



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Rubens Henrique Damascena de Souza

Dinâmica não-linear de uma partícula autopropelida em armadilhas bidimensionais

Recife
2020

Rubens Henrique Damascena de Souza

Dinâmica não-linear de uma partícula autopropelida em armadilhas bidimensionais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Dinâmica Não-Linear, Caos e Sistemas Complexos

Orientador: Prof. Dr. Leonardo Ribeiro Eulálio Cabral

Co-Orientador: Prof. Dr. Clécio Clemente de Souza Silva

Recife
2020

Catálogo na fonte
Bibliotecária Mariana de Souza Alves CRB4-2105

S729d Souza, Rubens Henrique Damascena de
Dinâmica não-linear de uma partícula autopropelida em armadilhas
bidimensionais / Rubens Henrique Damascena de Souza. – 2020.
67f.: il., fig.

Orientador: Leonardo Ribeiro Eulálio Cabral.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Física,
Recife, 2020.
Inclui referências.

1. Dinâmica Não-Linear, Caos e Sistemas Complexos. 2. Partícula autopropelida.
3. Sistemas dinâmico. 4. Dinâmica não-linear. I. Cabral, Leonardo Ribeiro Eulálio.
(orientador) II. Título.

515.39

CDD (22. ed.)

UFPE-CCEN 2020-185

RUBENS HENRIQUE DAMASCENA DE SOUZA

**DINÂMICA NÃO-LINEAR DE UMA PARTÍCULA AUTOPROPELIDA
EM ARMADILHAS BIDIMENSIONAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 30/09/2020.

BANCA EXAMINADORA

[Participação via Videoconferência](#)

Prof. Leonardo Ribeiro Eulálio Cabral
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

[Participação via Videoconferência](#)

Prof. Mauro Copelli Lopes da Silva
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

[Participação via Videoconferência](#)

Prof. Alexandre da Silva Rosas
Examinador Externo
Universidade Federal da Paraíba

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me trazido até aqui, embora passemos por dificuldades a Sua palavra sempre nos conforta e nos dá forças para continuar.

Agradeço imensamente ao meu pai, Israel José de Souza, que me deu suporte físico, financeiro e psicológico durante todo esse tempo no qual estou me dedicando à vida acadêmica. Embora não sejamos de uma classe social elevada, meu pai sempre lutou e ainda luta para que eu possa me dedicar aos estudos de forma integral.

Ainda entre meus familiares, agradeço também a minha mãe, Miriam Maria Damascena de Souza, e meu irmão, Raphael Henrique Damascena de Souza, que sempre acreditaram em mim e me incentivaram sempre que eu desanimava.

Agradeço a minha namorada, Elais Souza, que aguentou esse fim de mestrado onde toda a minha atenção estava voltada à escrita e correções. Inclusive, sendo a minha primeira “banca de correção”.

Com o fim do mestrado, computo 6 anos e meio de faculdade, tempo suficiente para nutrir amizades que certamente serão de longa data. Destaco aqui meus amigos de graduação Jean, Erly, Glaucyevonn e Raquel; os quais, sempre tiveram mais certeza do que eu, sobre a minha aprovação e conclusão do mestrado. Meus amigos de laboratório no mestrado: Felipe, José, Matheus, Daniel e Raí que me receberam de braços abertos no grupo de pesquisa.

Não poderia deixar de agradecer aos meus orientadores, Prof. Dr. Leonardo Ribeiro Eulálio Cabral e Prof. Dr. Clécio Clemente de Souza e Silva, que me acompanharam durante esse período e foram fundamentais para a conclusão dessa etapa (mestrado).

Agradeço ao Departamento de Física da UFPE pela estrutura e apoio proporcionados.

Por fim, agradeço as agências de fomento CNPq e CAPES pela bolsa concedida, que foi, também, um apoio para que eu me dedicasse completamente aos estudos.

RESUMO

Partículas autopropelidas são usualmente caracterizadas por uma força motriz interna que atua na direção de seu eixo, sendo utilizadas como modelo para estudar comportamentos individuais e coletivos de seres vivos ou dispositivos que se locomovem de forma autônoma. Geralmente, a dinâmica de partículas ativas é descrita por uma equação de movimento para o seu centro de massa e outra equação que governa a evolução temporal de sua orientação espacial. Nesta dissertação estudamos a dinâmica de uma partícula autopropelida em diferentes potenciais de confinamento externo. O modelo e os potenciais estudados são extensões do proposto por Dauchot e Démercy (DAUCHOT; DÉMERY, 2019) para explicar o movimento observado experimentalmente de um hexbug (brinquedo capaz de se autopropelir) colocado sobre uma antena parabólica. No experimento, Dauchot e Démercy encontraram duas fases dinâmicas: uma chamada de escaladora (climbing), em que o hexbug tenta escalar o potencial harmônico, com orientação praticamente radial e velocidade média nula, mantendo uma posição radial fixa e se deslocando lateralmente devido a movimentos aleatórios; outra fase denominada orbital em que o hexbug se move percorrendo órbitas e com orientação majoritariamente perpendicular à direção radial. No nosso sistema consideramos o mesmo modelo dinâmico em dois potenciais distintos para examinar como a mudança do potencial externo afeta a dinâmica da partícula autopropelida. Primeiro, investigamos o sistema em um potencial elíptico, onde a simetria radial do potencial estudado por Dauchot e Démercy é quebrada pela adição de um termo quadrático em uma das componentes espaciais. Depois, consideramos a partícula em um potencial biestável, com termo gaussiano adicionado a um potencial harmônico. Ambos os potenciais são ajustados por um parâmetro de controle $\varepsilon \geq 0$ e se reduzem ao potencial harmônico para $\varepsilon = 0$. Embora a partícula ainda continue apresentando duas fases, uma escaladora e outra orbital, a dinâmica se mostra muito mais rica do que no caso puramente harmônico, com dobramento de períodos e aperiodicidade de trajetórias, por exemplo. As fases encontradas e os tipos de órbitas obtidas foram utilizadas para construir diagramas de fase no espaço de parâmetros do sistema. Surpreendentemente, apesar de algumas diferenças marcantes nos comportamentos dinâmicos, ambos os potenciais apresentam diagramas de fases com comportamento bastante semelhantes.

Palavras-chaves: Partícula Autopropelida. Sistemas dinâmicos. Dinâmica não-linear. Fases dinâmicas.

ABSTRACT

Self-propelled particles are usually characterized by an internal driving force which acts in the direction of its axis, being used as a model to study individual and collective behaviors of living systems or self-propelled automated devices. In general, the dynamics of active particles is described by two equations of motion: one is the center of mass equation of motion and the other one governs the time evolution of the particles spatial orientation. In this dissertation we study the dynamics of a single self-propelled particle confined to different external potentials. The model and potential studied here are extensions of that proposed by Dauchot e Démary (DAUCHOT; DÉMERY, 2019) to explain the experimentally observed movement of a hexbug nano (a toy capable of self-propulsion) in a parabolic antenna. In the experiment, Dauchot and Démary found two dynamic phases: the "climbing" phase where the hexbug try to climb the harmonic potential, with the hexbug almost always oriented along the radial direction and with zero average speed, maintaining a fixed radial position while moving laterally due to random movements; and the "orbiting" phase in which the hexbug presents orbital motion, with its orientation mostly perpendicular to the radial direction. In our system we consider the active particle dynamics within the same dynamical model, although submitted to two distinct external potentials. We examine how the potentials affect the dynamics of the self-propelled particle. Firstly, we investigate the system in an elliptical potential, where the radial symmetry is broken by the addition of a quadratic term in one of the spatial components. Subsequently, we consider the particle at a bistable potential, where we place a gaussian term in the harmonic potential. Both potentials are adjusted by a control parameter $\varepsilon \geq 0$ and become the harmonic potential when $\varepsilon = 0$. Although the particle still has the two phases, a climbing and orbiting one, we observe a far richer orbital dynamics compared to the harmonic potential, with period-doubling and aperiodic trajectories, for example. The phases and the types of orbits obtained were used to build phase diagrams in the system parameter space. Surprisingly, notwithstanding some differences in the detailed dynamics observed in both potentials, their phase diagram are overall very similar to each other.

Keywords: Self-Propelled Particles. Dynamical System. Nonlinear Dynamics. Dynamical phases.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Nas figuras (a)-(c) temos o comportamento da fase escaladora com os parâmetros $\tau_v = 0.2$ e $\tau_n = 0.5$, nas figuras (d)-(f) temos o comportamento da fase orbital com os parâmetros $\tau_v = 0.2$ e $\tau_n = 1.5$. Em (a) e (d) temos a função densidade de probabilidade (FDP) para a posição da partícula no plano (x, y) . Em (b) e (e) temos a FDP da distância em relação à origem. Finalmente, em (c) e (f) a velocidade azimutal v_θ em função do tempo. Em ambas as fases a partícula fica a uma distância finita do centro. Na fase escaladora a FDP é centrada em $r = 1$, enquanto que na fase orbital é mais distribuída. A velocidade azimutal na fase escaladora flutua em torno de zero, enquanto que na fase orbital flutua em torno de dois valores com sinais diferentes. A imagem foi retirada do artigo do Dauchot e Démery (DAUCHOT; DÉMERY, 2019). Em todas as figuras $D = 0,01$ 17
- Figura 2 – Nas figuras A.1, A.2 e A.3 temos o potencial elíptico e nas figuras B.1, B.2 e B.3 o potencial biestável para $\varepsilon = 1, 1.5$ e 3 respectivamente. Para os gráficos acima consideramos as versões adimensionais dos potenciais, isto é, $\kappa = L_0 = 1$ 18
- Figura 3 – Na figura vemos o comportamento atrativo da órbita $r = 1$ (marcada em preto). Como vimos, a origem é um ponto fixo instável. As demais curvas são soluções do sistema dinâmico para diferentes condições iniciais. As setas são os vetores tangenciais as curvas. 23
- Figura 4 – Nas figuras acima temos as trajetórias obtidas simulando as equações (3.22), (3.23) e (3.24) usando o potencial harmônico para valores distintos de τ_n . Além disso, a curva em azul ou vermelho é o conjunto de pontos fixos do sistema via equação (3.36), sendo os pontos marcados em azul instáveis e os em vermelho estáveis. Em A, B e C a partícula se encontra na fase orbital, enquanto que, em D, E e F se encontram na fase escaladora. Usamos $D = 0,005$ em todas as simulações. Nas figuras A, B e C vemos o crescimento do raio da órbita com o aumento de τ_n . Esse crescimento é esperado dado que o raio da solução exata ($D = 0$) para a fase orbital (marcado em preto) cresce com $\sqrt{\tau_n}$ (equação (3.51)). A partir da fase escaladora o valor de τ_n não interfere no raio da trajetória. As trajetórias da fase escaladora tem raio aproximadamente igual a 1. 32

- Figura 5 – Em azul e vermelho temos respectivamente os pontos fixos instáveis e estáveis do sistema. Em roxo temos a trajetória da partícula. Nas figuras A, B e C vemos exemplos da fase orbital, enquanto que, nas figuras D, E e F vemos exemplos da fase escaladora. Em todas as simulações consideramos $D = 0,01$ 42
- Figura 6 – Em azul e vermelho temos os atratores periódicos do sistema dinâmico descrito pelas equações (4.1), (4.2) e (4.3) para $\tau_n = 0,1$. Na coluna 1 ($D = 0$) temos os atratores periódicos. Nas colunas 2 e 3, sobreposto em magenta, temos a trajetória realizada pela partícula $D = D_1$, e $D_2 > D_1$ respectivamente. Para $D = 0$, dependendo das condições iniciais, a partícula é atraída e passa a realizar a órbita em azul ou em vermelho, comportamento semelhante ao ciclo limite estável usado como exemplo na seção 2.1.2. Para $D > 0$ (colunas 2 e 3) a partícula também é atraída, porém, pode se afastar das órbitas devido ao ruído. Os valores de D_1 e D_2 foram ajustados em cada linha para uma melhor visualização, sendo D_1 e D_2 da ordem de 10^{-5} e 10^{-3} respectivamente. 43
- Figura 7 – Diagrama de fases para a dinâmica de uma partícula autopropelida em potencial elíptico. Abaixo da curva $\tau_c^{min} = 1/(1 + \varepsilon)$, em azul, a fase escaladora não é possível, acima da curva τ_c^{max} , em vermelho, apenas a fase escaladora é possível. Por fim, na região intermediária $\tau_c^{min} < \varepsilon < \tau_c^{max} = 1$, não existem restrições. 48
- Figura 8 – Nas figuras acima temos o comportamento das variáveis x e y em função do tempo (coluna 2) e os seus espectros de potências $S_x(\nu)/S_{xmax}$ e $S_y(\nu)/S_{ymax}$ (coluna 3) para dois tipos de atratores, onde ν representa frequência. É perceptível tanto no gráfico da evolução temporal quanto no espectro de potência que $T_{xy} = 1$ para o atrator em A, e $T_{xy} = 0,5$ para o atrator em B. 49
- Figura 9 – Em A, B e C temos respectivamente as varreduras do tipo A, B e C descritas no texto. A cor branca representa pontos onde o sistema evoluiu para um de seus pontos fixos e, portanto, representam a fase escaladora. As cores verde e magenta representam os pontos onde obtivemos trajetórias de período simples e duplo respectivamente. Em especial, na varredura do tipo C, a sobreposição de cores indica que mais de um tipo de periodicidade ocorreu. Nesse caso, a cor predominante indica qual das fases ocorreu mais vezes. As curvas τ_c^{max} e τ_c^{min} , obtidas na seção 4.1.1, estão, respectivamente, marcadas em vermelho e azul. . . 50

- Figura 10 – Nas figuras acima temos a projeção dos atratores no plano xy (coluna 1) e o atrator no espaço de fase (coluna 2). Como citado no texto, α tem dinâmica de rotação para atratores de período simples, como ilustrado em A e C, e dinâmica de libração para atratores de período duplo, como ilustrado em B e D. Na dinâmica de rotação, temos uma curva periódica no espaço de fase, corroborando que o versor de orientação dá uma volta completa em conjunto com a órbita do atrator. 52
- Figura 11 – Trajetórias da partícula autopropelida obtidas integrando as equações (3.22), (3.23) e (3.24) para o potencial biestável definido na equação (5.16) para $\tau_n = 0.5$, $D = 0,01$ e alguns valores de ε . Em magenta temos as trajetórias da partícula. Em azul e vermelho temos a projeção dos pontos fixos instáveis e estáveis no plano xy respectivamente. Com o crescimento do parâmetro ε observamos um processo de confinamento das trajetórias em torno dos novos mínimos do potencial. Nos gráficos acima, a partícula se encontra na fase orbital. Nas últimas três figuras, devido a condição inicial, a partícula ficou confinada em torno do mínimo positivo. 57
- Figura 12 – Trajetórias da partícula autopropelida obtidas integrando as equações (3.22), (3.23) e (3.24) para o potencial biestável definido na equação (5.16) para $\tau_n = 1.5$, $D = 0,01$ e alguns valores de ε . Em magenta temos as trajetórias da partícula. Em azul e vermelho temos a projeção dos pontos fixos instáveis e estáveis no plano xy respectivamente. Novamente observamos um processo de confinamento com o crescimento do parâmetro ε . Nos gráficos acima, a partícula se encontra na fase escaladora. 58
- Figura 13 – Na figura acima temos o valor do potencial biestável definido na equação (5.16) avaliado em seus pontos críticos em função de ε . Em azul temos o potencial avaliado na origem, e em vermelho o potencial é avaliado nos pontos $(\pm\sqrt{\ln(2\varepsilon)}, 0)$. A curva em preto marca a bifurcação onde os pontos $(\pm\sqrt{\ln(2\varepsilon)}, 0)$ passam a existir e tornam-se mínimos do potencial. Note que existe um intervalo em ε após a bifurcação onde o valor do potencial no ponto de sela (barreira) e nos mínimos (poços) são próximos. 59

