

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
PIMES – PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA  
DOUTORADO EM ECONOMIA**

**MARCOS ROBERTO GOIS DE OLIVEIRA**

**GERENCIAMENTO DO RISCO DE MERCADO BASEADO NO VALUE  
AT RISK ESTÁTICO E DINÂMICO PARA CARTEIRAS DE AÇÕES E  
OPÇÕES NEGOCIADAS NA BOVESPA.**

**RECIFE-PE  
2005**

**MARCOS ROBERTO GOIS DE OLIVEIRA**

**GERENCIAMENTO DO RISCO DE MERCADO BASEADO NO VALUE  
AT RISK ESTÁTICO E DINÂMICO PARA CARTEIRA DE AÇÕES E  
OPÇÕES NEGOCIADAS NA BOVESPA.**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em  
Economia (PIMES) como requisito à obtenção do  
título de Doutor em Economia pela Universidade  
Federal de Pernambuco.

Orientador:  
PROF JOSÉ LAMARTINE TÁVORA  
JUNIOR.

Co-Orientador:  
PROF CHARLES ULISSES MONTREUIL  
CARMONA.

**Recife-PE  
2005.**

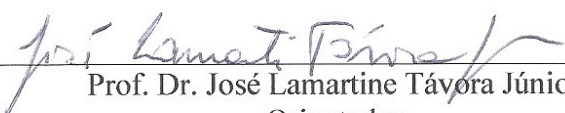
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS  
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA  
PIMES/ PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA**

**PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA DE DEFESA DE TESE DO  
DOUTORADO EM ECONOMIA DE**

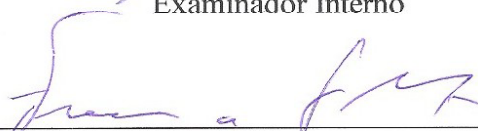
MARCOS ROBERTO GOIS DE OLIVEIRA

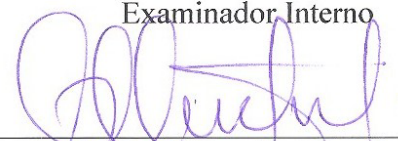
A Comissão Examinadora composta pelos professores abaixo, sob a presidência do primeiro, considera o candidato Marcos Roberto Gois de Oliveira **APROVADO**.


Recife, 16/04/05.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. José Lamartine Távora Júnior  
Orientador

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Alvaro Barrantes Hidalgo  
Examinador Interno

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Francisco de Sousa Ramos  
Examinador Interno

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Charles Ulises De Montreuil Carmona  
Examinador Externo/PROPAD/UFPE

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Marcos Costa Holanda  
Examinador Externo/CAEN/UFC

## AGRADECIMENTOS

Ao professor Lamartine pela paciência e orientação deste trabalho.

Ao professor Carmona, sem o qual este trabalho não teria sido possível.

Ao PIMES, CEPREMAP e a Univesité Paris 1 pela estrutura oferecida.

Aos colegas do Doutorado e Mestrado pelo apoio mútuo nos momentos difíceis.

Aos parentes pela paciência e compreensão nos momentos de ausência.

À minha mãe, Luci, pelo amor e pelas orações.

À minha amada Tatiana pelos quatro anos de apoio incondicional nesta tarefa.

## RESUMO

O presente trabalho aborda o gerenciamento do risco do mercado utilizando o *Value at Risk* (VaR), o qual se tornou a ferramenta para a mensuração do risco esperado mais utilizada, tanto por instituições financeiras, quanto não financeiras. O VaR mede a maior perda esperada em dado período de tempo, tal perda esperada é baseada nas suposições sobre a distribuição de retorno dos fatores de risco.

A suposição de mercado eficiente é normalmente a justificativa para a baixa eficácia dos modelos de gestão do risco de ativos brasileiros. No entanto a forma como a hipótese de mercado eficiente é incorporada aos modelos de previsão e de gerenciamento do risco não é explorada na literatura com a profundidade necessária. O resultado são trabalhos empíricos pouco conclusivos sobre a eficácia dos modelos de VaR aplicados ao mercado brasileiro.

Neste trabalho o objetivo foi modelar o mercado de ações brasileiro sem abandonar a hipótese de mercado eficiente. Para tal fez-se necessário a incorporação da dinâmica do mercado, caracterizada pela alta volatilidade, aos modelos de VaR. Obteve-se sucesso para a modelagem das carteiras de ações, entretanto os resultados para carteiras com opções mostraram que a hipótese de mercado eficiente não é suficiente para a modelagem no mercado de opções brasileiro.

O VaR foi analisado sob diversas suposições, transitando entre os modelos paramétricos e não paramétricos, das ações mais representativas do mercado acionário brasileiro: Telemar PN, Petrobrás PN e Vale do Rio Doce PNA; e das opções mais negociadas: as opções de compra de ações da Telemar PN.

Os resultados mostraram que modelos de VaR dinâmico fornecem a adaptabilidade necessária para que o VaR obtivesse resultados satisfatórios. Isto ocorreu em função da velocidade da incorporação de novas informações ao modelo ratificando a hipótese de mercado eficiente. Entre os modelos de VaR, o que se mostrou mais adequado foi o de simulação de Monte Carlo pela flexibilidade de incorporação de novas suposições.

Ficou claro que a tarefa de gerenciar derivativos sofisticados, como opções, deve ser iniciado pelo correto modelo de precificação de tais derivativos. O modelo de precificação de Black & Scholes, na sua forma original, não foi capaz de prever o comportamento das opções objeto de estudo. Um ajuste ao modelo incorporando a aposta de alavancagem dos investidores em opção tornou a modelagem do risco via o VaR aceitável.

## ABSTRACT

This thesis approaches the risk's administration of the market using Value at Risk (VaR), which became widely used technique for measuring future expected risk for both financial and non-financial institutions. The VaR measures the largest expected loss in given period of time that expected loss is depending of suppositions about the distribution of return of the risk factors.

The efficiency market supposition is usually the reason for the lower effectiveness of the risk management models to the Brazilian market. However, the form how the efficiency market hypothesis is adapted in the prevision models and risk management is not well analyzed in the literature. The results are empiric papers not conclusive about the effectiveness of the VaR's models applied to the Brazilian market.

The objective of this work was the approach of the Brazilian market but without forget the efficiency market hypothesis. For that, it was made the dynamic incorporation of the market movement, that has (in the case of Brazilian market) high volatility, to VaR's models. The success was achieved in the action's portfolios without drop the efficiency market hypothesis, but option's portfolios did not work successful. Show off that the efficiency market hypothesis is not sufficiency for that specific market.

The VaR has been analyzed under several suppositions, among the models parametric and not parametric, in the most representative Brazilian's actions stock market: Telemar PN, Petrobrás PN and Vale do Rio Doce PNA; and in the options more negotiated: the Telemar PN call options.

The results have been showed that dynamic models VaR provide the necessary condition to satisfactory results VaR. This happened because of the incorporation velocity of new information in the model, ratifying the efficiency market hypothesis. Among the VaR models, what showed more appropriate was the Monte Carlo simulation with GARCH volatility.

Of course, the task of managed sophisticated derivative, as options, should start for the correct pricing model of such derivatives. The precification model of Black & Scholes, in his original form, was not capable to predict the behavior of the options study object. An adjustment to the model, incorporating the bet of the investor's leverage in option became the modeling of the risk to acceptable VaR.

## SUMÁRIO:

|  |      |
|--|------|
| ÍNDICE DE FIGURAS .....  | viii |
| ÍNDICE DE TABELAS .....  | x    |
| 1. INTRODUÇÃO.....   | 1    |
| 1.1 Aspectos Gerais .....  | 1    |
| 1.1.1 O Value at Risk .....  | 3    |
| 1.1.2 A Volatilidade .....   | 7    |
| 1.1.3 Análise Estática x Dinâmica.....   | 8    |
| 1.1.4 A Estrutura do Trabalho .....  | 9    |
| 1.2 Motivação .....  | 9    |
| 1.3 O Problema de Pesquisa .....   | 13   |
| 1.4 Objetivos da Pesquisa.....   | 14   |
| 1.5 Metodologia.....   | 15   |
| 1.6 Os Dados e Delimitação do Trabalho.....  | 19   |
| 2 FUNDAMENTOS METODOLÓGICOS E ECONÔMICOS PARA O GERENCIAMENTO DO RISCO .....         | 21   |
| 2.1 Fundamentos Econômicos do Gerenciamento de Risco .....                           | 21   |
| 2.2 O Mercado Acionário Brasileiro num contexto de Gestão do Risco .....             | 31   |
| 2.3 Dinâmica do Retorno do Ativo.....  | 32   |
| 2.3.1 O Processo de Wiener.....  | 34   |
| 2.3.2 A Fórmula do Preço do Ativo .....  | 38   |
| 2.4 O Modelo de Precificação de Opções de Black e Scholes .....                      | 41   |
| 2.4.1 A Análise de Black e Scholes.....  | 42   |
| 2.4.2 As Equações de Black e Scholes: uma Solução Explícita para Opções Europeias... | 46   |
| 2.5 A Estimação da Volatilidade .....  | 48   |
| 2.5.1 A Volatilidade Histórica.....  | 49   |
| 2.5.2 A Família GARCH .....  | 51   |
| 3 O VAR – VALUE AT RISK.....   | 66   |
| 3.1 O Risco, o Value at Risk: Aspectos Gerais .....                                  | 66   |
| 3.1.1 Apresentando o Risco .....   | 66   |
| 3.1.2 Coerência das Ferramentas de Risco .....                                       | 69   |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 3.1.3 | Conceitualização do <i>Value at Risk</i> .....                         | 71  |
| 3.2   | Os Parâmetros Subjetivos do VaR.....                                   | 75  |
| 3.3   | O Método Delta – Normal .....  | 77  |
| 3.3.1 | O Método Tradicional .....   | 77  |
| 3.3.2 | Os Métodos <i>Stress</i> VaR.....                                      | 83  |
| 3.4   | As metodologias Analíticas Baseadas nas Gregas. ....                   | 88  |
| 3.5   | Método das Simulações Históricas (MSH). ....                           | 91  |
| 3.5.1 | O Método de <i>Bootstrap</i> . ....                                    | 93  |
| 3.5.2 | O <i>Mirror</i> Cenários.....  | 94  |
| 3.5.3 | Cenários Ponderados. ....  | 94  |
| 3.6   | O Método de Simulação de Monte Carlo (MSMC). ....                      | 95  |
| 3.6.1 | A Simulação de uma Trajetória de Preços. ....                          | 96  |
| 3.6.2 | A Geração de Números Aleatórios.....                                   | 98  |
| 3.6.3 | Simulações de Monte Carlo com Múltiplas Variáveis .....                | 100 |
| 3.7   | Comparação entre os Diferentes Métodos.....                            | 101 |
| 3.8   | Avaliando a Eficiência do VaR. ....                                    | 103 |
| 3.8.1 | Back Testing e Kupiec (1995).....                                      | 104 |
| 3.8.2 | O Procedimento de Lopez. ....  | 106 |
| 3.9   | Evidências Empíricas. ....   | 107 |
| 4     | RESULTADOS EMPÍRICOS.....  | 111 |
| 4.1   | Os Dados .....   | 111 |
| 4.1.1 | As Ações.....  | 112 |
| 4.1.2 | As Opções.....   | 122 |
| 4.2   | Estacionariedade, Autocorrelação e Heterocedasticidade das Séries..... | 123 |
| 4.3   | Seleção dos Modelos de Volatilidade.....                               | 127 |
| 4.4   | Definindo as Carteiras. ....   | 130 |
| 4.5   | Estimando o Value at Risk Estático. ....                               | 131 |
| 4.5.1 | VaR Estático das Ações.....  | 132 |
| 4.5.2 | VaR Estático das Opções.....   | 140 |
| 4.6   | O Value at Risk Dinâmico.....  | 140 |
| 4.6.1 | VaR Dinâmico das Ações.....  | 140 |
| 4.6.2 | VaR Dinâmico das Opções e Carteira Hedgeada. ....                      | 143 |
| 4.7   | Análise dos Resultados.....  | 146 |



|  |     |
|--|-----|
| 4.8 Ajustes Metodológicos à Precificação de Opções ..... | 151 |
| 5 CONCLUSÕES .....                                       | 156 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....                         | 160 |
| APÊNDICES .....  | 176 |
| ANEXOS .....   | 222 |

## ÍNDICE DE FIGURAS

|  |     |
|--|-----|
| Figura 1.1: Retorno Ibovespa Diário no período de 04/07/1994 a 27/10/2004.....   | 11  |
| Figura 1.2.: Retorno do Dow Jones Diário no período de 04/07/1994 a 27/10/2004.....  | 12  |
| Figura 1.3: Fluxograma da metodologia.....   | 17  |
| Figura 1.4: Ibovespa diário no período de 04/07/1994 a 27/10/2004.....   | 20  |
| Figura 2.1: Aversão ao risco e curvas de indiferença.....  | 22  |
| Figura 2.2: Detalhe de um passeio aleatório discreto.....  | 33  |
| Figura 2.3: Simulação de uma trajetória do movimento browniano. ....   | 36  |
| Figura 2.4: Processo estocástico ( $z_t, t \geq 0$ ).....  | 37  |
| Figura 3.1: Retornos dos títulos C-Bond.....   | 72  |
| Figura 3.2: A medição do VaR dos títulos C-Bond.....   | 72  |
| Figura 3.3: Comparação entre as técnicas de VaR (acurácia x tempo de processamento).....   | 103 |
| Figura 4.1: Valor de fechamento diário da Telemar PN no período de 17/03/1999 a<br>19/03/2004.....   | 113 |
| Figura 4.2: Retorno diário da Telemar PN no período de 17/03/1999 a 19/03/2004.....  | 114 |
| Figura 4.3: Gráficos de análise de distribuição para o retorno da Telemar PN.....  | 115 |
| Figura 4.4: Valor de fechamento diário da Petrobrás PN no período de 17/03/1999 a<br>19/03/2004.....                                       | 116 |
| Figura 4.5: Retorno diário da Petrobrás PN no período de 17/03/1999 a 19/03/2004.....  | 117 |
| Figura 4.6: Gráficos de análise de distribuição para o retorno da Petrobrás PN.....  | 118 |
| Figura 4.7: Valor de fechamento diário da Vale do Rio Doce PNA no período de 17/03/1999 a<br>19/03/2004.....                               | 119 |
| Figura 4.8: Retorno diário da Vale do Rio Doce PNA no período de 17/03/1999 a 19/03/2004.<br>.....   | 120 |
| Figura 4.9: Gráficos de análise de distribuição para o retorno da Petrobrás PNA.....   | 121 |
| Figura 4.10: Fechamento diário das opções da Telemar PN no período de 17/03/2002 a<br>19/03/2004.....                                      | 122 |
| Figura 4.11: Função de autocorrelação do retorno para Vale do Rio Doce PNA, Petrobrás PN<br>e Telemar PN; respectivamente.....             | 124 |
| Figura 4.12: Função de autocorrelação do retorno ao quadrado para Vale do Rio Doce PNA,<br>Petrobrás PN e Telemar PN; respectivamente..... | 125 |

|   |     |
|---|-----|
| Figura 4.13: VaR de MSMC GARCH Modelo com 2 r constante para a carteira Vale do Rio Doce + Telemar + Petrobrás.....       | 139 |
| Figura 4.14: VaR de <i>mirror</i> cenários para a carteira Telemar + Petrobrás. ....                                      | 139 |
| Figura 4.15: VaR de MSMC GARCH Modelo com 1 r constante e MSH tradicional para a carteira Vale do Rio Doce + Telemar..... | 143 |
| Figura 4.16: VaR MSMC GARCH com r constante para a carteira de opções <i>call ratio</i> .....                             | 144 |
| Figura 4.17: VaR MSMC GARCH com r constante para a carteira borboleta comprada. ...                                       | 144 |
| Figura 4.18: VaR MSMC GARCH com r constante para a carteira de opções borboleta vendida. ....                             | 145 |
| Figura 4.19: VaR MSMC GARCH com r constante para a carteira <i>hedge</i> delta neutro da Telemar.....                     | 146 |
| Figura 5.1: VaR MSH cenários ponderados para a carteira Petrobrás + Telemar. ....   | 147 |
| Figura 5.2: Valor real da opção dentro do dinheiro versus valor calculado.....  | 152 |
| Figura 5.3: VaR MSMC GARCH dinâmico para a carteira borboleta vendida. ....   | 153 |

## ÍNDICE DE TABELAS

|  |     |
|--|-----|
| Tabela 2.1: Persistência dos modelos GARCH.....  | 58  |
| Tabela 3.1: Resumo das principais ferramentas para avaliação do risco de mercados (ativos) simples.....                          | 68  |
| Tabela 3.2: Comparação entre as técnicas de VaR.....   | 102 |
| Tabela 3.3: Intervalo de não rejeição da hipótese nula de que a proporção de falhas $p^*$ é igual a $p$ , a 5% de confiança..... | 105 |
| Tabela 3.4: Número máximo do tamanho da amostra para que a hipótese $p = p^*$ seja rejeitada a 5% de confiança.....              | 106 |
| Tabela 4.1: Volume total negociado na BOVESPA no período de 1994 a 2003 em milhões de reais.....                                 | 111 |
| Tabela 4.2: Estatísticas descritivas para os retornos da Telemar PN.....   | 115 |
| Tabela 4.3: Estatísticas descritivas para os retornos da Petrobrás PN.....   | 117 |
| Tabela 4.4: Estatísticas descritivas para os retornos da Vale do Rio Doce PNA.....   | 121 |
| Tabela 4.5: Teste ADF .....  | 123 |
| Tabela 4.6: Q-teste para os retornos das séries.....   | 125 |
| Tabela 4.7: Q-teste para os retornos quadrado das séries.....  | 126 |
| Tabela 4.8: Teste de Engle proposto por Bourbonnais e Terraza (1998).....  | 126 |
| Tabela 4.9: Teste de assimetria de impactos.....   | 127 |
| Tabela 4.10: Quadro resumo com os melhores modelos ARMA-GARCH com janela de 255 dias.....  | 128 |
| Tabela 4.11: Quadro resumo com os melhores modelos ARMA-GARCH com janela de 510 dias.....  | 128 |
| Tabela 4.12: Quadro resumo com os melhores modelos ARMA-EGARCH com janela de 255 e 510 dias.....                                 | 129 |
| Tabela 4.13: Quadro resumo com os melhores modelos ARMA-GARCH-L com janela de 255 e 510 dias.....                                | 129 |
| Tabela 4.14: VaR estático-1 da Vale do Rio Doce PN com 510 observações.....  | 134 |
| Tabela 4.15: VaR estático-2 da Vale do Rio Doce PN com 510 observações.....  | 135 |
| Tabela 4.16: Quadro resumo com melhores modelos de VaR estático para carteiras simples.....                                      | 137 |

|   |     |
|---|-----|
| Tabela 4.17: Quadro resumo com os melhores modelos de VaR estático para carteiras com dois e três ativos. ....  | 138 |
| Tabela 4.18: Quadro resumo com os melhores modelos de VaR dinâmico para carteiras simples. ....   | 141 |
| Tabela 4.19: Quadro resumo com os melhores modelos de VaR dinâmico para carteiras com dois e três ativos. ....  | 142 |
| Tabela 5.1: Melhores modelos de VaR para as carteiras de ações em função da volatilidade. ....  | 149 |
| Tabela 5.2: Quadro indicativo da coerência do VaR como medida de risco.....   | 150 |
| Tabela 5.3: VaR dinâmico ajustado para carteiras com opções. ....   | 154 |
| Tabela A. 1: Resultados dos teste de seleção de modelos ARMA (r, m) – GARCH (p,q); Vale do Rio Doce PNA com janela de 252 dias (um ano). Em negrito os melhores.....    | 177 |
| Tabela A. 2: Resultados dos teste de seleção de modelos ARMA (r, m) – GARCH (p,q); Petrobrás PN com janela de 252 dias (um ano). Em negrito os melhores.....            | 178 |
| Tabela A. 3: Resultados dos teste de seleção de modelos ARMA (r, m) – GARCH (p,q); Telemar PN com janela de 252 dias (um ano). Em negrito os melhores. ....             | 179 |
| Tabela A. 4: Resultados dos teste de seleção de modelos ARMA (r, m) – GARCH (p,q); Vale do Rio Doce PNA com janela de 504 dias (dois anos). Em negrito os melhores..... | 180 |
| Tabela A. 5: Resultados dos teste de seleção de modelos ARMA (r, m) – GARCH (p,q); Petrobrás PN com janela de 504 dias (dois anos). Em negrito os melhores.....         | 181 |
| Tabela A. 6: Resultados dos teste de seleção de modelos ARMA (r, m) – GARCH (p,q); Telemar PN com janela de 504 dias (dois anos). Em negrito os melhores. ....          | 182 |
| Tabela A. 7: VaR estático –1 para a Vale do Rio Doce PNA. ....  | 183 |
| Tabela A. 8: VaR estático –2 para a Vale do Rio Doce PNA. ....  | 184 |
| Tabela A. 9: VaR estático –1 para a Petrobrás PN com 255 observações. ....  | 185 |
| Tabela A. 10: VaR estático –2 para a Petrobrás PN com 255 observações. ....   | 186 |
| Tabela A. 11: VaR estático –1 para a Petrobrás PN com 510 observações. ....   | 187 |
| Tabela A. 12: VaR estático –2 para a Petrobrás PN com 510 observações. ....   | 188 |
| Tabela A. 13: VaR estático –1 para a Telemar PN com 255 observações. ....   | 189 |
| Tabela A. 14: VaR estático –2 para a Telemar PN com 255 observações. ....   | 190 |
| Tabela A. 15: VaR estático –1 para a Telemar PN com 510 observações. ....   | 191 |
| Tabela A. 16: VaR estático –2 para a Telemar PN com 510 observações. ....   | 192 |

|   |     |
|---|-----|
| Tabela A. 17: VaR estático-1 para a carteira com Vale do Rio Doce PNA e Petrobrás PN. .                 | 193 |
| Tabela A. 18: VaR estático-2 para a carteira com Vale do Rio Doce PNA e Petrobrás PN. .                 | 194 |
| Tabela A. 19: VaR estático-1 para a carteira com Vale do Rio Doce PNA e Telemar PN....                  | 195 |
| Tabela A. 20: VaR estático-2 para a carteira com Vale do Rio Doce PNA e Telemar PN....                  | 196 |
| Tabela A. 21: VaR estático-1 para a carteira com Telemar PN e Petrobrás PN. ....                        | 197 |
| Tabela A. 22: VaR estático-2 para a carteira com Telemar PN e Petrobrás PN. ....                        | 198 |
| Tabela A. 23: VaR estático-1 para a carteira com Vale do Rio Doce PNA, Telemar PN e Petrobrás PN. ....  | 199 |
| Tabela A. 24: VaR estático-2 para a carteira com Vale do Rio Doce PNA, Telemar PN e Petrobrás PN. ....  | 200 |
| Tabela A. 25: VaR estático para a carteira com opções da Telemar PN estratégia <i>call-ratio</i> . .... | 201 |
| Tabela A. 26: VaR estático para a carteira com opções da Telemar PN estratégia borboleta comprada. .... | 202 |
| Tabela A. 27: VaR estático para a carteira com opções da Telemar PN estratégia borboleta vendida. ....  | 203 |
| Tabela A. 28: VaR dinâmico –1 para a Vale do Rio Doce PNA.....  | 204 |
| Tabela A. 29: VaR dinâmico –2 para a Vale do Rio Doce PNA.....  | 205 |
| Tabela A. 30: VaR dinâmico –1 para a Petrobrás PN com 255 observações.....                              | 206 |
| Tabela A. 31: VaR dinâmico –2 para a Petrobrás PN com 255 observações.....                              | 207 |
| Tabela A. 32: VaR dinâmico –1 para a Telemar PN com 255 observações.....                                | 208 |
| Tabela A. 33: VaR dinâmico –2 para a Telemar PN com 255 observações.....                                | 209 |
| Tabela A. 34: VaR dinâmico-1 para a carteira com Vale do Rio Doce PNA e Petrobrás PN. ....              | 210 |
| Tabela A. 35: VaR dinâmico-2 para a carteira com Vale do Rio Doce PNA e Petrobrás PN. ....              | 211 |
| Tabela A. 36: VaR dinâmico-1 para a carteira com Vale do Rio Doce PNA e Telemar PN. ....                | 212 |
| Tabela A. 37: VaR dinâmico-2 para a carteira com Vale do Rio Doce PNA e Telemar PN. ....                | 213 |
| Tabela A. 38: VaR dinâmico-1 para a carteira com Telemar PN e Petrobrás PN.....                         | 214 |
| Tabela A. 39: VaR dinâmico-2 para a carteira com Telemar PN e Petrobrás PN.....                         | 215 |
| Tabela A. 40: VaR dinâmico-1 para a carteira com Vale do Rio Doce PNA, Telemar PN e Petrobrás PN.....   | 216 |

|   |     |
|---|-----|
| Tabela A. 41: VaR dinâmico-2 para a carteira com Vale do Rio Doce PNA, Telemar PN e Petrobrás PN.....       | 217 |
| Tabela A. 42: VaR dinâmico para a carteira com opções da Telemar PN estratégia <i>call-ratio</i> .<br>..... | 218 |
| Tabela A. 43: VaR dinâmico para a carteira com opções da Telemar PN estratégia borboleta comprada. ....     | 219 |
| Tabela A. 44: VaR dinâmico para a carteira com opções da Telemar PN estratégia borboleta vendida. ....      | 220 |
| Tabela A. 45: VaR dinâmico para a carteira hedge delta neutro da Telemar PN.....                            | 221 |

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 Aspectos Gerais

Parte da teoria econômica é baseada na suposição que preço, renda e outras variáveis são conhecidas com segurança. No entanto, muitas das escolhas dos agentes econômicos são realizadas em ambientes de incerteza<sup>1</sup> nas decisões, mais ainda, é necessário definir o grau de risco no qual se está disposto a assumir.

Há uma grande quantidade e variedade de riscos envolvendo a condução de qualquer atividade econômica. Por exemplo, uma atividade agrícola deve estar constantemente atenta aos riscos de quebra de safra, de falta de financiamento, de queda nos preços dos seus produtos, aumento dos custos de matéria-prima, etc. Jorion (2003) define risco como a volatilidade de resultados inesperados, normalmente relacionada ao valor de ativos ou passivos de interesse.

Como se pode perceber os riscos fazem parte do dia a dia de qualquer atividade econômica. Estes não podem ser eliminados por completo, é possível, no máximo, administrar alguns deles. Risco não é um conceito novo, mas ainda representa um dos grandes desafios para os profissionais de finanças. O modelo proposto por Markowitz em 1952, dando base à Teoria Moderna das Carteiras é a base para os modelos de gestão desde então.

Apesar de não ser um conceito novo, os riscos vêm assumindo uma importância crescente, mais recentemente tornou-se destaque na literatura em função de desastres financeiros internacionais relacionados com o uso indevido de derivativos, exemplos de tais desastres são o caso do Baring Bank, da Procter&Gamble, Bankers Trust, Crédit Lyonnais, Orange County, Metallgesellschaft, etc.<sup>2</sup>. Tais problemas corroboraram para o surgimento de uma nova área do conhecimento, o gerenciamento de risco, cujo principal objetivo é a minimização eficiente do risco, dentro de determinada restrição orçamentária.

Tal área do conhecimento apresenta um papel fundamental para o desenvolvimento das atividades econômicas. A introdução cada vez crescente de novos instrumentos derivativos sofisticados faz com que os aspectos teóricos e computacionais relacionados com

---

<sup>1</sup> Segundo Silva Neto (1998) incerteza é a situação em que se partindo de um determinado conjunto de decisões obtêm-se vários resultados possíveis. Os resultados são conhecidos, mas não a probabilidade destes. Quando se conhecem as probabilidades têm-se as situações de risco.

<sup>2</sup> Estes escândalos financeiros estão apresentados em Jorion (2003).



o *hedge*, combinados com as lições dos recentes desastres financeiros envolvendo derivativos, tornem o gerenciamento do risco uma atividade com importância crescente.

O mercado de derivativos surge acompanhando a história da comercialização, cuja finalidade inicial era o de facilitador das trocas e comercialização. Entretanto, desde o início da sua utilização mostrou-se capaz de diminuir e diversificar os riscos.

Não há uma unanimidade com relação à origem do mercado de derivativos, alguns autores consideram-na como sendo a China Antiga em função da comercialização das *commodities* de base, ou também a idade média com a especialização do comércio. No entanto, o termo tal qual este o é conhecido atualmente, surgiu no início da década de 1970, com as primeiras *swaps*, usadas, no início, para a proteção contra os riscos de flutuação das taxas de câmbio (Bessada, 2000).

Segundo Silva Neto (1998), os derivativos prestam-se à gestão dos riscos e estão intimamente ligados à vida das empresas e bancos. Segundo este autor, os derivativos são contratos entre partes para trocar, unicamente, o valor dos ativos, dos índices ou das *commodities*.

De acordo com Bessada (2000) os contratos derivativos dependem da existência de um outro contrato ou de um ativo (conhecido como ativo objeto) de referência. Se o mercado em referência não existir mais, o derivativo perde sua razão de existir, já que não há a possibilidade de variação dos preços do ativo objeto.

Um outro aspecto sobre o mercado de derivativos é que os ativos de referência devem ser comercializados livremente no mercado, livre de qualquer forma de controle de preços.

Será identificado dentro deste trabalho um modelo relacionado a ativos de referência (em particular ações da IBOVESPA) e opções como derivativos para o controle de risco do mercado. O desenvolvimento da área de produtos derivativos sofisticados requer um bom controle de risco, que vai além da estratégia de diversificação.

Não há regra geral para a determinação dos riscos das instituições financeiras (e empresas que operem com derivativos). No entanto, todas as metodologias minimamente eficientes têm alguma sofisticação matemática, sistemas computacionais e informações confiáveis. No caso dos riscos operacional e legal devem ser abordados caso a caso. Os riscos de mercado e de crédito possuem algumas metodologias que já se encontram em uso e explicadas na literatura.

O foco deste trabalho é o risco de mercado, um fato importante neste tipo de risco é a forma como este pode ser mensurado. Segundo Duarte Jr. (1997), há duas formas de avaliar os riscos de mercado:

- Risco de mercado relativo: é a diferença dos rendimentos de uma carteira de investimentos em relação a um índice utilizado como *benchmark*;
- Risco de mercado absoluto: medem-se as perdas de carteira de investimento sem qualquer relação com um índice.

Para o cálculo de risco de mercado absoluto de uma carteira pode-se utilizar diversas medidas, por exemplo: desvio padrão dos retornos passados (Markowitz, 1952), *downside risk* (média ou momentos parciais) dos retornos passados, o *Value at Risk*, condicional *Value at Risk* (VaR); estes três últimos também podem ser utilizados para o cálculo do risco relativo.

Segundo Artzner et al (1999) e West (2004) as medidas de risco devem ser coerentes com alguns axiomas<sup>3</sup>. Segundo mostrado por Kato (2004) as medidas de risco baseadas no VaR e no CVaR não atendem ao axioma da subaditividade, baseado neste fato o mesmo autor sugere a utilização do *downside risk* como medida coerente de risco. Entretanto, este mesmo trabalho mostra que em alguns casos o *downside risk* não se apresenta sensato para investidores racionais. Um outro problema está relacionado com a não adequação deste modelo ao axioma da invariância transacional.

West (2004) demonstra que o problema da subaditividade do VaR é possível em alguns casos, estes chamados pelo autor de exemplos “patológicos”. Apesar das críticas de alguns autores sobre o VaR, este é o modelo mais utilizado tanto academicamente como na prática. Um aspecto que corrobora é a exigência de capital mínimo para as instituições que operam nos mercados de derivativos, proposta pelo Comitê de Basileia. Tal requerimento de capital deve ser baseado no VaR. Neste trabalho nos concentraremos na metodologia *Value at Risk* (VaR).

### 1.1.1 O Value at Risk

O VaR é uma medida de um quantil que quantifica o risco de uma posição de uma instituição financeira. Ele mensura o risco de mercado ao qual as instituições que operam nos mercados financeiros estão expostas. Rigorosamente falando, o VaR mede a pior perda esperada para um dado horizonte de tempo dentro das condições normais do mercado e a um certo grau de confiança.

Sob a forma de perda o VaR pode ser entendido via a seguinte expressão: “temos c por cento de certeza que não iremos perder mais que X reais nos próximos N dias”. A variável X é o VaR, que é função de dois parâmetros: o horizonte de tempo N e o nível de confiança c. Evidentemente, a qualidade do VaR para uma carteira depende das suposições relativas a sua distribuição e o modelo de valoração.

As suposições sobre a distribuição determinam o que o modelo de VaR assume sobre a distribuição dos retornos da carteira, os lucros e perdas (L&P). Especifica ainda, o que o modelo assume sobre a distribuição dos fatores de risco, sobre os quais o valor da carteira está relacionado.

O modelo de valoração do VaR determina como ele relaciona o valor da carteira à choques nos fatores de risco, ou a relação entre o valor da carteira e o valor dos elementos que compõem essa carteira.

Em função das possibilidades de valoração do VaR e da distribuição dos retornos, há uma gama de diferentes formas de mensurar o VaR. A primeira delas supõe que os fatores de risco são normalmente distribuídos e que o valor da carteira é função linear destes fatores; a partir desta suposição deriva-se a metodologia de VaR conhecida como delta-normal ou da variância-covariância.

Sob tais suposições a tarefa de calcular o VaR reduz-se a encontrar um múltiplo do desvio padrão da carteira, onde o desvio padrão é função linear das volatilidades e correlações individuais dos fatores de risco. De uma forma sintética, o VaR normal é o produto do desvio padrão da carteira pelo parâmetro do nível de confiança e um escalar que representa o valor da carteira.

Esta característica no cálculo confere ao VaR normal as propriedades da simplicidade de implementação e a facilidade de informatividade (mudanças nos valores do VaR em função de alteração nos parâmetros).

Infelizmente a lista de críticas a tal método é extensa. A primeira está associada com a falta de capacidade que o modelo apresenta em capturar adequadamente o risco de evento, o qual se associa com situações extremas ou incomuns, como *crashes* dos mercados acionários ou colapsos das taxas de câmbio (Jorion, 2003).

Um segundo problema é a suposição de normalidade dos retornos, que nem sempre corresponde à realidade dos dados financeiros reais. Segundo Jorion (1997), a maioria dos ativos financeiros apresenta caudas grossas, estas são particularmente preocupantes, visto que

---

<sup>3</sup> Os axiomas propostos por Artzner são: a monotonicidade, invariância transacional, homogeneidade positiva e subaditividade.

o VaR tenta capturar o comportamento do retorno da cauda esquerda. Bollerslev (1986) mostrou que a maioria dos retornos das variáveis financeiras não é normalmente distribuída, na verdade elas tentem a assimetria e a ser leptocúrticas.

Por fim, o método calcula o risco de instrumentos não lineares de forma inadequada. É o caso dos riscos de opções e hipotecas. Segundo Jorion (1997), a aproximação linear para valores de opções é válida apenas para pequena parcela de séries de pagamento a vista do ativo objeto.

Uma alternativa a não linearidade do método delta normal é a utilização da série de Taylor ou aproximações lineares dos retornos dos ativos, e utilizar esta aproximação para mensurar o VaR. A primeira aproximação de Taylor produz o método delta normal. O método delta normal é por definição a primeira ordem da série de Taylor do valor da carteira em relação aos retornos dos ativos (ou dos ativos objetos, quando se trata de opções).

Alguns autores, como Telfah (2003) e Wilson (1996), argumentam que a aproximação simples delta normal produz resultados aceitáveis para pequenos períodos de tempo e quando a carteira possui poucas opções (ou outros contratos não lineares).

Para incrementar a acurácia do VaR para contratos não lineares alguns trabalhos incluindo Wilson (1994 e 1996), Jamshidian e Zhu (1997), Zangari (1996 a e b) e Telfah (2003), usaram o modelo quadrático ou o segundo termo da expansão de Taylor, conhecido como o método delta gama<sup>4</sup>. Jamshidian e Zhu (1996), Zangari (1996 a e b) e Fallon (1996) relataram que a utilização do método delta gama aumentou a eficiência do VaR consideravelmente em comparação ao método delta normal.

A suposição de normalidade na distribuição dos fatores de risco ou dos retornos da carteira fatalmente afetará as estimativas de VaR o qual depende da distribuição da cauda (em particular a esquerda). Logo, se a distribuição real dos retornos tiver cauda mais grossa (fina) que a distribuição normal, então o VaR baseado na distribuição normal será subestimado (sobreestimado). Como a maioria das séries financeiras possui caudas grossas é de se esperar que o VaR baseado na hipótese de normalidade subestime as perdas.

De uma forma geral há dois grupos de técnicas de VaR que minimizam ou eliminam os efeitos da normalidade: os métodos paramétricos (metodologias analíticas) e os métodos não paramétricos (metodologias de simulação). No grupo das técnicas paramétricas<sup>5</sup> uma

---

<sup>4</sup> Gama é a primeira derivada do delta em relação ao retorno do ativo, esta grega mede a curvatura da relação entre o valor da carteira e o retorno do ativo. Quando o gama é positivo (negativo) as mudanças na carteira são positivamente (negativamente) assimétricas.

<sup>5</sup> Convém lembrar que o método delta normal também é classificado como uma metodologia analítica.

distribuição alternativa é assumida em substituição à normal. Baseado nesta distribuição uma fórmula para descrever o intervalo de confiança é derivada.

Entre os métodos não paramétricos, ou de simulação, estão os modelos de simulação histórica e o método de Monte Carlo. Neste grupo de técnicas nenhuma suposição sobre a distribuição dos retornos é necessária. Assim sendo o VaR é obtido via a teoria padrão da estatística (como em Kupiec (1995)) ou simulação de Monte Carlo.

Na técnica da simulação histórica não há suposição sobre a distribuição dos retornos, a única suposição é que os retornos passados devem continuar no futuro. Segundo Jorion (1996), ao se basear nos preços reais passados o método incorpora a não linearidade e distribuições não normais. Segundo Accorsi e Panhosi (2003) o método da simulação histórica é simples e intuitivo, podendo ser aplicado a qualquer distribuição de retornos. Outros trabalhos com simulação histórica para ativos lineares e não lineares são encontrados em Thérêt e Rostan (2000), Barbedo et al (2004) e Duffie e Pan (1997).

Em resumo, conforme afirmou Khindanova e Rochev (2000), talvez uma das grandes vantagens deste método seja a eliminação de qualquer viés de estimação. No entanto, estas vantagens não isentam o método de críticas, elas surgem em função da única suposição: tendências de P&L no passado continuam no futuro. Esta forte hipótese pode levar a erros de amostragem, outro problema é identificar o tamanho ótimo da amostra, entre outras críticas. Alguns trabalhos como Holton (1998), Duffie e Pan (1997) e Boudoukh, Richardson e Whitelaw (1998) sugeriram alterações no método de simulação histórica para minimizar as desvantagens do modelo, por exemplo: a incorporação de *mirrors* cenários, *bootstrap* e o alisamento exponencial.

Em alguns casos os problemas do método de simulação histórica não são contornados, fazendo com que analistas recorram a técnicas mais poderosas de simulação. Para Wiener (1999) o método de simulação de Monte Carlo é uma das técnicas de análise sofisticada mais popular entre analistas e acadêmicos.

Segundo Telfah (2003) para calcular o VaR via o método de simulação de Monte Carlo deve-se, inicialmente, especificar um processo estocástico e parâmetros do processo que capturem a dinâmica dos fatores de risco. A próxima etapa consiste na simulação das trajetórias de preços para todos os fatores. Por fim, a partir dos preços simulados calcula-se o VaR para o quantil desejado.

Apesar da simplicidade conceitual este método apresenta o problema da baixa convergência. Segundo Wiener (1999) para aumentar a precisão por um fator de 10, deve-se simular 100 vezes mais trajetórias de preços. As vantagens deste método são inúmeras (Telfah

(2003) e Jorion (2003)), desde a possibilidade de operacionalização sob diferentes suposições até a habilidade de capturar fatores de risco de posições não lineares.

O segundo grande problema com este método diz respeito à especificação do processo estocástico para modelar os fatores de risco. Corre-se o risco da verdadeira distribuição dos retornos ser imperfeitamente captada pelo modelo (Jorge et al, 2001).

Além dos dois problemas do método de simulação de Monte Carlo citados nos parágrafos anteriores há um terceiro também importante, a má especificação dos parâmetros estocásticos. Problema este, não exclusivo do método de Monte Carlo. Todos os modelos paramétricos também podem apresentar este problema. De todos os fatores de mercado, o que apresenta a maior potencialidade de erros nas estimativas do VaR é a volatilidade. O principal motivo para tal possibilidade é o fato da volatilidade não ser um parâmetro observável.

### **1.1.2 A Volatilidade**

A importância da volatilidade como fonte de erro é tamanha que há na literatura importantes trabalhos analisando as consequências para o VaR da especificação da volatilidade, exemplos: Mollica (1999), Schittenkopf et al (2002) e Lehar (2000). A relevância da volatilidade para o cálculo do VaR levou Barone-Adesi, Giannopoulos e Volsper (1999) a incorporar a volatilidade no modelo de simulação histórica com o objetivo de incrementar suas estimativas. Esta técnica é conhecida como simulação histórica filtrada. Foi replicado em diversos mercados como em Fierli (2002) e Barbedo, Araújo e Lemgruber (2004).

Os métodos para calcular a volatilidade são inúmeros, o mais simples de todos é o método amostral, ou via o desvio padrão dos retornos dos fatores de risco, esta técnica é usualmente conhecida como volatilidade padrão. A técnica da volatilidade padrão apresenta uma série de inconvenientes, entre eles a de dar importância equivalente às observações, independente do tempo em que ocorreu, ou seja, observação antiga possui a mesma relevância que uma observação recente. Uma forma de contornar este grave problema é a técnica de suavizamento exponencial.

Uma das principais causas de críticas aos modelos de estimação da volatilidade simples apresentada baseia-se no fato que o importante não é o valor histórico da volatilidade, mas sim a expectativa desta (Morais e Portugal, 2000).

Mollica (1999) apresenta uma lista de 9 fatos estilizados relacionados à distribuição dos retornos, às técnicas de estimação da volatilidade e com a volatilidade dos retornos dos ativos financeiros. Entre estes fatores estão a heterocedasticidade dos retornos e a condicionalidade da volatilidade em relação aos fatos passados (Barbedo, Araújo e Lemgruber, 2004).

Há uma série de modelos que podem contemplar os fatos estilizados de forma mais ou menos eficiente, entre os principais estão os modelos GARCH<sup>6</sup> e sua família, o modelo de volatilidade estocástico e a volatilidade implícita (que é baseada nas informações das opções).

Com a possibilidade de mudar a estratégia de VaR com uma simples mudança na especificação de um parâmetro (em particular a volatilidade), pode-se afirmar que há uma grande variedade de estratégias de VaR. Estas múltiplas estratégias apresentam resultados muitas vezes contraditórios e pouco conclusivos, em particular na tarefa de identificar qual estratégia de VaR é ideal em determinadas situações. Segundo Rogachev (2002), um dos grandes problemas do VaR está relacionado com as mudanças diárias do ambiente financeiro, da economia e das condições sociais.

### 1.1.3 Análise Estática x Dinâmica

A maioria das técnicas de análise de risco e em particular o VaR é, em sua maioria, analisada na forma estática, o que os impede de capturar mudanças temporais nos fatores de risco. Rogachev (2002) sugere a adoção de técnicas de VaR dinâmicos como forma de incrementar as estimativas.

O cálculo do VaR dinâmico é feito adaptando-se as estimativas do VaR diariamente em função das mudanças diárias das condições de mercado. O processo dinâmico do VaR pode ser aplicado para qualquer estratégia do VaR, seja ela paramétrica ou não paramétrica.

Do ponto de vista prático o VaR dinâmico resulta em problema para os *traders*, uma vez que estes devem utilizar um sistema de monitoração de risco para definir a composição da sua carteira<sup>7</sup>. Se o VaR mudar diariamente, a composição da carteira também deverá mudar para manter o risco nos níveis esperados, assim sendo, o *trader* deve definir o *trade off* entre a exposição ao risco e o custo de mudança da composição da carteira.

---

<sup>6</sup> GARCH significa *Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity* e foi desenvolvido por Bollersleve em 1986.

<sup>7</sup> Baseado na expectativa de retorno e grau de aversão ao risco.

### 1.1.4 A Estrutura do Trabalho

Os aspectos relacionados ao VaR estático e dinâmico, suas aplicações ao mercado acionário e de opções brasileiro fazem parte do escopo deste trabalho, o qual está dividido como segue: dentro do primeiro capítulo, além da presente seção, ainda têm-se os aspectos motivacionais do trabalho, o problema de pesquisa e os objetivos da pesquisa e uma seção com o resumo da metodologia em forma de fluxograma.

O segundo capítulo aborda as questões que dão sustentação à análise de risco, em particular os pontos relacionados à incerteza econômica a qual os agentes econômicos estão sujeitos, a dinâmica do retorno do ativo, a precificação das opções (o modelo de Black e Scholes) e os modelos de estimação da volatilidade.

No terceiro capítulo encontra-se a teoria do VaR, bem como os aspectos teóricos dos modelos delta normal, analítico, simulação histórica e de Monte Carlo. Por fim este capítulo também aborda os teste para verificar a eficiência das estratégias de VaR.

O objetivo do quarto capítulo é aplicar as teorias apresentadas no segundo e terceiro capítulo para o cálculo do VaR de carteira de ações e/ou opções do mercado acionário brasileiro, fazendo comparações entre as estratégias.

O quinto capítulo é dedicado à análise dos resultados e ajustes metodológicos em função de resultados não satisfatórios.

E por fim o sexto capítulo é dedicado às conclusões, considerações finais e sugestões para futuros trabalhos.

## 1.2 Motivação

A motivação deste trabalho surge da suposta ineficiência do mercado brasileiro e da conseqüente ineficiência<sup>8</sup> do gerenciamento de risco da maioria das instituições financeiras, bem como dos órgãos reguladores. Segundo Duarte Jr. (2000), qualquer instituição agindo como originador, *market-maker* ou corretora deve ter a capacidade de prevenir perdas potenciais de suas posições de derivativos.

---

<sup>8</sup> Uma parte considerável das instituições utiliza modelos que supõe eficiência do mercado.



A literatura apresenta casos não raros de elevados prejuízos sofridos por bancos como: Daiwa, Showa Shell Sekiyu e Barings; no Brasil, o caso dos Bancos Garantia, Boa Vista e Fonte Cindam. Estes casos reforçam a tese da ineficiência do gerenciamento de risco. Estes casos têm demonstrado a ineficiência do gerenciamento de risco das instituições, bem como dos órgãos reguladores (Bezerra, 2001). As exigências de capital no Brasil para operações com derivativos, quando são feitas, são formuladas segundo as linhas preconizadas pelo Comitê de Basileia (Barbedo e Araújo, 2004).

A falta de regulamentação no mercado brasileiro bursátil pode estimular maiores ganhos de capital<sup>9</sup>, entretanto, possibilita perdas consideráveis de somas de recursos. Em particular, ao tratar do mercado brasileiro, Duarte Jr. (2000) apresenta algumas características importantes deste:

- a) O mercado brasileiro possui uma volatilidade bem maior que aquela dos mercados europeus e norte-americanos, onde técnicas de *hedge* e de gerenciamento do risco simples são adequadas;
- b) A volatilidade do mercado de juros brasileiro é superior ao dos mercados europeus e norte-americanos;

A volatilidade do mercado brasileiro pode ser observada na Figura 1.1; na Figura 1.2 temos o retorno de um índice americano, o Dow Jones. O retorno do ibovespa<sup>10</sup> representado pela Figura 1.1 mostra zonas de forte agitação (alta volatilidade), em particular respondendo a crises financeiras internacionais. Já no mercado americano uma simples análise dos retornos não é suficiente para identificar conseqüências em função destas crises. A alta amplitude dos retornos do Ibovespa em comparação ao Dow Jones mostra como o mercado acionário brasileiro é mais volátil.

---

<sup>9</sup> Não haverá exigência de capital.

<sup>10</sup> Ibovespa ou índice Bovespa é o mais importante índice da Bolsa de Valores de São Paulo, calculado desde 04/06/1964 e as ações que fazem parte deste são responsáveis por 80% do volume negociado na Bovespa.

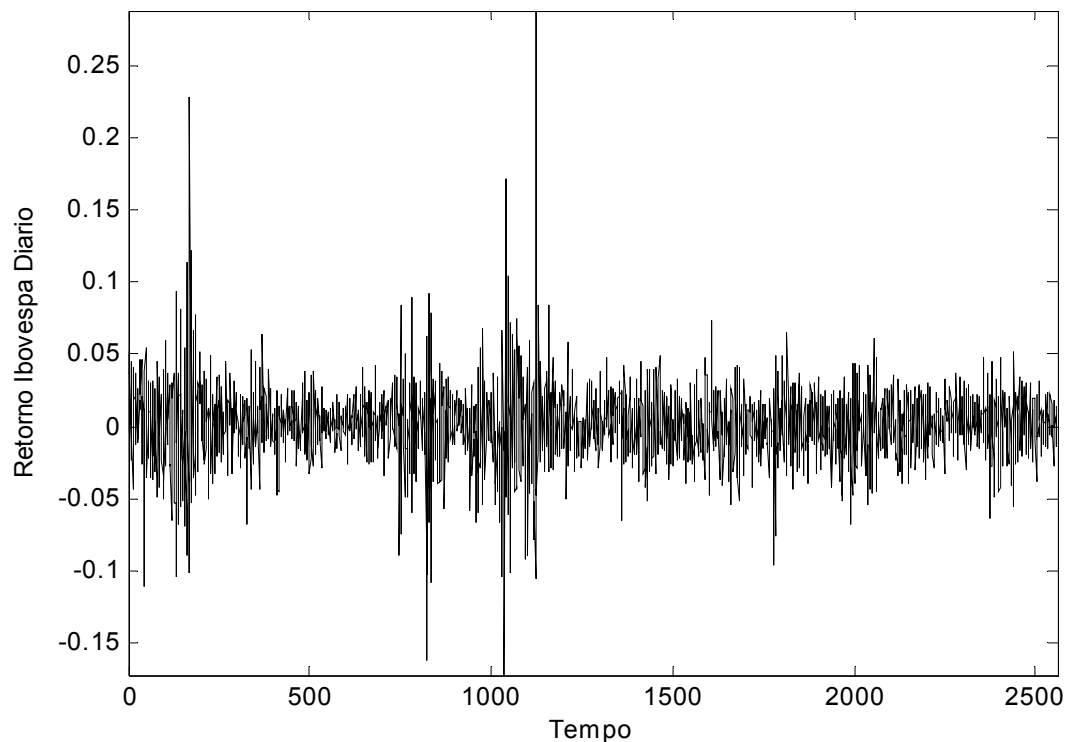


Figura 1.1: Retorno Ibovespa Diário no período de 04/07/1994 a 27/10/2004.

Fonte: Elaboração própria, dados IPEA.

Airol di (2001) sugere que caudas grossas estão associadas com aumentos rápidos da volatilidade; quanto mais dinâmica é a volatilidade, maior a cauda. Ainda de acordo com Airol di (2001), saltos e eventos extremos como crises financeiras causam aumento na dinamicidade da volatilidade. Logo, a suposição de linearidade na relação entre dinâmica da volatilidade (fortes variações na volatilidade) e patamar de volatilidade não são observadas quando há saltos e eventos extremos, assim sendo, uma representação da dinâmica da volatilidade não linear faz-se necessário.

Hsieh (1993) sugere que quando a não linearidade surge de dados financeiros os modelos de volatilidade condicional promovem melhores descrições de movimentos de curto prazo quando comparados a modelos não condicionais.

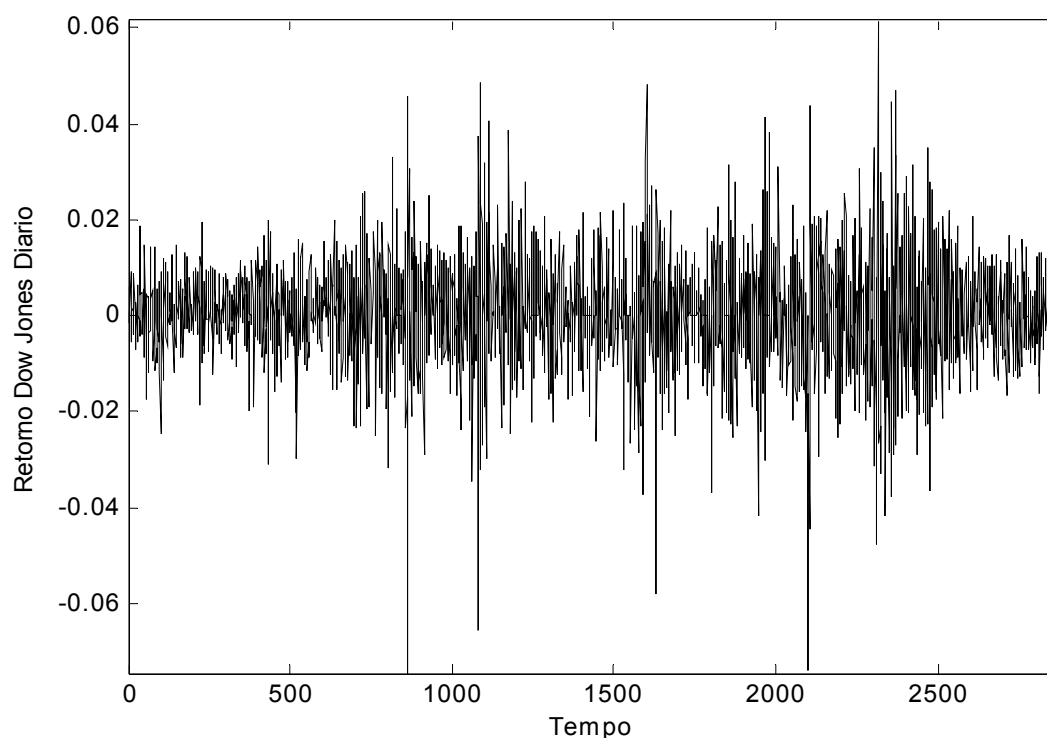


Figura 1.2.: Retorno do Dow Jones Diário no período de 04/07/1994 a 27/10/2004.

Fonte: Elaboração própria, dados IPEA.

Desta forma técnicas simples de VaR com a consideração de normalidade dos retornos não devem ser suficientes para o bom gerenciamento do risco. Abrir mão da normalidade dos retornos normalmente sugere abrir da hipótese de eficiência do mercado. Estimar o VaR sem a hipótese de eficiência de mercado significa promover ajustes significativos nas estratégias tradicionais de VaR. Mudanças estas ainda não exploradas na literatura, este trabalho ainda propõe incorporar estas situações a uma análise dinâmica do risco.

A proposta da análise dinâmica é corroborada por Gibson (2001) e Lewis (2002) sugerindo que a modelagem de dados financeiros deve combinar dinâmica da volatilidade com eventos de risco. Tanto Gibson (2001), quanto Lewis (2002) consideram esta tarefa fundamental e desafiadora na modelagem do dinamismo dos fatores de risco.

De acordo com Fama et al (1969), o mercado eficiente deve apresentar um passeio aleatório, o que pode não ser o caso do ibovespa entre 1994 e 2004, como se pode observar na Figura 1.1. Do apresentado, é evidente que o passeio aleatório deve ser melhor investigado, evitando-se uma fonte potencial de erros de especificação, em particular no modelo com simulações de Monte Carlo.

Segundo Duarte Jr. (2000), uma das razões que justifica o uso de modelos mais sofisticados para o gerenciamento do risco de carteiras de opções no Brasil é o anexo de janeiro de 1996 ao Acordo sobre Capital da Basiléia (*Basle Capital Accord*) por parte do Comitê de Basiléia para Supervisão Bancária (*Basle Committee on Banking Supervision*). Este diz que qualquer instituição que opere com derivativos sofisticados meça e controle pelo menos seus riscos delta, gama e vega.

Por fim, outra motivação para este trabalho é o estímulo à definição de regras e limites por parte dos agentes reguladores brasileiros. Um conhecimento adequado do risco é por si só uma fonte inestimável de redução do risco.

### **1.3 O Problema de Pesquisa**

Como já apresentado, o *hedge* é uma operação com derivativos que reduz a possibilidade de perdas futuras e, como consequência, diminui a possibilidade de ganhos futuros (Marshall, 1989). Esta tese tem o objetivo de trabalhar com o ferramental básico do *hedge*, a mensuração do risco de mercado. Evidentemente há eficientes maneiras de mensurar os riscos para cada mercado em particular. Entretanto, cada método está associado com um mercado e não pode ser aplicado diretamente a outros mercados. Já o VaR é uma maneira integrada de avaliar os riscos de diversos fatores e com os mais distintos mercados.

Para Duarte Jr. (1997), a grande motivação para a utilização do VaR é o fato deste integrar todo o risco em um único valor, o risco total, facilitando a sua administração por parte dos gerentes e pessoas relacionadas com a gestão de risco. Por outro lado, tratar o risco como multidisciplinar requer um número elevado de simplificações.

Por este fato e por outros é que o VaR vem se tornando a medida padrão para a avaliação de risco do mercado, sendo adotado por diversos bancos, corretoras e fundos mútuos. Os órgãos reguladores podem obrigar a implementação do VaR, nos Estados Unidos, as agências de *rating* como a Moody e Standard and Poor's (S&P), e instituições como o *Financial Accounting Standard Board* (FASB) (Conselho de padrões financeiros contábeis) e a *Securities and Exchange Commission* (SEC) apóiam a utilização do VaR (Jorion, 2003).

Já a utilização das opções para o gerenciamento de risco é motivada pelo fato de, segundo Silva Neto (1998), opções serem instrumentos muito versáteis, tanto para a especulação, para a arbitragem, quanto para o *hedge*.

Em contrapartida à versatilidade das operações com opções possui o inconveniente do alto custo na transação. Muitas vezes o custo da opção pode até inviabilizar a estratégia. Desta forma, entender bem as operações com opções é extremamente importante, sendo garantia de uma operação bem feita.

Como visto, estratégias de *hedge* dinâmico exercem um papel importante para o gerenciamento do risco de produtos derivativos sofisticados. Diante do apresentado acima, surge o problema de pesquisa: *A hipótese de mercado eficiente é relevante para o gerenciamento de risco pelo Value at Risk (VaR). Diante disto, como modelar o risco de mercado para carteiras com ações, opções e hedge negociadas no mercado financeiro brasileiro dada a dinâmica deste, a partir dos modelos de VaR existentes ou sugerir uma nova variante confiável o suficiente para permitir a análise do risco para este mercado?*

## **1.4 Objetivos da Pesquisa**

O objetivo principal deste trabalho é verificar se a hipótese de mercado eficiente é relevante para o gerenciamento de risco pelo Value at Risk (VaR), para tal aplica-se a análise dinâmica; além de identificar qual variante do VaR (estático ou dinâmico) ou sugerindo uma, confiável o suficiente como para permitir a análise do risco do mercado brasileiro. Neste trabalho utilizar-se-á especificamente quatro tipos de metodologias:

- A metodologia delta normal;
- A metodologia analítica baseada nos métodos das “gregas” da carteira de opções;
- A metodologia de simulação histórica;
- A metodologia de simulação de Monte Carlo.

Para atingir o objetivo principal, delineiam-se os seguintes objetivos intermediários:

- Modelar o comportamento do preço da ação por um processo estocástico de Itô;
- Simular a variação do prêmio da opção na carteira utilizando o modelo de precificação de Black & Scholes, onde apenas o preço da ação segue um processo estocástico;
- Selecionar o modelo de volatilidade mais indicado à carteira (entre os modelos da família GARCH);

- Estimar o VaR estático e dinâmico segundo cada uma das metodologias;
- Analisar o VaR de carteiras *hedgeadas* com opções tradicionalmente utilizadas no Brasil;
- Propor uma estratégia de VaR que abra mão da eficiência de mercado (se for o caso);
- Avaliar os resultados obtidos por cada uma das metodologias;
- Aplicar, à avaliação das estimativas, o teste de hipóteses para proporções, desenvolvido por Kupiec (1995) atendendo o procedimento de *backtesting* proposto pelo Comitê de Basileia e o modelo da função de perdas de Lopez;
- Examinar uma estratégia de *hedge* compatível com os resultados obtidos nas etapas precedentes.

## 1.5 Metodologia

Um resumo da metodologia está apresentado na Figura 1.3 a seguir. Nesta figura apresenta-se um fluxograma das etapas deste trabalho. O trabalho inicia-se (Capítulo 2) com a fundamentação econômica do gerenciamento de risco, discutindo os aspectos relacionados com a aversão ao risco, à economia sob incertezas e à eficiência de mercado.

O Capítulo 2 aborda inicialmente aspectos como o grau de aversão ao risco dos agentes econômicos, introduzindo a economia sob ambiente de incerteza. Tay (2000) mostra que com as preferências dos agentes econômicos e com o VaR determinado tem-se, no equilíbrio, a formulação econômica completa para o VaR.

Estes aspectos do VaR só são válidos quando as hipóteses de mercado completo são obedecidas, sendo, dessa forma, relevante uma discussão sobre eficiência de mercado, mostrando os conceitos de mercado eficiente nas formas fraca, semiforte e forte; convergindo ao conceito de caminho aleatório.

A partir do conceito de mercado eficiente (caminho aleatório) é possível avaliar a dinâmica de retorno do ativo. Utilizando as suposições do caminho (passeio) aleatório monta-se uma equação diferencial estocástica (SDE) que representa a dinâmica de retorno do ativo.

A solução da SDE não é trivial, pois um dos termos da equação é um processo de Wiener, portanto faz-se necessário recorrer ao Lemma de Itô (ou fórmula de Itô).

Ainda no Capítulo 2 tem-se uma seção dedicada à precificação de opções de Black & Scholes (B&S). A partir da análise de B&S obtém-se a equação diferencial parcial de B&S,

cujas soluções, tanto para opções de compra quanto de venda (*call* e *put*), estão apresentadas no segundo capítulo.

Por fim, mas não menos importante, a estimação da volatilidade. A volatilidade pode ser estimada tanto por métodos paramétricos quanto não paramétricos, entretanto, o foco deste trabalho serão os métodos paramétricos, em particular os modelos de volatilidade autoregressivo condicional heterocedástico (família ARCH). Os modelos tratados foram os ARCH e GARCH, modelos simétricos e EGARCH e GARCH-L, modelos não simétricos.

Tais modelos são discutidos com relativo detalhe, incluindo uma descrição dos modelos, testes para verificar a adequação dos modelos às séries e as formas de estimação dos parâmetros.

De posse dos parâmetros básicos do gerenciamento de risco, resta definir qual metodologia utilizar (no caso o *Value at Risk*), quais os prós e contra desta técnica, quais parâmetros utilizar, escolher e/ou calculá-los. O Capítulo 3, é o cerne metodológico deste trabalho.

O gerenciamento de risco é tratado de forma a introduzir o VaR como uma ferramenta importante para a mensuração do risco de mercado, não esquecendo de abordar uma crítica aos modelos de gerenciamento de risco: a coerência das ferramentas de risco, onde a crítica mais relevante ao VaR é a falta teórica de subaditividade.

Nesta fase do trabalho é conveniente uma definição formal do *Value at Risk* ilustrada com um exemplo real. As etapas para o cálculo do VaR em linhas gerais, segundo Wiener (1997), são apresentadas.

Para as etapas do cálculo do VaR a seleção dos parâmetros subjetivos do *Value at Risk* é fundamental. Os parâmetros são: o nível de confiança, o tamanho da janela e o período de tempo. Com a arbitrariedade na seleção destes a escolha é feita com o intuito de permitir uma maior análise da eficiência comparativa entre os modelos de VaR. Neste trabalho foi escolhido um nível de confiança de 95%, tamanho de janela de 2 e 1 ano e VaR diário (período de tempo).

As estratégias de VaR são aplicadas à carteiras de ações (Telemar PN, Petrobrás PN, Vale do Rio Doce PNA, Telemar PN + Petrobrás PN, Telemar PN + Vale do Rio Doce PNA, Petrobrás PN + Vale do Rio Doce PNA, Telemar PN + Petrobrás PN + Vale do Rio Doce PNA), carteira de opções da Telemar PN (*call ratio*, borboleta comprada e borboleta vendida), e uma estratégia de hedge delta-normal com ações e opções de compra da Telemar PN.

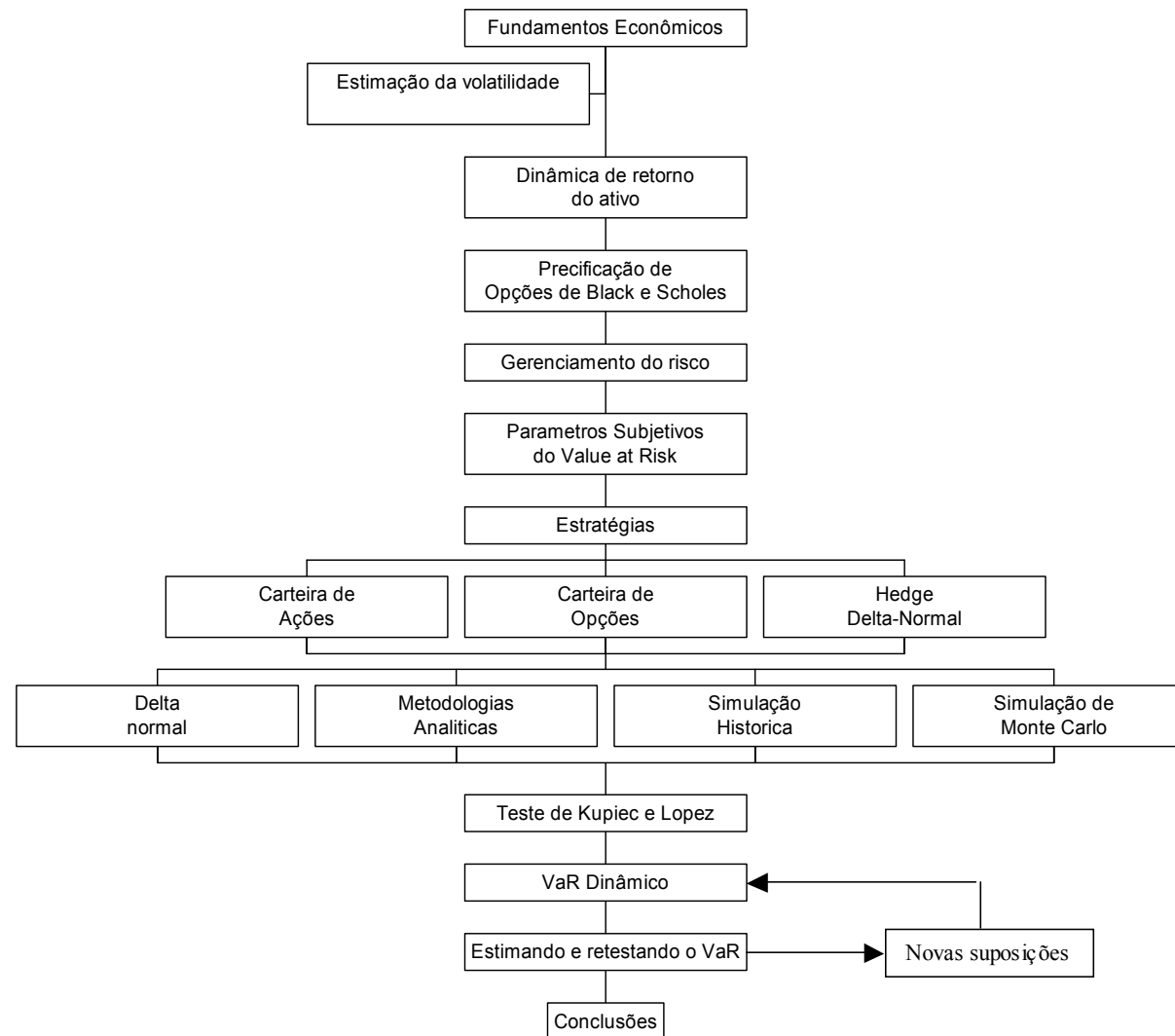


Figura 1.3: Fluxograma da metodologia  
 Fonte: Elaboração própria.



A primeira das estratégias é o método delta-normal, este é baseado na hipótese que os retornos são normalmente distribuídos e é baseado nos parâmetros de tal distribuição. No entanto, é sabido que as séries financeiras normalmente não seguem a distribuição normal. Uma forma de atenuar esta crítica é substituir a volatilidade padrão (baseada na distribuição normal) pela volatilidade GARCH.

Uma segunda crítica relaciona-se com a cauda esquerda das distribuições reais que são grandes em comparação à cauda da distribuição normal. Uma forma de atenuar tal crítica é o uso dos modelos *stress* VaR, em particular o *stress* VaR-x.

Para carteiras com ativos não lineares, como opções, deve-se substituir o método delta-normal por outras metodologias analíticas baseadas nas gregas. Sugestões são os métodos delta-gama, delta-gama-delta, delta-delta-Johnson entre outras também descritas no Capítulo 3.

Os métodos acima apresentados são metodologias paramétricas, entre as não paramétricas tem-se a simulação histórica e a simulação de Monte Carlo. Na simulação histórica não há suposições acerca da distribuição dos retornos, a única suposição é que o comportamento passado deve ser representativo do comportamento futuro. Algumas variantes deste modelo são: o método de *bootstrap*, *mirror* cenários e cenários ponderados.

A ultima das técnicas é a simulação de Monte Carlo. Esta metodologia é particularmente poderosa pela adaptabilidade em função de permitir diferentes suposições, no entanto, apresenta o inconveniente da lentidão no processamento. A simulação de Monte Carlo é dividida em duas fases: a primeira é a trajetória de preços, neste supõe-se que o ativo objeto tem o comportamento de um movimento browniano geométrico. A segunda fase é a geração de números aleatórios, que podem ser aleatórios, pseudo-aleatórios e quase aleatórios. Quando o VaR com simulação de Monte Carlo é utilizado para carteiras adota-se a decomposição de Cholesky para adquirir a estrutura de correlação desejada.

A eficácia de cada modelo é feita via o teste de Kupiec e de Lopez. O teste Kupiec verifica se o número de falhas de cada modelo está dentro de um intervalo de confiança. Já o teste de Lopez tem a finalidade de identificar entre os modelos eficazes (que passaram no teste de Kupiec), os que são mais eficientes.

No Capítulo 4 encontram-se os resultados empíricos e ajustes metodológicos das metodologias aqui descritas. Todas as estimativas e testes são feitos nos modelos estáticos seguindo a recomendação do Comitê de Basiléia.

Para o VaR dinâmico a reavaliação dos parâmetros é feita diariamente com o intuito de incorporar novas informações ao modelo, estima-se e testa-se o VaR dinâmico, para os resultados não satisfatórios são feitas novas suposições e recalculado o VaR dinâmico.

Por fim, no Capítulo 5 são apresentadas as conclusões finais e sugestões para futuros trabalhos.

## **1.6 Os Dados e Delimitação do Trabalho**

Segundo a Companhia Brasileira de Liquidação e Custódia (CBLC), entre 2002 e 2003, o mercado de opções (de ações e índices) no volume financeiro da Bovespa cresceu de 6,2% para 7,96%, só as opções sobre ações responderam por 7,3% do volume total da Bovespa no ano de 2003. Mas ainda, segundo a CBLC, há muito espaço para o crescimento do mercado de opções em função da utilização para o *hedge* das carteiras.

Entretanto, as negociações com opções são concentradas em poucos papéis, sendo a opções sobre ações da Telemar a mais negociada. As opções da Petrobrás e Vale do Rio Doce também são razoavelmente negociadas. A Bovespa<sup>11</sup> também disponibiliza opções de outras empresas, como Bradesco, Itausa, Banco Itaú, Ambev, Embratel, Usiminas, Telefônica.

Assim sendo este trabalho irá analisar carteira de ações e opções para ativos das empresas Telemar, Petrobrás e Vale do Rio Doce. Sendo o período de análise, para as ações, compreendido entre março/1999 a março/2004; cujos dados foram disponibilizados pela Economática. Para as opções o período de análise situa-se entre março de 2002 e março de 2004, estes dados foram disponibilizados pela BOVESPA.

No período de análise há dois fenômenos (que podem ser identificados na Figura 1.4 a seguir), o primeiro é o período de crise motivado pela incerteza em relação ao destino político brasileiro na época da eleição presidencial. O segundo fenômeno é o crescimento espantoso no valor dos ativos negociados na bolsa de São Paulo, o índice da Bovespa apresentou uma alta de quase 100% no curto período de janeiro de 2003 a dezembro de 2003.

---

<sup>11</sup> Segundo Cavalcanti e Misuno (2002) a Bovespa (Bolsa de valores de São Paulo) é o maior centro de negociações da América Latina e foi fundada em 23 de agosto de 1890.

