \right\}_g = \partial_j[il, k] - \partial_j(g_{kp}) \left\{ \begin{matrix} p \\ il \end{matrix} \right\}_g$$

e

$$g_{kp} \partial_i \left\{ \begin{matrix} p \\ jl \end{matrix} \right\}_g = \partial_i[jl, k] - \partial_i(g_{kp}) \left\{ \begin{matrix} p \\ jl \end{matrix} \right\}_g.$$

Substituindo em (4.1.5),

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{klij} &= \partial_j[il, k] - \partial_i[jl, k] - \partial_j(g_{kp}) \left\{ \begin{matrix} p \\ il \end{matrix} \right\}_g + \partial_i(g_{kp}) \left\{ \begin{matrix} p \\ jl \end{matrix} \right\}_g \\ &+ [js, k] \left\{ \begin{matrix} s \\ il \end{matrix} \right\}_g - [is, k] \left\{ \begin{matrix} s \\ jl \end{matrix} \right\}_g. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Agora, calculando $\partial_j[il, k]$ e $\partial_i[jl, k]$, temos

$$\partial_j[il, k] = \frac{1}{2} \partial_j(\partial_l g_{ik} + \partial_i g_{lk} - \partial_k g_{il}) = \frac{1}{2}(\partial_j \partial_l g_{ik} + \partial_j \partial_i g_{lk} - \partial_j \partial_k g_{il}),$$

$$\partial_i[jl, k] = \frac{1}{2}(\partial_i \partial_l g_{jk} + \partial_i \partial_j g_{lk} - \partial_i \partial_k g_{jl}).$$

Logo,

$$\partial_j[il, k] - \partial_i[jl, k] = \frac{1}{2}(\partial_j \partial_l g_{ik} - \partial_j \partial_k g_{il} - \partial_i \partial_l g_{jk} + \partial_i \partial_k g_{jl}). \quad (4.50)$$

Pela condição de Ricci,

$$\partial_j(g_{kp}) = g_{hp} \begin{Bmatrix} h \\ kj \end{Bmatrix}_g + g_{kh} \begin{Bmatrix} h \\ pj \end{Bmatrix}_g = [kj, p] + [pj, k] \quad (4.51)$$

e

$$\partial_i(g_{kp}) = g_{hp} \begin{Bmatrix} h \\ ki \end{Bmatrix}_g + g_{kh} \begin{Bmatrix} h \\ pi \end{Bmatrix}_g = [ki, p] + [pi, k]. \quad (4.52)$$

Substituindo (4.50), (4.51) e (4.52) em (4.49),

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{klij} &= \frac{1}{2}(\partial_j\partial_l g_{ik} - \partial_j\partial_k g_{il} - \partial_i\partial_l g_{jk} + \partial_i\partial_k g_{jl}) - ([kj, p] + [pj, k]) \begin{Bmatrix} p \\ il \end{Bmatrix}_g \\ &\quad + ([ki, p] + [pi, k]) \begin{Bmatrix} p \\ jl \end{Bmatrix}_g + [js, k] \begin{Bmatrix} s \\ il \end{Bmatrix}_g - [is, k] \begin{Bmatrix} s \\ jl \end{Bmatrix}_g \\ &= \frac{1}{2}(\partial_j\partial_l g_{ik} - \partial_j\partial_k g_{il} - \partial_i\partial_l g_{jk} + \partial_i\partial_k g_{jl}) - [kj, p] \begin{Bmatrix} p \\ il \end{Bmatrix}_g - [pj, k] \begin{Bmatrix} p \\ il \end{Bmatrix}_g \\ &\quad + [ki, p] \begin{Bmatrix} p \\ jl \end{Bmatrix}_g + [pi, k] \begin{Bmatrix} p \\ jl \end{Bmatrix}_g + [js, k] \begin{Bmatrix} s \\ il \end{Bmatrix}_g - [is, k] \begin{Bmatrix} s \\ jl \end{Bmatrix}_g. \end{aligned}$$