Figura 14 – Em azul e vermelho temos os atratores periódicos do sistema dinâmico descrito pelas equações (3.52),(3.53) e (3.54) para o potencial biestável (equação 5.16) com $\tau_n = 0, 1$. Na coluna 1($D = 0$) temos os atratores periódicos. Nas colunas 2 e 3, sobreposto em magenta, temos a trajetória realizada pela partícula $D = D_1$, e $D_2 > D_1$ respectivamente. Para $D = 0$, dependendo das condições iniciais, a partícula é atraída e passa a realizar a órbita ou em azul, ou vermelho. Para $D > 0$ (colunas 2 e 3) a partícula também é atraída, porém, pode se afastar das órbitas devido ao ruído. Em especial nas linhas D e E, temos um par de atratores em torno dos dois mínimos do potencial. Na ausência do ruído a partícula é atraída para um dos dois pares. Os valores de D_1 e D_2 foram ajustados em cada linha para uma melhor visualização, sendo D_1 e D_2 da ordem de 10^{-5} e 10^{-3} respectivamente. 60

Figura 15 – Em A, B e C temos respectivamente as varreduras do tipo A, B e C definidas na seção 4.2. De modo semelhante ao que vimos na figura 9, branco representa a fase escaladora, verde período simples, e magenta período duplo em y . Como novidade temos a cor creme, representando atratores de período duplo em x , e a cor preta representa atratores que não puderam ser classificados nas periodicidades acima. Novamente, na varredura do tipo C a sobreposição de cores indica que mais de um tipo de periodicidade ocorreu. Nesse caso, a cor predominante indica qual das fases ocorreu mais vezes. Em azul temos a curva numérica para para τ_{min}^c . Diferente da varredura no potencial elíptico, encontramos uma região robusta de pontos que não puderam ser classificados. Na região com τ_n pequeno e ε próximo a 0,6 encontramos alguns atratores aparentemente aperiódicos. 61

Figura 16 – Nas figuras acima vemos alguns dos atratores aparentemente aperiódicos presentes próximo a $\varepsilon = 0, 6$ e baixos valores de τ_n 61

Figura 17 – Nas figuras acima vemos dois outros atratores com ε próximo ao atrator descrito na figura 16-F. Tanto na órbita quanto nos espectros de potência vemos um comportamento semelhante à transição para o caos via dobramento de períodos (ANISHCHENKO; VADIVASOVA; STRELKOVA, 2014) 62

Figura 18 – Em A, B e C temos a trajetória de 225 partículas que iniciaram próximas em três tempos diferentes. O atrator está marcado em azul e as soluções marcadas em preto. As condições iniciais formam no espaço de fase uma casca esférica de raio 10^{-5} em torno de um ponto dentro do atrator. O tempo de simulação em A, B e C são 30, 50, e 320 unidades de tempo do sistema respectivamente. Com a passagem do tempo as soluções que começaram próximas passam a separar. O atrator em questão é o mesmo presente na figura 16-F, agora representado no espaço de fase. Para uma melhor visualização do efeito reduzimos a variável angular (α) ao intervalo $[0, 4\pi]$ 63

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	MODELAGEM MATEMÁTICA	14
1.2	MODELO DE DAUCHOT E DÉMERY	15
2	METODOLOGIA	19
2.1	SISTEMA DINÂMICO, PONTOS FIXOS E ESTABILIDADE	19
2.1.1	Pontos fixos e estabilidade	19
2.1.2	Atratores	22
2.2	MÉTODO DE EULER-MARUYAMA	23
3	RESULTADOS GERAIS PARA A FASE ESCALADORA	25
3.1	MODELO DE DAUCHOT E DÉMERY NO LIMITE SOBREAMORTECIDO	25
3.2	REVISITANDO O PROBLEMA DA PARTÍCULA ATIVA EM UM POÇO HARMÔNICO	27
3.3	ESTABILIDADE DA FASE ESCALADORA PARA UM POTENCIAL ARBITRÁRIO	33
4	DINÂMICA PARA UM POTENCIAL ELÍPTICO	41
4.1	FASES ESCALADORA E ORBITAL NO POTENCIAL ELÍPTICO	41
4.1.1	Estabilidade das fases	44
4.2	CLASSIFICAÇÃO DOS ATRATORES PERIÓDICOS	48
4.2.1	Comportamento do ângulo de orientação	51
5	DINÂMICA PARA O POTENCIAL BIESTÁVEL	54
5.1	POTENCIAL BIESTÁVEL	54
5.2	FASE ESCALADORA E ORBITAL NO POTENCIAL BIESTÁVEL	56
6	CONCLUSÃO	64
	REFERÊNCIAS	65

1 INTRODUÇÃO

Partículas ativas interagem com o ambiente realizando processos absorptivos e dissipativos, os quais resultam em movimento (RAMASWAMY, 2010). Em geral, cada tipo de entidade possui seu próprio mecanismo de propulsão e, a depender das condições do meio, pode apresentar padrões diferentes de movimentação. As bactérias em conjunto com colóides auto catalíticos são bons exemplos de partículas ativas em escala microscópica (BERG; TURNER, 1979; SHENOY et al., 2007; LAUGA et al., 2006). Entretanto, grupos de animais tais como grupos de pássaros, peixes e até seres humanos podem ser modelados como sistemas de matéria ativa (REYNOLDS, 1987; BUHL et al., 2006; HELBING, 2001).

Uma classe importante na matéria ativa é formada por objetos naturais e artificiais capazes de se autopropelir. Os primeiros modelos de partículas autopropelidas tinham como objetivo estudar o comportamento de grupos de animais no domínio macroscópico. Como principais representantes temos o modelo de "Boids" (do inglês "bird-oid")¹ proposto por Reynolds em 1987. Para animar digitalmente o comportamento de bando de pássaros cardumes e rebanhos, Reynolds propôs que cada boid (partícula) deveria seguir as seguintes regras (REYNOLDS, 1987):

- Evitar colisões com partículas vizinhas.
- Manter a velocidade similar com as partículas vizinhas.
- Permanecer junto das partículas vizinhas.

O modelo de Vicsek (VICSEK et al., 1995) para simular o comportamento de bando considera que todas as partículas do grupo possuem o módulo da velocidade constante. Porém a cada passo de tempo, cada partícula assume como orientação a média sob as orientações de entidades em sua vizinhança adicionada a uma perturbação aleatória. Nesse modelo observou-se que o balanço entre densidade de partículas e ruído governa a transição entre as fases de movimento ordenado ou desordenado. Esse comportamento é visto, por exemplo, na marcha de gafanhotos (BUHL et al., 2006).

Atualmente, modelos de partículas autopropelidas são implementados tanto para estudar comportamentos coletivos (VICSEK et al., 1995; CZIRÓK; VICSEK, 2000; LAM; SCHINDLER; DAUCHOT, 2015; WEBER et al., 2013; QUILLEN; SMUCKER; PESHKOV, 2020; BUHL et al., 2006), quanto para estudar o movimento individual de uma classe de partículas ativas (LAUGA et al., 2006; SHENOY et al., 2007; BASU et al., 2018; JAHANSHAHI; LÖWEN; HAGEN, 2017; DAUCHOT; DÉMERY, 2019; PERRARD et al., 2014), possuindo adaptações e suposições diversas baseadas tanto na forma da partícula quanto no ambiente em que se encontra. Um desafio que reúne física, engenharia e biomedicina é a produção de micro/-

¹ semelhante a pássaros

nano robôs munidos de propulsão com objetivo de, por exemplo, realizar tratamentos em escala microscópica (WANG; GAO, 2012; ABDELMOHSEN et al., 2014).

1.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

Vimos que as partículas ativas diferem das “normais”(passivas) pela capacidade de se autopropelir. O versor de orientação, o qual denotaremos por \mathbf{n} , define a direção para onde a partícula irá se autopropelir. Em duas dimensões esse versor é completamente definido por um ângulo, sendo esse ângulo muitas vezes chamado apenas de orientação. Para modelar uma partícula autopropelida, além da equação que governa a evolução temporal das posições, necessita-se de uma equação que governe a evolução temporal de sua orientação. Essa equação torna os modelos versáteis, dado que não existe uma lei geral para a evolução temporal da orientação de partículas ativas. Como exemplo disso temos: modelos semelhantes ao de Vicsek, já citados acima, cuja evolução temporal da orientação depende de uma lei de associação com vizinhos e ruído; modelos com partículas brownianas ativas, onde a orientação pode ser completamente difusiva (BASU et al., 2018), ou sua evolução temporal constante, porém, sofrendo perturbações aleatórias (JAHANSHAH; LÖWEN; HAGEN, 2017); o modelo proposto por Shenoy et al (SHENOY et al., 2007) para descrever o movimento da bactéria *Listeria monocytogenes* no citoplasma após a formação dos filamentos de actina, onde a evolução temporal da orientação é senoidal; e o modelo para o movimento coletivo de discos polares vibrantes (WEBER et al., 2013; LAM; SCHINDLER; DAUCHOT, 2015), onde a evolução temporal do versor de orientação é dado por um mecanismo de autoalinhamento do versor orientação com a velocidade da própria partícula, levando em conta também uma perturbação aleatória.

Usualmente, para a adição do fator aleatório ou perturbação aleatória usa-se o chamado ruído gaussiano ou ruído branco. Trata-se de uma força aleatória $\xi(t)$ cuja função densidade de probabilidade é a normal, e satisfaz as seguintes propriedades:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad (1.1)$$

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \Gamma\delta(t - t'), \quad (1.2)$$

onde, por se tratar de ruído térmico, $\Gamma \propto T$ sendo T a temperatura. Esse tipo de força foi proposta por Paul Langevin (LEMONS; GYTHIEL, 1997) para modelar os choques “aleatórios” sofridos entre coloides em suspensão e as moléculas do fluido no movimento browniano. Equações com esse tipo de força são comumente chamadas de equações de Langevin, e em geral, os modelos de partículas autopropelidas são estudadas no domínio da dinâmica estocástica.

1.2 MODELO DE DAUCHOT E DÉMERY

O modelo de partícula autopropelida que será estudado nesse trabalho é baseado no modelo proposto e estudado por Dauchot e Démary (2019) (DAUCHOT; DÉMERY, 2019). Considerando esse fato, vamos descrever as principais características do modelo proposto. A força de propulsão produzida pela partícula é dada por $\mathbf{F}_{prop} = F_0 \mathbf{n}$, onde F_0 é o módulo da força de propulsão e \mathbf{n} é o versor de orientação da partícula. Adicionalmente, considera-se que a partícula está sujeita a uma força de atrito definida por $\mathbf{F}_{atri} = -\gamma \mathbf{v}$. Essa força compensa a aceleração produzida pela autopropulsão da partícula, permitindo a existência de uma velocidade estacionária caso não haja confinamento. O confinamento é adicionado ao sistema com a força gerada pela força confinante $\mathbf{F}_{arm} = -\nabla V$, onde $V(x, y)$ é o potencial confinante. Com as forças definidas acima é possível obter informação sobre o vetor posição via 2ª lei de Newton. Entretanto, como vimos, não necessariamente o versor de orientação é constante. Portanto, é necessário adicionar ao modelo uma segunda equação que inclui a evolução temporal do vetor de orientação. No modelo, supõe-se a existência de um torque que tende a alinhar o versor de orientação e o vetor velocidade quando ambos não estão alinhados. Assumindo que a partícula é simétrica em relação ao seu eixo de orientação, quando os vetores de velocidade e orientação estão alinhados, a força viscosa pode ser escrita como $\mathbf{F}_{atri} = -\gamma |\mathbf{v}| \mathbf{n}$ e, portanto, a contribuição da força viscosa do lado direito e esquerdo do corpo são iguais, levando a um torque nulo, o que não necessariamente acontece caso os vetores estejam desalinhados. Manteremos a terminologia usada na referência (DAUCHOT; DÉMERY, 2019) e nos referiremos a essa equação como equação de autoalinhamento. Sendo assim, o modelo proposto tem a seguinte forma

$$m \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{prop} + \mathbf{F}_{atri} + \mathbf{F}_{arm}. \quad (1.3)$$

$$\tau \dot{\mathbf{n}} = \zeta (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{n} + \sqrt{2\beta} \xi \mathbf{n}_\perp. \quad (1.4)$$

Mais explicitamente temos:

$$m \dot{\mathbf{v}} = F_0 \mathbf{n} - \gamma \mathbf{v} - \nabla V. \quad (1.5)$$

$$\tau \dot{\mathbf{n}} = \zeta (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{n} + \sqrt{2\beta} \xi \mathbf{n}_\perp. \quad (1.6)$$

A equação (1.5) é simplesmente a segunda lei de Newton onde m é a massa da partícula, γ o coeficiente de fricção e V o potencial de confinamento. Por motivos de simplicidade, vamos trabalhar com as equações mantendo não definido o potencial. Entretanto, o potencial usado no modelo de Dauchot e Démary foi o harmônico ($V = \frac{\kappa}{2}(x^2 + y^2)$). A equação (1.4) é a equação de autoalinhamento. Nessa equação temos ξ representando o ruído gaussiano com correlação $\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t - t')$, temos ζ representando o coeficiente de acoplamento entre os vetores \mathbf{n} e \mathbf{v} , \mathbf{n}_\perp é um versor perpendicular a \mathbf{n} e, por fim, $\frac{\beta}{\tau^2}$ é o coeficiente de difusão rotacional. O vetor $(\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{n}$ é perpendicular a \mathbf{n} e "aponta" em direção de \mathbf{v} , conseqüentemente, tendendo a diminuir o ângulo entre \mathbf{n} e \mathbf{v} .

O modelo acima foi proposto para descrever os resultados do experimento realizado com um hexbug (brinquedo capaz de se autopropelir) em uma antena parabólica (DAUCHOT; DÉMERY, 2019). O hexbug tem $45mm$ de comprimento e $15mm$ de largura e seu movimento é obtido através de uma vibração interna que é transmitida para suas pernas cujo o formato gera propulsão. Outra forma de colocar o hexbug em movimento é vibrar a antena parabólica a uma frequência fixa, simulando a vibração gerada pelo mecanismo interno do brinquedo. No experimento observaram duas fases dinâmicas. A fase nomeada por “escaladora” representa a dinâmica onde o hexabug escala até uma certa altura e fica preso, enquanto realiza um processo difusivo lateralmente, e a fase nomeada por “orbital” representa a dinâmica onde o brinquedo circula em torno do centro da parábola, enquanto que, em alguns momentos, troca o sentido de rotação. Ainda no experimento, verificou-se uma transição da fase orbital para a escaladora ao final da carga da bateria (diminuição da força de propulsão).