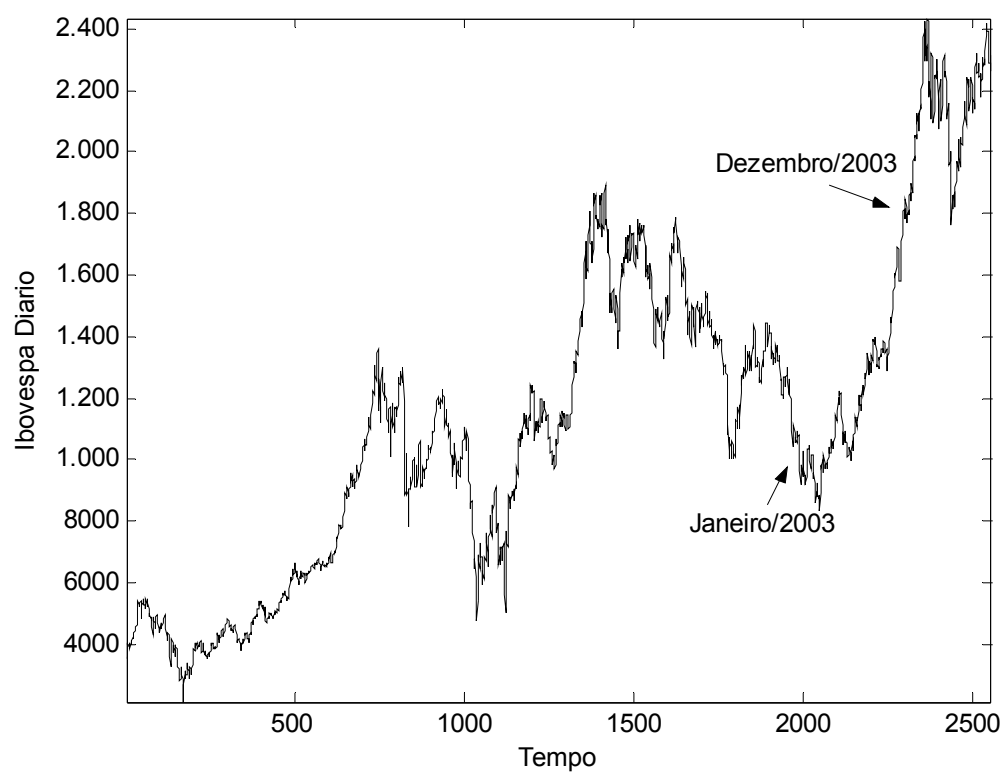


Figura 1.4: Ibovespa diário no período de 04/07/1994 a 27/10/2004.

Fonte: Elaboração própria, dados IPEA.

## 2 FUNDAMENTOS METODOLÓGICOS E ECONÔMICOS PARA O GERENCIAMENTO DO RISCO

A longa história da dinâmica dos preços dos ativos teve início em 1900 quando o matemático francês Louis Bachelier<sup>12</sup> deduziu uma fórmula para a dinâmica dos preços baseado na hipótese que os preços dos ativos seguem um movimento browniano geométrico com *drift* zero. Outros nomes de peso contribuíram para o desenvolvimento do gerenciamento de risco, como é o caso de Markowitz em 1952, dando base a Teoria Moderna das Carteiras. Desde então, numerosos pesquisadores vêm contribuindo com a teoria e propondo modelos cada vez mais sofisticados e eficientes; inclusive analisando o risco de carteiras sofisticadas que são montadas com derivativos (como o caso de opções).

Neste capítulo apresentar-se-á os fundamentos econômicos do moderno gerenciamento de risco, com os pressupostos tradicionais e uma crítica à adequação empírica deste, propondo alternativas a realidade econômica e financeira atual. Este capítulo inicia-se com os pressupostos econômicos tradicionais e suas conseqüências, logo após uma apresentação do movimento dos ativos, seguido da precificação das opções sob as hipóteses de Black e Scholes e por fim a questão da volatilidade.

### 2.1 Fundamentos Econômicos do Gerenciamento de Risco

Da apresentação do *Value at Risk* (VaR) no capítulo introdutório ficou claro que esta medida de risco é simplesmente uma referência para julgamentos relativos. O cálculo do VaR típico envolve a probabilidade de uma perda extrema de reais (ou outra moeda) baseado na distribuição estatística dos preços de mercado. Tal medida não leva em consideração o fato que a mesma perda pode ter significados econômicos diferentes, dependendo das condições de negociação (Tay, 2000).

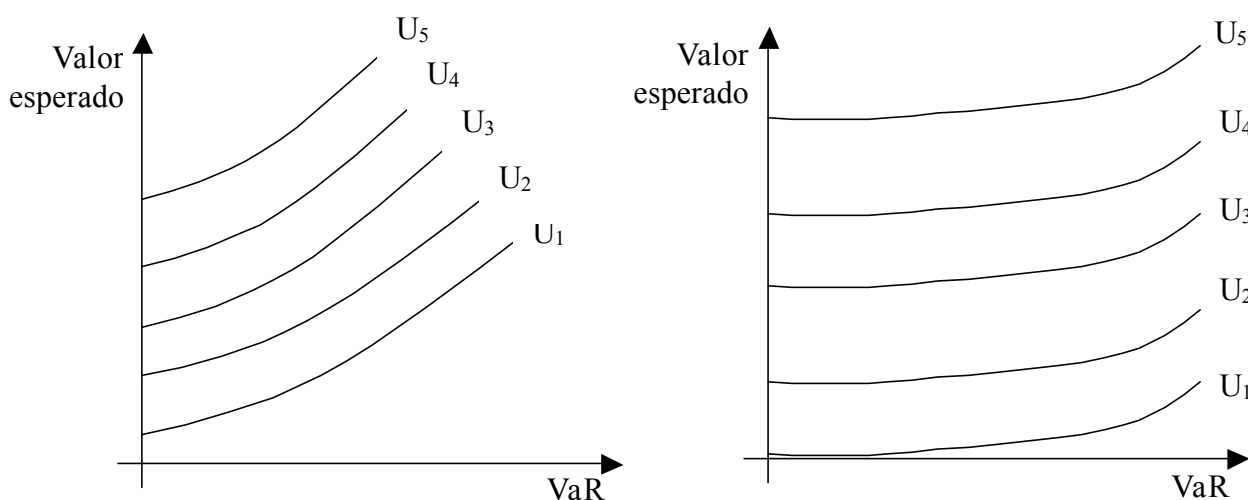
Tay (2000) e Aït-Sahalia e Lo (1998) afirmam que a noção estatística do VaR é, no máximo, uma medida incorreta do risco para investidores individuais e institucionais. De uma forma geral, apesar do VaR possuir informações sobre o grau de incerteza de uma carteira, a

---

<sup>12</sup> Em sua dissertação de Doutorado em Paris “Theory de la spéculation” Bacheleir antecipou muito daquilo que seria padrão na teoria financeira: caminho aleatório para os preços do mercado, movimento Browniano e martingales.

medida não fornece muito sobre a valoração econômica desta incerteza. Um exemplo disso é um VaR de R\$ 15.000,00 com 5% de probabilidade para uma carteira com valor inicial de R\$ 100.000,00, o que equivale a uma perda de 15%, numa análise preliminar este número indica uma perda significativa. Entretanto, quando se compara com outros investimentos similares observa-se um VaR de 25%, assim sendo, pode-se concluir que um VaR de R\$ 15.000,00 não é tão ruim.

Um outro aspecto relevante, mas ignorado com frequência na análise do VaR é o grau de aversão ao risco<sup>13</sup> do investidor. A medida de aversão ao risco é bem representada pelas curvas de indiferença de dois investidores com graus de aversão ao risco distinto. A Figura 2.1 mostra tais curvas, cada uma mostra as combinações de retorno esperado e de risco (que pode ser calculado via o VaR) que proporcionam ao investidor o mesmo grau de satisfação.



(a) Investidor com grande aversão ao risco

(b) Investidor com baixa aversão ao risco

Figura 2.1: Aversão ao risco e curvas de indiferença.

Fonte: Pindyck e Rubinfeld, 2002.

A Figura 2.1 (a) descreve um investidor com grande aversão ao risco. Para o investidor aceitar correr maior risco é necessário um grande aumento no valor esperado para que este fique tão satisfeito quanto antes. O que não é verdade para o investidor com menor aversão ao risco, representado pela Figura 2.1 (b), neste caso um pequeno aumento no valor esperado é suficiente para compensar um aumento no risco.

Para incorporar ao VaR estes aspectos econômicos Aït-Sahari e Lo (1998) propuseram uma sistemática baseada em Arrow (1964) e Debreu (1959). Estes foram os primeiros a

<sup>13</sup> Aversão ao risco é a preferência por uma renda certa em relação a uma renda incerta com o mesmo valor esperado.

formalizar a economia sob ambiente de incerteza introduzindo os ativos elementares<sup>14</sup>. Segundo Tay (2000), estes ativos são conhecidos como ativos de Arrow-Debreu.

*Definição 2.1:*

*Ativos elementares são aqueles que pagam uma unidade monetária em um estado da natureza e zero em outro estado.*

Como o objetivo deste trabalho não é a análise de Arrow-Debreu esta não será apresentada em detalhes, apenas mostrar-se-á os aspectos relacionantes entre gerenciamento do risco (em particular a ferramenta VaR) e a análise de Arrow-Debreu, aspecto esse normalmente ignorado.

*Definição 2.2:*

*Um vetor de preços é dito ser um vetor de preços de equilíbrio geral de uma economia competitiva se as seguintes condições forem válidas:*

- *Existe oferta para todos os bens;*
- *Existe demanda para todos os bens;*
- *A oferta agregada é pelo menos igual à demanda agregada.*

Por definição os preços dos ativos de Arrow-Debreu são determinados no equilíbrio pela oferta e demanda e segundo Tay (2000) possui a interpretação probabilística quando em ambiente de incerteza. O seguinte teorema garante a existência de pelo menos um vetor de preços de equilíbrio.

*Teorema 2.1: (Arrow-Debreu)*

*Se os seguintes axiomas<sup>15</sup> forem válidos para todos os consumidores e se todos os consumidores têm dotações contínuas de todos os bens, então existe vetor de preços de equilíbrio geral.*

- *Comparatibilidade;*

---

<sup>14</sup> Mascolet et al. (1995) apresenta a Economia sob incerteza de forma mais detalhada.

<sup>15</sup> Estes axiomas estão detalhados em Mascolet et al. (1995) e Kreps (1990).

- *Transitividade;*
- *Convexidade;*
- *Não saturação forte.*

*Prova:*

*Ver Mascolel et al. (1995) pág. 518.*

Se os dois últimos axiomas forem substituídos por axiomas mais restritivos têm-se, conforme o Teorema 2.2, um único vetor de preços de equilíbrio.

*Teorema 2.2: (Unicidade do equilíbrio<sup>16</sup>)*

*Se as funções de demanda agregada obedecem o axioma fraco da preferência revelada eo Teorema 2.1 for válido então o equilíbrio geral competitivo é único.*

*Prova:*

*Ver Wald (1951).*

Para o cálculo do VaR os retornos (perdas ou ganhos) do ativo são normalmente baseados em probabilidades condicional obtidas de um processo de geração de dados (PGD) dos preços do ativo, sendo estes preços obtidos pela lei da demanda e oferta. Assim sendo um PGD, que é derivado do equilíbrio de preços, contém uma quantidade enorme de informações sobre a condição do mercado e das preferências dos investidores, dados esses, fundamentais para o gerenciamento do risco.

Para obter uma formulação econômica do VaR, consideraremos uma economia de trocas dinâmica padrão (Lucas, 1978 e Rubinstein, 1976) onde o mercado dos ativos é dinamicamente completo. Neste modelo há um bem (ou um ativo) simples, não há rendas exógenas e todos os investidores objetivam maximizar sua utilidade temporal, sendo esta função independente do estado<sup>17</sup> da natureza. O consumo pode ocorrer na data 0 ou numa data futura t, há uma ação (representando um ativo de risco) e um título do governo (ativo livre de risco) ambos disponíveis para negociação nas datas 0 e t.

Obedecendo aos pressupostos aplicáveis ao Teorema 2.2 e suposições sobre as preferências e o mercado de ações, é sabido que para um agente representativo com função de

---

<sup>16</sup> Detalhes do Teorema em Wald (1951).

<sup>17</sup> As diversas possibilidades futuras da natureza, ou valores futuros possíveis para os ativos.

utilidade  $U$  (Romer, 2001) e preço do ativo na data 0 dado por  $S_0$ , *payoff* do ativo com liquidez em  $t$  de  $\psi(C_t)$ , uma função do consumo agregado  $C_t$ , o valor do ativo é dado por:

$$S_0 = E_t[\psi(C_t)M_{0,t}] \quad (2.1)$$

$$M_{0,t} = \frac{U'(C_t)}{U'(C_0)} \quad (2.2)$$

onde  $M_{0,t}$  é o fator de desconto estocástico ou taxa marginal de substituição (TMS) entre o consumo na data 0 e na data  $t$ . Segundo Aït-Sahalia e Lo (1998), no equilíbrio, o investidor otimiza seu investimento adquirindo a ação no período antes de  $t$  e depois consome o valor da ação em  $t$ ,  $C_t = S_t$ .

Assumindo a distribuição condicional do consumo futuro tendo densidade representativa dada por  $f_0(\cdot)$ , pode-se representar a Expressão (2.1) como (Tay, 2000):

$$\begin{aligned} E_t[\psi(C_t)M_{0,t}] &= \int_0^\infty \psi(C_t) \frac{U'(C_t)}{U'(C_0)} f_0(C_t) dC_t \\ &= e^{-r_{0,t}} \int_0^\infty \psi(C_t) f^*_0(C_t) dC_t \\ E_t[\psi(C_t)M_{0,t}] &= e^{-r_{0,t}} E^*_t[\psi(C_t)M_{0,t}] \end{aligned} \quad (2.3)$$

e

$$f^*_0(C_t) = \frac{M_{0,t} f_0(C_t)}{\int_0^\infty M_{0,t} f_0(C_0) dC_t} \quad (2.4)$$

sendo  $r_{0,t}$  a taxa líquida de retorno entre 0 e  $t$  do ativo livre de risco.

Esta versão das equações de Euler mostra que o preço de qualquer ativo pode ser determinado como o valor esperado do ativo descontado à taxa de juros livre de risco. Entretanto, esta expectativa deve ser obtida em relação a  $f^*$ , uma função de densidade de probabilidade ponderada via a TMS e não a função de densidade original  $f$  do consumo



futuro. Esta função densidade  $f^*$  é conhecida como densidade estado-preço (DEP)<sup>18</sup> sendo uma versão para múltiplos estados contínuos dos preços de Arrow-Debreu para ativos elementares.

Sob a hipótese de mercados completos a  $f^*$  é única. Em particular Arrow (1961) e Debreu (1959) mostraram que se há tantos estados contínuos<sup>19</sup> para os ativos quanto para os estados, então o preço de qualquer ativo pode ser expresso como a soma ponderada dos preços nos estados contínuos, hoje conhecidos como preços Arrow-Debreu. No conjunto de estados contínuos,  $f^*$  satisfaz a mesma propriedade, logo, qualquer ativo pode ser precificado como uma expectativa simples com respeito à  $f^*$ .

Estes fatos enfatizam a relevância do  $f^*$  para o gerenciamento do risco; o DEP agrega todas as informações pertinentes sobre as preferências do consumidor, do ambiente, a dinâmica do preço dos ativos; enquanto a PGD não. No entanto, segundo Tay (2000), no equilíbrio, quaisquer dos dois itens a seguir implicam no terceiro:

- Preferências do agente representativo;
- Dinâmica de preços do ativo;
- O PGD.

A função  $f^*$  claramente produz uma medida mais relevante para o VaR ao introduzir mais valores econômicos que a função de densidade de probabilidade do PGD. No entanto, de posse do PGD e das preferências do agente representativo têm-se informações completas para o gerenciamento do risco.

Todos os pressupostos de Arrow-Debreu, bem como as Equações (2.1) e (2.3) são baseadas na hipótese que os mercados são completos, mercado completo significa que todos os agentes possuem todas as informações relevantes sobre os bens disponíveis, não há assimetria nas informações. Esta questão é normalmente analisada e discutida dentro da teoria financeira como a hipótese de mercado eficiente.

---

<sup>18</sup> Em Harrison e Kreps (1979) pode ser encontrada a demonstração que  $f^*$  é a densidade de probabilidade neutra ao risco.

<sup>19</sup> A caracterização completa de um bem (ou de um ativo) deve precisar os estados da natureza onde este bem está disponível.

Um dos assuntos que foi e continua sendo alvo de constantes debates entre acadêmicos e profissionais da área de finanças é a hipótese de mercado eficiente (HME). Fama em seu artigo de 1965 apresentou a seguinte definição de mercado eficiente.

*Definição 2.3:*

*Um mercado eficiente é definido como um mercado onde há um grande número de agentes econômicos racionais<sup>20</sup>, maximizador do lucro em competição ativa, com cada agente tentando prever o valor futuro do mercado de cada derivativo, e onde as informações correntes importantes são disponíveis livremente entre os participantes.*

Outra definição coerente com a 2.3 acima apresentada e mais simples foi apresentada em 1969 por Fama et al.

*Definição 2.4*

*Um mercado eficiente é aquele em que há um ajustamento rápido às novas informações. Ou seja, um mercado cujos preços sempre representam todas as informações disponíveis é chamado de eficiente.*

Sob a hipótese do mercado eficiente, os participantes do mercado devem esperar obter um retorno nem maior, nem menor, que o retorno justo para o risco assumido. Entretanto esta definição é de tal forma geral que não há a possibilidade de testá-la empiricamente (Fama, 1970). Para tornar o modelo testável, o processo de formação de preços deve ser especificado em mais detalhes. Essencialmente deve-se definir algo mais exato para o significado do termo “todas as informações disponíveis”.

Em função desta dificuldade com o conceito de mercado eficiente dado pelas Definições 2.3 e 2.4 surgiram três definições da hipótese de eficiência do mercado: a forma fraca, a semi-forte e a forte. No entanto, antes de apresentar tais formas da HME deve-se definir duas formas de análise de investimentos, tais formas estão intimamente relacionadas com as HME, são estas dadas pelas definições abaixo.

---

<sup>20</sup> Agente racional é aquele que possui preferências de acordo com os axiomas do Teorema 2.1 e que preferem sempre mais a menos.

*Definição 2.5:*

*A análise de investimento fundamental baseia suas previsões do comportamento de preço dos ativos em fatores fundamentais ou internos à companhia, indústria ou economia.*

*Definição 2.6:*

*A análise de investimento técnica é baseada na premissa que tais fatores fundamentais estão refletidos no comportamento de preço do ativo.*

A partir das definições acima se pode apresentar as definições das três formas da HME (Hagin, 1979).

*Definição 2.7:*

*A forma fraca afirma que as informações sobre os preços e volumes passados não podem ser usados para prever preços futuros, ou seja, a forma fraca é diretamente oposta à análise técnica.*

*Definição 2.8:*

*A forma semi-forte afirma que todas as informações publicamente disponíveis estão refletidas nos preços dos ativos, ou seja, não há suporte à análise fundamental.*

*Definição 2.9:*

*A forma forte diz que nenhum investidor com informações privilegiadas pode obter lucro de estratégias de mercado. Em outras palavras, todas as informações estão totalmente refletidas nos preços dos ativos.*

Uma observação pertinente a todas as definições de mercado eficiente é a referência ao termo “eficiência”. Tal referência é enganosa, pois ela está relacionada ao tratamento das informações pelo mercado e não de eficiência<sup>21</sup> no sentido da palavra.

O foco do processo informativo produz uma conexão direta entre o preço dos ativos e a avaliação expectativa condicional. Especificando o preço do ativo, ou alguma transformação apropriada de um preço do ativo como uma expectativa condicional avaliada com relação a

---

<sup>21</sup> Um exemplo da “correta” utilização do termo eficiência é a fronteira de eficiência da maximização de Markowitz e a eficiência de Pareto.

um conjunto particular de informações faz conexão direta para a teoria dos processos estocásticos, incluindo resultados em processos martingales. A definição mais simples do processo martingale é (Poitras, 2002):

*Definição 2.10:*

*Um processo estocástico  $\{X(t) : t = 0, 1, 2, \dots\}$  é martingale se para  $t = 1, 2, \dots$ :*

$$i) E(X(t)) < \infty; \quad (2.5)$$

$$ii) E(X(t+1)|X(0), X(1), X(2), \dots, X(t)) = X(t) \quad (2.6)$$

A primeira condição afirma que o valor condicional de  $X(t)$  deve ser finito e a segunda condição é a propriedade martingale que afirma que dada as informações de  $X(t)$  e dos períodos anteriores a  $t$ , a melhor previsão para o próximo período  $(t + 1)$  é a observação corrente  $(t)$ .

A informação condicional pode ser sensivelmente expandida substituindo-se  $\{X(0), X(1), X(2), \dots, X(t)\}$  por  $\{Y(0), Y(1), Y(2), \dots, Y(t)\}$  onde  $Y(t)$  é algum processo estocástico que inclui  $X(t)$ . Assim a condição (2.6) torna-se:

$$E(X(t+1)|Y(0), Y(1), Y(2), \dots, Y(t)) = X(t) \quad (2.7)$$

Ou seja,  $X(t)$  é um processo martingale com respeito ao conjunto condicional de informações  $\{Y(t)\}$ , onde  $X(t)$  é uma função de  $\{Y(0), Y(1), Y(2), \dots, Y(t)\}$ . Com esta estrutura as formas fraca, semi-forte e forte da HME podem ser representadas pela expansão do conjunto condicional de informações associado com a expectativa condicional. Para a forma fraca, o passado histórico dos preços é o conjunto condicional de informações; para a semi-forte, o conjunto de informações é potencialmente todas as informações publicamente disponíveis; e para a forte todas as informações públicas ou privadas disponíveis.

Analisando a forma fraca sob a luz do processo martingale, pode-se representá-la matematicamente como:

$$P_t = P_{t-1} + e_t \quad ^{22} \quad (2.8)$$

ou seja, o preço do ativo de hoje é igual ao preço do ativo ontem mais um componente aleatório. Diz-se que se os preços obedecem à Equação (2.8) estes se comportam de acordo com um processo de formação de preços conhecido como caminho aleatório<sup>23</sup>. Assim sendo o movimento dos preços futuros não pode ser previsto com base em movimentos passados de preços, negando a rentabilidade da análise técnica.

*Proposição 2.1:*

*O conjunto de informações formado pelos preços passados é um subconjunto de informações publicamente disponíveis, que por sua vez é um subconjunto de todas as informações disponíveis. Logo, a eficiência fraca pressupõe a semi-forte que pressupõe a forte.*

*Prova:*

*A prova desta proposição é conclusão direta das definições 2.7, 2.8 e 2.9.*

No tocante às evidências empíricas que apóiam ou refutam a HME, Ross (2001) apresenta diversos trabalhos em ambas as direções, o que nos leva a conclusão que tal questão ainda possui diversos fatores empíricos a serem explicados.

Em conclusão, segundo Fama et al (1969) o argumento que o preço corrente de um ativo reflete todas as informações disponíveis implica que as mudanças sucessivas nos preços são independentes. Adicionalmente, é normalmente assumido que as mudanças sucessivas nos retornos são identicamente distribuídas. Juntas, estas hipóteses constituem o modelo do caminho aleatório (*random walk*).

---

<sup>22</sup> No caso de uma ação que apresenta dividendos, ou outro ativo com características semelhantes, a equação torna-se:  $P_t = P_{t-1} + \text{dividendos} + e_t$ .

<sup>23</sup> Caminho aleatório ou *random walk*, estão na próxima seção.

## **2.2 O Mercado Acionário Brasileiro num contexto de Gestão do Risco**

A hipótese de mercado eficiente é fundamental em diversos modelos que avaliam os mercados acionários e de derivativos. Entretanto, mercado eficiente nem sempre é observado na prática. É o caso de alguns mercados brasileiros. Uma forma de testar a eficiência do mercado é verificar se o conceito de passeio aleatório é válido.

A discussão deve levar em consideração o fator tempo. Mais precisamente a qual fase da história econômica brasileira considera-se. Segundo Torres et al (2002) há uma diferença significativa no comportamento do mercado brasileiro de ações antes e pós plano real. Neste mesmo trabalho mostrou-se que as ações brasileiras tornam-se mais líquidas, facilitando a incorporação de informações ao conjunto de informações disponíveis ao público.

A questão da liquidez mostra-se fundamental na eficiência do mercado. Brito e Manazes (1981) via o teste de autocorrelação dos retornos mostraram que o mercado brasileiro é previsível. No entanto, segundo evidenciado por Torres et al (2002), tal fenômeno pode ser consequência da base de dados utilizada, a qual era composta de ações pouco líquidas. Uma segunda razão para o resultado é o período de estudo: retorno diário de ações entre 1973 a 1980.

A partir de uma equação semelhante à (2.8), mas incluindo uma tendência. E com dados diários de ações com importância relativa heterogênea (tamanho da firma diferente), e o índice Ibovespa, no período de 4/3/1986 a 15/4/1998 para diversos horizontes temporais que vai do curto ao longo prazo. Torres et al (2002), utilizando diversos testes a partir do conceito de passeio aleatório, mostrou que o mercado brasileiro não são muito menos eficiente que o mercado americano. Com relação ao tamanho da firma, quanto menores, mais ineficiente o mercado (no sentido de Fama).

Avaliando o tamanho das empresas e sua relação com o desempenho das suas respectivas ações, Braga e Leal (2002) compararam carteiras cuja composição segregava ações de diferentes razões: valor patrimonial sobre o preço da ação e o tamanho das firmas (VPA/P). Os resultados mostraram que quanto maior a razão VPA/P maiores os retornos e risco. Mas não há evidência do efeito tamanho, indicando ineficiência. No entanto, este resultado não é corroborado por Costa Jr. e Neves (2000) que trabalharam com dados de painel.

Como pode ser observado, trabalhos semelhantes, com dados semelhantes, mas com metodologia diferentes para avaliar a eficiência de mercado possuem conclusões distintas sobre o assunto. Reforçando a hipótese de que este tema está longe de uma definição fielmente conclusiva.

Um aspecto que chama a atenção no mercado acionário brasileiro é a estrutura de controle x estrutura de propriedade. Ou seja, a distinção entre ações preferenciais (sem a estrutura de controle) e as ações ordinárias. De uma forma geral, no Brasil e segundo Valadares (2002), há uma grande concentração das ações tipo ON (ordinárias) nas mãos de poucos acionistas, dando a estes o controle. E ações PN (preferenciais) mais pulverizadas. Esta questão vem sendo discutida no âmbito da CVM e BOVESPA, inclusive com a criação de mercado específicos para empresas com boa governança corporativas.

A concentração de controle provoca uma menor taxa de crescimento do mercado, no entanto surge uma questão. Este efeito pode significar pressões para um mercado ineficiente? As evidências não mostram conclusões a respeito, mesmo comparando mercados com estrutura semelhante (como o italiano, por exemplo).

## **2.3 Dinâmica do Retorno do Ativo**

Sabe-se que é difícil, ou quase impossível, antecipar o preço de um ativo, no entanto, a precificação de um contrato de opções e o bom gerenciamento do risco requerem o conhecimento do preço ou distribuição de probabilidade dos preços do ativo objeto na data do vencimento. Partindo-se da hipótese que o preço futuro é desconhecido, faz-se necessário construir um modelo que apresente a dinâmica dos preços ou retornos do ativo objeto na data de exercício.

Segundo Wilmott, Howinson e Dewynne (1997), a grande maioria dos modelos de precificação de opções são baseados em um modelo simples para o movimento dos preços do ativo objeto. Estes modelos envolvem parâmetros derivados, por exemplo, de dados históricos.

Alguns dos modelos adotados neste trabalho são baseados na hipótese de eficiência do mercado<sup>24</sup>, assim sendo segue-se o conceito de passeio aleatório (*random walk*). Existem

---

<sup>24</sup> Assim como inúmeros trabalhos que utilizam a dinâmica de preços do ativo, como Sassatani e Siqueira (1998), Mao (1997), Rochman (2002) e Hokayem, Abdallah e Dorato (2003) entre outros.

diferentes formas de apresentar esta hipótese, com diversas suposições de restrições, mas todas suposições podem ser resumidas em dois pontos:

- O passado histórico é totalmente representado pelo preço presente, que não retém informação muito defasada;
- Os mercados respondem imediatamente a qualquer nova informação sobre o preço do ativo.

Supondo verdadeiras as suposições acima, então o modelo para o preço do ativo deve ser baseado na incorporação de novas informações ao modelo. Com as duas suposições, as mudanças no preço de um ativo são um processo de Markov.

Inicialmente nota-se que as mudanças absolutas de um ativo não são uma boa medida quantitativa. Ou seja, uma alteração de 1p (uma unidade) é muito mais significativa quando o preço é 20p que quando este é 200p. Desta forma utilizaremos para cada alteração do ativo os retornos, que é a mudança do preço dividido pelo seu preço original.

De acordo com a Figura 2.2 a seguir, no tempo  $t$  o preço do ativo era  $S$ . Considerando um período de tempo muito pequeno – subsequentemente  $dt$ , teremos uma variação no valor do ativo de  $dS$ . Sob esta suposição, como modelar o retorno do ativo  $dS/S$ ? Este modelagem terá dois componentes, um para cada hipótese do mercado eficiente.

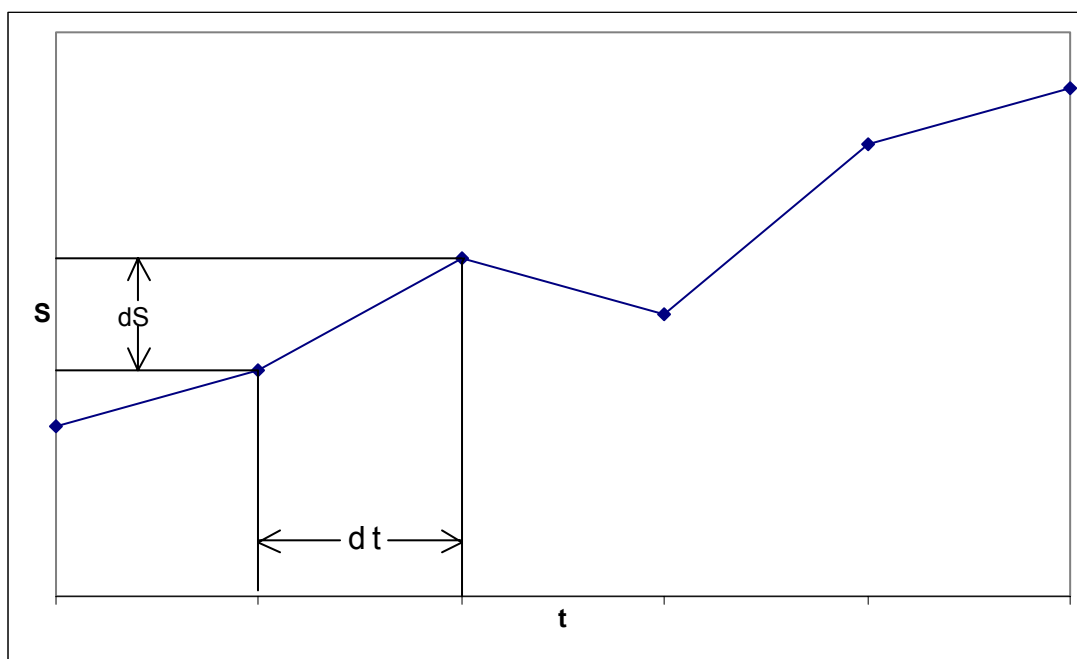


Figura 2.2: Detalhe de um passeio aleatório discreto.

Fonte: Elaboração própria.



O primeiro componente é o fator previsível, que estar relacionado com a 1ª hipótese, este pode ser comparado ao rendimento de um ativo livre de risco e é dado por  $\mu dt$ . Onde  $\mu$  é a medida da taxa média de aumento do preço do ativo. Nos modelos mais simples  $\mu$  é uma constante, já nos modelos mais sofisticados  $\mu$  pode ser uma função de  $S$  e  $t$ .

A segunda hipótese sugere que o modelo tenha um elemento relacionado com a chegada de novas informações. Esta é representada pelo termo  $\sigma dz_t$ , onde  $\sigma$  é a volatilidade e a medida  $dz_t$  é uma variável aleatória oriunda de uma distribuição normal, esta variável será tratada em mais detalhes na próxima seção. Neste caso também podemos ter  $\sigma$  em função de  $S$  e  $t$  para modelos mais sofisticados.

Colocando os dois termos juntos, teremos a equação diferencial estocástica (SDE):

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dz_t \quad (2.9)$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(S, t)dt + \sigma(S, t)dz_t \quad (2.10)$$

Onde o modelo (2.9) representa o modelo mais simples e a Equação (2.10) o modelo mais sofisticado.

### 2.3.1 O Processo de Wiener

O termo  $dz$  das Equações (2.9) e (2.10), que contém a randomicidade do preço do ativo é conhecido como um processo de Wiener. Este tipo de processo é utilizado na física para descrever o movimento de uma partícula sujeita a choques de outras partículas, fato também denominado movimento browniano. O primeiro trabalho a utilizar este modelo para o preço dos ativos foi desenvolvido por Louis Bachelier em 1900.

Para a construção de modelos de precificação de derivativos baseados em processos estocásticos faz-se necessário o conhecimento das propriedades da variável aleatória. As propriedades são as seguintes (Wilmott, Howinson e Dewynne, 1997 e Sassatani e Siqueira, 1998):

- $dz$  é uma variável randômica, derivada de uma distribuição normal;
- A média de  $dz_t$  é zero;
- A variância de  $dz_t$  é  $dt$ ;
- As variáveis  $dz_t$  para dois intervalos de tempo distintos ( $dt$ ) são independentes.

Assim, pode-se escrever  $dz_t$  como:

$$dz_t = \varepsilon_t \sqrt{dt} \quad (2.11)$$

Onde  $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ . Ross (1997), complementa que para  $dz_t$  seguir um processo aleatório deve satisfazer:

- O processo inicial em 0:  $dz_0=0$ ;
- O conjunto dos possíveis valores para  $z_t$ , para  $t \geq 0$ , possuem incrementos independentes e estacionários.

A Figura 2.3 a seguir ilustra uma possível trajetória das variáveis  $z_t$  no tempo que seguem um processo Wiener padrão.

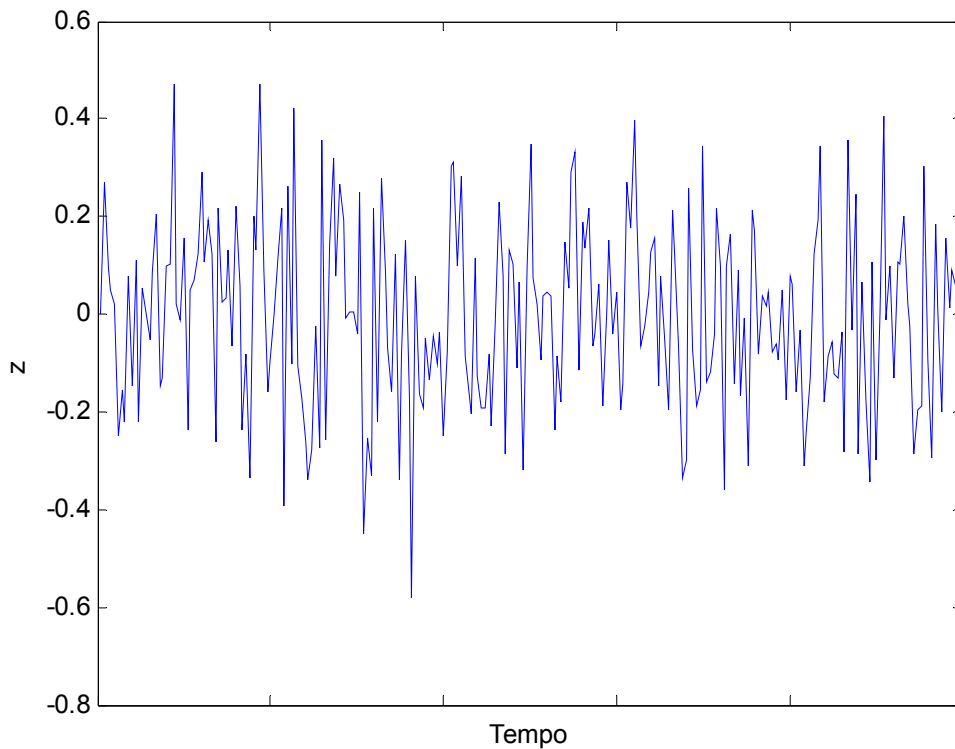


Figura 2.3: Simulação de uma trajetória do movimento browniano.

Fonte: Elaboração própria.

Observando o comportamento do processo estocástico pelo gráfico acima, nota-se uma série de bicos produzidos pelo processo aleatório. Uma função deste tipo não pode ser integrada ou derivada por métodos convencionais.

Um processo estocástico corresponde ao conjunto de todas as trajetórias percorridas pelas variáveis  $z_t$ , como ilustra a Figura 2.4 a seguir:

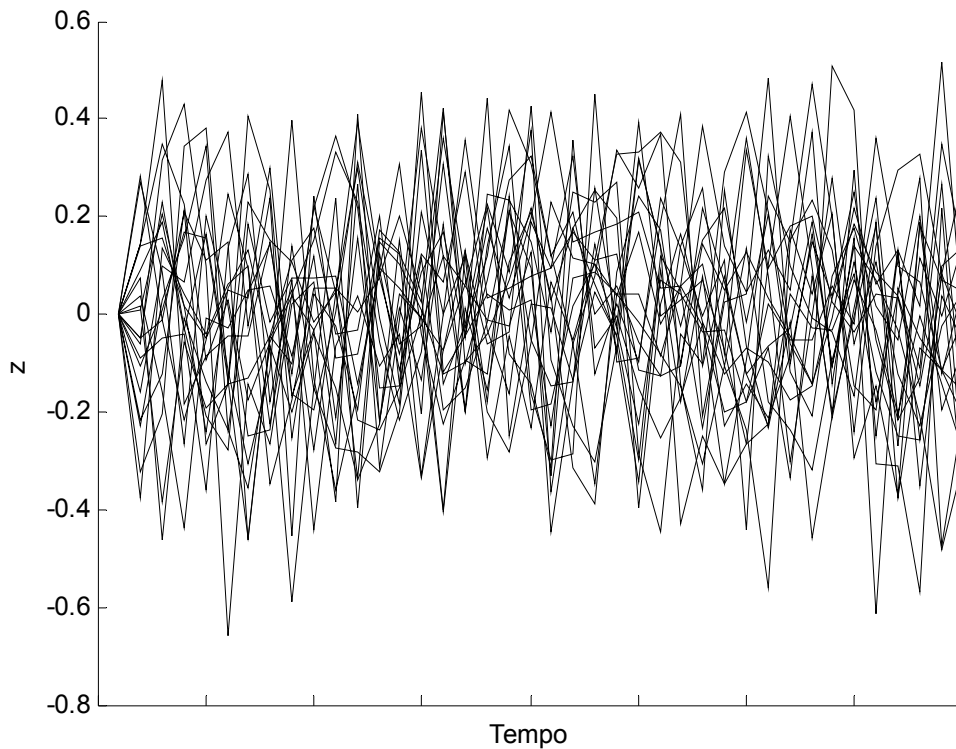


Figura 2.4: Processo estocástico ( $z_t, t \geq 0$ )

Fonte: Elaboração própria.

A partir das propriedades e particularidades da variável  $dz_t$ , pode-se analisar algumas características da Equação (2.9). A primeira é que a Equação (2.9) não se refere ao passado histórico do ativo; o próximo preço do ativo ( $S + dS$ ) depende somente do preço atual. Esta independência do passado é conhecida como propriedade de Markov.

A segunda propriedade é a média de  $dS$ , que é obtida a seguir:

$$E(dS) = E(\sigma S dz + \mu S dt) = E(\mu S dt) = \mu S dt \quad (2.12)$$

Já que  $E(dz) = 0$ . Na média, o próximo valor de  $S$  é maior que o valor anterior por um termo de  $\mu S dt$ .

Por fim consideraremos a variância de  $dS$ :

$$VAR(dS) = E(dS^2) - E(dS)^2 = E(\sigma^2 S^2 dz^2) = \sigma^2 S^2 dz^2 \quad (2.13)$$

### 2.3.2 A Fórmula do Preço do Ativo

A questão pertinente, a esta altura do trabalho é: Pode-se resolver a equação diferencial estocástica para se obter um resultado exato para o preço do ativo? A resposta é sim, mas para tal solução faz-se necessário à aplicação da fórmula de Itô, também conhecida como Lemma de Itô.

Se a Equação diferencial estocástica (2.9) fosse uma equação diferencial ordinária (com  $\sigma = 0$ ), seria fácil encontrar a solução por meio de integração. Desta forma, poderia-se isolar a variável  $S_t$  e obter uma função determinística  $S(\mu, t)$ , como a dedução a seguir:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dz_t$$

com  $\sigma = 0$  na Equação (2.9) acima repetida, tem-se:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt \Rightarrow \int_0^t \frac{dS_u}{S_u} = \int_0^t \mu du \Rightarrow \ln|S_u|_0^t = \mu t$$

Finalmente a partir da expressão acima se obtêm o resultado para o preço de ativo subjacente:

$$S_t = S_0 e^{\mu t} \tag{2.14}$$

Analogamente, fazendo-se  $\sigma \neq 0$ , ou seja, incluindo a componente estocástica na equação diferencial e integrando tem-se:

$$\int_0^t \frac{dS_u}{S_u} = \int_0^t \mu du + \int_0^t \sigma dz_u \tag{2.15}$$

Contudo a resolução da equação acima não segue as regras básicas do cálculo clássico. Como já dito, para efetuar esta operação utilizar-se-á o Lemma de Itô.

Neste trabalho fora utilizado a fórmula de Itô para o caso unidimensional, para o caso multidimensional observar o trabalho de Mao (1997). Para utilizar a fórmula de Itô defini-se um processo unidimensional.

*Definição 2.11:*

*Um processo unidimensional de Itô é um processo estocástico contínuo  $x(t)$  o qual tem um diferencial estocástico  $dx(t)$  em  $t \geq 0$  dado por:*

$$dx(t) = f(t)dt + g(t)dw$$

*onde tanto  $f$  como  $g$  são processos estocásticos com propriedades tais:*

$$\int_0^t |f(s)| ds < \infty \quad e \quad \int_0^t |g(s)|^2 ds < \infty \quad \forall t > 0$$

*A diferencial estocástica significa que:*

$$x(t) = x(t_0) + \int_0^t |f(s)| ds + \int_0^t |g(s)| dw(s)$$

*mantido para qualquer  $0 \leq t_0 \leq t < \infty$ .*

Seja  $C^{2,1}(\mathfrak{R}_x \mathfrak{R}_+; \mathfrak{R})$  a denotação da família das funções de valores reais  $V(x,t)$  definidas em  $\mathfrak{R}_x \mathfrak{R}_+$  tal que elas sejam duas vezes diferenciáveis em  $x$  e uma vez diferenciável em  $t$ . Se  $V \in C^{2,1}(\mathfrak{R}_x \mathfrak{R}_+; \mathfrak{R})$ , por conveniência:

$$V_t = \frac{\partial V}{\partial t}, \quad V_x = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad V_{xx} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (2.16)$$

*Teorema 2.3 (a fórmula unidimensional de Itô):*

*Seja  $x(t)$  um processo de Itô com  $t \geq 0$  e com a diferencial estocástica:*

$$dx(t) = f(t)dt + g(t)dw$$

*onde tanto  $f$  quanto  $g$  são processos estocásticos com propriedades tais que:*

$$\int_0^t |f(s)| ds < \infty \quad e \quad \int_0^t |g(s)|^2 ds < \infty \quad \forall t > 0$$

*Seja  $C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ . Então  $V(x(t), t)$  também é um processo de Itô com a diferencial estocástica dada por:*

$$\begin{aligned} dV(x(t); t) = & [V_t(x(t), t) + V_x(x(t), t)f(t) + \frac{1}{2}V_{xx}(x(t), t)g^2(t)]dt \\ & + V_x(x(t), t)g(t)dw \end{aligned} \quad (2.17)$$

*Prova: A prova deste teorema encontra-se no Anexo A1.*

Apresentado o Lemma de Itô retorna-se ao problema do modelo matemático (2.9) do preço do ativo. O teorema a seguir mostrar como aplicar o teorema de Itô na precificação do ativo.

*Teorema 2.4 (a fórmula de Itô na precificação de um ativo):*

*Suponha que o preço inicial do ativo  $S(t_0) = S_0 > 0$  no tempo  $t = t_0 \geq 0$ . Então o preço do ativo no tempo  $t \geq t_0$  é dado por:*

$$S(t) = S_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - t_0) + \sigma (z(t) - z(t_0)) \right] \quad (2.18)$$

*Prova: A prova deste teorema encontra-se no Anexo A2.*

Utilizando a propriedade de que em  $t_0=0$  o valor de  $z_0=0$ , é possível simplificar a Equação (2.18), para a expressão do preço do ativo:

$$S(t) = S_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma dz_t \right] \quad (2.19)$$

A Expressão (2.19) é fundamental para modelar o comportamento do ativo no cálculo das opções. A variável estocástica  $S_t$  segue uma distribuição log-normal, pois o seu logaritmo é uma variável aleatória com distribuição normal. De acordo com Luenberger (1998), dada uma variável  $\mu(t)=e^{w(t)}$ , se  $w(t)$  for normal, então diz-se que  $\mu(t)$  segue uma distribuição log-normal.

Na Expressão (2.19), supondo-se conhecido o parâmetro  $S_0$  em  $t = 0$ , e como esta segue o movimento geométrico browniano, então temos:

$$E(S_t) = S_0 e^{\mu t} \quad (2.20)$$

$$VAR(S_t) = S_0^2 e^{\mu t} (e^{\sigma^2} - 1) \quad (2.21)$$

## 2.4 O Modelo de Precificação de Opções de Black e Scholes

Como já comentado, o valor de uma opção está intimamente ligado ao valor do ativo objeto (descrito na Seção 2.2). Esta seção do trabalho apresenta como esta relação se forma e principalmente quais as condições de contorno que as expressões para o cálculo das opções necessita satisfazer. A seguir uma definição formal de uma opção segundo Araújo (2000).

*Definição 2.12:*

*Opção é um instrumento que dá ao seu titular, ou comprador, um direito futuro sobre algo, mas não uma obrigação; e ao seu vendedor, uma obrigação futura, caso solicitado pelo comprador da opção.*

Dado o princípio da arbitragem, os valores de uma opção de compra (*call*) e uma opção de venda (*put*) no vencimento devem ser representados respectivamente por:



$$\begin{aligned} c(S, T, k) &= \max[0; S_T - k] \\ p(S, T, k) &= \max[0; k - S_T] \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde:

$S_T \equiv$  valor do ativo em T;

$k \equiv$  preço de exercício.

Observe que as expressões anteriores mostram o valor das opções no instante terminal T. Neste instante, inclusive, o valor das opções européias é igual às americanas<sup>25</sup>. O problema reside na correta avaliação do prêmio das opções (valor da opção) num instante anterior ao vencimento. Neste caso  $S_t$  passa a ser uma variável aleatória, logo é necessário assumir uma hipótese sobre a distribuição da probabilidade dos preços ou taxas de retorno futuro do ativo objeto.

Um aspecto fundamental para a avaliação dos valores das opções é a chamada condição de contorno ou valor intrínseco<sup>26</sup>. Sassatani e Siqueira (1998) afirmam que a condição de contorno é o núcleo da expressão matemática que define uma opção. As Equações (2.22), são representações dos valores terminais das opções de compra e venda expressas sob a forma de condições de contorno, que definem os limites do domínio da função prêmio da opção.

### 2.4.1 A Análise de Black e Scholes

Antes de descrever a análise de Black e Scholes (Black e Scholes, 1973), cujo objetivo principal é precificar as opções, listaremos algumas suposições importantes para a análise propriamente dita:

- O ativo subjacente segue o caminho aleatório descrito pela Equação (2.9);

---

<sup>25</sup>Opções européias são aquelas que só podem ser exercidas em uma data específica, já a americana pode ser exercida desde o primeiro dia útil após sua compra, até a data de vencimento do contrato.

<sup>26</sup> As restrições racionais das opções de compra estão no anexo A4 e das opções de venda no A5, mais detalhes em Merton (1990)

- A taxa de juros livre de risco  $r$  e a volatilidade do ativo subjacente  $\sigma$  são funções conhecidas durante o tempo de vida da opção;
- Não há custos de transação associados ao *hedging* da carteira;
- O ativo subjacente não paga dividendos durante o tempo de vida da opção;
- Não há possibilidades de arbitragem. Isto significa que todas as carteiras livres de risco possuem o mesmo retorno;
- A negociação dos ativos subjacentes pode ser feita continuamente no tempo;
- O ativo é divisível, logo podem ser negociadas pequenas quantidades e/ou partes do ativo subjacente.

Supor uma opção cujo valor  $V(S, t)$  depende apenas de  $S$  e de  $t$ . Neste estágio da análise não é necessário especificar se a opção é de compra ou de venda; de fato,  $V$  pode ser determinado para uma carteira formado por diversas opções, por simplicidade pode-se pensar em opções de compra ou de venda simples.

Usando o lemma de Itô, Equação (2.17), escreve-se:

$$dV = \sigma S(t)dw_{V_S} + \left[ \mu SV_S + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + V_t \right] dt \quad (2.23)$$

A expressão acima indica o caminho aleatório seguido por  $V$ . Observa-se a necessidade de que  $V$  tenha ao menos a primeira derivada em  $t$  e que tenha duas derivadas em  $S$ .

Agora se constrói uma carteira formada por uma opção e um número  $-\Delta$  do ativo objeto. Este número é por hora não especificado. O valor desta carteira é:

$$\pi = V - \Delta S \quad (2.24)$$

A derivação desta carteira em um período é dada por:

$$d\pi = dV - \Delta dS \quad (2.25)$$

Onde  $\Delta$  é mantido fixo durante o período em questão; se não o fosse, então  $d\pi$  poderia ter termos em  $d\Delta$ . Substituindo (2.9) e (2.23) em (2.25), encontra-se o caminho aleatório para  $\pi$ . Ou seja:

$$d\pi = \sigma S(V_S - \Delta)dz + \left[ \mu S(V_S - \Delta) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + V_t \right] dt \quad (2.26)$$

Como demonstrado no Anexo 3, pode-se eliminar a randomicidade desta expressão escolhendo  $\Delta = V_S = \frac{\partial V}{\partial S}$ . Observe que  $\Delta$  é o valor inicial de  $\frac{\partial V}{\partial S}$  em  $dt$ . Isto resulta que a carteira é completamente determinístico, logo:

$$d\pi = \left[ V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} \right] dt = \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right] dt \quad (2.27)$$

Neste momento o conceito de arbitragem e de oferta e demanda é utilizado, com a suposição de que não há custos de transação. O retorno de um investimento com um valor equivalente a  $\pi$  em um ativo livre de risco renderia  $r.\pi.dt$  no tempo  $dt$ . Se o lado direito da Equação (2.27) fosse maior que este valor, um investidor poderia tomar emprestado uma quantia  $\pi$  para investir nesta carteira e assim teria um retorno superior à sua tomada de empréstimo.

Inversamente, se o lado direito de (2.27) fosse menor que  $r\pi dt$ , então o investidor poderia se desfazer da carteira e investir em um banco. Os dois caminhos de arbitragem levariam a um lucro instantâneo, sem risco e sem custos. A existência de tal arbitragem, com a habilidade de negociar com baixos custos, garante que a carteira e o investimento sem risco sejam mais ou menos iguais. Diante disso:

$$r\pi dt = \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right] dt \quad (2.28)$$

Substituindo  $\Delta = V_S = \frac{\partial V}{\partial S}$  em (2.24) e o resultado em (2.28) e dividindo-se por  $dt$ , chega-se a:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (2.29)$$

Esta é a Equação diferencial parcial de Black e Scholes.

A Equação (2.29) demonstra que, sob as suposições apresentadas, todos os derivativos cujo valor está relacionado apenas com  $S$  e  $t$ , bem como, que tenham um valor de pagamento adiantado (como as opções), devem satisfazer a equação de Black e Scholes (ou uma variante desta).

Antes de partir para a próxima seção, deve-se analisar três pontos importantes sobre as derivações feitas até o presente momento. Inicialmente, o delta dado por:

$$\Delta = V_S = \frac{\partial V}{\partial S}$$

É a taxa de mudança de valor da opção ou da carteira de opções com respeito a  $S$ . Este ponto é de fundamental importância tanto na teoria como na prática, e será tratada com mais atenção em breve. No momento pode-se defini-lo como a medida da correlação entre o movimento da opção ou opções e o movimento do ativo subjacente.

O segundo ponto diz respeito ao operador diferencial linear dado por:

$$L_{BS} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + rS \frac{\partial}{\partial S} - r \quad (2.30)$$

Tem como interpretação financeira a medida da diferença entre o retorno de uma carteira de opções *hedgado* (os dois primeiros termos) e o retorno do depósito em banco (os dois últimos termos).

Por fim, pode-se notar que a Equação (2.29) não contém o termo de crescimento  $\mu$ . Em outras palavras, o valor de uma opção é independente do quão rápido ou lento é o crescimento do ativo. O único parâmetro relevante da Equação diferencial (2.9) do ativo subjacente que afeta o valor da opção é a sua volatilidade,  $\sigma$ . A consequência prática para isto é que se dois indivíduos possuírem duas estimações diferentes para  $\mu$ , estes ainda podem ter o mesmo valor nas suas posições de opções.

### 2.4.2 As Equações de Black e Scholes: uma Solução Explícita para Opções Européias

Como mostrado na seção anterior, se o ativo subjacente segue a SDE (2.9), então o valor  $c(S, t)$  (ou  $c(S, t, k)$ ) de uma opção de compra européia em função do ativo  $S$  e do tempo  $t$ , satisfaz a seguinte equação de Black e Scholes (PDE), onde se substituiu o  $V$  de uma opção genérica, por  $c$  na Equação (2.29):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS \frac{\partial c}{\partial S} - rc = 0 \quad (2.31)$$

Além disso, o valor da opção de compra deve obedecer à condição final, expressa pela Expressão (2.22) rerepresentada a seguir:

$$c(S, T, k) = \max[0; S_T - k]$$

Para precificar a opção de compra européia, segundo Mao (1997), é suficiente resolver a Equação (2.31) com a condição de contorno final (2.22). Se for possível obter a solução explícita  $V$  para a PDE desde que se conheça o preço do ativo subjacente  $S$  no tempo  $t$ , então o valor da opção será simplesmente  $V(S, t)$ .

*Teorema 2.5: (A fórmula de Black e Scholes para a opção de compra européia):*

*A solução explícita para a PDE (2.31) é dado por*

$$c(S, t) = SN(d_1) - k \exp[-r(T - t)]N(d_2) \quad (2.32)$$

onde  $N(x)$  é a função de distribuição de probabilidade acumulada da distribuição normal padrão, ou seja:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz$$

*Enquanto:*

$$d_1 = \frac{\log(S/k) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad e \quad d_2 = \frac{\log(S/k) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

*Prova:*

*A prova do teorema acima se encontra no Anexo 6.*

Uma vez obtida a fórmula para a opção de compra europeia torna-se fácil obter a equivalente para a opção de venda europeia. O valor da opção de venda europeia na data de vencimento pode ser escrito como (Equação 2.22):

$$p(S, T, k) = \max[0; k - S_T] = \\ p(S, k) = \max[0; k - S]$$

Usando a paridade opção de compra – opção de venda (Sassatani e Siqueira, 1998), tem-se:

$$p(S, k) = c(S, k) - S + kQ(t) \\ p(S, k) = ke^{-r(T-t)} + c(S, k) - S$$

Substituindo (2.32) na expressão acima se obtém:

$$p(S, k) = ke^{-r(T-t)} + SN(d_1) - ke^{-r(T-t)}N(d_2) - S \\ = ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

Logo, deriva-se a fórmula de Black e Scholes para opções de venda europeia apresentada no teorema seguinte:

*Teorema 2.6 (A fórmula de Black e Scholes para a opção de venda europeia):*

*O valor da opção de venda europeia no tempo t e com o preço de exercício S é dado por:*

$$p(S,t) = ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (2.33)$$

onde  $N(x)$  é a função de distribuição de probabilidade acumulada da distribuição normal padrão e  $d_1$  e  $d_2$  são como antes apresentados, ou seja:

$$d_1 = \frac{\log(S/k) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad e \quad d_2 = \frac{\log(S/k) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

## 2.5 A Estimação da Volatilidade

Como pode ser observado tanto para a dinâmica de um ativo simples quanto para um derivativo sofisticado, a volatilidade representa um parâmetro fundamental. Tal conceito é de importância ímpar quando se trata de derivativos, em particular na precificação de opções, visto que, no modelo de B&S a volatilidade<sup>27</sup> é o único parâmetro não observável.

A correta previsão da volatilidade é importante não só nos esboços de estratégias ótimas de *hedge*, mas também, esta permite captar momentos de grandes incertezas no mercado. Quanto mais incerto estiver o mercado, mais os preços variam e maior a variância dos retornos implicando possibilidade de grandes perdas e ganhos. Logo, o correto gerenciamento passa pela boa previsão das oscilações de preço dos ativos no mercado, toda boa ferramenta de análise de risco deve levar em consideração a volatilidade, como é o caso do *Value at Risk*.

Há diferentes métodos para estimar a volatilidade dos retornos, pode-se dividi-los em dois grupos distintos: métodos paramétricos e não-paramétricos. Um exemplo de métodos não-paramétricos é a estimação da volatilidade por meio de redes neurais<sup>28</sup>.

Nesta seção são tratados os seguintes métodos paramétricos: modelos de volatilidade determinísticas (em particular os modelos da família GARCH) e os modelos de volatilidade histórica.

<sup>27</sup> A volatilidade  $\sigma^2$  é a medida da incerteza no que se concerne aos retornos ocasionais do ativo objeto.

<sup>28</sup> Para uma análise dos métodos não-paramétricos para modelar a volatilidade dos retornos ver Pagan e Schwert (1990).

### 2.5.1 A Volatilidade Histórica

A maneira padrão e mais simples de medir a volatilidade de um ativo é através da estimação do desvio padrão dos seus retornos. Esta medida é usualmente conhecida como volatilidade histórica. Este método supõe que o retorno segue uma distribuição probabilística normal, assim a volatilidade (ou o desvio padrão) pode ser estimada via a máxima verossimilhança da variância mínima (ou pelo método dos mínimos quadrados).

Chamando de  $u_i$  o retorno do ativo  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $\bar{u}$  o retorno médio e tendo  $n$  observações, pode-se estimar  $\sigma$ :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2} \quad (2.34)$$

onde :

$$u_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} \quad (2.35)$$

Uma primeira dificuldade com o estimador acima é a escolha adequada do tamanho da amostra  $n$ . É sabido que quanto maior o valor de  $n$ , maior será a precisão. No entanto, se  $n$  é estendido, as informações antigas podem não ser relevantes na estimativa da volatilidade futura.

Este estimador apresenta alguns problemas, um dos mais relevantes é a homogeneidade de importância atribuída a todas as observações (não há diferença entre informações recentes e antigas). Tal fato não permite ao estimador responder agilmente a mudanças dos preços dos ativos.

Uma alternativa a esta crítica é o estimador de média móvel com amortecimento exponencial (EWMA – *exponentially weighted moving average*). Uma estimativa da volatilidade segundo este método é (Bezerra, 2001):



$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i (u_i - \tilde{\mu})^2} \quad (2.36)$$

onde:

$$w_i \propto \lambda^{n-i+1}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad \tilde{\mu} = \sum_{i=1}^n w_i x$$

O parâmetro  $\lambda$  é conhecido como parâmetro de decaimento e determina todos os pesos das observações passadas. Observe-se que quanto mais afastada da data em questão menor é o peso da observação. O fator de decaimento também está relacionado com a quantidade de dados histórico, quanto menor o fator, menor a quantidade de dados necessários para uma boa estimativa.

Um variante deste estimador foi desenvolvido pelo J. P. Morgan, o *Riskmetrics<sup>TM</sup>*, em 1995, para o gerenciamento do risco. Neste método é utilizado um fator de decaimento de 0.94, segundo Bezerra (2001), determinado a partir de critérios de minimização do erro quadrático médio da volatilidade de diversos países.

O principal problema tanto do EWMA quanto do método simples de estimação da volatilidade, segundo Morais e Portugal (2000), é o fato da informação importante não ser o valor histórico da variância e sim a expectativa desta.

Assim sendo, a volatilidade pode ou não estar condicionada às informações passadas. De uma maneira geral os estimadores da volatilidade devem ser construídos levando-se em conta as regularidades empíricas das séries financeiras. No seu trabalho Taylor (1986) apresenta tais fatos estilizados:

- O pico em torno da média é mais alto que em uma distribuição normal;
- As distribuições dos retornos apresentam excesso de curtoses;
- Os retornos dos ativos apresentam-se em assimetria negativa;
- Os retornos dos ativos apresentam pequenas autocorrelações; e os quadrados dos retornos apresentam fortes correlações, o que implica em relações não lineares;
- A heterocedasticidade;
- A volatilidade dos retornos tem tendência de reversão à média, contradizendo a hipótese de que os preços seguem um movimento do tipo browniano;

- A volatilidade dos retornos tende a se agrupar (*volatility clustering*).

Os modelos tradicionais revelaram dificuldades de se adequar à essas regularidades empíricas. Somente com os modelos auto-regressivos é possível incorporar, em alguns casos, estas características aos modelos.

## 2.5.2 A Família GARCH

Nos últimos anos, os modelos de volatilidade condicional ganharam grande destaque tanto no meio acadêmico, quanto no meio financeiro. Tais modelos são extensões dos modelos ARCH (*autoregressive conditional heterocedasticity*) proposto por Engle em 1982 e estendido por diversos autores.

Os modelos GARCH (*generalized autoregressive conditional heterocedasticity*) e EGARCH (*exponential GARCH*), introduzidos respectivamente por Bollerslev (1986) e Nelson (1991) são os modelos que mais ganharam destaque, sendo mais abrangentes e gerais que o modelo ARCH. Segundo Gouriénoix (1997) estes modelos reproduzem algumas das principais características das séries financeiras, dentre elas: os conglomerados de heterocedasticidade e caudas pesadas.

Segundo Almeida e Pereira (1999), o modelo EGARCH é uma outra variante do modelo GARCH, o modelo GARCH-L (GARCH com *leverage effect*), introduzido por Glosten et al (1989), tentam captar assimetrias nas respostas de séries financeiras a choques positivos e negativos.

### 2.5.2.1 A Descrição dos Modelos

A heterocedasticidade foi freqüentemente associada com dados de *cross-section*, e as séries temporais estudadas no contexto de processos homocedásticos. Em análises macroeconômicas Engle (1982) encontrou evidências que para alguns tipos de dados, a variação da volatilidade dos modelos de séries temporais eram menos estáveis do que se pensava. Tal fenômeno pode ser facilmente visualizado observando-se a variação dos retornos dos ativos no Capítulo 4. Engle (1982) sugeriu então o modelo “*autoregressive, conditionally heteroscedastic*” – ARCH.

Este modelo expressa a variância condicional como uma defasagem distribuída do quadrado dos retornos passados. Seja o modelo ARCH (q) abaixo apresentado:

$$y_t = \beta' x_t + \varepsilon_t \quad (2.37)$$

$$\varepsilon_t = u_t \sqrt{\alpha_o + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2} \quad (2.38)$$

Onde  $u_t$  tem uma distribuição normal padrão e onde têm-se:

$$E(\varepsilon_t / x_t, \varepsilon_{t-1}) = 0$$

$$E(\varepsilon_t / x_t) = 0$$

$$E(\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-q}) = 0$$

$$E(y_t / x_t) = \beta' x_t$$

A partir de (2.38) pode-se obter facilmente a variância condicional de  $\varepsilon_t$ , obtêm-se:

$$\begin{aligned} Var[\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}] &= E[\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}] = E[u_t^2 \left[ \alpha_o + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \right]] = \alpha_o + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \\ \sigma^2 &= \alpha_o + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Conseqüentemente  $\varepsilon_t$  é condicionalmente heterocedástico, mas não em relação a  $x_t$ , e sim com relação a  $\varepsilon_{t-1}$ . Tomando-se o modelo AR para  $y_t$  e combinando com o termo de erro ARCH(1), obtêm-se de (2.37) e (2.39):

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.40)$$

$$\sigma^2 = \alpha_o + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \quad (2.41)$$

A variância não condicional do modelo ARCH(1) é observada pelos Teoremas 2.7 e 2.8 a seguir e pela Definição 2.13.

*Teorema 2.7 (Variância não condicional de um processo ARCH(1)):*

*A variância não condicional de um processo ARCH(1) é:*

$$Var[\varepsilon_t] = \alpha_o + \alpha_1 Var[\varepsilon_{t-1}] \quad (2.42)$$

*Prova:*

*Sabe-se que a variância pode ser apresentada em forma da variância condicional, ou seja:*

$$Var(y) = Var[E(y/x)] + E[Var(y/x)]$$

*Substituindo y por  $\varepsilon_t$  e x por  $\varepsilon_{t-1}$ , a expressão acima se torna:*

$$Var(\varepsilon_t) = Var[E(\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1})] + E[Var(\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1})]$$

*E como  $E(\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-q}) = 0$  e de (5.3):*

$$Var[\varepsilon_t] = EVar[\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}]$$

$$Var[\varepsilon_t] = \alpha_o + \alpha_1 Var[\varepsilon_{t-1}]$$

*o que conclui a prova.*

*Definição 2.13:*

*Um processo estocástico  $y_t$  é fracamente estacionário ou covariância estacionária se este satisfizer as seguintes condições:*

1.  $E(y_t)$  é independente de t;
2.  $Var(y_t)$  é uma constante positiva, finita e independente de t;
3.  $Cov(y_t, y_s)$  é uma função finita de t-s, mas de t ou s.

*Teorema 2.8 (Variância não condicional de um processo ARCH(1) de um processo fracamente estacionário):*

*Se o fator gerador do distúrbio é fracamente estacionário, então:*

$$Var[\varepsilon_t] = \frac{\alpha_o}{1 - \alpha_1} \quad (2.43)$$

*Prova:*

*A prova deste teorema é obtida diretamente do Teorema 2.7 e pela recorrência de  $\varepsilon_{t-1}$ ,  $\varepsilon_{t-2}$ , etc., logo:*

$$\begin{aligned} Var[\varepsilon_t] &= \alpha_o + \alpha_1 Var[\varepsilon_{t-1}] \\ Var[\varepsilon_{t-1}] &= \alpha_o + \alpha_1 Var[\varepsilon_{t-2}] \\ &\vdots \\ &\vdots \\ Var[\varepsilon_{t-q+1}] &= \alpha_o + \alpha_1 Var[\varepsilon_{t-q}] \end{aligned}$$

*Assim sendo:*

$$Var[\varepsilon_t] = \frac{\alpha_o}{1 - \alpha_1}$$

*o que conclui a prova.*

Para que o resultado (2.43) seja positivo e finito,  $|\alpha_1|$  tem que ser menor que 1. Então incondicionalmente,  $\varepsilon_t$  é normalmente distribuído com média zero e variância dada por (2.43). Logo, o modelo obedece as suposições clássicas, e o estimador dos mínimos quadrados é o mais eficiente estimador linear de  $\beta$  (Greene, 2000).

O resultado (2.43) pode ser expandido para o ARCH (q), segundo Engle (1985) um modelo com a variância condicional dada por (2.39) tem como variância não-condicional:

$$Var[\varepsilon_t] = \frac{\alpha_o}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i} \quad (2.44)$$

se  $\alpha_o > 0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q \geq 0$  e se todas as raízes associadas à equação característica estiverem dentro do círculo unitário, então  $\sum \alpha < 1$ .

Conforme já apresentado, os modelos ARCH foram estendidos por diversos autores, tornando tais modelos mais flexíveis e aplicáveis à diversas particularidades empíricas das séries financeiras. A seguir apresentam-se algumas destas variantes, a começar pelos modelos GARCH.

Bollerslev (1986) afirmou que em muitas aplicações os modelos ARCH(q) necessitam de grandes q para evitar problemas de variâncias negativas, conseqüentemente uma defasagem fixa devia ser imposta (Engle, 1982). Os modelos GARCH(p, q) podem ser classificados como uma extensão dos modelos ARCH, permitindo tanto uma memória longa, como uma estruturada de defasagem flexível, sem ter que, a priori, fixar nenhuma defasagem.

Em termos de persistência, nos modelos ARCH(q), como normalmente possuem um grande valor de q, conseqüentemente elevadas persistências. Já o modelo GARCH(p, q) constitui uma tentativa de expressar de forma parcimoniosa a dependência temporal da variância condicional.

O modelo padrão do GARCH(p,q) é apresentado a seguir:

$$y_t = \beta' x_t + \varepsilon_t \quad (2.45)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_o + \sum_{i=1}^p \delta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 \quad (2.46)$$

A primeira equação é a equação da média, onde  $y_t$  é a taxa de retorno da ação,  $x_t$  é uma matriz de regressores e  $\varepsilon_t$  é o termo de erro. Já a Equação (2.46), função de variância condicional é função de três fatores:

- A média  $\alpha_o$ ;
- Informações sobre a volatilidade passada mensurada pelo termo defasado quadrado  $\varepsilon_{t-i}^2$  (o termo ARCH);

- Variância dos períodos anteriores,  $\sigma_{t-i}^2$  (o termo GARCH).

O modelo acima é conhecido como GARCH(p, q), onde p se refere à ordem de autoregressão (p se refere ao período de tempo em que as volatilidades passadas ainda afetam o tempo presente t) e q aos efeitos dos erros passados sobre a volatilidade presente (Greene, 2000).

Esta especificação é freqüentemente interpretada dentro de um contexto financeiro, onde um agente ou *trader* prever a variância do período pela formulação de um termo médio de longo prazo (a constante), a previsão de variância dos últimos períodos (termo GARCH), e a informação sobre a volatilidade nos últimos períodos (ARCH). Se o retorno do ativo tiver expectativa de grandes variações, tanto para cima, como para baixo, então o *trader* irá aumentar sua estimativa de variância para o próximo período.

A condição de não negatividade da variância condicional neste modelo é dada por  $\alpha_0 > 0$ ,  $\delta_i \geq 0$ ,  $\alpha_j \geq 0$  para  $i = 1, \dots, p$  e  $j = 1, \dots, q$ . Analisando a estrutura da Equação (2.46) percebe-se que o modelo GARCH(p,q) é um modelo ARMA(p,q) no quadrado dos retornos. Esta característica permite a utilização de técnicas convencionais dos modelos da classe ARMA para a identificação de p e q.

Para garantir que este processo ARMA para quadrado dos retornos tenha covariância estacionária, devemos ter a seguinte condição:

$$\sum_{i=1}^q \delta_i + \sum_{j=1}^p \alpha_j < 1 \quad (2.47)$$

Sendo válida, a condição acima, a variância não condicional de  $y_t^2$  é dada por:

$$E(y_t^2) = E(\sigma_t^2) = \sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_i \delta_i - \sum_j \alpha_j} \quad (2.48)$$

Resumindo, a condição necessária de estacionariedade assintótica de um modelo GARCH(p, q) com  $\alpha_0 > 0$ ,  $\delta_i \geq 0$ ,  $\alpha_j \geq 0$  para  $i = 1, \dots, p$  e  $j = 1, \dots, q$  é dada pela Expressão (2.47).

A especificação GARCH atende a uma grande quantidade de características das séries financeiras como: o excesso de curtose, heterocedasticidade, reversão à média, volatilidade dos retornos com tendência a se reagrupar.

No entanto, com os modelos GARCH, choques (ou inovações) positivos e negativos têm o mesmo efeito sobre a volatilidade. Esta característica contradiz a evidência empírica de assimetria negativa, ou seja, nas séries financeiras empíricas os efeitos dos choques negativos são significativamente mais elevados em termos absolutos sobre a volatilidade que choques positivos. Assim, os choques positivos são superestimados pelo modelo GARCH e os choques negativos subestimados.

De uma forma geral, os modelos onde  $\sigma_t^2$  respondem assimetricamente a choques positivos e negativos devem ser preferidos aos modelos GARCH's padrões.

Almeida e Pereira (1999), apresentaram os modelos EGARCH e GARCH-L<sup>29</sup>. O modelo GARCH-L (assim como o EGARCH) apresenta resposta diferente para choques nos retornos, caso seja positivo ou negativo. São feitas algumas restrições nos seus parâmetros:  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$  e  $d_{t-1} = 1$  se  $\varepsilon_{t-1} \leq 0$ ; e  $d_{t-1} = 0$  se  $\varepsilon_{t-1} > 0$ . Daí para o modelo GARCH-L a expressão para  $\sigma_t$  é:

$$\sigma_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \xi d_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 \quad (2.49)$$

O modelo EGARCH não impõe restrições sobre os seus parâmetros, então  $\sigma_t$ :

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \gamma_i \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-j}} + \sum_{i=1}^q \alpha_i \left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-j}} \right| + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2) \quad (2.50)$$

A assimetria deste modelo é dado pelo  $\gamma_i$ . Sendo  $\gamma_i < 0$  teremos um choque positivo diminuindo a volatilidade e vice-versa.

Outro aspecto importante é a persistência dos choques, tal fator é inclusive critério de seleção entre os modelos da família GARCH. A tabela a seguir apresenta a persistência -  $\lambda$  para alguns modelos.



Tabela 2.1: Persistência dos modelos GARCH.

| Modelos        | Persistências – $\lambda$                                       |
|----------------|---|
| ARCH (q)       | $\lambda = \sum_{i=1}^q \alpha_i$                               |
| GARCH (p, q)   | $\lambda = \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \delta_j$       |
| GARCH-L (p, q) | $\lambda = \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \delta_j + \xi$ |
| EGARCH (p, q)  | $\lambda = \sum_{j=1}^p \beta_j$                                |

Fonte: Elaboração própria a partir de Almeida e Pereira (1999).

A meia vida de uma série financeira fornece uma idéia do tempo que a volatilidade leva para estabilizar-se após um choque significativo.