Na última equação, troque s por p nos dois últimos termos da direita. Obtemos então,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{klij} &= \frac{1}{2}(\partial_j\partial_l g_{ik} - \partial_j\partial_k g_{il} - \partial_i\partial_l g_{jk} + \partial_i\partial_k g_{jl}) - [kj, p] \begin{Bmatrix} p \\ il \end{Bmatrix}_g - [pj, k] \begin{Bmatrix} p \\ il \end{Bmatrix}_g \\ &\quad + [ki, p] \begin{Bmatrix} p \\ jl \end{Bmatrix}_g + [pi, k] \begin{Bmatrix} p \\ jl \end{Bmatrix}_g + [jp, k] \begin{Bmatrix} p \\ il \end{Bmatrix}_g - [ip, k] \begin{Bmatrix} p \\ jl \end{Bmatrix}_g \quad (4.53) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_j\partial_l g_{ik} - \partial_j\partial_k g_{il} - \partial_i\partial_l g_{jk} + \partial_i\partial_k g_{jl}) - [kj, p] \begin{Bmatrix} p \\ il \end{Bmatrix}_g + [ki, p] \begin{Bmatrix} p \\ jl \end{Bmatrix}_g. \end{aligned}$$

Para finalizar, usando (4.46) em (4.53), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{klij} &= \frac{1}{2}(\partial_j\partial_l g_{ik} - \partial_j\partial_k g_{il} - \partial_i\partial_l g_{jk} + \partial_i\partial_k g_{jl}) - [kj, p](g^{pt}[il, t]) + [ki, p](g^{pt}[jl, t]) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_j\partial_l g_{ik} + \partial_i\partial_k g_{jl} - \partial_j\partial_k g_{il} - \partial_i\partial_l g_{jk}) + g^{pt}([ki, p][jl, t] - [kj, p][il, t]). \end{aligned}$$

As afirmações sobre simetria e antisimetria de \mathbb{R}_{klij} seguem diretamente. ■

4.1.6 Espaços de curvatura constante

Considere um ponto $p \in (U, g_{ij})$, α um subespaço bidimensional do espaço tangente em p , $\{A, B\}$ uma base qualquer de α . Podemos definir um número real $K_p(A, B) = K_p(\alpha)$ que é chamado de **curvatura seccional** em p com relação a α .

A curvatura seccional é escrita a partir do tensor de curvatura, foi introduzida por Gauss, estendida por Riemann e coincide com a curvatura Gaussiana para o caso de superfícies em \mathbb{R}^3 . Para efeito de exemplo, no caso da esfera \mathbb{S}^n de raio r , temos $K_p(\alpha) = \frac{1}{r^2}$ para todo p e α . Mais informações sobre esta discussão podem ser consultadas em (LEE, 1997, p. 145-149).

Quando $K_p(\alpha)$ não depende de α , denotamos $K_p(\alpha) = K(p)$. Neste caso, o tensor de curvatura de Riemann em sua forma covariante pura é dado por

$$\mathbb{R}_{klij} = K(p)(g_{kj}g_{li} - g_{ki}g_{lj}). \quad (4.54)$$

Observe que usando (4.39), a equação (4.54) nos dá para a forma mista do tensor de curvatura de Riemann,

$$\mathbb{R}^k_{lij} = K(p)(\delta_j^k g_{li} - \delta_i^k g_{lj}).$$

Quando $n = 2$, o plano α é o próprio espaço tangente, desta forma, temos automaticamente $K_p(\alpha) = K(p)$.

Definição 4.7 *Em uma geometria Riemanniana (U, g_{ij}) , se a curvatura seccional $K_p(\alpha)$ é constante, ou seja, não depende do ponto p nem do plano α , diremos que (U, g_{ij}) é um espaço de curvatura constante.*

Perceba então que a esfera \mathbb{S}^n de raio r é um espaço de curvatura constante. Podemos agora pensar em ferramentas para definir quais espaços Riemannianos tem esta característica, para isso, apresentaremos o **Teorema de Schur**, também conhecido em algumas literaturas como **Lema de Schur**. Uma outra versão pode ser vista em (PETERSEN, 2006, p. 39-40).

Teorema 4.1 *Se $K_x(\alpha)$ não depende de α e (U, g_{ij}) tem dimensão $n \geq 3$, então $K(x)$ é constante.*

Demonstração. Primeiramente, note que pela condição de Ricci,

$$\frac{D\mathbb{R}^k_{lij}}{Dx^h} = \frac{DK(x)}{Dx^h}(\delta_j^k g_{li} - \delta_i^k g_{lj}). \quad (4.55)$$

Mas, a derivada covariante de uma função escalar é a derivada parcial, assim, $\frac{DK(x)}{Dx^h} = \partial_h K(x)$. Sendo assim, pela segunda identidade de Bianchi,

$$\partial_h K(x)(\delta_j^k g_{li} - \delta_i^k g_{lj}) + \partial_j K(x)(\delta_i^k g_{lh} - \delta_h^k g_{li}) + \partial_i K(x)(\delta_h^k g_{lj} - \delta_j^k g_{lh}) = 0.$$