Para o estudo, as variáveis foram reescaladas e o sistema pôde ser escrito em termos de variáveis adimensionais (onde mantemos os mesmos símbolos) e com apenas três parâmetros adimensionais, $\tau_v = \frac{m\kappa}{\gamma^2}$, $\tau_n = \frac{\tau\kappa}{\zeta F_0}$ e $D = \frac{\beta\gamma^2}{\zeta^2 F_0^2}$. As equações se tornam:

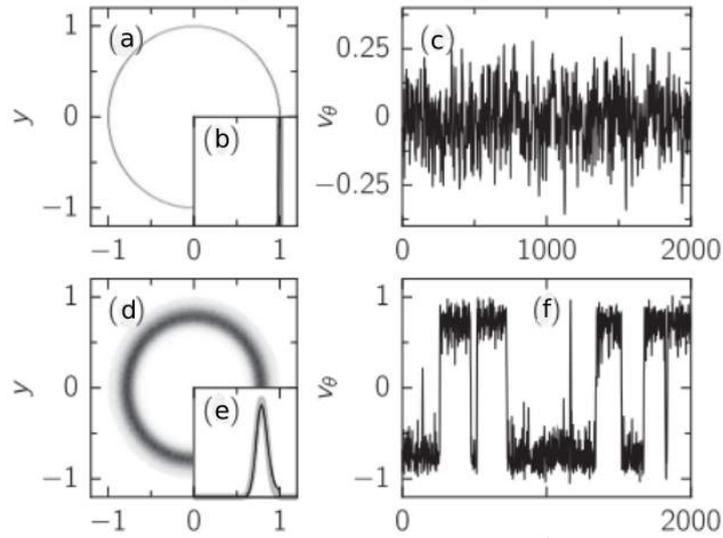
$$\tau_v \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{n} - \mathbf{v} - \mathbf{r}, \quad (1.7)$$

$$\tau_n \dot{\mathbf{n}} = (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{n} + \sqrt{2D}\xi\mathbf{n}_\perp. \quad (1.8)$$

O procedimento de adimensionalização omitido acima será descrito na seção 3.1. Na figura 1-(a) mostramos alguns resultados obtidos por Dauchot e Démary. Vemos que a FDP da partícula na fase escaladora é centrada em $r = 1$, reflexo do efeito de escalar e ficar presa. Na figura 1-(c) vemos que a velocidade azimutal nesta fase oscila em torno de zero, indicando que a movimentação azimutal é difusiva. Na fase orbital a FDP também é circular, entretanto, a distribuição não é centrada, significando que o raio da órbita circular pode variar. Na fase orbital a velocidade azimutal oscila em torno de dois valores com sinais diferentes, esse comportamento se dá pelas inversões no sentido de circulação da partícula. Sendo assim, temos que na fase orbital o sentido de circulação e o raio da órbita mudam, enquanto que na fase escaladora o raio é aproximadamente fixo e o movimento azimutal é puramente difusivo.

Ainda no artigo Dauchot e Démary, afirmam que a equação de autoalinhamento proposta é o ingrediente responsável para o surgimento da fase orbital, sendo essa fase ainda encontrada no limite sobreamortecido ($\tau_v \rightarrow 0$), o que difere do resultado obtido por Jahanshahi, Löwen e Hagen (2017) (JAHANSHAH; LÖWEN; HAGEN, 2017) para o potencial harmônico. Em nosso trabalho iremos estudar o modelo de Dauchot e Démary no caso sobreamortecido. Isto é, após tornar adimensionais as equações (1.5) e (1.6) as escrevendo em termos dos parâmetros τ_v , τ_n e D , aplicaremos o limite $\tau_v \rightarrow 0$, $\tau_n > 0$. Para o hexbug o limite significa que o balanço entre a força de propulsão produzida pela vibração de suas pernas e o atrito da superfície fazem com que sua velocidade seja aproximadamente

Figura 1 – Nas figuras (a)-(c) temos o comportamento da fase escaladora com os parâmetros $\tau_v = 0.2$ e $\tau_n = 0.5$, nas figuras (d)-(f) temos o comportamento da fase orbital com os parâmetros $\tau_v = 0.2$ e $\tau_n = 1.5$. Em (a) e (d) temos a função densidade de probabilidade (FDP) para a posição da partícula no plano (x, y) . Em (b) e (e) temos a FDP da distância em relação à origem. Finalmente, em (c) e (f) a velocidade azimutal v_θ em função do tempo. Em ambas as fases a partícula fica a uma distância finita do centro. Na fase escaladora a FDP é centrada em $r = 1$, enquanto que na fase orbital é mais distribuída. A velocidade azimutal na fase escaladora flutua em torno de zero, enquanto que na fase orbital flutua em torno de dois valores com sinais diferentes. A imagem foi retirada do artigo do Dauchot e Démery (DAUCHOT; DÉMERY, 2019). Em todas as figuras $D = 0,01$.



Fonte: DAUCHOT; DÉMERY (2019)

constante, o que de fato ocorre se observarmos um hexbug livre de confinamento. Além disso, agentes ativos de interesse usualmente se deslocam em meios viscosos (bactérias no citoplasma é um exemplo), onde o movimento é predominantemente sobreamortecido. Estudaremos o comportamento da partícula autopropelida nesse modelo considerando dois potenciais diferentes

$$V(x, y) = \frac{\kappa}{2} [(1 + \varepsilon)x^2 + y^2], \quad (1.9)$$

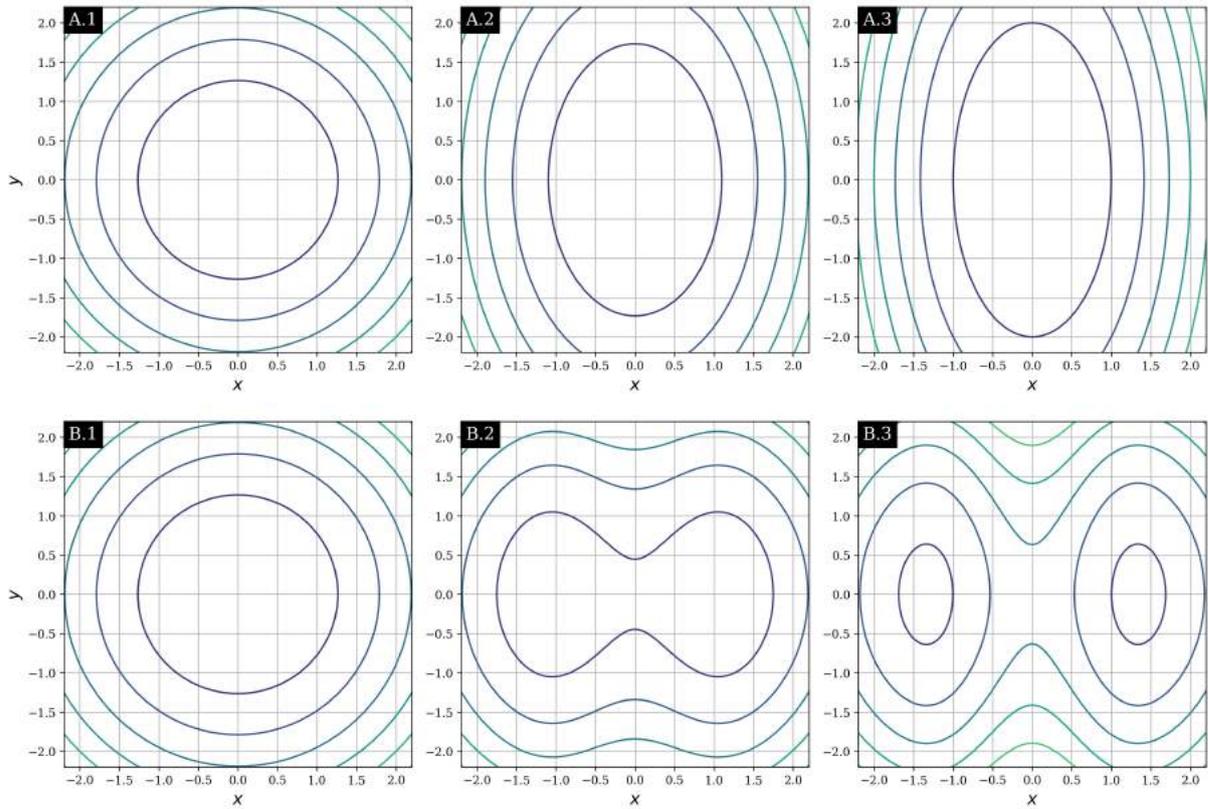
ao qual nos referiremos por “potencial elíptico” (figura-2 A), e o potencial

$$V(x, y) = \frac{\kappa}{2} (x^2 + y^2) + \kappa L_0^2 \varepsilon e^{-\frac{x^2}{L_0^2}}, \quad (1.10)$$

ao qual nos referiremos por “potencial biestável” (figura-2 B). Onde, em ambos os casos, ε é um parâmetro adimensional que governa a intensidade do termo perturbativo em relação ao potencial harmônico, $\varepsilon > 0$. A constante κ representa a rigidez do potencial e L_0 é uma constante com dimensão de comprimento². Teremos como espaço de parâmetros o plano $[\varepsilon \times \tau_n]$. Veremos que esses dois exemplos produzem uma rica variedade de fases orbitais não encontradas no caso harmônico. Também demonstraremos alguns resultados analíticos gerais válidos para qualquer potencial confinador.

² A constante foi adicionada para que o argumento na exponencial presente no potencial biestável seja adimensional.

Figura 2 – Nas figuras A.1, A.2 e A.3 temos o potencial elíptico e nas figuras B.1, B.2 e B.3 o potencial biestável para $\varepsilon = 1, 1.5$ e 3 respectivamente. Para os gráficos acima consideramos as versões adimensionais dos potenciais, isto é, $\kappa = L_0 = 1$.



Fonte: O autor (2020)

2 METODOLOGIA

Neste capítulo, iremos, de forma sucinta, abordar conceitos e procedimentos importantes usados no estudo do sistema investigado nesta dissertação.

2.1 SISTEMA DINÂMICO, PONTOS FIXOS E ESTABILIDADE

Ao estudar um sistema dinâmico buscamos prever matematicamente a evolução do sistema com o tempo. Isto é, dado $\mathbf{X}(t_i) = \sum_{i=1}^N x^{(i)}(t_i) \mathbf{e}_i$, o estado inicial do sistema, buscamos obter deterministicamente o vetor $\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^N x^{(i)}(t) \mathbf{e}_i$ em qualquer tempo. As variáveis $x^{(i)}$ podem representar, a princípio, quaisquer propriedades do sistema que evoluam com o tempo, o que torna a aplicação do conceito bastante ampla. Vamos, nesta seção, abordar uma classe específica de sistemas dinâmicos, os sistemas dinâmicos autônomos formados por equações diferenciais de primeira ordem (OTT, 2002). O sistema ser autônomo indica que a variável tempo não aparece explicitamente nas equações. Um sistema dinâmico geral nos moldes acima tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{dx^{(1)}}{dt} &= A_1(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}), \\ \frac{dx^{(2)}}{dt} &= A_2(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}), \\ &\vdots \\ \frac{dx^{(N)}}{dt} &= A_N(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Em forma vetorial temos:

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{X}(t)). \tag{2.2}$$

De fato, dado qualquer estado inicial $\mathbf{X}(t_i)$, resolvendo as equações acima podemos obter o estado futuro do sistema $\mathbf{X}(t)$ para $t > t_i$. O espaço N -dimensional gerado pelas variáveis $(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)})$ é chamado de espaço de fase. A órbita ou trajetória de um sistema dinâmico é a trajetória que ele traça no espaço de fase, seguindo sua evolução temporal.

2.1.1 Pontos fixos e estabilidade

Um conceito de extrema importância para sistemas dinâmicos é o conceito de pontos fixos. Um ponto fixo é um ponto no espaço de fase que satisfaz a seguinte condição:

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}_f) = 0. \tag{2.3}$$

Nesta dissertação, denotaremos pontos fixos pelo subscrito f . Substituindo essa condição na equação (2.2) temos que a derivada temporal se anula e, portanto, se o sistema converge para esse ponto, permanecerá “preso” ou “fixo” a ele. De mesmo modo, se o estado inicial do sistema for um de seus pontos fixos, então, o sistema permanecerá nesse ponto fixo para todo $t > t_i$.

Podemos qualificar pontos fixos em estáveis e instáveis. Tal caracterização está relacionada com a reação do sistema ao ser levemente perturbado enquanto repousa no ponto fixo. Se o sistema reage às perturbações no sentido de voltar ao ponto fixo, então dizemos que o ponto fixo é estável. Caso o sistema reaja no sentido de se afastar do ponto fixo, então dizemos que o ponto fixo é instável.

Vamos introduzir um método que pode ser usado para classificar pontos fixos. O método da linearização (STROGATZ, 2014) tem como objetivo classificar pontos fixos investigando o comportamento do sistema dinâmico em suas vizinhanças. Vamos primeiramente descrever o método em uma dimensão. Considere o sistema dinâmico abaixo

$$\frac{dx}{dt} = A(x). \quad (2.4)$$

Precisamos assumir que as derivadas de $A(x)$ existam e são contínuas. Por simplicidade, iremos adotar a notação $A'(x_f) \equiv \left[\frac{dA}{dx} \right]_{x_f}$. O método consiste em considerar $\delta x(t) = x(t) - x_f$ uma pequena perturbação em torno de x_f . Substituindo $x(t) = x_f + \delta x$ na equação (2.4), temos

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(x_f + \delta x)}_{\frac{d\delta x}{dt}} = A(x_f + \delta x).$$

Como estamos assumindo uma perturbação pequena, vamos realizar uma expansão em série de Taylor de $A(x_f + \delta x)$ em torno de x_f até a primeira ordem, sendo assim

$$A(x_f + \delta x) = \underbrace{A(x_f)}_0 + A'(x_f)\delta x,$$

portanto, obtemos que:

$$\frac{d}{dt}\delta x \approx A'(x_f)\delta x. \quad (2.5)$$

Se $A'(x_f) > 0$ a perturbação cresce exponencialmente, ou seja, o sistema tende a se afastar do ponto fixo, configurando um ponto fixo instável. Se $A'(x_f) < 0$ a perturbação decai exponencialmente, o que indica que o sistema tende a retornar para o ponto fixo, configurando um ponto fixo estável. Se por acaso $A'(x_f) = 0$, o método não é conclusivo, uma análise mais profunda é necessária.