*Definição 2.14:*

A meia vida de uma série financeira é o tempo necessário para que o efeito do choque seja reduzido à metade. A meia vida pode se calculada como sendo:

$$HL = 1 - \frac{\log 2}{\log \lambda} \quad (2.51)$$

### 2.5.2.2 Testes dos Modelos ARCH

Nesta subseção são tratados os testes preliminares à estimação dos modelos. Iniciando-se com os testes de verificação do processo ARCH e de sua ordem, e em seguida o teste do modelo GARCH.

---

<sup>29</sup> O modelo GARCH-L também é conhecido como modelo GJR em função dos seus criadores – Glosten, Jagannathan e Runkle (1989).

*A. Verificando se o modelo é do tipo ARCH e a ordem de q do ARCH(q)*

Seja um modelo ARCH dado por (2.37) e (2.39). Pode-se testar a hipótese de que a variância dos erros é constante  $\sigma^2 = \alpha_0$ , contra a hipótese alternativa de erros seguindo um processo ARCH, de ordem a determinar. Segue, portanto, as hipóteses:

$$H_0: \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_q = 0$$

$$H_1: \alpha_i \neq 0, \text{ para pelo menos algum } i = 1, \dots, q$$

O teste é fundamentado seja pelo teste de Fisher clássico, seja pelo teste do multiplicador de Lagrange (LM). Bourbonnais e Terraza (1998) apresentaram uma forma prática para o teste, este é feito pelas etapas que seguem:

1. Determinação dos  $e_t$ , o resíduo da regressão (2.37);
2. Cálculo dos  $e_t^2$ ;
3. Regressão auto-regressiva dos resíduos sobre q defasagens (resíduos defasados), onde somente os termos significantes serão considerados,

$$e_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i e_{t-i}^2; \quad (2.52)$$

4. Cálculo da estatística do multiplicador de Lagrange,

$$LM = n \times R^2 \quad (2.53)$$

onde:  $n$  = número de observações que servem ao cálculo da etapa 3, e

$R^2$  = coeficiente de determinação da etapa 3.

Se  $LM > \chi^2(q)$ , ou seja com q graus de liberdade a um nível de confiança fixo (por exemplo 5%), rejeita-se  $H_0$ ; justificando o uso do modelo ARCH.

A determinação da ordem de  $q$  do processo ARCH é obtida via o teste acima, onde se busca um determinado  $q$ , para  $\alpha_q$  significativo, ou seja, faz-se a regressão de  $e_t^2$  sobre  $e_{t-q}^2$ . Uma observação importante foi feita por Bourbonnais e Terraza (1998), um processo ARCH só é justificado até a ordem  $q = 3$ , a partir de 3 usam-se os modelos GARCH que apresentam resultados pelo menos tão bons quanto, porém mais parcimoniosos.

Uma técnica alternativa é o cálculo do correlograma dos resíduos ao quadrado do modelo inicial. Se os termos deste correlograma forem significantemente diferentes de zero conclui-se que se trata de uma especificação ARCH.

#### B. Testando a especificação GARCH contra a ARCH

Supondo-se que o modelo em análise é um caso de heterocedasticidade condicional, pode-se testar a especificação ARCH contra a GARCH. A hipótese nula é que os erros são do tipo ARCH, já a hipótese alternativa é que os erros são GARCH. As duas hipóteses são as seguintes (supondo-se o modelo GARCH dado por (2.46)):

$$H_0: \delta_0 = \delta_1 = \dots = \delta_p = 0$$

$$H_1: \delta_i \neq 0, \text{ para pelo menos algum } i = 1, \dots, p$$

O teste mais eficiente neste caso é o método do multiplicador de Lagrange, acima apresentado. Substituindo-se  $q$  por  $p$  na Equação (2.53) e  $R^2$  sendo obtido via a substituição da Equação (2.52) por:

$$\sigma_t^2 = \hat{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^p \hat{\delta}_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \hat{\alpha}_j \varepsilon_{t-j}^2 \quad (2.54)$$

Se  $LM > \chi^2(p)$ , ou seja com  $q$  graus de liberdade a um nível de confiança fixo (por exemplo 5%), rejeita-se a hipótese  $H_0$ ; logo os erros obedecem a um processo GARCH( $p, q$ ).

### C. Testes de assimetria dos impactos (EGARCH e GARCH-L)

A verificação da assimetria das séries pode ser feita via a estimação dos modelos EGARCH ou GARCH-L e testando a significância dos termos assimétricos. Para o modelo EGARCH(p, q), verifica-se se os termos  $\gamma_i$  são significantemente negativos. Para os modelos GARCH-L checa-se a significância de  $\xi$ .

Uma alternativa é observar a correlação cruzada entre o quadrado dos resíduos padronizados  $z_t^2 = \left(\varepsilon_t / \sigma_t\right)^2$  e o resíduo padronizado defasado  $z_{t-k} = \left(\varepsilon_{t-k} / \sigma_{t-k}\right)$ . Essa correlação cruzada deve ser zero para o GARCH simétrico e negativa para os modelos não simétricos EGARCH e GARCH-L.

### 2.5.2.3 A Estimação dos Modelos ARCH

Segundo Greene (2000) o estimador dos mínimos quadrados (MQO) é o estimador linear mais eficiente dos parâmetros, no entanto, há um estimador não linear que é mais eficiente que o MQO, este estimador é o estimador de Máximo Verossimilhança. A seguir apresenta-se um procedimento para estimação dos modelos ARCH baseados no MQO, em sequência a aplicação da máxima verossimilhança aplicada aos modelos ARCH's.

#### A. A estimação do ARCH e GARCH em quatro etapas com o método dos mínimos quadrados generalizados

Engle (1982) e Judge et al. (1985) sugeriram um procedimento simples em quatro etapas baseados no método dos mínimos quadrados generalizados:

1. Estimação do modelo ARMA ou do modelo  $y_t = \beta'x_t + \varepsilon_t$  e determinação dos  $e_t$ ;
2. A partir dos resíduos de  $e_t$ , deve-se efetuar uma regressão pelo MQO com os dados variando de  $t = 2, \dots, T$ , obtêm-se os estimadores via a seguinte regressão:

$$e_t^2 = \hat{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^q \hat{\alpha}_i e_{t-i}^2 \quad (2.55)$$

3. Considera-se a aproximação da variância dos erros  $\varepsilon_t$  por  $\sigma_t^2$ , estima-se novamente os parâmetros do modelo via o método dos mínimos quadrados generalizado (MQG):

$$\hat{a} = (X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega^{-1} Y \quad (2.56)$$

isto é o equivalente a fazer uma regressão ponderada com os fatores de ponderação dados por:

$$\Omega = \text{diag}(\sigma_t^2); \quad (2.57)$$

4. Estimação dos coeficientes  $\alpha$  pelo MQG:

$$\sigma_t^2 = \hat{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^q \hat{\alpha}_i e_{t-i}^2, \text{ com}$$

$$\hat{\alpha} = (e' \Omega^{-1} e)^{-1} e' \Omega^{-1} \sigma \quad (2.58)$$

Apesar da semelhança com o modelo ARCH, as particularidades do modelo GARCH tornam a estimação deste mais difícil, exigindo algumas alterações na sua forma de estimação. Gouriéroux (1992) apresentou uma adaptação ao modelo GARCH de forma a estimá-lo sem contar com uma grande sofisticação matemática.

Seja o modelo GARCH (p, q) rerepresentado a seguir:

$$y_t = \beta' x_t + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \delta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2$$

De uma maneira clara a expressão da variância condicional em termo dos parâmetros e das variáveis observadas é dado por:

$$\sigma_t^2 = \frac{\alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2}{1 - \sum_{i=1}^p \delta_i \sigma_{t-i}^2}$$

Assim sendo,  $\sigma_t^2$  depende de todos os seus valores passados. Como o processo é observado durante um período de tempo limitado é necessário substituir ou atribuir valores a  $\sigma_t^2$  por uma aproximação truncada onde os valores de  $\varepsilon_t^2$  correspondem a datas negativas, em tais situações  $\sigma_t^2$  é tomado igual a zero. Logo se tem uma nova equação de recorrência:

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \delta_i \tilde{\sigma}_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \tilde{\varepsilon}_{t-j}^2, t \geq 1 \quad (2.59)$$

com:

$$\tilde{\varepsilon}_t = 0, \quad \text{se } t \leq 0; \quad \tilde{\varepsilon}_t = \varepsilon_t, \quad \text{se } t \geq 1; \quad \tilde{\sigma}_t = 0, \quad \text{se } t \leq 0;$$

Na prática, a otimização é feita pelos mesmos procedimentos numéricos. A estimação deste modelo pela técnica em quatro etapas de Engle (1982) pode ser realizada substituindo-se (2.55) e (2.58) respectivamente por:

$$e_t^2 = \hat{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^p \hat{\delta}_j \tilde{\sigma}_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^q \hat{\alpha}_i \tilde{\varepsilon}_{t-i}^2 \quad (2.60)$$

$$\sigma_t^2 = \hat{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^p \hat{\delta}_j \tilde{\sigma}_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^q \hat{\alpha}_i \tilde{\varepsilon}_{t-i}^2 \quad (2.61)$$

## B. A máxima verossimilhança aplicada aos modelos ARCH e GARCH

Como apresentado anteriormente a maioria das séries financeiras não seguem a distribuição normal. O modelo GARCH padrão pode ser estimado mesmo que haja uma suspeita que os erros não estejam condicionalmente normalmente distribuídos, para tal, frequentemente se utiliza o método de quase máxima verossimilhança descrito por Bollerslev e Wooldridge (1992).

Há condições suficientes de regularidade permitindo a obtenção das propriedades de convergências e de normalidade assintótica estabelecidas por Weiss (1984) dentro dos casos dos modelos ARCH lineares. A mais restrigente destas regularidades, raramente se encontra na prática, tal regularidade é a existência de momentos de ordem quatro para os resíduos.

Lumsdaine (1990) mostrou que os estimadores de quase verossimilhança dos diferentes parâmetros são convergentes e assintoticamente normais.

Lardic e Mignon (2002) observaram que quando a verdadeira densidade condicional é normal, os estimadores da média e da variância (condicional) são assintoticamente não correlacionados, conseqüentemente podem ser estimados separadamente sem perda de eficácia.

Assim sendo, a distribuição condicional para a taxa de retorno neste trabalho será a normal, apesar de ser uma simplificação do processo gerador de dados dos retornos condicionais. Este procedimento é amplamente utilizado na estimação dos modelos de volatilidade. A função log-verossimilhança, derivada da normal e condicional nas primeiras observações, usando  $T$  observações independentes, é igual para os modelos GARCH e modelo ARCH, ou seja, a expressão:

$$\log L = -\left(\frac{T}{2}\right)\log(2\pi) - \left(\frac{1}{2}\right)\sum_{t=1}^T \sigma_t^2 - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \quad (2.62)$$

Considere o modelo GARCH a ser estimado dado pela Expressão (2.45) e (2.46). A maximização da função de log-verossimilhança se dá pelas condições de primeira ordem de  $\alpha$ ,  $\delta$  e  $\beta$ <sup>30</sup>.

Para os modelos ARCH e GARCH a solução é obtida resolvendo as equações de primeira ordem. A solução numérica pode ser obtida via diversos algoritmos, como os

---

<sup>30</sup> As condições de primeira ordem e as hessianas são apresentadas por Lardic e Mignon (2002).

modelos de classificação ao algoritmo BHHH<sup>31</sup> (Berndt, Hall, Hall e Hausman, 1974). Para os casos do ARCH, o modelo de classificação pode ser usado facilmente, já para os modelos GARCH é preferido o algoritmo BHHH.

As estimações dos modelos EGARCH e GARCH-L também podem ser feitas via função de máxima verossimilhança. Mais detalhes em Hamilton e Susmel (1994).

---

<sup>31</sup> Lardic e Mignon (2002) apresentam uma descrição do algoritmo BHHH.



## 3 O VAR – VALUE AT RISK

### 3.1 O Risco, o Value at Risk: Aspectos Gerais

As últimas décadas foram caracterizadas pelo crescente desenvolvimento do mercado de derivativos financeiros, tal desenvolvimento fora motivado pela necessidade de proteção e especulação dos agentes financeiros. Dentro do universo do mercado financeiro três conceitos são da maior importância: retorno, incerteza e risco. Retorno pode ser entendido como a apreciação de capital ao final de um horizonte de investimento. Já as incertezas estão associadas com os retornos, tornando-os de certa forma imprevisíveis. E qualquer medida da incerteza pode ser chamada de risco.

Nesta seção será abordada a questão do risco, em particular o risco de mercado, a forma de mensurá-lo, quais as características de uma boa medida de risco. Além de introduzir formalmente o VaR.

#### 3.1.1 Apresentando o Risco

O conceito de risco é apresentado formalmente abaixo, segundo Jorion (1997).

*Definição 3.1:*

*O risco pode ser definido como a volatilidade de resultados inesperados, normalmente relacionados ao valor de ativos (ou passivos) de interesse.*

Os riscos vêm assumindo uma importância crescente, mais recentemente tornou-se destaque na literatura em função de desastres financeiros internacionais relacionados com o uso indevido de derivativos, exemplos de tais desastres são o caso do Baring Bank, da Procter&Gamble, Bankers Trust, Crédit Lyonnais, Orange County, Metallgesellschaft, etc. Tais problemas corroboraram para o surgimento de uma nova área do conhecimento, o gerenciamento de risco, cujo principal objetivo é a minimização eficiente do risco, dentro de determinada restrição orçamentária.

Na verdade risco está associado a toda operação no mercado financeiro. O risco é um conceito multidimensional cobrindo quatro grandes grupos: risco de mercado, risco de crédito, risco operacional e risco legal<sup>32</sup>. A seguir a definição de cada um destes riscos (Duarte Jr., 1997).

*Definição 3.2:*

*O risco de mercado é a medida das incertezas associadas às possibilidades de alteração dos valores esperados de um investimento em razão de variações de fatores como taxas de juros, taxas de câmbio, preço de ações e commodities. Pode-se associar tais variações a riscos de mercado específicos, como por exemplo, risco de taxas de juros.*

*Já o risco de crédito está associado à medida da incerteza relacionada com o recebimento de valor contratado a ser pago por um tomador de empréstimo.*

*O risco operacional está relacionado com possíveis perdas como resultado de sistemas e/ou controles inadequados, falhas de gerenciamento e erros humanos.*

*Por fim, o risco legal, que está associado às incertezas de uma instituição caso seus contratos não possam ser legalmente amparados por falta de representatividade por parte do negociador, por documentação insuficiente, insolvência, ou ilegalidade.*

Não há regra geral para a determinação dos riscos das instituições financeiras (e empresas que operem com derivativos). No entanto, todas as metodologias minimamente eficientes têm alguma sofisticação matemática, e sistemas computacionais e de informações confiáveis. No caso dos riscos operacional e legal deve ser abordado caso a caso. Os riscos de mercado e de crédito possuem algumas metodologias que já se encontram em uso e explicadas na literatura.

O foco deste trabalho é o risco de mercado. Um aspecto importante neste tipo de risco é a forma como este pode ser mensurado, que é a origem de boa parte dos desastres financeiros da atualidade.

Evidentemente há eficientes maneiras de mensurar os riscos para todos os mercados em particular. Entretanto, cada método está associado com um mercado e não pode ser aplicado diretamente a outros mercados. Já o VaR é uma maneira integrada de avaliar os riscos de diversos fatores e com os mais distintos mercados.

---

<sup>32</sup> Jorion (2003) apresenta ainda o risco de liquidez; para uma boa classificação dos riscos financeiros veja a *OCC Banking Circular (1993)*.

A tabela a seguir apresenta alguns ativos e suas equivalentes medidas de riscos simples. Por exemplo, um título do governo (c-bond, ou outro) possui como medida de risco a *duration*, e esta pode ser utilizada para comparar os riscos de diversos títulos. No entanto, se este título é incorporado a uma carteira de ações a utilização da *duration* perde o sentido. Assim sendo, percebe-se que a utilidade das medidas simples de avaliar os riscos são limitadas.

Analisando as carteiras de instituições financeiras como o J. P. Morgan Chase & Co., CitiCorp, ou no Brasil: Itaú, Bradesco, Unibanco, etc., apresentadas nos seus relatórios regularmente publicados, sugere-se duas observações: a grande diversidade das posições em carteira e a dificuldade em combinar todas as classes de risco para esta diversidade de posições em uma única medida.

Tabela 3.1: Resumo das principais ferramentas para avaliação do risco de mercados (ativos) simples.

| Ativos      | Medida de risco   |
|-------------|---|
| Bonds       | <i>Duration</i> , convexidade, modelos de estrutura de termos |
| Crédito     | Classificação ( <i>rating</i> ), modelos padrão               |
| Ações       | Volatilidade, correlação, beta                                |
| Derivativos | Delta, gama, vega   |

Fonte: Wiener (1997).

Além de tais fontes de risco, ainda temos as apresentadas na Definição 3.2. Mesmo focando no risco de mercado observa-se a diversidade de medidas de risco que impede ou pelo menos dificulta a comparação entre risco de uma ação e um c-bond, por exemplo.

Linsmeier e Pearson (1999) observaram que estas dificuldades aumentaram a partir de 1973, com o colapso do sistema de câmbio fixo (sistema de Bretton Woods) e a publicação da fórmula de precificação de opções de Black & Scholes. Estes eventos resultaram em alta volatilidade das taxas de câmbio, das taxas de juros, do preço dos *commodities*. A proliferação de instrumentos derivativos para *hedgear* o risco surgiram das taxas de mercado e da dinâmica de preços. Com essas mudanças as instituições financeiras aumentaram suas posições em derivativos com propósitos tanto de proteção (*hedge*) quanto de especulação.

Estes fatos fizeram com que nos últimos tempos ocorresse um aumento na demanda por medidas quantitativas do risco de mercado para carteiras. Crouhy, Galai e Mark (2001)

argumentaram que os recentes desastres financeiros mundiais tiveram como motivo primário a busca de uma ferramenta simples (mas não eficiente) de mensurar o risco.

A variedade de modelos específicos continua sem fornecer resposta a uma simples questão. Qual o risco corrente? Pergunta esta que cada instituição financeira deve responder. Como já apresentado, há diversas razões pela qual tal pergunta não seja respondida de uma maneira simples. Mas a mais importante de todas é que não existe uma resposta simples, risco é algo infinitamente adimensional, depende de todos os eventos possíveis do mundo. Um exemplo é a seguinte pergunta, qual a perda máxima que se pode ter em um horizonte de tempo? A resposta é: tudo. No entanto, a probabilidade deste evento é muito pequena, mas muito pequena deve ser quantificada, neste contexto de certa forma entra o VaR (Wiener, 1997).

Para Duarte Jr. (1997), a grande motivação para a utilização do VaR é o fato deste integrar todo o risco em um único valor, o risco de mercado total, facilitando a sua administração por parte dos gerentes e pessoas relacionadas com a gestão de risco. Por outro lado, tratando-se o risco como multidisciplinar requer um número elevado de simplificações. No entanto, algumas considerações sobre o VaR e sobre as diversas ferramentas de risco são feitas a seguir.

### 3.1.2 Coerência das Ferramentas de Risco

O número de alternativas para a mensuração do risco vem aumentando significativamente nos últimos anos. Artzer et al (1999), diante desta diversidade de alternativas, considera o problema do gerenciamento do risco sob a ótica axiométrica. Os mais relevantes apresentados por Artzer et al (1999) e Tay (2001 a) são:

*Axioma 3.1 (Monotonicidade):*

*Sejam dadas as carteiras  $X, Y \subset G$  ( $G$  é o conjunto de carteiras disponíveis); se  $X \leq Y$  então  $f(X) \leq f(Y)$ . Se a medida  $f(\cdot)$  de risco for monotônica.*

*Axioma 3.2 (Translação invariante):*

*Seja dada a carteira  $X \subset G$  e  $r$  como taxa de juros livre de risco, então:  $f(X + r) = f(X) + r$  para todo  $r \in R$ .*

*Axioma 3.3 (Homogeneidade Positiva):*

*Sejam  $\lambda \geq 0$  e a carteira  $X \subset G$ ; então  $f(\lambda X) = \lambda f(X)$ . Se a medida  $f(\cdot)$  de risco for homogênea de grau 1.*

*Axioma 3.4 (Subaditividade):*

*Sejam dadas as carteiras  $X, Y \subset G$ ; se  $f(X + Y) \leq f(X) + f(Y)$ . Então a medida  $f(\cdot)$  de risco obedece a subaditividade.*

As medidas de risco que satisfazem os quatro axiomas anteriores são chamados de medidas de risco coerentes. O mais crítico dos axiomas para o VaR é o Axioma 3.4 onde afirma que o risco de uma carteira formada por sub carteiras deve ser menor ou igual a soma dos riscos individuais das duas sub carteiras.

Segundo West (2004) e Tay (2001 a), para algumas carteiras o VaR não é uma medida de risco coerente por violar o Axioma 3.4. Estes autores sugerem a utilização do *Expect Shortfall* (ES) ou o *Expect Tail Loss* (ETL) para carteiras bastante diversificadas.

Entretanto, segundo alguns trabalhos, entre os quais Rootzén e Klüppelberg (1999), há argumentos contra a utilidade da subaditividade. Segundo estes autores a não subaditividade do VaR ocorre em casos extremos dos mercados, como *crashes* e crises financeiras internacionais. Assim Rootzén e Klüppelberg (1999) afirmam que não se deve abandonar o VaR simplesmente em função da subaditividade.

Uma das finalidades das ferramentas de gerenciamento do risco é avaliar o risco em situações extremas, fato este corroborante para que o Comitê de Basileia sugira o VaR como ferramenta de risco padrão. Não obstante, a consciência das limitações do VaR e da sua consistência não deve ser irrelevantes.

### 3.1.3 Conceitualização do *Value at Risk*

Pelos fatos citados e por outros é que o VaR vem se tornando a medida padrão para a avaliação de risco do mercado, sendo adotado por diversos bancos, corretoras e fundos mútuos. Os órgãos reguladores podem obrigar a implementação do VaR, nos Estados Unidos, as agências de *rating* como a Moody e Standard and Poor's (S&P), o *Financial Accounting Standard Board* (FASB) (Conselho de padrões financeiros contábeis) e a *Securities and Exchange Commission* (SEC) apóiam a utilização do VaR (Jorion, 2003).

Esta preocupação dos órgãos reguladores vem crescendo em particular por causa dos consecutivos desastres financeiros durante os anos 1980's e 1990's. O Comitê de Basileia para supervisão bancária permite que os bancos calculem seu requerimento de capital para o risco de mercado baseado em modelos próprios<sup>33</sup> de *Value at Risk* (VaR).

Então o que é o VaR? Abaixo uma definição de Jorion (2003):

*Definição 3.3:*

*O Value at Risk (VaR) sintetiza a maior (ou pior) perda esperada dentro de determinado período de tempo e intervalo de confiança.*

Considere a Figura 3.1 a seguir, ela representa o retorno dos títulos do governo brasileiro C-bond no período de 30/12/1998 a 31/12/2002. Observe que, com exceção do começo da série, os retornos estão entre 0,135 e -0,17 (aproximadamente). Construindo uma distribuição de probabilidade a partir da Figura 3.1 tem-se a Figura 3.2 em seguida.

---

<sup>33</sup> O requerimento de capital como função do VaR encontra-se na seção 3.7, mais detalhes em Jorion (2003) e Crouhy, Galai e Mark (2001).

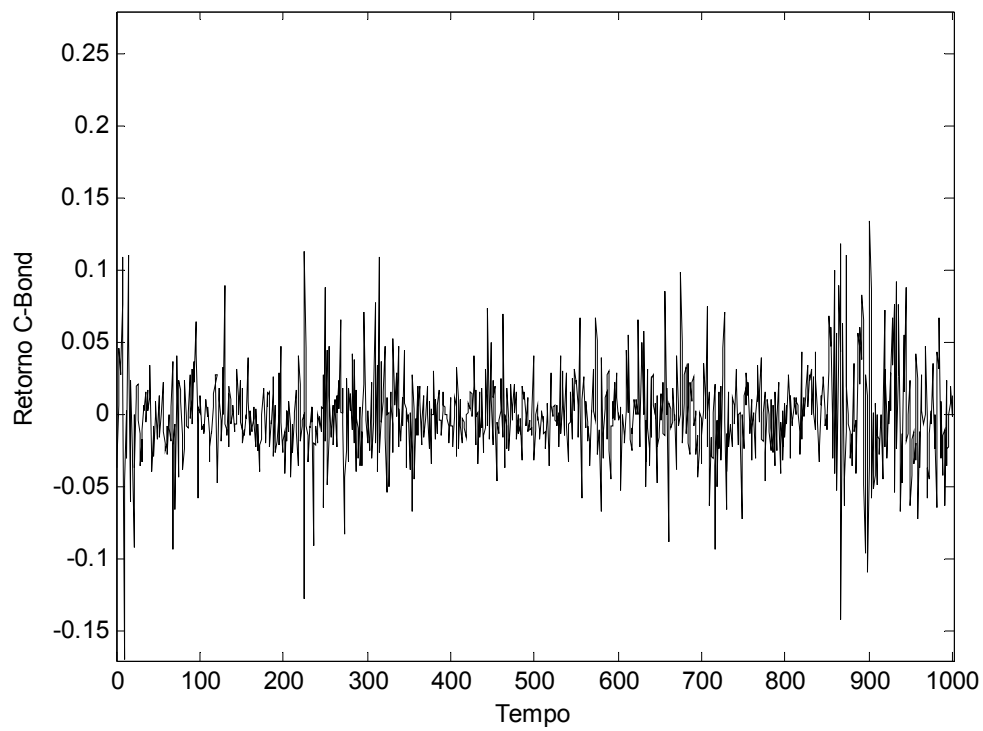


Figura 3.1: Retornos dos títulos C-Bond.

Fonte: Elaboração própria a partir de dados do IPEA.

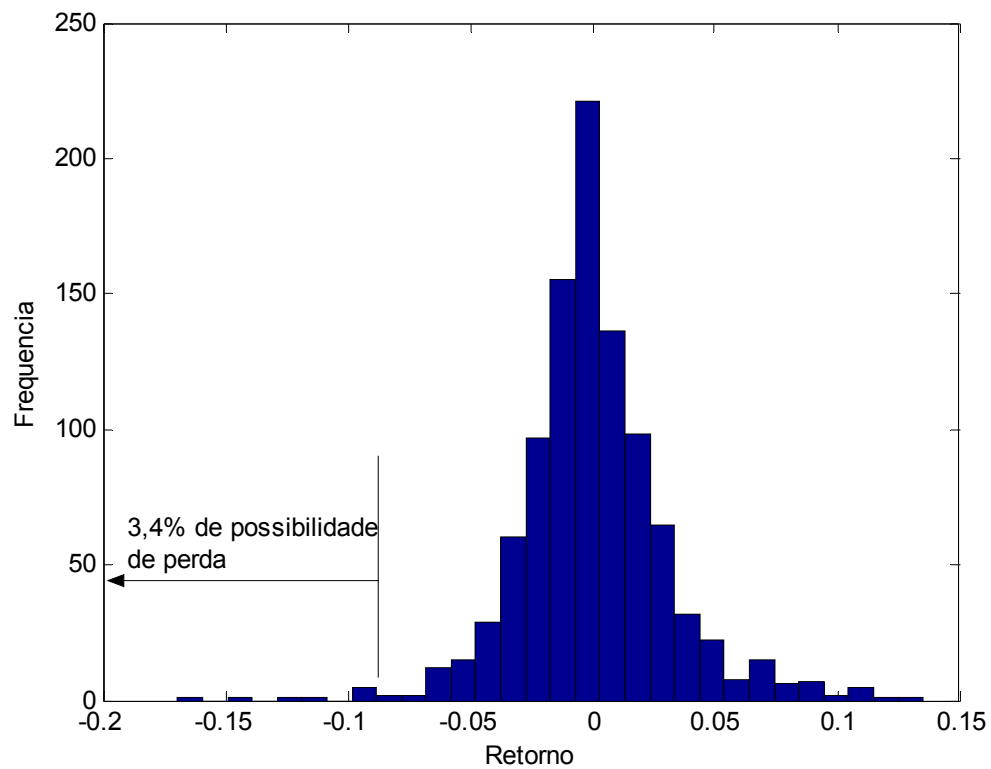


Figura 3.2: A medição do VaR dos títulos C-Bond.

Fonte: Elaboração própria.

A partir da Definição 3.3 pode-se determinar o VaR, inicialmente os parâmetros devem ser determinados, o intervalo de tempo será de 30/12/1998 a 31/12/2002 e um nível de confiança de 96,6%. Assim sendo, serão avaliados os 34 piores eventos (sobre 1000, ou seja 3.4%), analisando a figura observam-se que 96.6% dos retornos estão acima de -0,05, ou seja em apenas 3,4% dos casos ocorrem perdas superiores a -0,05, logo o VaR para este ativo neste período de tempo e com este grau de confiança é de -0,05.

O VaR calculado acima é o absoluto, mas pode ser calculado o VaR relativo, por exemplo, utilizando a média do rendimento do ativo, neste caso 0,00025 (0,025%), tem-se um VaR relativo de -0,05025.

O VaR também pode ser definido<sup>34</sup> de forma mais formal e matemática, evitando a possibilidade de ambigüidade da definição anterior, como a seguir:

*Definição 3.4:*

*Para um dado horizonte de tempo, um nível de significância  $\alpha$ , considerando  $X$  como o retorno de uma série financeira e  $f(x)$  como função de distribuição de probabilidade  $f(x) = \text{Prob}(X \leq x)$ , o Value at Risk (VaR) pode ser definido como:*

$$VaR_{\alpha}(X) = -\inf\{x | f(x) > 1 - \alpha\} \quad (3.1)$$

O sinal negativo é relativo ao fato do VaR ser definido como a diferença entre o ponto zero (para o VaR absoluto) e o valor da abscissa para o quantil especificado.

Existem inúmeras técnicas diferentes para calcular o VaR de uma carteira (ou de um título simples), entretanto todas devem seguir uma seqüência, ou lógica. Para Wiener (1997) todas seguem a seguinte seqüência.

1. Seleção dos parâmetros básicos (horizonte de tempo, grau de confiança e tempo de mensuração);
2. Seleção dos fatores relevantes do mercado;
3. Acompanhamento do risco;
4. Cálculo do VaR.

---

<sup>34</sup> Esta definição pode ser encontrada em Artzner et al (1999) e Kato (2004).



Todas estas etapas serão objeto de estudo das próximas seções. A seguir uma apresentação do VaR para distribuições gerais.

Jorion (2003), também define VaR como a perda da carteira relativa ao seu valor esperado ( $VC^*$  é o valor esperado mínimo), sendo  $VC$  o valor da carteira no momento em questão ( $VC_o$  é o valor no momento inicial) e a taxa de retorno obtida e esperada  $R$  e  $R^*$ , respectivamente:

$$VaR = VC - VC^* = VC_o(R - R^*) \quad (3.2)$$

Em algumas situações pode-se calcular o VaR para o retorno da carteira, por exemplo, quando se deseja comparar métodos de VaR:

$$VaR_{\text{Retorno}} = R - R^* \quad (3.3)$$

Já o VaR absoluto da carteira, esta forma é a mais utilizada no meio acadêmico e no mercado pois representa a perda real da carteira em relação ao momento em que está medindo o VaR (Bezerra, 2001), é dado por:

$$VaR = VC_o - VC^* = -VC_o R^* \quad (3.4)$$

Para encontrar o valor mínimo esperado é necessário um nível de confiança e a distribuição de probabilidade futura da carteira de ativos ou do retorno da carteira. O ponto crucial deste método é a determinação da distribuição de probabilidade.

Chamando a função de distribuição de probabilidade futura da carteira de ativos ou de retorno -  $f(x)$ , deseja-se calcular qual a probabilidade de encontrar um valor menor que  $VC^*$ :

$$p = P(x \leq VC^*) = \int_{-\infty}^{VC^*} f(x) dx \quad (3.5)$$

Tem-se, portanto  $VC^* = F^{-1}(p)$ , onde  $F^{-1}$  é a função inversa de densidade absoluta. Podemos reescrever a Equação (3.5) como:

$$VaR = VC_o - VC^* = VC_o - F^{-1}(p) \quad (3.6)$$

Neste ponto percebe-se que a maior dificuldade do VaR está na determinação da função de distribuição de probabilidade<sup>35</sup>. Tal questão será abordada nas seções que tratam dos modelos específicos de VaR, enquanto na Seção 3.2 são discutidos os parâmetros subjetivos.

### 3.2 Os Parâmetros Subjetivos do VaR

Calcular o VaR implica definir, a priori, três parâmetros arbitrários: o nível de confiança, o tamanho da janela e o período de tempo. Todos são elementos subjetivos e não há um consenso sobre a definição destes. Por exemplo, a abordagem do modelo interno, proposto pelo Comitê de Basileia, estabelece um intervalo de confiança de 99%, um período de tempo de 10 dias e uma janela de 250 dias (um ano). O VaR resultante é então multiplicado por um fator de 3 para fornecer a exigência mínima de capital para fins de regulamentação.

O comitê escolheu, presumivelmente, um período de 10 dias, visto que ele reflete o *trade-off* entre os custos de monitoramento freqüente e os benefícios da detecção antecipada das perdas potenciais (Jorion, 2003).

Na verdade, o período de tempo depende do objetivo do VaR, se o objetivo é o VaR para um relatório interno, VaR diário; se para um relatório para os acionistas, VaR mensal. Outro fator é a liquidez dos ativos que compõem a carteira. Ativos mais líquidos implicam que os investidores devem liquidar suas posições o mais rápido em função de más perspectivas do cenário econômico. Para ativos menos líquidos é necessário um maior tempo para liquidação dos ativos, pode ser o caso de um VaR mensal.

No tocante ao nível de confiança há poucas diretrizes, o Comitê de Basileia sugere 99%, o mesmo é utilizado pelo Banker Trust; já o Chemical e o Chase o nível é de 97,5%; o Citibank, de 94,5%; e o J. P. Morgan, de 95%. Níveis maiores do VaR implicam em maiores requisitos de capital.

---

<sup>35</sup> Um fator fundamental para a determinação da função de distribuição de probabilidade é a volatilidade (já apresentada no capítulo 2) como será demonstrado.

Segundo Jorge et al (2001), qualquer que seja o nível de confiança adotado, este deve levar em conta os seguintes aspectos:

- Os requisitos de capital aumentam com o grau de confiança;
- O nível de confiança escolhido deve obedecer a certos critérios contabilísticos uniformes de modo a permitir a comparação entre as instituições;
- O nível escolhido deve enquadrar-se nas práticas de controle e gestão de risco que forneçam aos líderes da instituição uma visão realista da empresa.

Ao se escolher um nível de confiança de 95%, significa uma expectativa de que a cada 20 dias uma perda supere o VaR, já um nível de 99% é o mesmo que aguardar uma perda a cada 100 dias. Assim sendo, para 99% de confiança são necessários no mínimo 100 dias para confirmar a concordância do modelo, é um tempo longo em relação a 95% de confiança, por tal razão neste trabalho adotar-se-á 95% de confiança para o cálculo do VaR.

De uma forma geral, a escolha do nível de significância deve ser feita de acordo com a recomendação de Beder (1995). Segundo este autor, a escolha é feita de acordo com o propósito da utilização do VaR. Se for para a determinação de capital, a escolha depende do grau de aversão ao risco do investidor. Quanto mais avesso menor o nível. Se o objetivo é comparar técnicas a escolha é irrelevante, devendo, no entanto manter a consistência entre os métodos.

O tamanho da janela é o tamanho da amostra (o período de observação) usada na estimação dos parâmetros do VaR. O tamanho da janela está relacionado com o objetivo da estimação e disponibilidade dos dados. De uma forma geral os trabalhos acadêmicos mostram que quanto maior a janela, melhores são os resultados, exemplo de trabalho que ratifica isto: Beder (1995).

As expressões (3.5) e (3.6) dadas são bem gerais, a correta mensuração do VaR passa pela função de distribuição de probabilidades do ativo (ou da carteira). A quantidade relativamente grande de opções de cálculo do VaR dar-se exatamente pelas possibilidades distintas de especificação das funções de distribuição de probabilidade (FDP) futura. As seções a seguir tratam das mais relevantes variações do VaR presentes na literatura.

### 3.3 O Método Delta – Normal

Este método é baseado na hipótese que os retornos são normalmente distribuídos. Dados históricos da janela de observação são normalmente usados para mensurar os parâmetros: média, desvio padrão, correlações. A distribuição é construída com estes parâmetros.

#### 3.3.1 O Método Tradicional

Considerando uma distribuição normal caracterizada por  $\mu$  e  $\sigma$  (média e desvio padrão do retorno, respectivamente), a função de distribuição de probabilidades é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (3.7)$$

Assim a função de distribuição normal cumulativa de probabilidade é:

$$\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^p e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad (3.8)$$

Desta forma o quantil genérico  $p$  é a função inversa  $\Phi^{-1}(p)$ . A resolução do modelo acima é feita por meio da utilização de integração numérica. A função normal padronizada tem seus valores tabulados em livros e pode-se derivar o VaR. Que é obtido:

$$VaR = VC_o Z_{\alpha} \sigma \quad (3.9)$$

onde  $\alpha$  é o desvio normalizado para a significância selecionada,  $\sigma$  é o desvio padrão e  $VC_o$  é o valor inicial da carteira, por exemplo, para  $\alpha$  de 95% de significância, têm-se  $Z_{\alpha}$  de 1,96<sup>36</sup>.

---

<sup>36</sup> Estes valores podem ser encontrados nas tabelas da distribuição normal padrão.

A estimação de  $\sigma$  pode ser obtida diretamente da Expressão (2.34). Entretanto, pode-se substituir a hipótese de retornos normais para um caso mais realístico com as séries financeiras, ou seja, assumir a distribuição condicional dos retornos, os modelos ARCH, GARCH; apresentados na Seção 2.4.2.

A mensuração do VaR para um único ativo, conforme a metodologia acima apresentada, é relativamente simples. Um pouco de dificuldade matemática e computacional surgem quando se calcula o VaR para grandes carteiras (supor N ativos), neste caso o retorno é dado por:

$$R_{p,t+1} = \sum_{i=1}^N w_{i,t} R_{i,t+1} \quad \text{ou} \quad R_{p,t+1} = w_t R_{t+1} \quad (3.10)$$

onde os pesos  $w_{i,t}$  ( $w_t$  na forma de vetor) são indexados ao tempo, a fim de caracterizar a natureza dinâmica das carteiras. Como o retorno das carteiras é uma combinação linear de variáveis normais, ele também será normalmente distribuído. Utilizando notação matricial, a variância da carteira será dada por:

$$\sigma_p = w_t' \Sigma_{t+1} w_t \quad (3.11)$$

Assim o VaR pode ser obtido pela expressão:

$$VaR = VC_o Z_\alpha \sqrt{w_t' \Sigma_{t+1} w_t} \quad (3.12)$$

Desta forma é possível acomodar uma grande quantidade de ativos, basta estimar a matriz de covariância  $\Sigma_{t+1}$ .

Evidentemente quando o número de ativo é grande há um crescimento exponencial do tamanho da matrix com o número de ativos, alguns modelos<sup>37</sup> oferecem uma estrutura mais simples para a matrix de covariância, um deles é o modelo diagonal, proposto no contexto de carteiras de opções.

*Suposição 3.1:*

*Supondo-se que a movimentação conjunta dos ativos é oriundo de um único fator, o mercado.*

*Pode-se apresentar o retorno de cada ativo como:*

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} E[\varepsilon_i] &= 0 & E[\varepsilon_i R_m] &= 0 \\ E[\varepsilon_i \varepsilon_j] &= 0 & E[\varepsilon_i^2] &= \sigma_{\varepsilon,i}^2 \end{aligned}$$

*O retorno do ativo i é determinado pelo mercado  $R_m$  e pelo termo aleatório  $\varepsilon_i$ .*

Conseqüentemente a variância de cada ativo i é dada por:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon,i}^2 \quad (3.14)$$

E a covariância entre dois ativos é:

$$\sigma_{i,j} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2 \quad (3.15)$$

A partir de (3.14) e (3.15) pode-se construir a matriz de covariância total (colocando em notação matricial):

$$\Sigma = \beta \beta' \sigma_m^2 + D_\varepsilon \quad (3.16)$$

Como a matrix  $D_\varepsilon$  é diagonal, a quantidade de parâmetros é reduzida de  $N(N+1)/2$  para  $2N+1$ .

Para carteira com um grande número de ativo e bem diversificada a variância da carteira é:

$$\sigma_p = \text{var}(w' R) = w' \Sigma w = (w' \beta \beta' w) \sigma_m^2 + w' D_\varepsilon w \quad (3.17)$$

---

<sup>37</sup> Jorion (1997) apresenta dois outros modelos: as medidas de VaR zero e o modelo de fatores.

*Corolário 3.1:*

*O segundo termo da Expressão (3.17) torna-se muito pequeno à medida que cresce o número de ativos, assim sendo a variância da carteira pode ser expressa como:*

$$\sigma_p = (w' \beta \beta' w) \sigma_m^2 \quad (3.18)$$

*Prova:*

*Supondo que todas as variâncias são idênticas e que cada ativo possua peso idêntico, o segundo termo da Expressão (3.17) será:*

$$\sum_{i=1}^N \left(1/N\right)^2 \sigma_\varepsilon^2$$

*que converge para zero com o aumento de N.*

### **3.3.1.1 O VaR Incremental**

Uma característica importante deste método de cálculo do VaR é a capacidade de identificar, dentro de uma carteira, qual a participação de cada ativo no risco total da carteira. Com esta informação há a possibilidade de redução do VaR pela simples eliminação ou substituição do ativo de grande risco.

O VaR de cada ativo em particular não é suficiente para tal avaliação, o que importa é a contribuição de cada ativo para o risco total.

*Definição 3.5:*

*O  $\beta$  de um ativo mede a contribuição deste para o risco total da carteira, também é chamado de risco sistêmico do ativo  $i$  relativo à carteira  $p$ . O  $\beta$  em notação matricial é dado por:*

$$\beta = \frac{\Sigma w}{w' \Sigma w} \quad (3.19)$$

O VaR total pode ser decomposto no VaR incremental de cada ativo, ou seja:

$$VaR_{total} = VaR_{total} \left( \sum_{i=1}^N w_i \beta_i \right) = VaR_1 + VaR_2 + \dots \quad (3.20)$$

### 3.3.1.2 O Método Delta-Normal Aplicado às Opções

O método da variância-covariância (também conhecido como método delta-normal) para funções não-lineares, como as opções, não possui bons resultados práticos pelo fato (principalmente) de tal método assumir uma distribuição normal<sup>38</sup>.

Supondo que a única fonte de risco é o preço do ativo objeto (S) e expressando o valor de uma opção como uma série de Taylor, tem-se em uma aproximação de primeira ordem:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S} dS$$

$$dV = \delta dS \quad (3.21)$$

Calculando a variância<sup>39</sup>:

$$\text{var}(dV) = \text{var}(\delta dS) = \delta^2 \text{var}(dS) \quad (3.22)$$

Como  $\text{var}(dS)$  é dado por  $S^2 \sigma^2$ , então a Expressão (3.22) torna-se:

$$\text{var}(dV) = \delta^2 S^2 \sigma^2 \quad (3.23)$$

E o VaR é dado por:

---

<sup>38</sup> Uma alternativa para contornar esse problema é a metodologia analítica, histórica e o método de monte Carlo; que consideram outras gregas.

<sup>39</sup> A expressão do delta para opções de compra e venda foi apresentada no capítulo 2.



$$VaR = Z_\alpha \delta \sigma \mathcal{S} \quad (3.24)$$

Para uma carteira de contratos não lineares, têm-se:

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_N \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = \begin{bmatrix} \ln \frac{S_1}{S_0} \\ \vdots \\ \ln \frac{S_N}{S_{N-1}} \end{bmatrix}$$

Logo, para pequenas variações do valor da carteira ( $\Delta R_p$ ) obtêm-se:

$$\Delta R_p = \delta^T R \quad (3.25)$$

Supondo uma distribuição normal dos retornos:

$$\Delta R_p \sim N(0, \delta^T \Sigma \delta) \quad (3.26)$$

Assim, sendo o VaR é definido por:

$$VaR = VCo Z_\alpha \sqrt{\delta^T \Sigma \delta} \quad (3.27)$$

Apesar da simplicidade metodológica e facilidade de implantação, Jorge et al (2001) apresentam três críticas à aproximação delta-normal. A primeira (que é apresentada por todos os métodos que usam séries históricas), é relativa a incapacidade de acomodar dentro das distribuições de probabilidade eventos extremos.

O segundo problema são os retornos caracterizados por um achatamento da distribuição, fenômeno conhecido por “*fat tails*”. Este fator torna-se fundamental porque o

VaR procura captar o comportamento dos retornos da carteira na cauda da distribuição esquerda<sup>40</sup>.

Por fim, a terceira debilidade, que para Jorge et al. (2001) é a mais importante, é a incapacidade do VaR delta-normal de medir, pelo menos de forma adequada, o VaR para instrumentos financeiros não lineares (como as opções).

### 3.3.2 Os Métodos *Stress* VaR.

O cálculo do VaR é determinado com base em uma distribuição de probabilidade dos retornos esperados de uma carteira. Entretanto, as suposições feitas com relação à distribuição de probabilidade podem não ser válidas em determinadas situações, como nos *crashes* no mercado acionário e em choques econômicos. O procedimento de VaR utilizado para capturar o risco em tais situações é chamado de *stress* VaR; este modelo é o objeto de estudo da Subseção 3.3.2.1..

O maior atrativo na utilização do *stress* VaR para mensurar o risco é que este permite incorporar cenários subjetivos à estrutura de VaR normal, assim as comparações entre o VaR normal e o *stress* Var podem ser realizadas sem perda de consistência. A principal crítica ao *stress* VaR são as suposições de normalidade que este assume, visto que é derivado do VaR normal.

Uma forma de contornar alguns problemas do pressuposto de normalidade, em particular as grossas caudas das distribuições de retorno das séries financeiras, é utilizar a distribuição t de *student*; esta metodologia é o objeto da Subseção 3.3.2.2.. Na verdade, integra-se a distribuição t de *student* no modelo *stress* VaR para formar o modelo *stress* VaR-x.

#### 3.3.2.1 Incorporando o *Stress* ao Modelo Delta Normal.

Supondo uma variação no valor da carteira dada pela Equação (3.10) e o VaR normal calculado pela Expressão (3.12) e utilizando um nível de significância de 95%, a estimativa de perda da carteira é dada por:

---

<sup>40</sup> Como já apresentado, uma maneira de minimizar este efeito é o uso da volatilidade obtida pelos métodos autoregressivos condicionais.

$$VaR(95) = -1.65VC_o \sqrt{w_t' \Sigma_{t+1} w_t} \quad (3.28)$$

Uma forma simples de avaliar uma carteira sob uma situação de *stress* é aumentar o nível de confiança do VaR, para por exemplo 99%. Esta forma de calcular o VaR é caracterizada pelo fato de submeter todos os fatores a um patamar de *stress*; na prática, procura-se utilizar o stress VaR aplicado a apenas um (ou alguns) choque, como choques nas taxas de juros, choques cambiais, etc.. Logo, o modelo mais útil será aquele que permita ao administrador de risco especificar um ou mais eventos e gerar um conjunto de estatísticas que capturem as correlações nos movimentos dos fatores de preços.

Para permitir ao administrador de risco a flexibilidade na seleção e escolha de choques, Kupiec (1998) decompõe o vetor retorno de preços (3.10) em dois grupos: o primeiro é formado pelos fatores que representam e/ou que são afetados pelo choque, ou seja o cenário de *stress*  $\mathbf{R}_{2t}$  (um vetor ( $k \times 1$ )), o segundo grupo é o dos fatores de preços que não pertencem ao cenário de *stress*  $\mathbf{R}_{1t}$  (um vetor ( $N - k \times 1$ )). Se a matrix de covariância é dividida seguindo este raciocínio, então a distribuição de fatores de preço condicional pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} R_{1t} \\ R_{2t} \end{bmatrix} \sim \left( \begin{bmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{11t} & \Sigma_{12t} \\ \Sigma_{21t} & \Sigma_{22t} \end{bmatrix} \right) \quad (3.29)$$

Onde os retornos médios  $\mu_{1t}$  e  $\mu_{2t}$  são ambos zero sob as suposições padrões do VaR. Os pesos de cada ativo na carteira  $w_t$ , também podem ser particionados. Assim a expressão pode ser reescrita como:

$$R_t = \begin{bmatrix} w_{1t} & w_{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{1t} \\ R_{2t} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Pode-se expressar o conjunto dos fatores chaves para o cenário de *stress* como  $\mathbf{R}_2$ :

$$R_{2t} = R_2 = [r_1, r_2, \dots, r_k] \quad (3.31)$$

A magnitude dos valores de  $\mathbf{R}_2$  será um conjunto de acordo com os julgamentos do administrador de risco baseado na análise dos fatores econômicos e informações que estão apresentados no histórico dos fatores de preços que se dispõe.

O método mais comum do *stress* VaR é fazer  $\mathbf{R}_{1t} = \mathbf{0}$ , e estimar as potenciais perdas como  $\mathbf{W}_{2t}\mathbf{R}_2$ .

Uma forma para construir o cenário de *stress* é assumir que a matrix de covariância,  $\Sigma_t$ , é inalterada no cálculo do VaR. A suposição que o retorno dos fatores de risco possuem uma função de distribuição normal multivariada permite que se calcule a distribuição de probabilidade dos fatores de risco fora do cenário de *stress* ( $R_{1t}$ ), condicional aos fatores  $R_2$  tomando os valores exogenamente. Sob esta ótica os fatores fora do cenário de *stress* são distribuídos como (Kupiec, 1998):

$$R_{1t} \Big|_{R_2} \sim N[\mu_c, \Sigma_c] \quad (3.32)$$

onde

$$\mu_c = \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} \quad (3.33)$$

e

$$\Sigma_c = \Sigma_{11} - (\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}) \quad (3.34)$$

Sob esta suposição, o valor esperado do retorno da carteira é dado por:

$$E(R_t) = [w_{1t} \quad w_{2t}] \begin{bmatrix} \mu_c \\ R_2 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

com um desvio padrão de  $\sqrt{w_t' \Sigma_c w_t}$ .

Logo o VaR para um nível de significância de  $\alpha$ , é obtido de:

$$StressVaR = w_{2t}R_2 + w_{1t}\mu_c - Z_\alpha \sqrt{w_t' \Sigma_c w_t} \quad (3.36)$$

Alternativamente é possível ignorar as perdas geradas pelos fatores não sujeitos ao cenário, e utilizar o valor esperado do *stress* VaR para mensurar as perdas:

$$E(StressVaR) = w_{2t}R_2 + w_{1t}\mu_c \quad (3.37)$$

### 3.3.2.2 O Modelo *Stress* VaR-X.

Como já apresentado à distribuição t de *student* promove uma alternativa viável à distribuição normal para minimizar os efeitos das caudas grossas. A redução da espessura da cauda da distribuição t de *student* é medida pelo índice  $\lambda^{41}$ , que reflete a velocidade na qual a espessura da cauda da distribuição se aproxima de zero. Quanto menor o índice, maior é a cauda. Especificamente tratando-se da distribuição t de *student*, o índice  $\lambda$  é igual ao número de graus de liberdade.

Huisman et al. (1998) demonstrou que os estimadores do VaR-x (*stress* VaR-x) obtidos da distribuição t de *student* capturam os risco de forma mais eficiente quando estes estão associados a retornos negativos. Seguindo a metodologia de Hill (1975), estima-se o  $\lambda$  via o seguinte algoritmo:

$$\gamma(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\ln x_{n-l+1} - \ln x_{n-k}) \quad (3.38)$$

Onde  $\gamma$  é chamado de estimador de Hill e corresponde ao inverso de  $\lambda$ . k é o número de observações da cauda grossa, e  $x_i$  é o enésimo incremento do retorno de ordem absoluta, ou seja,  $x_i \geq x_{i-1}$ .

Huisman (1998) modificou a metodologia de Hill, permitindo estimar via regressão  $\gamma$  em  $\lambda$  para amostras pequenas:

---

<sup>41</sup> Alguns autores usam a letra  $\alpha$ .

$$\gamma(K) = \beta_0 + \beta_1 K + \varepsilon(K) \quad (K = 1, \dots, k) \quad (3.39)$$

Onde  $k$  é a metade do tamanho da amostra. Segundo Tan e Chan (2003) o inverso do intercepto  $\beta_0$  é um estimador não viesado de  $\lambda$ .

O procedimento para a obtenção do *stress* VaR-x é o seguinte:

1. Determinar o tamanho da amostra para  $n$  retornos negativos;
2. Ranquear os retornos absolutos em ordem crescente;
3. Estimar o  $\lambda$  dos fatores de preço que não estão sob *stress* de acordo com as Equações (3.38) e (3.39);
4. Com o índice  $\lambda$  igual ao número de graus de liberdade, obter o valor crítico  $S^*$  da distribuição  $t$  de *student* (de acordo com o nível de significância);
5. Como a distribuição  $t$  de *student* tem média zero e desvio padrão igual a  $(\lambda - 2) / \lambda$ , converter a matrix de covariância da Equação (3.34) via a seguinte expressão:

$$\Sigma_c^\alpha = \frac{\lambda - 2}{\lambda} \Sigma_c \quad (3.40)$$

6. A etapa final é calcular o *stress* VaR como em (3.36), usando a seguinte expressão:

$$StressVaR(-x) = w_{2t} R_2 + w_{1t} \mu_c - S^* \sqrt{w_t' \Sigma_c^\alpha w_t} \quad (3.41)$$

### **3.4 As metodologias Analíticas Baseadas nas Gregas.**

Um dos grandes benefícios do método delta normal é o fato de requerer o cálculo do valor da carteira apenas uma vez, a partir da posição VCo, que depende dos preços dos ativos que compõem a carteira no tempo inicial, assim o delta normal se adapta bem a grandes carteiras.

Entretanto, quando se trata de carteiras com opções, ou com qualquer derivativo não linear, apenas ocorre uma baixa performance da aproximação delta normal, a explicação para tal fato baseia-se na relação entre os retornos da carteira e os fatores de risco não serem lineares (mesmo que a distribuição dos fatores de risco seja normal). Assim sendo, a função de distribuição dos retornos ( $F(p)$ ) não deve ser considerada normal.

Jorion (2003) apresenta os seguintes problemas na abordagem delta para carteiras com opções:

- O delta da carteira poderá mudar muito depressa (gama elevado);
- O delta da carteira poderá ser diferente para movimentos ascendentes ou descendentes;
- A pior perda poderá não equivaler às realizações extremas do preço do ativo-objeto.

Em termos gerais, para gama positivo a distribuição do retorno apresentará uma tendência a evidenciar um elevado grau de enviesamento positivo, enquanto para valores de gama negativo, o enviesamento será negativo, afastando-se também da normalidade.

As implicações do enviesamento da distribuição tem consequências importantes para o cálculo do VaR, visto que este depende diretamente da cauda esquerda da  $F(p)$ . Assim sendo, assumindo-se erroneamente que a  $F(p)$  segue uma distribuição normal, tende-se a exceder o valor real do VaR<sup>42</sup>.

Verifica-se que as estimativas do VaR levando em conta as estimativas do método delta normal levam a um erro considerável, exceto quando a aproximação é local, sendo, desta forma, necessário recorrer a métodos mais sofisticados.

Entretanto, ainda não abrindo mão da hipótese de normalidade, é possível minimizar alguns efeitos indesejáveis, como o “efeito gama”, isto é feito incorporando a grega gama no

modelo. Assim, para uma carteira de opções uma alternativa são as metodologias analíticas as quais são baseadas na modelização do comportamento do mercado. Os métodos para avaliação do VaR podem utilizar diversas alternativas, por exemplo, os modelos de Black & Scholes para a modelização do mercado.

O ponto de partida desta metodologia é a expansão de Taylor da modelização do mercado. A flexibilidade destes métodos é o seu ponto forte. Podem-se incorporar, além dos fatores da decomposição de Taylor alguns fatores do mercado. Como realizado por Duarte Jr (2000).

Tomando a expansão da série de Taylor e sabendo que o valor da carteira é dado por  $R_p$  e é função<sup>43</sup> do ativo subjacente e do tempo até o vencimento, tem-se que a variação do valor da carteira é:

$$dR_p = \frac{\partial R_p}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R_p}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial R_p}{\partial t} dt + \frac{\partial^2 R_p}{\partial S \partial t} dS dt \quad (3.42)$$

observe que os termos superiores (que não foram apresentados) tendem a zero assim como o termo cruzado (o quarto fator apresentado) também pode ser considerado nulo. Neste ponto é possível fazer analogia com as gregas das opções.

Sabe-se que o preço de uma opção padrão (*plain vanilla*) em ações depende do preço do ativo objeto ( $S$ ), da volatilidade do ativo objeto ( $\sigma$ ), do preço de exercício ( $K$ ), da taxa de juros ( $r$ ) e do tempo de vencimento ( $T$ ). Se denotarmos o valor da opção (ou da carteira) por  $R_p(S, \sigma, K, r, T)$ , então para pequenas variações no preço do ativo objeto, na volatilidade, na taxa de juros e no tempo para vencimento, obteremos (Duarte jr., 2000):

$$dR_p = \delta(dS) + \frac{\gamma}{2}(dS)^2 + \kappa(d\sigma) + \rho(dr) + \theta d(T) \quad (3.43)$$

onde  $\delta$ ,  $\gamma$ ,  $\kappa$ ,  $\rho$ ,  $\theta$  são as “gregas” da opção, o Anexo 7 trata especificamente do comportamento das opções e de suas “gregas”.

Se apenas o primeiro termo da Equação (3.42) ou da (3.43) fossem levados em consideração obter-se-ia o método delta normal, e o VaR seria obtido pela Expressão (3.24).

<sup>42</sup> Em função da posição e do tipo de opção (compra ou venda) o VaR estará sendo subestimado.

<sup>43</sup> Pode ser função também da volatilidade, taxa de juros, etc..



Para tornar a estimação mais precisa para posições não lineares (como é o caso das opções)<sup>44</sup> utiliza-se o método quadrático ou a expansão da série de Taylor (3.43) até a segunda ordem, esta expansão é conhecida como o método delta gama. Logo, as mudanças da carteira tornam-se:

$$dR_p = \delta(dS) + \frac{\gamma}{2}(dS)^2 \quad (3.44)$$

Segundo Jorion (1998) o VaR derivado de (3.44) é:

$$\text{VaR} = |\delta|(\alpha\sigma S) - \frac{\gamma}{2}(\alpha\sigma S)^2 \quad (3.45)$$

Essa fórmula é válida tanto para posições compradas quanto vendidas (independente se a opção é de compra ou de venda). Se o gama for positivo, correspondendo a uma posição líquida comprada em opções, o segundo termo reduzirá o VaR.

Supondo a volatilidade não constante<sup>45</sup>, a Expressão (3.45) deve ser modificada para permitir a inclusão de mais um termo:

$$\text{VaR} = \delta(\alpha\sigma S) + \frac{\gamma}{2}(\alpha\sigma S)^2 + \kappa S d\sigma \quad (3.46)$$

Evidentemente a Equação (3.46) produz um melhor resultado quando todos os parâmetros são bem estimados (em comparação às Equações (3.45) e (3.23)). Entretanto, a correta estimativa da volatilidade é por si só uma grande fonte de enviesamento do resultado, quando se tem situações com grande número de opções é necessário um método de avaliação plena, como as simulações de Monte Carlo.

As estimativas dos parâmetros podem ser realizadas de diferentes formas. Pritsker (1996) estima tomando a variância de ambos os lados de (3.44), esta técnica é chamada de método delta – gama – delta. Se  $dS$  é normalmente distribuído então todos os momentos ímpares serão zero. Com a suposição de que  $dS$  e  $dS^2$  são conjuntamente normalmente distribuídos, logo  $dR_p$  é normalmente distribuído e o VaR pode ser calculado diretamente.

---

<sup>44</sup> Este método foi utilizado em Wilson (1994, 1996), Pritsker (1996), Jamshidian e Zhu (1996), e Zagari (1996a).

Pritsker (1996) usou outro método para estimar o Var via a aproximação delta gama. Em seu método, conhecido como delta – gama – Monte Carlo, o autor criou inicialmente simulações aleatórias do fator de risco S. Depois ele usou a expansão de Taylor para criar simulações dos movimentos das opções. O VaR foi calculado da distribuição empírica do valor da carteira.

Zangari (1996), Fallon (1996) e Pritsker (1996) melhoraram o método delta – gama com a expansão de Cornish – Fisher<sup>46</sup> que incluía a assimetria. Neste método o  $\alpha$  (da distribuição normal) é substituído por  $\alpha'$ :

$$\alpha' = \alpha - \frac{1}{6}(\alpha^2 - 1)\psi \quad (3.47)$$

e  $\psi$  é o parâmetro de assimetria.

Zangari (1996) e Pritsker (1996) incluíram outra modificação ao modelo delta – gama, o delta – gama – Johnson. Este método escolhe uma função de distribuição para F(p) e estima seus parâmetros para coincidir com os quatro primeiros momentos da aproximação delta – gama.

Jamshidian e Zhu (1996), Zagari (1996) e Fallon (1996) relataram que os modelos delta – gama incrementam as estimativas do VaR significativamente quando comparados com o delta normal.

### **3.5 Método das Simulações Históricas (MSH).**

Este é o método de simulação e estimação do VaR mais simples, não há suposições complexas sobre a estrutura do mercado. A idéia consiste em utilizar as variações passadas dos fatores de risco para gerar cenários, simular a função de distribuição de probabilidade para os retornos da carteira e estimar o VaR. Assim, este método surge como uma alternativa à necessidade de formular hipóteses sobre a forma como os fatores de risco se distribuem.

O valor projetado dos fatores de risco que compõem a carteira é obtido via a aplicação de cada uma das variações passadas do fator de risco sobre o seu valor atual. A única suposição deste modelo é que as tendências passadas de ganhos e perdas irão continuar no

---

<sup>46</sup> Substituindo o modelo de B&S como referencia e utilizando o Hull e White da volatilidade não constante.

futuro. Segundo Khindanova e Rochev (2000) uma das vantagens deste método é que este está livre de qualquer viés de estimação.

Jorge et al (2001) propõe as seguintes etapas para aplicar esta metodologia :

1. Identificar os fatores de risco que afetam a carteira;
2. Construir a base de dados com os preços e retornos dos fatores de risco identificados na etapa 1;
3. Definir uma janela de observação fixa para as observações passadas a utilizar na construção de cenários;
4. Gerar cenários para os fatores de risco a partir da amostra de dados históricos;
5. Reavaliar o valor da carteira (completamente ou aproximadamente), obtendo uma distribuição de hipotéticos retornos para a carteira;
6. Transformar os retornos em ganhos e perdas para a carteira;
7. Construir um histograma para os retornos, e a partir deste selecionar o percentil correspondente ao VaR desejado.

Um dos problemas dessa metodologia é a relação tamanho da amostra e a relevância dos dados. Segundo Wiener (1997) é importante usar dados históricos tão grandes quanto possível, de forma a abordar qualquer evento raro ocorrido no passado e que possa gerar perdas significantes. Ao mesmo tempo o autor afirma que quanto mais distante do presente são os dados, menos relevantes estes o são para as informações presentes do mercado. Outro problema observado do MSH é o fato deste não ser aplicável para estratégias de mercado desenvolvidas com base em dados históricos. Isto ocorre porque não se pode utilizar os mesmos dados para mensurar o VaR e para calibrar a estratégia de mercado.

Evidentemente a utilização de uma janela fixa (etapa 3) acarreta em erros de medição e enviesamento do VaR, a principal causa destes erros reside no chamado efeito *roll-off*, este efeito corresponde ao fato de a cada dia ser necessário descartar o último dia da amostra e substituir pela observação mais recente, o que contradiz com a observação de quanto mais melhor de Wiener.

Uma outra justificativa para os erros de amostragem, reside na possibilidade dos cenários gerados via uma janela de observação fixa experimentar uma tendência líquida ascendente ou descendente. Quando isto ocorre, as estimativas dos retornos da carteira irão incorporar esta tendência.

---

<sup>46</sup> Mais detalhes da expansão de Cornish – Fisher em Hull (1998).

Uma solução para este problema foi sugerida por Holton (1998), Down (1998) e outros; esta solução é utilizar os denominados *mirror* cenários. Esta técnica está apresentada na subseção 3.5.2.

O problema dos dados antigos foi minimizado no trabalho de Duffie e Pan (1997). Estes sugeriram o método de *bootstrap* para gerar cenários dos retornos dos fatores de risco. Este método também está descrito numa subseção em separado.

Outra alteração ao MSH foi proposta por Boudoukh, Richardson e Whitelaw (1998), a MSH foi combinada com o alisamento exponencial (Subseção 3.5.3), assim os autores definiram pesos decrescentes a partir dos dados mais recentes e até os mais antigos. Esta técnica também é conhecida como híbrida.

Boudoukh, Richardson e Whitelaw (1998) compararam a metodologia híbrida para diferentes séries com a MSH tradicional. Os resultados mostraram para um VaR com 99% de significância uma redução do erro absoluto de estimativa de 30 a 40%, já a metodologia tradicional o erro absoluto foi reduzido entre 14 a 28%. Os autores relataram que a técnica híbrida funciona melhor para séries de juros e para séries com grandes caudas.

### 3.5.1 O Método de *Bootstrap*<sup>47</sup>.

O método de *bootstrap* consiste na geração de cenários para os fatores de risco a partir dos dados históricos. Entretanto ao invés de obedecer à ordenação histórica, adota-se a amostragem aleatória com reposição. Assim é possível obter tantos cenários quanto se deseje.

Jorion (2003) mostra que uma vantagem essencial do método está no fato de poder abranger saltos, caudas grossas e qualquer divergência da distribuição normal. O método também incorpora as correlações entre as séries, uma vez que uma retirada consiste em retornos simultâneos de N séries, como preços de ações, títulos públicos e moedas.

Apesar das vantagens apresentadas, o método possui algumas limitações. Para amostras de tamanho pequeno, a distribuição obtida pode ser uma aproximação imprecisa da real distribuição, logo, deve-se ter uma base de dados ampla. Outra desvantagem é a perda da dinâmica temporal dos dados, uma vez que o *bootstrap* supõe que os retornos são independentes.

---

<sup>47</sup> Esta técnica também é aplicável à metodologia de Monte Carlo.

Jorion (2003) afirma que as vantagens do método superam as desvantagens. Dado que o objetivo do VaR é capturar o comportamento da cauda esquerda e que os dados históricos apresentam caudas mais grossas que uma distribuição normal, o *bootstrap* se adapta idealmente ao cálculo do valor no risco.

### 3.5.2 O *Mirror* Cenários.

Holton (1998) sugere a utilização do *mirror* cenários como forma de eliminar o problema da tendência implícita da utilização do MSH para o cálculo do VaR. O procedimento consiste nas seguintes etapas:

1. Geram-se os cenários a partir dos dados históricos;
2. Para cada um destes cenários, multiplica-se o retorno dos fatores de risco por (-1) para obter seu simétrico;
3. Aplica-se este retorno fictício ao valor da posição atual, obtendo um novo cenário (*mirror*).

Esta técnica permite não apenas eliminar o problema da tendência implícita, como também, duplicar o número de cenários usados para estimar o VaR reduzindo desta forma, o erro de convergência.

### 3.5.3 Cenários Ponderados.

Uma outra forma de conseguir que os cenários construídos a partir de dados históricos representem as atuais condições do mercado é o método dos cenários ponderados (ou método do alisamento exponencial), descrito por Down (1998) e Holton (1998).

A ponderação maior dos eventos recentes em relação aos eventos mais antigos, significa que qualquer observação terá seu efeito máximo sobre o VaR imediatamente após sua ocorrência, reduzindo a influência com o passar do tempo. Esta técnica pode ser implementada tanto no MSH como no método de Monte Carlo.

A estrutura de ponderação permite que se altere a característica da distribuição dos retornos dos fatores de risco, de forma a refletir as propriedades desejadas. Uma vantagem deste método é o fato dele levar em conta a variação da volatilidade, o que interessa para séries com caudas grossas.

### **3.6 O Método de Simulação de Monte Carlo (MSMC).**

Em muitos casos as técnicas analíticas não podem ser utilizadas e os resultados da simulação histórica não são satisfatórios. Necessita-se utilizar métodos numéricos de integração. Uma das técnicas possíveis é o método de simulação de Monte Carlo (MSMC). O MSMC é um dos métodos mais popular entre as análises sofisticadas (Wiener, 1997). Tal método apresenta um número de semelhanças com o método de simulação histórica, a maior diferença entre os dois métodos é que o MSMC utiliza as observações passadas para gerar simulações de cenários hipotéticos.

Como o MSMC simula o comportamento dos fatores de risco e dos preços dos ativos pela simulação do movimento dos preços, ele constrói N possíveis valores da carteira para uma dada data futura. Assim o VaR pode ser determinado diretamente a partir da distribuição dos valores simulados da carteira.

O método de Monte Carlo cobre grande quantidade de possíveis valores das variáveis financeiras e dão conta por completo das correlações. O método é basicamente dividido em duas etapas. A primeira corresponde à especificação de um processo estocástico para as variáveis financeiras, bem como os parâmetros deste processo. Na segunda etapa, são simuladas trajetórias fictícias de preço para todas as variáveis de interesse.

A análise de Monte Carlo é o método mais potente de cálculo do valor no risco (Jorion, 1997), pois é capaz de capturar grande variedade de risco, inclusive os não lineares, os de volatilidade e, até mesmo, os de modelo, podendo incorporar a variação temporal da volatilidade, caudas grossas e cenários extremos. Entretanto o maior inconveniente do método é o número de simulações necessárias para se reduzir o erro da estimativa da solução procurada, o que tende, na prática, a tornar o método lento.

Jorge et al (2001), apresenta um roteiro para implementação do MSMC, muito semelhante ao da simulação histórica :

1. Identificação das posições de cada ativo e fator de risco;
2. Seleção do modelo, que se julgue melhor, para explicar o comportamento dos fatores de risco;
3. Escolhido o modelo, deve-se estimar os parâmetros (via dados históricos);
4. Geração, através do mecanismo de produção de números aleatórios, de cenários para os fatores de risco;
5. Reavaliar o valor da carteira (completamente ou aproximadamente), obtendo uma distribuição de hipotéticos retornos para a carteira;
6. Transformar os retornos em ganhos e perdas para a carteira;
7. Construir um histograma para os retornos, e a partir deste selecionar o percentil correspondente ao VaR desejado.

A metodologia de simulação de Monte Carlo consiste, em suma, na geração aleatória de cenários para os fatores de risco, cenários estes que devem ser condizentes com a matriz de variância-covariância histórica. Ou seja, a essência deste método está baseada na especificação dos processos aleatórios e na geração de números aleatórios.

### 3.6.1 A Simulação de uma Trajetória de Preços.

A primeira e mais importante etapa da simulação consiste em escolher determinado modelo estocástico para o comportamento dos preços. Abordando este problema inicialmente sob a ótica de uma ação (ou outro ativo de natureza linear). O modelo normalmente utilizado é o movimento browniano geométrico, que serve de base para grande parte da teoria de precificação das opções. Conforme demonstrado no Capítulo 2, o preço de um ativo é dado por:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(S, t)dt + \sigma(S, t)dz_t \quad (3.48)$$

onde  $\sigma$  é a volatilidade e a medida  $dz_t$  é uma variável aleatória oriunda de uma distribuição normal com média zero e variância  $dt$ .

A solução da Equação 3.48, conforme já apresentado é dado por:

$$S(t) = S_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma dz_t \right] \quad (3.49)$$

Substituindo  $dz_t$  por  $\varepsilon dt$  onde  $\varepsilon$  é uma variável aleatória normal padronizada com média zero e variância 1. Ou seja:

$$S(t) = S_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \varepsilon dt \right] \quad (3.50)$$

Para a simulação de uma trajetória de preços para  $S(t)$ , inicia-se com  $S_0$  e se gera uma sequência de  $\varepsilon$  para  $t = 1, 2, 3, \dots, n$ , posteriormente calcula-se  $S(1), S(2), \dots, S(n)$ .

Para ativos não lineares deve-se fazer alterações para verificar a trajetória de preços. Supondo inicialmente o caso de opções européias o modelo mais utilizado é o de Black e Scholes. Diversos autores como Tay (2000 e 2001a), Ammann (2001) e Glasserman et al (2000) utilizaram este modelo.

Tal modelo partiu da Equação (3.50) para simular o movimento do ativo subjacente. Após  $N$  simulações com  $k$  passos ( $k$  determinado para atingir o tempo de análise) obtêm-se a estimativa para o valor da opção dado por ( $c$  é uma opção de compra e  $p$  uma opção de venda):

$$\begin{aligned} c(S, T, k) &= \max[0; S_T - k] \\ p(S, T, k) &= \max[0; k - S_T] \end{aligned} \quad (3.51)$$

onde:

$S_T \equiv$  valor do ativo em  $T$ ;

$k \equiv$  preço de exercício.

Já com relação às opções americanas, segundo Boyle, Broadie e Glasserman (1997), a precificação de tais opções era considerada fora do escopo da simulação de Monte Carlo, devido à dificuldade de se determinar os períodos ótimos de exercício destas.

Entretanto, trabalhos como os de Tiller (1993) e Brodie e Glasserman (1997), propõem formas para o emprego da simulação de Monte Carlo na avaliação de opções americanas.



Ainda segundo Boyle, Broadie e Glasserman (1997), os maiores problemas do método proposto por Tiller (1993) são os grandes requerimentos de memória, a dificuldade de generalização para o caso de múltiplas variáveis, a geração de preços tendenciosos, e a falta de demonstração de convergência. Já o modelo proposto por Barraquand e Martineau (1995), apesar da possível falta de convergência, mostra resultados melhores que o de Tiller (1993).