Somando sobre o índice k e em seguida fazendo $k = j$, temos a equação

$$\partial_h K(x)(\delta_j^j g_{li} - \delta_i^j g_{lj}) + \partial_j K(x)(\delta_i^j g_{lh} - \delta_h^j g_{li}) + \partial_i K(x)(\delta_h^j g_{lj} - \delta_j^j g_{lh}) = 0, \quad (4.56)$$

que fornece em cada parcela, respectivamente,

$$(n-1)g_{li}\partial_h K(x), \quad g_{lh}\partial_i K(x) - g_{li}\partial_h K(x) \quad \text{e} \quad (1-n)g_{lh}\partial_i K(x).$$

Substituindo esses valores em (4.56) e multiplicando por g^{li} , temos

$$g^{li}(n-1)g_{li}\partial_h K(x) + g^{li}(g_{lh}\partial_i K(x) - g_{li}\partial_h K(x)) + g^{li}(1-n)g_{lh}\partial_i K(x) = 0.$$

Ou seja,

$$\delta_i^i(n-1)\partial_h K(x) + \delta_h^i\partial_i K(x) - \delta_i^i\partial_h K(x) + \delta_h^i(1-n)\partial_i K(x) = 0. \quad (4.57)$$

Somando (4.57) sobre o índice i , temos

$$n(n-1)\partial_h K(x) + \partial_h K(x) - n\partial_h K(x) + (1-n)\partial_h K(x) = 0.$$

Daí,

$$\partial_h K(x)(n(n-1) + 1 - n + (1-n)) = \partial_h K(x)(n-1)(n-2) = 0.$$

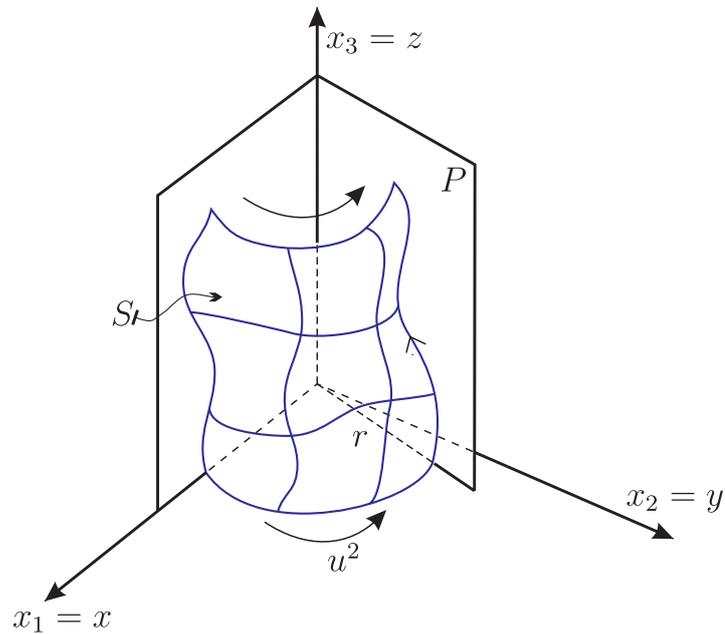
Assim, se $n \geq 3$, segue que $\partial_h K(x) = 0$. Portanto, $K(x)$ é constante. ■

Em todo ponto da esfera \mathbb{S}^n de raio r , a curvatura é constante e positiva. Outro exemplo de espaço de curvatura constante é a pseudoesfera, neste caso, a curvatura é constante e negativa. No que segue, faremos essa construção, usando conceitos até aqui apresentados.

Considere a superfície de revolução de uma curva $C(t) = (r(t), h(t))$. Introduziremos o parâmetro u^1 como sendo o parâmetro da curva C e u^2 como sendo o ângulo de rotação do plano P em torno do eixo x^3 . Para pontos sobre a superfície de revolução S , obtemos a representação

$$\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2) = (r(u^1) \cos(u^2), r(u^1) \sin(u^2), h(u^1)). \quad (4.58)$$

Figura 13 – Superfície de revolução.



Fonte: Fonte própria (2020).

A **tractriz** (do latim *trahere* que significa puxar, arrastar) funciona da seguinte maneira. Considere uma corda de comprimento $\overline{AB} = 1$. Em A , uma pessoa puxa a corda com um peso em B , apontando na direção x_3 . A trajetória de B forma a curva que chamamos de tractriz. \overline{AB} é tangente.