Queremos, agora, generalizar o procedimento acima para sistemas dinâmicos com $N > 1$. Seja \mathbf{X}_f um ponto fixo do sistema dinâmico descrito na equação (2.2), seja $\delta \mathbf{X}$ uma

pequena perturbação em torno do ponto fixo. Substituindo $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_f + \delta\mathbf{X}$ na equação (2.2) obtemos analogamente

$$\frac{d\delta\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{X}_f + \delta\mathbf{X}).$$

Expandindo em primeira ordem cada função $A_i(x^{(1)f} + \delta x^{(1)}, x_f^{(2)} \delta x^{(1)}, \dots, x^{(N)f} \delta x^{(N)})$ obtemos:

$$\mathbf{A}(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}) = \underbrace{\mathbf{A}(\mathbf{X}_f)}_{\mathbf{0}} + \mathbf{J}_A(\mathbf{X}_f)\delta\mathbf{X} + O(\delta\mathbf{X}^2). \quad (2.6)$$

Onde, $\mathbf{J}_A(\mathbf{X}_f)$ é a matriz jacobiana de \mathbf{A} avaliada no ponto fixo.

$$\mathbf{J}_A = \left[\frac{\partial A_i}{\partial x^{(j)}} \right]_{\mathbf{X}_f}. \quad (2.7)$$

Ou, mais explicitamente,

$$\mathbf{J}_A = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial x^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial A_1}{\partial x^{(N)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial A_N}{\partial x^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial A_N}{\partial x^{(N)}} \end{pmatrix}.$$

Voltando à expressão (2.6) obtemos

$$\frac{d\delta\mathbf{X}}{dt} \approx \mathbf{J}_A(\mathbf{X}_f)\delta\mathbf{X}, \quad (2.8)$$

que é o problema de um sistema dinâmico linear em N -dimensões. A estabilidade do ponto fixo depende dos autovalores da matriz jacobiana de \mathbf{A} . Supondo como solução $\delta\mathbf{X}(t) = \mathbf{W}e^{\lambda t}$, com \mathbf{W} um vetor constante.

$$\frac{d\delta\mathbf{X}}{dt} = \lambda\mathbf{W}e^{\lambda t}.$$

Substituindo na equação (2.8) temos

$$\lambda\mathbf{W}e^{\lambda t} = \mathbf{J}_A(\mathbf{X}_f)\mathbf{W}e^{\lambda t}.$$

Portanto,

$$\mathbf{J}_A(\mathbf{X}_f)\mathbf{W} = \lambda\mathbf{W} \quad (2.9)$$

que é uma equação de autovetores. Sendo assim, a solução mais geral para o problema é

$$\delta\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{W}_i e^{\lambda_i t} \quad (2.10)$$

onde n é o número de autovetores distintos e c_i são constantes a serem definidas pelas condições iniciais. Os autovalores são as raízes do polinômio $p(\lambda) = \det(\mathbf{J}_A(\mathbf{X}_f) - \mathbf{1}\lambda)$. Por fim, temos que (STROGATZ, 2014):

- Se $Re(\lambda_i) < 0$ para todos os valores i , então, o ponto fixo \mathbf{X}_f é estável.

- Se $Re(\lambda_i) > 0$ para todos os valores de i , então, o ponto fixo \mathbf{X}_f é instável.
- Se $Re(\lambda_i) > 0$ para algum valor de i , então, o ponto fixo \mathbf{X}_f é ponto de sela.
- Se $Re(\lambda_i) = 0$ para alguns valores de i , e $Re(\lambda_i) < 0$ para os outros, então, o ponto fixo \mathbf{X}_f é dito marginalmente estável.

Onde $Re(\lambda_i)$ representa a parte real de λ_i . Se assumirmos que todos os autovalores têm parte real negativa na solução geral em (2.10) a perturbação $\delta\mathbf{X}(t)$ decai exponencialmente com o tempo e, portanto, o ponto fixo é estável. Por outro lado, se assumirmos que 1 ou mais autovalores têm parte real positiva, então, a perturbação $\delta\mathbf{X}(t)$ cresce exponencialmente nas direções dos autovetores associados, enquanto que, decai nas outras direções, configurando um ponto de sela ou ponto fixo instável (caso todos tiverem parte real positiva). O terceiro caso implica que a perturbação decai exponencialmente nas direções onde os autovetores estão associados a autovalores com parte real negativa, porém, nas direções dos autovetores associados aos autovalores com parte real nula, não há alteração. Para um sistema dinâmico linear com $N = 2$, a existência de autovalor nulo pode indicar pontos fixos não-isolados, centros, ou simplesmente que a linearização em primeira ordem é inconclusiva (STROGATZ, 2014).

2.1.2 Atratores

De acordo com Strogatz (STROGATZ, 2014), um atrator pode ser descrito como um conjunto fechado B no espaço de fase que possui as seguintes características:

1. *B é um conjunto invariante*: qualquer trajetória $\mathbf{X}(t)$ que começa em B , permanece em B todo o tempo.
2. *B atrai um conjunto aberto de condições iniciais*: existe um conjunto aberto U contendo B tal que, se $\mathbf{X}(0) \in U$, então a distância de $\mathbf{X}(t)$ para B tende a zero quando $t \rightarrow \infty$. Isso significa que B atrai todas as trajetórias que começam suficientemente próximas a ela. O maior conjunto U é chamado de bacia de atração de B .
3. *B é mínimo*: não há subconjunto em B que satisfaz as condições 1 e 2.

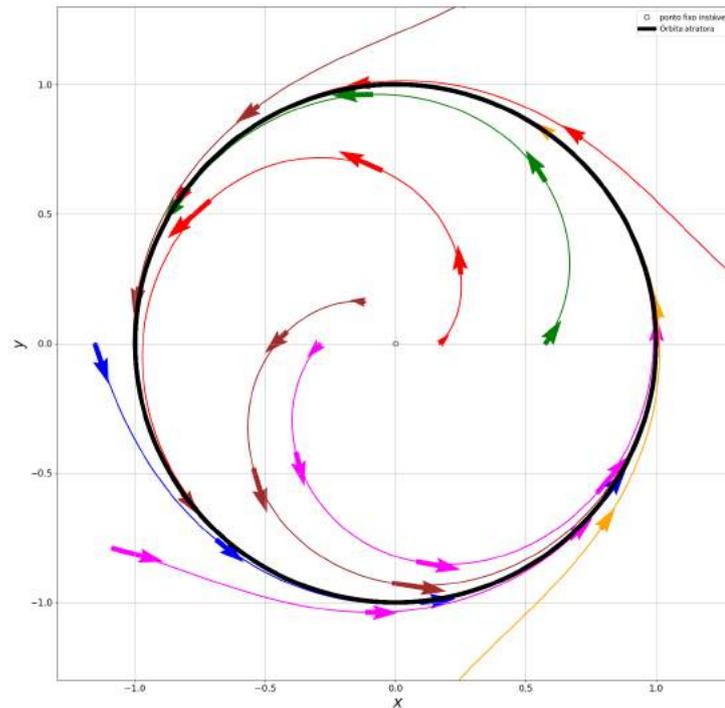
Os pontos fixos estáveis, já descritos acima, são atratores para o sistema dinâmico. Um outro exemplo importante de atrator são órbitas atratoras, ou ciclos limites estáveis. Como um exemplo dessa classe de atratores, considere o seguinte sistema dinâmico em coordenadas polares:

$$\dot{r} = r(1 - r^2) \quad (2.11)$$

$$\dot{\theta} = 1 \quad (2.12)$$

onde $x = r(t) \cos(\theta(t))$ e $y = r(t) \sin(\theta(t))$. Realizando uma expansão em torno de $r = 1$, procedimento semelhante ao que fizemos para os pontos fixos, pode se mostrar que o sistema tende a se aproximar de $r = 1$, enquanto que, tende a se afastar de $r = 0$. Entretanto, note que $\theta(t) = t + \theta_o$, e portanto, $r_f = 1$ é uma órbita no plano xy . Na figura 3 vemos graficamente o efeito do atrator no espaço de fase.

Figura 3 – Na figura vemos o comportamento atrativo da órbita $r = 1$ (marcada em preto). Como vimos, a origem é um ponto fixo instável. As demais curvas são soluções do sistema dinâmico para diferentes condições iniciais. As setas são os vetores tangenciais as curvas.



Fonte: O autor (2020)

Uma importante classe dentre os atratores são os atratores estranhos (STROGATZ, 2014). Quando chamados de caóticos, está sendo enfatizado que o atrator é sensível às condições iniciais, e quando chamados de fractais está sendo enfatizado que o conjunto B é um conjunto fractal. Embora no capítulo 5 tenhamos encontrado candidatos a atratores estranhos, não chegamos a investigar rigorosamente se são atratores estranhos. Temos o interesse de fazer essa análise detalhada posteriormente.

2.2 MÉTODO DE EULER-MARUYAMA

Nesta breve seção iremos descrever sucintamente o método de Euler-Maruyama para integrar numericamente equações diferenciais estocásticas. Em sua forma integral uma equação diferencial estocástica autônoma tem a seguinte forma.

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(X(t))dt + \int_0^t g(X(t))dW(t) \quad (2.13)$$

onde f e g são funções escalares. A primeira integral do lado direito trata-se de uma integral determinística. A segunda integral é estocástica e o “diferencial” $dW(t)$ indica que estamos integrando a função g em relação ao movimento browniano. O termo $W(t)$, chamado de processo de Wiener, é uma variável aleatória que depende de $t \in [0, T]$ e satisfaz 3 condições.

1. $W(0) = 0$ (com probabilidade 1)
2. Para $0 \leq s < t \leq T$ a variação $W(t) - W(s) \approx \sqrt{t - s}N(0, 1)$, onde $N(0, 1)$ denota uma distribuição normal com média nula e variância unitária.
3. Para $0 \leq s < t < u < v \leq T$ as variações $W(t) - W(s)$ e $W(u) - W(v)$ são independentes.

Da equação (2.13) temos que:

$$X(t + \delta t) = \int_t^{t+\delta t} f(X(s))ds + \int_t^{t+\delta t} g(X(s))dW(s) \quad (2.14)$$

Assumindo que f e g são constantes no intervalo $t \in [t, t + \delta t]$ chegamos a

$$X(t + \delta t) = f(X(t))\delta t + g(X(t))dW(\delta t)$$

Aplicando a propriedade 2 do processo de Wiener, temos que:

$$X(t + \delta t) = f(X(t))\delta t + g(X(t))\sqrt{\delta t}N(0, 1) \quad (2.15)$$

ou

$$X_{i+1} = X_i + f(X_i)\delta t + g(X_i)\sqrt{\delta t}N(0, 1) \quad (2.16)$$

A solução $x(t)$ para uma equação diferencial do tipo:

$$\dot{x} = f(x) + c\xi(t) \quad (2.17)$$

com c constante e $\xi(t)$ como definido na seção 1.1 é equivalente a resolver a equação (2.13) com $g(x(t)) = c$. Uma revisão mais detalhada do método se encontra na referência (HIGHAM, 2001).

3 RESULTADOS GERAIS PARA A FASE ESCALADORA

Na seção 3.1 iremos escrever as equações (1.5) e (1.6) em coordenadas cartesianas, considerar suas versões adimensionais e aplicar o limite sobrearmortecido. Na seção 3.2 iremos visitar o problema da partícula autopropelida no potencial harmônico considerando o caso sobrearmortecido. Por fim, na seção 3.3 iremos obter condições para estabilidade da fase escaladora para um potencial $V(x, y)$ arbitrário.

3.1 MODELO DE DAUCHOT E DÉMERY NO LIMITE SOBREAMORTECIDO

Diferente do que foi feito no artigo do Dauchot e Démary (DAUCHOT; DÉMERY, 2019), iremos estudar o modelo usando coordenadas cartesianas ¹. Isso nos ajudará a abordar posteriormente o caso mais geral em que o potencial não tem simetria circular. Seja α o ângulo entre o versor \mathbf{n} e o eixo x e considere os seguintes vetores:

$$\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y. \quad (3.1)$$

$$\mathbf{n}_\perp = -\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_y. \quad (3.2)$$

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y. \quad (3.3)$$

$$\nabla V = V_x \mathbf{e}_x + V_y \mathbf{e}_y. \quad (3.4)$$

$$V_x = \frac{\partial V}{\partial x}(x, y). \quad (3.5)$$

$$V_y = \frac{\partial V}{\partial y}(x, y). \quad (3.6)$$

Em termos das componentes destes vetores, a equação (1.5) em cartesianas se torna:

$$m\dot{v}_x = F_0 \cos \alpha - \gamma v_x - V_x. \quad (3.7)$$

$$m\dot{v}_y = F_0 \sin \alpha - \gamma v_y - V_y. \quad (3.8)$$

Para a equação (1.6), entretanto, precisamos de alguns passos intermediários, estes são:

$$\begin{aligned} \tau \dot{\mathbf{n}} &= \tau \frac{d}{dt} (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y) = \tau \dot{\alpha} \underbrace{(-\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_y)}_{\mathbf{n}_\perp}, \\ \tau \dot{\mathbf{n}} &= \tau \dot{\alpha} \mathbf{n}_\perp, \end{aligned} \quad (3.9)$$

e,

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{n} = \underbrace{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})}_{1} \mathbf{v} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{n} = \mathbf{v} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{n}. \quad (3.10)$$

Substituindo os resultados acima, a equação (1.6) se torna,

$$\tau \dot{\alpha} \mathbf{n}_\perp = \zeta [\mathbf{v} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{n}] + \sqrt{2\beta\xi} \mathbf{n}_\perp, \quad (3.11)$$

¹ Dauchot e Démary (DAUCHOT; DÉMERY, 2019) usaram coordenadas polares para estudar a dinâmica para o potencial harmônico.

aplicando o produto escalar por \mathbf{n}_\perp em ambos os lados obtemos:

$$\tau \dot{\alpha} \underbrace{\mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{n}_\perp}_1 = \zeta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_\perp - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_\perp}_0 + \sqrt{2\beta\xi} \underbrace{\mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{n}_\perp}_1,$$

portanto,

$$\tau \dot{\alpha} = \zeta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_\perp + \sqrt{2\beta\xi}, \quad (3.12)$$

Sendo assim, a equação (1.6) pode ser escrita como:

$$\tau \dot{\alpha} = \zeta (v_y \cos \alpha - v_x \sin \alpha) + \sqrt{2\beta\xi}. \quad (3.13)$$

Finalmente, obtemos o sistema de equações em coordenadas cartesianas:

$$m\dot{v}_x = F_0 \cos \alpha - \gamma v_x - V_x. \quad (3.14)$$

$$m\dot{v}_y = F_0 \sin \alpha - \gamma v_y - V_y. \quad (3.15)$$

$$\tau \dot{\alpha} = \zeta (v_y \cos \alpha - v_x \sin \alpha) + \sqrt{2\beta\xi}. \quad (3.16)$$