Por fim Brodie e Glasserman (1997) desenvolveram um algoritmo baseado em árvores simuladas, onde os preços dos ativos são simulados em cada ramo da árvore, e para cada nó são obtidos estimadores para cima e para baixo (constituindo um intervalo de confiança), de tal forma que ambos os estimadores convergem para o valor da árvore no nó inicial. Brodie, Glasserman e Jain (1997) sugerem melhorias quanto à velocidade e à convergência deste método através da “poda” da árvore simulada. O modelo de Brodie e Glasserman (1997) está descrito em Rochman (2002).

### **3.6.2 A Geração de Números Aleatórios.**

Para simular as trajetórias de preço faz-se necessário gerar números aleatórios, exemplos de métodos de obtenção de números aleatórios podem ser obtidos no trabalho de Sobol (1994), Gentle (1998). De uma forma geral podem-se classificar os números aleatórios em três grupos:

1. Aleatórios: obtidos de maneira aleatória, são selecionados por meios não determinístico, normalmente por meios naturais ou físicos;
2. Pseudo-aleatório: obtidos por meio de algoritmos, de forma a apresentar um ciclo de repetição tão alto quanto possível, de modo a simular uma distribuição verdadeiramente randômica;
3. Quase-aleatórios: conhecidos como seqüências de baixa discrepância.

O grupo aleatório apresenta algumas desvantagens: dificuldade em checar qualidade dos números produzidos e impossibilidade de reproduzir a mesma seqüência de números, a não ser que esta seja gravada.

Os números pseudo-aleatórios, Paskov e Traub (1995) e demonstrado por Bezerra (2001), não preenchem regularmente os espaços entre dois pontos, ou seja, os números

pseudo-aleatórios não são distribuídos uniformemente no espaço, ou ainda, apresentam alta discrepância.

*Definição 3.6:*

*A discrepância mede o desvio de uniformidade de um conjunto de pontos em uma dimensão  $d^{48}$ .*

Neste trabalho a geração dos valores será feita por uma sequência quase-aleatória. Segundo Rochman (2002), uma sequência quase-aleatória (ou sub-aleatória) é uma sequência de amostras representativas de uma distribuição de probabilidades. Essas amostras são determinísticas e não aleatórias, o que impede a repetição de valores, reduzindo desta forma, o desvio-padrão da simulação de Monte Carlo e aumentando a velocidade de convergência. Esta técnica também é conhecida como de baixa discrepância.

Boyle, Joy e Tan (1996) apresentam a sequência de Faure de números quase-aleatórios e a aplicam para opções tipo *rainbow* e asiáticas. Brotherton e Ratcliffe (1994) aplicam a sequência de Sobol na avaliação de opções asiáticas de média geométrica. Ambas as obras concluem que as sequências quase-aleatórias são superiores em acurácia e tempo de processamento que a técnica pseudo-aleatória.

Hokayem, Abdallah e Dorato (2003) apresentam e comparam outras técnicas de geração de números quase-aleatórios, a saber: Van der Corput, sequência de Halton, sequência de Hammerslev, sequência (t, s) e método dos pontos de Lattice.

Li e Winker (2000) compararam o método de sequência (t, s) com o pseudo-aleatório, concluindo que o método de Monte Carlo com esta metodologia específica comporta-se melhor que a pseudo-aleatória.

Algoritmos computacionais para a implementação das sequências de Faure, Halton e Sobol podem ser encontradas em Fox (1986) e Bratley e Fox (1988), respectivamente.

Uma vez obtido uma distribuição uniforme deve-se convertê-la numa distribuição normal. Para tal utilizar-se-á do algoritmo desenvolvido e apresentado em Moro (1995).

---

<sup>48</sup> Detalhes do cálculo da discrepância podem ser encontrados em Hokayem, Abdallah e Dorato (2003).

### 3.6.3 Simulações de Monte Carlo com Múltiplas Variáveis

Infelizmente a Equação (3.50) não é suficiente para a simulação de preços quando se trata de ativos com mais de uma fonte de risco. É o que ocorre na prática mesmo para ativos simples, como títulos privados, os quais dependem da combinação de duas ou mais variáveis financeiras. Felizmente a metodologia de Monte Carlo pode ser facilmente estendida a um caso multivariado mais genérico, que considera  $N$  fontes de risco.

Se as variáveis (fatores de risco) não forem correlacionadas pode-se aplicar a Equação (3.50) diretamente sobre cada variável e assim montar as perdas e/ou ganhos para a carteira. Quando as variáveis são correlacionadas, faz-se necessário modelar essa correlação (Jorion, 2003). De uma forma geral Saliby e Araújo (2001) sugerem que se gerem as variáveis de forma independente e se aplique a essas variáveis uma transformação de modo que as novas variáveis venham a ter a estrutura de correlação desejada.

Neste trabalho utilizou-se a fatoração de Cholesky. Os passos são os seguintes para se chegar à transformação necessária (Saliby e Araújo, 2001):

1. Para uma determinada estrutura de correlação desejada, define-se a matriz de covariância  $\Sigma$ . Decompõe-se essa matriz em  $\Sigma = P * P^T$ , onde  $P$  é a matriz triangular baixa e  $P^T$  é sua transposta;
2. Define-se um vetor  $\eta$ , composto de variáveis independentes e variância unitária (obtido em 3.6.2). Este vetor terá sua matriz de covariância igual à matriz identidade  $I$ .
3. Multiplicando-se a matriz  $P$  pelo vetor  $\eta$ , encontra-se o vetor  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = P * \eta$ ), o vetor transformado, cuja matriz de covariância é  $\Sigma$ .

A título de exemplo, tem-se para duas variáveis:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \eta_1 \\ \varepsilon_2 &= \rho\eta_1 + (1 + \rho^2)^{1/2}\eta_2\end{aligned}\tag{ 3.52}$$

onde  $\rho$  é o coeficiente de correlação entre os fatores de risco.

### **3.7 Comparação entre os Diferentes Métodos.**

Diferentes resultados do VaR são obtidos para diversas técnicas, mesmo quando os parâmetros são iguais. De uma forma geral, a escolha do método depende da composição da carteira. Telfah (2003) apresenta alguns critérios, os quais são freqüentemente utilizados na comparação do VaR:

1. Capacidade do VaR em capturar os fatores de risco subentendido no retorno da carteira, com a suposição que a carteira inclua opções e ativos livres de risco;
2. Facilidade de implementação;
3. Velocidade de processamento.

Outra consideração usual é a facilidade explicativa do modelo. A Tabela 3.2 apresenta um resumo da comparação entre os diversos métodos de VaR. No entanto, o mais relevante critério é a relação entre acurácia, custo computacional (tempo de processamento) e facilidade de implementação.

O método delta - normal torna-se ineficiente quando o número de posições da carteira aumenta, porque há a necessidade de calcular a matriz de covariância e a matrix de correlação da posição, a qual cresce exponencialmente com o número de posições. Na implementação do método de Monte Carlo há um ganho em acurácia e perda no tempo de processamento, assim sendo, deve-se avaliar a relevância destes critérios em conjunto. Uma das vantagens do método de Monto Carlo é a possibilidade de alterar suposições, o que não é possível para as outras metodologias. Entretanto o método está sujeito a erros de mensuração e ao modelo de risco. Tais erros surgem porque os parâmetros devem ser calculados utilizando os dados históricos (que nem sempre representam fielmente o desempenho futuro) e a utilização de um processo estocástico e este processo pode ser mal especificado.

Tabela 3.2: Comparação entre as técnicas de VaR.

| Crítérios   | Variância – covariância   | Metodologia analítica   | Simulação histórica                     | Simulação de Monte Carlo                        |
|---|---|---|---|---|
| Habilidade em capturar fatores de riscos (com dependência não linear) | Ineficiente   | Pode capturar mas sua eficiência cai com o aumento de fatores não lineares      | Eficiente                               | Eficiente                                       |
| Suposições  | Distribuição normal   | Distribuição normal   | Retornos passados continuando no futuro | Impõe modelos estocásticos aos fatores de risco |
| Comportam caudas grossas  | Não   | Não   | Sim, se os retornos passados o tiverem  | Sim, se o modelo de risco o incorporar          |
| Facilidade de implementação   | Fácil, mas a facilidade diminui com o aumento do número de posições             | Fácil, com a disponibilidade de dados e poucas posições                         | Fácil, com a disponibilidade de dados   | Fácil, com programas complexos                  |
| Tempo de processamento  | Rápido, dependendo do número de posições  | Rápido, dependendo do número de posições  | Rápido                                  | Lento   |
| Facilidade explicativa  | Não   | Não   | Sim                                     | Não   |
| Performance com diferentes suposições                                 | Não   | Não   | Não                                     | Sim   |
| Acurácia  | Pouca quando a carteira tem caudas grossas e quando o passado recente é anormal | Pouca quando a carteira tem caudas grossas e quando o passado recente é anormal | Depende da qualidade dos dados          | Boa, a depender do modelo                       |
| Necessidade de distribuição de probabilidade                          | Sim   | Sim   | Não                                     | Sim   |

Fonte: Telfah (2003) e Chaia e Ferreira (1999).

Pearson e Smithson (2000) montaram uma figura semelhante à Figura 3.3 para facilitar a comparação entre as técnicas de VaR. Tal figura mostra que o método de Monte Carlo é o mais preciso e que consome mais tempo. Por outro lado o delta – normal apresenta-se mais impreciso e mais rapidamente implementado. De acordo com Pearson e Smithson (2000), o método delta – gama Monte Carlo apresenta a melhor relação precisão x tempo de

processamento. Evidentemente, esta relação deve sempre ser avaliada em função do crescente aumento da velocidade dos processadores, o que torna cada vez menos relevante o aspecto tempo de processamento como indicador de desempenho das técnicas de VaR.

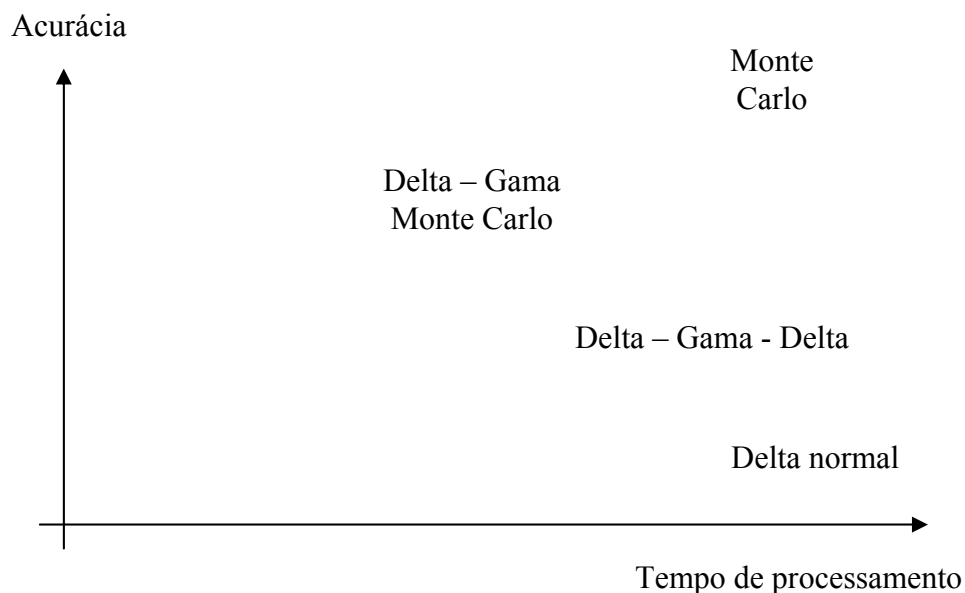


Figura 3.3: Comparação entre as técnicas de VaR (acurácia x tempo de processamento).

Fonte: Pearson e Simthson (2000).

### 3.8 Avaliando a Eficiência do VaR.

Há na literatura um gama de trabalhos que buscam verificar a precisão de modelos que fazem previsões pontuais sobre uma determinada variável. Tais modelos visam prever o valor da variável alvo num determinado instante. Entretanto, para avaliar as previsões de intervalo para uma variável, o número de método ainda é reduzido (Mollica, 1999). Este é o caso do VaR.

Uma previsão de um intervalo significa encontrar um subconjunto do espaço onde a variável toma valores associados a uma probabilidade de ocorrência. Supondo um VaR com nível de significância de 95%, ou seja 5% dos casos devem ultrapassar o VaR. Certamente, não serão observados exatos 5% de violações, um percentual maior (6 a 8%) poderá ocorrer por mera causalidade. Mas se em um dado momento o número de violações for muito grande, como 10 a 20%, os órgãos reguladores deveram concluir que a alta taxa de violações não são em função da causalidade e sim da má especificação do modelo.

Os usuários do VaR terão o mesmo dilema, o que seu modelo só será útil se este prever corretamente o número de falhas. Caso haja muitas violações do modelo de VaR, este modelo deveria ser reavaliado e talvez substituído. Nas subseções a seguir apresentamos técnicas para verificar a acurácia dos modelos de VaR.

### 3.8.1 Back Testing e Kupiec (1995)

O Comitê de Basileia requer das instituições financeiras uma verificação de *back testing* para seus modelos internos de VaR. *Back testing* é um procedimento a posteriori sobre o qual as instituições financeiras checam quanto das perdas superaram o valor previsto no VaR. Se uma instituição possui um VaR com 99% de confiança suas perdas não devem ultrapassar 1%. Para um ano (250 dias), a instituição deve observar no máximo 3 perdas superiores ao VaR.

O capital que as instituições devem possuir como garantia do risco de mercado, segundo o comitê de Basileia, no tempo  $t$  deve ser:

$$C_t = A_t \max \left[ \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} VaR_{t-i}, VaR_{t-1} \right] + SR_t \quad (3.53)$$

Onde  $C_t$  é o capital requerido no tempo  $t$ ,  $A_t$  é fator multiplicativo que varia entre 3 e 4 e  $SR_t$  é um capital específico de risco.

O capital específico de risco é parte do risco de mercado. De acordo com os novos requerimentos de capital de risco, este é classificado entre riscos gerais e específicos (ou sistemáticos e não sistemáticos).

Na Equação (3.53) o valor de  $A_t$  depende da acurácia do modelo interno de VaR durante os últimos períodos, por exemplo, um ano. Segundo Telfah (2003), o Comitê de Basileia divide o número de violações em três zonas: zona verde, amarela e vermelha. A zona verde é aplicada quando o número de violações (para um VaR de 99% e para um ano) ocorre em 1,6% dos casos, assim  $A_t$  assume um valor de 3. A zona amarela significa um número de violações entre 2 e 3,6% (de 5 a 9 violações neste caso),  $A_t$  assume um valor entre 3 e 4. E a zona vermelha equivale a mais de 4% de violações, tomando  $A_t$  um valor de 4. Se o modelo estiver na zona vermelha, então este deverá ser revisado.

Wiener (1997) argumenta que este procedimento previne que os bancos apresentem baixos valores de VaR, reduzindo o capital colocado como garantia, os bancos só apresentariam valores baixos de VaR se estes correspondessem à realidade.

Kupiec (1995) comenta que o Comitê de Basileia recomenda o *back testing*, no entanto não fornece detalhes para verificar sua eficácia. Kupiec (1995) desenvolveu um modelo para verificar o número de vezes que as perdas efetivas podem superar o VaR de modo que este ainda seja considerado aceitável.

Segundo Bezerra (2001), Kupiec considerando a razão de log-verossimilhança dada pela Equação (3.54) a seguir, desenvolveu para vários períodos, intervalos de não rejeição da hipótese nula de que  $p$  é a correta proporção de falhas<sup>49</sup>,

$$LR = -2 \ln \left[ (1 - p^*)^{n-x} (p^*)^x \right] + 2 \ln \left[ \left( 1 - \left( \frac{x}{n} \right) \right)^{n-x} \left( \frac{x}{n} \right)^x \right] \quad (3.54)$$

que possui uma distribuição qui-quadrado com um grau de liberdade, sob a hipótese que  $p$  é a verdadeira probabilidade e onde  $x$  é o número de falhas observadas em uma amostra de tamanho  $n$ . Portanto, rejeita-se a hipótese nula se  $LR > 3,84$  (Jorion, 2003). A Tabela 3.3 fornece regiões de não rejeição de erros ao nível de 0,05.

Tabela 3.3: Intervalo de não rejeição da hipótese nula de que a proporção de falhas  $p^*$  é igual a  $p$ , a 5% de confiança.

| $p = p^*$ (%) | $n = 255$ dias | $n = 510$ dias | $n = 1000$ dias |
|---------------|----------------|----------------|-----------------|
| 1,0           | $x < 7$        | $1 < x < 11$   | $4 < x < 17$    |
| 2,5           | $2 < x < 12$   | $6 < x < 21$   | $15 < x < 36$   |
| 5,0           | $6 < x < 21$   | $16 < x < 36$  | $37 < x < 65$   |
| 7,5           | $11 < x < 28$  | $27 < x < 51$  | $59 < x < 92$   |
| 10,0          | $16 < x < 36$  | $38 < x < 65$  | $81 < x < 120$  |

Fonte: Jorion (2003), adaptado de kupiec (1995).

Na Tabela 3.3 o número  $x$  indica a quantidade de insucessos que poderiam ser observados numa amostra de tamanho  $n$ , sem rejeitar a hipótese nula de  $p$  é a correta probabilidade a um nível de significância de 5%.

<sup>49</sup> Observe que Kupiec utiliza  $p$  como o número de falhas real dividido pelo total de dias. Já  $p^*$  é relativo ao nível de confiança do VaR, ou seja para um VaR de 99%, o  $p^*$  seria 0,01.



Kupiec também fornece uma outra forma de testar o modelo de VaR. A Tabela 3.4 fornece o tamanho da amostra para uma quantidade máxima de violações para que a hipótese nula seja rejeitada.

Tabela 3.4: Número máximo do tamanho da amostra para que a hipótese  $p = p^*$  seja rejeitada a 5% de confiança.

| Número de falhas | $p^* = 0,01$ | $p^* = 0,02$ | $p^* = 0,03$ | $p^* = 0,04$ | $p^* = 0,05$ |
|------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1                | 6            | 3            | -            | -            | -            |
| 2                | 34           | 17           | 11           | 9            | -            |
| 3                | 75           | 38           | 26           | 19           | 16           |
| 4                | 125          | 63           | 42           | 32           | 26           |
| 5                | 180          | 91           | 61           | 46           | 37           |
| 6                | 240          | 121          | 81           | 61           | 49           |
| 7                | 302          | 152          | 102          | 77           | 62           |
| 8                | 367          | 184          | 124          | 93           | 75           |
| 9                | 434          | 218          | 146          | 110          | 88           |
| 10               | 501          | 253          | 169          | 127          | 102          |

Fonte: Bezerra (2001).

### 3.8.2 O Procedimento de Lopez.

Lopez (1996) apresenta um procedimento para avaliar os modelos de risco baseado em uma função de perda, tornando-se uma viável alternativa aos modelos que se baseiam em estatísticas de teste como o de Kupiec (1995)<sup>50</sup>. A idéia de Lopez (1996) foi criar uma função de perda que incorpore os critérios julgados importantes pelos órgãos de regulamentação. O melhor modelo seria aquele que minimizasse essa função.

No presente trabalho fez-se a opção de utilizar a função de perda apresentada por Lopez (1998)<sup>51</sup>, a qual para um modelo  $m$  qualquer tem a seguinte forma:

$$C_m = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T C_{m,t} \quad (3.55)$$

onde,

<sup>50</sup> Outros modelos que levam em conta estatísticas de teste estão em Mollica (1999), como o modelo de Christoffersen (1996) e Chrkovic e Drachman (1996).

<sup>51</sup> Ou alguma adaptação deste, conforme a conveniência.

$$C_{m,t} = \begin{cases} 1 + (P_t - VaR_{m,t})^2, & \text{se } u_t < VaR_{m,t} \\ 0, & \text{se } u_t \geq VaR_{m,t} \end{cases} \quad (3.56)$$

Sendo  $VaR_{m,t}$  o VaR estimado pelo modelo  $m$  para o período  $t$  e  $P_t$  a variação monetária no valor de mercado da carteira efetivamente observada em  $t$ . Esta função é semelhante à medida de erro quadrático médio utilizado na avaliação da precisão de previsões pontuais. Com a diferença que na Equação (3.55) a magnitude do erro só influencia a função quando o VaR é extrapolado.

Esta medida de erro avalia a magnitude da perda quando o VaR é extrapolado, além de levar em conta a frequência do erro. O melhor modelo será aquele que apresentar uma frequência de erro mais próxima do esperado e no qual os erros são menores em relação ao VaR estimado.

A grande vantagem deste método sobre os que utilizam estatísticas de teste é a não necessidade de aplicar qualquer tipo de teste de hipóteses para verificar a adequação dos modelos. Com isso, evita-se o problema de baixa potência<sup>52</sup> dos testes dos métodos apoiados em critérios estatísticos (Mollica, 1996).

### **3.9 Evidências Empíricas.**

Esta seção irá tratar de uma revisão sintética de alguns trabalhos sobre a avaliação de estimativas de VaR, seja por métodos paramétricos ou não paramétricos, seja comparando o mesmo modelo mas com variáveis diferentes, notadamente a volatilidade.

Théorêt e Rostan (2000) realizaram um estudo das estimativas de VaR obtidos pela simulação histórica e pela simulação de Monte Carlo. Para tal, os autores utilizaram títulos do governo canadense de 10 anos de posse de um investidor americano, esta carteira era exposta a dois fatores de risco: taxa de câmbio e taxa de juros. O VaR histórico foi montado de duas formas: com volatilidade constante (como a da Equação (2.34)) e utilizando a volatilidade EWMA. Já a técnica de Monte Carlo utilizou a suposição de normalidade para os dois fatores de risco em um primeiro momento adotando-se a decomposição de Cholesky; em um segundo momento foi suposto a não normalidade dos fatores de risco, admitindo que a correlação entre os fatores era respeitada naturalmente pelos dados. Os autores mostraram que o método onde

a proporção de violações do VaR estava mais próxima do nível de confiança utilizado foi o método de Monte Carlo com a suposição de distribuição normal, este com 5,03% de violações, contra 4,70% do método de simulação histórica com volatilidade constante, 6,71% para os outros dois modelos (simulação histórica com volatilidade do modelo EWMA e Monte Carlo sem a suposição de distribuição normal dos fatores de risco).

Ammann e Reich (2001) estruturaram um trabalho para comparar a eficiência preditiva do VaR de instrumentos não lineares via aproximações lineares e o método de Monte Carlo. Os métodos de aproximação linear utilizados foram: o método da variância – covariância, o delta normal, e algumas extensões; os métodos de Monte Carlo foram: o método tradicional e o método de quase Monte Carlo. Os autores mostraram que os modelos simples de aproximação linear são razoavelmente eficazes em muitos casos. Mas para carteiras com um número razoável de opções os métodos de Monte Carlo tradicionais são mais eficientes. De uma forma geral eles encontraram:

- Para carteiras sem opções (e sem instrumentos lineares) a metodologia delta-normal representou uma boa aproximação do método de Monte Carlo; O resultado deteriora-se quando aumenta o tempo de horizonte do VaR e o nível de confiança;
- Para carteiras com posições não lineares mais acentuadas os resultados diferem substancialmente entre o VaR delta – normal e o de Monte Carlo, esta discrepância aumenta com o tempo de horizonte do VaR e o nível de confiança;
- A diferença entre aproximações lineares e a metodologia de Monte Carlo aumenta com o uso de opções com pequeno tempo de vencimento.

Um outro trabalho envolvendo o VaR para uma carteira que possui opções foi desenvolvido por Pichler e Selitsch (1999), estes compararam modelos analíticos de VaR focando na segunda ordem da expansão de Taylor dada pela Equação (3.45). Foram analisadas diferentes combinações de momentos. Para comparação foi utilizado o procedimento de *backtesting* baseado na geração aleatória de fatores de riscos para os retornos. Os autores concluíram que os modelos dependentes apenas dos quatro primeiros momentos das perdas e ganhos são pouco eficientes. A inclusão de maiores momentos, neste trabalho a expansão de Cornish-Fisher com seis momentos mostrou-se mais apropriada.

Bezerra (2001) utilizando ações e opções da Petrobrás elaborou uma comparação entre as metodologias analíticas e de Monte Carlo. A comparação e validação dos modelos foram

---

<sup>52</sup> Alta probabilidade de aceitar uma hipótese nula falsa.

realizadas via o teste de proporção de falhas de Kupiec (1995), apresentado na Seção 3.8.1.. Todos os modelos analíticos testados foram rejeitados pelo teste de falhas, a explicação do autor é que as opções da Petrobrás utilizadas, possuem grandes variações no seu valor e o modelo analítico pressupõe pequenas variações deste. Entretanto, quando o número de ativos da carteira é muito elevado o autor recomenda as metodologias analíticas em função do baixo custo de processamento numérico.

Os métodos de Monte Carlo adotados no trabalho utilizaram o modelo de precificação de Black & Scholes, o modelo de precificação de Hull & White e o método de Hull & White com juros estocásticos. Para todos os modelos os resultados obtidos foram compatíveis, não acrescentando aumento de eficiência à inclusão de volatilidade implícita e de juros estocásticos.

No grupo de trabalhos que visam identificar sob que tipo de volatilidade o VaR possui o melhor comportamento pode-se destacar Mollica (1999), este trabalho foi realizado com o VaR delta normal, tendo como aspecto crucial à estimação da matriz de covariâncias. As volatilidades foram estimadas pelos modelos EWMA, GARCH e volatilidade estocástica. O autor também utilizou a simulação histórica para comparar com os modelos anteriores. Para comparar os resultados a metodologia adotada foi a desenvolvida por Lopez (1998). Como resultados os modelos com a volatilidade EWMA e simulação histórica apresentaram-se pouco adaptativos. Já os modelos com volatilidade estocástica possuíram maior adaptatividade.

Em termos da função de perda de Lopez (1998) os resultados obtidos foram diferentes para cada uma das duas carteiras de ativos sem risco e de risco do mercado brasileiro analisadas (ambas sem ativos não lineares). Para a primeira carteira o delta normal com volatilidade estocástica foi superior, na segunda carteira o modelo preferido é o delta normal com a volatilidade EWMA.

Um trabalho semelhante foi realizado por Schittenkopf et al. (2002), neste caso, entretanto, as carteiras eram compostas por opções. Três volatilidades: a constante, a estocástica e a condicional (GARCH), foram comparadas via o VaR de Monte Carlo. Ao contrário de Mollica (1999), os autores não encontraram evidências de superioridade de uma técnica para outra.

Também na linha de raciocínio acima, Lehar (2000) compara os modelos de Black & Scholes (volatilidade constante) e o modelo de Hull & White (volatilidade estocástica) com dados do mercado de ações austríaco. Os modelos de avaliação do VaR foram o delta normal, a simulação de Monte Carlo e o método conhecido como delta plus. A avaliação obtida a luz

de várias variáveis de teste mostra que os resultados obtidos podem variar em função da perspectiva de observação, a colocação da volatilidade como fonte de risco incrementa o resultado do VaR, os modelos funcionam melhor com as opções de compra, de uma forma geral o modelo de Monte Carlo com volatilidade estocástica (Hull & White) saiu-se melhor no teste de proporção de falhas.

## 4 RESULTADOS EMPÍRICOS

Este capítulo contempla a aplicação dos métodos e conceitos, já descritos, aos dados do mercado acionário brasileiro. Inicialmente apresenta os dados utilizados bem como descreve os ajustes iniciais e informações gerais sobre tais conjuntos de dados. Em um segundo momento tais dados e informações são utilizados para calcular o *Value at Risk* nas suas diversas possibilidades, sejam estáticas ou dinâmicas, sejam paramétricas ou não paramétricas.

### 4.1 Os Dados

Neste trabalho o objetivo é analisar o mercado acionário brasileiro a luz da teoria econômica – financeira verificando como descrever corretamente os riscos de mercado a partir da metodologia do VaR. O mercado acionário brasileiro, como pode ser constatado na Tabela 4.1 a seguir, ao longo dos últimos 10 anos vem se desenvolvendo e se consolidando. A Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA) encerrou o ano de 2003 com um volume financeiro de R\$ 204,5 bilhões, o que representa uma alta de 47,2% em relação ao ano de 2002.

Tabela 4.1: Volume total negociado na BOVESPA no período de 1994 a 2003 em milhões de reais.

| Período | À vista    | Termo    | Opções    | Total      |
|---------|------------|----------|-----------|------------|
| 1994    | 48.386,20  | 153,10   | 12.054,90 | 60.594,20  |
| 1995    | 52.993,50  | 283,20   | 10.273,80 | 63.550,60  |
| 1996    | 87.929,00  | 558,20   | 9.991,30  | 98.478,50  |
| 1997    | 187.116,10 | 1.186,50 | 18.138,00 | 206.440,60 |
| 1998    | 148.323,20 | 982,00   | 12.539,20 | 161.844,30 |
| 1999    | 143.340,80 | 1.916,40 | 8.821,50  | 154.078,70 |
| 2000    | 169.704,80 | 7.247,60 | 8.238,20  | 185.190,60 |
| 2001    | 135.441,10 | 6.443,10 | 8.420,50  | 150.304,70 |
| 2002    | 125.728,50 | 5.110,40 | 8.130,20  | 138.969,10 |
| 2003    | 181.936,30 | 6.443,90 | 16.202,30 | 204.582,50 |

Fonte: Bovespa

Em 2002 o mercado a vista correspondeu a 88,93% do volume no ano, seguido pelo de opções com 7,92% e por fim o mercado a termo com 3,15%. Os dois primeiros são objetos de estudo deste trabalho; destaque especial deve ser dado ao mercado de opções que teve sua participação elevada de 6,2% em 2002 para os 7,92% de 2003. Das operações com opções R\$ 14,9 bilhões foram de opções sobre ações, em particular opções de compra e venda de ações da Telemar, sendo também relevantes as opções sobre ações da Petrobrás e Vale do Rio Doce (Segundo a CBLC).

Historicamente (praticamente desde o seu lançamento) a ação com maior volume financeiro de negócios foi a Telemar PN (tnlp4), em 2003 seu volume de negócios foi de R\$ 28,89 bilhões, a da Petrobrás PN (petr4) foi de R\$ 16,18 bilhões, a Vale do Rio Doce PNA (vale5) R\$ 6,79 bilhões (segundo a própria BOVESPA). Estas três juntas correspondem a 28,50% de todo o volume de negócios de mercado a vista da BOVESPA, por este motivo estas ações e suas equivalentes opções são o objeto específico de estudo deste trabalho.

#### 4.1.1 As Ações

As séries das ações utilizadas correspondem ao período de 17/03/1999 a 19/03/2004, totalizando 1244 observações para cada ação. Os raros casos de “*missing value*” foram corrigidos utilizando-se o conceito de passeio aleatório. Os dados foram divididos em dois grupos: o primeiro que vai de 17/03/1999 a 18/03/2002 é utilizado para o cálculo dos parâmetros, testes, e estimativas necessárias; o segundo grupo de 19/03/2002 a 19/03/2003 para verificação da eficácia dos modelos. Para algumas carteiras o VaR foi calculado e verificado num período de 2 anos, assim sendo, o segundo grupo foi alterado para 19/03/2001 a 19/03/2003 (obviamente o primeiro grupo foi reduzido para 14/03/1999 a 18/03/2001). A fonte de dados para as ações foi o da empresa Economática. Os códigos utilizados foram programados na plataforma do *Matlab* 6.13.

A Figura 4.1 a seguir mostra a variação do preço de fechamento da tnlp4 ao longo do período de análise, já a Figura 4.2 mostra o retorno diário da ação. O retorno diário de todas as ações foram calculados a partir da Equação 2.35 já apresentada.

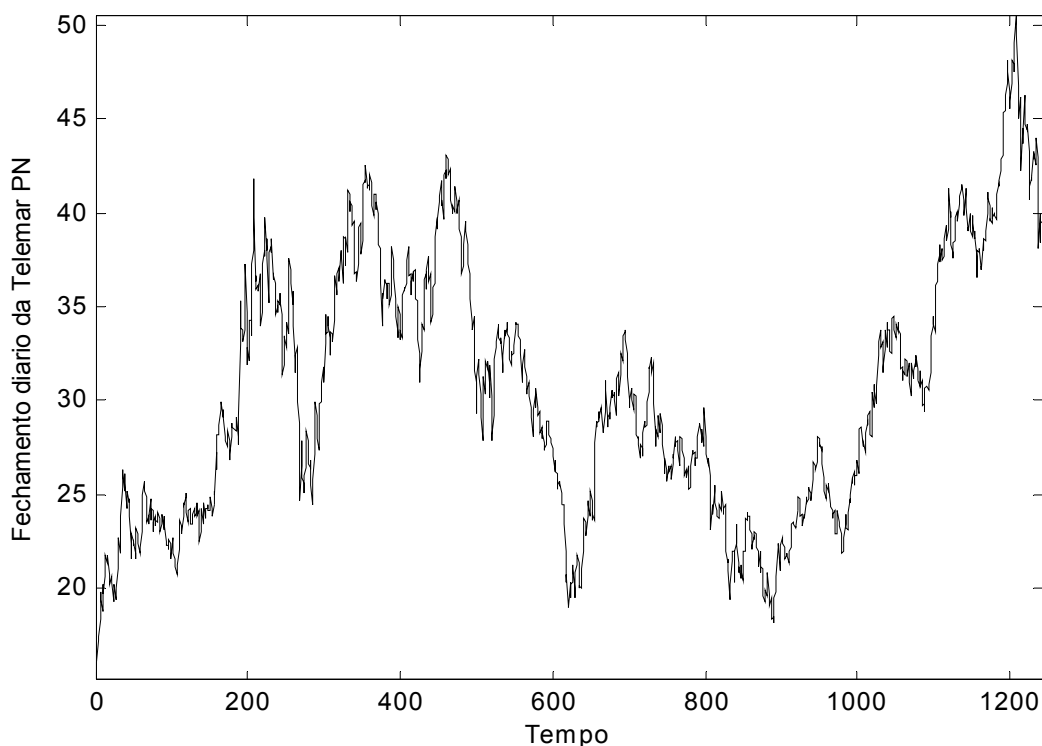


Figura 4.1: Valor de fechamento diário da Telemar PN no período de 17/03/1999 a 19/03/2004.

Fonte: Elaboração própria.

A partir da análise dos preços de fechamento da *tnlp4* pode-se concluir que há fases de alta, de baixa e algumas quebras de tendência, como por exemplo no início do ano de 2003, aproximadamente por volta da observação 950.

Já com relação ao retorno desta ação para o período o que se pode concluir é que ele é caracterizado por uma relativa baixa volatilidade visto que um intervalo de confiança de  $\pm 5\%$  incorpora quase todos os retornos, indicando que uma análise baseada na hipótese de normalidade dos retornos pode ser suficiente para o cálculo do VaR.

O primeiro passo deste trabalho é verificar os fatos estilizados observados por Taylor (1986) e já apresentados<sup>53</sup>. O primeiro dos fatos estilizados é a tendência ao agrupamento da volatilidade facilmente observada na Figura 4.2.

<sup>53</sup> Observar seção 2.4.1



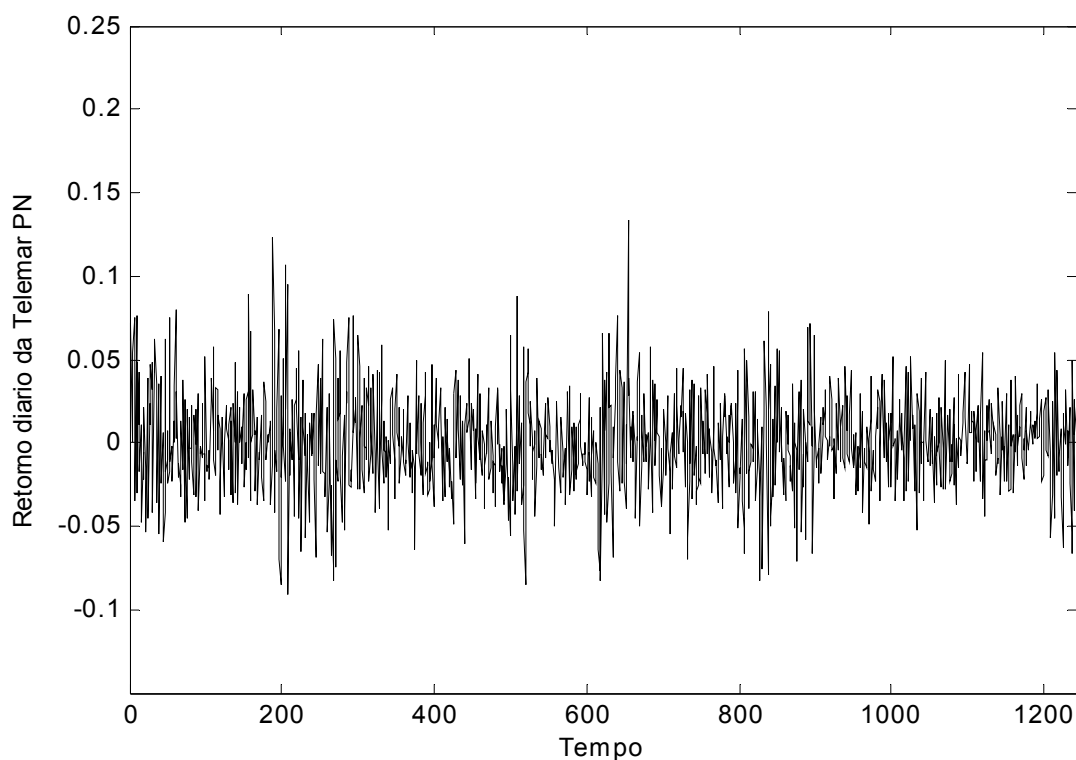


Figura 4.2: Retorno diário da Telemar PN no período de 17/03/1999 a 19/03/2004.

Fonte: Elaboração própria.

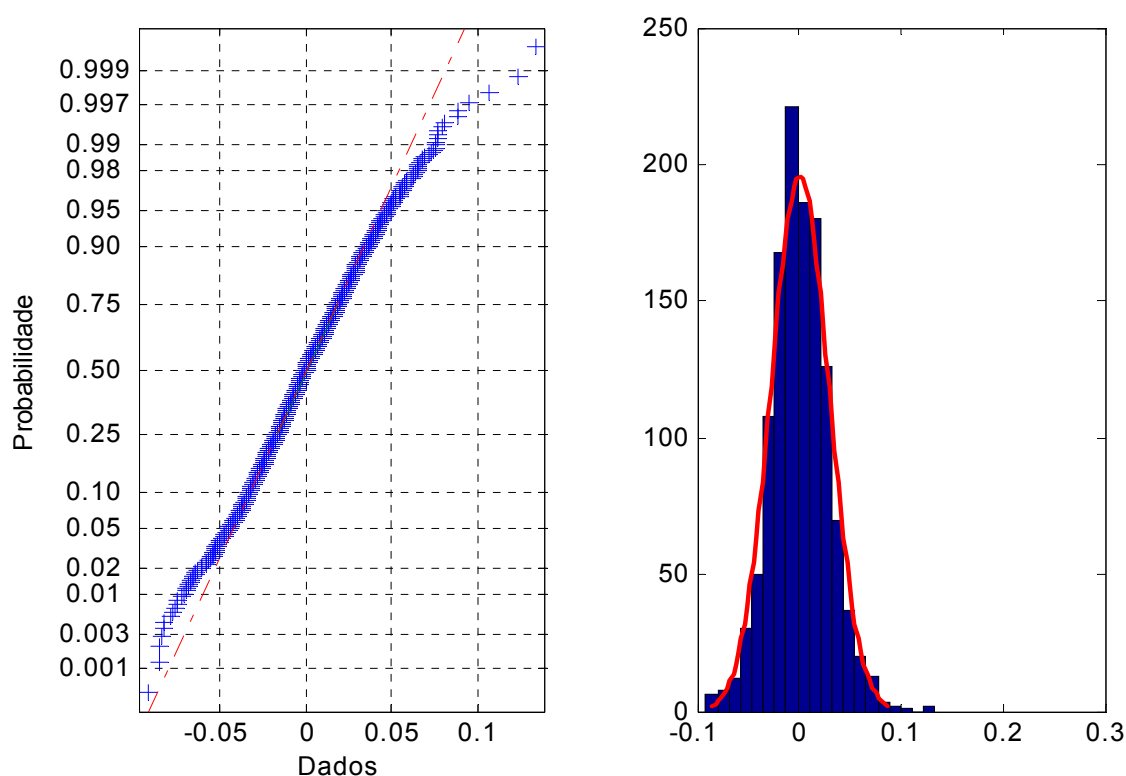
A Tabela 4.2 apresenta estatísticas básicas que corroboram ou não com Taylor (1986). A distribuição apresenta excesso de curtose, mas a assimetria não é negativa. Já o teste de Jarque-Bera confirma a não normalidade do retorno, não normalidade também confirmada pelas Figuras 4.3. A Figura 4.3 a) mostra que a distribuição dos retornos tem caudas maiores que a da distribuição normal, tanto à direita quanto a esquerda. E a Figura 4.3 b) confirma que o pico em torno da média é mais alto que em uma distribuição normal. Em ambas, a distribuição real é indicada em azul e a normal em vermelho.

No entanto, quando a comparação é feita com os demais ativos observa-se que este ativo apresenta a distribuição mais próxima à distribuição normal. O que pode ou não ser confirmada nas análises posteriores.

Tabela 4.2: Estatísticas descritivas para os retornos da Telemar PN.

|         | Estimativa | P. Value |               | Estimativa | P. Value |
|---------|------------|----------|---------------|------------|----------|
| Média   | 0,00080    | 0,3230   | Desvio Padrão | 0,02855    | -        |
| Mediana | -0,00022   | -        | Assimetria    | 0,17723    | -        |
| Mínimo  | -0,09146   | -        | Curtose       | 3,95684    | -        |
| Máximo  | 0,13362    | -        | Jarque-Bera   | 53,28000   | 0,0000   |

Fonte: Elaboração própria.



a) Gráfico de probabilidade normal.

b) Histograma da distribuição.

Figura 4.3: Gráficos de análise de distribuição para o retorno da Telemar PN.

Fonte: Elaboração própria.

A próxima Figura (4.4) é relativa à variação do preço de fechamento da petr4 ao longo do período de estudo, e a Figura 4.2 mostra o retorno diário da ação.

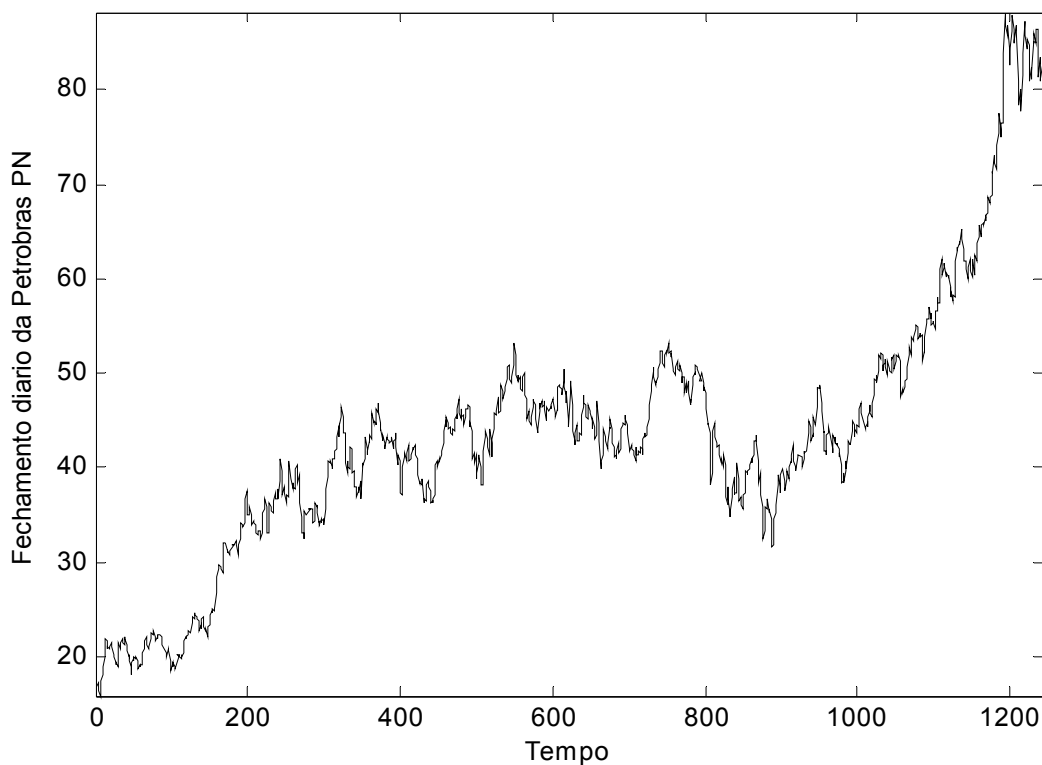


Figura 4.4: Valor de fechamento diário da Petrobrás PN no período de 17/03/1999 a 19/03/2004.

Fonte: Elaboração própria.

A partir da análise dos preços de fechamento da petr4 observa-se uma maior tendência de alta, todavia ocorre um período relativamente longo de aparente estabilidade, entre a observação 200 e a 800. Entretanto, a exemplo da Telemar PN, há uma forte quebra de tendência no início do ano de 2003, aproximadamente por volta da observação 950.

Já com relação ao retorno desta ação para o período, apresentado na Figura 4.5, pode-se perceber o fenômeno de agrupamento da volatilidade.

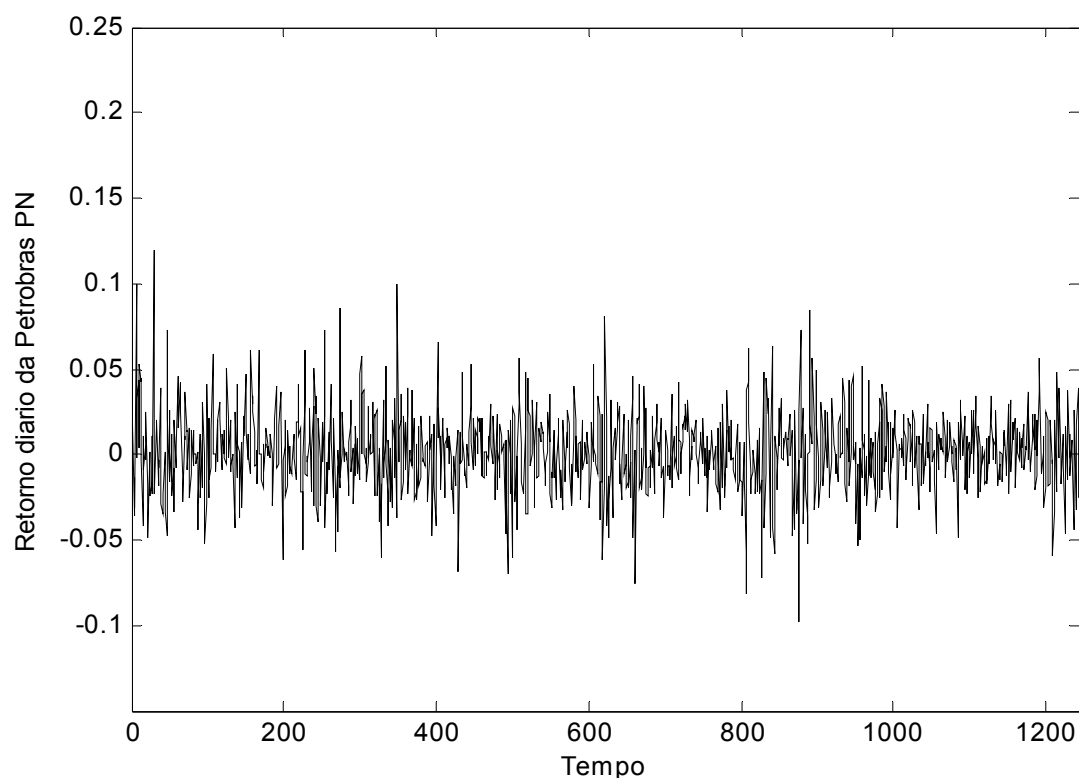


Figura 4.5: Retorno diário da Petrobras PN no período de 17/03/1999 a 19/03/2004.

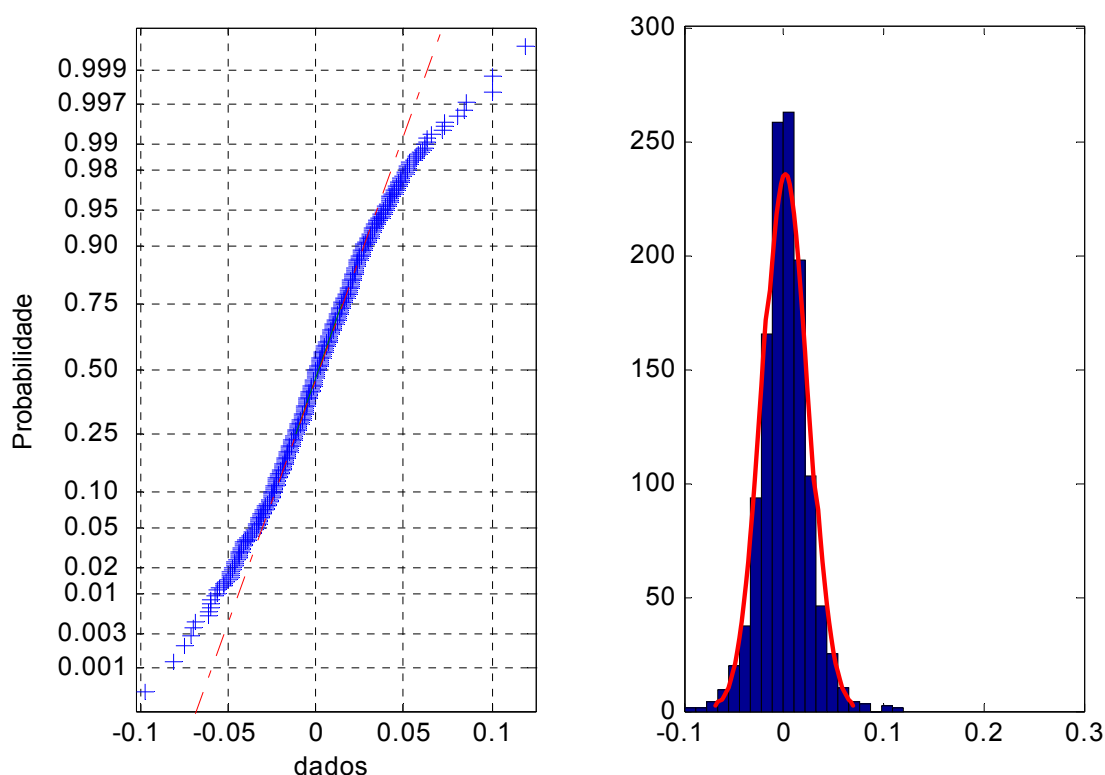
Fonte: Elaboração própria.

Na Tabela 4.3 estão as estatísticas básicas com comportamento semelhante ao da Telemar PN. Confirmando a não normalidade da distribuição do retorno, não normalidade também confirmada pelas Figuras 4.6. A única diferença é a média que não pode ser considerada estatisticamente igual a zero a 5%.

Tabela 4.3: Estatísticas descritivas para os retornos da Petrobras PN.

|         | Estimativa | P. Value |               | Estimativa | P. Value |
|---------|------------|----------|---------------|------------|----------|
| Média   | 0,00129    | 0,0466   | Desvio Padrão | 0,02290    | -        |
| Mediana | 0,00060    | -        | Assimetria    | 0,19944    | -        |
| Mínimo  | -0,09811   | -        | Curtose       | 4,87909    | -        |
| Maximo  | 0,11952    | -        | Jarque-Bera   | 189,57     | 0,0000   |

Fonte: Elaboração própria.



a) Gráfico de probabilidade normal.

b) Histograma da distribuição.

Figura 4.6: Gráficos de análise de distribuição para o retorno da Petrobrás PN.

Fonte: Elaboração própria.

Por fim a variação do preço de fechamento da vale5 ao longo do período de análise é apresentado na Figura 4.7 a seguir. Uma simples análise do gráfico mostra que o comportamento da Vale do Rio Doce PNA é diferente dos comportamentos das demais ações estudadas, nesta ação há uma nítida tendência de alta em todo o período de análise, mas com uma forte ruptura de tendência no fim da série.

Apesar da diferença de comportamento das ações, o que torna a presente análise mais rica em detalhes, uma observação deve ser feita. Há uma mudança de comportamento no fim de 2002 e no início de 2003 baseado nas expectativas. No fim de 2002 incertezas políticas quanto ao futuro do País fizeram com que os investidores mudassem suas carteiras. No entanto, em 2003 com a definição da política econômica brasileira e com a gradativa queda dos juros da economia houve um fortalecimento do mercado de capitais brasileiro, especialmente importante por que não houve apenas uma valorização dos papéis, mas principalmente porque ela foi acompanhada por um aumento no volume de negociações (ver Tabela 4.1).

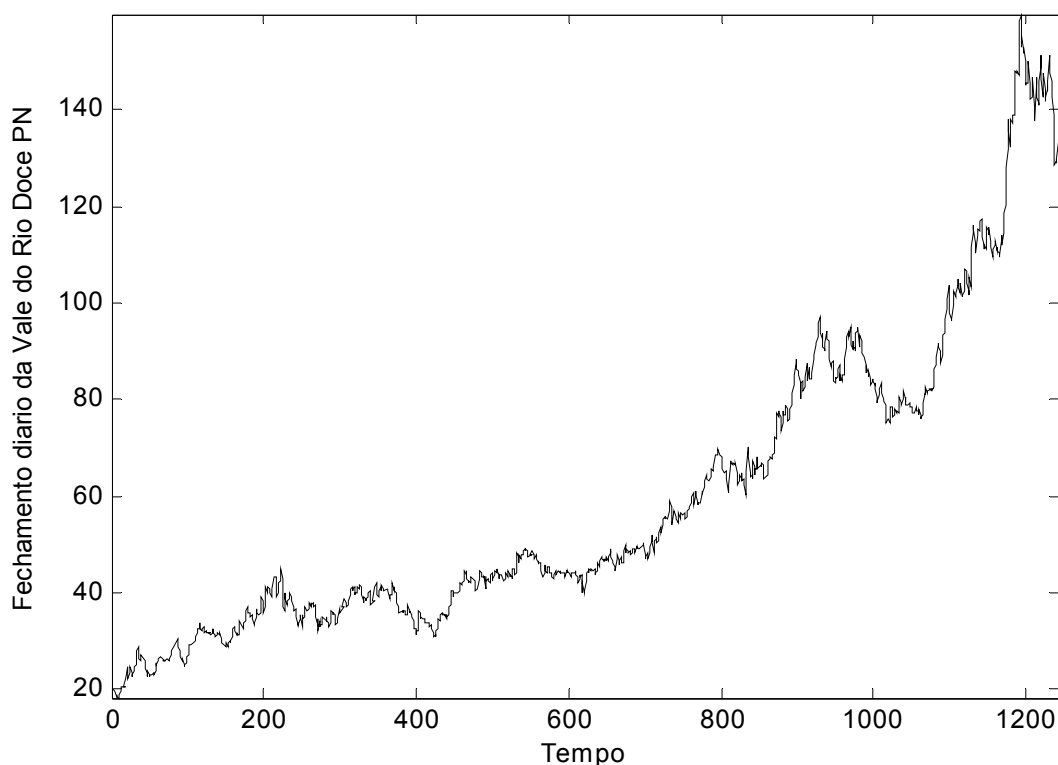


Figura 4.7: Valor de fechamento diário da Vale do Rio Doce PNA no período de 17/03/1999 a 19/03/2004.

Fonte: Elaboração própria.

Tal avaliação corrobora com a teoria das expectativas<sup>54</sup> sobre o mercado de capitais, o desafio é modelar esta expectativa, em especial, como modelar um mercado onde ocorrem tantas mudanças de perspectivas por parte dos agentes econômicos, mudanças estas nem sempre compartilhadas em todo o mercado em função de diferenças inerentes dentro de cada companhia que lança suas ações na bolsa.

Quanto ao retorno da ação da Vale do Rio Doce não existem diferenças significativas visíveis no gráfico apresentado na Figura 4.8; resta analisar as estáticas descritivas desta distribuição dos retornos.

<sup>54</sup> Segundo esta teoria as decisões são tomadas com base no que o agente acredita que possa acontecer no futuro, tais decisões baseiam-se muitas vezes nas emoções e na falta de conhecimento pleno sobre a situação.

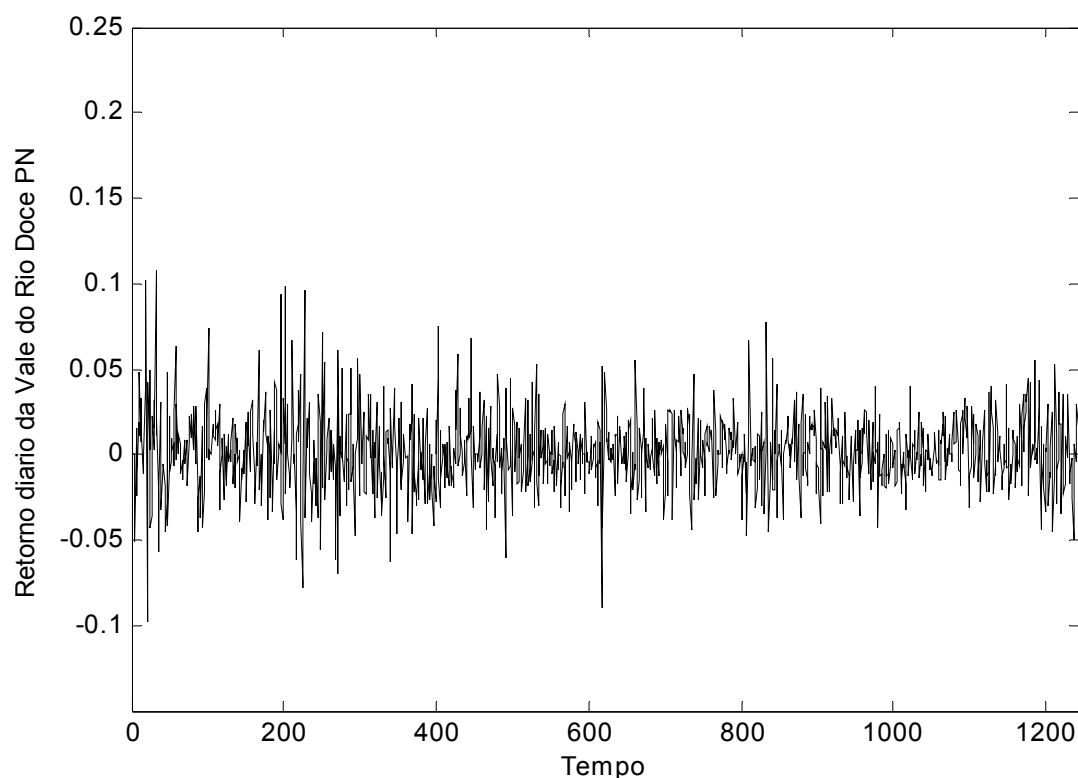


Figura 4.8: Retorno diário da Vale do Rio Doce PNA no período de 17/03/1999 a 19/03/2004.

Fonte: Elaboração própria.

A Tabela 4.4 demonstra que a série de retornos da Vale do Rio Doce PNA também não segue uma distribuição de frequência normal, confirmada pelas Figuras 4.9.

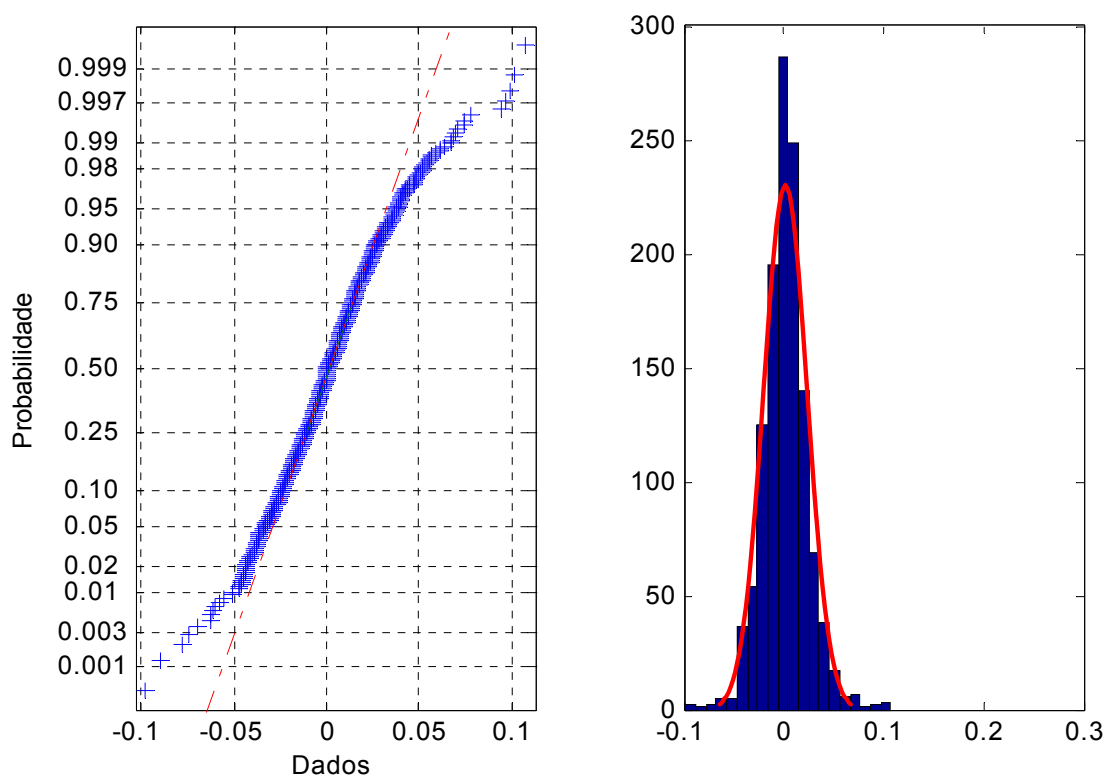
Uma ressalva deve ser feita com relação ao teste de normalidade das séries financeiras, principalmente quando se trata de mercados aparentemente não eficientes como o brasileiro. Os testes levam em consideração todos os dados, não raro são as presenças de *outliers* neste tipo de série, muitas vezes motivadas por eventos sistêmicos da economia local como também a perturbações em indústrias locais (como vazamento de uma rede de distribuição de petróleo), ou para o caso da Petrobrás e Vale do Rio Doce<sup>55</sup> instabilidade no mercado internacional de *commodities*. Entretanto, estes fenômenos são fundamentais em um trabalho que visa identificar perdas extremas, que é o caso.

<sup>55</sup> A Vale do Rio Doce é uma empresa tipicamente exportadora.

Tabela 4.4: Estatísticas descritivas para os retornos da Vale do Rio Doce PNA.

|         | Estimativa | P. Value |               | Estimativa | P. Value |
|---------|------------|----------|---------------|------------|----------|
| Média   | 0,0016     | 0,0129   | Desvio Padrão | 0,0222     | -        |
| Mediana | 0,0003     | -        | Assimetria    | 0,2809     | -        |
| Mínimo  | -0,0983    | -        | Curtose       | 5,2689     | -        |
| Maximo  | 0,1074     | -        | Jarque-Bera   | 280,9279   | 0,0000   |

Fonte: Elaboração própria.



a) Gráfico de probabilidade normal.

b) Histograma da distribuição.

Figura 4.9: Gráficos de análise de distribuição para o retorno da Petrobrás PNA.

Fonte: Elaboração própria.

Apresentadas as três séries de ações uma observação é pertinente, nem a Telemar PN, Petrobrás PN e Vale do Rio Doce PNA apresentaram os fatos estilizados das séries financeiras dos mercados mais desenvolvidos, sendo um indício que modelos criados para estes mercados podem não funcionar plenamente no mercado brasileiro.



### 4.1.2 As Opções

As bases de dados de opções foram obtidas junto a BOVESPA e correspondem ao período de 17/03/2002 a 19/03/2004, somente opções com liquidez igual ou acima de 5 negócios por dia foram utilizadas neste trabalho, mesmo critério utilizado por Barros e Lemgruber (1997) e Araújo, Barbedo e Lemgruber (2004). Entre as séries foram selecionadas as mais no dinheiro, mais fora do dinheiro e mais dentro do dinheiro que atendessem ao critério de liquidez. Segundo estes critérios apenas constitui-se uma base de dados razoável as opções de compra da Telemar PN, compreendendo para o período 21 vencimentos diferentes num total de 526 observações para cada série.

A figura a seguir apresenta a variabilidade do valor de fechamento das três séries de opções utilizadas neste trabalho.

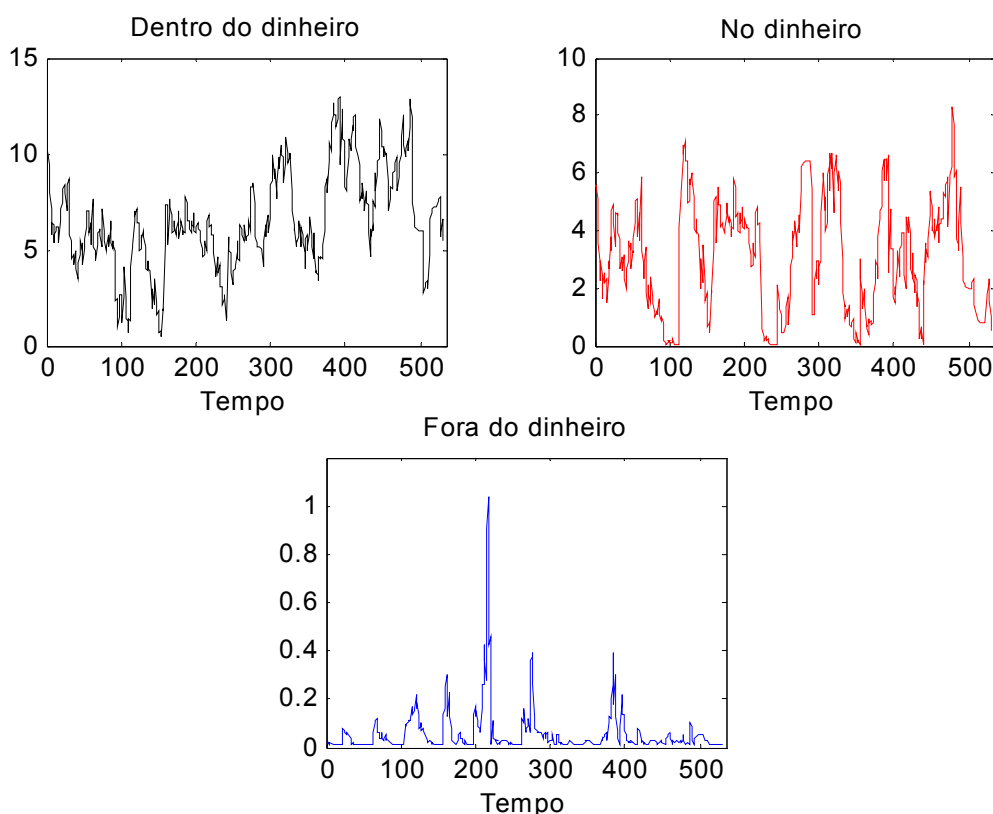


Figura 4.10: Fechamento diário das opções da Telemar PN no período de 17/03/2002 a 19/03/2004.

Fonte: Elaboração própria.

O retorno de um investidor de uma carteira de opções (independente da estratégia) deve ser calculado levando em consideração se a posição total é mais comprada ou mais vendida, essa posição é identificada no momento da definição da carteira. Se a posição líquida é comprada, o investidor ganhará com o aumento no valor da carteira, se a posição é vendida há ganhos com a desvalorização da carteira.

## 4.2 Estacionariedade, Autocorrelação e Heterocedasticidade das Séries.

A primeira etapa na análise das séries financeiras em questão é avaliar aspectos fundamentais e críticos das séries temporais. Iniciando pela avaliação da presença de raiz unitária para os retornos. A Tabela 4.5 a seguir apresenta as estatísticas do teste de *Augmented Dickey-Fuller t-test*<sup>56</sup> (ADF) para avaliar a presença de raiz unitária das séries de ações consideradas. Como pode ser observado, os resultados indicam a ausência de raízes unitárias já que o valor calculado do teste é menor que o valor crítico, ou seja, a série pode ser considerada estacionária.

Tabela 4.5: Teste ADF

| Série                | ADF calculado |
|----------------------|---------------|
| Telemar PN           | -23,23        |
| Petrobrás PN         | -27,50        |
| Vale do Rio Doce PNA | -30,45        |

Valor crítico a 5%: -2,86

Fonte: Elaboração própria.

Como as séries não possuem raiz unitária não há necessidade de realizar diferenciações, o que é normal para a maioria das séries financeiras, lembrando que o próprio cálculo do retorno é uma diferenciação. A principal implicativa econômica é que não havendo raízes unitárias os choques não terão efeitos permanentes (Greene, 2000). Sabendo que as séries são estacionárias deve-se avaliar a presença de autocorrelações, ou correlação serial dos erros entre períodos de tempo.

<sup>56</sup> A distribuição do teste ADF é a  $\tau$ , construída através de experimento de Monte Carlo por Dickey e Fuller (Enders, 1995).

A autocorrelação pode ser verificada qualitativamente por meio de funções de autocorrelação, as quais são apresentadas na Figura 4.11. A análise gráfica mostra que não há autocorrelação para a série da Vale do Rio Doce PNA, entretanto, o gráfico deixa dúvida com respeito a Telemar PN e Petrobrás PN. Para eliminar tal dúvida uma avaliação quantitativa é necessária. No entanto antes se analisar a autocorrelação dos retornos quadráticos com a Figura 4.12.

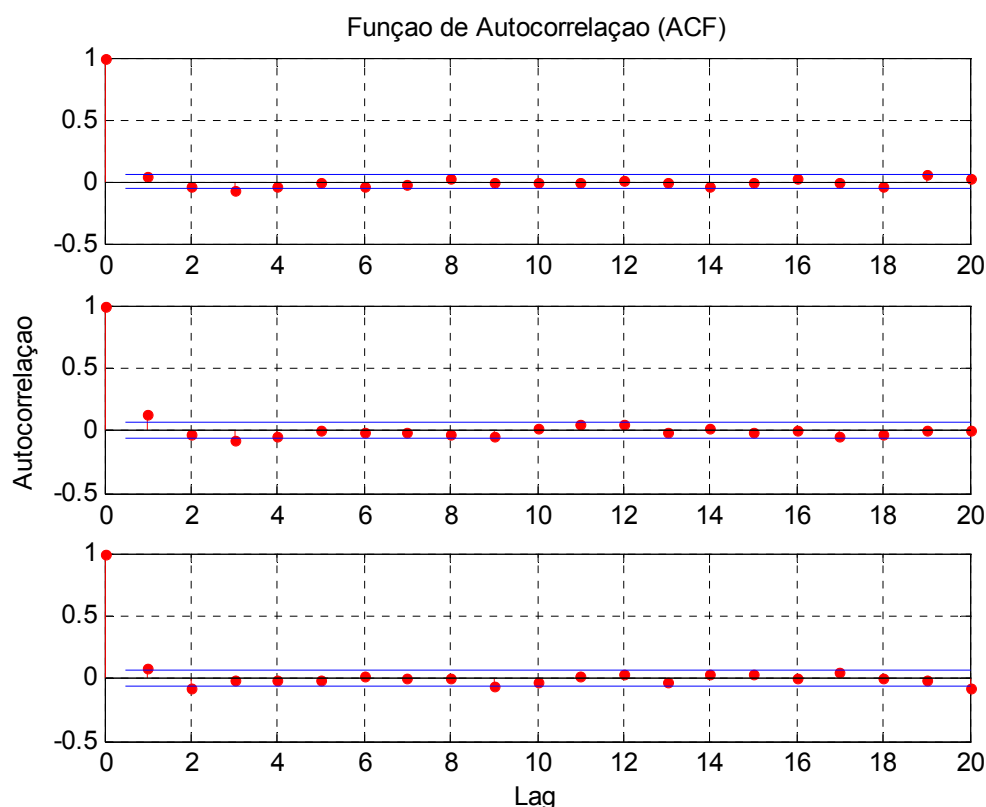


Figura 4.11: Função de autocorrelação do retorno para Vale do Rio Doce PNA, Petrobrás PN e Telemar PN; respectivamente.

Fonte: Elaboração própria.

Os gráficos da Figura 4.12 mostram autocorrelação do retorno ao quadrado para a Vale do Rio Doce PNA e para a Telemar PN, mas não para a Petrobrás PN, com estes resultados uma análise quantitativa também se mostra necessária.

Para quantificar as verificações quantitativas de autocorrelação é possível utilizar um teste de hipóteses formal como o Ljung-Box-Pierce Q-teste<sup>57</sup>, o Q-teste é usualmente utilizado na pós-análise aplicado aos resíduos. Entretanto, neste caso, adota-se este teste na análise prévia supondo que num modelo GARCH (1,1) simples o retorno é obtido por uma constante

<sup>57</sup> Veja Box, Jenkins e Reinsel (1995) pág. 314.

simples e um processo de inovação puro<sup>58</sup>. Sob a hipótese nula de autocorrelação o Q-teste tem uma distribuição assintoticamente Q-quadrado.