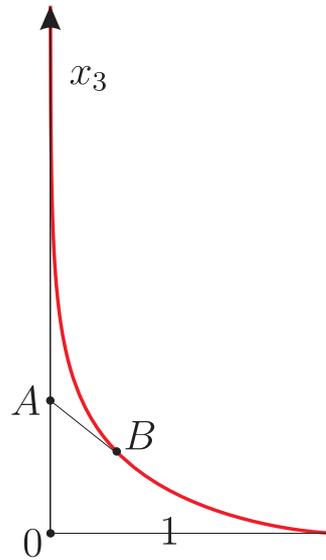
Vamos parametrizar a tractriz de forma conveniente por

$$r(u^1) = e^{u^1}, \quad h(u^1) = \int_0^{u^1} \sqrt{1 - e^{2y}} dy.$$

Assim,

$$r'(u^1) = e^{u^1}, \quad h'(u^1) = \sqrt{1 - e^{2u^1}}.$$

Figura 14 – Tractriz.



Fonte: Fonte própria (2020).

A superfície resultante é denominada **pseudoesfera** e sua métrica Riemanniana é dada por

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2u^1} \end{pmatrix}.$$

Note que $g = \det(g_{ij}) = g_{22} = e^{-2u^1} > 0$. Sabemos ainda que $n = 2$, logo, $K_p(\alpha) = K(p)$. Dessa forma,

$$\mathbb{R}_{2112} = K(p)(g_{22}g_{11} - g_{21}g_{12}) = K(p) \det(g_{ij}).$$

Ou seja,

$$K(p) = \frac{\mathbb{R}_{2112}}{g}.$$

Por outro lado,

$$\mathbb{R}_{2112} = g_{2l}\mathbb{R}_{112}^l = g_{21}\mathbb{R}_{112}^1 + g_{22}\mathbb{R}_{112}^2 = g\mathbb{R}_{112}^2.$$

Sendo assim,

$$K(p) = \frac{\mathbb{R}_{2112}}{g} = K(p) = \frac{g\mathbb{R}_{112}^2}{g} = \mathbb{R}_{112}^2.$$

Afirmamos que $K(p) = -1$. Com efeito,

$$K(p) = \partial_2 \begin{Bmatrix} 2 \\ 11 \end{Bmatrix}_g - \partial_1 \begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix}_g - \begin{Bmatrix} 1 \\ 21 \end{Bmatrix}_g \begin{Bmatrix} 2 \\ 11 \end{Bmatrix}_g - \begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix}_g \begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix}_g + \begin{Bmatrix} 1 \\ 11 \end{Bmatrix}_g \begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix}_g + \begin{Bmatrix} 2 \\ 11 \end{Bmatrix}_g \begin{Bmatrix} 2 \\ 22 \end{Bmatrix}_g.$$

Calculando os símbolos de Levi-Civita, temos

$$\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 11 \end{array} \right\}_g = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 11 \end{array} \right\}_g = 0 \text{ e } \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 21 \end{array} \right\}_g = \frac{1}{2} g^{22} \partial_1 g_{22}.$$

Dessa forma,

$$K(p) = - \left[\partial_1 \left(\frac{1}{2} g^{22} \partial_1 g_{22} \right) + \left(\frac{1}{2} g^{22} \partial_1 g_{22} \right)^2 \right]. \quad (4.59)$$

Calculando separadamente, temos

$$\begin{aligned} \partial_1 \left(\frac{1}{2} g^{22} \partial_1 g_{22} \right) &= \partial_1 \left(\frac{1}{2} e^{2u_1} \partial_1 e^{-2u_1} \right) = \frac{1}{2} (\partial_1 e^{2u_1} \partial_1 e^{-2u_1} + e^{2u_1} \partial_1 \partial_1 e^{-2u_1}) \\ &= \frac{1}{2} (2e^{2u_1} (-2)e^{-2u_1} + e^{2u_1} 4e^{-2u_1}) = 0, \end{aligned} \quad (4.60)$$

e

$$\left(\frac{1}{2} g^{22} \partial_1 g_{22} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} e^{2u_1} \partial_1 e^{-2u_1} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} e^{2u_1} (-2)e^{-2u_1} \right)^2 = 1. \quad (4.61)$$

Substituindo (4.60) e (4.61) em (4.59), segue que $K(p) = -1$. Como desejado.