Vamos escrever a equação acima em termos de variáveis adimensionais. Sejam as seguintes variáveis adimensionais $x' = \frac{x}{L_0}$, $y' = \frac{y}{L_0}$ e $t' = \frac{t}{T_0}$, sendo T_0 e L_0 o tempo e o comprimento característico do sistema. Considere também o potencial adimensional $V'(x', y') = \frac{V(x, y)}{V_0}$ onde V_0 é o potencial característico do sistema. Escrevendo as derivadas e as variáveis em termos das variáveis adimensionais a equação (3.14) se torna:

$$\frac{mL_0}{T_0^2} \frac{d^2 x'}{dt'^2} = F_0 \cos \alpha - \frac{\gamma L_0}{T_0} \frac{dx'}{dt'} - \frac{V_0}{L_0} \frac{d}{dx'} V'(x', y'),$$

escolhendo T_0 e L_0 chegamos a

$$\underbrace{\frac{mL_0}{F_0 T_0^2}}_{\tau_v} \frac{d^2 x'}{dt'^2} = \cos \alpha - \underbrace{\frac{\gamma L_0}{F_0 T_0}}_1 \frac{dx'}{dt'} - \underbrace{\frac{V_0}{F_0 L_0}}_1 \frac{d}{dx'} V'(x', y'),$$

portanto,

$$\tau_v \dot{v}'_x = \cos \alpha - v'_x - V'_x x'. \quad (3.17)$$

O procedimento para a equação (3.14) é análogo. Tomando a equação (3.16) e realizando a mesma substituição temos:

$$\underbrace{\frac{\tau}{L_0 \zeta}}_{\tau_n} \frac{d\alpha}{dt'} = \cos \alpha \frac{dx'}{dt'} - \sin \alpha \frac{dy'}{dt'} + \underbrace{\sqrt{2 \frac{\beta T_0^2}{\zeta^2 L_0^2}}}_{\sqrt{2D}} \xi,$$

$$\tau_n \frac{d\alpha}{dt'} = \cos \alpha v'_y - \sin \alpha v'_x + \sqrt{2D} \xi, \quad (3.18)$$

Sendo assim, o sistema de equação em termos das variáveis adimensionais é dado por:

$$\tau_v \dot{v}_x = \cos \alpha - v_x - V_x. \quad (3.19)$$

$$\tau_v \dot{v}_y = \sin \alpha - v_y - V_y. \quad (3.20)$$

$$\tau_n \dot{\alpha} = (v_y \cos \alpha - v_x \sin \alpha) + \sqrt{2D} \xi. \quad (3.21)$$

Onde por simplicidade removemos a marcação especial. A partir desse ponto, estaremos considerando as variáveis como adimensionais. Em ambos os potenciais trabalhados na dissertação $V_0 = \kappa L_0^2$, logo os três parâmetros adimensionais são: $\tau_v = \frac{m\kappa}{\gamma^2}$, $\tau_n = \frac{\tau\kappa}{\zeta F_0}$ e $D = \frac{\beta\gamma^2}{\zeta^2 F_0^2}$. Algo que vale salientar é que o parâmetro τ_v não depende de F_0 , enquanto que τ_n é inversamente proporcional a F_0 . O limite sobre-amortecido é obtido impondo que $\tau_v \rightarrow 0$. Nesse limite o sistema de equações se torna

$$\dot{x} = \cos \alpha - V_x, \quad (3.22)$$

$$\dot{y} = \sin \alpha - V_y, \quad (3.23)$$

$$\tau_n \dot{\alpha} = V_x \sin(\alpha) - V_y \cos(\alpha) + \sqrt{2D}\xi. \quad (3.24)$$

Que são as equações adimensionais para o modelo de Dauchot e Démery no limite sobre-amortecido para um potencial arbitrário.

3.2 REVISITANDO O PROBLEMA DA PARTÍCULA ATIVA EM UM POÇO HARMÔNICO

Antes de prosseguir nosso estudo considerando os outros potenciais, iremos visitar o problema da partícula autopropelida no potencial harmônico, entretanto, considerando o caso sobre-amortecido.

No mesmo espírito do que foi feito no artigo do Dauchot e Démery (DAUCHOT; DÉMERY, 2019) vamos estudar o sistema dinâmico considerando $D = 0$ ². Substituindo a versão adimensional do potencial harmônico ($V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$) nas equações (3.22), (3.23) e (3.24), obtemos o seguinte sistema dinâmico:

$$\dot{x} = \cos(\alpha) - x \quad (3.25)$$

$$\dot{y} = \sin(\alpha) - y \quad (3.26)$$

$$\tau_n \dot{\alpha} = x \sin(\alpha) - y \cos(\alpha). \quad (3.27)$$

Como já mencionado, na fase escaladora o deslocamento azimutal é ocasionado apenas pela presença do ruído. Portanto, na ausência dele a partícula deve permanecer em repouso a uma distância finita do centro, isto é, a partícula estará em um dos pontos fixos estáveis do sistema. Isso implica que a fase escaladora só pode ser acessada se existirem pontos fixos estáveis. Vimos na seção 2.1 que dado um sistema dinâmico $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\mathbf{X})$, para que um ponto \mathbf{X}_f seja um ponto fixo para o sistema ele deve satisfazer $\mathbf{A}(\mathbf{X}_f) = \mathbf{0}$. No sistema acima temos que

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

² Daqui em diante, quando nos referirmos ao “sistema dinâmico da partícula”, estaremos nos referindo às equações do modelo no limite sobre-amortecido considerando $D = 0$.

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x \\ \sin(\alpha) - y \\ \frac{(x \sin(\alpha) - y \cos(\alpha))}{\tau_n} \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Para que $\mathbf{X}_f = x_f \mathbf{e}_x + y_f \mathbf{e}_y + \alpha_f \mathbf{e}_\alpha$ seja ponto fixo devemos ter

$$\cos(\alpha_f) - x_f = 0 \quad (3.30)$$

$$\sin(\alpha_f) - y_f = 0 \quad (3.31)$$

$$\frac{(x_f \sin(\alpha_f) - y_f \cos(\alpha_f))}{\tau_n} = 0. \quad (3.32)$$

Das equações (3.30) e (3.31) obtemos que

$$x_f = \cos(\alpha_f) \quad (3.33)$$

$$y_f = \sin(\alpha_f) \quad (3.34)$$

substituindo na equação (3.32) temos

$$\frac{1}{\tau_n} \left(\underbrace{\cos(\alpha_f) \sin(\alpha_f) - \sin(\alpha_f) \cos(\alpha_f)}_{=0} \right) = 0. \quad (3.35)$$

Sendo assim, dado um valor de α_f , que basta ser um número real, x_f e y_f são completamente definidos. Usando a relação trigonométrica $\sin^2(\alpha_f) + \cos^2(\alpha_f) = 1$ temos que

$$x_f^2 + y_f^2 = 1. \quad (3.36)$$

Isto é, a curva de pontos fixos do sistema é um círculo de raio unitário. Para calcular a estabilidade dos pontos fixos usaremos o processo de linearização descrito também na seção 2.1. Os componentes da matriz jacobiana são

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = -1; \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha} = -\sin(\alpha);$$

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = -1; \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} = \cos(\alpha);$$

$$\frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial x} = \frac{1}{\tau_n} \sin(\alpha); \quad \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial y} = -\frac{1}{\tau_n} \cos(\alpha); \quad \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \alpha} = \frac{1}{\tau_n} (x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha));$$

No ponto fixo a matrix se torna

$$\mathbf{J}_A(\mathbf{X}_f) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -y_f \\ 0 & -1 & x_f \\ \mu_n y_f & -\mu_n x_f & \mu_n \end{bmatrix}$$

onde $\mu_n = \frac{1}{\tau_n}$. Como já visto, se a parte real de todos os autovetores for negativa, então, o ponto fixo é estável. Os autovalores da matriz jacobiana devem satisfazer

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{J}_A(\mathbf{X}_f) - \mathbf{1}\lambda) = 0. \quad (3.37)$$

onde $\mathbf{1}$ nesse caso representa a matriz identidade. Vamos calcular o polinômio característico $P(\lambda)$ da matriz jacobiana

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= -(1 + \lambda) \left[-(1 + \lambda)(\mu_n - \lambda) + \mu_n x_f^2 \right] - y_f((1 + \lambda)\mu_n y_f) \\ &= (1 + \lambda)^2(\mu_n - \lambda) - (1 + \lambda)\mu_n x_f^2 - (1 + \lambda)\mu_n y_f^2 \\ &= (1 + \lambda)^2(\mu_n - \lambda) - (1 + \lambda)\mu_n \\ P(\lambda) &= (1 + \lambda) [(1 + \lambda)(\mu_n - \lambda) - \mu_n]. \end{aligned}$$

Logo

$$P(\lambda) = (1 + \lambda) [(1 + \lambda)(\mu_n - \lambda) - \mu_n]. \quad (3.38)$$

Impondo $P(\lambda) = 0$, chegamos a

$$(1 + \lambda) [(1 + \lambda)(\mu_n - \lambda) - \mu_n] = 0,$$

portanto, $\lambda = -1$ ou

$$\underbrace{(1 + \lambda)(\mu_n - \lambda) - \mu_n}_{-\lambda^2 + \lambda(\mu - 1)} = 0,$$

logo, devemos ter $\lambda = 0$ ou $\lambda = \mu_n - 1$. Os três autovalores da matriz são $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = \frac{1}{\tau_n} - 1$. O autovalor nulo presente nesse sistema está associado ao fato de existirem infinitos pontos fixos. Na seção 3.3 iremos mostrar que o autovalor nulo sempre existe e que se o sistema dinâmico tem infinitos pontos fixos, o autovalor nulo não interfere na estabilidade do ponto fixo. Sendo assim, como λ_1 já é negativo, o ponto fixo será estável se $\lambda_3 < 0$, ou seja, $\tau_n > 1$. Finalmente, temos para o potencial harmônico que a fase escaladora é possível apenas para $\tau_n > 1$. Sem a existência de um ponto fixo estável, o sistema dinâmico fica permanentemente em movimento, exceto se a condição inicial do sistema for um de seus pontos fixos. Vale salientar que a existência dessas fases se deve à equação de autoalinhamento. Se, por exemplo, removermos a equação de autoalinhamento e assumirmos uma orientação constante, isto é, $\alpha = \alpha_0$, o sistema dinâmico tem apenas um ponto fixo, $x_f = \cos(\alpha_0)$ e $y_f = \sin(\alpha_0)$, que é sempre estável.

Especialmente para o potencial harmônico, é possível encontrar analiticamente uma solução não constante para o sistema. A existência dessa solução está diretamente relacionada à existência da fase orbital. Para obter a solução, primeiro vamos supor que $\dot{\alpha} = \omega$, sendo ω uma constante. Dado isso, podemos reescrever as derivadas temporais em termos de α

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{d}{d\alpha} = \omega \frac{d}{d\alpha} \quad (3.39)$$

substituindo essa suposição nas equações (3.25), (3.26) e (3.27) chegamos ao sistema

$$\omega \frac{dx}{d\alpha} = \cos(\alpha) - x \quad (3.40)$$

$$\omega \frac{dy}{d\alpha} = \cos(\alpha) - y \quad (3.41)$$

$$\tau_n \omega = x \sin(\alpha) - y \cos(\alpha). \quad (3.42)$$

Sendo agora x e y funções de α . podemos reorganizar as (3.40) e (3.41) da seguinte forma

$$\frac{dx}{d\alpha} + \frac{1}{\omega}x = \frac{1}{\omega} \cos(\alpha)$$

$$\frac{dy}{d\alpha} + \frac{1}{\omega}y = \frac{1}{\omega} \sin(\alpha)$$

multiplicando por $e^{\frac{\alpha}{\omega}}$ em ambos os lados de ambas equações chegamos a

$$e^{\frac{\alpha}{\omega}} \frac{dx}{d\alpha} + \frac{e^{\frac{\alpha}{\omega}}}{\omega} x = \frac{e^{\frac{\alpha}{\omega}}}{\omega} \cos(\alpha)$$

$$e^{\frac{\alpha}{\omega}} \frac{dy}{d\alpha} + \frac{e^{\frac{\alpha}{\omega}}}{\omega} y = \frac{e^{\frac{\alpha}{\omega}}}{\omega} \sin(\alpha)$$

podemos, então, reescrever as equações como

$$\frac{d}{d\alpha} [e^{\frac{\alpha}{\omega}} x(\alpha)] = \frac{e^{\frac{\alpha}{\omega}}}{\omega} \cos(\alpha)$$

$$\frac{d}{d\alpha} [e^{\frac{\alpha}{\omega}} y(\alpha)] = \frac{e^{\frac{\alpha}{\omega}}}{\omega} \sin(\alpha)$$

Integrando em ambos os lados nas duas equações e isolando $x(\alpha)$ e $y(\alpha)$ obtemos

$$x(\alpha) = e^{-\frac{\alpha}{\omega}} \int \frac{e^{\frac{\alpha}{\omega}}}{\omega} \cos(\alpha) d\alpha + C_1 e^{-\frac{\alpha}{\omega}}, \quad (3.43)$$

$$y(\alpha) = e^{-\frac{\alpha}{\omega}} \int \frac{e^{\frac{\alpha}{\omega}}}{\omega} \sin(\alpha) d\alpha + C_2 e^{-\frac{\alpha}{\omega}}. \quad (3.44)$$

Substituindo

$$\int \frac{e^{\frac{\alpha}{\omega}}}{\omega} \cos(\alpha) d\alpha = \frac{e^{\frac{\alpha}{\omega}}}{\omega^2 + 1} [\omega \sin(\alpha) + \cos(\alpha)]$$

$$\int \frac{e^{\frac{\alpha}{\omega}}}{\omega} \sin(\alpha) d\alpha = \frac{e^{\frac{\alpha}{\omega}}}{\omega^2 + 1} [\sin(\alpha) - \omega \cos(\alpha)]$$

nas equações (3.43) e (3.44) obtemos

$$x(\alpha) = \frac{1}{\omega^2 + 1} [\omega \sin(\alpha) + \cos(\alpha)] + C_1 e^{-\frac{\alpha}{\omega}}, \quad (3.45)$$

$$y(\alpha) = \frac{1}{\omega^2 + 1} [\sin(\alpha) - \omega \cos(\alpha)] + C_2 e^{-\frac{\alpha}{\omega}}. \quad (3.46)$$

Vale salientar que as constantes de integração C_1 e C_2 nas equações (3.45) e (3.46) dependem exclusivamente das condições iniciais. Entretanto, note que no limite $\alpha \rightarrow \infty$ a contribuição desse termo se torna nula. Isso significa que independentemente das condições iniciais, dado tempo suficiente, o sistema sempre evoluirá para as soluções com C_1 e C_2 nulos. Portanto, as soluções $x(\alpha)$ e $y(\alpha)$ com $C_1 = C_2 = 0$ são atratores para o sistema dinâmico. Finalmente, a solução pós transiente é dada por:

$$x(\alpha) = \frac{1}{\omega^2 + 1} [\omega \sin(\alpha) + \cos(\alpha)], \quad (3.47)$$

$$y(\alpha) = \frac{1}{\omega^2 + 1} [\sin(\alpha) - \omega \cos(\alpha)]. \quad (3.48)$$

Substituindo as soluções para $x(\alpha)$ e $y(\alpha)$ na equação (3.42) temos

$$\begin{aligned} \omega \tau_n &= \frac{1}{\omega^2 + 1} \{[\omega \sin(\alpha) + \cos(\alpha)] \sin(\alpha) - [\sin(\alpha) - \omega \cos(\alpha)] \cos(\alpha)\} \\ \omega \tau_n &= \frac{1}{\omega^2 + 1} \{\omega \sin^2(\alpha) + \omega \cos^2(\alpha)\} \end{aligned}$$