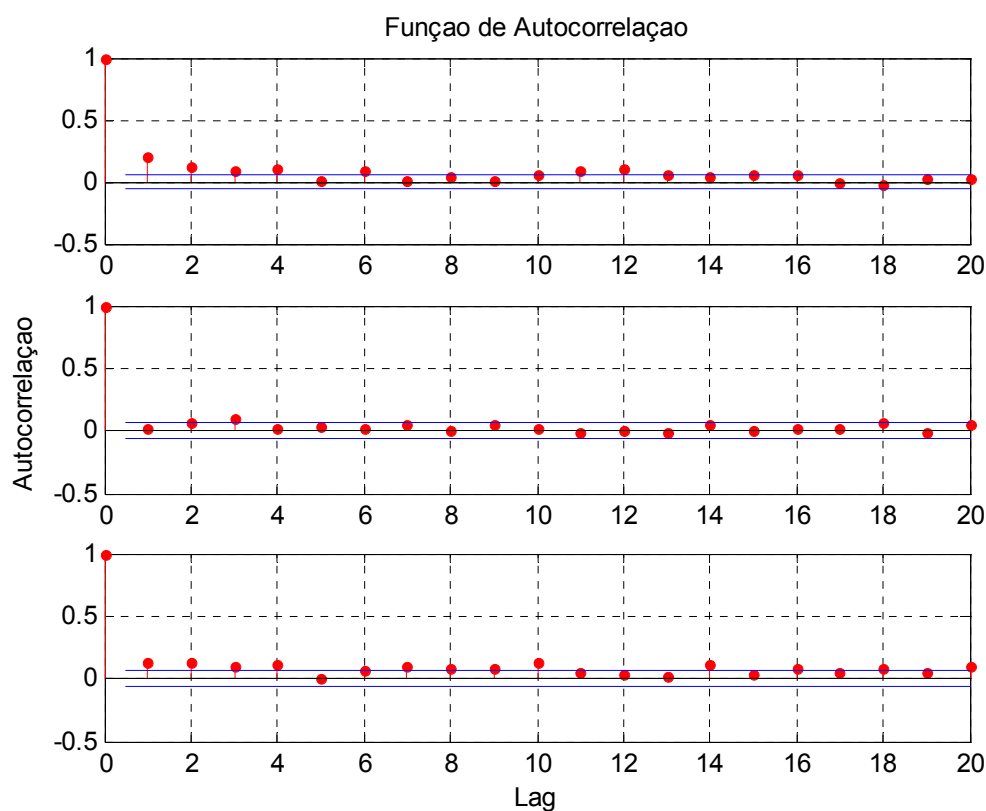


Figura 4.12: Função de autocorrelação do retorno ao quadrado para Vale do Rio Doce PNA, Petrobrás PN e Telemar PN; respectivamente.

Fonte: Elaboração própria.

A Tabela 4.6 a seguir verifica, ao menos aproximadamente, autocorrelação não significativa dos retornos quando testados com 10, 15 e 20 defasagens (*lags*) da função de autocorrelação com 5% de significância. O mesmo é feito na Tabela 4.7, mas com relação aos erros quadrados.

Tabela 4.6: Q-teste para os retornos das séries.

|            | Vale do rio Doce PNA |             | Petrobrás PN |             | Telemar PN |             |               |
|------------|----------------------|-------------|--------------|-------------|------------|-------------|---------------|
| Defasagens | P-Value              | Estatística | P-Value      | Estatística | P-Value    | Estatística | Valor Crítico |
| 10         | 0,2656               | 12,299      | 0,0007       | 30,606      | 0,0527     | 18,134      | 18,307        |
| 15         | 0,5019               | 14,314      | 0,0015       | 36,489      | 0,0896     | 22,750      | 24,9958       |
| 20         | 0,5103               | 19,178      | 0,0052       | 39,868      | 0,0630     | 30,445      | 31,4104       |

Fonte: Elaboração própria.

<sup>58</sup> Assim os testes são feitos com  $\varepsilon_t = y_t - C$ , logo um teste no retorno equivale ao teste sobre o erro no modelo padrão.

Os resultados da Tabela 4.6 mostram que não há autocorrelação para a Vale do Rio Doce PNA e para a Telemar PN, já a Petrobrás PN possui autocorrelação serial no seu retorno (erro). A Tabela 4.7 a seguir mostra que todas as séries apresentam autocorrelação no quadrado dos retornos (quadrado do erro), indicando que a modelagem no quadrado do erro pode ser viável.

Tabela 4.7: Q-teste para os retornos quadrado das séries.

|            | Vale do rio Doce PNA |             | Petrobrás PN |             | Telemar PN |             |               |
|------------|----------------------|-------------|--------------|-------------|------------|-------------|---------------|
| Defasagens | P-Value              | Estatística | P-Value      | Estatística | P-Value    | Estatística | Valor Crítico |
| 10         | 0,0000               | 87,730      | 0,0116       | 22,774      | 0,0000     | 100,552     | 18,307        |
| 15         | 0,0000               | 113,407     | 0,0448       | 25,404      | 0,0000     | 120,054     | 24,9958       |
| 20         | 0,0000               | 119,990     | 0,0391       | 32,416      | 0,0000     | 148,815     | 31,4104       |

Fonte: Elaboração própria.

Tão ou até mais importante que os testes já feitos são os testes relacionados com o desenho da variância (e do desvio padrão por consequência), esta questão passa pelo aspecto da heterocedasticidade. Na Seção 2.4.2.2 item A está descrito o teste feito cujo resultado encontra-se na Tabela 4.8 a seguir.

Tabela 4.8: Teste de Engle proposto por Bourbonnais e Terraza (1998).

|            | Vale do rio Doce PNA |             | Petrobrás PN |             | Telemar PN |             |               |
|------------|----------------------|-------------|--------------|-------------|------------|-------------|---------------|
| Defasagens | P-Value              | Estatística | P-Value      | Estatística | P-Value    | Estatística | Valor Crítico |
| 10         | 0,0000               | 62,782      | 0,0483       | 18,421      | 0,0000     | 60,783      | 18,307        |
| 15         | 0,0000               | 72,568      | 0,2063       | 19,167      | 0,0000     | 69,705      | 24,9958       |
| 20         | 0,0000               | 79,658      | 0,1771       | 25,667      | 0,0000     | 76,782      | 31,4104       |

Fonte: Elaboração própria.

Os resultados da Tabela 4.8 mostram que há pelo menos 5 defasagens do modelo ARCH para a Petrobrás PN e 20 defasagens para as demais séries e mostra significativas evidências de suporte aos efeitos heterocedásticos, confirmando mais um dos fatos estilizados de Taylor (1986). Entretanto esta quantidade de defasagens tornaria o modelo de previsão da volatilidade pouco parcimonioso, a alternativa é o modelo GARCH que apresenta de forma mais parcimoniosa a dependência temporal da variância condicional. Para verificar a presença de termos significativos do modelo GARCH em acréscimo aos termos do modelo ARCH utiliza-se o teste proposto na Seção 2.4.2.2 item B.

Este teste é o mesmo Q-teste para o quadrado dos resíduos descrito na Tabela 4.7 confirmando a possibilidade de estimar a variância condicional via modelos GARCH.

Por fim, o teste de assimetria dos impactos, ou seja, se há respostas diferentes para choques nos retornos, caso positivo ou negativo. Esta verificação é feita pelo teste proposto na Seção 2.4.2.2 item C, cujos resultados estão na tabela a seguir (Tabela 4.9), nesta observa-se que não existe sustentação a hipótese de assimetria negativa visto que a correlação entre os quadrados dos resíduos padronizados e os resíduos padronizados defasados não são significativamente diferentes de zero, tanto para a Vale do Rio Doce PNA quanto para a Telemar PN. Já a Petrobrás PN por possuir correlação negativa e significativamente diferente de zero a 5% mostra que modelos que capturam a assimetria como EGARCH e GARCH-L tendem a melhores resultados.

Tabela 4.9: Teste de assimetria de impactos.

|                      | Correlação | P-Value |
|----------------------|------------|---------|
| Vale do Rio Doce PNA | 0,0354     | 0,2650  |
| Petrobrás PN         | -0,0775    | 0,0147  |
| Telemar PN           | -0,0046    | 0,8847  |

Fonte: Elaboração própria.

### 4.3 Seleção dos Modelos de Volatilidade

Uma vez identificado que os modelos autoregressivos heterocedásticos são os mais indicados às séries objetos de estudo, resta selecionar entre estes os mais eficientes, para tal, utilizou-se de técnicas já consolidadas na literatura, o Q-teste, a metodologia de Akaike (AIC) e a Bayesian (BIC) descritas por Box, Jenkins e Reinsel (1994).

Em função das defasagens  $r$ ,  $m$ ,  $p$  e  $q$ <sup>59</sup> há diversas variações de modelos referentes a cada família (GARCH, EGARCH e GARCH-L), a seleção dentro de cada família é feita entre os modelos com defasagens variando entre 0 e 4 para as equações de volatilidade e 0 e 1 para equações de médias. O tamanho da janela de observações tem papel fundamental nesta parte do trabalho, por duas razões: a primeira é a fundamentação teórica de quanto maior a janela, melhores os resultados, conforme apresentado em 3.2. A segunda razão é a variação dinâmica do comportamento conforme observado nos gráficos de retorno das ações. Por tal razão testar-se-á dois tamanhos de janelas: um ano e dois anos<sup>60</sup>.

<sup>59</sup> Ver seção 2.4.2 para detalhes dos modelos GARCH, EGARCH e GARCH-L.

<sup>60</sup> Testaram-se janelas maiores, no entanto, houve problemas de convergência para maiores defasagens.

Os resultados completos do teste Q, do AIC e BIC estão no Apêndice 1. Na Tabela 4.10 um quadro resumo dos modelos ARMA (r,m) – GARCH (p,q) selecionados para uma janela de um ano (255 dias). Analisando o Apêndice 1 percebe-se que não há diferenças significativas entre os modelos selecionados pelos testes baseados no Q-teste e os modelos mais parcimoniosos ARMA (0,0)-GARCH (1,1). Desta forma os modelos que melhor se ajustam às séries pelos critérios BIC e Q-teste são os modelos ARMA (0,0)-GARCH (1,1).

Tabela 4.10: Quadro resumo com os melhores modelos ARMA-GARCH com janela de 255 dias.

|                      | Q – teste (4) | Q – teste (8) | AIC         | BIC         |
|----------------------|---------------|---------------|-------------|-------------|
| Vale do Rio Doce PNA | (0,0) (1,2)   | (0,0) (2,2)   | (1,0) (1,1) | (0,0) (1,1) |
| Petrobrás PN         | (0,0) (1,3)   | (0,0) (1,1)   | (0,1) (1,2) | (0,0) (1,1) |
| Telemar PN           | (0,0) (1,4)   | (0,0) (1,1)   | (1,1) (1,3) | (0,0) (1,1) |

Fonte: Elaboração própria.

Quando se avalia a janela de 510 dias o resultado indica superioridade dos modelos parcimoniosos, a exemplo do caso anterior. A única ressalva é o caso da Petrobrás PN que teve como indicado no teste AIC e BIC o modelo ARMA (0,1)-GARCH (1,2). Entretanto como no Q-teste o melhor foi o ARMA (0,0)-GARCH (1,1), este foi o selecionado, tanto para a Petrobrás PN quanto para as demais ações. Deve ser ressaltado que no teste de assimetria a Petrobrás PN indicava um melhor ajuste aos modelos assimétricos como o modelo EGARCH e GARCH-L, assim sendo uma análise destes dois modelos em relação a este ativo faz-se necessário.

Tabela 4.11: Quadro resumo com os melhores modelos ARMA-GARCH com janela de 510 dias.

|                      | Q – teste (4) | Q – teste (8) | AIC         | BIC         |
|----------------------|---------------|---------------|-------------|-------------|
| Vale do Rio Doce PNA | (0,0) (1,1)   | (0,0) (1,1)   | (1,1) (1,1) | (0,0) (1,1) |
| Petrobrás PN         | (0,0) (1,1)   | (0,0) (1,1)   | (0,1) (1,2) | (0,1) (1,2) |
| Telemar PN           | (0,0) (1,2)   | (0,0) (1,2)   | (0,1) (1,1) | (0,0) (1,1) |

Fonte: Elaboração própria.

Uma análise comparativa entre as Tabelas 4.10 e 4.11 demonstra que não há uma uniformidade de comportamento das séries ao longo do tempo, e mais, a utilização de séries

muito longas pode gerar um enviesamento do modelo. Por tal razão a janela preferencialmente utilizada no cômputo do VaR será a de 255 dias.

A Tabela (4.12) a seguir mostra um quadro resumo com os resultados dos modelos assimétricos EGARCH para as ações em análise com 255 dias e 510 dias de janelas, enquanto que na Tabela 4.13 estão os resultados para o GARCH-L.

Tabela 4.12: Quadro resumo com os melhores modelos ARMA-EGARCH<sup>61</sup> com janela de 255 e 510 dias.

|                                 | Q – teste (4) | Q – teste (8) | AIC         | BIC         |
|---------------------------------|---------------|---------------|-------------|-------------|
| Vale do Rio Doce PNA (252 dias) | (0,0) (1,1)   | (0,0) (1,1)   | (0,1) (1,3) | (0,0) (1,1) |
| Petrobrás PN (252 dias)         | (0,0) (1,1)   | (0,0) (1,1)   | (0,1) (1,1) | (0,1) (1,1) |
| Telemar PN (252 dias)           | (0,0) (1,1)   | (0,0) (1,1)   | (0,1) (2,2) | (0,1) (1,1) |
| Vale do Rio Doce PNA (504 dias) | (0,0) (1,1)   | (0,0) (1,1)   | (0,1) (1,3) | (0,0) (1,2) |
| Petrobrás PN (504 dias)         | (0,0) (1,1)   | (0,0) (1,1)   | (0,1) (1,3) | (0,1) (1,3) |
| Telemar PN (504 dias)           | (0,0) (1,1)   | (0,0) (1,1)   | (0,1) (1,3) | (0,1) (1,3) |

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 4.13: Quadro resumo com os melhores modelos ARMA-GARCH-L com janela de 255 e 510 dias.

|                                 | Q – teste (4) | Q – teste (8) | AIC         | BIC         |
|---------------------------------|---------------|---------------|-------------|-------------|
| Vale do Rio Doce PNA (252 dias) | (0,0) (1,1)   | (0,0) (1,1)   | (0,1) (1,1) | (0,1) (1,1) |
| Petrobrás PN (252 dias)         | (0,0) (1,1)   | (0,0) (1,1)   | (0,1) (1,1) | (0,1) (1,1) |
| Telemar PN (252 dias)           | (0,0) (1,1)   | (0,0) (1,1)   | (0,1) (1,1) | (0,1) (1,1) |
| Vale do Rio Doce PNA (504 dias) | (0,0) (1,1)   | (0,0) (1,1)   | (1,1) (1,1) | (1,1) (1,1) |
| Petrobrás PN (504 dias)         | (0,0) (1,1)   | (0,0) (1,1)   | (0,1) (1,1) | (0,1) (1,1) |
| Telemar PN (504 dias)           | (0,0) (1,1)   | (0,0) (1,1)   | (0,1) (1,1) | (0,1) (1,1) |

Fonte: Elaboração própria.

Os resultados indicaram que os modelos parcimoniosos foram superiores. Uma observação é pertinente: os Q-testes mostraram-se pouco sensíveis as mudanças dos modelos assimétricos e os testes AIC e BIC pouco sensíveis nos modelos GARCH-L. Em função destes resultados foi utilizado o modelo ARMA (0,1)-EGARCH (1,1,1) para representar os modelos assimétricos para a Petrobrás PN. Observa-se que a Petrobrás PN possui um

<sup>61</sup> O modelo ARMA (0,0)-EGARCH (1,1) é na verdade o modelo ARMA (0,0)-EGARCH (1,1,1).



componente de tendência no seu comportamento, isto pode ser observado tanto nos gráficos quanto nas equações mais adaptativas relativas a esta ação.

#### **4.4 Definindo as Carteiras.**

Com a modelagem do principal parâmetro (a volatilidade) definida, o passo seguinte é a estimação do VaR. Esta estimação será realizada para carteiras com ações, para carteiras com opções e carteiras mistas (carteiras *hedgeadas*).

Para as ações serão sete carteiras, uma para cada ativo simples, totalizando 3; três carteiras com dois ativos cada uma; e uma carteira com os três ativos. A participação de cada ativo nas carteiras é feita equitativamente para que cada ativo tenha uma contribuição idêntica; desta forma o valor inicial da carteira passa a ter um papel secundário. A principal ressalva com relação a esta questão é o princípio da divisibilidade dos ativos, entretanto, este efeito pode ser minimizado aumentando-se o valor da carteira inicial ou com pequenos ajustes na participação relativa de cada ativo; assim sendo este efeito foi ignorado neste trabalho.

As estratégias de opções avaliadas são: *call ratio*, borboleta com posição comprada, borboleta com posição vendida, todas para opções de compra da Telemar PN por terem maiores liquidez. Na estratégia *call ratio*, ou posição vendida, o investidor espera que o ativo-objeto se mova acentualmente em qualquer direção, por esta característica é classificada também como compra de volatilidade. A estratégia é obtida com uma posição comprada de uma opção no dinheiro e uma fora do dinheiro, mais uma posição vendida dentro do dinheiro. Esta estratégia permite um baixo risco de perdas mas com razoável potencial de ganho.

Quando um investidor opta por uma estratégia borboleta com posição comprada é porque está com expectativa de estabilidade de preços do ativo-objeto. Quando há variações acentuadas de preços o investidor perde dinheiro, por tal razão o mercado chama esta estratégia de venda de volatilidade. É formada pela compra de uma opção de compra dentro do dinheiro e uma fora do dinheiro e duas posições vendidas no dinheiro.

Já a estratégia inversa, borboleta com posição vendida, também é uma opção de compra de volatilidade, e o investidor perde dinheiro quando o valor do ativo-objeto atinge um patamar de preço superior à opção de fora do dinheiro ou inferior à opção dentro do dinheiro. Assim ela é formada por uma posição vendida de uma opção de compra dentro do dinheiro e uma fora do dinheiro e duas posições compradas no dinheiro.

Para cada uma destas estratégias há na verdade 12 carteiras diferentes, uma para cada vencimento e as opções que compõe cada carteira são as de maior liquidez (mais próximas ao vencimento), neste experimento não se verifica superposição de observações.

Por fim, as estratégias de hedge contemplam carteiras de ações que possuam a Telemar PN na sua composição sendo acrescida de opções no dinheiro da Telemar PN, na proporção do inverso do seu delta, como apresentado a seguir:

$$R_p = S + \left(\frac{1}{\delta}\right)C_2 \quad (4.1)$$

onde S é o ativo-objeto,  $C_2$  a opção no dinheiro e  $\delta$  o delta da opção. Esta estratégia é conhecida como delta neutro.

Para cada uma destas estratégias (carteiras), os diversos modelos de VaR serão avaliados sob duas perspectivas: a estática e a dinâmica.

#### **4.5 Estimando o Value at Risk Estático.**

O Comitê de Basiléia sugere que os parâmetros do VaR sejam revistos a cada três meses, este será portanto, a frequência de reajustes dos parâmetros, como, médias, variâncias, parâmetros dos modelos GARCH, EGARCH, etc. Logo, esta seção irá descrever os resultados obtidos quando os parâmetros são reajustados a cada 66 dias úteis (três meses aproximadamente), entretanto, o VaR será verificado diariamente para o período estipulado.

Nas carteiras só com ações o VaR normal e suas variações<sup>62</sup> representa o VaR paramétrico, para estratégias com opções, o VaR paramétrico é representado pelo VaR das gregas. As metodologias não paramétricas são a histórica e de Monte Carlo (com suas variações), no entanto, para as estratégias apenas com opções não há justificativas para o uso do VaR histórico em função da quantidade reduzida de dados para cada carteira particular (aproximadamente 22 observações).

---

<sup>62</sup> As variações do modelo delta-normal são obtidos com mudanças na forma de estimar a volatilidade.

### 4.5.1 VaR Estático das Ações.

Os modelos de VaR para carteiras de ações testados foram: VaR delta-normal com volatilidade tradicional (padrão) dada pela Equação (2.36), VaR delta-normal com erros heterocedásticos do tipo GARCH e do tipo EGARCH; o método de simulação histórica (MSH) tradicional (conforme a Seção 3.5), com *bootstrap* (Subseção 3.5.1), com *mirror* cenários (Subseção 3.5.2), e de cenários ponderados (Subseção 3.5.3); o método de simulação de Monte Carlo (MSMC) com volatilidade tradicional dada pela Equação (2.36), MSMC com erros heterocedásticos do tipo GARCH e do tipo EGARCH.

Na metodologia do MSMC foram adotadas duas soluções para a trajetória de preços: uma dada pela solução da Equação (3.48) onde  $\mu$  é substituído por  $r$ , a taxa de juros livre de risco<sup>63</sup>, obtendo assim a precificação exata de Euler de opções europeias para volatilidade constante (Equação (4.2) a seguir). A segunda é uma extensão da primeira conhecida como solução exata de Milstein para volatilidade constante (Abe, 2002), Equação (4.3).

$$S_{t+\Delta t} = S_t [1 + r\Delta t + \sigma_t \Delta z_t] \quad (4.2)$$

$$S_{t+\Delta t} = S_t \left[ 1 + r\Delta t + \sigma_t \Delta z_t + \frac{1}{2} \sigma_t^2 ((\Delta z_t)^2 - \Delta t) \right] \quad (4.3)$$

Além das duas soluções acima utilizando  $r$  como médias dos modelos ainda estimou-se o VaR com o  $\mu$  obtido por estimação da média obtida diretamente da equação da média dos modelos autoregressivos dados pela Equação (2.45), para o VaR com os modelos GARCH e EGARCH, já para o VaR com volatilidade tradicional a média foi calculada via um modelo autoregressivo ARMA (0,1).

Nos modelos que utilizaram a volatilidade estimada via o GARCH ou EGARCH a volatilidade diária variou, no entanto os parâmetros para calcular esta volatilidade foram mantidos inalterados durante as 66 observações, após as 66 observações novos parâmetros foram determinados e um novo grupo de 66 volatilidades estimado.

---

<sup>63</sup> Taxa de juros SELIC (Sistema Especial de Liquidação e Custódia), que reflete o custo médio das operações com títulos públicos federais.

O método de simulação histórica de *bootstrap* foi realizado com amostra de tamanho 10.000 com reposição para cada janela de 255 observações.

Já o método de Monte Carlo foi estimado com 24 passos (simulando as 24 horas diárias) e 10.000 repetições para cada dia de simulação, ou seja, para um ano teve-se 61,2 milhões de simulações<sup>64</sup> (para dois anos 122,4 milhões).

Em função da mudança temporal de comportamento das séries, utilizaram-se dois tamanhos de amostra para a verificação da eficiência do modelo: um ano e dois anos. Assim é possível checar se um modelo é eficiente no médio prazo.

Os primeiros resultados estão apresentados na Tabela 4.14 a seguir com as estimativas do VaR delta-normal e de simulação histórica para a Vale do Rio Doce PNA para o período de 2 anos, e na Tabela 4.15 as estimativas do modelo de simulação de Monte Carlo.

O teste de Kupiec foi realizado comparando o número de violações com o intervalo de confiança a 5% da Tabela 3.3, já o teste de Lopez 1 foi calculado segundo a metodologia descrita na Seção 3.8.2. Entretanto, observa-se um problema com esta medida: o valor desta coincide com a taxa de violações, tornando a medida de caráter secundário e beneficiando os modelos com menor taxa de violações, deixando para um segundo plano a distância entre o VaR e a perda real.

Para minimizar este problema foi sugerido um novo teste (Perda de Lopez 2) baseado numa modificação do teste padrão de Lopez, no qual a Equação (3.56) é substituída pela Equação (4.4) abaixo.

$$C_{m,t} = \begin{cases} (P_t - VaR_{m,t})^2, & se \quad u_t < VaR_{m,t} \\ 0, & se \quad u_t \geq VaR_{m,t} \end{cases} \quad (4.4)$$

---

<sup>64</sup> Fora as estimações da volatilidade.

Tabela 4.14: VaR estático-1 da Vale do Rio Doce PN com 510 observações.

| Metodologia                       | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio                | VaR Desvio Padrão        | VaR Máximo               | VaR Mínimo               |
|-----------------------------------|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Delta-normal Tradicional          | 224                 | 43,92                   | R               | 0,4392           | $1,3749 \times 10^{-4}$ | $-5,2635 \times 10^{-4}$ | $1,1549 \times 10^{-5}$  | $-5,2635 \times 10^{-4}$ | $-5,2635 \times 10^{-4}$ |
| Delta-normal GARCH (0,0) (1,1)    | 224                 | 43,92                   | R               | 0,4394           | $1,3675 \times 10^{-4}$ | $-5,8733 \times 10^{-4}$ | $4,4053 \times 10^{-5}$  | $-6,6590 \times 10^{-4}$ | $-5,2445 \times 10^{-4}$ |
| Delta-normal EGARCH (0,0) (1,1,1) | 223                 | 43,73                   | R               | 0,4374           | $1,3569 \times 10^{-4}$ | $-6,7172 \times 10^{-4}$ | $8,2101 \times 10^{-5}$  | $-8,1771 \times 10^{-4}$ | $-5,7029 \times 10^{-4}$ |
| MSH Tradicional                   | 25                  | 4,90                    | A               | 0,04902          | $5,5401 \times 10^{-6}$ | -0,02846                 | $2,6046 \times 10^{-16}$ | -0,02846                 | -0,02846                 |
| MSH <i>Bootstrap</i>              | 127                 | 24,90                   | R               | 0,2490           | $5,0226 \times 10^{-5}$ | -0,01074                 | $7,8407 \times 10^{-4}$  | -0,01196                 | $-9,5085 \times 10^{-3}$ |
| MSH <i>Mirror</i> cenários        | 17                  | 3,33                    | A               | 0,03333          | $3,3670 \times 10^{-6}$ | -0,03160                 | $1,8059 \times 10^{-16}$ | -0,03160                 | -0,03160                 |
| MSH Cenários ponderados           | 13                  | 2,55                    | R               | 0,02549          | $1,8714 \times 10^{-6}$ | -0,03479                 | $2,4435 \times 10^{-3}$  | -0,03573                 | -0,02846                 |

Obs.: A significa aceito no teste de Kupiec com 95% de significância e R reprovado.

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 4.15: VaR estático-2 da Vale do Rio Doce PN com 510 observações.

| Metodologia   | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão       | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|---|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|-------------------------|------------|------------|
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r constante          | 25                  | 4,96                    | A               | 0,04960          | $5,5896 \times 10^{-6}$ | -0,02783  | $2,9667 \times 10^{-4}$ | -0,02814   | -0,02743   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r constante          | 25                  | 4,96                    | A               | 0,04960          | $5,6845 \times 10^{-6}$ | -0,02772  | $2,9433 \times 10^{-4}$ | -0,02802   | -0,02732   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r constante    | 26                  | 5,16                    | A               | 0,05159          | $6,1715 \times 10^{-6}$ | -0,02721  | $6,6165 \times 10^{-5}$ | -0,02724   | -0,02686   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r constante    | 26                  | 5,16                    | A               | 0,05159          | $6,2694 \times 10^{-6}$ | -0,02711  | $6,5656 \times 10^{-5}$ | -0,02713   | -0,02675   |
| MSMC EGARCH (0,0) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r constante | 12                  | 2,35                    | R               | 0,02353          | $1,8587 \times 10^{-6}$ | -0,03594  | $4,5795 \times 10^{-3}$ | -0,04433   | -0,03048   |
| MSMC EGARCH (0,0) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r constante | 12                  | 2,35                    | R               | 0,02353          | $1,9292 \times 10^{-6}$ | -0,03575  | $4,5309 \times 10^{-3}$ | -0,04405   | -0,03035   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r variável           | 29                  | 5,69                    | A               | 0,05689          | $5,9975 \times 10^{-6}$ | -0,02780  | $2,6702 \times 10^{-3}$ | -0,03104   | -0,02212   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r variável           | 29                  | 5,69                    | A               | 0,05689          | $6,1024 \times 10^{-6}$ | -0,02769  | $2,6697 \times 10^{-3}$ | -0,03092   | -0,02200   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r variável     | 25                  | 4,96                    | A               | 0,04960          | $5,9072 \times 10^{-6}$ | -0,02743  | $4,5361 \times 10^{-4}$ | -0,03153   | -0,02673   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r variável     | 25                  | 4,96                    | A               | 0,04960          | $6,0047 \times 10^{-6}$ | -0,02731  | $4,5056 \times 10^{-4}$ | -0,03139   | -0,02665   |
| MSMC EGARCH (0,0) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r variável  | 10                  | 1,96                    | R               | 0,01961          | $1,7345 \times 10^{-6}$ | -0,03741  | $5,4128 \times 10^{-3}$ | -0,04736   | -0,03057   |
| MSMC EGARCH (0,0) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r variável  | 11                  | 2,16                    | R               | 0,02157          | $1,7760 \times 10^{-6}$ | -0,03722  | $5,5361 \times 10^{-3}$ | -0,04708   | -0,03044   |

Fonte: Elaboração própria.

O VaR médio foi colocado nas tabelas não só pela importância da medida de risco, mas também, por que a partir dela as instituições devem definir o capital requerido como garantia do risco de mercado (Equação (3.53)). Quanto menor o VaR, desde que ele não ultrapasse o limite de Kupiec, melhor. Por fim, as medidas do desvio padrão, o mínimo e máximo VaR são medidas que indicam o grau de variabilidade do VaR; o que não significa quanto menor a variabilidade, melhor. Na verdade é esperado que o VaR tenha uma variabilidade acompanhando as mudanças do valor da carteira, minimizando a possibilidade de superestimação do VaR.

Os resultados da Tabela 4.14 mostram que os modelos baseados na metodologia delta-normal não são eficientes para estimar o VaR da ação da Vale do Rio Doce PNA para o período em questão. Para o MSH apenas as técnicas tradicionais e *Mirror* cenários foram satisfatórias, onde *Mirror* cenários foi superior segundo o teste de Kupiec 2, mas a técnica tradicional apresentou um menor VaR médio, reduzindo o capital requerido.

Com relação aos modelos MSMC todos tiveram bons desempenhos, com exceção aos com volatilidade EGARCH. Em relação à função de perda o melhor modelo foi o VaR de Monte Carlo com volatilidade tradicional e com o modelo de Euler definindo a trajetória de preços e com média constante.

Com relação ao menor VaR, o melhor com tal característica foi o MSMC – GARCH modelo 2 (Milstein) e com  $\mu$  constante. De uma forma geral os melhores modelos formam a simulação histórica tradicional e o MSMC – GARCH modelo 2 com  $\mu$  constante.

No Apêndice 2 encontram-se os resultados de um ano do VaR da Vale do Rio Doce PNA, neste observa-se uma piora em relação à análise de 2 anos, já os melhores modelos foram o MSMC – EGARCH modelo 1 com  $\mu$  constante (igual a  $r$ ) e o MSH – *Bootstrap*, respectivamente em função da perda de Lopez 2 e da média.

No Apêndice 3 estão os resultados detalhados da Petrobrás PN e Apêndice 4 os resultados da Telemar PN. Na Tabela 4.16 encontra-se um quadro resumo com as melhores metodologias para as carteiras simples.

Tabela 4.16: Quadro resumo com melhores modelos de VaR estático para carteiras simples.

| Carteira         | Função de Perda               |                               | Menor VaR médio             |                              |
|------------------|-------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|------------------------------|
|                  | 255 observações               | 510 observações               | 255 observações             | 510 observações              |
| Vale do Rio Doce | MSMC EGARCH.<br>Mod. 1 r cte. | MSH<br><i>Mirror</i> cenários | MSH<br><i>Bootstrap</i>     | MSMC GARCH<br>Mod. 2 r cte.  |
| Petrobrás        | MSMC EGARCH<br>Mod. 1 r cte.  | MSH cenários<br>Ponderados    | MSMC trad.<br>Mod. 2 r var. | MSMC EGARCH<br>Mod. 2 r cte. |
| Telemar          | MSMC EGARCH<br>Mod. 1 r cte.  | MSH<br><i>Mirror</i> cenários | MSMC trad.<br>Mod. 2 r var. | MSMC trad.<br>Mod. 2 r cte.  |

Fonte: Elaboração própria.

Os resultados mostram que o VaR delta – normal não é adequado para as séries em análise. Em função disto, nas carteiras com mais ativos estes modelos não serão considerados, uma vez que quanto maior a quantidade de ativos menor a probabilidade de boas taxas de acerto dos modelos. Foi feita uma tentativa de melhorar o modelo delta-normal via a inclusão da análise com cenários de *stress*, entretanto este melhorou o modelo no máximo em 2%, resultado pouco satisfatório para modelos cujas taxas de acerto são de aproximadamente 50%.

A Tabela 4.16 mostra que os modelos MSH e MSMC são eficientes para determinar o VaR destas carteiras, no entanto, as metodologias MSH formam eficientes em poucos casos, enquanto o MSMC conseguiu cobrir uma gama maior de carteiras e situações. A diferença entre a análise de 1 e 2 anos reforça a idéia que um comportamento diferenciado das séries pode levar às diferenças na avaliação de risco. Entre os modelos MSMC o mais adequado foi o MSMC – EGARCH modelo 1 com média constante e igual à taxa de juros livre do risco.

Na Tabela 4.17 a seguir estão os melhores modelos de VaR aplicados às carteiras com dois e três ativos. Destaque para o *Mirror* cenários que foi o preferível para carteiras com dois ativos pelo critério da função de perda.



Tabela 4.17: Quadro resumo com os melhores modelos de VaR estático para carteiras com dois e três ativos.

| Carteira                               | Função de Perda                  | Menor VaR médio                       |
|--|----------------------------------|---------------------------------------|
| Vale do Rio Doce + Petrobrás           | MSH <i>Mirror</i><br>Cenários    | MSH <i>Mirror</i><br>Cenários         |
| Vale do Rio Doce + Telemar             | MSH <i>Mirror</i><br>Cenários    | MSMC GARCH<br>Mod. 2 r variável       |
| Telemar + Petrobrás                    | MSH <i>Mirror</i><br>Cenários    | MSMC tradicional<br>Mod. 2 r variável |
| Vale do Rio Doce + Telemar + Petrobrás | MSMC GARCH<br>Mod. 2 r constante | MSMC tradicional<br>Mod. 1 r variável |

Fonte: Elaboração própria.

A Figura 4.13 a seguir mostra um gráfico com os valores reais da carteira (em vermelho) e o VaR calculado segundo MSMC GARCH modelo 2 com r constante para a carteira com os três ativos. E na figura seguinte (4.14), o VaR segundo o *mirror* cenários para a carteira Telemar + Petrobrás.

Comparando-se as figuras é nítido que o VaR *mirror* cenários tem pouquíssima adaptatividade quando comparado com o MSMC.

Um detalhe relevante deve ser mencionado, não há um padrão de escolha dos modelos de VaR estáticos para as carteiras e períodos em questão, cada caso é um caso. E mais, os modelos com maiores taxas de eficiência explicativa<sup>65</sup> do VaR foram os MSMC com volatilidade EGARCH, com 85,71% e os MSMC - GARCH com 71%. Já o MSMC com volatilidade tradicional o patamar de eficiência ficou entre 57 e 71%; entre os modelos MSH o melhor desempenho foi do *mirror* cenários com 43%. Outra curiosidade é que na carteira Vale do Rio Doce PNA + Petrobrás PN os únicos modelos que atenderam ao teste de Kupiec com 95% de significância formam o MSH *mirror* cenários e os MSMC EGARCH com média variável.

<sup>65</sup> Definindo eficiência explicativa como a taxa de não rejeição do modelo pelo teste de Kupiec. Exemplo: o *mirror* cenários foi aceito em 3 das 7 carteiras, ou seja, 43% aproximadamente de eficiência explicativa.

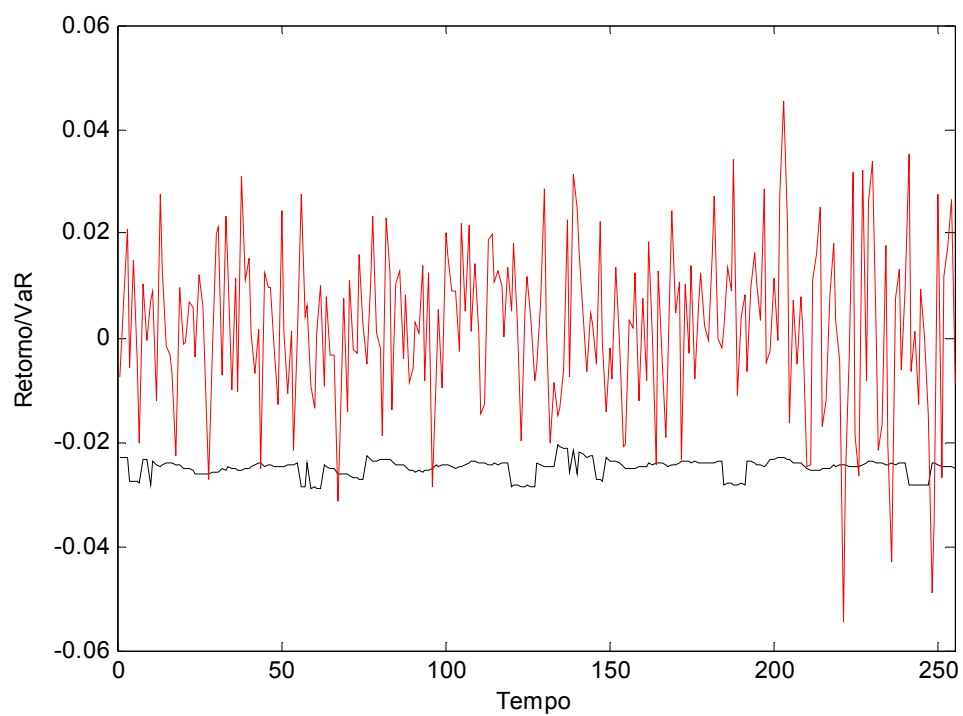


Figura 4.13: VaR de MSMC GARCH Modelo 2 com  $r$  constante para a carteira Vale do Rio Doce + Telemar + Petrobrás

Fonte: Elaboração própria.

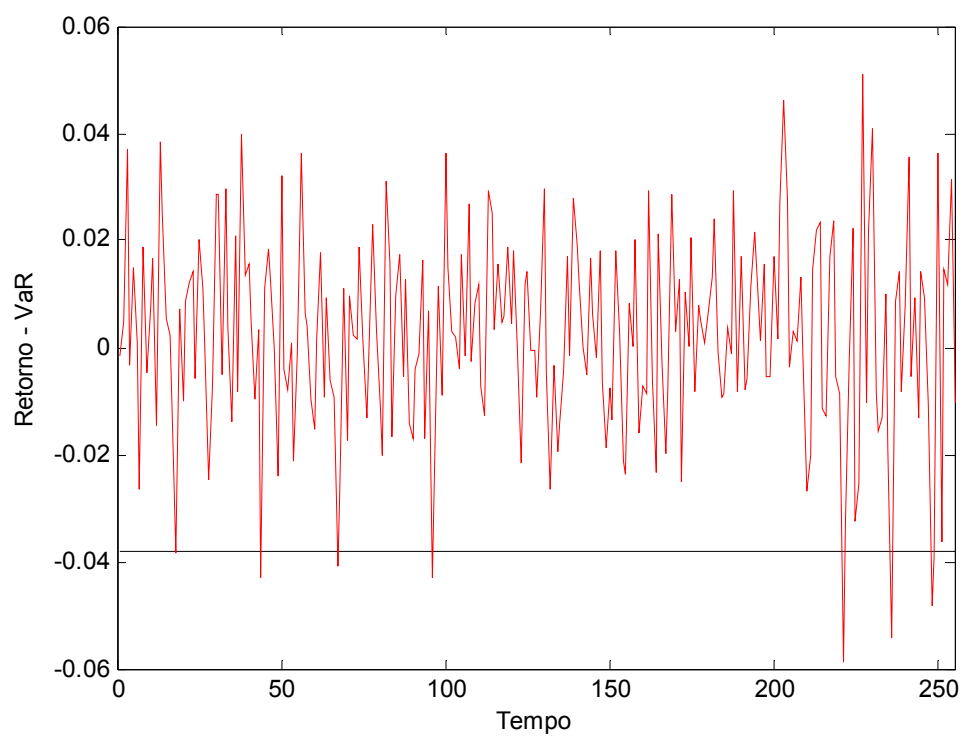


Figura 4.14: VaR de *mirror* cenários para a carteira Telemar + Petrobrás.

Fonte: Elaboração própria.

### 4.5.2 VaR Estático das Opções.

Os modelos de VaR para opções utilizados foram os métodos das gregas (como metodologia paramétrica) e o MSMC com volatilidade tradicional, com volatilidade GARCH e EGARCH. Os resultados completos encontram-se no Apêndice 6, para a metodologia das gregas seguiu-se o procedimento apresentado na Seção 3.4 e os modelos de MSMC a metodologia com a solução do modelo de precificação do ativo 1.

Os resultados mostraram que nenhum dos modelos de VaR estático foi satisfatório para as estratégias com opções em estudo, mostrando que a metodologia estática não é uma boa alternativa para a análise do VaR de opções do mercado brasileiro, assim sendo não será avaliado o VaR estático de carteiras mistas, já que não existe confiabilidade dos resultados em relação às opções.

## 4.6 O Value at Risk Dinâmico.

Os modelos estimados são os mesmos da abordagem estática, tanto para carteiras com ações, quanto para carteira com opções. A diferença fundamental está na natureza dinâmica das estimações. Todos os parâmetros do VaR diário são calculados via uma janela de observações de 255 dias móveis, ou seja, diariamente uma nova informação é adicionada à janela e a informação mais antiga é desprezada.

### 4.6.1 VaR Dinâmico das Ações.

A Tabela 4.18 a seguir apresenta um resumo com os melhores modelos para carteiras simples com metodologia dinâmica, cujos resultados completos estão nos Apêndices 7, 8 e 9. Na tabela é evidente a adequação dos modelos de Monte Carlo para tais carteiras (ou ativos simples), onde os modelos heterocedásticos segundo a modelagem tipo 2 e com o  $r$  variável mostraram os menores valores de VaR médio. Já quando o critério é a função de perda o resultado não é homogêneo, os modelos Monte Carlo heterocedástico simétrico, o de simulação histórica com *mirror* cenários e o MSMC tradicional foram preferíveis respectivamente para a Vale, a Petrobrás e a Telemar.

Tabela 4.18: Quadro resumo com os melhores modelos de VaR dinâmico para carteiras simples.

| Carteira             | Função de Perda          | Menor VaR médio         |
|----------------------|--------------------------|-------------------------|
| Vale do Rio Doce PNA | MSMC GARCH               | MSMC EGARCH             |
|                      | Mod. 1 com $r$ constante | Mod. 2 com $r$ variável |
| Petrobrás PN         | MSH <i>Mirror</i>        | MSMC EGARCH             |
|                      | Cenários                 | Mod. 2 $r$ variável     |
| Telemar PN           | MSMC tradicional         | MSMC GARCH              |
|                      | Mod. 1 com $r$ variável  | Mod. 2 $r$ variável     |

Fonte: Elaboração própria.

Os resultados mostram que mesmo com um ajuste dinâmico dos dados os modelos delta-normal não tiveram bons resultados (mesmo com a análise de *stress*).

Quanto a carteiras com dois e três ativos, os resultados mostram que o comportamento individual do ativo é diferente caso ele esteja inserido numa carteira, isto pode ser observado com as ações da Vale do Rio Doce e da Petrobrás. Para cada ativo individualmente, o modelo que apresenta o menor VaR médio é o MSMC EGARCH, no entanto, para uma carteira com estas duas ações igualmente divididas o melhor modelo é o MSH tradicional.

A Tabela 4.19 mostra os melhores modelos para as carteiras duplas e triplas, dois aspectos devem ser ressaltados: o primeiro é relacionado com o método de *bootstrap*, a única carteira onde este modelo não foi rejeitado pelo teste de Kupiec foi exatamente a que ele se apresentou como a melhor opção pelo critério do VaR médio (a Telemar mais a Petrobrás); o segundo aspecto é que o modelo MSMC EGARCH tipo 2 e 1 com  $r$  variável teve um resultado muito próximo ao do MSH tradicional na Vale do Rio Doce + Petrobrás.

Tabela 4.19: Quadro resumo com os melhores modelos de VaR dinâmico para carteiras com dois e três ativos.

| Carteira                               | Função de Perda    | Menor VaR médio   |
|--|--------------------|-------------------|
| Vale do Rio Doce + Petrobrás           | MSMC GARCH         | MSH               |
|  | Mod. 1 r constante | Tradicional       |
| Vale do Rio Doce + Telemar             | MSMC GARCH         | MSH               |
|  | Mod. 1 r constante | Tradicional       |
| Telemar + Petrobrás                    | MSMC Tradicional   | MSH               |
|  | Mod.1 r constante  | <i>Bootstrap</i>  |
| Vale do Rio Doce + Telemar + Petrobrás | MSH <i>Mirror</i>  | MSMC EGARCH       |
|  | Cenários           | Mod. 1 r variável |

Fonte: Elaboração própria.

Houve uma elevação da taxa de capacidade explicativa dos modelo, os modelos MSH tradicional e *mirror* cenários, MSMC GARCH (todos os tipos), MSMC tradicional r constante e MSMC EGARCH r variável, tiveram 100% de eficiência. E os modelos MSMC tradicional r variável e MSMC EGARCH r constante, 85,71%; os demais não tiveram resultados satisfatórios.

A Figura 4.15 mostra os valores reais da carteira da Vale do Rio Doce + Telemar (em vermelho), bem como o VaR MSMC GARCH modelo tipo 1 com r constante (em verde) e MSH tradicional (em preto). Observa-se uma relativa adaptatividade dos modelos de VaR de MSMC aos valores reais da carteira.

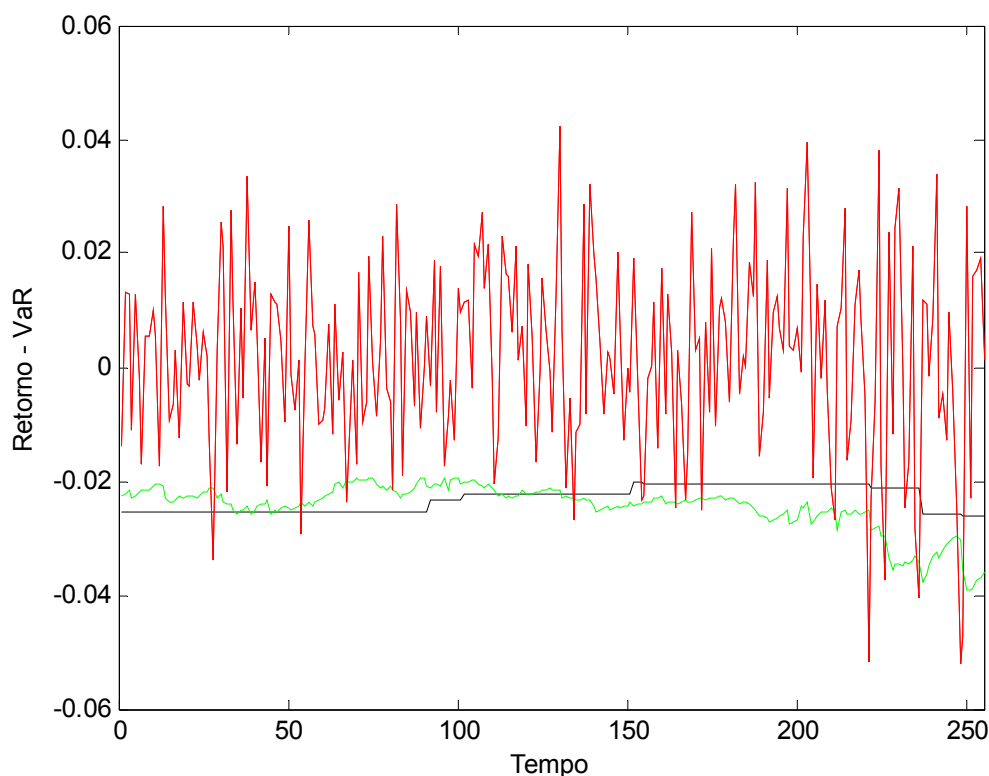


Figura 4.15: VaR de MSMC GARCH Modelo com  $r$  constante e MSH tradicional para a carteira Vale do Rio Doce + Telemar.

Fonte: Elaboração própria.

#### 4.6.2 VaR Dinâmico das Opções e Carteira Hedgeada.

Os resultados do VaR dinâmico para as carteiras com opções estão no Apêndice 11. A exemplo do modelo paramétrico delta-normal para ações, o VaR paramétrico delta-gama também não foi suficientemente explicativo, mesmo com a modelagem dinâmica. Já com os modelos não paramétricos MSMC houve melhoras.

Das três carteiras de opções a única com bons resultados foi a carteira borboleta vendida, apenas os modelos MSMC tradicional e GARCH com  $r$  variável não foram aprovados pelo teste de Kupiec. Na carteira call ratio o único modelo aprovado foi o modelo MSMC EGARCH com  $r$  constante. Nas demais carteiras o VaR foi sub estimado.

Nas Figuras 4.16 e 4.17 (em preto o VaR) a seguir, é observado uma razoável adaptabilidade do VaR MSMC GARCH com  $r$  constante à variação do retorno das carteiras, apesar do VaR não apresentar um resultado satisfatório.

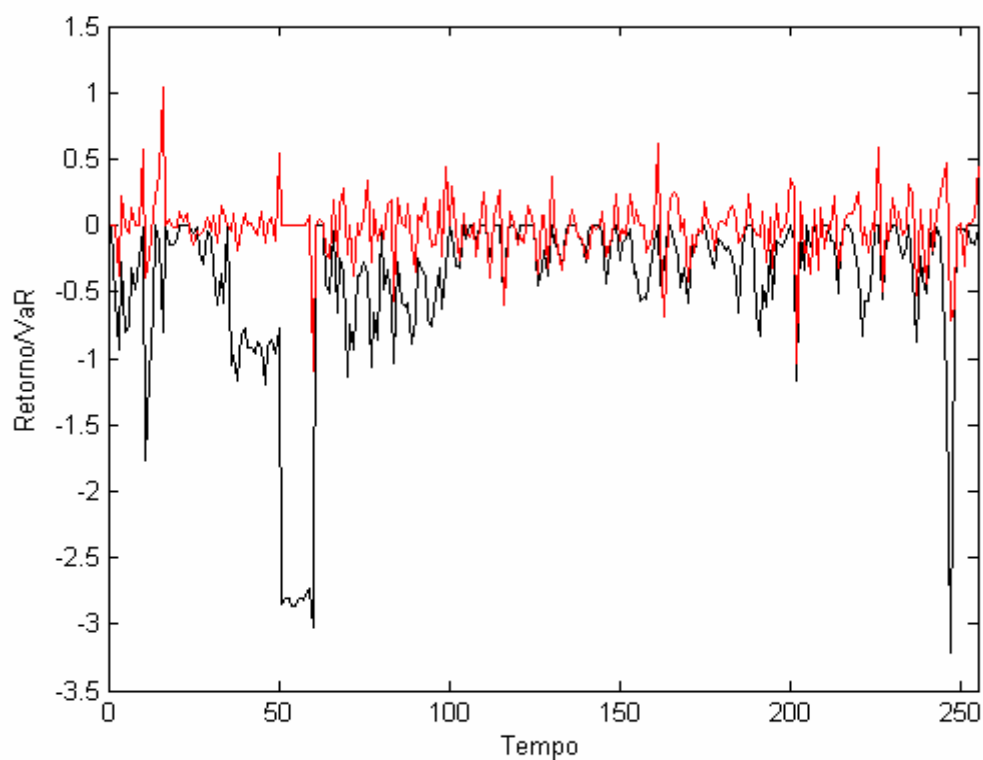


Figura 4.16: VaR MSMC GARCH com  $r$  constante para a carteira de opções *call ratio*.

Fonte: Elaboração própria.

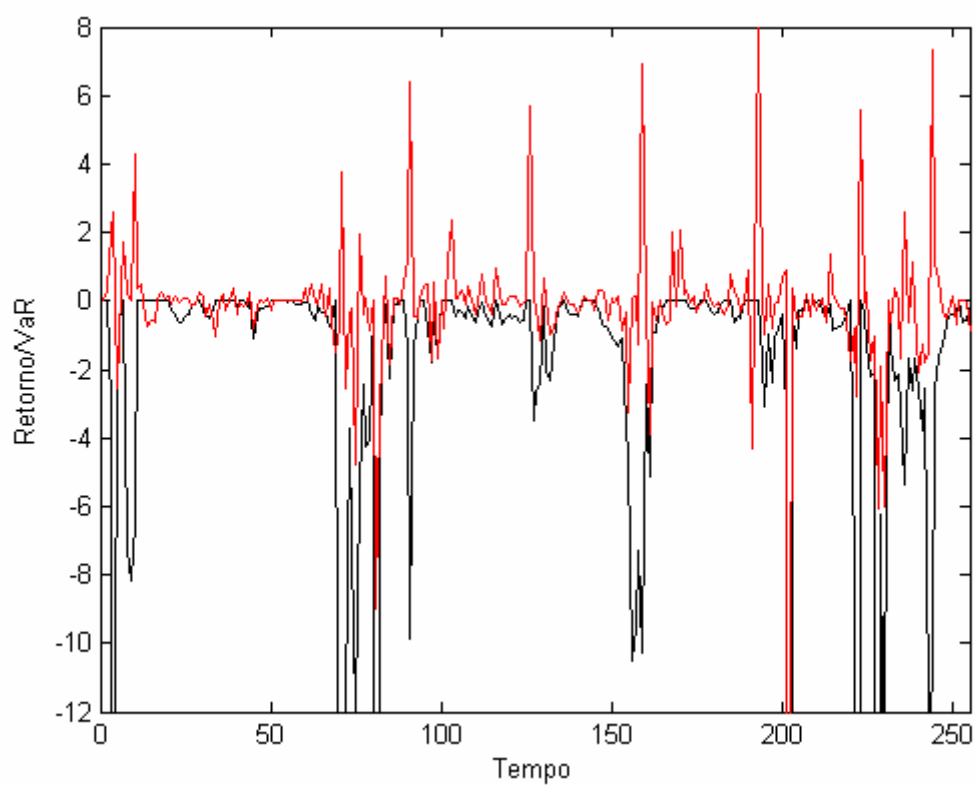


Figura 4.17: VaR MSMC GARCH com  $r$  constante para a carteira borboleta comprada.

Fonte: Elaboração própria.

A Figura 4.18 mostra a eficiência e capacidade de adaptação do VaR MSMC GARCH com  $r$  constante à dinâmica da carteira borboleta vendida. No entanto, a eficiência do VaR é contraditória com os resultados das demais carteiras. Todas as carteiras de opções são formadas pelos mesmos ativos, apenas a proporção destes é diferente. Uma análise mais detalhada deste fenômeno será apresentada na próxima seção.

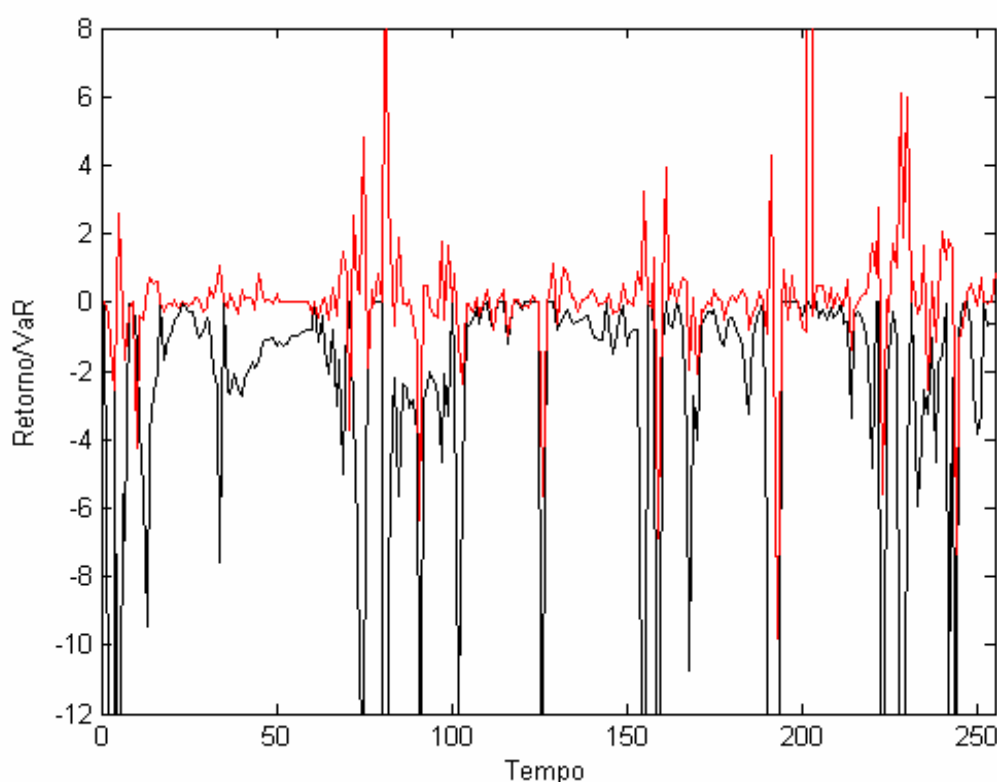


Figura 4.18: VaR MSMC GARCH com  $r$  constante para a carteira de opções borboleta vendida.

Fonte: Elaboração própria.

O resultado da carteira *hedgeda* é semelhante ao da carteira borboleta vendida, indicando que o bom desempenho do VaR pode ser motivado por uma escolha “adequada” da proporção dos ativos. A Figura 4.19 mostra que apesar do resultado o VaR MSMC GARCH com  $r$  constante não é adaptativo, assim sendo o VaR é super estimado e uma instituição que utilize esta metodologia estará alocando recursos acima da real necessidade.



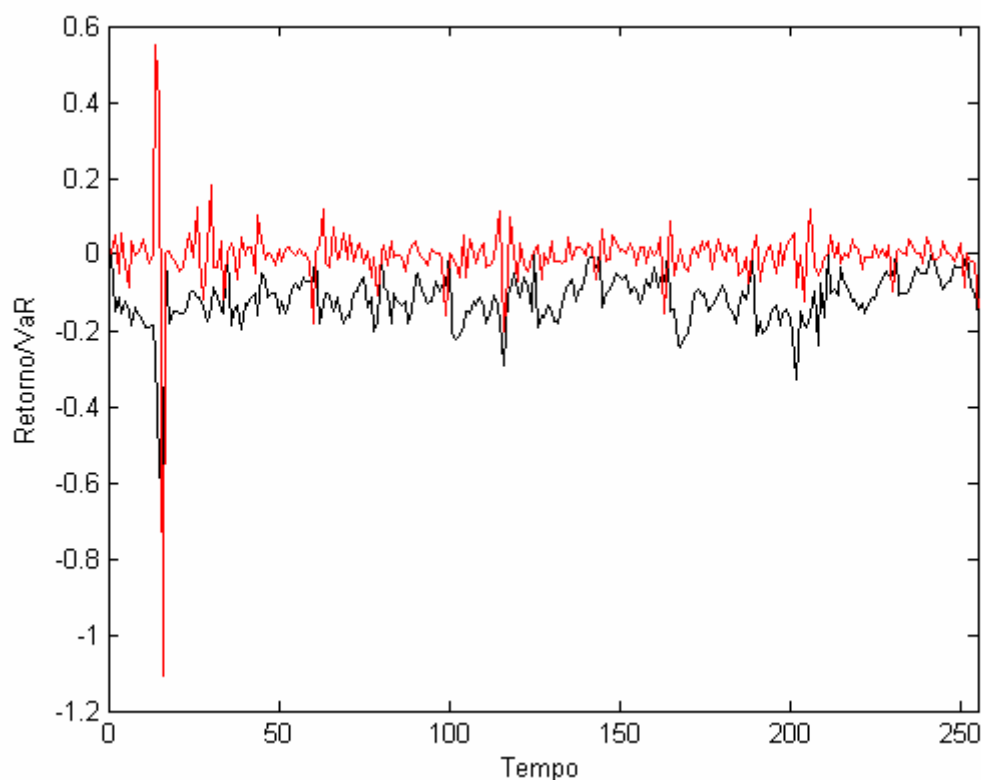


Figura 4.19: VaR MSMC GARCH com  $r$  constante para a carteira *hedge* delta neutro da Telemar.

Fonte: Elaboração própria.

## 4.7 Análise dos Resultados

Uma análise dos resultados passa necessariamente por uma comparação dos resultados obtidos, seja com diferentes modelos de volatilidade, seja com modelos de precificação dos ativos ou frequência de ajuste dos parâmetros. A primeira avaliação é sobre a capacidade dos modelos paramétricos e não paramétricos em capturar o risco do mercado acionário brasileiro.

Os modelos paramétricos tiveram resultados aquém daqueles obtidos por trabalhos com ações de mercados mais desenvolvidos como Ammann e Reich (2001), mas igualmente insatisfatórios como no trabalho de Pichler e Selitsch (1999). No caso do mercado brasileiro os resultados estão coerentes com os achados por Bezerra (2001). Em suma, pelo menos para o período de análise e para as ações e carteiras estudadas o VaR baseado nas técnicas delta-normal não são satisfatórios, tanto para a técnica estática quanto a dinâmica.

Quanto aos modelos não paramétricos os resultados foram de uma forma geral satisfatórios. Em particular a metodologia de simulação histórica com a sistemática estática

não conseguiu acompanhar a dinâmica dos ativos. Houve uma melhora quando a amostra passou para 510 observações, incorporando um período de relativa estabilidade. Ao permitir um ajuste diário, o MSH nas modalidades tradicional e de *mirror* cenários se ajustaram bem à dinâmica de retorno das carteiras.

O modelo *mirror* cenários foi superior, pelo critério da função de perda 2, ao MSH tradicional. Corroborando com um jargão comum no mundo dos investimentos “rentabilidade passada não é garantia de ganhos futuros”, no entanto, o desempenho passado pode ser utilizado para balizar o futuro e se este balizamento utilizar o comportamento da série mas abrindo mão da tendência incutida nos dados esperam-se resultados melhores.

Com relação aos cenários ponderados um maior peso dos fatores de risco passados pode melhorar o desempenho. Neste trabalho o evento mais recente teve peso 255 e o mais antigo 1, os eventos intermediários uma combinação linear dos extremos. Na Figura 4.20 a seguir, os maiores valores locais do VaR estão próximos das maiores perdas reais locais, mas defasados, sendo esta a maior crítica ao MSH com cenários ponderados.

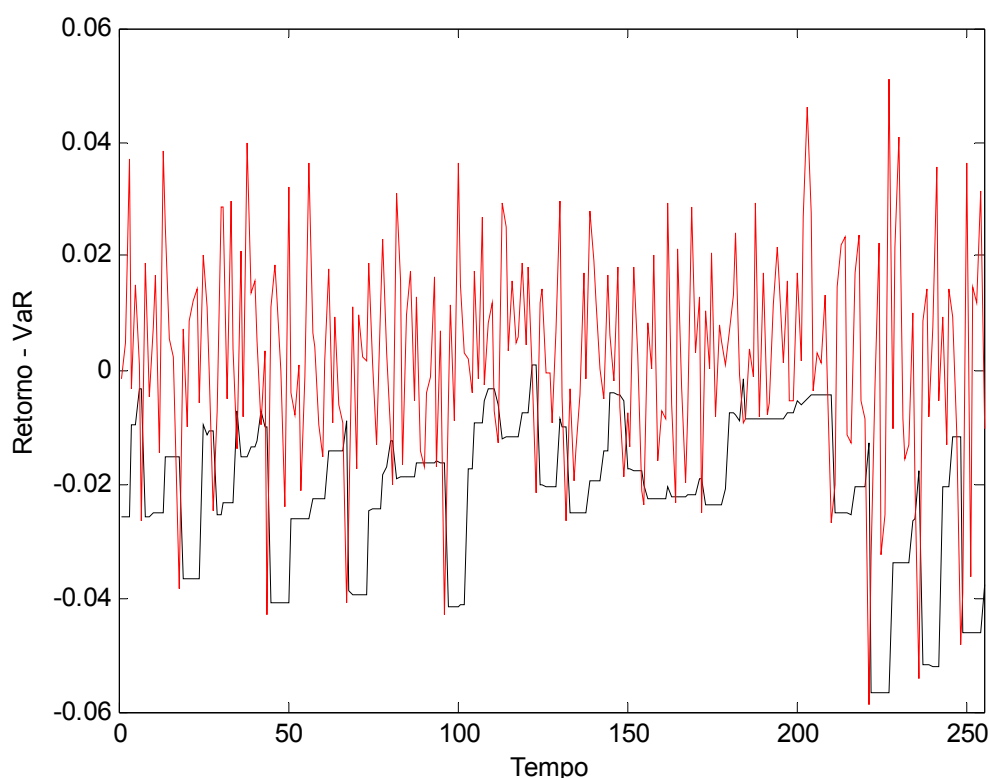


Figura 4.20: VaR MSH cenários ponderados para a carteira Petrobrás + Telemar.

Fonte: Elaboração própria.

Os modelos de simulação de Monte Carlo foram os que obtiveram melhores resultados sob qualquer situação. Entretanto, como já foi afirmado, com a sistemática dinâmica a

capacidade explicativa do VaR teve um aumento significativo. Os resultados quando se utiliza o modelo tipo 1 ou 2 são coerentes com os resultados esperados: o modelo tipo 1 aproxima-se mais da distribuição real, tendendo a um menor valor da função de perda; enquanto que o modelo tipo 2 ao se afastar da função de perda fornece um menor VaR médio. A relação função de perda x VaR médio deve ser avaliada em função do objetivo do VaR. Para uma instituição financeira, por exemplo, o modelo tipo 2 é mais adequado.

Uma segunda mudança aos modelos padrões de Monte Carlo foi a incorporação de tendências aos modelos. Os resultados mostram que não há melhoras nos resultados das funções de perdas, apesar de haver uma redução no VaR médio.

Com relação aos modelos de volatilidade a análise prévia indicava que os ativos vale5 e tnlp4 teriam melhores resultados com modelos GARCH, enquanto que a petr4 teria com modelos de volatilidade EGARCH. Na tabela abaixo estão indicados os melhores modelos em função da forma de estimar a volatilidade para grupos de avaliação estática x dinâmica e tendências constantes x variáveis.

Os resultados mostram que apenas a Vale do Rio Doce (e suas carteiras derivadas) tiveram resultados coerentes com o esperado (conforme Seção 4.2) e que o comportamento individual do ativo nem sempre é o mesmo quando este está num contexto de uma carteira. Há uma maior coerência dos resultados em função da análise prévia do comportamento da heterocedasticidade quando a situação é dinâmica.

Tabela 4.20: Melhores modelos de VaR para as carteiras de ações em função da volatilidade.

| Carteira                                     | Volatilidade | Simulação estática |          | Simulação dinâmica |          |
|--|--------------|--------------------|----------|--------------------|----------|
|  |              | Constante          | Variável | Constante          | Variável |
| Vale do Rio Doce                             | Tradicional  |                    | X        |                    |          |
|  | GARCH        |                    |          | X                  | X        |
|  | EGARCH       | X                  |          |                    |          |
| Petrobrás                                    | Tradicional  |                    | X        | X                  | X        |
|  | GARCH        |                    |          |                    |          |
|  | EGARCH       | X                  |          |                    |          |
| Telemar                                      | Tradicional  |                    | X        |                    | X        |
|  | GARCH        |                    |          |                    |          |
|  | EGARCH       | X                  |          | X                  |          |
| Vale do Rio Doce +<br>Petrobrás              | Tradicional  |                    |          |                    |          |
|  | GARCH        |                    |          | X                  | X        |
|  | EGARCH       |                    | X        |                    |          |
| Vale do Rio Doce +<br>Telemar                | Tradicional  |                    |          |                    |          |
|  | GARCH        |                    | X        | X                  | X        |
|  | EGARCH       | X                  |          |                    |          |
| Petrobrás +<br>Telemar                       | Tradicional  |                    |          | X                  | X        |
|  | GARCH        | X                  | X        |                    |          |
|  | EGARCH       |                    |          |                    |          |
| Vale do Rio Doce +<br>Petrobrás +<br>Telemar | Tradicional  |                    |          |                    |          |
|  | GARCH        | X                  | X        | X                  | X        |
|  | EGARCH       |                    |          |                    |          |

Fonte: Elaboração própria.

Por fim, a comparação entre análise estática x dinâmica. Comparando-se um a um, em relação ao teste de Kupiec e da função de perda 2, nos modelos de VaR estáticos com os seus equivalentes dinâmicos, encontram-se 80 resultados favoráveis ao VaR dinâmico contra apenas 49 ao VaR estático. Em termos de capacidade explicativa apenas os modelos dinâmicos MSMC GARCH tiveram 100% de eficiência.

Diante do apresentado acima, a melhor alternativa às carteiras objetos do estudo é o VaR MSMC com volatilidade GARCH (1,1) modelo tipo 1 com  $r$  constante e igual à taxa de

juros livre de risco com ajustes dinâmicos. As demais alternativas de volatilidade também constituem boas alternativas, mas com menor poder explicativo.

Os resultados também servem para testar se o *Value at Risk* é uma medida de risco coerente para o mercado de ações em questão. A Tabela 4.21 mostra os resultados do VaR médio e indicam que o VaR dinâmico calculado obedece ao axioma da subaditividade.

Tabela 4.21: Quadro indicativo da coerência do VaR como medida de risco

|                       | VaR (A+B+C) | VaR A + VaR B + VaR C |
|-----------------------|-------------|-----------------------|
| Vale5 + Petr4         | -0,02565    | -0,02668              |
| Vale5 + Tnlp4         | -0,02451    | -0,02988              |
| Petr4 + Tnlp4         | -0,02913    | -0,03052              |
| Vale5 + Petr4 + Tnlp4 | -0,02211    | -0,02903              |

Fonte: Elaboração própria.

O bom desempenho do MSMC dinâmico sem incorporar variações ao modelo (4.2) mostra que o mercado das ações da Vale do Rio Doce PNA, da Petrobrás PN e da Telemar PN é eficiente, visto que o modelo (4.2) é baseado no conceito de mercado eficiente.

A Definição 2.4 de Fama et al (1969) afirma que mercado eficiente é aquele que se adequa rapidamente às novas informações. A forte volatilidade do mercado brasileiro mostra que os preços dos ativos ajustam-se às informações por meio das expectativas dos agentes econômicos. A questão é modelar o termo “rapidamente” de Fama, tarefa feita neste trabalho com o ajuste diário do VaR.

Com a informação precisa do risco e do retorno esperado, um agente econômico diante de suas preferências bem definidas (grau de aversão ao risco) tem informações suficientes para trilhar num ambiente de incerteza.

Para as carteiras com opções os resultados não foram satisfatórios segundo o teste de Kupiec para o VaR estático. Já para o VaR dinâmico a carteira borboleta vendida teve os VaRs MSMC<sup>66</sup> aprovados no teste de Kupiec e as demais carteiras reprovadas.

Uma avaliação criteriosa das Figuras 4.16, 4.17 e 4.18 indica que de uma forma geral houve uma correlação entre o valor real das carteiras e os VaRs MSMC destas. Demonstra que o VaR, apesar de ineficiente, tem um comportamento atrelado ao valor das carteiras.

Com relação ao *hedge* não há uma correlação entre o VaR e o retorno da carteira, no entanto, como não há problemas com relação à modelagem do ativo objeto ao se identificar

<sup>66</sup> Menos os MSMC tradicional e GARCH com  $r$  variável.

uma alternativa de especificação do modelo da opção há uma possibilidade de ajustamento do VaR de *hedge* delta-neutro.

Os resultados obtidos com as carteiras com opções estão de acordo com o trabalho de Araújo et al (2004)<sup>67</sup>, no qual todas as carteiras foram reprovadas.

Diante do apresentado não se pode afirmar que o mercado de opções da Telemar é eficiente. Porém, o motivo da não conclusão pode está atrelado à má modelagem do VaR para ativos não lineares brasileiros. Uma investigação deste aspecto será objeto da próxima seção.

#### **4.8 Ajustes Metodológicos à Precificação de Opções.**

As Figuras 4.16, 4.17 e 4.18 mostram que o VaR, apesar de não eficiente, apresenta capacidade adaptativa à série real. A Figura 4.18 é uma prova deste fato, sugerindo que uma melhora na precificação das opções brasileiras é uma possibilidade para a adequação do VaR.

A análise de Black e Scholes afirma que o prêmio de uma opção européia é função do valor do ativo objeto, do tempo até o vencimento, da volatilidade, do preço de exercício e da taxa de juros livre de risco. Entretanto, para o caso da Telemar no período de estudo, o comportamento também depende de outro fator: do comportamento histórico das opções. A figura a seguir ilustra este fato, é um gráfico com o valor real da opção dentro do dinheiro e o valor da opção calculado segundo a Equação (4.2), em vermelho o valor real do ativo.

---

<sup>67</sup> Apesar do VaR da carteira borboleta comprada ter sido reprovado foi o que teve o melhor resultado.