4.2 DIFUSÃO EM VARIEDADES DE CURVATURA CONSTANTE

Aqui, vamos construir uma situação geométrica que nos possibilite obter informações em relação à função de transição de um processo de difusão em uma região geodesicamente convexa de uma variedade Riemanniana que seja suficientemente pequena em torno de um determinado ponto inicial. Nossa principal referência é (MOLCHANOV, 1975), trabalho que faz uma análise do comportamento de $f(t, x_1, x_2)$ sob algumas suposições em relação ao conjunto de geodésicas que unem os pontos x_1 e x_2 . Apresentamos resultados para tais processos em geometrias que apresentam mesma curvatura para todo ponto.

Definição 4.8 Definimos a *derivada absoluta* de um campo de vetores contravariante T^i ao longo de uma curva suave γ , por

$$\frac{\delta T^i}{\delta u} := \frac{dT^i}{du} + \left\{ \begin{array}{c} i \\ jk \end{array} \right\}_g T^j \frac{dx^k}{du}, \quad (4.62)$$

onde $\frac{dx^k}{du}$ é o campo velocidade ao longo da curva suave γ parametrizada por u .

Note que $\frac{dx^k}{du}$ é um verdadeiro campo de vetores contravariantes, e que

$$\frac{\delta T^i}{\delta u} = \frac{\partial T^i}{\partial x^k} \frac{dx^k}{du} + \left\{ \begin{array}{c} i \\ jk \end{array} \right\}_g T^j \frac{dx^k}{du} = \frac{DT^i}{Dx^k} \frac{dx^k}{du}.$$

Dessa forma, vemos que a derivada absoluta ao longo de γ é um campo de vetores contra-variante, uma vez que, pela Afirmação (4.1), a derivada covariante $\frac{DT^i}{Dx^k}$ é um tensor misto de ordem 2.

Definição 4.9 *Um campo de vetores $J(s)$ ao longo de uma geodésica γ é chamado de **campo de Jacobi** se satisfaz a equação*

$$\frac{\delta^2 J^j}{\delta s^2} + \mathbb{B}_i^j J^i = 0,$$

em que $\frac{\delta}{\delta s}$ é a derivada absoluta (4.62), s é o parâmetro de comprimento de arco e

$$\mathbb{B}_i^j := \mathbb{R}_{iml}^j \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^m}{ds}$$

é chamado de **tensor de desvio do campo de Jacobi** $J(s)$, campo este que é tomado como ortogonal à $\gamma(s)$, ou seja, ortogonal ao campo velocidade ao longo de γ .

Definição 4.10 *Seja $\gamma: [t_1, t_2] \rightarrow M$ uma geodésica tal que $\gamma(t_1) = p$ e $\gamma(t_2) = q$. O ponto q é dito **conjugado a p ao longo de γ** se existe um campo de Jacobi não-trivial ao longo de γ que se anula em p e q , ou seja, $J(t_1) = J(t_2) = 0$.*

Exemplo 4.2 *Segundo (LEE, 1997, p.181), todo campo de Jacobi na esfera \mathbb{S}^n de raio r que se anula em um ponto p , tem seu primeiro $J = 0$ a uma distância igual a πr , ou seja, dado um ponto $p \in \mathbb{S}^n$, seu antípoda $-p$ é conjugado a p ao longo dos grandes círculos de \mathbb{S}^n . Nesse caso, para que dois pontos sejam não conjugados, a distância entre eles deve ser menor que πr .*

Considere x_1 um ponto em uma variedade Riemanniana e x_2 pertencente a uma vizinhança U geodesicamente convexa de x_1 , onde γ é a única geodésica que liga x_1 e x_2 , parametrizada pelo comprimento de arco e que denotaremos por $\gamma_{x_1 x_2}$.

Agora, seja N uma hipersuperfície que é ortogonal à $\gamma_{x_1 x_2}$. Naturalmente, podemos atribuir coordenadas u à N . Além disso, considere que:

1. τ é o comprimento de arco em $\gamma_{x_1 x_2}$;
2. N intercepta γ no ponto x_1 quando $\tau = 0$;
3. Se $x \in \gamma_{x_1 x_2}$ e $x \in N$, então $u(x) = 0$.

Como o vetor velocidade ao longo $\gamma_{x_1 x_2}$ é transportado paralelamente ao longo da mesma, e N é ortogonal a $\gamma_{x_1 x_2}$, então N pode também ser transportada similarmente para o ponto x_2 . Assim, podemos relacionar N com os campos de Jacobi e o desvio geodésico ao longo de $\gamma_{x_1 x_2}$.