Logo,

$$\tau_n = \frac{1}{\omega^2 + 1}. \quad (3.49)$$

Colocando ω^2 em evidência obtemos

$$\omega^2 = \frac{1}{\tau_n} (1 - \tau_n) \quad (3.50)$$

A equação acima funciona como um critério de estabilidade para a fase orbital, dado que se $\omega^2 < 0$ o argumento das funções seno e cosseno nas equações (3.45) e (3.46) passa a ser complexo, logo, as soluções obtidas existem apenas se $\omega^2 > 0$, portanto, apenas se $\tau_n < 1$. Note também que

$$\begin{aligned} x^2(\alpha) + y^2(\alpha) &= \frac{1}{(\omega^2 + 1)^2} \{[\omega \sin(\alpha) + \cos(\alpha)]^2 + [\sin(\alpha) - \omega \cos(\alpha)]^2\} \\ &= \frac{1}{(\omega^2 + 1)^2} \{\omega^2 + 1\} \\ x^2(\alpha) + y^2(\alpha) &= \frac{1}{\omega^2 + 1} \end{aligned}$$

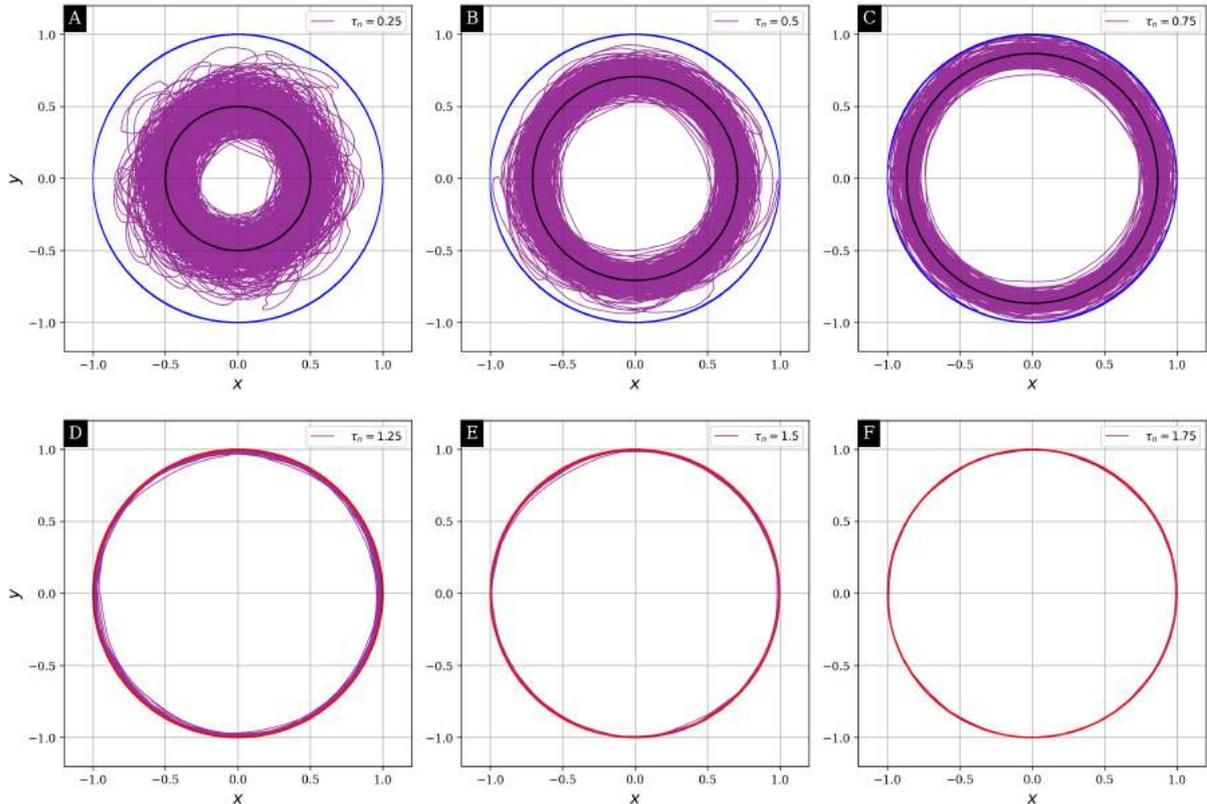
substituindo a equação (3.50) obtemos

$$x^2(\alpha) + y^2(\alpha) = \tau_n. \quad (3.51)$$

Ou seja, o atrator ao qual o sistema dinâmico está sujeito é uma órbita circular, porém, de raio $\sqrt{\tau_n}$. Isso explica o fato de as duas fases dinâmicas para o potencial harmônico apresentarem trajetórias circulares.

Na figura 4 podemos verificar graficamente os resultados obtidos acima. Vale salientar, que já na fase escaladora, quanto maior o valor de τ_n , menor é o efeito do ruído sobre o

Figura 4 – Nas figuras acima temos as trajetórias obtidas simulando as equações (3.22), (3.23) e (3.24) usando o potencial harmônico para valores distintos de τ_n . Além disso, a curva em azul ou vermelho é o conjunto de pontos fixos do sistema via equação (3.36), sendo os pontos marcados em azul instáveis e os em vermelho estáveis. Em A, B e C a partícula se encontra na fase orbital, enquanto que, em D, E e F se encontram na fase escaladora. Usamos $D = 0,005$ em todas as simulações. Nas figuras A, B e C vemos o crescimento do raio da órbita com o aumento de τ_n . Esse crescimento é esperado dado que o raio da solução exata ($D = 0$) para a fase orbital (marcado em preto) cresce com $\sqrt{\tau_n}$ (equação (3.51)). A partir da fase escaladora o valor de τ_n não interfere no raio da trajetória. As trajetórias da fase escaladora tem raio aproximadamente igual a 1.



Fonte: O autor (2020)

sistema. Um alto valor de τ_n está associado a uma baixa capacidade de propulsão e uma menor taxa de variação do versor de orientação em relação a perturbação causada pelo ruído. As trajetórias da figura 4 foram simuladas usando o método Euler-Maruyama (seção 2.2) para um passo $dt = 0,01$. O tempo total de simulação foi de 4000 unidades de tempo, onde metade do tempo foi dado para que o sistema atinja uma das fases. O método de Euler-Maruyama foi usado em todas as integrações numéricas com ruído, as condições iniciais usadas foram $x = 0$, $y = 1$ e $\alpha = 0$. Os parâmetros de simulação descritos acima foram usados em todas as integrações numéricas realizadas nessa dissertação.

Em resumo, vimos que a fase escaladora surge pela existência de pontos fixos estáveis no sistema, enquanto que a fase orbital surge pela existência de soluções não constantes atratoras no sistema dinâmico.

3.3 ESTABILIDADE DA FASE ESCALADORA PARA UM POTENCIAL ARBITRÁRIO

Nesta seção, temos como objetivo generalizar os critérios para a estabilidade da fase escaladora obtidos na seção anterior, porém, considerando um potencial $V(x, y)$ arbitrário. Considerando um potencial arbitrário o sistema dinâmico da partícula ($D = 0$) é dado por:

$$\dot{x} = \cos(\alpha) - V_x \quad (3.52)$$

$$\dot{y} = \sin(\alpha) - V_y \quad (3.53)$$

$$\tau_n \dot{\alpha} = V_x \sin(\alpha) - V_y \cos(\alpha). \quad (3.54)$$

Onde $V_x = \frac{\partial V(x,y)}{\partial x}$, $V_y = \frac{\partial V(x,y)}{\partial y}$ e $V(x, y)$ a versão adimensional do potencial original. Seguindo o mesmo procedimento feito na seção 3.2, o sistema pode ser reescrito como

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\mathbf{X}) \quad (3.55)$$

onde

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}, \quad (3.56)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - V_x \\ \sin(\alpha) - V_y \\ \frac{(V_x \sin(\alpha) - V_y \cos(\alpha))}{\tau_n} \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

O vetor \mathbf{X}_f é ponto fixo apenas se

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}_f) = \mathbf{0},$$

portanto,

$$\cos(\alpha_f) - V_x(x_f, y_f) = 0 \quad (3.58)$$

$$\sin(\alpha_f) - V_y(x_f, y_f) = 0 \quad (3.59)$$

$$\frac{1}{\tau_n} (V_x(x_f, y_f) \sin(\alpha_f) - V_y(x_f, y_f) \cos(\alpha_f)) = 0 \quad (3.60)$$

Das equações (3.58) e (3.59) obtemos que

$$V_x(x_f, y_f) = \cos(\alpha_f) \quad (3.61)$$

$$V_y(y_f, y_f) = \sin(\alpha_f) \quad (3.62)$$

substituindo na equação (3.60) temos

$$\frac{1}{\tau_n} \left(\underbrace{\cos(\alpha_f) \sin(\alpha_f) - \sin(\alpha) \cos(\alpha_f)}_{=0} \right) = 0. \quad (3.63)$$

Dado um valor de α_f , x_f e y_f devem satisfazer as equações (3.61) e (3.62), consequentemente o par (x_f, y_f) deve satisfazer

$$V_x^2 + V_y^2 = 1 \quad (3.64)$$

que pode ser entendida como o balanço entre a força de propulsão e a força gerada potencial externo. Calculando as derivadas parciais da matriz jacobiana

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} = -\frac{\partial V_x}{\partial x} \equiv -V_{xx}, \quad \frac{\partial A_1}{\partial y} = -\frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{\partial V_y}{\partial x} \equiv -V_{xy}, \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\tau_n} \sin(\alpha). \quad (3.66)$$

Para $A_2 = \sin(\alpha) - V_y$, temos:

$$\frac{\partial A_2}{\partial x} = -V_{xy}, \quad \frac{\partial A_2}{\partial y} = -V_{yy}, \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial \alpha} = \frac{1}{\tau_n} \cos(\alpha). \quad (3.68)$$

Para $A_3 = V_x \sin(\alpha) - V_y \cos(\alpha)$, temos:

$$\frac{\partial A_3}{\partial x} = \frac{1}{\tau_n} [V_{xx} \sin(\alpha) - V_{xy} \cos(\alpha)], \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial y} = \frac{1}{\tau_n} [V_{xy} \sin(\alpha) - V_{yy} \cos(\alpha)], \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial \alpha} = \frac{1}{\tau_n} [V_x \cos(\alpha) + V_y \sin(\alpha)]. \quad (3.71)$$

Portanto, temos a seguinte matriz jacobiana.

$$\mathbf{J}_A(\mathbf{X}) =$$

$$\begin{bmatrix} -V_{xx} & -V_{xy} & -\sin(\alpha) \\ -V_{xy} & -V_{yy} & \cos(\alpha) \\ \frac{1}{\tau_n} [V_{xx} \sin(\alpha) - V_{xy} \cos(\alpha)] & \frac{1}{\tau_n} [V_{xy} \sin(\alpha) - V_{yy} \cos(\alpha)] & \frac{1}{\tau_n} [V_x \cos(\alpha) + V_y \sin(\alpha)] \end{bmatrix}.$$

Avaliando a matriz no ponto fixo, e usando as equações (3.61), (3.62) e (3.64) e definindo $\mu_n = 1/\tau_n$ temos

$$\mathbf{J}_A(\mathbf{X}_f) = \begin{bmatrix} -V_{xx} & -V_{xy} & -V_y \\ -V_{xy} & -V_{yy} & V_x \\ \mu_n [V_{xx} V_y - V_{xy} V_x] & \mu_n [V_{xy} V_y - V_{yy} V_x] & \mu_n \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

Note que embora estejamos omitindo a marcação, as derivadas de $V(x, y)$ estão avaliadas no ponto fixo (x_f, y_f) . Novamente, λ é autovalor da matriz $\mathbf{J}_A(\mathbf{X}_f)$ se

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{J} - \mathbf{1}\lambda) = 0, \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} P(\lambda) = & -(V_{xx} + \lambda) [-(V_{yy} + \lambda)(\mu_n - \lambda) - \mu_n V_x (V_{xy} V_y - V_{yy} V_x)] \\ & + V_{xy} [-V_{xy}(\mu_n - \lambda) - \mu_n V_x (V_{xx} V_y - V_{xy} V_x)] \\ & - V_y [-\mu_n V_{xy} (V_{xy} V_y - V_{yy} V_x) + \mu_n (V_{yy} + \lambda) (V_{xx} V_y - V_{xy} V_x)]. \end{aligned}$$

Escrevendo explicitamente o polinômio acima obtemos

$$\begin{aligned} P(\lambda) = & -\lambda^3 + (\mu_n - V_{xx} - V_{yy}) \lambda^2 \\ & + \left\{ \mu_n [V_{yy}(1 - V_x^2) + V_{xx}(1 - V_y^2) + 2V_x V_y V_{xy}] - V_{xx} V_{yy} + V_{xy}^2 \right\} \lambda \end{aligned}$$

$$P(\lambda) = \lambda \left\{ -\lambda^2 + \underbrace{(\mu_n - V_{xx} - V_{yy})}_{p_1} \lambda + \underbrace{\left\{ \mu_n [V_{yy}V_y^2 + V_{xx}V_x^2 + 2V_xV_yV_{xy}] - V_{xx}V_{yy} + V_{xy}^2 \right\}}_{p_0} \right\}.$$

$$P(\lambda) = \lambda (-\lambda^2 + p_1\lambda + p_0). \quad (3.74)$$

$$p_1 = \mu_n - V_{xx} - V_{yy}. \quad (3.75)$$

$$p_0 = \mu_n [V_{yy}V_y^2 + V_{xx}V_x^2 + 2V_xV_yV_{xy}] - V_{xx}V_{yy} + V_{xy}^2. \quad (3.76)$$

Como o polinômio característico é de 3º grau, então, obteremos 3 autovalores. Note que $\lambda = 0$ é raiz do polinômio e, portanto, é autovalor da matriz (3.72). Esse resultado é importante, pois, dado um potencial separável em funções independentes de x e y , o sistema dinâmico sempre admite um autovalor nulo. Embora importante, esse resultado pode ser problemático, dado que o teste de estabilidade se torna menos conclusivo quando um dos autovalores é nulo. Entretanto, é possível mostrar que se o sistema dinâmico tem infinitos pontos fixos e se um autovalor é nulo e os outros dois são negativos, uma perturbação na direção do autovetor associado ao autovalor nulo leva o sistema de um ponto fixo para outro imediatamente próximo. Ou seja, nessas condições ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ e $\lambda_3 = 0$), após uma perturbação o sistema permanece na curva de pontos fixos definida pela equação (3.64). Estaremos considerando estabilidade nesse sentido.