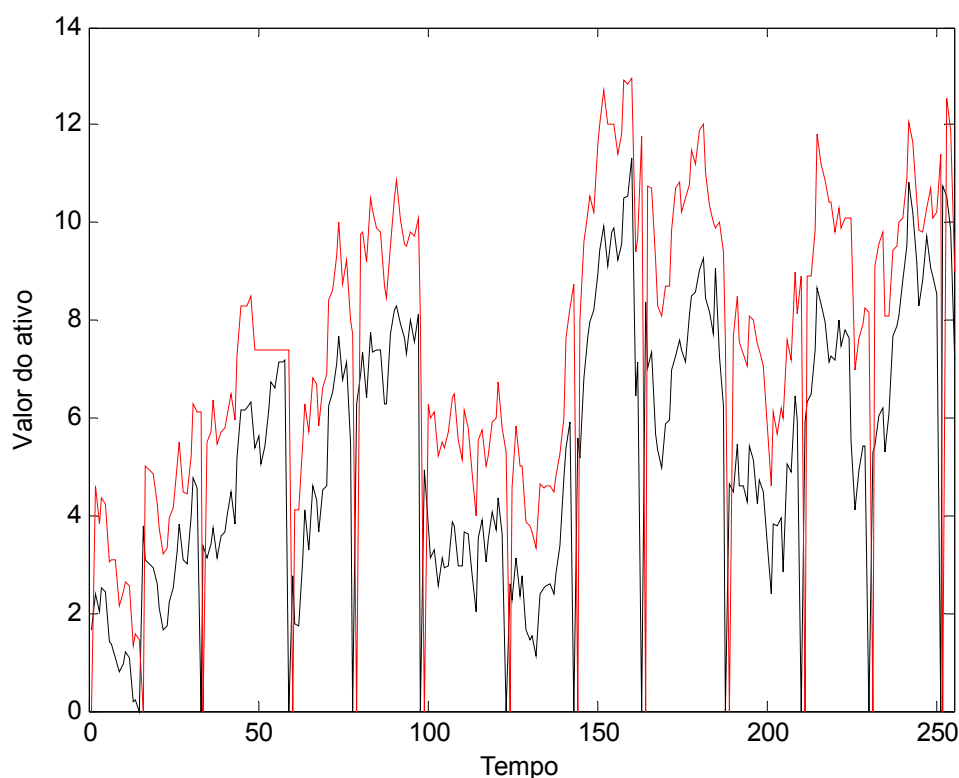


Figura 4.21: Valor real da opção dentro do dinheiro versus valor calculado.

Fonte: Elaboração própria.

O valor real da opção é maior que o calculado, mas esta diferença segue um comportamento que pode ser definido como um prêmio ao risco. Apesar do valor esperado menor que o valor real os investidores estão dispostos a pagar pela diferença por razões inerentes ao hábito de jogar ou falta de conhecimento sobre o derivativo em questão.

A avaliação mais simples do prêmio ao risco é obtida via a regressão representada pela Equação (4.5) abaixo. Nesta o prêmio de risco tem dois componentes, o primeiro representado por “a” é a expectativa atrelada ao valor esperado e “b” o prêmio de risco mínimo pago, independente do valor do ativo objeto e do preço de exercício da opção.

$$C = a(\max(S - K, 0)) + b \quad (4.5)$$

Foi mantida para a regressão a janela móvel de um ano para incorporar mudanças estruturais e a avaliação foi baseada no menor valor da estatística a seguir:

$$\frac{\sum_{i=1}^{255} (C_{real,i} - C_{calc,i})^2}{255} \quad (4.6)$$

Há três possibilidades:  $a = 1$ ,  $b = 0$  ou sem restrições aos parâmetros. O método para estimação destes parâmetros foi o método dos mínimos quadrados ordinários. A avaliação foi realizada para cada opção nas posições compradas e vendidas. Para as opções dentro do dinheiro a melhor alternativa foi o modelo sem restrições, já a opção no dinheiro a melhor alternativo foi com  $b = 0$  para a posição comprada, já para as posições vendidas  $a = 1$ . O valor médio dos parâmetros “a” foram 0,76 e 1,72 e para o parâmetro “b” 2,89 para respectivamente para a opção dentro do dinheiro e no dinheiro e  $a = 0,76$ ;  $a = 1$ ;  $b = 1,61$  e  $b = 1,89$  nas posições vendidas.

Para as opções fora do dinheiro não há sentido em calcular o prêmio de risco, visto que o valor médio tanto da opção calculada quanto a real é próximo de zero.

Os resultados para as carteiras *call ratio*, borboleta comprada, borboleta vendida e do *hedge* delta neutro estão na Tabela 4.22. Na Figura 4.22 abaixo uma representação do resultado para a carteira borboleta vendida.

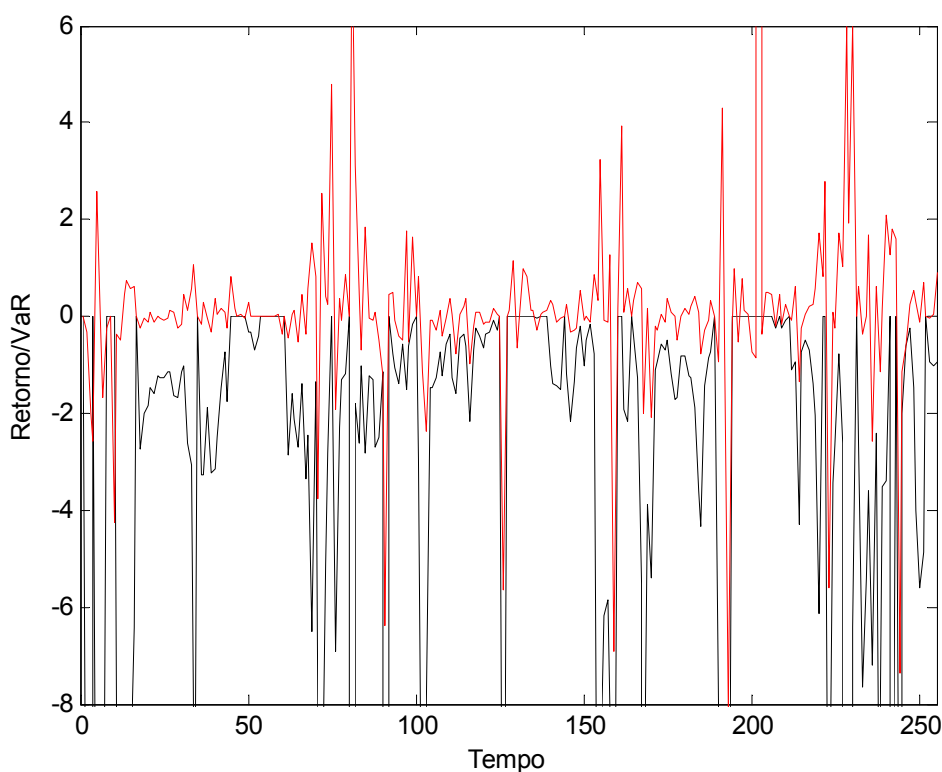


Figura 4.22: VaR MSMC GARCH dinâmico para a carteira borboleta vendida.

Fonte: Elaboração própria.



Tabela 4.22: VaR dinâmico ajustado para carteiras com opções.

|                | Metodologia                               | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|----------------|---|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|-------------------|------------|------------|
| Call ratio     | MSMC Tradicional com r constante          | 8                   | 3,14                    | A               | 0,03676          | 0,0054                  | -0,6935   | 0,9313            | -8,3606    | 0,0000     |
|                | MSMC GARCH (0,0) (1,1) com r constante    | 11                  | 4,31                    | A               | 0,04887          | $5,7356 \times 10^{-3}$ | -0,6694   | 0,9174            | -8,2588    | 0,0000     |
|                | MSMC EGARCH (0,0) (1,1,1) com r constante | 14                  | 5,49                    | A               | 0,06018          | $5,2776 \times 10^{-3}$ | -0,6824   | 0,93456           | -8,2762    | 0,0000     |
| Borb. comprada | MSMC Tradicional com r constante          | 31                  | 12,16                   | R               | 0,23539          | 0,11382                 | -3,2250   | 10,8480           | -117,1400  | 0,0000     |
|                | MSMC GARCH (0,0) (1,1) com r constante    | 32                  | 12,55                   | R               | 0,24108          | 0,11559                 | -3,1233   | 10,7580           | -116,1800  | 0,0000     |
|                | MSMC EGARCH (0,0) (1,1,1) com r constante | 27                  | 10,59                   | R               | 0,34218          | 0,23630                 | -3,6159   | 10,3700           | -119,3700  | 0,0000     |
| Borb. vendida  | MSMC Tradicional com r constante          | 14                  | 5,49                    | A               | 0,14467          | 0,08977                 | -4,3828   | 11,2380           | -130,4500  | 0,0000     |
|                | MSMC GARCH (0,0) (1,1) com r constante    | 16                  | 6,27                    | A               | 0,16992          | 0,10718                 | -4,2882   | 11,1750           | -129,9600  | 0,0000     |
|                | MSMC EGARCH (0,0) (1,1,1) com r constante | 19                  | 7,45                    | A               | 0,23778          | 0,16327                 | -4,1187   | 10,7280           | -129,3300  | 0,0000     |
| Delta neutro   | MSMC Tradicional com r constante          | 19                  | 7,45                    | A               | 0,07497          | $4,6101 \times 10^{-4}$ | -0,1047   | 0,07653           | -0,5921    | 0,0000     |
|                | MSMC GARCH (0,0) (1,1) com r constante    | 20                  | 7,84                    | A               | 0,07941          | $9,8403 \times 10^{-4}$ | -0,1042   | 0,08254           | -0,6988    | 0,0000     |
|                | MSMC EGARCH (0,0) (1,1,1) com r constante | 17                  | 6,67                    | A               | 0,06746          | $7,9601 \times 10^{-4}$ | -0,1024   | 0,07873           | -0,6727    | 0,0000     |

Fonte: Elaboração própria.

Os resultados para as estratégias com opções mostram que o ajuste do modelo promoveu uma melhora significativa nos resultados, sem perda de aderência do modelo. No entanto, os ajustes não foram suficientes para que a estratégia borboleta comprada tivesse um VaR eficiente. Houve melhora discreta no modelo para esta carteira, mas não o suficiente para que o VaR pudesse ser considerado eficiente a 5% de significância.

Com relação à redução de risco esperada em relação à carteira não hedgeada, isto não aconteceu, contrariando a expectativa de redução do risco com a carteira hedgeada. O que sugere que o hedge delta-neutro não é uma boa forma para reduzir o risco no mercado brasileiro.

Entre os modelos o que mais se adequou às séries em estudo foi o MSMC com a volatilidade tradicional por possuir um menor valor da perda de Lopez 2, entretanto para a estratégia borboleta vendida a melhor alternativa, segundo os critérios da perda de Lopez 2, foi o modelo com volatilidade EGARCH.

Apesar da melhora dos resultados em função dos ajustes não se pode afirmar que estes foram suficientes para justificar sua utilização, entretanto, tal análise não invalida o conceito incorporado na teoria das opções brasileiras, o prêmio ao risco pago pelos investidores brasileiros. Inclusive tal prêmio é um dos motivos para a ineficácia do *hedge* delta-neutro para minimização do risco.

## 5 CONCLUSÕES

O objetivo principal deste trabalho foi analisar e estimar o risco de mercado via o *Value at Risk* (VaR) de carteiras de ações, opções e hedge do mercado brasileiro e verificar qual o VaR mais adequado às carteiras. Os resultados mostraram que o VaR dinâmico se adapta melhor à dinâmica do mercado e que as análises paramétricas não são suficientes para gerenciar o risco. Entre as técnicas não paramétricas, as que mais se adequaram foram as simulações de Monte Carlo (MSMC), notadamente com volatilidade GARCH.

Dentre as principais conclusões deste trabalho, temos:

1. Os preços das ações analisadas seguem o processo estocástico de Itô, logo há evidências que o mercado das ações estudadas, pelo menos para o período em análise, é eficiente. Com a alta volatilidade do mercado, faz-se necessário modelos que incorporem com rapidez as novas informações implícitas nos preços.

A formulação inicial do processo estocástico de Itô não precisou de ajuste, visto que o mercado acionário brasileiro possui algum grau de desenvolvimento. Foi necessária apenas uma releitura dos principais conceitos econômicos básicos que norteiam o gerenciamento de risco, visando identificar lacunas na literatura aplicadas a mercados emergentes.

O primeiro aspecto econômico sob o qual é baseado o modelo do VaR é a eficiência de mercado no sentido de Fama. Para o mercado brasileiro não há evidências empíricas conclusivas na literatura a este respeito. Boa parte dos trabalhos utilizam o conceito do caminho aleatório para verificar a eficiência de mercado.

Um dos argumentos da eficiência de mercado de Fama é que as informações disponíveis são rapidamente incorporadas aos mercados. Neste trabalho as informações foram incorporadas ao modelo com atraso máximo de um dia. Logo, as mudanças das expectativas dos agentes econômicos indicados nos preços dos ativos, faziam parte do modelo numa análise de investimentos técnica. Tais modelos foram chamados de modelos de VaR dinâmicos pois, não só novos parâmetros eram incorporados, mas novas estimações eram realizadas, sejam da volatilidade, processo de Wiener, ou do próprio VaR.

Os resultados mostraram um ganho da capacidade explicativa para os MSMC de 71% na análise estática com volatilidade GARCH para 100% na análise dinâmica. Além de

uma redução do VaR médio de 10% para a carteira  $\text{vale5}+\text{petr4}+\text{tnlp4}$ , reduzindo desta forma o requerimento de capital como garantia do risco de mercado.

2. Os modelos heterocedásticos de volatilidade condicional adequaram-se bem às ações, no entanto, não houve diferenças significativas nos resultados em função da utilização de modelos assimétricos de volatilidade.

Os testes de assimetria indicaram o modelo EGARCH como o ideal para a carteira Petrobrás PN. Mas não houve resultados conclusivos do VaR sobre a superioridade da volatilidade EGARCH para esta carteira.

Já para carteiras com 2 ou 3 ativos, onde um deles é a Petrobrás PN, o modelo EGARCH não foi o mais adequado. De uma forma geral os modelos GARCH foram os que apresentaram os melhores desempenhos. Dentre estes os preferidos foram os parcimoniosos.

3. Os modelos paramétricos tiveram desempenhos inferiores aos modelos não paramétricos (de simulação). A suposição que a distribuição dos retornos é normalmente distribuída, não teve suporte empírico para as séries estudadas. De uma forma geral, todos os modelos paramétricos foram rejeitados.

Os modelos não paramétricos com volatilidade padrão não tiveram resultados inferiores significativamente ao da volatilidade GARCH a ponto de se rejeitar tais modelos, indicando que um modelo paramétrico, mesmo com a suposição de distribuição normal dos retornos, mais sofisticado com capacidade de capturar mais fatores de risco podem ter resultados satisfatórios.

4. Os modelos de precificação de Black & Scholes não foram adequados às opções em estudo. Aparentemente o investidor utiliza o mercado de opções brasileiro como um jogo de sorte, cujas expectativas estão baseadas mais no aspecto emocional que racional. Assim sendo, ajustes na análise de Black & Scholes são relevantes para incorporar tais características.

A análise dinâmica, apesar de melhorar o desempenho, não foi suficiente às carteiras de opções. A justificativa neste trabalho é que o modelo de Black & Scholes não funciona, pelo menos na forma originalmente proposta, no mercado brasileiro de opções de compra da Telemar PN no período estudado.

No modelo do B&S foi incluído um novo conjunto de informações: os preços dos prêmios das opções<sup>68</sup>. Este novo conjunto de informações traz as expectativas dos agentes que participam deste mercado.

---

<sup>68</sup> No modelo original de B&S os preços dos ativos objeto tinham todas as informações necessárias.

Esta informação é inserida no contexto do modelo de B&S como um prêmio de risco pago pelo investidor (para posições compradas) numa aposta de forte alavancagem do seu investimento, mesmo contrariando a racionalidade econômica.

Os resultados empíricos mostraram que o ajuste ao modelo de B&S é uma solução viável no mercado de opções de compra da Telemar PN no período analisado. Apesar do baixo desempenho para carteira borboleta comprada.

5. O modelo *Hedge* delta-normal não foi suficiente para reduzir o risco de mercado medido via o VaR da carteira com ação da Telemar PN. Na verdade o risco médio foi triplicado.

Como era esperado, um *hedge* com apenas o delta não é suficiente para o mercado brasileiro. Os resultados mostraram que ao invés de reduzir o risco, a opção foi mais um fator de risco. Provavelmente isto foi motivado, pelo preço dos prêmios das opções ou pelo gama elevado.

6. A diversidade das carteiras foi capaz de reduzir o risco. O VaR atendeu ao axioma da subaditividade, sendo, portanto, uma medida coerente de risco (ao menos para as séries e períodos estudados). Sendo por consequência, entre as alternativas de investimento, a carteira com as ações da Vale do Rio Doce PNA, Telemar PN e Petrobrás PN.
7. A análise dinâmica traz resultados superiores à análise estática. Este resultado decorre da possibilidade de se incorporar novas informações ao modelo com defasagem tão pequena quanto o tempo para se dispor das novas informações. Tal aspecto levanta a seguinte questão: os estudos que demonstram a ineficiência do mercado estão corretos, ou o instrumental de análise não tem capacidade de captar a dinâmica e as informações do mercado?

Assim sendo, neste trabalho os resultados obtidos mostram que modelos de gerenciamento de risco desenvolvidos para os países de primeiro mundo, em particular para os mercados americanos, não funcionam plenamente no Brasil. Não que os modelos estejam incorretos, visto que algumas das premissas básicas e teorias são válidas para o mercado brasileiro, mas principalmente porque algumas particularidades locais devem ser incorporadas aos modelos.

Diante dos resultados, fica como sugestão para futuros trabalhos de pesquisa uma melhor precificação das opções brasileiras, no qual o “prêmio de risco” pago ao investidor também seja uma função do tempo até o vencimento e do preço de exercício, desde que estes

tenham poder explicativo. Outra possibilidade para o mercado de opções é a análise com outras estratégias e com opções de compra e venda de outros ativos como ações da Petrobrás, e de commodities como café e soja.

Os ajustes na precificação de opções podem ser realizados segundo o conceito de independência em relação aos eventos passados, com exceção do último evento. Ou seja, o seguindo um processo de Markov.

Outra sugestão é a incorporação da volatilidade estocástica e análise de saltos estocásticos da volatilidade. Esta possibilidade fornece uma maior capacidade de ajustes do modelo ao longo do dia (se os ajustes forem diários). A busca de carteiras com ativos mais voláteis e/ou períodos mais críticos no tocante à influência de eventos de risco também fortalecem a análise.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABE, K. E. S. “Pricing Options using Monte Carlo with Different Strong Approximations”, [www.maths.ox.ac.uk](http://www.maths.ox.ac.uk), 2002.

ACCORSI, A. e F. PANHONI, “Risco de Mercado: o Método Simulação Histórica (Historical Simulation Method) Aplicado ao IBOVESPA”, *Revista Administração On Line*, São Paulo. v. 04, n. 03, p. 1-11, jul./ago./set., 2003.

AHN, D. H., BOUDOUKH, J., RICHARDSON, M. e WHITELAW, R., “Optimal Risk Management Using Options”. *NBER Working Paper Series. Working Paper n. 6158*, 1997.

AIROLDI, M., “Correlation Structure and Fat Tails in Finance: a New Mechanism,”. *Risk Management & Research*, Intesa-Bsi Bank, Milan, Italy, 2001.

AÏT-SAHALIA, Y. e A. LO, “Nonparametric Risk Management and Implied Risk Aversion”. *Working paper*, Sloan School of Management, 1998.

ALMEIDA, A. F. e GHIRARDI, C. T. “Estudo Comparativo de Modelos de Gerenciamento de Risco de Mercado com uma Carteira Composta por Ativos Típicos de um Fundo de ações”. *Anais da ENANPAD*, Brasil, 1999.

ALMEIDA, N. M. C. G. e PEREIRA, P. L. V. “Os Modelos SWGARCH Aplicados ao Índice Ibovespa”. *XXI Encontro Brasileiro de Econometria*, Belmodez, 1999.

AMMANN, M. e REICH, C., "Value-at-Risk for Non-linear Financial Instruments – Linear Approximation or Full Monte Carlo?"; *Financial Markets and Portfolio Management*, 15., n. 3, p. 363-378, Jahrgang 2001.

ARAÚJO, L. S. N. “Opções do Tradicional ao Exótico”. Ed. Atlas, São Paulo, 2000.

ARAUJO G., C. BARBEDO e E. LEMGRUBER, “Adequação das Medidas de Valor em Risco na Formulação da Exigência de Capitais para Estratégias de Opções no Mercado Brasileiro”, *Primeiro Encontro Norte Nordeste de Finanças*, Recife, 2004

ARROW, K. "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing". *Review of Economic Studies* 31, p. 91-96, 1964.

ARTZNER, P., F. DELBAEN, J. M. ELBER, e D. HEART. “Coherent Measures of Risk” *Mathematical Finance* 9, p. 203-229, 1999.

BACHELIER, L. “Théorie de la Spéculation”, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 3, Paris: Gauthier-Villars., 1900.

BARBEDO, C., G. ARAUJO e E. LEMGRUBER, “Incorporação da Volatilidade ao Modelo de VaR Histórico para Ativos não Lineares”, *Quarto Encontro Brasileiro de Finanças*, Rio de Janeiro, 2004.

BARBEDO, C., e G. ARAUJO, “Carteira de Opções: Avaliação de Metodologias de Exigência de Capital no Mercado Brasileiro”, *Trabalhos para Discussão*, Brasília, n. 82, mar., p. 1-45, 2004.

BARONE-ADESI, G.; GIANNPOULOS, K.; VOSPER, L. “VaR without Correlations for Nonlinear Portfolios”, *Journal of Futures Markets*, 19 (April), 583 – 602, 1999.

BARRAQUAND, J. e MARTINEAU, D “Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate American Securities", *Journal of Finance and Quantitative Analyses*, 30, 383, 1995.

BARROS P. e E. LEMGRUBER, “Análise da Relação entre Liquidez e Ganhos de Arbitragem no Mercado de Opções da Telebrás após o Plano Real, *ENANPAD*, 1997.

BEDER, T. S. “VaR: Seductive but Dangerous”, *Financial Analysts Journal*, p. 12-24, set./out., 1995.



BERNDT, E., B. HALL, R. HALL, e J. HAUSMAN, “Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models”, *Annals of Social Measurement*, Vol. 3, 653-665, 1974.

BESSADA, O. “O Mercado de Derivativos Financeiros”. Rio de Janeiro: Record, 2000.

BEZERRA, F. L. O. “Avaliação da Estimativa de Risco do Mercado pela Metodologia *Value at Risk (VaR)* com Simulação de Monte Carlo”. *Dissertação de Mestrado em Administração*, UFPE, 2001.

BLACK, F. “Studies in Stock Price Volatility Changes”. *Proceeding of the 1976 Business Meeting of the Business and Economic Statistic Section, American Statistical Association*, p. 177-181, 1976.

BLACK, F. e LITTERMAN, R. “Asset Allocation: Combining Investor Views with Markets Expectations.” *Journal of Fixed Income*. n. 1, p. 7-18, 1991.

BLACK, F. e SHOLES, M. “The Pricing of option and Corporate Liabilities”. *Journal of Political Economics*. n. 81, p. 637-657, mai./jun. 1973.

BOLLERSLEV, T. “Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity”. *Journal of Econometrics*. n. 31, p. 307-327, 1986.

BOLLERSLEV, T. e WOOLDRIDGE, J. M. “Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariance”. *Econometrics Reviews*, n. 11, p. 143-172, 1992.

BOUDOUKH, J, M. RICHARDSON, e R. WHITELAW, “The Best of Both Worlds: A Hybrid Approach to Calculating Value at Risk,” *Working Paper*, 1998.

BOURBONNAIS R. e M. TERRAZA, “Analyse Des Séries Temporelles En Economie”, Press Universitaire de France, Paris, 1998.

BOYLE, P. “Option: A Monte Carlo Approach”, *Journal of Financial Economics* 4. pp. 323-338, 1977.

BOYLE, P.P, BROADIE, M., GLASSERMAN, P. Monte Carlo Methods for Security Pricing. *Journal of Economic Dynamics and Control*, n.21, p. 1267-1321, 1997.

BOYLE, P.P., JOY, C. e TAN, K. S. “Quasi-Monte Carlo Methods in Numerical Finance”, *Management Sciences*. v. 42, n. 6, pp. 926-936, jun. 1996.

BOX, G. E. P. e JENKINS, G. M. “Time Séries Analysis: Forecasting and Control.” Holden Day, 1976.

BOX, G. E. P., JENKINS, G. M. e REINSEL, G. C. “Time Séries Analysis: Forecasting and Control.” 3<sup>a</sup> ed. Prentice Hall, 1994.

BRATLEY, P., FOX, B.L. ALGORITHM 659: Implementing Sobol's Quasirandom Sequence Generator. *ACM Transactions on Mathematical Software*, v.14,n.1, p. 88-100, mar. 1988.

BRITTEN-JONES, M. e SCHAEFER, S. M., “Non-Linear Value at Risk”. *European Finance Review*, n. 2, p. 161-187, 1999.

BROADIE, M., GLASSERMAN, P. Pricing American-style Securities Using Simulation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, n.21, p. 1323-1352, 1997.

BROADIE, M., GLASSERMAN, P., JAIN, G. Enhanced Monte Carlo Estimates for American Option Prices. *The Journal of Derivatives*, p. 25-44, fall 1997.

BROTHERTON-RATCLIFFE, R. Monte Carlo Motoring. *RISK*, v.7, n.12, p. 53-58, dec. 1994.

CHAIA, A. e F. FERRREIRA, “Metodologias Alternativas de Geração de Cenários na Apuração do V@R de Instrumentos Nacionais”, *IV Semead*, Outubro, 1999.

CHRISTOFFERSEN, P. F. “Evaluating Interval Forecasts”. Mimeo, Research Departament, International Monetary Fund. Forthcoming in the *International Economic Review*, 1996.

COLEMAN, T. F., KIM, Y., LI, Y. e VERMA, A., “Dynamic Hedging in a Volatile Market”. <http://www.ctc-manhattan.com/research/>, 1999a.

COLEMAN, T. F., LI, Y. e VERMA, A., “Reconstructing the Unknown Local Volatility Function”. *The Journal of Computational Finance*. n. 2, v. 3, 1999b.

CRNKOVIC, C. e J. DRACHMAN. “Quality Control”. *Risk* 9, 139-143., 1996.

CROUHY, M., D. GALAI e R. MARK, “Risk Management,” McGraw-Hill, 2001.

DEBREU, G., “Theory of Value”. John Willey and Sons, Nova York, 1959.

DOWN, K. “Beyond Value at Risk: the new Science of Risk Management.” *Wiley Frontier in Finance*, 1998.

DUARTE JR, A. M. “Simulação de Monte Carlo para Análise de Opções”. *Resenha BM&F*, n. 115 p. 52-64, 1996.

\_\_\_\_\_. “Risco: Definições, Tipos, Medições e Recomendações para o seu Gerenciamento”. *Resenha BM&F*, 1997.

\_\_\_\_\_, “Uma Estratégia Dinâmica para o Hedge Ótimo Opções no Mercado Financeiro Brasileiro”. , 2000.

DUARTE JR, A. M., PERELMUTER, G., VICENTE, L. A. B. G. “A Risk Information System”. Case Studies – *Revista Brasileira de Management*, 30 – 37, Maio/junho 1998.

DUBOFSKY, D. O. “Option and Financial Futures: Valuation and uses”. McGraw-Hill Book Co, 1992.

DUFFIE, D. e PAN, J. “An Overview of Value at Risk”. *Journal of Derivatives*, v. 4, n. 3, p. 7-49, spring. 1997.

EL-JAHEL, L., PERRAUDIN, W. e SELLIN, P., “Value at Risk for Derivatives”, *Journal of Derivatives*, p. 7-26, 1999.

ENDERS, W. “Applied Econometric Time Séries”, John Wiley & Sons, 1995.

ENGLE, R. F. “Autoregressive Conditional Heterocedasticity with Estimates of the Variance of the United Kingdom Inflation”. *Econometrica*, v. 50, p. 987-1007, 1982.

ENGLE, R. F e BOLLERSLEV, T “Modeling the Persistence Conditional Variance (with discussion)”. *Econometrics Reviews*, n. 5, p. 1-50, 80-87, 1986.

FALLON, W., “Calculating Value-at-Risk,” Wharton School Financial Institutions Center *Working Paper*, 1996.

FAMA, E. F., “Random Walks in Stock Market Prices.” *Financial Analysts Journal*, September/October, 1965.

\_\_\_\_\_, “Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work.” *Journal of Finance*, v. 25 may, p. 383-417, 1970.

FAMA, E. F., FISHER, L., JENSEN, M e ROLL, R., “The Adjustment of Stock Prices to New Information.” *International Economic Review*, n. 10, p. 1-21, 1969.

FIERLI, F. “Applying and Testing VaR Estimation Methods for Non-linear Portfolios”, University of Southern Switzerland, *Working Paper*, 2002.

FOURER, R., GAY, D. M. e KERNIGHAM, B. W. “A Modeling Language for Mathematical Programming”. *The Scientific Press*, San Francisco, 1993.

FOSTER, D. P. e NELSON, D. B. “Contínuos Records Asymptotic for Rolling Sample Variance Estimators.” *Econometrica*, n. 64, p. 139-171, 1996.

FOX, P. ALGORITHM 647: Implementation and Relative Efficiency of Quasirandom Sequence Generators. *ACM Transactions on Mathematical Software*, v.12, n.4, p. 362-376, dec. 1986.

GALAI, D. "The Components of the Return from Hedging Options Against Stocks". *Journal of Business*, n. 56, p. 44-54, 1993.

GENTLE, J. E. "Random Number Generation and Monte Carlo Methods". New York: Springer-Verlag, 1998.

GIBSON, M. "Incorporating Event Risk into Value at Risk," *Working Paper*, 2001.

GLASSERMAN, P., HEIDELBERGER, P. e SHAHABUDDIN, P., "Portfolio Value-at-Risk with Heavy-Tailed Risk Factors", *Scientific Literature Digital Library*, 2000.

GLOSTEN, L. R., JAGANNATHAN, R. e RUNKLE, D. "Relationship between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess of Return on Stocks". Mineo (Northwestern University, Evanston, IL), 1989.

GOURIÉROUX, C. "ARCH Models and Financial Applications". New York: Springer-Verlag, 1997.

GREENE, W. H. "Econometric Analysis". 4<sup>a</sup> ed. New Jersey: Prentice Hall, Upper River. 2000.

HAGIN, R "Modern Portfolio Theory." Dow Jones Irwin, pp.11-13 e 89-91, 1979.

HAMILTON, J. D. e SUSMEL, R. "Autoregressive Conditional Heterocedasticity and Changes in Regime". *Journal of Econometrics*. n. 64, p. 307-330, 1994.

HARRISON, M. e D. KREPS, 1979, "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *Journal of Economic Theory* 20:381-408.

HILL, B. M. "A Simple General Approach to Inference about the Tail of a Distribution", *Annals of Statistics*, vol. 35, p. 1163-1173, 1975.

HOKAYEM, P.F., ABDALLAH C. T., E DORATO P. "Quasi-Monte Carlo Methods in Robust Control Design", Accepted, 11<sup>th</sup> Mediterranean Conference on Control and Automation, Rhodes, Greece, June 2003.

HOLTON, G. "Simulating Value at Risk." *The Journal of Performance Measurement*. v. 3 n. 1, p. 11-21, 1998.

HSIEH, D., "Implications of Nonlinear Dynamics for Financial Risk Management," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 28, 41-64, 1993.

HUISMANN, R., KOEDIJK, K. G., POWNALL, R. A. J., "VaR-x: fats tails in financial risk management". *Journal of risk I*, 47-61, 1998.

HULL, J. C. e WRITE, A. "The Pricing of Option on Assets with Stochastic Volatilities", *The Journal of Financial*, n.42, p. 281-300, jun. 1987.

HULL, J. C. "Introdução aos Mercados Futuros e de Opções". 2<sup>a</sup>. ed., 5<sup>a</sup> imp., São Paulo: BM&F, 2000.

\_\_\_\_\_. "Opções, Futuros e outros Derivativos". 2<sup>a</sup>. ed. São Paulo: BM&F, 1998.

JAMSHIDIAN F. e Y. ZHU, "Scenario Simulation: Theory and Methodology," *Finance and Stochastic*, Vol.1, 43-67, 1997.

JOHNSON, L. "The Theory of Hedging and Speculation in Commodity Futures". *Review of Economic Studies*, n. 27, p. 139-151, 1960.

JORION, P. "Risk<sup>2</sup>: Measuring the Risk in Value at Risk". *Financial Analysts Journal*, p. 47-56, nov./dez., 1996.

\_\_\_\_\_. "Value at Risk: a Nova Fonte de Referência para o Controle do Risco de Mercado". São Paulo: BM&F, 1997.

\_\_\_\_\_. “Value at Risk: a Nova Fonte de Referência para o Controle do Risco de Mercado”. 2<sup>a</sup> ed. São Paulo: BM&F, 2003.

JORGE, B., PIRES, C. e SILVEIRA, C. “Value at Risk: Notas sobre o Caso não Linear”. *ISEG Econômicas*, Lisboa, [http://pascal.iseg.utl.pt/~aafonso/eif/pdf/eif2000\\_2.pdf](http://pascal.iseg.utl.pt/~aafonso/eif/pdf/eif2000_2.pdf), 2001.

JUDGE, G. C., W. E. GRIFFITHS, R. C. HILL, H. LÜTKEPOHL e T. C. LEE, “The Theory and Practice of Econometrics”, New York, J. Wiley, 1985.

KATO, F. H.; “*The Super and Subestimation of Risk and Other Problems with Risk Measures*” Em <http://www.gloriamundi.org>, 2004.

KHINDANOVA, I. e ROCHEV, S. “Value at Risk: Recent Advances.” *Handbook on Analytic-Computational Methods in Applied Mathematics*, CRC Press LLC, 2000.

KIMURA, H. e SUEN, A. S. “Aplicação de Procedimentos de Backtesting para Avaliação de Performance de Metodologias de Value at Risk em Carteiras com Ativos Financeiros Brasileiros”. *Anais da ENANPAD*, Brasil, 1997.

KOSKOSIDIS, Y. A. e DUARTE, A. M., “A Scenario-based Approach to Active Asset Allocation”, *The Journal of Portfolio Management*, Winter, 1997.

KREPS, D. *A Course in Microeconomic Theory*. Princeton University Press, 1990.

KUPIEC, P. “Techniques for Verifying the Accuracy of Measurements Models”. *Journal of Derivatives*, v. 2, p. 73-84, dez. 1995.

\_\_\_\_\_. “Stress testing in a Value at Risk framework”. *Journal of Derivatives*, v. 6, p. 7-24, 1998.

LARDIC, S. e MIGNON, V., “Recent Developments on Exchange Rates”. *Applied Econometrics Association*, Palgrave Macmillan, 2002.

LEHAR, A. "Alternative Value-At-Risk Models For Options," *Computing in Economics and Finance 2000 99*, Society for Computational Economics, 2000.

LEWIS, A. "Mixing Approach to Stochastic Volatility and Jumps Models," Working Papers, 2002.

LI, J. e WINKER, P. "Time Series Simulation with Quasi-Monte Carlo Methods" *Working Paper 9-00-1*, Economic Department, Pennsylvania State University, 2000.

LIEN, D. I. e WILSON, K. W. "Multiperiod Hedging in the Presence of Stochastic Volatility". *International Review of Financial Analysis*. n. 10, p. 395-406, 2001.

LINSMEIER, T., e N. PEARSON, "Risk Measurement: An Introduction to Value at Risk," *Working Paper*, University of Illinois at Urbana-Champaign., 1999.

LONGSTAFF, F. e SCHWARTZ, E. "Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model", *Journal of Finance*, n. 14, p. 77-91, mar. 1992.

LOPEZ, J. A. "Regulatory Evaluation of Value-at-Risk Models." *Mimeo, Research and Market Analysis Group, Federal Reserve Bank of New York*, 1996.

\_\_\_\_\_. "Methods for Evaluating Value-at-Risk Estimates." *Mimeo, Research and Market Analysis Group, Federal Reserve Bank of New York.*, 1998.

LUCAS, R. "Asset Prices in an Exchange Economy", *Econometrica* 46, 1429-1446., 1978

LUENBERGER, D.G., *Investment Science*. Oxford University Press, Oxford, 1998.

MACKEAN, Jr, H. P. "Appendix: A Free Boundary Problem from the Heat Equation Arising From a Problems in Mathematical Economics", *Industrial Management Review*, 6, Spring: 30-39, 1965.

MAO, X., "*Stochastic Differential Equations and Applications*", Horwood, 1997.

MARKOWITZ, H. "Portfolio Selection". *Journal of Financial*, n. 7, p. 77-91, mar. 1952.



\_\_\_\_\_. “Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment”. New York: John Wiley, 1959.

MARSHALL, J. F. “Price Formation and Price Relationship in the Futures Markets”. South Western Publishing Co., Cincinnati, Ohio, 1989.

MASCOLEL, A., M. WHINSTON, and J. GREEN. *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, 1995.

MERTON, R. C. “Theory of the Rational Option Pricing”. *Bell Journal of Economics and management Science*, n. 4, p 141-83, 1973.

\_\_\_\_\_. “Continuous-Time Finance”, Blackwell Cambridge MA & Oxford UK, Oxford, 1990.

MOLLICA, M. A. “Uma Avaliação de Modelos de Valeu at Risk: Comparação entre Métodos Tradicionais e Modelos de Variância Condicional”. *Dissertação de Mestrado em Economia*, USP, 1999.

MORO, B. “The Full Mont”. *Risk*, v. 8, n. 2, p. 57-58, fev. 1995.

MORAIS, I. e M. S. PORTUGAL, “Modelagem e Previsão de Volatilidade Determinística e Estocástica para a Série do Ibovespa”, Em [www.ufrgs.br/ppge/anpecsul2000/](http://www.ufrgs.br/ppge/anpecsul2000/), 1999.

NELSON, D. B. “Conditional Heterocedasticity in Asset Returns: a New Approach”. *Journal of Business Statics*, n. 59, p. 347-370, 1991.

NELSON, D. B e FOSTER, D. P. “Asymptotic Filtering Theory for Univariate ARCH Models.” *Econometrica*, n. 62, p. 1-41, 1994.

NEMHAUSER, G. L., RINNOOY, A. H. G. e TODD, M. J. “Operations Research and Management Science: Optimization.” *North Holland*, Amsterdam, 1989.

OBSTFELD, M. e ROGOFF, K. “Foundations of International Macroeconomics”. The MIT Press, 1996.

OLIVEIRA, G. A. e SILVA, M. E. “Modelos de Estimação da Densidade Neutra ao Risco Implícita em Preços de Opções”. Em *www.risktech.com.br*, 2000.

PAGAN, A. e SCHWERT, G. W. “Alternatives Models for Conditional Stock Volatility.” *Journal of Econometrics*. n. 45, p. 267-290, 1994.

PASKOV, S. e TRAUB, J. “Faster Valuation of Financial Derivatives”. *Journal of Portfolio Management* 22, p. 113-120, 1995.

PEARSON, N. E C. SMITHSON, "Beyond VAR.", *Risk*, (13) 12, 85-87, 2000.

PINDYCK, R. S. e RUBINFELD, D. L. “Microeconomia”. São Paulo, 5<sup>a</sup> ed., Prentice Hall, 2002.

PICHLER S., SELITSCH K. “A Comparison of Analytical VaR Methodologies for Portfolios that Include Options.” Working Paper, Technische Universität Wien, 1999.

POITRAS, G. “*Risk Management, Speculation and Derivative Securities*”, New York: Academic Press., 2002

PORTTERS, M., BOUCHAUD, J. e SESTOVIC, D.. “Hedge Monte-Carlo: Low Variance Derivative Pricing with Objective Probabilities”. *Physica A* 289, p. 517-525, 2001.

PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T. e FLANNERY, B. P.. “Numerical Recipes in Fortran 77: the Art of Scientific Computing.” 2<sup>a</sup> ed., Cambridge – EUA: Cambridge University Press, 1996.

PRITSKER, M. “The hidden dangers of historical simulation”. *Working paper*, Federal Reserve Board (January), 2001.

PRITSKER, M. "Evaluating Value-at-Risk Methodologies: Accuracy versus Computational Time," 96-48, Wharton School Center for Financial Institutions, University of Pennsylvania, 1996.

RENDLEMAN, R. e BARTTER, B. "The Pricing of Options on Debt Securities". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, n.15, p. 11-24, mar. 1980.

RiskMetrics<sup>TM</sup> – Technical Document, 4<sup>a</sup> ed., J. P. Morgan, New York, 1995.

ROCHMAN, R. R. "Análise de Métodos Numéricos de Precificação de Opções." *Dissertação de Mestrado em Administração*, FGV-EAESP, 2002.

ROGACHEV, A.; "Dynamic Value-at-Risk", 2002, Em <http://www.gloriamundi.org>

ROMER, D. *Advanced Macroeconomics*. Second Edition. New York: McGraw Hill, 2001.

ROOTZÉN, H. AND C. KLÖPPELBERG "A Single Number Can't Hedge Against Economic Catastrophes". *Working paper*, 1999

ROSS, S., "An Introduction to Probability Models", 6<sup>a</sup> ed., Academic Press, San Diego, 1997.

\_\_\_\_\_, "Princeton Lecture in Finance", Princeton University Press, Princeton, 2001.

RUBINSTEIN, M., "Implied Binomial Trees". *Journal of Finance* 49, 771-818, 1994

SALIBY, E. e M. ARAUJO, "Cálculo do Valor em Risco Através de Simulação Monte Carlo: uma Avaliação de Uso de Métodos Amostrais Mais Eficientes em Portfólios com Opções", *XXXIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Campos do Jordão, 2001.

SAMUELSON, P. A., "Rational Theory of Warrant Pricing", *Industrial Management Review*, 6, Spring: 13-31, 1965.

SASSATANI, R. e SIQUEIRA, J. O. “Precificação de Opções Europeias e Exóticas (Path-Dependent) por Simulação de Monte Carlo”. *III SEMEAD*, Brasil, 1998.

SCHEINKMAN, A. e B. LEBARON, “Nonlinear Dynamics in Stock Returns.” *Journal of Business*, v. 62, p. 311-337, 1989.

SCHITTENKOPF C., A. LEHAR, E M. SCHEICHER, “GARCH vs Stochastic Volatility: Option Pricing and Risk Management.”.<[www.gloriamundi.org](http://www.gloriamundi.org)> , 2002..

SILVA, M. E. e GUIMARÃES, B. V. “Precificação de Opções com Volatilidade Estocástica e Saltos”, Finance Lab, Ibmec Business School, São Paulo, 1999.

SILVA NETO, L. A. “Derivativos: Definições, Emprego e Risco”. 2<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Atlas, 1998.

Site Bovespa: [www.bovespa.com.br](http://www.bovespa.com.br)

Site CBLC: <http://www.cbcl.com.br/cbcl/Default.asp>

Site IPEA: <http://www.ipeadata.gov.br/>

SOBOL, I. On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals. *U.S.S.R. Computational Math. And Math. Phys*, n.4:86, p.112, 1967.

SOUZA, L. A. R. “Metodologias de Cálculo de VaR”. *risktech.com.br*, 2001.

\_\_\_\_\_. “Precificação de Opções”. *risktech.com.br*, 2000.

SOUZA SOBRINHO, N. F. “Extração da Volatilidade do Ibovespa”. *Resenha BM&F*, n. 144, 1999.

TAN, K, CHAN, I. “Stress testing using VaR approach – a case for Asian Currencies”. *Journal of International Financial Markets, Institutions & Money*, v. 13, p. 39-55, 2003.

TAY, L. C., "On Methods of Optimal Risk Management". Thesis. University of Kaiserlauteru, 2000.

\_\_\_\_\_, "A Mean Value at Risk Framework for Hedging and Speculating with Options". Paper submitted for publication. Work Paper. Economics Department. Atenco de Mauila University, 2001a.

\_\_\_\_\_, "A Value at Risk Capital Asset Pricing Model". Work Paper. Economics Department. Atenco de Mauila University, 2001b.

TAYLOR, S. J. "Conjectured Models for Trend in Financial Prices and Forecast". *Journal of Royal Statistical Society*, A-143, p.338-362, 1980.

TAYLOR, S. J. "Modeling Financial Times Séries". UK: John Wiley & Sons, 1986.

TELFAH, A. A., "Analytical Estimation Of Value At Risk Under Thick Tails And Fast Volatility Updating." These of Doctor of Philosophy in Financial Economic Program, University of New Orleans, 2003.

THEORET, R. E ROSTAN, P. "Empirical Comparative Study of Monte Carlo Simulation Methods versus Historical Methods to estimate Value at Risk". [www.gloriamundi.org](http://www.gloriamundi.org) , 2000.

TILLEY, J. A. "Valuing American Options In A Path Simulation Model", *Trans. Soc. Act.*, 45, 83, 1993.

TOMPKINS, R. "Option Analysis". Revised edition, Chicago: Probus Publishing, 1994.

VALLS PEREIRA, P. L.; HOTTA, L. K.; SOUZA, L. A. R. e ALMEIDA, N. M. C. G. "Alternatives Models to Extract Asset Volatility: a Comparative Study." *The Brazilian Review of Econometrics*, n. 19, 1, p. 57-109, maio 1999.

VARIAN, H. *Microeconomic Analysis*. 3rd ed. W. W. Norton Company, 1992.

YAMADA, Y. e PRIMBS, J. A., "Value-at-Risk (VaR) Estimation for Dynamic Hedging". Em [www.cds.caltech.edu/~yuji/IJTAF\\_var.pdf](http://www.cds.caltech.edu/~yuji/IJTAF_var.pdf), 2001.

WALD, A. "On Some System of Equation of Mathematical Economics", 1936, traduzido por Econometrica, 1951.

WEISS, A. A., "ARMA Models with ARCH Errors", *Journal of Time Series Analysis*, vol. 5, 1984.

WEST, G., "Coherent VaR-Type Measures" Em <http://www.cam.wits.ac.za/mfinance/graeme/>, 2004

WIENER, Z., "Introduction to VaR (Value-at-Risk)." *Risk Management and Regulation in Banking.*, (eds. D. Galai, D. Ruthenberg, M. Sarnat, B. Schreiber), Kluwer Academic Publishers, Boston, 47-63, 1999.

WILMOTT, P., HOWINSON, S. e DEWYNNE, J., "The Mathematics of Financial Derivatives", Cambridge University Press, Cambridge 1997.

WILSON, T. C., "Debunking the Myths" Risk 7, p. 67-72, abril, 1994.

\_\_\_\_\_, "Calculating Risk Capital," em Carol Alexander (ed.) The Handbook of Risk Management and Analysis. Chichester: John Wiley and Sons, 1996.

ZAGARI., P. "A VaR Methodology for Portfolios that Include Options." *RiskMetrics<sup>TM</sup> Monitor*, First Quarter, p. 4-12, 1996 a.

\_\_\_\_\_, "How Accurate the Delta-Gamma Methodology?" *RiskMetrics<sup>TM</sup> Monitor*, Third Quarter, p. 12-29, 1996 b.

## **APÊNDICES**

## Apêndice 1

Resultados dos testes de seleção de modelos de volatilidade modelos GARCH (p,q):

Tabela A. 1: Resultados dos teste de seleção de modelos ARMA (r, m) – GARCH (p,q); Vale do Rio Doce PNA com janela de 252 dias (um ano). Em negrito os melhores.

| Modelo |   |   |   | Testes              |                     |          |                 | Mode |   |   |   | Testes |         |                  |           |
|--------|---|---|---|---------------------|---------------------|----------|-----------------|------|---|---|---|--------|---------|------------------|-----------|
| r      | m | p | q | Q (4) <sup>69</sup> | Q (8) <sup>70</sup> | AIC      | BIC             | r    | m | p | q | Q (4)  | Q (8)   | AIC              | BIC       |
| 0      | 0 | 1 | 1 | 8,9908              | 11,8634             | -1281,22 | <b>-1261,62</b> | 1    | 0 | 1 | 1 | 7,309  | 11,6062 | <b>-1283,153</b> | -1258,654 |
| 0      | 0 | 1 | 2 | <b>8,9908</b>       | 11,8634             | -1279,22 | -1254,72        | 1    | 0 | 1 | 2 | 7,3091 | 11,6061 | -1281,153        | -1251,754 |
| 0      | 0 | 1 | 3 | 8,9908              | 11,8634             | -1277,23 | -1247,83        | 1    | 0 | 1 | 3 | 7,3095 | 11,6048 | -1279,165        | -1244,867 |
| 0      | 0 | 1 | 4 | 8,9908              | 11,8634             | -1275,23 | -1240,93        | 1    | 0 | 1 | 4 | 7,3095 | 11,6047 | -1277,165        | -1237,967 |
| 0      | 0 | 2 | 1 | 8,9908              | 11,8634             | -1279,57 | -1255,07        | 1    | 0 | 2 | 1 | 7,316  | 11,5702 | -1281,244        | -1251,846 |
| 0      | 0 | 2 | 2 | 8,9908              | <b>11,8634</b>      | -1277,58 | -1248,18        | 1    | 0 | 2 | 2 | 7,3139 | 11,5783 | -1279,29         | -1244,992 |
| 0      | 0 | 2 | 3 | 8,9908              | 11,8634             | -1275,76 | -1241,46        | 1    | 0 | 2 | 3 | 7,3173 | 11,572  | -1277,433        | -1238,236 |
| 0      | 0 | 2 | 4 | 8,9908              | 11,8634             | -1273,76 | -1234,56        | 1    | 0 | 2 | 4 | 7,3172 | 11,5722 | -1275,433        | -1231,336 |
| 0      | 0 | 3 | 1 | 8,9908              | 11,8634             | -1277,57 | -1248,17        | 1    | 0 | 3 | 1 | 7,316  | 11,5701 | -1279,244        | -1244,946 |
| 0      | 0 | 3 | 2 | 8,9908              | 11,8634             | -1275,58 | -1241,29        | 1    | 0 | 3 | 2 | 7,3139 | 11,5784 | -1277,29         | -1238,092 |
| 0      | 0 | 3 | 3 | 8,9908              | 11,8634             | -1274,13 | -1234,93        | 1    | 0 | 3 | 3 | 7,3159 | 11,5758 | -1275,827        | -1231,729 |
| 0      | 0 | 3 | 4 | 8,9908              | 11,8634             | -1272,13 | -1228,03        | 1    | 0 | 3 | 4 | 7,3159 | 11,5757 | -1273,827        | -1224,829 |
| 0      | 0 | 4 | 1 | 8,9908              | 11,8634             | -1275,57 | -1241,27        | 1    | 0 | 4 | 1 | 7,3074 | 11,6044 | -1277,308        | -1238,11  |
| 0      | 0 | 4 | 2 | 8,9908              | 11,8634             | -1273,58 | -1234,39        | 1    | 0 | 4 | 2 | 7,3068 | 11,632  | -1275,46         | -1231,362 |
| 0      | 0 | 4 | 3 | 8,9908              | 11,8634             | -1272,41 | -1228,31        | 1    | 0 | 4 | 3 | 7,3185 | 11,5658 | -1273,971        | -1224,973 |
| 0      | 0 | 4 | 4 | 8,9908              | 11,8634             | -1270,41 | -1221,41        | 1    | 0 | 4 | 4 | 7,3186 | 11,5655 | -1271,971        | -1218,074 |
| 0      | 1 | 1 | 1 | 5,5972              | 9,3013              | -1282,36 | -1257,87        | 1    | 1 | 1 | 1 | 5,0049 | 9,29434 | -1282,035        | -1252,636 |
| 0      | 1 | 1 | 2 | 5,5975              | 9,30138             | -1280,36 | -1250,97        | 1    | 1 | 1 | 2 | 5,002  | 9,29193 | -1280,035        | -1245,737 |
| 0      | 1 | 1 | 3 | 5,592               | 9,29986             | -1278,41 | -1244,11        | 1    | 1 | 1 | 3 | 4,9229 | 9,2041  | -1278,13         | -1238,933 |
| 0      | 1 | 1 | 4 | 5,5921              | 9,29987             | -1276,41 | -1237,21        | 1    | 1 | 1 | 4 | 4,9236 | 9,20502 | -1276,13         | -1232,033 |
| 0      | 1 | 2 | 1 | 5,622               | 9,30909             | -1280,51 | -1251,11        | 1    | 1 | 2 | 1 | 4,9643 | 9,22248 | -1280,256        | -1245,958 |
| 0      | 1 | 2 | 2 | 5,6189              | 9,30794             | -1278,54 | -1244,24        | 1    | 1 | 2 | 2 | 4,971  | 9,23245 | -1278,267        | -1239,069 |
| 0      | 1 | 2 | 3 | 5,6147              | 9,30648             | -1276,74 | -1237,54        | 1    | 1 | 2 | 3 | 4,8578 | 9,10304 | -1276,576        | -1232,478 |
| 0      | 1 | 2 | 4 | 5,6149              | 9,30656             | -1274,74 | -1230,64        | 1    | 1 | 2 | 4 | 4,8582 | 9,10347 | -1274,576        | -1225,579 |
| 0      | 1 | 3 | 1 | 5,6213              | 9,30885             | -1278,51 | -1244,22        | 1    | 1 | 3 | 1 | 4,9635 | 9,22142 | -1278,256        | -1239,059 |
| 0      | 1 | 3 | 2 | 5,6192              | 9,30803             | -1276,54 | -1237,34        | 1    | 1 | 3 | 2 | 4,972  | 9,2335  | -1276,267        | -1232,169 |
| 0      | 1 | 3 | 3 | 5,6016              | 9,30264             | -1275,21 | -1231,11        | 1    | 1 | 3 | 3 | 4,8163 | 9,05796 | -1275,073        | -1226,076 |
| 0      | 1 | 3 | 4 | 5,602               | 9,30274             | -1273,21 | -1224,21        | 1    | 1 | 3 | 4 | 4,8162 | 9,05777 | -1273,073        | -1219,177 |
| 0      | 1 | 4 | 1 | 5,622               | 9,30907             | -1276,51 | -1237,32        | 1    | 1 | 4 | 1 | 4,9205 | 9,16786 | -1276,232        | -1232,134 |
| 0      | 1 | 4 | 2 | 5,6189              | 9,30793             | -1274,54 | -1230,44        | 1    | 1 | 4 | 2 | 4,9721 | 9,23376 | -1274,267        | -1225,269 |
| 0      | 1 | 4 | 3 | 5,6295              | 9,31146             | -1273,26 | -1224,27        | 1    | 1 | 4 | 3 | 4,8505 | 9,07484 | -1273,131        | -1219,234 |
| 0      | 1 | 4 | 4 | 5,63                | 9,31165             | -1271,26 | -1217,37        | 1    | 1 | 4 | 4 | 4,8563 | 9,08223 | -1271,131        | -1212,334 |

<sup>69</sup> Q-4 = Q-teste com 4 defasagens;

<sup>70</sup> Q-8 = Q-teste com 8 defasagens.



Tabela A. 2: Resultados dos teste de seleção de modelos ARMA (r, m) – GARCH (p,q); Petrobrás PN com janela de 252 dias (um ano). Em negrito os melhores.

| Modelo |   |   |   | Testes         |               |                 |                 | Modelo |   |   |   | Testes  |         |          |          |
|--------|---|---|---|----------------|---------------|-----------------|-----------------|--------|---|---|---|---------|---------|----------|----------|
| r      | m | p | q | Q (4)          | Q (8)         | AIC             | BIC             | r      | m | p | q | Q (4)   | Q (8)   | AIC      | BIC      |
| 0      | 0 | 1 | 1 | 13,4704        | <b>26,504</b> | -1161,89        | <b>-1142,29</b> | 1      | 0 | 1 | 1 | 5,37141 | 16,5908 | -1164,8  | -1140,3  |
| 0      | 0 | 1 | 2 | 13,4704        | 26,504        | -1163,72        | -1139,23        | 1      | 0 | 1 | 2 | 5,35458 | 16,535  | -1168,33 | -1138,94 |
| 0      | 0 | 1 | 3 | <b>13,4704</b> | 26,504        | -1163,61        | -1134,21        | 1      | 0 | 1 | 3 | 5,36648 | 16,573  | -1168,01 | -1133,72 |
| 0      | 0 | 1 | 4 | 13,4704        | 26,504        | -1161,96        | -1127,66        | 1      | 0 | 1 | 4 | 5,3695  | 16,5814 | -1166,27 | -1127,07 |
| 0      | 0 | 2 | 1 | 13,4704        | 26,504        | -1159,89        | -1135,39        | 1      | 0 | 2 | 1 | 5,37141 | 16,5908 | -1162,8  | -1133,4  |
| 0      | 0 | 2 | 2 | 13,4704        | 26,504        | -1161,72        | -1132,33        | 1      | 0 | 2 | 2 | 5,35452 | 16,5348 | -1166,33 | -1132,04 |
| 0      | 0 | 2 | 3 | 13,4704        | 26,504        | -1161,61        | -1127,31        | 1      | 0 | 2 | 3 | 5,36654 | 16,5732 | -1166,01 | -1126,82 |
| 0      | 0 | 2 | 4 | 13,4704        | 26,504        | -1159,96        | -1120,76        | 1      | 0 | 2 | 4 | 5,3695  | 16,5814 | -1164,27 | -1120,17 |
| 0      | 0 | 3 | 1 | 13,4704        | 26,504        | -1157,89        | -1128,49        | 1      | 0 | 3 | 1 | 5,37139 | 16,5908 | -1160,8  | -1126,5  |
| 0      | 0 | 3 | 2 | 13,4704        | 26,504        | -1159,72        | -1125,43        | 1      | 0 | 3 | 2 | 5,35455 | 16,5349 | -1164,33 | -1125,14 |
| 0      | 0 | 3 | 3 | 13,4704        | 26,504        | -1159,61        | -1120,41        | 1      | 0 | 3 | 3 | 5,36648 | 16,573  | -1164,01 | -1119,92 |
| 0      | 0 | 3 | 4 | 13,4704        | 26,504        | -1157,96        | -1113,86        | 1      | 0 | 3 | 4 | 5,36952 | 16,5815 | -1162,27 | -1113,27 |
| 0      | 0 | 4 | 1 | 13,4704        | 26,504        | -1155,89        | -1121,59        | 1      | 0 | 4 | 1 | 5,3713  | 16,5906 | -1158,8  | -1119,6  |
| 0      | 0 | 4 | 2 | 13,4704        | 26,504        | -1157,72        | -1118,53        | 1      | 0 | 4 | 2 | 5,35449 | 16,5346 | -1162,33 | -1118,24 |
| 0      | 0 | 4 | 3 | 13,4704        | 26,504        | -1157,61        | -1113,51        | 1      | 0 | 4 | 3 | 5,36653 | 16,5732 | -1162,01 | -1113,02 |
| 0      | 0 | 4 | 4 | 13,4704        | 26,504        | -1155,96        | -1106,96        | 1      | 0 | 4 | 4 | 5,36955 | 16,5816 | -1160,27 | -1106,37 |
| 0      | 1 | 1 | 1 | 4,8131         | 15,3251       | -1166,03        | -1141,53        | 1      | 1 | 1 | 1 | 5,12507 | 16,1485 | -1162,83 | -1133,43 |
| 0      | 1 | 1 | 2 | 4,74776        | 15,1411       | <b>-1169,78</b> | -1140,38        | 1      | 1 | 1 | 2 | 5,01256 | 15,9087 | -1166,39 | -1132,1  |
| 0      | 1 | 1 | 3 | 4,75989        | 15,1801       | -1169,42        | -1135,12        | 1      | 1 | 1 | 3 | 5,03529 | 15,9711 | -1166,07 | -1126,87 |
| 0      | 1 | 1 | 4 | 4,76586        | 15,1983       | -1167,67        | -1128,48        | 1      | 1 | 1 | 4 | 5,03302 | 15,9704 | -1164,32 | -1120,23 |
| 0      | 1 | 2 | 1 | 4,81329        | 15,3255       | -1164,03        | -1134,63        | 1      | 1 | 2 | 1 | 5,12436 | 16,1476 | -1160,83 | -1126,53 |
| 0      | 1 | 2 | 2 | 4,74784        | 15,1414       | -1167,78        | -1133,48        | 1      | 1 | 2 | 2 | 5,01234 | 15,9084 | -1164,39 | -1125,2  |
| 0      | 1 | 2 | 3 | 4,75996        | 15,1804       | -1167,42        | -1128,22        | 1      | 1 | 2 | 3 | 5,03479 | 15,9699 | -1164,07 | -1119,97 |
| 0      | 1 | 2 | 4 | 4,76591        | 15,1984       | -1165,67        | -1121,58        | 1      | 1 | 2 | 4 | 5,03268 | 15,9697 | -1162,32 | -1113,33 |
| 0      | 1 | 3 | 1 | 4,81319        | 15,3253       | -1162,03        | -1127,73        | 1      | 1 | 3 | 1 | 5,12428 | 16,1475 | -1158,83 | -1119,63 |
| 0      | 1 | 3 | 2 | 4,74774        | 15,141        | -1165,78        | -1126,58        | 1      | 1 | 3 | 2 | 5,01274 | 15,9091 | -1162,39 | -1118,3  |
| 0      | 1 | 3 | 3 | 4,76002        | 15,1805       | -1165,42        | -1121,32        | 1      | 1 | 3 | 3 | 5,03458 | 15,9696 | -1162,07 | -1113,07 |
| 0      | 1 | 3 | 4 | 4,76573        | 15,1979       | -1163,67        | -1114,68        | 1      | 1 | 3 | 4 | 5,03308 | 15,9705 | -1160,32 | -1106,43 |
| 0      | 1 | 4 | 1 | 4,81316        | 15,3252       | -1160,03        | -1120,83        | 1      | 1 | 4 | 1 | 5,12325 | 16,1455 | -1156,83 | -1112,73 |
| 0      | 1 | 4 | 2 | 4,74766        | 15,1407       | -1163,78        | -1119,68        | 1      | 1 | 4 | 2 | 5,01251 | 15,9087 | -1160,39 | -1111,4  |
| 0      | 1 | 4 | 3 | 4,75981        | 15,1799       | -1163,42        | -1114,42        | 1      | 1 | 4 | 3 | 5,03516 | 15,9707 | -1160,07 | -1106,17 |
| 0      | 1 | 4 | 4 | 4,76583        | 15,1982       | -1161,67        | -1107,78        | 1      | 1 | 4 | 4 | 5,0334  | 15,9713 | -1158,32 | -1099,53 |

Tabela A. 3: Resultados dos teste de seleção de modelos ARMA (r, m) – GARCH (p,q); Telemar PN com janela de 252 dias (um ano). Em negrito os melhores.

| Modelo |   |   |   | Testes        |               |          |                 | Modelo |   |   |   | Testes |        |                 |          |
|--------|---|---|---|---------------|---------------|----------|-----------------|--------|---|---|---|--------|--------|-----------------|----------|
| r      | m | p | q | Q (4)         | Q (8)         | AIC      | BIC             | r      | m | p | q | Q (4)  | Q (8)  | AIC             | BIC      |
| 0      | 0 | 1 | 1 | 3,7705        | <b>8,0075</b> | -1111,25 | <b>-1091,66</b> | 1      | 0 | 1 | 1 | 2,9781 | 7,1816 | -1110,78        | -1086,28 |
| 0      | 0 | 1 | 2 | 3,7705        | 8,0075        | -1110,74 | -1086,24        | 1      | 0 | 1 | 2 | 2,9653 | 7,1835 | -1110,64        | -1081,24 |
| 0      | 0 | 1 | 3 | 3,7705        | 8,0075        | -1112,83 | -1083,43        | 1      | 0 | 1 | 3 | 2,9659 | 7,1827 | -1112,76        | -1078,47 |
| 0      | 0 | 1 | 4 | <b>3,7705</b> | 8,0075        | -1111,35 | -1077,05        | 1      | 0 | 1 | 4 | 2,9723 | 7,1794 | -1111,17        | -1071,97 |
| 0      | 0 | 2 | 1 | 3,7705        | 8,0075        | -1108,91 | -1084,41        | 1      | 0 | 2 | 1 | 2,9782 | 7,1816 | -1108,78        | -1079,38 |
| 0      | 0 | 2 | 2 | 3,7705        | 8,0075        | -1108,74 | -1079,34        | 1      | 0 | 2 | 2 | 2,9654 | 7,1834 | -1108,64        | -1074,34 |
| 0      | 0 | 2 | 3 | 3,7705        | 8,0075        | -1110,83 | -1076,53        | 1      | 0 | 2 | 3 | 2,9659 | 7,1827 | -1110,76        | -1071,57 |
| 0      | 0 | 2 | 4 | 3,7705        | 8,0075        | -1109,55 | -1070,35        | 1      | 0 | 2 | 4 | 2,9709 | 7,1796 | -1109,4         | -1065,3  |
| 0      | 0 | 3 | 1 | 3,7705        | 8,0075        | -1108,16 | -1078,76        | 1      | 0 | 3 | 1 | 3,0327 | 7,209  | -1107,41        | -1073,12 |
| 0      | 0 | 3 | 2 | 3,7705        | 8,0075        | -1106,16 | -1071,86        | 1      | 0 | 3 | 2 | 3,0316 | 7,2082 | -1105,41        | -1066,22 |
| 0      | 0 | 3 | 3 | 3,7705        | 8,0075        | -1108,83 | -1069,63        | 1      | 0 | 3 | 3 | 2,9659 | 7,1827 | -1108,76        | -1064,67 |
| 0      | 0 | 3 | 4 | 3,7705        | 8,0075        | -1109,22 | -1065,12        | 1      | 0 | 3 | 4 | 2,9649 | 7,1846 | -1109,28        | -1060,29 |
| 0      | 0 | 4 | 1 | 3,7705        | 8,0075        | -1104,91 | -1070,61        | 1      | 0 | 4 | 1 | 2,9779 | 7,1816 | -1104,78        | -1065,58 |
| 0      | 0 | 4 | 2 | 3,7705        | 8,0075        | -1103,35 | -1064,15        | 1      | 0 | 4 | 2 | 2,9803 | 7,1821 | -1102,82        | -1058,72 |
| 0      | 0 | 4 | 3 | 3,7705        | 8,0075        | -1106,83 | -1062,73        | 1      | 0 | 4 | 3 | 2,9659 | 7,1827 | -1106,76        | -1057,77 |
| 0      | 0 | 4 | 4 | 3,7705        | 8,0075        | -1107,22 | -1058,22        | 1      | 0 | 4 | 4 | 2,9645 | 7,1860 | -1107,29        | -1053,4  |
| 0      | 1 | 1 | 1 | 2,6017        | 6,9717        | -1110,49 | -1086,00        | 1      | 1 | 1 | 1 | 1,9207 | 6,5983 | -1111,31        | -1081,91 |
| 0      | 1 | 1 | 2 | 2,6007        | 6,9748        | -1110,31 | -1080,91        | 1      | 1 | 1 | 2 | 1,9535 | 6,6851 | -1111,22        | -1076,92 |
| 0      | 1 | 1 | 3 | 2,6013        | 6,979         | -1112,49 | -1078,19        | 1      | 1 | 1 | 3 | 1,9991 | 6,7822 | <b>-1113,47</b> | -1074,27 |
| 0      | 1 | 1 | 4 | 2,6018        | 6,9715        | -1110,84 | -1071,64        | 1      | 1 | 1 | 4 | 1,9563 | 6,6973 | -1111,62        | -1067,53 |
| 0      | 1 | 2 | 1 | 2,6017        | 6,9717        | -1108,49 | -1079,10        | 1      | 1 | 2 | 1 | 1,9205 | 6,5978 | -1109,31        | -1075,01 |
| 0      | 1 | 2 | 2 | 2,6007        | 6,9747        | -1108,31 | -1074,01        | 1      | 1 | 2 | 2 | 1,919  | 6,5942 | -1107,37        | -1068,17 |
| 0      | 1 | 2 | 3 | 2,6013        | 6,979         | -1110,49 | -1071,29        | 1      | 1 | 2 | 3 | 1,9992 | 6,7822 | -1111,47        | -1067,37 |
| 0      | 1 | 2 | 4 | 2,6013        | 6,9721        | -1109,06 | -1064,96        | 1      | 1 | 2 | 4 | 1,9577 | 6,6995 | -1109,85        | -1060,85 |
| 0      | 1 | 3 | 1 | 2,6193        | 6,9756        | -1107,08 | -1072,78        | 1      | 1 | 3 | 1 | 1,8994 | 6,5564 | -1107,96        | -1068,77 |
| 0      | 1 | 3 | 2 | 2,6191        | 6,9756        | -1105,08 | -1065,88        | 1      | 1 | 3 | 2 | 1,8995 | 6,5566 | -1105,96        | -1061,87 |
| 0      | 1 | 3 | 3 | 2,6013        | 6,979         | -1108,49 | -1064,39        | 1      | 1 | 3 | 3 | 2,0544 | 6,8837 | -1109,54        | -1060,54 |
| 0      | 1 | 3 | 4 | 2,6043        | 6,9866        | -1108,98 | -1059,98        | 1      | 1 | 3 | 4 | 2,1421 | 7,0468 | -1110,26        | -1056,37 |
| 0      | 1 | 4 | 1 | 2,6017        | 6,9717        | -1104,49 | -1065,3         | 1      | 1 | 4 | 1 | 1,8996 | 6,5572 | -1105,96        | -1061,87 |
| 0      | 1 | 4 | 2 | 2,602         | 6,9714        | -1102,55 | -1058,45        | 1      | 1 | 4 | 2 | 1,919  | 6,5942 | -1103,37        | -1054,37 |
| 0      | 1 | 4 | 3 | 2,6013        | 6,979         | -1106,49 | -1057,49        | 1      | 1 | 4 | 3 | 2,1818 | 7,1021 | -1107,77        | -1053,87 |
| 0      | 1 | 4 | 4 | 2,6069        | 6,9918        | -1107,00 | -1053,10        | 1      | 1 | 4 | 4 | 2,259  | 7,2439 | -1108,47        | -1049,68 |

Tabela A. 4: Resultados dos teste de seleção de modelos ARMA (r, m) – GARCH (p,q); Vale do Rio Doce PNA com janela de 504 dias (dois anos). Em negrito os melhores.