Teorema 4.2 *Considere que M é uma variedade simétrica, $f(t, x_1, x_2)$ é a função de transição de um processo de difusão sobre compactos $D \subset M$ que satisfaz a equação*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta_g f + G^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (4.63)$$

onde G é um campo vetorial, x_1 e x_2 são pontos não conjugados ao longo de $\gamma_{x_1 x_2}$, que estão em uma região geodesicamente convexa e suficientemente pequena em torno de x_1 , de modo que exista uma constante $\delta > 0$ tal que $\rho(x_1, x_2) < \delta$, onde ρ é a distância Riemanniana em M . Nestas condições,

$$f(t, x_1, x_2) \sim \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp \left[-\frac{\rho^2}{2t} + A(x_1, x_2) \right] \rho^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{dS}{d\phi} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.64)$$

em que $\rho = \rho(x_1, x_2)$,

$$A(x_1, x_2) = \int_0^\rho \langle B, \gamma'(s) \rangle ds \quad (4.65)$$

é o trabalho do campo G ao longo de $\gamma_{x_1 x_2}$ e $\frac{dS}{d\phi}$ é um objeto geométrico que caracteriza a divergência do fluxo geodésico próximo a $\gamma_{x_1 x_2}$, dado por

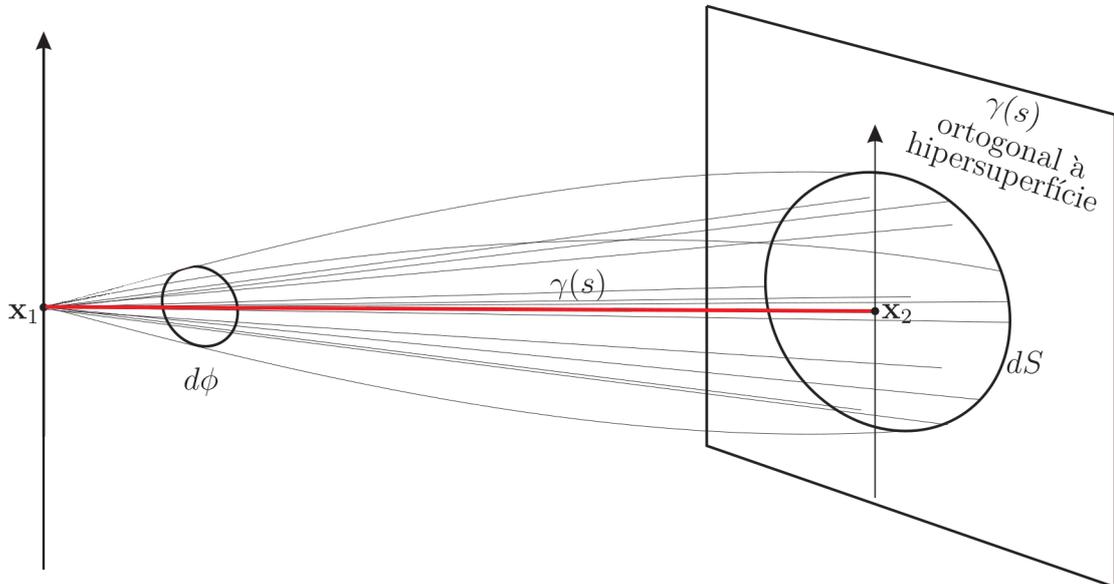
$$\frac{dS}{d\phi} = \rho^{k_0} \prod_{i=1}^{k_+} \left[\frac{\sin(\sqrt{\lambda_i^+} \rho)}{\sqrt{\lambda_i^+}} \right] \prod_{j=1}^{k_-} \left[\frac{\sinh(\sqrt{-\lambda_j^-} \rho)}{\sqrt{-\lambda_j^-}} \right], \quad (4.66)$$

onde λ_i^+ e λ_j^- são autovalores da matriz que representa o tensor de desvio dos campos de Jacobi ao longo de $\gamma_{x_1 x_2}$, tais que $\mathbb{B}_i^j = \delta_i^j \lambda_j$. Além disso, k_0 , k_+ , k_- são respectivamente, o número de autovalores nulos, positivos e negativos, tais que $k_0 + k_+ + k_- = n - 1$. Estes valores se relacionam com a curvatura da variedade e se M é um espaço de curvatura constante $K(p)$ para todo $p \in M$, teremos

$$\lambda_j = K(p), \quad \forall j = 1, \dots, n-1.$$

Para entender geometricamente o que significa o termo $\frac{dS}{d\phi}$, emitimos a partir do ponto x_1 um feixe de “raios” de geodésicas em um ângulo sólido $d\phi$, que “ilumina” uma área dS na hipersuperfície geodésica N .