Como primeiro passo, vamos calcular o autovetor associado ao autovalor nulo, considere

$$\mathbf{W}_{\lambda=0} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{W}_{\lambda=0}$ é autovetor de $\mathbf{J}_A(\mathbf{X}_f)$ com autovalor $\lambda = 0$ apenas se

$$\begin{bmatrix} -V_{xx} & -V_{xy} & -V_y \\ -V_{xy} & -V_{yy} & V_x \\ \mu_n [V_{xx}V_y - V_{xy}V_x] & \mu_n [V_{xy}V_y - V_{yy}V_x] & \mu_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.77)$$

As duas primeiras equações do sistema são:

$$-V_{xx}\omega_1 - V_{xy}\omega_2 - V_y\omega_3 = 0, \quad (3.78)$$

$$-V_{xy}\omega_1 - V_{yy}\omega_2 + V_x\omega_3 = 0. \quad (3.79)$$

Multiplicando a equação (3.78) por V_x e a equação (3.79) por V_y e somando ambas as equações obtemos que

$$-\omega_1(V_xV_{xx} + V_yV_{xy}) - \omega_2(V_xV_{xy} + V_yV_{yy}) = 0,$$

então,

$$\omega_2 = -\omega_1 \left(\frac{V_x V_{xx} + V_y V_{xy}}{V_y V_{yy} + V_x V_{xy}} \right). \quad (3.80)$$

Para obter ω_3 em termos de ω_1 substituímos o resultado acima na (3.78).

$$\begin{aligned} \omega_3 &= -\frac{\omega_1}{V_y} \left[V_{xx} - V_{xy} \left(\frac{V_x V_{xx} + V_y V_{xy}}{V_y V_{yy} + V_x V_{xy}} \right) \right] \\ \omega_3 &= -\omega_1 \left(\frac{V_{xx} V_{yy} - V_{xy}^2}{V_y V_{yy} + V_x V_{xy}} \right). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Finalmente obtemos que

$$\mathbf{W}_{\lambda=0} = \omega_1 \begin{bmatrix} 1 \\ - \left(\frac{V_x V_{xx} + V_y V_{xy}}{V_y V_{yy} + V_x V_{xy}} \right) \\ - \left(\frac{V_{xx} V_{yy} - V_{xy}^2}{V_y V_{yy} + V_x V_{xy}} \right) \end{bmatrix}. \quad (3.82)$$

Onde ω_1 é uma constante não nula.

Vimos no capítulo 2.1 que a solução do sistema dinâmico na vizinhança de um ponto fixo tem a forma:

$$\delta \mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{W}_i e^{\lambda_i t}.$$

Onde, como vimos, \mathbf{W}_i são os autovetores da matriz jacobiana do sistema dinâmico no ponto fixo \mathbf{X}_f . Assumindo que um autovalor é nulo e os outros são negativos, no limite $t \rightarrow \infty$ obtemos

$$\delta \mathbf{X}(t) = c_{\lambda=0} \mathbf{W}_{\lambda=0}. \quad (3.83)$$

Sendo assim, o ponto para onde o sistema dinâmico converge é dado por

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_f + c_{\lambda=0} \mathbf{W}_{\lambda=0} \quad (3.84)$$

Sabemos que se \mathbf{X}_f é ponto fixo, então

$$V_x^2(x_f, y_f) + V_y^2(x_f, y_f) = 1, \quad (3.85)$$

$$\cos(\alpha_f) = V_x(x_f, y_f), \quad (3.86)$$

$$\sin(\alpha_f) = V_y(x_f, y_f). \quad (3.87)$$

Seja \mathbf{X}_f um ponto fixo do sistema dinâmico, e $d\mathbf{X}_f = dx_f \mathbf{e}_x + dy_f \mathbf{e}_y + d\alpha_f \mathbf{e}_\alpha$ um vetor infinitesimal tal que $\mathbf{X}_f + d\mathbf{X}_f$ também é ponto fixo. Sendo assim, as condições de ponto fixo deve ser satisfeitas para $\mathbf{X}_f + d\mathbf{X}_f$, portanto, devemos ter:

$$V_x^2(x_f + dx_f, y_f + dy_f) + V_y^2(x_f + dx_f, y_f + dy_f) = 1. \quad (3.88)$$

Expandindo em série de Taylor até a primeira ordem temos:

$$V_x(x_f + dx_f, y_f + dy_f) = V_x(x_f, y_f) + dx_f V_{xx}(x_f, y_f) + dy_f V_{xy}(x_f, y_f), \quad (3.89)$$

$$V_y(x_f + dx_f, y_f + dy_f) = V_y(x_f, y_f) + dy_f V_{yy}(x_f, y_f) + dx_f V_{xy}(x_f, y_f). \quad (3.90)$$

Substituindo na equação (3.88) temos:

$$V_x^2 + 2V_x V_{xx} dx_f + 2V_x V_{xy} dy_f + O(d^2) + V_y^2 + 2V_y V_{yy} dy_f + V_y V_{xy} dx_f + O(d^2) = 1,$$

porém, substituindo a equação (3.85) obtemos:

$$dx_f(V_x V_{xx} + V_y V_{xy}) + dy_f(V_y V_{yy} + V_x V_{xy}) = 0$$

e, portanto, temos que

$$dy_f = - \left(\frac{V_x V_{xx} + V_y V_{xy}}{V_y V_{yy} + V_x V_{xy}} \right) dx_f. \quad (3.91)$$

Usando que $d\alpha_f(x_f, y_f) = \frac{\partial \alpha_f}{\partial x_f} dx_f + \frac{\partial \alpha_f}{\partial y_f} dy_f$ podemos calcular $d\alpha_f$ em termos de dx_f

$$d\alpha_f = dx_f \left[\frac{\partial \alpha_f}{\partial x_f} - \frac{\partial \alpha_f}{\partial y_f} \left(\frac{V_x V_{xx} + V_y V_{xy}}{V_y V_{yy} + V_x V_{xy}} \right) \right] \quad (3.92)$$

Usando que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_f} \cos \alpha_f &= \frac{\partial}{\partial x_f} V_x \\ -\sin \alpha_f \frac{\partial \alpha_f}{\partial x_f} &= V_{xx} \\ \frac{\partial \alpha_f}{\partial x_f} &= -\frac{V_{xx}}{V_y} \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_f} \cos \alpha_f &= \frac{\partial}{\partial y_f} V_x \\ -\sin \alpha_f \frac{\partial \alpha_f}{\partial y_f} &= V_{xy} \\ \frac{\partial \alpha_f}{\partial y_f} &= -\frac{V_{xy}}{V_y} \end{aligned} \quad (3.94)$$

temos que

$$d\alpha_f = -dx_f \frac{1}{V_y} \left[V_{xx} - V_{xy} \left(\frac{V_x V_{xx} + V_y V_{xy}}{V_y V_{yy} + V_x V_{xy}} \right) \right]$$

$$d\alpha_f = -dx_f \left(\frac{V_{xx} V_{yy} - V_{xy}^2}{V_y V_{yy} + V_x V_{xy}} \right). \quad (3.95)$$

Substituindo as equações (3.91) e (3.95) e colocando em evidência dx_f , obtemos:

$$d\mathbf{X}_f = dx_f \underbrace{\left[\mathbf{e}_x - \left(\frac{V_x V_{xx} + V_y V_{xy}}{V_y V_{yy} + V_x V_{xy}} \right) \mathbf{e}_y - \left(\frac{V_{xx} V_{yy} - V_{xy}^2}{V_y V_{yy} + V_x V_{xy}} \right) \mathbf{e}_\alpha \right]}_{\mathbf{W}_{\lambda=0}}.$$

Portanto,

$$d\mathbf{X}_f = c_{\lambda=0} \mathbf{W}_{\lambda=0}. \quad (3.96)$$

Por hipótese, $\mathbf{X}_f + d\mathbf{X}_f$ é ponto fixo do sistema, logo, $\mathbf{X}_f + c_{\lambda=0} \mathbf{W}_{\lambda=0}$ é ponto fixo do sistema. Sendo assim, voltando a equação (3.84), mostramos que mesmo para $\lambda = 0$, se os outros dois autovalores são negativos, o sistema converge para um ponto fixo.

Resolvida a questão do autovalor nulo, precisamos verificar o sinal dos outros dois autovalores. Considerando a equação (3.74) e aplicando a condição em (3.73) temos que:

$$\lambda_+ = \frac{p_1 + \sqrt{p_1^2 + 4p_0}}{2} \quad (3.97)$$

$$\lambda_- = \frac{p_1 - \sqrt{p_1^2 + 4p_0}}{2}. \quad (3.98)$$

Vamos obter condições para que ambos autovalores sejam negativos e , portanto, o ponto fixo estável. Supondo $p_1 < 0$, λ_- é sempre negativo, entretanto, λ_+ é negativo apenas se $p_0 < 0$. Portanto, o ponto fixo é estável para $p_1 < 0$, apenas se $p_0 < 0$.

Assumindo , agora, que $p_1 > 0$, temos que λ_+ é sempre positivo. Portanto, para $p_1 > 0$ o sistema é instável. Se considerarmos $p_0 = 0$, temos

$$\lambda_{\pm} = \frac{p_1}{2}, \quad (3.99)$$

logo, os autovalores serão negativos apenas se $p_1 < 0$. Em resumo, temos que:

$$p_1 > 0 \implies \text{instabilidade} \quad (3.100)$$

$$p_1 < 0 \text{ e } \begin{cases} p_0 > 0 \implies \text{instabilidade} \\ p_0 \leq 0 \implies \text{estabilidade} \end{cases}. \quad (3.101)$$

Com o auxílio das equações (3.75) e (3.76) podemos escrever essas condições em termos de τ_n .

A condição em (3.100) se torna:

$$\tau_n < \frac{1}{V_{xx} + V_{yy}} \implies \text{instabilidade} \quad (3.102)$$

A condição em (3.101) se torna:

$$\tau_n > \frac{1}{V_{xx} + V_{yy}} \text{ e } \begin{cases} \tau_n < \frac{V_{yy}V_y^2 + V_{xx}V_x^2 + 2V_xV_yV_{xy}}{V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2} \implies \text{instabilidade} \\ \tau_n \geq \frac{V_{yy}V_y^2 + V_{xx}V_x^2 + 2V_xV_yV_{xy}}{V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2} \implies \text{estabilidade} \end{cases} \quad (3.103)$$

Com os resultados obtidos nessa seção, praticamente concluímos o estudo da fase escaladora. Dado um potencial do tipo $V(x, y)$, somos capazes de identificar a curva de pontos fixos via equação (3.64) e testar a estabilidade de cada ponto. O que no mínimo nos diz onde a fase escaladora é acessível e onde não é.

4 DINÂMICA PARA UM POTENCIAL ELÍPTICO

Neste capítulo, vamos estudar a dinâmica da partícula autopropelida considerando o potencial elíptico definido na equação (1.9). Na seção 4.1 iremos estudar o comportamento e estabilidade das fases escaladora e orbital. Na seção 4.2 iremos classificar os atratores encontrados na fase orbital, construir um diagrama de fases no espaço de parâmetro $[\varepsilon \times \tau_n]$ e, por fim, discutir o comportamento da variável α , a orientação da partícula.

4.1 FASES ESCALADORA E ORBITAL NO POTENCIAL ELÍPTICO

Para o confinamento no potencial elíptico temos as seguintes equações:

$$\dot{x} = \cos \alpha - (1 + \varepsilon)x. \quad (4.1)$$

$$\dot{y} = \sin \alpha - y. \quad (4.2)$$

$$\tau_n \dot{\alpha} = (1 + \varepsilon)x \sin \alpha - y \cos \alpha + \sqrt{2D}\xi, \quad (4.3)$$

sendo o potencial elíptico adimensional

$$V(x, y) = \frac{1}{2} [(1 + \varepsilon)x^2 + y^2]. \quad (4.4)$$

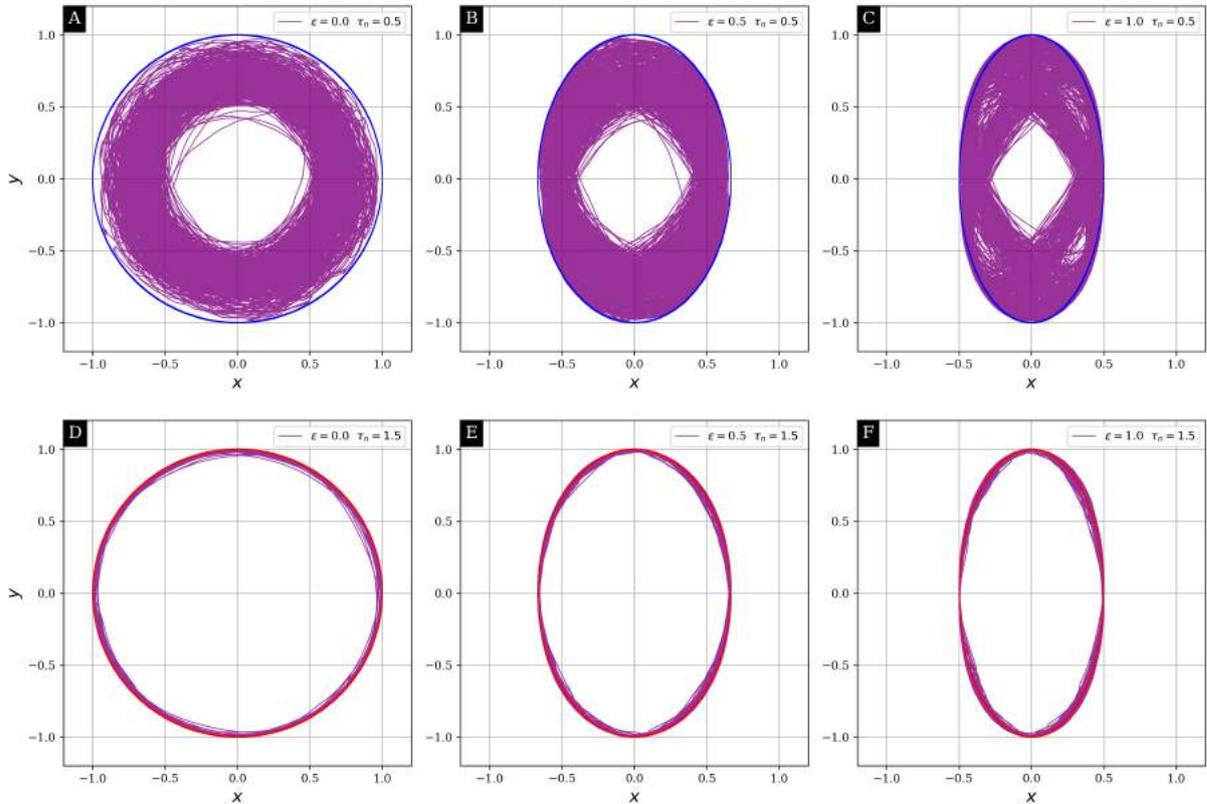
Integramos numericamente as equações (4.1), (4.2) e (4.3) usando o método de Euler-Maruyama. Nas figuras 5-A, 5-B e 5-C, vemos trajetórias características da fase orbital, enquanto que, nas figuras 5-D, 5-E e 5-F, da fase escaladora. Note que as características gerais de ambas as fases, como descritas nas seções 1.2 e 3.2, não são alteradas, embora, como esperado, a geometria das trajetórias tenham mudado. Na seção 3.2, vimos que o comportamento das fases podem ser, em parte, compreendido estudando o sistema dinâmico considerando $D = 0$. Das equações (3.64) e (4.4) temos que as curvas de pontos fixos são elipses de semi eixo maior igual a 1, e semi eixo menor $1/(1 + \varepsilon)$, como mostra a equação (4.5) abaixo.

$$[(1 + \varepsilon) x_f]^2 + y_f^2 = 1. \quad (4.5)$$

A estabilidade desses pontos é avaliada usando os critérios definidos no final da seção 3.3. De modo semelhante ao que vimos no caso harmônico, nas figuras 5-D, 5-E e 5-F, vemos que, na fase escaladora, a partícula tende a percorrer os pontos fixos estáveis.