| Modelo |   |   |   | Testes         |                |          |                 | Modelo |   |   |   | Testes  |         |                 |          |
|--------|---|---|---|----------------|----------------|----------|-----------------|--------|---|---|---|---------|---------|-----------------|----------|
| r      | m | p | q | Q (4)          | Q (8)          | AIC      | BIC             | r      | m | p | q | Q (4)   | Q (8)   | AIC             | BIC      |
| 0      | 0 | 1 | 1 | <b>23,1727</b> | <b>30,1165</b> | -2567,61 | <b>-2548,01</b> | 1      | 0 | 1 | 1 | 21,4643 | 28,9802 | -2565,72        | -2541,22 |
| 0      | 0 | 1 | 2 | 23,1727        | 30,1165        | -2565,64 | -2541,14        | 1      | 0 | 1 | 2 | 21,4788 | 28,9905 | -2563,75        | -2534,35 |
| 0      | 0 | 1 | 3 | 23,1727        | 30,1165        | -2563,78 | -2534,39        | 1      | 0 | 1 | 3 | 21,5252 | 29,0228 | -2561,91        | -2527,62 |
| 0      | 0 | 1 | 4 | 23,1727        | 30,1165        | -2561,78 | -2527,49        | 1      | 0 | 1 | 4 | 21,5250 | 29,0227 | -2559,91        | -2520,72 |
| 0      | 0 | 2 | 1 | 23,1727        | 30,1165        | -2565,61 | -2541,11        | 1      | 0 | 2 | 1 | 21,4644 | 28,9802 | -2563,72        | -2534,32 |
| 0      | 0 | 2 | 2 | 23,1727        | 30,1165        | -2563,96 | -2534,56        | 1      | 0 | 2 | 2 | 21,5013 | 29,0058 | -2561,95        | -2527,65 |
| 0      | 0 | 2 | 3 | 23,1727        | 30,1165        | -2562,97 | -2528,67        | 1      | 0 | 2 | 3 | 21,7262 | 29,1700 | -2560,75        | -2521,55 |
| 0      | 0 | 2 | 4 | 23,1727        | 30,1165        | -2560,97 | -2521,77        | 1      | 0 | 2 | 4 | 21,7259 | 29,1698 | -2558,75        | -2514,65 |
| 0      | 0 | 3 | 1 | 23,1727        | 30,1165        | -2563,61 | -2534,21        | 1      | 0 | 3 | 1 | 21,4637 | 28,9798 | -2561,72        | -2527,42 |
| 0      | 0 | 3 | 2 | 23,1727        | 30,1165        | -2561,64 | -2527,34        | 1      | 0 | 3 | 2 | 21,5019 | 29,0062 | -2559,95        | -2520,75 |
| 0      | 0 | 3 | 3 | 23,1727        | 30,1165        | -2561,02 | -2521,82        | 1      | 0 | 3 | 3 | 21,7151 | 29,1616 | -2558,82        | -2514,72 |
| 0      | 0 | 3 | 4 | 23,1727        | 30,1165        | -2559,02 | -2514,92        | 1      | 0 | 3 | 4 | 21,7149 | 29,1615 | -2556,82        | -2507,82 |
| 0      | 0 | 4 | 1 | 23,1727        | 30,1165        | -2561,61 | -2527,31        | 1      | 0 | 4 | 1 | 21,4637 | 28,9798 | -2559,72        | -2520,52 |
| 0      | 0 | 4 | 2 | 23,1727        | 30,1165        | -2559,96 | -2520,76        | 1      | 0 | 4 | 2 | 21,5019 | 29,0062 | -2557,95        | -2513,85 |
| 0      | 0 | 4 | 3 | 23,1727        | 30,1165        | -2559,02 | -2514,92        | 1      | 0 | 4 | 3 | 21,7148 | 29,1614 | -2556,82        | -2507,82 |
| 0      | 0 | 4 | 4 | 23,1727        | 30,1165        | -2557,02 | -2508,02        | 1      | 0 | 4 | 4 | 21,7149 | 29,1615 | -2554,82        | -2500,92 |
| 0      | 1 | 1 | 1 | 20,5220        | 27,9129        | -2566,57 | -2542,07        | 1      | 1 | 1 | 1 | 19,0264 | 23,3132 | <b>-2569,76</b> | -2540,36 |
| 0      | 1 | 1 | 2 | 20,5431        | 27,9292        | -2564,57 | -2535,17        | 1      | 1 | 1 | 2 | 19,0366 | 23,3317 | -2567,77        | -2533,47 |
| 0      | 1 | 1 | 3 | 20,6024        | 27,9754        | -2562,66 | -2528,37        | 1      | 1 | 1 | 3 | 19,0548 | 23,3435 | -2565,96        | -2526,77 |
| 0      | 1 | 1 | 4 | 20,6022        | 27,9752        | -2560,66 | -2521,47        | 1      | 1 | 1 | 4 | 19,0545 | 23,3438 | -2563,96        | -2519,87 |
| 0      | 1 | 2 | 1 | 20,5217        | 27,9126        | -2564,57 | -2535,17        | 1      | 1 | 2 | 1 | 19,0254 | 23,3123 | -2567,76        | -2533,46 |
| 0      | 1 | 2 | 2 | 20,5492        | 27,9340        | -2562,87 | -2528,57        | 1      | 1 | 2 | 2 | 19,0022 | 23,2321 | -2566,21        | -2527,01 |
| 0      | 1 | 2 | 3 | 20,9423        | 28,2447        | -2561,58 | -2522,39        | 1      | 1 | 2 | 3 | 19,1170 | 23,4126 | -2565,00        | -2520,90 |
| 0      | 1 | 2 | 4 | 20,9427        | 28,2450        | -2559,58 | -2515,49        | 1      | 1 | 2 | 4 | 19,1173 | 23,4129 | -2563,00        | -2514,00 |
| 0      | 1 | 3 | 1 | 20,5212        | 27,9123        | -2562,56 | -2528,27        | 1      | 1 | 3 | 1 | 18,9501 | 23,1263 | -2565,68        | -2526,48 |
| 0      | 1 | 3 | 2 | 20,5498        | 27,9344        | -2560,87 | -2521,67        | 1      | 1 | 3 | 2 | 19,0362 | 23,3310 | -2563,77        | -2519,67 |
| 0      | 1 | 3 | 3 | 20,9322        | 28,2366        | -2559,64 | -2515,54        | 1      | 1 | 3 | 3 | 19,1154 | 23,4103 | -2563,06        | -2514,06 |
| 0      | 1 | 3 | 4 | 20,9320        | 28,2364        | -2557,64 | -2508,64        | 1      | 1 | 3 | 4 | 19,1051 | 23,4464 | -2560,19        | -2506,30 |
| 0      | 1 | 4 | 1 | 20,5209        | 27,9120        | -2560,56 | -2521,37        | 1      | 1 | 4 | 1 | 19,0256 | 23,3125 | -2563,76        | -2519,66 |
| 0      | 1 | 4 | 2 | 20,5498        | 27,9345        | -2558,87 | -2514,77        | 1      | 1 | 4 | 2 | 19,0028 | 23,2321 | -2562,21        | -2513,21 |
| 0      | 1 | 4 | 3 | 20,9322        | 28,2366        | -2557,64 | -2508,64        | 1      | 1 | 4 | 3 | 19,1156 | 23,4108 | -2561,06        | -2507,16 |
| 0      | 1 | 4 | 4 | 20,9324        | 28,2367        | -2555,64 | -2501,75        | 1      | 1 | 4 | 4 | 19,0834 | 23,3099 | -2558,88        | -2500,08 |

Tabela A. 5: Resultados dos teste de seleção de modelos ARMA (r, m) – GARCH (p,q); Petrobrás PN com janela de 504 dias (dois anos). Em negrito os melhores.

| Modelo |   |   |   | Testes         |                |                 |                 | Modelo |   |   |   | Testes  |         |          |          |
|--------|---|---|---|----------------|----------------|-----------------|-----------------|--------|---|---|---|---------|---------|----------|----------|
| r      | m | p | q | Q (4)          | Q (8)          | AIC             | BIC             | r      | m | p | q | Q (4)   | Q (8)   | AIC      | BIC      |
| 0      | 0 | 1 | 1 | <b>28,2577</b> | <b>29,6227</b> | -2380,28        | -2360,68        | 1      | 0 | 1 | 1 | 12,1805 | 14,0615 | -2390,99 | -2366,49 |
| 0      | 0 | 1 | 2 | 28,2577        | 29,6227        | -2384,85        | -2360,35        | 1      | 0 | 1 | 2 | 12,2165 | 14,0874 | -2398,26 | -2368,86 |
| 0      | 0 | 1 | 3 | 28,2577        | 29,6227        | -2384,12        | -2354,72        | 1      | 0 | 1 | 3 | 12,2884 | 14,1431 | -2396,80 | -2362,50 |
| 0      | 0 | 1 | 4 | 28,2577        | 29,6227        | -2382,12        | -2347,83        | 1      | 0 | 1 | 4 | 12,2884 | 14,1431 | -2394,80 | -2355,60 |
| 0      | 0 | 2 | 1 | 28,2577        | 29,6227        | -2378,28        | -2353,78        | 1      | 0 | 2 | 1 | 12,1805 | 14,0614 | -2388,99 | -2359,59 |
| 0      | 0 | 2 | 2 | 28,2577        | 29,6227        | -2382,85        | -2353,45        | 1      | 0 | 2 | 2 | 12,2164 | 14,0874 | -2396,26 | -2361,96 |
| 0      | 0 | 2 | 3 | 28,2577        | 29,6227        | -2383,75        | -2349,45        | 1      | 0 | 2 | 3 | 12,3885 | 14,2246 | -2395,56 | -2356,36 |
| 0      | 0 | 2 | 4 | 28,2577        | 29,6227        | -2381,75        | -2342,55        | 1      | 0 | 2 | 4 | 12,3891 | 14,2251 | -2393,56 | -2349,46 |
| 0      | 0 | 3 | 1 | 28,2577        | 29,6227        | -2376,28        | -2346,88        | 1      | 0 | 3 | 1 | 12,1805 | 14,0615 | -2386,99 | -2352,69 |
| 0      | 0 | 3 | 2 | 28,2577        | 29,6227        | -2380,85        | -2346,55        | 1      | 0 | 3 | 2 | 12,2165 | 14,0874 | -2394,26 | -2355,06 |
| 0      | 0 | 3 | 3 | 28,2577        | 29,6227        | -2381,75        | -2342,55        | 1      | 0 | 3 | 3 | 12,3886 | 14,2247 | -2393,56 | -2349,46 |
| 0      | 0 | 3 | 4 | 28,2577        | 29,6227        | -2379,75        | -2335,65        | 1      | 0 | 3 | 4 | 12,3886 | 14,2247 | -2391,56 | -2342,56 |
| 0      | 0 | 4 | 1 | 28,2577        | 29,6227        | -2374,28        | -2339,98        | 1      | 0 | 4 | 1 | 12,1806 | 14,0615 | -2384,99 | -2345,79 |
| 0      | 0 | 4 | 2 | 28,2577        | 29,6227        | -2378,85        | -2339,65        | 1      | 0 | 4 | 2 | 12,2166 | 14,0875 | -2392,26 | -2348,16 |
| 0      | 0 | 4 | 3 | 28,2577        | 29,6227        | -2379,75        | -2335,65        | 1      | 0 | 4 | 3 | 12,3899 | 14,2258 | -2391,56 | -2342,56 |
| 0      | 0 | 4 | 4 | 28,2577        | 29,6227        | -2377,75        | -2328,75        | 1      | 0 | 4 | 4 | 12,3884 | 14,2246 | -2389,56 | -2335,66 |
| 0      | 1 | 1 | 1 | 10,1513        | 11,9839        | -2393,00        | -2368,50        | 1      | 1 | 1 | 1 | 10,0510 | 11,8645 | -2390,35 | -2360,96 |
| 0      | 1 | 1 | 2 | 10,2426        | 12,0542        | <b>-2400,06</b> | <b>-2370,66</b> | 1      | 1 | 1 | 2 | 10,1180 | 11,9087 | -2397,56 | -2363,26 |
| 0      | 1 | 1 | 3 | 10,3169        | 12,1156        | -2398,52        | -2364,23        | 1      | 1 | 1 | 3 | 10,1707 | 11,9454 | -2396,06 | -2356,86 |
| 0      | 1 | 1 | 4 | 10,3170        | 12,1157        | -2396,52        | -2357,33        | 1      | 1 | 1 | 4 | 10,1722 | 11,9472 | -2394,06 | -2349,96 |
| 0      | 1 | 2 | 1 | 10,1514        | 11,9839        | -2391,00        | -2361,60        | 1      | 1 | 2 | 1 | 10,0511 | 11,8645 | -2388,35 | -2354,06 |
| 0      | 1 | 2 | 2 | 10,2424        | 12,0541        | -2398,06        | -2363,76        | 1      | 1 | 2 | 2 | 10,1183 | 11,9091 | -2395,56 | -2356,36 |
| 0      | 1 | 2 | 3 | 10,4260        | 12,2091        | -2397,60        | -2358,41        | 1      | 1 | 2 | 3 | 10,2199 | 11,9736 | -2394,91 | -2350,81 |
| 0      | 1 | 2 | 4 | 10,4257        | 12,2089        | -2395,60        | -2351,51        | 1      | 1 | 2 | 4 | 10,2199 | 11,9736 | -2392,91 | -2343,91 |
| 0      | 1 | 3 | 1 | 10,1517        | 11,9842        | -2389,00        | -2354,70        | 1      | 1 | 3 | 1 | 10,0511 | 11,8646 | -2386,35 | -2347,16 |
| 0      | 1 | 3 | 2 | 10,2427        | 12,0543        | -2396,06        | -2356,86        | 1      | 1 | 3 | 2 | 10,1183 | 11,9090 | -2393,56 | -2349,46 |
| 0      | 1 | 3 | 3 | 10,4258        | 12,2089        | -2395,60        | -2351,51        | 1      | 1 | 3 | 3 | 10,2200 | 11,9736 | -2392,91 | -2343,91 |
| 0      | 1 | 3 | 4 | 10,4259        | 12,2090        | -2393,60        | -2344,61        | 1      | 1 | 3 | 4 | 10,2196 | 11,9733 | -2390,91 | -2337,02 |
| 0      | 1 | 4 | 1 | 10,1514        | 11,9839        | -2387,00        | -2347,80        | 1      | 1 | 4 | 1 | 10,0512 | 11,8646 | -2384,35 | -2340,26 |
| 0      | 1 | 4 | 2 | 10,2425        | 12,0541        | -2394,06        | -2349,96        | 1      | 1 | 4 | 2 | 10,1179 | 11,9087 | -2391,56 | -2342,56 |
| 0      | 1 | 4 | 3 | 10,4261        | 12,2091        | -2393,60        | -2344,61        | 1      | 1 | 4 | 3 | 10,2203 | 11,9739 | -2390,91 | -2337,02 |
| 0      | 1 | 4 | 4 | 10,4272        | 12,2101        | -2391,60        | -2337,71        | 1      | 1 | 4 | 4 | 10,2203 | 11,9740 | -2388,91 | -2330,12 |

Tabela A. 6: Resultados dos teste de seleção de modelos ARMA (r, m) – GARCH (p,q); Telemar PN com janela de 504 dias (dois anos). Em negrito os melhores.

| Modelo |   |   |   | Testes        |                |                 |                 | Modelo |   |   |   | Testes |        |          |          |
|--------|---|---|---|---------------|----------------|-----------------|-----------------|--------|---|---|---|--------|--------|----------|----------|
| r      | m | p | q | Q (4)         | Q (8)          | AIC             | BIC             | r      | m | p | q | Q (4)  | Q (8)  | AIC      | BIC      |
| 0      | 0 | 1 | 1 | 7,6340        | 11,7069        | -2187,23        | <b>-2167,63</b> | 1      | 0 | 1 | 1 | 3,3712 | 8,5816 | -2189,66 | -2165,16 |
| 0      | 0 | 1 | 2 | <b>7,6340</b> | <b>11,7069</b> | -2185,40        | -2160,90        | 1      | 0 | 1 | 2 | 3,3723 | 8,5853 | -2188,03 | -2158,63 |
| 0      | 0 | 1 | 3 | 7,6340        | 11,7069        | -2183,93        | -2154,53        | 1      | 0 | 1 | 3 | 3,3883 | 8,6318 | -2186,80 | -2152,51 |
| 0      | 0 | 1 | 4 | 7,6340        | 11,7069        | -2181,93        | -2147,63        | 1      | 0 | 1 | 4 | 3,3881 | 8,6314 | -2184,80 | -2145,61 |
| 0      | 0 | 2 | 1 | 7,6340        | 11,7069        | -2185,23        | -2160,73        | 1      | 0 | 2 | 1 | 3,3712 | 8,5816 | -2187,66 | -2158,26 |
| 0      | 0 | 2 | 2 | 7,6340        | 11,7069        | -2183,95        | -2154,55        | 1      | 0 | 2 | 2 | 3,3634 | 8,5483 | -2186,41 | -2152,12 |
| 0      | 0 | 2 | 3 | 7,6340        | 11,7069        | -2182,13        | -2147,84        | 1      | 0 | 2 | 3 | 3,3927 | 8,6433 | -2185,05 | -2145,85 |
| 0      | 0 | 2 | 4 | 7,6340        | 11,7069        | -2180,13        | -2140,94        | 1      | 0 | 2 | 4 | 3,3685 | 8,5689 | -2183,54 | -2139,44 |
| 0      | 0 | 3 | 1 | 7,6340        | 11,7069        | -2183,23        | -2153,83        | 1      | 0 | 3 | 1 | 3,3712 | 8,5816 | -2185,66 | -2151,36 |
| 0      | 0 | 3 | 2 | 7,6340        | 11,7069        | -2181,95        | -2147,65        | 1      | 0 | 3 | 2 | 3,3634 | 8,5484 | -2184,41 | -2145,22 |
| 0      | 0 | 3 | 3 | 7,6340        | 11,7069        | -2181,38        | -2142,18        | 1      | 0 | 3 | 3 | 3,4266 | 8,7211 | -2184,70 | -2140,60 |
| 0      | 0 | 3 | 4 | 7,6340        | 11,7069        | -2179,78        | -2135,68        | 1      | 0 | 3 | 4 | 3,4420 | 8,7519 | -2183,38 | -2134,38 |
| 0      | 0 | 4 | 1 | 7,6340        | 11,7069        | -2181,23        | -2146,93        | 1      | 0 | 4 | 1 | 3,3712 | 8,5816 | -2183,66 | -2144,46 |
| 0      | 0 | 4 | 2 | 7,6340        | 11,7069        | -2179,95        | -2140,75        | 1      | 0 | 4 | 2 | 3,3634 | 8,5485 | -2182,41 | -2138,32 |
| 0      | 0 | 4 | 3 | 7,6340        | 11,7069        | -2179,40        | -2135,30        | 1      | 0 | 4 | 3 | 3,4261 | 8,7199 | -2182,72 | -2133,72 |
| 0      | 0 | 4 | 4 | 7,6340        | 11,7069        | -2178,67        | -2129,67        | 1      | 0 | 4 | 4 | 3,4419 | 8,7517 | -2182,42 | -2128,52 |
| 0      | 1 | 1 | 1 | 2,5234        | 7,9516         | <b>-2191,02</b> | -2166,52        | 1      | 1 | 1 | 1 | 1,7266 | 7,4214 | -2189,10 | -2159,71 |
| 0      | 1 | 1 | 2 | 2,5224        | 7,9464         | -2189,39        | -2159,99        | 1      | 1 | 1 | 2 | 1,7223 | 7,4380 | -2187,53 | -2153,23 |
| 0      | 1 | 1 | 3 | 2,5450        | 8,0289         | -2188,26        | -2153,96        | 1      | 1 | 1 | 3 | 1,7585 | 7,5806 | -2186,53 | -2147,33 |
| 0      | 1 | 1 | 4 | 2,5450        | 8,0288         | -2186,26        | -2147,06        | 1      | 1 | 1 | 4 | 1,7581 | 7,5795 | -2184,53 | -2140,43 |
| 0      | 1 | 2 | 1 | 2,5235        | 7,9517         | -2189,02        | -2159,62        | 1      | 1 | 2 | 1 | 1,7266 | 7,4214 | -2187,10 | -2152,81 |
| 0      | 1 | 2 | 2 | 2,5165        | 7,9034         | -2187,69        | -2153,40        | 1      | 1 | 2 | 2 | 1,7251 | 7,3633 | -2185,75 | -2146,55 |
| 0      | 1 | 2 | 3 | 2,5557        | 8,0590         | -2186,56        | -2147,36        | 1      | 1 | 2 | 3 | 1,7857 | 7,6647 | -2184,93 | -2140,83 |
| 0      | 1 | 2 | 4 | 2,5557        | 8,0591         | -2184,56        | -2140,46        | 1      | 1 | 2 | 4 | 1,7248 | 7,4350 | -2183,02 | -2134,03 |
| 0      | 1 | 3 | 1 | 2,5235        | 7,9519         | -2187,02        | -2152,72        | 1      | 1 | 3 | 1 | 1,7265 | 7,4213 | -2185,10 | -2145,91 |
| 0      | 1 | 3 | 2 | 2,5165        | 7,9034         | -2185,69        | -2146,50        | 1      | 1 | 3 | 2 | 1,7251 | 7,3632 | -2183,75 | -2139,65 |
| 0      | 1 | 3 | 3 | 2,6278        | 8,2222         | -2186,37        | -2142,28        | 1      | 1 | 3 | 3 | 1,9345 | 7,9959 | -2185,09 | -2136,09 |
| 0      | 1 | 3 | 4 | 2,6296        | 8,2258         | -2184,96        | -2135,96        | 1      | 1 | 3 | 4 | 1,9270 | 7,9704 | -2183,60 | -2129,71 |
| 0      | 1 | 4 | 1 | 2,5236        | 7,9524         | -2185,02        | -2145,82        | 1      | 1 | 4 | 1 | 1,7265 | 7,4213 | -2183,10 | -2139,01 |
| 0      | 1 | 4 | 2 | 2,5165        | 7,9033         | -2183,69        | -2139,60        | 1      | 1 | 4 | 2 | 1,7252 | 7,3633 | -2181,75 | -2132,75 |
| 0      | 1 | 4 | 3 | 2,6335        | 8,2335         | -2184,43        | -2135,43        | 1      | 1 | 4 | 3 | 1,9860 | 8,1032 | -2183,24 | -2129,34 |
| 0      | 1 | 4 | 4 | 2,6570        | 8,2792         | -2184,15        | -2130,26        | 1      | 1 | 4 | 4 | 2,0629 | 8,2437 | -2183,09 | -2124,30 |

## Apêndice 2

Modelos de VaR estáticos para Vale do Rio Doce PNA com 255 observações.

Tabela A. 7: VaR estático –1 para a Vale do Rio Doce PNA.

| Metodologia                       | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio                | VaR Desvio Padrão        | VaR Máximo               | VaR Mínimo               |
|-----------------------------------|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Delta-normal Tradicional          | 118                 | 46,27                   | R               | 0,4628           | $1,2379 \times 10^{-4}$ | $-3,6355 \times 10^{-4}$ | $4,3009 \times 10^{-6}$  | $-3,7028 \times 10^{-4}$ | $-3,5948 \times 10^{-4}$ |
| Delta-normal GARCH (0,0) (1,1)    | 118                 | 46,27                   | R               | 0,4628           | $1,2403 \times 10^{-4}$ | $-3,4450 \times 10^{-4}$ | $4,4301 \times 10^{-6}$  | $-3,4813 \times 10^{-4}$ | $-3,3687 \times 10^{-4}$ |
| Delta-normal EGARCH (0,1) (1,1,1) | 118                 | 46,27                   | R               | 0,4629           | $1,2325 \times 10^{-4}$ | $-4,1237 \times 10^{-4}$ | $4,4831 \times 10^{-5}$  | $-4,8310 \times 10^{-4}$ | $-3,7951 \times 10^{-4}$ |
| MSH Tradicional                   | 6                   | 2,35                    | R               | 0,02353          | $2,7055 \times 10^{-6}$ | -0,03184                 | $9,7336 \times 10^{-17}$ | -0,03184                 | -0,03184                 |
| MSH <i>Bootstrap</i>              | 16                  | 6,27                    | A               | 0,06275          | $9,1075 \times 10^{-6}$ | -0,02340                 | $8,0401 \times 10^{-4}$  | -0,02455                 | -0,02260                 |
| MSH <i>Mirror</i> cenários        | 3                   | 1,18                    | R               | 0,01178          | $1,6795 \times 10^{-6}$ | -0,03496                 | $9,0383 \times 10^{-17}$ | -0,03496                 | -0,03496                 |
| MSH Cenários ponderados           | 6                   | 2,35                    | R               | 0,02353          | $2,7055 \times 10^{-6}$ | -0,03184                 | $9,7336 \times 10^{-17}$ | -0,03184                 | -0,03184                 |

Tabela A. 8: VaR estático -2 para a Vale do Rio Doce PNA.

| Metodologia   | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão       | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|---|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|-------------------------|------------|------------|
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r constante          | 9                   | 3,53                    | A               | 0,03530          | $4,4181 \times 10^{-6}$ | -0,02841  | $1,2668 \times 10^{-4}$ | -0,02862   | -0,02830   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r constante          | 9                   | 3,53                    | A               | 0,03530          | $4,4890 \times 10^{-6}$ | -0,02829  | $1,2566 \times 10^{-4}$ | -0,02850   | -0,02819   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r constante    | 10                  | 3,92                    | A               | 0,03922          | $4,8025 \times 10^{-6}$ | -0,02772  | $2,8801 \times 10^{-4}$ | -0,02786   | -0,02649   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r constante    | 10                  | 3,92                    | A               | 0,03922          | $4,8754 \times 10^{-6}$ | -0,02761  | $2,8577 \times 10^{-4}$ | -0,02774   | -0,02639   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r constante | 7                   | 2,74                    | A               | 0,02745          | $3,5385 \times 10^{-6}$ | -0,03235  | $3,5552 \times 10^{-3}$ | -0,03828   | -0,02970   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r constante | 8                   | 3,14                    | A               | 0,03138          | $3,6025 \times 10^{-6}$ | -0,03220  | $3,5211 \times 10^{-3}$ | -0,03807   | -0,02957   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r variável           | 4                   | 1,57                    | R               | 0,01568          | $1,8095 \times 10^{-6}$ | -0,03664  | $1,2805 \times 10^{-3}$ | -0,03780   | -0,03450   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r variável           | 4                   | 1,57                    | R               | 0,01568          | $1,8433 \times 10^{-6}$ | -0,03652  | $1,2806 \times 10^{-3}$ | -0,03769   | -0,03438   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r variável     | 12                  | 4,71                    | A               | 0,04706          | $5,9120 \times 10^{-6}$ | -0,02627  | $2,8147 \times 10^{-4}$ | -0,02655   | -0,02489   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r variável     | 12                  | 4,71                    | A               | 0,04706          | $5,9993 \times 10^{-6}$ | -0,02616  | $2,7951 \times 10^{-4}$ | -0,02644   | -0,02479   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r variável  | 11                  | 4,31                    | A               | 0,04314          | $5,6278 \times 10^{-6}$ | -0,02888  | $3,8613 \times 10^{-3}$ | -0,03532   | -0,02585   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r variável  | 11                  | 4,31                    | A               | 0,04314          | $5,7243 \times 10^{-6}$ | -0,02872  | $3,8272 \times 10^{-3}$ | -0,03511   | -0,02572   |

### Apêndice 3

#### Modelos de VaR estáticos para a Petrobrás PN.

Tabela A. 9: VaR estático –1 para a Petrobrás PN com 255 observações.

| Metodologia                       | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio                | VaR Desvio Padrão        | VaR Máximo               | VaR Mínimo               |
|-----------------------------------|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Delta-normal Tradicional          | 101                 | 39,61                   | R               | 0,3962           | $1,2574 \times 10^{-4}$ | $-9,7617 \times 10^{-4}$ | $1,6143 \times 10^{-5}$  | $-9,6548 \times 10^{-4}$ | $-9,6548 \times 10^{-4}$ |
| Delta-normal GARCH (0,0) (1,1)    | 101                 | 39,61                   | R               | 0,3962           | $1,2595 \times 10^{-4}$ | $-9,4822 \times 10^{-4}$ | $6,4073 \times 10^{-5}$  | $-1,0140 \times 10^{-3}$ | $-8,5612 \times 10^{-4}$ |
| Delta-normal EGARCH (0,1) (1,1,1) | 102                 | 40,00                   | R               | 0,4001           | $1,2632 \times 10^{-4}$ | $-9,5566 \times 10^{-4}$ | $1,2206 \times 10^{-4}$  | $-1,0789 \times 10^{-3}$ | $-7,7385 \times 10^{-4}$ |
| MSH Tradicional                   | 6                   | 2,35                    | R               | 0,02353          | $2,7677 \times 10^{-6}$ | -0,03879                 | $6,9525 \times 10^{-18}$ | -0,03879                 | -0,03879                 |
| MSH <i>Bootstrap</i>              | 34                  | 13,33                   | R               | 0,1333           | $3,2526 \times 10^{-5}$ | -0,01646                 | $9,2197 \times 10^{-4}$  | -0,01770                 | -0,01547                 |
| MSH <i>Mirror</i> cenários        | 4                   | 1,57                    | R               | 0,01569          | $1,1027 \times 10^{-6}$ | -0,04415                 | $1,1124 \times 10^{-4}$  | -0,04415                 | -0,04415                 |
| MSH Cenários ponderados           | 6                   | 2,35                    | R               | 0,02353          | $2,7677 \times 10^{-6}$ | -0,03879                 | $6,9525 \times 10^{-18}$ | -0,03879                 | -0,03879                 |



Tabela A. 10: VaR estático -2 para a Petrobrás PN com 255 observações.

| Metodologia   | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão       | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|---|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|-------------------------|------------|------------|
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r constante          | 6                   | 2,35                    | R               | 0,02353          | $3,8268 \times 10^{-6}$ | -0,03657  | $5,6873 \times 10^{-5}$ | -0,03667   | -0,03654   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r constante          | 6                   | 2,35                    | R               | 0,02353          | $3,9315 \times 10^{-6}$ | -0,03638  | $5,6289 \times 10^{-5}$ | -0,03648   | -0,03634   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r constante    | 6                   | 2,35                    | R               | 0,02353          | $2,5812 \times 10^{-6}$ | -0,03944  | $8,4865 \times 10^{-5}$ | -0,04018   | -0,03697   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r constante    | 6                   | 2,35                    | R               | 0,02353          | $2,6736 \times 10^{-6}$ | -0,03922  | $8,3942 \times 10^{-5}$ | -0,03995   | -0,03678   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r constante | 9                   | 3,53                    | A               | 0,03530          | $7,3066 \times 10^{-6}$ | -0,03585  | $5,0632 \times 10^{-3}$ | -0,04074   | -0,02798   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r constante | 9                   | 3,53                    | A               | 0,03530          | $7,4160 \times 10^{-6}$ | -0,03566  | $5,0140 \times 10^{-3}$ | -0,04050   | -0,02787   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r variável           | 10                  | 3,92                    | A               | 0,03923          | $1,0938 \times 10^{-5}$ | -0,02936  | $2,4117 \times 10^{-3}$ | -0,03257   | -0,02577   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r variável           | 10                  | 3,92                    | A               | 0,03923          | $1,1149 \times 10^{-5}$ | -0,02917  | $2,4121 \times 10^{-3}$ | -0,03238   | -0,02559   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r variável     | 6                   | 2,35                    | R               | 0,02353          | $2,7930 \times 10^{-6}$ | -0,03906  | $1,5385 \times 10^{-3}$ | -0,04077   | -0,03216   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r variável     | 6                   | 2,35                    | R               | 0,02353          | $2,8871 \times 10^{-6}$ | -0,03884  | $1,5221 \times 10^{-3}$ | -0,04053   | -0,03201   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r variável  | 11                  | 4,31                    | A               | 0,04315          | $1,1866 \times 10^{-5}$ | -0,03419  | $7,2114 \times 10^{-3}$ | -0,04039   | -0,02221   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r variável  | 11                  | 4,31                    | A               | 0,04315          | $1,2013 \times 10^{-5}$ | -0,03400  | $7,1628 \times 10^{-3}$ | -0,04013   | -0,02209   |

Tabela A. 11: VaR estático –1 para a Petrobrás PN com 510 observações.

| Metodologia                       | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio                | VaR Desvio Padrão        | VaR Máximo               | VaR Mínimo               |
|-----------------------------------|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Delta-normal Tradicional          | 233                 | 45,69                   | R               | 0,4571           | $2,1777 \times 10^{-4}$ | $-7,6574 \times 10^{-4}$ | $1,5425 \times 10^{-5}$  | $-7,9911 \times 10^{-4}$ | $-7,4895 \times 10^{-4}$ |
| Delta-normal GARCH (0,0) (1,1)    | 233                 | 45,69                   | R               | 0,4571           | $2,1938 \times 10^{-4}$ | $-6,5004 \times 10^{-4}$ | $2,9405 \times 10^{-5}$  | $-6,7114 \times 10^{-4}$ | $-6,1913 \times 10^{-4}$ |
| Delta-normal EGARCH (0,1) (1,1,1) | 233                 | 45,69                   | R               | 0,4571           | $2,1850 \times 10^{-4}$ | $-7,2184 \times 10^{-4}$ | $9,8971 \times 10^{-5}$  | $-8,8898 \times 10^{-4}$ | $-5,9149 \times 10^{-4}$ |
| MSH Tradicional                   | 20                  | 3,92                    | A               | 0,03923          | $1,4996 \times 10^{-5}$ | -0,04089                 | $3,2645 \times 10^{-16}$ | -0,04089                 | -0,04089                 |
| MSH <i>Bootstrap</i>              | 145                 | 28,43                   | R               | 0,2844           | $1,1928 \times 10^{-4}$ | $-9,4451 \times 10^{-3}$ | $7,3272 \times 10^{-4}$  | -0,01020                 | $-8,0717 \times 10^{-3}$ |
| MSH <i>Mirror</i> cenários        | 21                  | 4,12                    | A               | 0,04119          | $2,0035 \times 10^{-5}$ | -0,03643                 | $3,8101 \times 10^{-6}$  | -0,03643                 | -0,03643                 |
| MSH Cenários ponderados           | 20                  | 3,92                    | A               | 0,03921          | $1,4996 \times 10^{-5}$ | -0,04059                 | $3,2645 \times 10^{-16}$ | -0,04059                 | -0,04059                 |

Tabela A. 12: VaR estático -2 para a Petrobrás PN com 510 observações.

| Metodologia   | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão       | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|---|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|-------------------------|------------|------------|
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r constante          | 30                  | 5,88                    | A               | 0,05885          | $2,6116 \times 10^{-5}$ | -0,03253  | $4,0964 \times 10^{-5}$ | -0,03262   | -0,03248   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r constante          | 32                  | 6,27                    | A               | 0,06277          | $2,6386 \times 10^{-5}$ | -0,03239  | $4,0588 \times 10^{-5}$ | -0,03247   | -0,03233   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r constante    | 33                  | 6,47                    | A               | 0,06473          | $2,8022 \times 10^{-5}$ | -0,03185  | $1,2231 \times 10^{-3}$ | -0,03250   | -0,02693   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r constante    | 33                  | 6,47                    | A               | 0,06473          | $2,8292 \times 10^{-5}$ | -0,03170  | $1,2126 \times 10^{-3}$ | -0,03235   | -0,02683   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r constante | 32                  | 6,27                    | A               | 0,06278          | $3,2424 \times 10^{-5}$ | -0,03067  | $4,6774 \times 10^{-3}$ | -0,03884   | -0,02465   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r constante | 32                  | 6,27                    | A               | 0,06278          | $3,2688 \times 10^{-5}$ | -0,03053  | $4,6360 \times 10^{-3}$ | -0,03862   | -0,02456   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r variável           | 43                  | 8,43                    | R               | 0,08435          | $4,4356 \times 10^{-5}$ | -0,02534  | $1,6342 \times 10^{-3}$ | -0,02777   | -0,02294   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r variável           | 44                  | 8,63                    | R               | 0,08631          | $4,4797 \times 10^{-5}$ | -0,02519  | $1,6345 \times 10^{-3}$ | -0,02762   | -0,02279   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r variável     | 32                  | 6,27                    | A               | 0,06277          | $2,7738 \times 10^{-5}$ | -0,03171  | $1,2045 \times 10^{-3}$ | -0,03251   | -0,02514   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r variável     | 33                  | 6,47                    | A               | 0,06473          | $2,8016 \times 10^{-5}$ | -0,03160  | $1,1945 \times 10^{-3}$ | -0,03256   | -0,02504   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r variável  | 36                  | 7,06                    | R               | 0,07062          | $3,5988 \times 10^{-5}$ | -0,02912  | $5,0719 \times 10^{-3}$ | -0,03732   | -0,02161   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r variável  | 37                  | 7,25                    | R               | 0,07258          | $3,6278 \times 10^{-5}$ | -0,02895  | $5,0311 \times 10^{-3}$ | -0,03711   | -0,02152   |

## Apêndice 4

### Modelos de VaR estáticos para a Telemar PN

Tabela A. 13: VaR estático –1 para a Telemar PN com 255 observações.

| Metodologia                       | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio                | VaR Desvio Padrão        | VaR Máximo               | VaR Mínimo               |
|-----------------------------------|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Delta-normal Tradicional          | 105                 | 41,18                   | R               | 0,4120           | $2,0550 \times 10^{-4}$ | $-1,8133 \times 10^{-3}$ | $3,6216 \times 10^{-5}$  | $-1,8838 \times 10^{-3}$ | $-1,7862 \times 10^{-3}$ |
| Delta-normal GARCH (0,0) (1,1)    | 105                 | 41,18                   | R               | 0,4120           | $2,0630 \times 10^{-4}$ | $-1,7275 \times 10^{-3}$ | $5,9028 \times 10^{-5}$  | $-1,8175 \times 10^{-3}$ | $-1,6678 \times 10^{-3}$ |
| Delta-normal EGARCH (0,1) (1,1,1) | 106                 | 41,57                   | R               | 0,4159           | $2,0558 \times 10^{-4}$ | $-1,7175 \times 10^{-3}$ | $4,3082 \times 10^{-4}$  | $-2,2039 \times 10^{-3}$ | $-1,3022 \times 10^{-3}$ |
| MSH Tradicional                   | 5                   | 1,96                    | R               | 0,01961          | $3,3887 \times 10^{-6}$ | -0,04659                 | $4,8668 \times 10^{-17}$ | -0,04659                 | -0,04659                 |
| MSH <i>Bootstrap</i>              | 50                  | 19,61                   | R               | 0,1961           | $6,7845 \times 10^{-5}$ | -0,01611                 | $8,3686 \times 10^{-4}$  | -0,01707                 | -0,01480                 |
| MSH <i>Mirror</i> cenários        | 5                   | 1,96                    | R               | 0,01961          | $3,8535 \times 10^{-6}$ | -0,04563                 | $1,3210 \times 10^{-16}$ | -0,04563                 | -0,04563                 |
| MSH Cenários ponderados           | 5                   | 1,96                    | R               | 0,01961          | $3,3887 \times 10^{-6}$ | -0,04659                 | $4,8668 \times 10^{-17}$ | -0,04659                 | -0,04659                 |

Tabela A. 14: VaR estático -2 para a Telemar PN com 255 observações.

| Metodologia   | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão       | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|---|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|-------------------------|------------|------------|
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r constante          | 9                   | 3,53                    | A               | 0,03530          | $7,5200 \times 10^{-6}$ | -0,04001  | $5,7102 \times 10^{-5}$ | -0,04006   | -0,03992   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r constante          | 9                   | 3,53                    | A               | 0,03530          | $7,7137 \times 10^{-6}$ | -0,03978  | $5,6465 \times 10^{-5}$ | -0,03984   | -0,03969   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r constante    | 9                   | 3,53                    | A               | 0,03530          | $7,8727 \times 10^{-6}$ | -0,03951  | $3,2553 \times 10^{-4}$ | -0,03917   | -0,03861   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r constante    | 9                   | 3,53                    | A               | 0,03530          | $8,0701 \times 10^{-6}$ | -0,03928  | $3,2196 \times 10^{-4}$ | -0,03959   | -0,03840   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r constante | 13                  | 5,10                    | A               | 0,05099          | $6,6540 \times 10^{-6}$ | -0,03771  | $9,4866 \times 10^{-3}$ | -0,04787   | -0,02851   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r constante | 13                  | 5,10                    | A               | 0,05099          | $6,8431 \times 10^{-6}$ | -0,03749  | $9,3856 \times 10^{-3}$ | -0,04754   | -0,02840   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r variável           | 19                  | 7,45                    | A               | 0,07453          | $2,5287 \times 10^{-5}$ | -0,03019  | $2,7976 \times 10^{-3}$ | -0,03317   | -0,02588   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r variável           | 19                  | 7,45                    | A               | 0,07453          | $2,5749 \times 10^{-5}$ | -0,02996  | $2,7975 \times 10^{-3}$ | -0,03294   | -0,02565   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r variável     | 9                   | 3,53                    | A               | 0,03530          | $7,4756 \times 10^{-6}$ | -0,03993  | $6,0002 \times 10^{-4}$ | -0,04059   | -0,03744   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r variável     | 9                   | 3,53                    | A               | 0,03530          | $7,6660 \times 10^{-6}$ | -0,03971  | $5,9369 \times 10^{-4}$ | -0,04036   | -0,03725   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r variável  | 15                  | 5,88                    | A               | 0,05853          | $7,5869 \times 10^{-6}$ | -0,03731  | $9,3536 \times 10^{-3}$ | -0,04829   | -0,02808   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r variável  | 16                  | 6,27                    | A               | 0,06275          | $7,7967 \times 10^{-6}$ | -0,03710  | $9,2530 \times 10^{-3}$ | -0,04797   | -0,02796   |

Tabela A. 15: VaR estático –1 para a Telemar PN com 510 observações.

| Metodologia                       | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio                | VaR Desvio Padrão        | VaR Máximo               | VaR Mínimo               |
|-----------------------------------|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Delta-normal Tradicional          | 235                 | 46,08                   | R               | 0,4611           | $2,7522 \times 10^{-4}$ | $-1,7275 \times 10^{-3}$ | $3,5369 \times 10^{-5}$  | $-1,7776 \times 10^{-3}$ | $-1,6717 \times 10^{-3}$ |
| Delta-normal GARCH (0,0) (1,1)    | 231                 | 45,29                   | R               | 0,4532           | $2,6781 \times 10^{-4}$ | $-1,9189 \times 10^{-3}$ | $7,4212 \times 10^{-5}$  | $-2,0480 \times 10^{-3}$ | $-1,8093 \times 10^{-3}$ |
| Delta-normal EGARCH (0,1) (1,1,1) | 231                 | 45,29                   | R               | 0,4532           | $2,6720 \times 10^{-4}$ | $-2,1573 \times 10^{-3}$ | $3,4254 \times 10^{-4}$  | $-2,8200 \times 10^{-3}$ | $-1,7444 \times 10^{-3}$ |
| MSH Tradicional                   | 18                  | 3,53                    | A               | 0,03531          | $1,2750 \times 10^{-5}$ | -0,046583                | $4,1674 \times 10^{-17}$ | -0,046583                | -0,046583                |
| MSH <i>Bootstrap</i>              | 98                  | 19,22                   | R               | 0,1922           | $7,8519 \times 10^{-5}$ | -0,020676                | $1,2548 \times 10^{-3}$  | -0,02268                 | -0,018798                |
| MSH <i>Mirror</i> cenários        | 18                  | 3,53                    | A               | 0,03531          | $1,1088 \times 10^{-5}$ | -0,046773                | $3,1950 \times 10^{-16}$ | -0,046773                | -0,046773                |
| MSH Cenários ponderados           | 18                  | 3,53                    | A               | 0,03531          | $1,1275 \times 10^{-5}$ | -0,046583                | $4,1674 \times 10^{-17}$ | -0,046583                | -0,046583                |

Tabela A. 16: VaR estático -2 para a Telemar PN com 510 observações.

| Metodologia   | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão       | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|---|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|-------------------------|------------|------------|
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r constante          | 22                  | 4,31                    | A               | 0,04315          | $1,5031 \times 10^{-5}$ | -0,04328  | $4,0901 \times 10^{-5}$ | -0,04339   | -0,04324   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r constante          | 22                  | 4,31                    | A               | 0,04315          | $1,5373 \times 10^{-5}$ | -0,04301  | $4,0408 \times 10^{-5}$ | -0,04312   | -0,04298   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r constante    | 18                  | 3,53                    | A               | 0,03531          | $1,1401 \times 10^{-5}$ | -0,04645  | $1,2612 \times 10^{-4}$ | -0,04676   | -0,04631   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r constante    | 18                  | 3,53                    | A               | 0,03531          | $1,1721 \times 10^{-5}$ | -0,04614  | $1,2450 \times 10^{-4}$ | -0,04645   | -0,04600   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r constante | 93                  | 18,23                   | R               | 0,1825           | $9,2674 \times 10^{-5}$ | -0,01949  | $5,6759 \times 10^{-3}$ | -0,04522   | -0,01678   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r constante | 93                  | 18,23                   | R               | 0,1825           | $9,2987 \times 10^{-5}$ | -0,01943  | $5,6316 \times 10^{-3}$ | -0,04493   | -0,01674   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r variável           | 16                  | 3,14                    | R               | 0,03138          | $8,6618 \times 10^{-6}$ | -0,05096  | $3,1706 \times 10^{-3}$ | -0,05704   | -0,04568   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r variável           | 16                  | 3,14                    | R               | 0,03138          | $8,8811 \times 10^{-6}$ | -0,05070  | $3,1704 \times 10^{-3}$ | -0,05677   | -0,04541   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r variável     | 16                  | 3,14                    | R               | 0,03138          | $8,3361 \times 10^{-6}$ | -0,04936  | $1,1704 \times 10^{-3}$ | -0,05449   | -0,04790   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r variável     | 16                  | 3,14                    | R               | 0,03138          | $8,5943 \times 10^{-6}$ | -0,04905  | $1,1549 \times 10^{-3}$ | -0,05410   | -0,04760   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r variável  | 13                  | 2,55                    | R               | 0,02550          | $3,6965 \times 10^{-6}$ | -0,05459  | $9,7652 \times 10^{-3}$ | -0,07250   | -0,04263   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r variável  | 14                  | 2,74                    | R               | 0,02745          | $3,9176 \times 10^{-6}$ | -0,05416  | $9,6105 \times 10^{-3}$ | -0,07177   | -0,04237   |

## Apêndice 5

### Modelos de VaR estáticos para carteiras com duas e três ações e 255 observações

Tabela A. 17: VaR estático-1 para a carteira com Vale do Rio Doce PNA e Petrobrás PN.

| Metodologia  | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão        | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|--|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|--------------------------|------------|------------|
| MSH Tradicional                                    | 4                   | 1,56                    | R               | 0,01569          | $3,7800 \times 10^{-6}$ | -0,02853  | $4,1715 \times 10^{-17}$ | -0,02853   | -0,02853   |
| MSH <i>Bootstrap</i>                               | 45                  | 17,65                   | R               | 0,17649          | $2,2781 \times 10^{-5}$ | -0,01155  | $9,5090 \times 10^{-4}$  | -0,01296   | -0,01053   |
| MSH <i>Mirror</i> cenários                         | 7                   | 2,74                    | A               | 0,02746          | $5,0331 \times 10^{-6}$ | -0,02556  | $1,1819 \times 10^{-16}$ | -0,02556   | -0,02556   |
| MSH Cenários ponderados                            | 4                   | 1,56                    | R               | 0,01569          | $3,7800 \times 10^{-6}$ | -0,02853  | $4,1715 \times 10^{-17}$ | -0,02853   | -0,02853   |
| MSMC Tradicional Modelo 1 com r constante          | 3                   | 1,18                    | R               | 0,01177          | $2,8829 \times 10^{-6}$ | -0,03114  | $3,9366 \times 10^{-4}$  | -0,03200   | -0,03021   |
| MSMC Tradicional Modelo 2 com r constante          | 3                   | 1,18                    | R               | 0,01177          | $2,8899 \times 10^{-6}$ | -0,03112  | $3,9244 \times 10^{-4}$  | -0,03198   | -0,03018   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) Modelo 1 com r constante    | 3                   | 1,18                    | R               | 0,01177          | $2,7073 \times 10^{-6}$ | -0,03153  | $5,2065 \times 10^{-4}$  | -0,03243   | -0,02976   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) Modelo 2 com r constante    | 3                   | 1,18                    | R               | 0,01177          | $2,9137 \times 10^{-6}$ | -0,03151  | $5,1978 \times 10^{-4}$  | -0,03241   | -0,02975   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) Modelo 1 com r constante | 3                   | 1,18                    | R               | 0,01177          | $3,6950 \times 10^{-6}$ | -0,03333  | $3,6819 \times 10^{-3}$  | -0,03870   | -0,02834   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) Modelo 2 com r constante | 3                   | 1,18                    | R               | 0,01177          | $3,7027 \times 10^{-6}$ | -0,03330  | $3,6765 \times 10^{-3}$  | -0,03866   | -0,02831   |



Tabela A. 18: VaR estático-2 para a carteira com Vale do Rio Doce PNA e Petrobrás PN.

| Metodologia  | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão       | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|--|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|-------------------------|------------|------------|
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r variável          | 3                   | 1,18                    | R               | 0,01177          | $3,6859 \times 10^{-6}$ | -0,03163  | $1,8485 \times 10^{-3}$ | -0,03435   | -0,02702   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r variável          | 3                   | 1,18                    | R               | 0,01177          | $3,6942 \times 10^{-6}$ | -0,03160  | $1,8478 \times 10^{-3}$ | -0,03433   | -0,02700   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r variável    | 3                   | 1,18                    | R               | 0,01177          | $2,9678 \times 10^{-6}$ | -0,03070  | $6,5735 \times 10^{-4}$ | -0,03190   | -0,02809   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r variável    | 3                   | 1,18                    | R               | 0,01177          | $2,9746 \times 10^{-6}$ | -0,03068  | $6,5673 \times 10^{-4}$ | -0,03188   | -0,02806   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r variável | 8                   | 3,14                    | A               | 0,03138          | $5,6877 \times 10^{-6}$ | -0,03076  | $4,7445 \times 10^{-3}$ | -0,03732   | -0,02362   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r variável | 8                   | 3,14                    | A               | 0,03138          | $5,6990 \times 10^{-6}$ | -0,03073  | $4,7395 \times 10^{-3}$ | -0,03729   | -0,02360   |

Tabela A. 19: VaR estático-1 para a carteira com Vale do Rio Doce PNA e Telemar PN.

| Metodologia  | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão        | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|--|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|--------------------------|------------|------------|
| MSH Tradicional                                    | 10                  | 3,92                    | A               | 0,03926          | $9,2571 \times 10^{-6}$ | -0,02540  | $1,0776 \times 10^{-16}$ | -0,02540   | -0,02540   |
| MSH <i>Bootstrap</i>                               | 46                  | 18,04                   | R               | 0,18043          | $3,4369 \times 10^{-5}$ | -0,01280  | $3,4784 \times 10^{-4}$  | -0,01314   | -0,01229   |
| MSH <i>Mirror</i> cenários                         | 7                   | 2,74                    | A               | 0,02746          | $6,1984 \times 10^{-6}$ | -0,02919  | $1,7381 \times 10^{-16}$ | -0,02919   | -0,02919   |
| MSH Cenários ponderados                            | 10                  | 3,92                    | A               | 0,03923          | $9,2571 \times 10^{-6}$ | -0,02540  | $1,0775 \times 10^{-16}$ | -0,02540   | -0,02540   |
| MSMC Tradicional Modelo 1 com r constante          | 16                  | 6,27                    | A               | 0,06275          | $1,1809 \times 10^{-5}$ | -0,02308  | $9,2955 \times 10^{-4}$  | -0,02510   | -0,02168   |
| MSMC Tradicional Modelo 2 com r constante          | 16                  | 6,27                    | A               | 0,06276          | $1,1822 \times 10^{-5}$ | -0,02307  | $9,2895 \times 10^{-4}$  | -0,02509   | -0,02164   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) Modelo 1 com r constante    | 16                  | 6,27                    | A               | 0,06276          | $1,2140 \times 10^{-5}$ | -0,02274  | $9,3980 \times 10^{-4}$  | -0,02471   | -0,02111   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) Modelo 2 com r constante    | 16                  | 6,27                    | A               | 0,06276          | $1,2616 \times 10^{-5}$ | -0,02272  | $9,3807 \times 10^{-4}$  | -0,02496   | -0,02110   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) Modelo 1 com r constante | 17                  | 6,67                    | A               | 0,06667          | $9,5600 \times 10^{-6}$ | -0,02362  | $3,7459 \times 10^{-3}$  | -0,02895   | -0,01702   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) Modelo 2 com r constante | 17                  | 6,67                    | A               | 0,06667          | $9,6106 \times 10^{-6}$ | -0,02356  | $3,7705 \times 10^{-3}$  | -0,02890   | -0,01696   |

Tabela A. 20: VaR estático-2 para a carteira com Vale do Rio Doce PNA e Telemar PN.

| Metodologia  | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão       | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|--|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|-------------------------|------------|------------|
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r variável          | 21                  | 8,23                    | R               | 0,08237          | $1,5917 \times 10^{-5}$ | -0,02256  | $1,8590 \times 10^{-3}$ | -0,02523   | -0,01869   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r variável          | 21                  | 8,23                    | R               | 0,08237          | $1,5936 \times 10^{-5}$ | -0,02255  | $1,8590 \times 10^{-3}$ | -0,02520   | -0,01868   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r variável    | 18                  | 7,06                    | A               | 0,07060          | $1,2910 \times 10^{-5}$ | -0,02215  | $1,0206 \times 10^{-3}$ | -0,02452   | -0,01991   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r variável    | 18                  | 7,06                    | A               | 0,07060          | $1,2925 \times 10^{-5}$ | -0,02214  | $1,0200 \times 10^{-3}$ | -0,02450   | -0,01987   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r variável | 22                  | 8,63                    | R               | 0,08629          | $1,2636 \times 10^{-5}$ | -0,02165  | $3,7700 \times 10^{-3}$ | -0,02750   | -0,01477   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r variável | 22                  | 8,63                    | R               | 0,08629          | $1,2705 \times 10^{-5}$ | -0,02160  | $3,7707 \times 10^{-3}$ | -0,02745   | -0,01476   |

Tabela A. 21: VaR estático-1 para a carteira com Telemar PN e Petrobrás PN.

| Metodologia  | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão        | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|--|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|--------------------------|------------|------------|
| MSH Tradicional                                    | 6                   | 2,35                    | R               | 0,02353          | $2,3996 \times 10^{-6}$ | -0,04031  | $6,9525 \times 10^{-18}$ | -0,04031   | -0,04031   |
| MSH <i>Bootstrap</i>                               | 31                  | 12,18                   | R               | 0,12161          | $3,7798 \times 10^{-5}$ | -0,01665  | $1,3355 \times 10^{-3}$  | -0,01821   | -0,01440   |
| MSH <i>Mirror</i> cenários                         | 8                   | 3,17                    | A               | 0,03138          | $3,3092 \times 10^{-6}$ | -0,03813  | $4,8668 \times 10^{-17}$ | -0,03813   | -0,03813   |
| MSH Cenários ponderados                            | 6                   | 2,35                    | R               | 0,02353          | $2,3996 \times 10^{-6}$ | -0,04031  | $6,9525 \times 10^{-18}$ | -0,04031   | -0,04031   |
| MSMC Tradicional Modelo 1 com r constante          | 8                   | 3,14                    | A               | 0,03137          | $4,0120 \times 10^{-6}$ | -0,03673  | $7,4857 \times 10^{-5}$  | -0,03691   | -0,03650   |
| MSMC Tradicional Modelo 2 com r constante          | 8                   | 3,14                    | A               | 0,03137          | $4,0278 \times 10^{-6}$ | -0,03670  | $7,4324 \times 10^{-5}$  | -0,03687   | -0,03647   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) Modelo 1 com r constante    | 8                   | 3,14                    | A               | 0,03137          | $3,4697 \times 10^{-6}$ | -0,03770  | $5,2321 \times 10^{-4}$  | -0,03820   | -0,03616   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) Modelo 2 com r constante    | 8                   | 3,14                    | A               | 0,03138          | $3,4840 \times 10^{-6}$ | -0,03767  | $5,2263 \times 10^{-4}$  | -0,03817   | -0,03610   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) Modelo 1 com r constante | 8                   | 3,14                    | A               | 0,03140          | $6,1276 \times 10^{-6}$ | -0,03445  | $4,8815 \times 10^{-3}$  | -0,04249   | -0,02956   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) Modelo 2 com r constante | 8                   | 3,14                    | A               | 0,03140          | $6,1526 \times 10^{-6}$ | -0,03442  | $4,8681 \times 10^{-3}$  | -0,04245   | -0,02955   |

Tabela A. 22: VaR estático-2 para a carteira com Telemar PN e Petrobrás PN.

| Metodologia  | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão       | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|--|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|-------------------------|------------|------------|
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r variável          | 13                  | 5,10                    | A               | 0,05100          | $1,4428 \times 10^{-5}$ | -0,02823  | $2,5889 \times 10^{-3}$ | -0,03140   | -0,02417   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r variável          | 13                  | 5,10                    | A               | 0,05100          | $1,4468 \times 10^{-5}$ | -0,02821  | $2,5888 \times 10^{-3}$ | -0,03137   | -0,02419   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r variável    | 8                   | 3,14                    | A               | 0,03138          | $3,4101 \times 10^{-6}$ | -0,03773  | $9,6376 \times 10^{-4}$ | -0,03884   | -0,03345   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r variável    | 8                   | 3,14                    | A               | 0,03138          | $3,4241 \times 10^{-6}$ | -0,03771  | $9,6281 \times 10^{-4}$ | -0,03881   | -0,03342   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r variável | 10                  | 3,92                    | A               | 0,03922          | $8,6593 \times 10^{-6}$ | -0,03342  | $5,4446 \times 10^{-3}$ | -0,04251   | -0,02867   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r variável | 10                  | 3,92                    | A               | 0,03922          | $8,6922 \times 10^{-6}$ | -0,03340  | $5,4351 \times 10^{-3}$ | -0,04246   | -0,02865   |

Tabela A. 23: VaR estático-1 para a carteira com Vale do Rio Doce PNA, Telemar PN e Petrobrás PN.

| Metodologia  | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão        | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|--|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|--------------------------|------------|------------|
| MSH Tradicional                                    | 13                  | 5,10                    | A               | 0,05099          | $8,2125 \times 10^{-6}$ | -0,02432  | $6,2573 \times 10^{-17}$ | -0,02432   | -0,02432   |
| MSH <i>Bootstrap</i>                               | 46                  | 18,04                   | R               | 0,18043          | $3,4558 \times 10^{-5}$ | -0,01140  | $7,6674 \times 10^{-4}$  | -0,01238   | -0,01054   |
| MSH <i>Mirror</i> cenários                         | 5                   | 1,96                    | R               | 0,01961          | $5,2021 \times 10^{-6}$ | -0,02880  | $1,0429 \times 10^{-16}$ | -0,02880   | -0,02880   |
| MSH Cenários ponderados                            | 13                  | 5,10                    | A               | 0,05099          | $8,2125 \times 10^{-6}$ | -0,02432  | $6,2573 \times 10^{-17}$ | -0,02432   | -0,02432   |
| MSMC Tradicional Modelo 1 com r constante          | 13                  | 5,10                    | A               | 0,05099          | $9,2188 \times 10^{-6}$ | -0,02394  | $1,5652 \times 10^{-3}$  | -0,02780   | -0,02240   |
| MSMC Tradicional Modelo 2 com r constante          | 12                  | 4,71                    | A               | 0,04707          | $8,1988 \times 10^{-6}$ | -0,02510  | $2,0250 \times 10^{-3}$  | -0,02793   | -0,02236   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) Modelo 1 com r constante    | 11                  | 4,31                    | A               | 0,04315          | $8,3288 \times 10^{-6}$ | -0,02463  | $1,1779 \times 10^{-3}$  | -0,02846   | -0,02241   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) Modelo 2 com r constante    | 11                  | 4,31                    | A               | 0,04315          | $8,1392 \times 10^{-6}$ | -0,02512  | $1,5180 \times 10^{-3}$  | -0,02846   | -0,02238   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) Modelo 1 com r constante | 13                  | 5,10                    | A               | 0,05099          | $8,7840 \times 10^{-6}$ | -0,02517  | $3,1436 \times 10^{-3}$  | -0,03159   | -0,02063   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) Modelo 2 com r constante | 12                  | 4,71                    | A               | 0,04707          | $8,7677 \times 10^{-5}$ | -0,02539  | $3,2639 \times 10^{-3}$  | -0,03134   | -0,02060   |

Tabela A. 24: VaR estático-2 para a carteira com Vale do Rio Doce PNA, Telemar PN e Petrobrás PN.

| Metodologia  | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão       | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|--|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|-------------------------|------------|------------|
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r variável          | 19                  | 7,45                    | A               | 0,07453          | $1,5829 \times 10^{-5}$ | -0,02113  | $2,5574 \times 10^{-3}$ | -0,02691   | -0,01682   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r variável          | 18                  | 7,06                    | A               | 0,07060          | $1,3944 \times 10^{-5}$ | -0,02219  | $3,0331 \times 10^{-3}$ | -0,02706   | -0,01684   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r variável    | 12                  | 4,71                    | A               | 0,04707          | $8,7365 \times 10^{-6}$ | -0,02407  | $1,2988 \times 10^{-3}$ | -0,02819   | -0,02032   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r variável    | 12                  | 4,71                    | A               | 0,04707          | $8,5118 \times 10^{-6}$ | -0,02453  | $1,5856 \times 10^{-3}$ | -0,02869   | -0,02028   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r variável | 18                  | 7,06                    | A               | 0,07060          | $1,2237 \times 10^{-5}$ | -0,02331  | $3,7022 \times 10^{-3}$ | -0,03007   | -0,01808   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r variável | 18                  | 7,06                    | A               | 0,07060          | $1,2111 \times 10^{-5}$ | -0,02353  | $3,7928 \times 10^{-3}$ | -0,03004   | -0,01810   |

## Apêndice 6

### Modelos de VaR estáticos para carteiras de opções com 255 observações e modelo de precificação de ativos tipo 1

Tabela A. 25: VaR estático para a carteira com opções da Telemar PN estratégia *call-ratio*.

| Metodologia                               | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|---|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|-------------------|------------|------------|
| Gregas                                    | 115                 | 45,10                   | R               | 0,48404          | 0,03305                 | 0         | 0                 | 0          | 0          |
| MSMC Tradicional com r constante          | 22                  | 8,63                    | R               | 0,09675          | 0,01048                 | -0,4526   | 0,23122           | -0,6662    | -0,08367   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) com r constante    | 23                  | 9,02                    | R               | 0,10132          | 0,01112                 | -0,4143   | 0,21935           | -0,6632    | -0,08320   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) com r constante | 3                   | 1,17                    | R               | 0,01183          | $6,3134 \times 10^{-5}$ | -1,1825   | 0,5370            | -1,9736    | -0,53181   |
| MSMC Tradicional com r variável           | 41                  | 16,08                   | R               | 0,17364          | 0,01286                 | -0,6815   | 0,57684           | -1,3639    | 0,0000     |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) com r variável     | 60                  | 23,53                   | R               | 0,25731          | 0,02202                 | -0,2541   | 0,28568           | -0,6929    | 0,0000     |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) com r variável  | 14                  | 5,49                    | R               | 0,05690          | $2,0014 \times 10^{-3}$ | -1,0312   | 0,60682           | -1,8284    | -0,1257    |



Tabela A. 26: VaR estático para a carteira com opções da Telemar PN estratégia borboleta comprada.

| Metodologia                               | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2       | VaR Médio | VaR Desvio Padrão | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|---|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|------------------------|-----------|-------------------|------------|------------|
| Gregas                                    | 129                 | 50,59                   | R               | 5,3217           | 4,8158                 | -0,01493  | 0,014236          | -0,03310   | 0,0000     |
| MSMC Tradicional com r constante          | 26                  | 10,20                   | R               | 0,1144           | 0,01245                | -5,0479   | 6,6865            | -16,1720   | -0,0255    |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) com r constante    | 31                  | 12,16                   | R               | 0,1347           | 0,01311                | -4,7812   | 6,2965            | -15,2250   | -0,0247    |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) com r constante | 0                   | 0,00                    | R               | 0,0000           | 0,0000                 | -8,1496   | 7,5747            | -20,8543   | -2,7970    |
| MSMC Tradicional com r variável           | 50                  | 19,61                   | R               | 0,21621          | 0,02013                | -0,55086  | 0,5401            | -1,1869    | 0,0000     |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) com r variável     | 17                  | 6,67                    | A               | 0,07249          | $5,824 \times 10^{-3}$ | -4,6873   | 6,9148            | -16,3410   | -0,2322    |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) com r variável  | 0                   | 0,00                    | R               | 0,0000           | 0,0000                 | -8,2716   | 8,7943            | -23,0250   | -2,1093    |

Tabela A. 27: VaR estático para a carteira com opções da Telemar PN estratégia borboleta vendida.

| Metodologia                               | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão        | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|---|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|--------------------------|------------|------------|
| Gregas                                    | 102                 | 40                      | R               | 1,9234           | 1,5234                  | -0,0068   | $-6,8298 \times 10^{-3}$ | -0,02639   | 0,0000     |
| MSMC Tradicional com r constante          | 26                  | 10,20                   | R               | 0,1091           | $7,1404 \times 10^{-3}$ | -0,6740   | 0,47241                  | -1,2987    | 0,0000     |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) com r constante    | 26                  | 10,20                   | R               | 0,1091           | $7,1419 \times 10^{-3}$ | -0,6761   | 0,44227                  | -1,2075    | 0,0000     |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) com r constante | 5                   | 1,96                    | R               | 0,02001          | $4,0633 \times 10^{-4}$ | -4,3792   | 3,6699                   | -10,0630   | -0,3571    |
| MSMC Tradicional com r variável           | 0                   | 0                       | R               | 0                | 0                       | -9,6460   | 14,1510                  | -33,5250   | -0,6229    |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) com r variável     | 30                  | 11,76                   | R               | 0,1257           | $8,0501 \times 10^{-3}$ | -0,5398   | 0,4239                   | -1,1638    | 0,0000     |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) com r variável  | 30                  | 11,76                   | R               | 0,1251           | $7,4556 \times 10^{-3}$ | -5,4912   | 5,9006                   | -15,1290   | 0,0000     |

## Apêndice 7

Modelos de VaR dinâmicos para Vale do Rio Doce PNA com 255 observações.