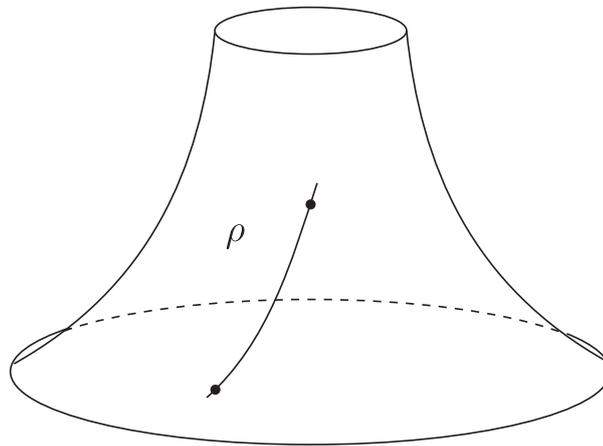
Figura 15 – Raios de geodésicas.



Fonte: Fonte própria (2020).

Para o caso da pseudoesfera construída na seção anterior, vamos cortar o pico infinito da tractriz revolucionada. Temos então uma superfície com bordo em duas componentes disjuntas.

Figura 16 – Pseudoesfera com bordo em componentes disjuntas.



Fonte: Fonte própria (2020).

Neste caso, não estamos aptos a usar diretamente os resultados do Teorema 4.2. As hipóteses requeridas não são satisfeitas por exemplo para pontos pertencentes às componentes do bordo.

No entanto, podemos esperar que para um região geodesicamente convexa e pontos fora do bordo, a densidade de transição será aproximada da forma

$$f(t, x_1, x_2) \sim \frac{\sqrt{\rho}}{2\pi t \sqrt{\sinh \rho}} \exp \left[-\frac{\rho^2}{2t} + A(x_1, x_2) \right].$$

Para um processo de difusão que satisfaz as hipóteses do Teorema 4.2 com M sendo a esfera \mathbb{S}^n de raio r , temos $k_0 = 0$, $k_- = 0$, $k_+ = n - 1$ e $\lambda_i = \frac{1}{r^2}$ para todo $i = 1, \dots, n - 1$. Assim, a partir de (4.66),

$$\frac{dS}{d\phi} = \left[\frac{\sin(\frac{\rho}{r})}{\frac{1}{r}} \right]^{n-1},$$

e teremos para a função de transição, a aproximação,

$$f(t, x_1, x_2) \sim \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp \left[-\frac{\rho^2}{2t} + A(x_1, x_2) \right] \left[\frac{\rho}{r \sin \frac{\rho}{r}} \right]^{\frac{n-1}{2}}.$$

Para a esfera \mathbb{S}^2 , fazendo $n = 2$, temos então

$$f(t, x_1, x_2) \sim \frac{\sqrt{\rho}}{2\pi t \sqrt{r \sin(\frac{\rho}{r})}} \exp \left[-\frac{\rho^2}{2t} + A(x_1, x_2) \right].$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Concluimos que dentro da teoria dos processos de difusão, podemos identificar a presença ou ausência de propriedades geometricamente invariantes de determinados elementos. Esse raciocínio é baseado em alguns fatos, como por exemplo: a obtenção de uma métrica Riemanniana a partir do coeficiente de difusão a^{ij} , a constatação de que isoladamente o campo de drift b^i não se constitui como um verdadeiro campo de vetores e a certificação de que com a introdução do campo de Christoffel ch^i , o termo $b^i + ch^i$ nos entrega um invariante geométrico.

A partir da teoria apresentada, podemos investigar a aleatoriedade dos processos. Considerando o movimento Browniano como perfeitamente aleatório, basta designar o quanto um determinado processo de difusão se aproxima do mesmo. De modo geral, é possível apontar também quais elementos geram efeitos sobre o movimento de difusão a ser abordado.

Acreditamos que o nosso principal objetivo foi alcançado, uma vez que foi possível criar uma fonte de ferramentas que podem ser utilizadas para a construção de um modelo analítico para o estudo de processos de difusão em variedades Riemannianas.

O desenvolvimento deste trabalho contribuiu para o estudo de boa parte dos conteúdos vistos em um curso de Geometria Riemanniana, visto que tratamos de conceitos como: métrica, conexão, geodésicas e curvatura. Além disso, ajudou no estudo de vários conceitos relacionados ao cálculo tensorial.