Tabela A. 28: VaR dinâmico –1 para a Vale do Rio Doce PNA.

| Metodologia                       | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio                | VaR Desvio Padrão       | VaR Máximo               | VaR Mínimo               |
|-----------------------------------|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Delta-normal Tradicional          | 118                 | 46,27                   | R               | 0,4629           | $1,2294 \times 10^{-4}$ | $-4,0402 \times 10^{-4}$ | $8,8590 \times 10^{-5}$ | $-5,8941 \times 10^{-4}$ | $-3,0475 \times 10^{-4}$ |
| Delta-normal GARCH (0,0) (1,1)    | 118                 | 46,27                   | R               | 0,4628           | $1,2239 \times 10^{-4}$ | $-4,2732 \times 10^{-4}$ | $1,7502 \times 10^{-4}$ | $-8,0547 \times 10^{-4}$ | $-1,9791 \times 10^{-4}$ |
| Delta-normal EGARCH (0,1) (1,1,1) | 118                 | 46,27                   | R               | 0,4629           | $1,2242 \times 10^{-4}$ | $-4,3064 \times 10^{-4}$ | $1,6600 \times 10^{-4}$ | $-8,7916 \times 10^{-4}$ | $-1,5915 \times 10^{-4}$ |
| MSH Tradicional                   | 16                  | 6,27                    | A               | 0,06245          | $9,2386 \times 10^{-6}$ | -0,02654                 | $3,9754 \times 10^{-3}$ | -0,03184                 | -0,02093                 |
| MSH <i>Bootstrap</i>              | 22                  | 8,63                    | R               | 0,08628          | $6,9658 \times 10^{-6}$ | -0,02130                 | $7,1006 \times 10^{-3}$ | -0,03974                 | -0,01188                 |
| MSH <i>Mirror</i> cenários        | 8                   | 3,14                    | A               | 0,03178          | $4,6007 \times 10^{-6}$ | -0,02773                 | $3,1598 \times 10^{-3}$ | -0,03496                 | -0,02383                 |
| MSH Cenários ponderados           | 33                  | 12,94                   | R               | 0,12943          | $1,8347 \times 10^{-5}$ | -0,02042                 | $9,7890 \times 10^{-3}$ | -0,04846                 | $6,2483 \times 10^{-4}$  |

Tabela A. 29: VaR dinâmico -2 para a Vale do Rio Doce PNA.

| Metodologia   | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão       | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|---|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|-------------------------|------------|------------|
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r constante          | 13                  | 5,10                    | A               | 0,05099          | $6,6662 \times 10^{-6}$ | -0,02563  | $1,7788 \times 10^{-3}$ | -0,02839   | -0,02290   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r constante          | 13                  | 5,10                    | A               | 0,05099          | $6,7477 \times 10^{-6}$ | -0,02554  | $1,7658 \times 10^{-3}$ | -0,02827   | -0,02282   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r constante    | 11                  | 4,31                    | A               | 0,04314          | $3,7633 \times 10^{-6}$ | -0,02604  | $4,8905 \times 10^{-3}$ | -0,03118   | -0,01604   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r constante    | 11                  | 4,31                    | A               | 0,04314          | $3,8355 \times 10^{-6}$ | -0,02594  | $4,8530 \times 10^{-3}$ | -0,03696   | -0,01600   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r constante | 10                  | 3,92                    | A               | 0,03922          | $5,2164 \times 10^{-6}$ | -0,02645  | $5,0155 \times 10^{-3}$ | -0,04095   | -0,01333   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r constante | 10                  | 3,92                    | A               | 0,03922          | $5,2754 \times 10^{-6}$ | -0,02641  | $4,9747 \times 10^{-3}$ | -0,04071   | -0,01331   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r variável           | 19                  | 7,45                    | A               | 0,07452          | $1,1949 \times 10^{-5}$ | -0,02486  | $6,9140 \times 10^{-3}$ | -0,04136   | -0,02697   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r variável           | 19                  | 7,45                    | A               | 0,07452          | $1,2074 \times 10^{-5}$ | -0,02476  | $6,9054 \times 10^{-3}$ | -0,04126   | -0,02613   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r variável     | 11                  | 4,31                    | A               | 0,04314          | $4,3782 \times 10^{-6}$ | -0,02535  | $4,6806 \times 10^{-3}$ | -0,03629   | -0,01589   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r variável     | 11                  | 4,31                    | A               | 0,04314          | $4,4591 \times 10^{-6}$ | -0,02525  | $4,6431 \times 10^{-3}$ | -0,03661   | -0,01586   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r variável  | 18                  | 7,06                    | A               | 0,07060          | $8,0811 \times 10^{-6}$ | -0,02390  | $4,6545 \times 10^{-3}$ | -0,03644   | -0,01118   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r variável  | 18                  | 7,06                    | A               | 0,07060          | $8,1820 \times 10^{-6}$ | -0,02379  | $4,6192 \times 10^{-3}$ | -0,03622   | -0,01115   |

## Apêndice 8

### Modelos de VaR dinâmicos para a Petrobrás PN.

Tabela A. 30: VaR dinâmico –1 para a Petrobrás PN com 255 observações.

| Metodologia                       | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio                | VaR Desvio Padrão       | VaR Máximo               | VaR Mínimo               |
|-----------------------------------|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Delta-normal Tradicional          | 101                 | 39,61                   | R               | 0,3962           | $1,2312 \times 10^{-4}$ | $-1,1845 \times 10^{-3}$ | $1,2160 \times 10^{-4}$ | $-1,4927 \times 10^{-3}$ | $-9,7039 \times 10^{-4}$ |
| Delta-normal GARCH (0,0) (1,1)    | 101                 | 39,61                   | R               | 0,3962           | $1,2522 \times 10^{-4}$ | $-1,0579 \times 10^{-3}$ | $2,6383 \times 10^{-4}$ | $-2,0549 \times 10^{-3}$ | $-7,2975 \times 10^{-4}$ |
| Delta-normal EGARCH (0,1) (1,1,1) | 100                 | 39,22                   | R               | 0,3923           | $1,2351 \times 10^{-4}$ | $-1,1303 \times 10^{-4}$ | $2,6242 \times 10^{-4}$ | $-2,0790 \times 10^{-4}$ | $-6,8245 \times 10^{-4}$ |
| MSH Tradicional                   | 9                   | 3,53                    | A               | 0,03530          | $9,1554 \times 10^{-6}$ | -0,03287                 | $6,3306 \times 10^{-3}$ | -0,03879                 | -0,02193                 |
| MSH <i>Bootstrap</i>              | 22                  | 8,63                    | R               | 0,08629          | $1,6759 \times 10^{-5}$ | -0,02152                 | $5,8021 \times 10^{-4}$ | -0,03693                 | -0,01339                 |
| MSH <i>Mirror</i> cenários        | 7                   | 2,75                    | A               | 0,02746          | $7,6598 \times 10^{-6}$ | -0,03582                 | $7,0672 \times 10^{-3}$ | -0,04415                 | -0,02562                 |
| MSH Cenários ponderados           | 25                  | 9,8039                  | R               | 0,09808          | $3,5522 \times 10^{-5}$ | -0,02139                 | 0,01209                 | -0,05789                 | $-2,3547 \times 10^{-4}$ |

Tabela A. 31: VaR dinâmico -2 para a Petrobrás PN com 255 observações.

| Metodologia   | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão       | VaR Máximo | VaR Mínimo               |
|---|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|-------------------------|------------|--------------------------|
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r constante          | 9                   | 3,53                    | A               | 0,03530          | $9,4670 \times 10^{-6}$ | -0,03141  | $4,5986 \times 10^{-3}$ | -0,03730   | -0,02536                 |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r constante          | 9                   | 3,53                    | A               | 0,03529          | $9,5806 \times 10^{-6}$ | -0,03127  | $4,5578 \times 10^{-3}$ | -0,03710   | -0,02528                 |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r constante    | 9                   | 3,53                    | A               | 0,03531          | $1,3051 \times 10^{-5}$ | -0,02732  | $3,8978 \times 10^{-3}$ | -0,04081   | -0,01944                 |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r constante    | 9                   | 3,53                    | A               | 0,03531          | $1,3159 \times 10^{-5}$ | -0,02721  | $3,8669 \times 10^{-3}$ | -0,04057   | -0,01938                 |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r constante | 10                  | 3,92                    | A               | 0,03923          | $1,1481 \times 10^{-5}$ | -0,02948  | $5,5776 \times 10^{-3}$ | -0,04785   | -0,01796                 |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r constante | 10                  | 3,92                    | A               | 0,03923          | $1,1591 \times 10^{-5}$ | -0,02935  | $5,5282 \times 10^{-3}$ | -0,04752   | -0,01791                 |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r variável           | 14                  | 5,49                    | A               | 0,05491          | $1,1801 \times 10^{-5}$ | -0,02926  | $6,8088 \times 10^{-3}$ | -0,04516   | $-8,8430 \times 10^{-3}$ |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r variável           | 14                  | 5,49                    | A               | 0,05491          | $1,1949 \times 10^{-5}$ | -0,02911  | $6,7818 \times 10^{-3}$ | -0,04494   | $-8,8325 \times 10^{-3}$ |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r variável     | 11                  | 4,31                    | A               | 0,04315          | $1,5307 \times 10^{-5}$ | -0,02589  | $4,1745 \times 10^{-3}$ | -0,03889   | -0,01789                 |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r variável     | 12                  | 4,71                    | A               | 0,04707          | $1,5429 \times 10^{-5}$ | -0,02578  | $4,1438 \times 10^{-3}$ | -0,03867   | -0,01784                 |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r variável  | 15                  | 5,88                    | A               | 0,05884          | $1,5313 \times 10^{-5}$ | -0,02679  | $5,8012 \times 10^{-3}$ | -0,04522   | -0,01560                 |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r variável  | 15                  | 5,88                    | A               | 0,05884          | $1,5458 \times 10^{-5}$ | -0,02662  | $5,7543 \times 10^{-3}$ | -0,04492   | -0,01555                 |

## Apêndice 9

### Modelos de VaR dinâmicos para a Telemar PN

Tabela A. 32: VaR dinâmico –1 para a Telemar PN com 255 observações.

| Metodologia                       | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio                | VaR Desvio Padrão       | VaR Máximo               | VaR Mínimo               |
|-----------------------------------|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Delta-normal Tradicional          | 104                 | 40,78                   | R               | 0,4080           | $1,9718 \times 10^{-4}$ | $-2,3199 \times 10^{-3}$ | $2,0810 \times 10^{-4}$ | $-2,8122 \times 10^{-3}$ | $-1,7844 \times 10^{-3}$ |
| Delta-normal GARCH (0,0) (1,1)    | 104                 | 40,78                   | R               | 0,4080           | $1,9837 \times 10^{-4}$ | $-2,2414 \times 10^{-3}$ | $3,5475 \times 10^{-4}$ | $-3,5119 \times 10^{-3}$ | $-1,6220 \times 10^{-3}$ |
| Delta-normal EGARCH (0,1) (1,1,1) | 104                 | 40,78                   | R               | 0,4080           | $1,9616 \times 10^{-4}$ | $-2,3346 \times 10^{-3}$ | $5,8141 \times 10^{-4}$ | $-4,3392 \times 10^{-3}$ | $-1,0614 \times 10^{-3}$ |
| MSH Tradicional                   | 12                  | 4,71                    | A               | 0,04707          | $1,4668 \times 10^{-5}$ | -0,036675                | $6,6784 \times 10^{-3}$ | -0,04659                 | -0,02828                 |
| MSH <i>Bootstrap</i>              | 33                  | 12,94                   | R               | 0,1295           | $3,3721 \times 10^{-5}$ | -0,02417                 | $4,6642 \times 10^{-4}$ | -0,03158                 | -0,01386                 |
| MSH <i>Mirror</i> cenários        | 9                   | 3,53                    | A               | 0,03531          | $1,0624 \times 10^{-5}$ | -0,04035                 | $4,4089 \times 10^{-3}$ | -0,04563                 | -0,03479                 |
| MSH Cenários ponderados           | 35                  | 13,76                   | R               | 0,13728          | $2,9204 \times 10^{-5}$ | -0,02657                 | 0,01409                 | -0,06382                 | $-8,7345 \times 10^{-4}$ |

Tabela A. 33: VaR dinâmico -2 para a Telemar PN com 255 observações.

| Metodologia   | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão       | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|---|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|-------------------------|------------|------------|
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r constante          | 11                  | 4,31                    | A               | 0,04315          | $1,5704 \times 10^{-5}$ | -0,03532  | $3,8926 \times 10^{-3}$ | -0,04100   | -0,03033   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r constante          | 11                  | 4,31                    | A               | 0,04315          | $1,5911 \times 10^{-5}$ | -0,03513  | $3,8536 \times 10^{-3}$ | -0,04076   | -0,03019   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r constante    | 13                  | 5,10                    | A               | 0,05100          | $1,5346 \times 10^{-5}$ | -0,03389  | $4,3206 \times 10^{-3}$ | -0,05010   | -0,02432   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r constante    | 13                  | 5,10                    | A               | 0,05100          | $1,5563 \times 10^{-5}$ | -0,03372  | $4,2779 \times 10^{-3}$ | -0,04975   | -0,02423   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r constante | 17                  | 6,67                    | A               | 0,06667          | $8,7273 \times 10^{-6}$ | -0,03506  | $7,5161 \times 10^{-3}$ | -0,06079   | -0,01954   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r constante | 17                  | 6,67                    | A               | 0,06667          | $8,9380 \times 10^{-6}$ | -0,03488  | $7,4355 \times 10^{-3}$ | -0,06027   | -0,01948   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r variável           | 15                  | 5,88                    | A               | 0,05884          | $1,5732 \times 10^{-6}$ | -0,03387  | $6,6901 \times 10^{-3}$ | -0,04908   | -0,01797   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r variável           | 15                  | 5,88                    | A               | 0,05884          | $1,5956 \times 10^{-6}$ | -0,03369  | $6,6734 \times 10^{-3}$ | -0,04885   | -0,01783   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r variável     | 16                  | 6,27                    | A               | 0,06276          | $1,8152 \times 10^{-5}$ | -0,03268  | $4,5272 \times 10^{-3}$ | -0,04809   | -0,02254   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r variável     | 16                  | 6,27                    | A               | 0,06276          | $1,8399 \times 10^{-5}$ | -0,03251  | $4,5852 \times 10^{-3}$ | -0,04773   | -0,02245   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r variável  | 20                  | 7,84                    | A               | 0,07844          | $1,0226 \times 10^{-5}$ | -0,03365  | $7,5935 \times 10^{-3}$ | -0,05918   | -0,01944   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r variável  | 20                  | 7,84                    | A               | 0,07844          | $1,0464 \times 10^{-5}$ | -0,03347  | $7,5132 \times 10^{-3}$ | -0,05866   | -0,01938   |



## Apêndice 10

### Modelos de VaR dinâmicos para carteiras com duas e três ações e 255 observações

Tabela A. 34: VaR dinâmico-1 para a carteira com Vale do Rio Doce PNA e Petrobrás PN.

| Metodologia  | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão       | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|--|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|-------------------------|------------|------------|
| MSH Tradicional                                    | 15                  | 5,88                    | A               | 0,08553          | $8,5844 \times 10^{-6}$ | -0,02299  | $3,8020 \times 10^{-3}$ | -0,02853   | -0,01728   |
| MSH <i>Bootstrap</i>                               | 23                  | 9,02                    | R               | 0,09020          | $6,1030 \times 10^{-6}$ | -0,01834  | $7,5150 \times 10^{-3}$ | -0,03684   | -0,01041   |
| MSH <i>Mirror</i> cenários                         | 12                  | 4,71                    | A               | 0,04706          | $6,2844 \times 10^{-6}$ | -0,02368  | $1,9212 \times 10^{-3}$ | -0,02556   | -0,01969   |
| MSH Cenários ponderados                            | 30                  | 11,77                   | R               | 0,11767          | $2,0105 \times 10^{-5}$ | -0,01698  | $9,8558 \times 10^{-3}$ | -0,05131   | 0,000176   |
| MSMC Tradicional Modelo 1 com r constante          | 7                   | 2,75                    | A               | 0,02746          | $5,6507 \times 10^{-6}$ | -0,02672  | $2,4217 \times 10^{-3}$ | -0,03111   | -0,02314   |
| MSMC Tradicional Modelo 2 com r constante          | 7                   | 2,75                    | A               | 0,02746          | $5,6560 \times 10^{-6}$ | -0,02671  | $2,4183 \times 10^{-3}$ | -0,03108   | -0,02314   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) Modelo 1 com r constante    | 7                   | 2,75                    | A               | 0,02746          | $4,6812 \times 10^{-6}$ | -0,02565  | $3,3904 \times 10^{-3}$ | -0,03406   | -0,01750   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) Modelo 2 com r constante    | 7                   | 2,75                    | A               | 0,02746          | $4,6944 \times 10^{-6}$ | -0,02563  | $3,3794 \times 10^{-3}$ | -0,03407   | -0,01749   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) Modelo 1 com r constante | 5                   | 1,96                    | R               | 0,01961          | $5,6720 \times 10^{-6}$ | -0,02672  | $3,3932 \times 10^{-3}$ | -0,03645   | -0,01727   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) Modelo 2 com r constante | 5                   | 1,96                    | R               | 0,01961          | $5,6759 \times 10^{-6}$ | -0,02672  | $3,3581 \times 10^{-3}$ | -0,03641   | -0,01727   |

Tabela A. 35: VaR dinâmico-2 para a carteira com Vale do Rio Doce PNA e Petrobrás PN.

| Metodologia  | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão       | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|--|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|-------------------------|------------|------------|
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r variável          | 11                  | 4,31                    | A               | 0,04314          | $7,1957 \times 10^{-6}$ | -0,02516  | $5,4215 \times 10^{-3}$ | -0,03532   | -0,00882   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r variável          | 11                  | 4,31                    | A               | 0,04314          | $7,2030 \times 10^{-6}$ | -0,02515  | $5,4191 \times 10^{-3}$ | -0,03530   | -0,00881   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r variável    | 7                   | 2,74                    | A               | 0,02746          | $5,5202 \times 10^{-6}$ | -0,02455  | $3,2530 \times 10^{-3}$ | -0,03241   | -0,01632   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r variável    | 7                   | 2,74                    | A               | 0,02746          | $5,5354 \times 10^{-6}$ | -0,02453  | $3,2424 \times 10^{-3}$ | -0,03242   | -0,01631   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r variável | 9                   | 3,53                    | A               | 0,03530          | $7,5042 \times 10^{-6}$ | -0,02409  | $3,3121 \times 10^{-3}$ | -0,03329   | -0,01539   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r variável | 9                   | 3,53                    | A               | 0,03530          | $7,5101 \times 10^{-6}$ | -0,02409  | $3,2867 \times 10^{-3}$ | -0,03326   | -0,01538   |

Tabela A. 36: VaR dinâmico-1 para a carteira com Vale do Rio Doce PNA e Telemar PN.

| Metodologia  | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão       | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|--|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|-------------------------|------------|------------|
| MSH Tradicional                                    | 18                  | 7,06                    | A               | 0,07060          | $1,1754 \times 10^{-5}$ | -0,02323  | $2,2125 \times 10^{-3}$ | -0,02625   | -0,02030   |
| MSH <i>Bootstrap</i>                               | 31                  | 12,16                   | R               | 0,12158          | $1,0963 \times 10^{-5}$ | -0,01903  | $5,6851 \times 10^{-3}$ | -0,03310   | -0,01097   |
| MSH <i>Mirror</i> cenários                         | 15                  | 5,88                    | A               | 0,05883          | $9,3929 \times 10^{-6}$ | -0,02436  | $2,2873 \times 10^{-3}$ | -0,02919   | -0,02193   |
| MSH Cenários ponderados                            | 29                  | 11,37                   | R               | 0,11374          | $1,8801 \times 10^{-5}$ | -0,01973  | $1,0480 \times 10^{-2}$ | -0,05019   | -0,02234   |
| MSMC Tradicional Modelo 1 com r constante          | 13                  | 5,10                    | A               | 0,05099          | $8,3050 \times 10^{-6}$ | -0,02476  | $1,3427 \times 10^{-3}$ | -0,02804   | -0,02270   |
| MSMC Tradicional Modelo 2 com r constante          | 13                  | 5,10                    | A               | 0,05099          | $8,3288 \times 10^{-6}$ | -0,02473  | $1,3426 \times 10^{-3}$ | -0,02802   | -0,02267   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) Modelo 1 com r constante    | 13                  | 5,10                    | A               | 0,05099          | $6,4910 \times 10^{-6}$ | -0,02451  | $4,1691 \times 10^{-3}$ | -0,03903   | -0,01936   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) Modelo 2 com r constante    | 13                  | 5,10                    | A               | 0,05099          | $6,5071 \times 10^{-6}$ | -0,02448  | $4,1689 \times 10^{-3}$ | -0,03898   | -0,01932   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) Modelo 1 com r constante | 12                  | 4,71                    | A               | 0,04707          | $7,8728 \times 10^{-6}$ | -0,02516  | $4,8718 \times 10^{-3}$ | -0,04157   | -0,01363   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) Modelo 2 com r constante | 12                  | 4,71                    | A               | 0,04707          | $7,9011 \times 10^{-6}$ | -0,02521  | $4,8918 \times 10^{-3}$ | -0,04151   | -0,01358   |

Tabela A. 37: VaR dinâmico-2 para a carteira com Vale do Rio Doce PNA e Telemar PN.

| Metodologia  | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão       | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|--|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|-------------------------|------------|------------|
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r variável          | 18                  | 7,06                    | A               | 0,07060          | $7,9907 \times 10^{-6}$ | -0,02358  | $5,3407 \times 10^{-3}$ | -0,04005   | -0,01027   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r variável          | 18                  | 7,06                    | A               | 0,07060          | $8,0203 \times 10^{-6}$ | -0,02354  | $5,3408 \times 10^{-3}$ | -0,04003   | -0,01024   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r variável    | 17                  | 6,67                    | A               | 0,06667          | $7,6594 \times 10^{-6}$ | -0,02353  | $3,9160 \times 10^{-3}$ | -0,03756   | -0,01852   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r variável    | 17                  | 6,67                    | A               | 0,06667          | $7,6786 \times 10^{-6}$ | -0,02350  | $3,9154 \times 10^{-3}$ | -0,03752   | -0,01849   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r variável | 20                  | 7,84                    | A               | 0,07844          | $1,0019 \times 10^{-5}$ | -0,02325  | $4,7640 \times 10^{-3}$ | -0,03977   | -0,01228   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r variável | 20                  | 7,84                    | A               | 0,07844          | $1,0056 \times 10^{-5}$ | -0,02325  | $4,7665 \times 10^{-3}$ | -0,03970   | -0,01223   |

Tabela A. 38: VaR dinâmico-1 para a carteira com Telemar PN e Petrobrás PN.

| Metodologia  | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão       | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|--|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|-------------------------|------------|------------|
| MSH Tradicional                                    | 11                  | 4,31                    | A               | 0,04315          | $1,2622 \times 10^{-5}$ | -0,03272  | $6,8228 \times 10^{-3}$ | -0,04031   | -0,02300   |
| MSH <i>Bootstrap</i>                               | 18                  | 7,06                    | A               | 0,07061          | $1,8689 \times 10^{-5}$ | -0,02262  | $4,8765 \times 10^{-3}$ | -0,03313   | -0,01386   |
| MSH <i>Mirror</i> cenários                         | 11                  | 4,31                    | A               | 0,04315          | $1,0517 \times 10^{-5}$ | -0,03332  | $4,6911 \times 10^{-3}$ | -0,03813   | -0,02547   |
| MSH Cenários ponderados                            | 28                  | 10,98                   | R               | 0,10985          | $4,1723 \times 10^{-5}$ | -0,02117  | 0,013037                | -0,05654   | 0,00000    |
| MSMC Tradicional Modelo 1 com r constante          | 11                  | 4,31                    | A               | 0,04315          | $9,1195 \times 10^{-6}$ | -0,03227  | $3,7005 \times 10^{-3}$ | -0,03722   | -0,02732   |
| MSMC Tradicional Modelo 2 com r constante          | 11                  | 4,31                    | A               | 0,04315          | $9,1384 \times 10^{-6}$ | -0,03224  | $3,6930 \times 10^{-3}$ | -0,03719   | -0,02730   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) Modelo 1 com r constante    | 10                  | 3,92                    | A               | 0,03923          | $1,1027 \times 10^{-5}$ | -0,02913  | $3,4119 \times 10^{-3}$ | -0,03842   | -0,02321   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) Modelo 2 com r constante    | 10                  | 3,92                    | A               | 0,03923          | $1,1049 \times 10^{-5}$ | -0,02911  | $3,4084 \times 10^{-3}$ | -0,03841   | -0,02320   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) Modelo 1 com r constante | 11                  | 4,31                    | A               | 0,04315          | $9,1936 \times 10^{-6}$ | -0,03051  | $4,2517 \times 10^{-3}$ | -0,04858   | -0,02154   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) Modelo 2 com r constante | 11                  | 4,31                    | A               | 0,04315          | $9,2048 \times 10^{-6}$ | -0,03049  | $4,2463 \times 10^{-3}$ | -0,04851   | -0,02153   |

Tabela A. 39: VaR dinâmico-2 para a carteira com Telemar PN e Petrobrás PN.

| Metodologia  | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão       | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|--|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|-------------------------|------------|------------|
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r variável          | 11                  | 4,31                    | A               | 0,04315          | $1,0797 \times 10^{-5}$ | -0,03041  | $5,8027 \times 10^{-3}$ | -0,04488   | -0,01391   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r variável          | 11                  | 4,31                    | A               | 0,04315          | $1,0822 \times 10^{-5}$ | -0,03039  | $5,7990 \times 10^{-3}$ | -0,04484   | -0,01389   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r variável    | 14                  | 5,49                    | A               | 0,05492          | $1,3144 \times 10^{-5}$ | -0,02781  | $3,3696 \times 10^{-3}$ | -0,03726   | -0,02181   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r variável    | 14                  | 5,49                    | A               | 0,05492          | $1,3169 \times 10^{-5}$ | -0,02779  | $3,6925 \times 10^{-3}$ | -0,03723   | -0,02180   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r variável | 15                  | 5,88                    | A               | 0,05883          | $1,1615 \times 10^{-5}$ | -0,02845  | $4,2724 \times 10^{-3}$ | -0,04367   | -0,01975   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r variável | 15                  | 5,88                    | A               | 0,05883          | $1,1627 \times 10^{-5}$ | -0,02843  | $4,2665 \times 10^{-3}$ | -0,04360   | -0,01974   |

Tabela A. 40: VaR dinâmico-1 para a carteira com Vale do Rio Doce PNA, Telemar PN e Petrobrás PN.

| Metodologia  | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão       | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|--|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|-------------------------|------------|------------|
| MSH Tradicional                                    | 16                  | 6,27                    | A               | 0,06276          | $1,0176 \times 10^{-5}$ | -0,02283  | $1,8809 \times 10^{-3}$ | -0,02460   | -0,01946   |
| MSH <i>Bootstrap</i>                               | 22                  | 8,63                    | R               | 0,08628          | $8,6844 \times 10^{-6}$ | -0,01943  | $6,1041 \times 10^{-3}$ | -0,03340   | -0,01006   |
| MSH <i>Mirror</i> cenários                         | 13                  | 5,10                    | A               | 0,05099          | $7,6656 \times 10^{-6}$ | -0,02525  | $3,1338 \times 10^{-3}$ | -0,02880   | -0,01999   |
| MSH Cenários ponderados                            | 25                  | 9,80                    | R               | 0,09806          | $2,5722 \times 10^{-5}$ | -0,01809  | $1,0738 \times 10^{-2}$ | -0,05266   | 0,00000    |
| MSMC Tradicional Modelo 1 com r constante          | 17                  | 6,67                    | A               | 0,06667          | $1,0908 \times 10^{-5}$ | -0,02259  | $2,0821 \times 10^{-3}$ | -0,02586   | -0,01970   |
| MSMC Tradicional Modelo 2 com r constante          | 17                  | 6,67                    | A               | 0,06667          | $9,9368 \times 10^{-6}$ | -0,02263  | $2,0961 \times 10^{-3}$ | -0,02589   | -0,01966   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) Modelo 1 com r constante    | 12                  | 4,71                    | A               | 0,04707          | $8,7322 \times 10^{-6}$ | -0,02211  | $3,4343 \times 10^{-3}$ | -0,03362   | -0,01636   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) Modelo 2 com r constante    | 12                  | 4,71                    | A               | 0,04707          | $7,9075 \times 10^{-6}$ | -0,02235  | $3,7287 \times 10^{-3}$ | -0,03376   | -0,01634   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) Modelo 1 com r constante | 12                  | 4,71                    | A               | 0,04707          | $9,8847 \times 10^{-6}$ | -0,02308  | $3,4387 \times 10^{-3}$ | -0,03247   | -0,01604   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) Modelo 2 com r constante | 12                  | 4,71                    | A               | 0,04707          | $7,9920 \times 10^{-6}$ | -0,02327  | $3,5031 \times 10^{-3}$ | -0,03275   | -0,01601   |

Tabela A. 41: VaR dinâmico-2 para a carteira com Vale do Rio Doce PNA, Telemar PN e Petrobrás PN.

| Metodologia  | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão       | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|--|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|-------------------------|------------|------------|
| MSMC Tradicional<br>Modelo 1 com r variável          | 22                  | 8,63                    | R               | 0,08629          | $1,2482 \times 10^{-5}$ | -0,02103  | $4,8603 \times 10^{-3}$ | -0,03214   | -0,00677   |
| MSMC Tradicional<br>Modelo 2 com r variável          | 21                  | 8,23                    | R               | 0,08236          | $1,1219 \times 10^{-5}$ | -0,02110  | $4,9912 \times 10^{-3}$ | -0,03331   | -0,00673   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 1 com r variável    | 17                  | 6,67                    | A               | 0,06667          | $1,0267 \times 10^{-5}$ | -0,02097  | $3,2363 \times 10^{-3}$ | -0,03197   | -0,01503   |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1)<br>Modelo 2 com r variável    | 17                  | 6,67                    | A               | 0,06667          | $9,3812 \times 10^{-6}$ | -0,02121  | $3,5047 \times 10^{-3}$ | -0,03207   | -0,01501   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 1 com r variável | 18                  | 7,06                    | A               | 0,07060          | $1,2816 \times 10^{-5}$ | -0,02087  | $3,2216 \times 10^{-3}$ | -0,02960   | -0,01431   |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1)<br>Modelo 2 com r variável | 19                  | 7,45                    | A               | 0,07452          | $1,0777 \times 10^{-5}$ | -0,02107  | $3,2810 \times 10^{-3}$ | -0,02669   | -0,01410   |



## Apêndice 11

Modelos de VaR dinâmicos para carteiras de opções e *hedge* delta neutro com 255 observações e modelo de precificação de ativos tipo 1

Tabela A. 42: VaR dinâmico para a carteira com opções da Telemar PN estratégia *call-ratio*.

| Metodologia                               | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão       | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|---|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|-------------------------|------------|------------|
| Gregas                                    | 115                 | 45,10                   | R               | 0,48404          | 0,033055                | 0,0001    | $2,559 \times 10^{-15}$ | 0,0003     | 0,0000     |
| MSMC Tradicional com r constante          | 28                  | 10,98                   | R               | 0,11124          | 0,0014394               | -0,45372  | 0,66139                 | -3,4364    | 0,0000     |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) com r constante    | 31                  | 12,16                   | R               | 0,12345          | 0,001880                | -0,42098  | 0,61541                 | -3,2092    | 0,0000     |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) com r constante | 16                  | 6,27                    | A               | 0,06350          | $7,5896 \times 10^{-4}$ | -1,3239   | 2,6957                  | -21,481    | 0,0000     |
| MSMC Tradicional com r variável           | 40                  | 15,69                   | R               | 0,16196          | $5,1011 \times 10^{-3}$ | -0,5055   | 0,7077                  | -3,4395    | 0,0000     |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) com r variável     | 53                  | 20,78                   | R               | 0,21450          | $6,6590 \times 10^{-3}$ | -0,38604  | 0,61993                 | -3,1969    | 0,0000     |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) com r variável  | 29                  | 11,37                   | R               | 0,11559          | $1,8614 \times 10^{-3}$ | -1,3047   | 2,7264                  | -21,477    | 0,0000     |

Tabela A. 43: VaR dinâmico para a carteira com opções da Telemar PN estratégia borboleta comprada.

| Metodologia                               | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2 | VaR Médio | VaR Desvio Padrão | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|---|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|------------------|-----------|-------------------|------------|------------|
| Gregas                                    | 99                  | 38,82                   | R               | 1,9088           | 1,5206           | -0,01095  | 0,01522           | -0,04709   | 0,0000     |
| MSMC Tradicional com r constante          | 36                  | 14,12                   | R               | 0,25636          | 0,11519          | -2,6081   | 8,4057            | -78,561    | 0,0000     |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) com r constante    | 42                  | 16,47                   | R               | 0,28289          | 0,11818          | -2,5176   | 8,3415            | -78,549    | 0,0000     |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) com r constante | 33                  | 12,94                   | R               | 0,1543           | 0,02488          | -14,255   | 63,514            | -523,100   | 0,0000     |
| MSMC Tradicional com r variável           | 46                  | 18,04                   | R               | 0,7030           | 0,52263          | -2,9066   | 8,9244            | -76,863    | 0,0000     |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) com r variável     | 48                  | 18,82                   | R               | 0,34031          | 0,15207          | -2,2928   | 7,7556            | -78,001    | 0,0000     |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) com r variável  | 35                  | 13,73                   | R               | 0,16976          | 0,03250          | -13,895   | 60,789            | -472,860   | 0,0000     |

Tabela A. 44: VaR dinâmico para a carteira com opções da Telemar PN estratégia borboleta vendida.

| Metodologia                               | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2 | VaR Médio | VaR Desvio Padrão | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|---|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|------------------|-----------|-------------------|------------|------------|
| Gregas                                    | 97                  | 38,04                   | R               | 1,8987           | 1,5183           | -0,01581  | 0,015457          | -0,0418    | 0,0000     |
| MSMC Tradicional com r constante          | 14                  | 5,49                    | A               | 0,16554          | 0,11063          | -3,3589   | 9,2135            | -98,801    | 0,0000     |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) com r constante    | 18                  | 7,06                    | A               | 0,17273          | 0,17273          | -3,2599   | 9,1306            | -98,399    | 0,0000     |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) com r constante | 15                  | 5,88                    | A               | 0,18761          | 0,12879          | -13,6980  | 64,161            | -720,01    | 0,0000     |
| MSMC Tradicional com r variável           | 26                  | 10,20                   | R               | 0,2387           | 0,13677          | -3,2080   | 8,9499            | -91,103    | 0,0000     |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) com r variável     | 23                  | 9,02                    | R               | 0,21047          | 0,12027          | -3,0331   | 8,5364            | -113,270   | 0,0000     |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) com r variável  | 17                  | 6,67                    | A               | 0,22006          | 0,15340          | -13,2710  | 60,475            | -705,02    | 0,0000     |

Tabela A. 45: VaR dinâmico para a carteira hedge delta neutro da Telemar PN.

| Metodologia                               | Número de Violações | Percentual de Violações | Teste de Kupiec | Perda de Lopez 1 | Perda de Lopez 2        | VaR Médio | VaR Desvio Padrão | VaR Máximo | VaR Mínimo |
|---|---------------------|-------------------------|-----------------|------------------|-------------------------|-----------|-------------------|------------|------------|
| Gregas                                    | 58                  | 22,75                   | R               | 0,22756          | $1,0495 \times 10^{-4}$ | -0,04060  | 0,048073          | -0,17395   | 0,0000     |
| MSMC Tradicional com r constante          | 8                   | 3,14                    | A               | 0,031651         | $2,7881 \times 10^{-3}$ | -0,12000  | 0,068389          | -0,59213   | 0,0000     |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) com r constante    | 8                   | 3,14                    | A               | 0,032153         | $7,8003 \times 10^{-4}$ | -0,11988  | 0,073890          | -0,69883   | 0,0000     |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) com r constante | 6                   | 2,35                    | R               | 0,023605         | $7,5542 \times 10^{-4}$ | -0,17547  | 0,153730          | -0,81974   | 0,0000     |
| MSMC Tradicional com r variável           | 14                  | 5,49                    | A               | 0,05986          | $4,9598 \times 10^{-3}$ | -0,1586   | 0,14199           | -0,84310   | 0,0000     |
| MSMC GARCH (0,0) (1,1) com r variável     | 8                   | 3,14                    | A               | 0,031890         | $5,1721 \times 10^{-4}$ | -0,11986  | 0,082885          | -0,76331   | 0,0000     |
| MSMC EGARCH (0,1) (1,1,1) com r variável  | 7                   | 2,74                    | A               | 0,027525         | $7,4199 \times 10^{-5}$ | -0,17678  | 0,15350           | -0,79303   | 0,0000     |

## **ANEXOS**

## Anexo 1

### Fórmula de Itô

Seja  $x(t)$  um processo de Itô com  $t \geq 0$  e com a diferencial estocástica:

$$dx(t) = f(t)dt + g(t)dw$$

onde tanto  $f$  quanto  $g$  são processos estocásticos com propriedades tais que:

$$\int_0^t |f(s)| ds < \infty \quad \text{e} \quad \int_0^t |g(s)|^2 ds < \infty \quad \forall t > 0$$

Seja  $C^{2,1}(\mathfrak{R}_x \mathfrak{R}_+; \mathfrak{R})$ . Então  $V(x(t), t)$  também é um processo de Itô com a diferencial estocástica dada por:

$$\begin{aligned} dV(x(t); t) = & [V_t(x(t), t) + V_x(x(t), t)f(t) + \frac{1}{2}V_{xx}(x(t), t)g^2(t)]dt \\ & + V_x(x(t), t)g(t)dw \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

### Prova:

Esta prova está sendo apresentada em linhas gerais, para maiores detalhes observar Mao (1997).

Assumindo que  $x(t)$  é limitado, dado por uma constante  $K$  onde os valores de  $V(x, t)$  para  $x \notin [-K, K]$  são irrelevantes. Por outro lado, para cada  $n$  maior ou igual a 1 define-se:

$$\tau_n = \inf \{t \geq 0 : |x(t)| \geq n\}$$

Também se define o processo estocástico:

$$x_n(t) = [-n \vee x(0)] \wedge n + \int_0^t f(s)I_{[[0, \tau_n]]}(s)ds + \int_0^t g(s)I_{[[0, \tau_n]]}(s)dW(s)$$

para  $t \geq 0$ . Então  $|x_n(t)| \leq n$ , ou seja,  $x_n(t)$  é limitado. Mais ainda, para todo  $t \geq 0$  e  $\omega \in \Omega$  existe um inteiro  $n_0 = n_0(t, \omega)$  tal que

$$x_n(s, \omega) = x(t, \omega) \quad \text{para} \quad 0 \leq s \leq t$$

desde que  $n \geq n_0$ . Por conseguinte, se é possível estabelecer (A.1) para  $x_n(t)$ , logo:

$$\begin{aligned} V(x_n(t); t) - V(x(0); 0) &= \int_0^t \left[ V_t(x_n(s), s) + V_x(x_n(s), s)f(s)I_{[[0, \tau_n]]}(s) + \frac{1}{2}V_{xx}(x_n(s), s)g^2(s) \right] ds \\ &+ \int_0^t V_x(x_n(s), s)g(s)I_{[[0, \tau_n]]}(s)dW(s) \end{aligned}$$

Em seqüência, obtêm-se o resultado desejado fazendo  $n \rightarrow \infty$ .

Assumindo que  $V(x, t)$  é  $C^2$ , pode-se encontrar uma seqüência  $\{V_n(x, t)\}$  de funções  $C^2$  tal que:

$$\begin{aligned} V_n(x, t) &\rightarrow V(x, t), & \frac{\partial}{\partial t} V_n(x, t) &\rightarrow V_t(x, t), \\ \frac{\partial}{\partial x} V_n(x, t) &\rightarrow V_x(x, t), & \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_n(x, t) &\rightarrow V_{xx}(x, t) \end{aligned}$$

Conseguindo mostrar que a fórmula de Itô para cada  $V_n$  é

$$\begin{aligned} V_n(x_n(t); t) - V_n(x(0); 0) &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \left[ V_n(x_n(s), s) + V_n(x_n(s), s)f(s)I_{[[0, \tau_n]]}(s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_n(x_n(s), s)g^2(s) \right] ds \\ &+ \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} V_n(x_n(s), s)g(s)I_{[[0, \tau_n]]}(s)dW(s) \end{aligned}$$

e depois fazendo  $n \rightarrow \infty$ , obtêm-se o resultado desejado (A.1).

Se ficar mostrado (A.1) para o caso em que  $f$  e  $g$  são etapas de um processo simples (explicados a seguir), então o caso geral pode ser obtido pelo procedimento de aproximação. Isto porque tanto  $f$  quanto  $g$  podem ser aproximados por etapas de um processo simples.

Fixando  $t > 0$  arbitrariamente, e assumindo que  $V$ ,  $V_t$ ,  $V_{tt}$ ,  $V_x$ ,  $V_{tx}$  e  $V_{xx}$  são limitados em  $\Re x[0, t]$  e  $f(s)$  e  $g(s)$  são processos simples em  $s \in [0, t]$ . Seja  $\Pi = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_k\}$  uma partição de  $[0, t]$  suficientemente fina para que  $f(s)$  e  $g(s)$  sejam “aleatório constante” para todo  $(t_i, t_{i+1}]$ .

Usando a expansão de Taylor, têm-se:

$$\begin{aligned} V(x(t), t) - V(x(0), 0) &= \sum_{i=0}^{k-1} [V(x(t_{i+1}), t_{i+1}) - V(x(t_i), t_i)] = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} V_t(x(t_{i+1}), t_{i+1}) \Delta t_i + \sum_{i=0}^{k-1} V_x(x(t_{i+1}), t_{i+1}) \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} V_{tt}(x(t_{i+1}), t_{i+1}) (\Delta t_i)^2 \\ &+ \sum_{i=0}^{k-1} V_{tx}(x(t_{i+1}), t_{i+1}) \Delta t_i \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} V_{xx}(x(t_{i+1}), t_{i+1}) (\Delta x_i)^2 + \sum_{i=0}^{k-1} R_i \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

seja  $|\Pi| = \max_{0 \leq i \leq k-1} \Delta t_i$ . É fácil perceber que quando  $|\Pi| \rightarrow 0$ , com probabilidade 1:

$$\sum_{i=0}^{k-1} V_t(x(t_{i+1}), t_{i+1}) \Delta t_i \rightarrow \int_0^t V_t(x(s), s) ds, \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} V_x(x(t_{i+1}), t_{i+1}) \Delta t_i &\rightarrow \int_0^t V_x(x(s), s) ds = \\ &= \int_0^t V_x(x(s), s) f(s) ds + \int_0^t V_x(x(s), s) g(s) dw(s) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} V_{tt}(x(t_{i+1}), t_{i+1}) (\Delta t_i)^2 \rightarrow 0, \quad \text{e} \quad \sum_{i=0}^{k-1} R_i \rightarrow 0 \quad (\text{A.5})$$

observa-se que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} V_{tx}(x(t_{i+1}), t_{i+1}) \Delta t_i \Delta x_i &= \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} V_{tx}(x(t_{i+1}), t_{i+1}) f_i (\Delta t_i)^2 + \sum_{i=0}^{k-1} V_{tx}(x(t_{i+1}), t_{i+1}) g_i \Delta t_i \Delta w_i \end{aligned}$$



quando  $|\Pi| \rightarrow 0$ , o primeiro termo tende a 0, embora o segundo tenda a 0 em  $L^2$  desde que

$$E\left(\sum_{i=0}^{k-1} V_{tx}(x(t_{i+1}), t_{i+1}) g_i \Delta t_i \Delta w_i\right)^2 = \sum_{i=0}^{k-1} E[V_{tx}(x(t_{i+1}), t_{i+1}) g_i]^2 (\Delta t_i)^3 \rightarrow 0$$

em outras palavras:

$$\sum_{i=0}^{k-1} V_{tx}(x(t_{i+1}), t_{i+1}) \Delta t_i \Delta x_i \rightarrow 0 \quad \text{em } L^2 \quad (\text{A.6})$$

Note também que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} V_{xx}(x(t_{i+1}), t_{i+1}) (\Delta x_i)^2 = \\ \sum_{i=0}^{k-1} V_{xx}(x(t_{i+1}), t_{i+1}) \left[ f_i^2 (\Delta x_i)^2 + 2f_i g_i \Delta t_i \Delta w_i \right] + \sum_{i=0}^{k-1} V_{xx}(x(t_{i+1}), t_{i+1}) g_i^2 (\Delta w_i)^2 \end{aligned}$$

o primeiro termo tende a 0 em  $L^2$  com  $|\Pi| \rightarrow 0$ , pelas mesmas razões que antes. O segundo

termo tende a  $\int_0^t V_{xx}(x(s), s) g^2(s) ds$  em  $L^2$ . A ser mostrado depois, seja  $h(t) = V_{xx}(x(t), t) g^2(t)$

e  $h_i = V_{xx}(x(t_i), t_i) g_i^2$ , e calculando:

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=0}^{k-1} h_i (\Delta w_i)^2 - \sum_{i=0}^{k-1} h_i \Delta t_i\right)^2 = \\ E\left(\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} h_i h_j \left[(\Delta w_i)^2 - \Delta t_i \mathbb{I}[(\Delta w_j)^2 - \Delta t_j]\right]\right) = \\ \sum_{i=0}^{k-1} E\left(h_i^2 \left[(\Delta w_i)^2 - \Delta t_i\right]^2\right) = \\ \sum_{i=0}^{k-1} E\left(h_i^2 \left[(\Delta w_i)^4 - 2(\Delta w_i)^2 \Delta t_i + (\Delta t_i)^2\right]\right) = \\ \sum_{i=0}^{k-1} E\left(h_i^2 \left[3(\Delta t_i)^2 - 2(\Delta t_i)^2 + (\Delta t_i)^2\right]\right) = \\ \sum_{i=0}^{k-1} E\left(h_i^2 (\Delta t_i)^2\right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

onde foi usado o fato de  $E(\Delta w_i)^{2n} = \frac{(2n)!(\Delta t_i)^n}{(2^n n!)}$ . Logo:

$$\sum_{i=0}^{k-1} h_i(\Delta w_i)^2 \rightarrow \int_0^t h(s) ds \quad \text{em } L^2$$

ou seja, foi mostrado que

$$\sum_{i=0}^{k-1} V_{xx}(x(t_{i+1}), t_{i+1})(\Delta t_i)^2 \rightarrow \int_0^t V_{xx}(x(s), s) g^2(s) ds, \quad \text{em } L^2 \quad (\text{A.7})$$

Substituindo de (A.3) a (A.7) em (A.2), tem-se:

$$\begin{aligned} V(x_n(t); t) - V(x(0); 0) &= \int_0^t \left[ V_t(x_n(s), s) + V_x(x_n(s), s) f(s) I_{[[0, \tau_n]]}(s) + \frac{1}{2} V_{xx}(x_n(s), s) g^2(s) \right] ds \\ &+ \int_0^t V_x(x_n(s), s) g(s) I_{[[0, \tau_n]]}(s) dW(s) \end{aligned}$$

que é equivalente a (A.1), concluindo a prova.

## Anexo 2

### A fórmula de Itô na precificação de um ativo

Suponha que o preço inicial do ativo  $S(t_0) = S_0 > 0$  no tempo  $t = t_0 \geq 0$ . Então o preço do ativo no tempo  $t \geq t_0$  é dado por:

$$S(t) = S_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - t_0) + \sigma (z(t) - z(t_0)) \right] \quad (\text{A.8})$$

#### Prova:

Pela teoria das equações diferenciais estocásticas (Mao, 1997), a Equação (2.9), dado o valor inicial  $S(t_0) = S_0 > 0$ , tem uma única solução  $S(t)$  em  $t \geq t_0$  e a solução será positiva. Então para aplicar a formula de Itô, precisa-se definir a função  $C^{2,1}$  em  $(0, \infty) \times \mathbb{R}_+$  tanto que  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ .

Definir agora  $V : (0, \infty) \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$V(S, t) = \log S$$

logo:

$$V_t = 0, \quad V_S = \frac{1}{S}, \quad V_{SS} = -\frac{1}{S^2}$$

e a partir da Equação (2.9), pode-se definir  $f(t)$  e  $g(t)$  como sendo:

$$f(t) = \mu dt, \quad g(t) = \sigma dz_t \quad \text{e} \quad dw = dz$$

pela fórmula de Itô:

$$dV(S(t);t) = [V_t(S(t),t) + V_S(S(t),t)\mu S(t) + \frac{1}{2}V_{SS}(S(t),t)\sigma^2 S^2(t)]dt + V_S(S(t),t)\sigma S(t)dw$$

logo:

$$d \log S(t) = \left[ \frac{1}{S(t)} \mu S(t) - \frac{1}{2S^2(t)} \sigma^2 S^2(t) \right] dt + \frac{1}{S(t)} \sigma S(t) dz$$

$$d \log S(t) = (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) dt + \sigma dz$$

integrando ambos os lados de  $t_0$  a  $t$ , obtem-se:

$$\log S(t) - \log S(t_0) = (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)(t - t_0) + \sigma(z - z_0)$$

Substituindo o valor inicial  $S(t_0)=S_0$  reorganizamos a expressão anterior para obter:

$$\begin{aligned} \log S(t) &= \log S_0 + (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)(t - t_0) + \sigma(z - z_0) \\ &= \log \left( S_0 \exp \left[ (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)(t - t_0) + \sigma(z - z_0) \right] \right) \end{aligned} \tag{A.9}$$

que leva a Equação (A.8), o que conclui a prova.

### **Anexo 3:**

#### A Eliminação da Aleatoriedade

Os dois caminhos aleatórios em  $S$  (Equação 2.9) e em  $V$  (Equação 2.17) são ambos derivados de uma única variável aleatória  $dw$  (ou  $dz$ ). Pode-se explorar esta situação para construir uma terceira variável  $M$ , cuja variação  $dM$  é totalmente determinística durante o pequeno período de tempo  $dt$ .

Para o momento esta seção parece não ter importância ou sentido dentro do contexto, entretanto será de extrema importância quando retornarmos a precificação das opções.

Seja  $\Delta$  um número a nossa disposição e seja também:

$$M = V - \Delta S \quad (A.10)$$

onde  $\Delta$  é mantido constante durante o espaço de tempo  $dt$ . Logo pode-se escrever:

$$\begin{aligned} dM &= dV - \Delta dS \\ dM &= \sigma S V_S dz + \left[ \mu S V_S + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + V_t \right] dt - \Delta (\sigma S dz_t + \mu S dt) \\ dM &= \sigma S (V_S - \Delta) dz + \left[ \mu S (V_S - \Delta) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + V_t \right] dt \end{aligned} \quad (A.11)$$

Fazendo-se:  $\Delta = V_S = \frac{\partial V}{\partial S}$  (antes do salto, ou seja do tempo  $t$ ), faz-se com que o coeficiente  $dw$  desapareça. Isto permite um valor para  $dM$  que é conhecido: o caminho aleatório de  $M$  é puramente determinístico.

Essencialmente, este “truque” usa o fato de que os dois caminhos aleatórios, para  $V$  e  $S$ , são correlacionados e não independentes. Desde que este comportamento randômico seja proporcional, então tomando a combinação linear correta entre  $V$  e  $S$ , pode-se eliminar a aleatoriedade mutuamente.

## **Anexo 4:**

### Restrições racionais das opções de compra

As condições de contorno são o resultado de teoremas que regem a formação de preços sob o ponto de vista de um investidor racional<sup>71</sup>. Tais teoremas e definições serão a seguir apresentados. Por notação defini-se  $C_T(S,t,k)$  como uma opção de compra americana no tempo  $t \leq T$  e  $c_T(S,t,k)$  uma opção de compra européia. Inicialmente tratar-se-á das condições de contorno para as opções de compra (quando não for necessário o índice  $T$ , este será suprimido para simplificar a notação).

Pela definição das opções:

$$C(S,t,k) \geq 0 \quad \text{e} \quad c(S,t,k) \geq 0 \quad (\text{A.12})$$

e quando  $t = T$ , ou seja, no vencimento, ambos os contratos devem satisfazer:

$$C(S,T,k) = c(S,T,k) = \max[0; S_T - k] \quad (\text{A.13})$$

logo, a partir das condições de arbitragem e das expressões (A.12) e (A.13), tem-se:

$$C(S,t,k) \geq \max[0; S_T - k] \quad (\text{A.14})$$

Em geral a relação (A.14) não funciona para opções de compra européias, visto que com estas não pode haver o exercício antecipado da opção a qualquer momento, o que poderia gerar benefícios ao seu titular (Merton, 1990).

*Definição A.1:*

*O ativo (ou carteira) A é dominante sobre o ativo (ou carteira) B se, para alguma data conhecida no futuro, o retorno de A exceder o retorno de B para algum possível estado da*

---

<sup>71</sup> Aquele que procura maximizar sua utilidade.

*natureza, e que seja pelo menos igual ao retorno de B para todos os outros estados da natureza.*

Note que no mercado perfeito, sem custo de transação e restrições à tomada e oferta de empréstimos, a existência de ativos dominantes seria equivalente à possibilidade de arbitragem. No entanto, é possível a existência de ativos dominantes mesmo numa situação sem arbitragem em mercados não perfeitos. Para este trabalho será apresentada a seguinte suposição feita por Merton (1999):

*Suposição A.1*

*Uma condição necessária para a teoria da precificação racional das opções é que as opções sejam precificadas sem a presença de ativos dominantes e dominados.*

A partir da suposição acima se pode tirar algumas conclusões sobre as opções, uma que segue diretamente da suposição é: dadas duas opções de compra americana do mesmo ativo e com mesmo preço de exercício, têm-se:

$$C_T(S, t_2, k) \geq C_T(S, t_1, k), \quad \text{se} \quad T_2 - t_2 > T_1 - t_1 \quad (\text{A.15})$$

e que:

$$C(S, t, k) \geq c(S, t, k) \quad (\text{A.16})$$

Outra conclusão é que, admitindo duas opções idênticas em todos os parâmetros, com exceção ao preço de exercício, tais opções devem obedecer:

$$\begin{aligned} C(S, t, k_2) &\leq C(S, t, k_1) & \text{se} & & k_2 > k_1 \\ c(S, t, k_2) &\leq c(S, t, k_1) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Como um ativo comum é igual a uma opção de compra perpétua com preço de exercício zero, daí segue de (A.15) e (A.17) que:

$$S \geq C(S, t, k) \quad (\text{A.18})$$

e de (A.15) e de (A.17), a opção deve ser sem valor se o ativo também o for, ou seja:

$$C(0, t, k) = c(0, t, k) = 0 \quad (\text{A.19})$$

Seja  $Q(t)$  o preço de um título sem risco (um título c-bond) e que paga uma unidade monetária no seu vencimento. Assumindo que as taxas de juros presente e futura sejam positivas, então, para um dado ponto do calendário:

$$\begin{aligned} 1 &= Q(T) > Q(t_n) > \dots > Q(t_2) > Q(t_1) \\ T &> t_n > \dots > t_2 > t_1 \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

*Teorema A.1:*

*Se o preço de exercício de uma opção de compra europeia é  $k$  e se nenhum pagamento (como dividendos) é feito sobre o ativo objeto no período até o vencimento da opção (ou alternativamente se a opção está protegida contra tais pagamentos), então:*

$$c(S, t, k) \geq \max[0; S_T - kQ(t)] \quad (\text{A.21})$$

*Prova:*

*Considere as duas possibilidades de investimento:*

*A: comprar a opção por  $c(S, t, k)$ ;  
comprar  $k$  títulos ao preço de  $Q(t)$  por título.  
Investimento total:  $c(S, t, k) + Q(t)$ .*

*B: comprar o ativo objeto por  $S$ .  
Investimento total:  $S$ .*

*Supondo que no fim do período ( $T$ ) o ativo objeto tenha valor  $S^*$ . Conseqüentemente o investimento  $B$  terá valor  $S^*$ . Vamos avaliar duas situações para o investimento  $A$  ao fim do período:*

*Se  $S^* \leq k$ , então a opção não será exercida e o valor de  $A = 0 + k = k$ .*

*Se  $S^* > k$ , então a opção será exercida e o valor de  $A = (S^* - k) + k = S^*$ .*



*Assim sendo, o valor corrente de A é ao menos igual a B. Logo A é dominante sobre B. E junto com a suposição A.1, teremos:*

$$c(S, T, k) + kQ(t) \geq S \quad (\text{A.22})$$

*(A.22) junto com (A.12) implica que:*

$$c(S, T, k) \geq \max[0; S_T - kQ(t)]$$

*o que conclui a prova.*

De (A.16) e do Teorema A.1 obtém-se que o valor de uma opção de compra americana com um preço de exercício fixo também pode ser obtido via a Equação (A.21). Outro aspecto oriundo deste teorema é o fato de que o direito de exercer antes da data de vencimento a opção tem sempre um valor não negativo. Este fato é importante para poder concluir que quando este direito tem valor zero, então é o caso onde a opção de compra americana e européia tem o mesmo valor. A partir do Teorema A.1 podem-se obter os dois próximos teoremas.

*Teorema A.2:*

*Sob as premissas do Teorema A.1, então uma opção de compra americana nunca será exercida antes da sua data de vencimento, significa também afirmar que esta terá o mesmo valor que uma opção européia.*

*Prova:*

*Se a opção de compra americana é exercida, seu valor será  $\text{Max}(0, S - k)$ . Mas pelo Teorema 1,  $C(S, t, k) \geq \max[0; S_T - kQ(t)]$ , que é maior que  $\text{Max}(0, S - k)$  para  $t < T$  porque de (4.24),  $Q(t) < 1$ . Conseqüentemente, a opção tem sempre um valor mais “vivo” que “morto”.*

O Teorema A.2 sugere que se há uma diferença entre uma opção americana e européia implicando numa probabilidade positiva de um exercício prematuro, deve ser proveniente de

mudanças desfavoráveis no preço de exercício ou diferença de proteção contra os pagamentos do ativo objeto.

Comumente refere-se ao  $\text{Max}(0, S - k)$  como o valor intrínseco da opção, ou seja, a opção deve ser sempre vendida ao menos por este valor intrínseco. A luz dos Teoremas A.1 e A.2, faz mais sentido definir o valor intrínseco como  $\text{Max}(0, S - kQ(t))$ . Essa definição reflete o fato de que o preço de exercício não precisa ser pago antes da data de vencimento, e que  $kQ(t)$  é o valor presente deste pagamento.. A diferença entre estes dois pagamentos pode ser grande, em particular com opções com grandes tempos de vencimento, que é o que o próximo teorema demonstra:

*Teorema A.3:*

*Sob as premissas d o Teorema A.1, o valor de uma opção perpetua ( $T = \infty$ ) deve ser igual ao valor do ativo objeto.*

*Prova:*

*Pelo Teorema A.1,  $C_\infty(S, t, k) \geq \max[0; S_T - kQ(\infty)]$ . Mas  $Q(\infty) = 0$ , desde que a taxa de juros seja positiva, logo teremos  $C_\infty(S, t, k) \geq \max[0; S_T] \geq S_T$ . Mas de (4.24)  $S \geq C_\infty(S, t, k)$ . Logo  $C_\infty(S, t, k) = S$ .*

## **Anexo 5:**

### Restrições racionais das opções de venda

As opções de venda têm recebido pouca atenção na literatura por ter uma popularidade menor que as opções de compra e porque se acredita que, dado o preço de uma opção de compra e do ativo objeto, o valor da opção de venda é prontamente determinada. Segundo Merton (1990) esta afirmação é falsa para opções de venda americanas, e as aplicações matemáticas das opções de venda são mais sofisticadas que as correspondentes para as opções de compra.

Usando uma notação semelhante do Anexo 4, onde  $P$  é uma opção de venda americana e  $p$  uma opção de venda européia, na data de vencimento:

$$P(S, T, k) = p(S, T, k) = \max[0; k - S_T] \quad (A.23)$$

Iniciando a análise pelas opções européias. Para determinar a posição de uma opção de venda européia duas posições em carteira ( $H$ ) são examinadas: considere que se assuma uma posição longa em um ativo a  $S$  unidades monetárias, uma longa posição em uma opção de venda européia em  $t$  como  $p(S, t, k)$  unidades monetárias, e a tomada de empréstimo de  $kQ'(t)$  unidades onde  $Q'(t)$  é o valor corrente de uma unidade pagável  $(T - t)$  anos a partir de  $t$  a uma dada taxa de juros de empréstimo. Supondo que o ativo objeto esteja valendo  $S^*$  ao fim de  $(T - t)$  anos.

Primeiro caso:

$$S^* \leq k \rightarrow H = S^* + (k - S^*) - k = 0$$

Segundo caso:

$$S^* > k \rightarrow H = S^* + (0) - k = S^* - k$$

A estrutura de retorno é idêntica em todos os estados da natureza para uma opção de compra européia com mesmo preço de exercício e tempo de vencimento. Conseqüentemente, para se evitar que a opção de compra seja um derivativo dominado a opção de compra e de venda devem ser precificadas de forma que:

$$p(S, t, k) + S - kQ'(t) \geq c(S, t, k) \quad (\text{A.24})$$

Considerando agora uma posição curta em um ativo, uma longa posição em uma opção de compra, e o empréstimo de  $kQ(t)$  unidades. Supondo que o ativo objeto esteja valendo  $S^*$  ao fim de  $(T - t)$  anos. Logo tem-se duas posições:

Primeiro caso:

$$S^* \leq k \rightarrow H = 0 - S^* + k = k - S^*$$

Segundo caso:

$$S^* > k \rightarrow H = (S^* - k) - S^* + k = 0$$

A estrutura de retorno é idêntica em todos os estados da natureza para uma opção de venda européia com mesmo preço de exercício e tempo de vencimento. Se a opção de venda não é um derivativo dominado, então deve funcionar a seguinte relação:

$$c(S, t, k) - S + kQ(t) \geq p(S, t, k) \quad (\text{A.25})$$

*Teorema A.4:*

*Se forem válidas as suposições A.1, e se as taxas de tomada de empréstimos e de empréstimo são iguais então:  $Q(t) = Q'(t)$ , então:*

$$p(S, t, k) = c(S, t, k) - S + kQ(t) \quad (\text{A.26})$$

*Prova:*

*A prova segue diretamente da aplicação simultânea de (A.23) e (A.25) quando  $Q(t) = Q'(t)$ .*

Conseqüentemente, o valor de uma opção de venda européia pode ser precificada utilizando as informações da sua equivalente opção de venda e do ativo objeto. Dois corolários podem ser obtidos diretamente do teorema anterior.

*Corolário A.6a:*

$$kQ(t) \geq p(S, t, k)$$

*Prova:*

De (A.16) e (A.18) temos:  $c(S, t, k) - S \leq 0$  e de (A.25)  $kQ(t) \geq p(S, t, k)$  o que conclui a prova.

A intuição para este resultado é imediata. Em função do limite de segurança dado pelo ativo objeto, o valor máximo da opção é  $k$  e como a opção é européia, não se pode ter receita antes do vencimento. A opção não pode ter um valor maior que o valor presente do pagamento certo do seu valor máximo.

*Corolário A.6b:*

*O valor de uma opção de venda européia perpetua ( $T = \infty$ ) é zero.*

*Prova:*

A opção de venda tem um limite mínimo seguro de  $p(S, t, k) \geq 0$ . Do Corolário 6a e da condição  $Q(\infty) = 0$ , temos  $0 \geq p_\infty(S, t, k)$ , o que conclui a prova.

A análise das opções de venda americanas inicia-se pelo fato destas poderem ser exercidas a qualquer momento, e seu preço deve satisfazer a condição de arbitragem, daí:

$$P(S, t, k) \geq \max[0; k - S] \quad (\text{A.27})$$

Da expressão acima se pode observar que se o valor do ativo  $S$  tender para infinito, o valor da opção tende a zero, ou seja:

$$P(\infty, T, k) = p(\infty, T, k) = 0 \quad (\text{A.28})$$

Pelos mesmos argumentos usados para derivar (A.16) pode-se mostrar que:

$$P(S, t, k) \geq p(S, t, k) \quad (\text{A.29})$$

Onde a inequação estrita acontecerá somente se houver uma probabilidade positiva de exercício antecipado.

Como mostrado no Anexo 4, as opções americanas e européias devem ter o mesmo valor se o preço de exercício for constante e estes forem protegidos contra pagamentos do ativo subjacente. Mesmo sob tais condições, há sempre probabilidade positiva de exercício antecipado de uma opção de venda americana, assim sendo uma opção de venda americana terá um valor superior a sua equivalente européia. Uma indicação positiva sobre este fato segue diretamente do Corolário A.6b e da condição de arbitragem (A.26).

Ao contrário de uma opção européia, uma opção americana sempre é uma função não decrescente da sua data de vencimento. Se não há a possibilidade de um exercício prematuro, o valor da opção americana será igual a sua equivalente européia. Pelo Corolário A6b o valor de uma opção de venda americana perpetua será igual à zero, e pelo argumento de monotonicidade ao longo do tempo até o vencimento todas as opções americanas deveriam ter valor zero. Este resultado absurdo viola as condições de arbitragem (A.26) para  $S < k$ .

Para deixar este ponto mais claro vamos reconstituir a análise de duas carteiras utilizadas para opções européias, no entanto, com opções americanas. A primeira carteira contém uma posição longa em um ativo ao preço  $S$ , uma longa posição em uma opção de venda americana ao preço  $P(S, t, k)$ , e a tomada de empréstimo de  $kQ'(t)$ . Como já mostrado, se mantida até o vencimento, o rendimento da carteira será igual ao resultado obtido ao se manter uma opção de compra até o vencimento. Como a opção americana de venda pode ser exercida antes do vencimento devemos analisar este caso com mais detalhes.

Se, para todos os períodos antes do vencimento, a carteira tiver valor maior que a opção de compra americana,  $S - k$ , então para evitar dominância da opção de compra, o valor corrente da carteira deve exceder ou ser igual ao valor corrente da opção de compra americana.

O valor intrínseco da carteira a  $(T - t)$  períodos antes do vencimento quando o valor do ativo subjacente for  $S^*$  é:

$$\begin{aligned} S^* + P(S^*, t, k) - kQ'(t) = \\ P(S^*, t, k) + (S^* - k) + k(1 - Q'(t)) > S^* - k \end{aligned} \quad (A.30)$$

Conseqüentemente se a condição (A.24) for válida para opções americanas para evitar dominância da opção de compra americana, temos:

$$P(S, t, k) + S - kQ'(t) \geq C(S, t, k) \quad (\text{A.31})$$

O segundo carteira tem uma longa posição de uma opção de compra americana ao preço  $C(S, t, k)$ , uma posição curta em um ativo, e o empréstimo de  $kQ(t)$  unidades. Se for mantido até o vencimento, esta carteira irá replicar o resultado de uma opção de venda europeia, entretanto, esta deve ter ao menos o mesmo valor em qualquer ponto do período. O valor intrínseco da carteira  $(T - t)$  períodos antes do vencimento e com o preço do ativo subjacente igual a  $S^*$ , é:

$$\begin{aligned} C(S^*, t, k) - S^* + kQ(t) = \\ (k - S^*) + C(S^*, t, k) - k(1 - Q(t)) > k - S^* \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Se  $C(S^*, t, k) < k(1 - Q(t))$ , que é possível para pequenos valores de  $S^*$ . De (A.27)  $P(S^*, t, k) \geq k - S^*$ . Então o valor intrínseco da carteira será menor que o valor da opção de venda americana para valores suficientemente pequenos de  $S^*$ . Assim se uma opção de venda americana for vendida para fazer frente a esta carteira, e se o dono da opção decidir exercê-la antecipadamente, o valor da carteira deve ser menor que o valor de exercício da opção.

Este resultado seria certamente obtido se  $S^* < k(1 - Q(t))$ . Neste caso, a carteira não iria dominar a opção de venda americana se a Inequação (A.25) não fosse válida, e um teorema análogo ao Teorema A.4, que determina o valor de uma opção de venda americana em termo de uma opção de compra, não existiria. A análise da segunda carteira não apresenta vantagem a não ser a inequação:

$$P(S, t, k) \leq k - S + C(S, t, k) \quad (\text{A.33})$$

*Teorema A.5:*

*Se para algum  $t' < t$ , existir a probabilidade positiva que  $p(S, t', k) < k(1 - Q(t'))$ , então há uma probabilidade positiva que a opção de venda americana seja exercida antes do vencimento e que o valor desta seja estritamente superior a sua equivalente européia.*

*Prova:*

*A única razão para a opção de venda americana ser vendida por um prêmio superior ao da sua equivalente européia é se existir uma probabilidade positiva de exercê-la antes do vencimento. Logo é suficiente provar que  $p(S, t, k) < P(S, t, k)$ .*

*Da suposição A.1, se para todo período antes do vencimento  $p(S^*, t', k) < P(S^*, t', k)$  para algum(ns) valor(es) de  $S^*$ , então  $p(S^*, t, k) < P(S^*, t, k)$ . Do Teorema A.3,  $p(S^*, t', k) = c(S^*, t', k) - S^* + kQ(t')$ , de (A.20)  $P(S^*, t', k) \geq \max[0; k - S^*]$ . Mas  $p(S^*, t', k) < P(S^*, t', k)$  é implicado se  $k - S^* > c(S^*, t', k) - S^* + kQ(t')$ , que é possível se  $p(S^*, t', k) < k(1 - Q(t'))$ . Pela hipótese do teorema, como  $S^*$  é um valor possível.*

Como há sempre uma chance de exercício prematuro nas opções de venda americanas, o Teorema A.5 ou as equações de Black & Scholes (as quais serão apresentadas em detalhes mais adiante) não sugere uma modelagem analítica para a precificação de uma opção de venda americana.



## Anexo 6

A fórmula de Black e Scholes para a opção de compra européia:

*A solução explícita para a PDE (2.31) é dada por*

$$c(S, t) = SN(d_1) - k \exp[-r(T - t)]N(d_2) \quad (\text{A.34})$$

*onde  $N(x)$  é a função de distribuição de probabilidade acumulada da distribuição normal padrão, ou seja:*

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz$$

*Enquanto que:*

$$d_1 = \frac{\log(S/k) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad e \quad d_2 = \frac{\log(S/k) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

*Prova:*

*O teorema acima pode ser provado utilizando a técnica de PDE (como descrito em Friedman, 1996), neste trabalho, entretanto, utilizaremos a técnica probabilística (conforme Mao, 1997).*

*Dado um par qualquer de  $S > 0$  e  $t \in [0, T]$ , pode-se introduzir a SDE*

$$dx(u) = rx(u)du + \sigma x(u)dw(u) \quad \text{com} \quad t \leq u \leq T \quad (\text{A.35})$$

*com valor inicial  $x(t) = S$  em  $u = t$ . Na seção 2.2.2 foi mostrado que a expressão acima pode ser resolvida analiticamente. Em particular:*

$$x(T) = S \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t_o) + \sigma(w(T) - w(t_o))\right] \quad (\text{A.36})$$

Definindo a função  $C^{2,1}$ :

$$V(x, u) = c(x, u)e^{r(T-u)}, \quad (x, u) \in (0, \infty) \times (t, T)$$

Onde  $c(x, u)$  satisfaz a equação PDE de Black e Scholes, ou seja (com  $x$  e  $u$  em lugar de  $S$  e  $t$ ):

$$\frac{\partial c}{\partial u} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + rS \frac{\partial c}{\partial x} - rc = 0 \quad (\text{A.37})$$

Calculando:

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \left( \frac{\partial c}{\partial u} - rc \right) e^{r(T-u)}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial x} e^{r(T-u)}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 c}{\partial u^2} e^{r(T-u)}$$

Pela formula de Itô, temos:

$$\begin{aligned} dV(x(u); u) &= \left[ \frac{\partial V(x(u), u)}{\partial u} + \frac{\partial V(x(u), u)}{\partial x} rx(u) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(x(u), u)}{\partial^2 x} \sigma^2 x^2(u) \right] du \\ &+ \frac{\partial V(x(u), u)}{\partial x} \sigma x(u) dw(u) \\ dV(x(u); u) &= e^{r(T-t)} \left[ \frac{\partial c(x(u), u)}{\partial u} - rc(x(u), u) + rx(u) \frac{\partial c(x(u), u)}{\partial x} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2(u) \frac{\partial^2 c(x(u), u)}{\partial^2 x} \right] du + \sigma x(u) e^{r(T-t)} \frac{\partial c(x(u), u)}{\partial x} dw(u) \end{aligned}$$

usando (A.35) pode-se observar que:

$$dV(x(u); u) = \frac{\partial V(x(u), u)}{\partial x} \sigma x(u) dw(u)$$

integrando ambos os lados de  $u = t$  a  $u = T$ , teremos

$$V(x(T), T) - V(x(t), t) = \int_t^T \frac{\partial V(x(u), u)}{\partial x} \sigma x(u) dw(u)$$

Aplicando o operador esperança e reaplicando a propriedade da integral de Itô nos obtemos

$$EV(x(T), T) - EV(x(t), t) = 0$$

Note que:

$$V(x(T), T) = c(x(T), T) = \max(x(T) - k, 0), \quad e$$

$$V(x(t), t) = c(x(t), t)e^{r(T-t)} = c(S, t)e^{r(T-t)}$$

logo

$$E[\max(x(T) - k, 0)] - c(S, t)e^{r(T-t)} = 0$$

ou seja:

$$c(S, t) = e^{-r(T-t)} E[\max(x(T) - k, 0)]$$

Observa-se que:

$$\begin{aligned} E[\max(x(T) - k, 0)] &= E[(x(T) - k, 0)] I_{\{x(T) > k\}} \\ &= E[x(T) I_{\{x(T) > k\}}] - E[k I_{\{x(T) > k\}}] \\ &= E[x(T) I_{\{x(T) > k\}}] - kP[x(T) > k] \end{aligned}$$

onde  $I_{\{x(T) > k\}}$  é a função indicador do conjunto  $\{x(T) > k\}$ , ou seja,

$$I_{\{x(T) > k\}} = \begin{cases} 1 & \text{se } x(T) > k \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Assim sendo, pode-se escrever:

$$c(S, t) = e^{-r(T-t)} \left( E \left[ x(T) I_{\{x(T) > k\}} \right] - k P \{ x(T) > k \} \right) \quad (\text{A.38})$$

Introduzindo a variável aleatória  $\xi = \log x(T)$ . Pela Equação (A.36), teremos:

$$\xi = \log S + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t) + \sigma (w(T) - w(t))$$

Logo a variável  $\xi$  segue uma distribuição normal com média:

$$\log S + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t)$$

e variância

$$\sigma^2 (w(T) - w(t))$$

Por conveniência tomaremos:

$$\hat{\mu} = \log S + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t_o) \quad e \quad \hat{\sigma}^2 = \sigma^2 (w(T) - w(t_o))$$

Então  $\xi \sim N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ . Utilizando as tradicionais propriedades das distribuições padrões, sabe-se:

$$Z = \frac{\xi - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \sim N(0,1)$$

com a função de densidade de probabilidade:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad \text{em } z \in R$$

com esta nova notação e propriedade, calcula-se:

$$P\{x(T) > k\} = P\{\xi > \log k\} = P\left\{Z > \frac{\log k - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right\} = P\left\{Z < -\frac{\log k - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right\}$$

recalculando a definição de  $d_2$ ,

$$-\frac{\log k - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} = \frac{\log\left(\frac{S}{k}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_2$$

logo:

$$P\{x(T) > k\} = P\{Z < d_2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz = N(d_2) \quad (\text{A.39})$$

também calculando:

$$\begin{aligned} E\left[x(T)I_{\{x(T) > k\}}\right] &= E\left[e^{\xi} I_{\{\xi > \log k\}}\right] = E\left[e^{\hat{\sigma}Z + \hat{\mu}} I_{\left\{Z > \frac{(\log k - \hat{\mu})}{\hat{\sigma}}\right\}}\right] \\ E\left[x(T)I_{\{x(T) > k\}}\right] &= E\left[e^{\hat{\sigma}Z + \hat{\mu}} I_{\{Z > d_2\}}\right] \end{aligned}$$

recalculando o valor de  $d_2$ , usando a expressão acima se tem:

$$\begin{aligned} E\left[x(T)I_{\{x(T) > k\}}\right] &= \frac{e^{\hat{\mu}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} \exp\left(\hat{\sigma}z - \frac{1}{2}z^2\right) dz \\ &= \frac{\exp\left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2 - \hat{\sigma}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz \\ &= \frac{\exp\left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2 + \hat{\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz \\ &= \exp\left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right) N(d_2 + \hat{\sigma}) \end{aligned}$$

mas pela definição de  $d_1$ ,

$$d_2 + \hat{\sigma} = d_2 + \sigma\sqrt{T-t} = d_1$$

logo:

$$\mathbb{E}\left[x(T)I_{\{x(T)>k\}}\right] = \exp(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2)N(d_1) \quad (\text{A.40})$$

Substituindo (A.39) e (A.40) em (A.38), tem-se:

$$\begin{aligned} c(S,t) &= e^{-r(T-t)} \left[ \exp(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2)N(d_1) - EN(d_2) \right] \\ &= N(d_1) \exp \left[ -r(T-t) \log S + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \right] - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) \end{aligned}$$

$$c(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

O que conclui a prova.

## Anexo 7

O modelo de precificação de opções de Black e Scholes apresentado no Capítulo 2, partiu de algumas premissas, como a não variabilidade dos juros e da volatilidade, logo  $c = f(S, \sigma, r, k)$  assim sendo para pequenas variações do valor da relaciona o valor de uma opção a vários fatores de risco:

*Definição A.2:*

*O  $\delta$  mede o quanto o prêmio da opção deve variar para cada variação no valor do ativo objeto. Sendo formalmente:*

$$\delta = \frac{\partial c}{\partial S} \quad (A.41)$$

*Proposição A.1:*

*Sob as suposições de Black e Scholes onde  $N(x)$  é uma função cumulativa normal,  $\sigma$  como a volatilidade expressa na forma decimal,  $r$  como a taxa de juros e  $1 \leq t \leq T$ , então o delta para uma opção de compra e de venda (respectivamente) com dividendos<sup>72</sup> a uma taxa  $D_o$  é:*

$$\delta = e^{-D_o(T-t)} N(d_{10}) \quad (A.42)$$

$$\delta = e^{-D_o(T-t)} (N(d_{10}) - 1) \quad (A.43)$$

*onde:*

$$d_{10} = \frac{\log\left(\frac{S}{k}\right) + \left(r - D_o + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (A.44)$$

---

<sup>72</sup> Para o caso sem dividendos basta fazer  $D_o = 0$ , tanto para o delta quanto para as demais gregas que seguem (Proposições A.1, A.2, A.3 e A.4)

*Prova:*

*A prova é obtida diretamente da primeira derivada em relação à  $S$  das Expressões (2.32) e (2.33).*

A utilização do delta tem a finalidade de tornar a carteira imune a pequenas mudanças no preço do ativo subjacente no próximo intervalo de tempo, tal uso do delta para o hedge é conhecido como *hedge* delta.

Apesar do *hedge* delta mostrar-se eficiente para a proteção da carteira, a utilização do delta para a administração do risco pode se tornar inviável em função dos custos relacionados a cada mudança de posição. Uma alternativa é o uso da grega *gamma*.

*Definição A.3:*

*O  $\gamma$  indica quão rápido o  $\delta$  irá mudar, ou seja o  $\gamma$  de uma carteira de derivativos é a taxa de variação de seu  $\delta$  com relação ao preço do ativo subjacente.*

$$\gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \quad (A.45)$$

$\gamma$  pequenos proporcionam menos riscos, porque estes proporcionam  $\delta$  menos sujeitos a mudanças.

*Proposição A.2:*

*Sob as mesmas suposições da proposição 6.1, têm-se o  $\gamma$  para uma opção de compra e venda com dividendos:*

$$\gamma = \frac{\exp\left(\frac{d_1}{2} - D_0(T-t)\right)}{\sqrt{2\pi}S\sigma\sqrt{T-t}} \quad (A.46)$$

*Prova:*

*A prova é obtida diretamente da segunda derivada em relação à  $S$  das Expressões (2.32) e (2.33).*



Além da sensibilidade ao preço do ativo subjacente, as opções e outros derivativos são sensíveis à variação do tempo de vencimento, taxas de juros e sobretudo à volatilidade. A seguir definições formais destas gregas.

*Definição A.4:*

A terceira grega é o  $\theta$  de uma carteira de derivativos, que é a taxa de variação de seu valor ao longo do tempo, com todas as demais variáveis constantes. Ou seja:

$$\delta = \frac{\partial c}{\partial t} \quad (A.47)$$

*Proposição A..3:*

Para uma opção de compra e venda (respectivamente) com dividendos, que segue o modelo de B&S, o teta é dado por:

$$\theta = \frac{S \exp\left(\frac{d_{10}}{2}\right) \sigma e^{-D_0(T-t)}}{2\sqrt{2\pi(T-t)}} + D_0 SN(d_{10}) e^{-D_0(T-t)} - rKe^{-r(T-t)} (N(d_{10}) - 1) \quad (A.48)$$

$$\theta = \frac{S \exp\left(\frac{d_{10}}{2}\right) \sigma e^{-D_0(T-t)}}{2\sqrt{2\pi(T-t)}} - D_0 SN(d_{10}) e^{-D_0(T-t)} + rKe^{-r(T-t)} (N(d_{10}) - 1) \quad (A.49)$$

*Prova:*

A prova é obtida diretamente da primeira derivada em relação à  $t$  das Expressões (2.32) e (2.33).

Para a maioria das opções,  $\theta$  é geralmente negativo, significando que as opções perdem valor conforme o tempo avança. A derivada é sempre negativa para opções americanas, que dão ao seu detentor a possibilidade de exercício antecipado.

*Definição A.5:*

*A grega que avalia a variação da volatilidade no tempo é  $\kappa$ . O  $\kappa$ <sup>73</sup> de uma carteira de opções ou de uma opção, é a taxa de variação do valor da carteira com relação à volatilidade do ativo objeto.*

$$\kappa = \frac{\partial c}{\partial \sigma} \quad (A.50)$$

*Proposição A.4:*

*Para uma opção de compra ou de venda sobre uma ação com dividendos e que segue B&S, o  $\kappa$  é dado por:*

$$\kappa = S\sqrt{T-t} \exp\left(\frac{d_{10}}{2}\right) e^{-D_0(T-t)} \quad (A.51)$$

*Prova:*

A prova pode ser obtida diretamente da primeira derivada em relação à volatilidade das Expressões (2.32) e (2.33).

Como o  $\kappa$  deve ser positivo, as posições compradas em opções respondem positivamente aos aumentos da volatilidade e apresentam perda de valor conforme a volatilidade diminui. Como o  $\kappa$  acompanha a forma de sino, as opções no dinheiro são mais sensíveis à volatilidade.

*Definição A.6:*

*A última “grega” é o  $\rho$  ( $\rho^*$ ), que mede a taxa de mudança do valor da carteira com relação à taxa de juros (dividendos). Sendo dado por:*

$$\rho = \frac{\partial c}{\partial r} \quad (A.52)$$

---

<sup>73</sup> Esta grega algumas vezes é denominada vega ( $v$ ), ou labda ( $\lambda$ ).

*Proposição A.5:*

*Para uma opção de compra e venda (respectivamente) de uma ação com dividendos (calculada via o modelo de B&S), temos:*

$$\rho = K(T-t)e^{-r(T-t)}(N(d_{10})-1) \quad (A.53)$$

$$\rho = -K(T-t)e^{-r(T-t)}(N(-d_{10})-1) \quad (A.54)$$

*E para a variação nos dividendos:*

$$\rho^* = -K(T-t)e^{-D_0(T-t)}N(d_{10}) \quad (A.55)$$

$$\rho^* = K(T-t)e^{-D_0(T-t)}N(-d_{10}) \quad (A.56)$$

*Prova:*

*A prova pode ser obtida diretamente da primeira derivada em relação à  $r$  ( $D_0$ ) das Expressões (2.32) e (2.33).*