Vale destacar a relevância no âmbito da matemática aplicada, no sentido de que a possibilidade de propor modelos para processos difusivos é um convite para relacionar a matemática com outras ciências.

Ideias de projetos futuros podem ser construídas visando uma extensão desse trabalho para uma geometria mais geral e também aplicada a modelos em biologia, física e engenharia, por exemplo, geometrias tipo Finsler. (ANTONELLI; LACKEY, 1998) e (ANTONELLI; ZASTAWNIAK, 1999) são referências para este tipo de abordagem.

Além disso, ferramentas que aqui foram apresentadas, proporcionam o estudo de aplicações da difusão em biologia. Com base na generalização de conceitos vistos no Processo WFK, uma geometria de drift genético aleatório pode ser explorada a partir do caso n-dimensional do coeficiente de difusão $A(x) = x(1 - x)$ visto na subseção 2.1.1.

REFERÊNCIAS

- AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY. **Kolmogorov in Perspective (History of Mathematics, Vol. 20)**. Traduzido por Harold H. McFaden. Providence: American Mathematical Society, 2000.
- ANTONELLI, P. L. **The Information Dynamics of the Diffusion Processes of Population Genetics**. *Open Sys. & Information Dyn.*, Vol.4, 101-117, 1997.
- ANTONELLI, P. L.; LACKEY, B. C. **The Theory of Finslerian Laplacians and Applications**. 1° ed. Dordrecht: Springer, 1998.
- ANTONELLI, P. L.; ZASTAWNIAK, T. J. **Fundamentals of Finslerian Diffusion with Applications**. 1° ed. Dordrecht: Springer, 1999.
- ANTONELLI, P. L.; STROBECK, C. **The Geometry of Random Drift I. Stochastic Distance and Diffusion**. *Journal of Applied Probability*, Vol. 9, 238-249, 1977.
- CARMO, M. P. **Geometria Riemanniana**. 5° ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- CRANK, J. **The Mathematics of Diffusion**. 2° ed. Oxford: Oxford University Press, 1975.
- DYNKIN, E. B. **Kolmogorov and the Theory of Markov Processes**. *Institute of Mathematical Statistics*, Vol. 17, 822-832, 1989.
- HELGASON, S. **Differential Geometry and Symmetric Spaces**. 1° ed. New York: Academic Press, 1962.
- HOFRICHTER, J.; JOST, J.; TRAN, T. D. **Information Geometry and Population Genetics**. 1° ed. Cham: Springer International Publishing AG, 2017.
- HOLMES, M. H. **Introduction to Numerical Methods in Differential Equations**. 1° ed. New York: Springer-Verlag, 2007.
- HORSTHEMKE, W.; LEFEVER, R. **Noise-Induced Transitions: Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology**. 1° ed. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- IVASYSHEN, S. D.; MEDYNSKY, I. P. **The Fokker-Planck-Kolmogorov Equations For Some Degenerate Diffusion Processes**. *Theory of Stochastic Processes*, Vol. 16, 57-66, 2010.
- KIMURA, M. **Diffusion models in population genetics**. *Journal of Applied Probability*, Vol. 1, 177-232, 1964.
- KOLMOGOROV, A. **Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung**. *Mathematische Annalen.*, Vol. 104, 415-458, 1931.

KOLMOGOROV, A. N. **Selected Works Vol II: Probability Theory and Mathematical Statistics**. Editado por A. N. Shiryayev. Traduzido por G. Lindquist. Dordrecht: Springer, 1992.

LAUGWITZ, D. **Differential and Riemannian Geometry**. Traduzido por Fritz Steinhardt. 1º ed. London: Academic Press, 1965.

LEE, J. M. **Introduction to Smooth Manifolds**. 2º ed. New York: Springer-Verlag, 2012.

LEE, J. M. **Riemannian Manifolds: an introduction to curvature**. 1º ed. New York: Springer-Verlag, 1997.

LOVELOCK, **Tensors, Differential Forms, and Variational Principles**. 2º ed. New York: Dover Publications, 1989.

MOLCHANOV, S. A. **Diffusion Process and Riemannian Geometry**. Uspekhi Mat., Vol. 30, 3–59, 1975. Traduzido por Russian Math., 1-63, 1975.

PETERSEN, P. **Riemannian Geometry**. 2º ed. New York: Springer-Verlag, 2006.

TRAN, T. D. **Information geometry and the Wright–Fisher model of mathematical population genetics**. Tese (Doutorado em Matemática) - Faculdade de Matemática e Ciência da Computação, Universidade de Leipzig. Leipzig, p.130, 2012.