Na seção 3.2 vimos que a fase orbital está associada a soluções não constantes do sistema dinâmico, sendo essas soluções atratoras, às quais iremos nos referir simplesmente por atratores, ou atratores periódicos (dado que são órbitas fechadas no plano xy). No caso harmônico, encontramos um atrator circular com raio dependente do parâmetro τ_n . No entanto, para o potencial elíptico e o biestável, diferentes tipos de atratores foram encontrados. Uma observação relevante é que os atratores encontrados surgem em pares e, para valores razoáveis de ruído, a trajetória da partícula é influenciada por ambos. Para

Figura 5 – Em azul e vermelho temos respectivamente os pontos fixos instáveis e estáveis do sistema. Em roxo temos a trajetória da partícula. Nas figuras A, B e C vemos exemplos da fase orbital, enquanto que, nas figuras D, E e F vemos exemplos da fase escaladora. Em todas as simulações consideramos $D = 0,01$.

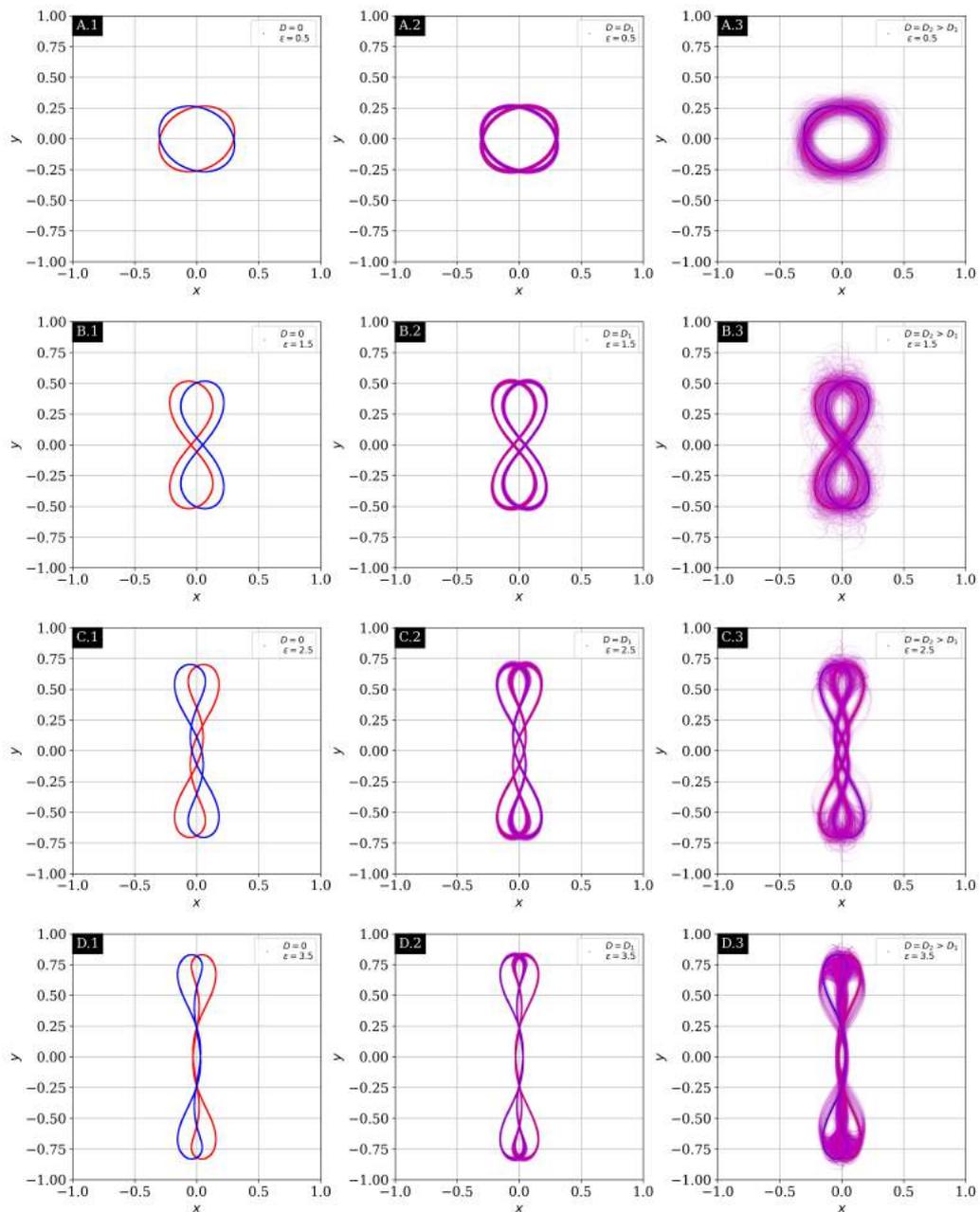


Fonte: O autor (2020)

obtermos os atratores do sistema dinâmico, integramos as equações (3.52), (3.53) e (3.54) usando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com passo $dt = 0,01$. O tempo total de simulação foram 4000 unidades de tempo, onde metade do tempo foi para garantir que o sistema já esteja no atrator. Os parâmetros de simulação acima foram usados para obter todos os atratores encontrados nesta dissertação.

Os atratores presentes na figura 6-A.1 representam a primeira classe de atratores encontrados. São semelhantes a elipses no plano xy e, como veremos adiante, para altos valores de τ_n são os únicos atratores possíveis. Para valores moderados e baixos de τ_n , com o aumento do parâmetro ε outros tipos de atratores foram encontrados. Embora distintos, os demais atratores têm algumas similaridades. As órbitas passam a ser mais alongadas paralelamente ao eixo y e estreitas paralelamente ao eixo x . Em um número considerável de casos observamos a formação de nós. Os atratores presentes nas figuras 6-B.1, 6-C.1 e 6-D.1 parecem indicar que o aumento do número de nós está relacionado ao aumento no valor do parâmetro ε . Embora tenhamos identificado esse padrão de crescimento para alguns valores de τ_n fixo, principalmente para valores pequenos, observamos casos onde isso não ocorre. Entretanto, observamos que após o padrão de elipses, mantendo τ_n fixo e

Figura 6 – Em azul e vermelho temos os atratores periódicos do sistema dinâmico descrito pelas equações (4.1), (4.2) e (4.3) para $\tau_n = 0, 1$. Na coluna 1 ($D = 0$) temos os atratores periódicos. Nas colunas 2 e 3, sobreposto em magenta, temos a trajetória realizada pela partícula $D = D_1$, e $D_2 > D_1$ respectivamente. Para $D = 0$, dependendo das condições iniciais, a partícula é atraída e passa a realizar a órbita em azul ou em vermelho, comportamento semelhante ao ciclo limite estável usado como exemplo na seção 2.1.2. Para $D > 0$ (colunas 2 e 3) a partícula também é atraída, porém, pode se afastar das órbitas devido ao ruído. Os valores de D_1 e D_2 foram ajustados em cada linha para uma melhor visualização, sendo D_1 e D_2 da ordem de 10^{-5} e 10^{-3} respectivamente.



Fonte: O autor (2020)

aumentando ε o padrão seguinte de atratores tem um único nó.

4.1.1 Estabilidade das fases

Nesta subsecção, estamos interessados em estudar no plano (ε, τ_n) regiões onde as fases são instáveis, isto é, inacessíveis ao sistema. A fase escaladora está associada à existência de pontos fixos estáveis. Portanto, se todos os pontos fixos do sistema forem instáveis, então a fase escaladora se torna inacessível. Com o objetivo de obter essa região, vamos usar os critérios para a estabilidade de pontos fixos desenvolvidos na seção 3.3.

As equações (3.102) e (3.103) relacionam a estabilidade de um ponto fixo (x_f, y_f) com os valores de τ_n e ε . Considerando o potencial elíptico, obtemos as seguintes relações.

$$\tau_n < \frac{1}{(2 + \varepsilon)} \implies \text{instabilidade} \quad (4.6)$$

$$\tau_n > \frac{1}{2 + \varepsilon} \text{ e } \begin{cases} \tau_n < \frac{y_f^2 + (1 + \varepsilon)^3 x_f^2}{(1 + \varepsilon)} \implies \text{instabilidade} \\ \tau_n > \frac{y_f^2 + (1 + \varepsilon)^3 x_f^2}{(1 + \varepsilon)} \implies \text{estabilidade} \end{cases} \quad (4.7)$$

Na inequação (4.6) vemos que se $\tau_n < \frac{1}{(2+\varepsilon)}$, então, qualquer par (x_f, y_f) é instável. Entretanto, esta região pode ser apenas um subconjunto da região que procuramos. Para verificar esta possibilidade, iremos assumir que $\tau_n > \frac{1}{2+\varepsilon}$, e utilizar a condição presente na equação (4.7). Vamos por simplicidade definir

$$\epsilon \equiv (1 + \varepsilon) \quad (4.8)$$

$$\tau_c(x_f, y_f) \equiv \frac{y_f^2 + (1 + \varepsilon)^3 x_f^2}{(1 + \varepsilon)} = \frac{y_f^2 + \epsilon^3 x_f^2}{\epsilon} \quad (4.9)$$

Para $\tau_n > \frac{1}{2+\varepsilon}$ temos que:

- Se $\tau_n > \tau_c(x_f, y_f)$, então, o par (x_f, y_f) é estável.
- Se $\tau_n < \tau_c(x_f, y_f)$, então, o par (x_f, y_f) é instável.

Sejam τ_c^{max} e τ_c^{min} respectivamente o valor máximo e mínimo de $\tau_c(x_f, y_f)$, então:

- Se $\tau_n > \tau_c^{max}$, então, todos os pontos fixos são estáveis.
- Se $\tau_n < \tau_c^{min}$, então, todos os pontos fixos são instáveis.
- Se $\tau_c^{min} < \tau_n < \tau_c^{max}$, então, temos pontos fixos estáveis e instáveis.

Para encontrar τ_c^{max} e τ_c^{min} , usaremos o método dos multiplicadores de Lagrange. Precisamos calcular os pontos críticos de $\tau_c(x_f, y_f)$ com o vínculo $\epsilon^2 x_f^2 + y_f^2 - 1 = 0$. Isto é o mesmo que calcular os pontos críticos da função de 3 variáveis

$$T(x_f, y_f, \lambda) = \frac{y_f^2 + \epsilon^3 x_f^2}{\epsilon} + \lambda (\epsilon^2 x_f^2 + y_f^2 - 1), \quad (4.10)$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange. Para que uma tripla (x_f, y_f, λ) seja ponto crítico ela deve satisfazer,

$$\frac{\partial T}{\partial x_f} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y_f} = 0, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda} = 0. \quad (4.12)$$

Calculando as derivadas temos:

$$\frac{\partial T}{\partial x_f} = 2\epsilon^2 x_f (1 + \lambda), \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y_f} = 2y_f \left(\frac{1}{\epsilon} + \lambda\right), \quad \frac{\partial T}{\partial \lambda} = (\epsilon^2 x_f^2 + y_f^2 - 1). \quad (4.14)$$

Aplicando a condição para as derivadas e simplificando temos:

$$x_f(1 + \lambda) = 0. \quad (4.15)$$

$$y_f \left(\frac{1}{\epsilon} + \lambda\right) = 0. \quad (4.16)$$

$$(\epsilon^2 x_f^2 + y_f^2 - 1) = 0. \quad (4.17)$$

Caso 1: Se $x_f \neq 0$, então, da equação (4.15), $\lambda = -1$, e da equação (4.16) $y_f = 0$. Substituindo agora esses resultados na equação (4.17) temos que $x_f = \pm \frac{1}{\epsilon}$. Portanto, o ponto crítico para o caso 1 é $(\frac{1}{\epsilon}, 0)$. Por fim, substituindo na equação (4.10) temos que:

$$T_1 \equiv T\left(\pm \frac{1}{\epsilon}, 0, \lambda\right) = \frac{1}{\epsilon} \left(0^2 + \epsilon^3 \frac{1}{\epsilon^2}\right) \\ T_1 = 1. \quad (4.18)$$

Caso 2: Se $y_f \neq 0$, realizando procedimento análogo ao caso 1, obtemos que $\lambda = -\frac{1}{\epsilon}$, $x_f = 0$ e $y_f = \pm 1$. Substituindo na equação (4.10) temos que:

$$T_2 \equiv T(0, \pm 1, \lambda) = \frac{1}{\epsilon} (1 + 0^2) \\ T_2 = \frac{1}{\epsilon}. \quad (4.19)$$

Obtivemos, então, os valores máximos e mínimos de $T(x_f, y_f, \lambda)$ que são os mesmos de $\tau_c(x_f, y_f)$ com o vínculo,

$$\tau_c^{max} = 1, \quad \tau_c^{min} = \frac{1}{1 + \varepsilon}. \quad (4.20)$$

Com isto concluímos que:

- Se $\tau_n > 1$, então, todos os pontos fixos são estáveis.
- Se $\tau_n < \frac{1}{1 + \varepsilon}$, então, todos os pontos fixos são instáveis.
- Se $\frac{1}{1 + \varepsilon} < \tau_n < 1$, então, temos pontos fixos estáveis e instáveis.

Sendo assim, a região onde $\tau_n < \frac{1}{1 + \varepsilon}$ não possui nenhum ponto fixo estável e, portanto, a fase escaladora não é possível nessa região. Observe que, de fato, a região $\tau_n < \frac{1}{2 + \varepsilon}$ está contida na região $\tau_n < \frac{1}{1 + \varepsilon}$.

Outro resultado importante, trata-se da instabilidade da fase orbital para $\tau_n > 1$. Para mostrar isso, vamos primeiramente escrever as equações do sistema dinâmico em sua forma completamente vetorial. A equação de autoalinhamento em termos do versor \mathbf{n} é dada pela equação (1.4)

$$\tau \dot{\mathbf{n}} = \zeta(\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{n} + \sqrt{2\beta\xi} \mathbf{n}_\perp.$$

Substituindo $(\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{n} = \mathbf{v} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n}$ em sua versão adimensional, e tornando $D = 0$, o sistema dinâmico é dado por

$$\mathbf{v} = \mathbf{n} - \nabla V, \quad (4.21)$$

$$\tau_n \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{v} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n}. \quad (4.22)$$

Derivando em relação a t a equação (4.21) e usando que $\nabla V = -\mathbf{F}$ temos,

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{n}} + \dot{\mathbf{F}}.$$

Porém,

$$\dot{\mathbf{F}} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{F},$$

de modo que a equação se torna:

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{n}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{F}. \quad (4.23)$$

Fazendo o produto escalar por \mathbf{v} nas equações (4.22) e (4.23) obtemos:

$$\tau_n \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{n}} = v^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})^2, \quad (4.24)$$

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}(\dot{v}^2) = \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{n}} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{F}. \quad (4.25)$$

Da equação (4.24) temos que

$$\tau_n \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{n}} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})^2 = v^2.$$

onde $v^2 = |\mathbf{v}|^2$. Sendo assim,

$$\tau_n \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{n}} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_\perp)^2.$$

Logo, deve satisfazer

$$0 \leq \tau_n \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{n}} \leq v^2. \quad (4.26)$$

Substituindo (4.24) na equação (4.25) chegamos na seguinte inequação.

$$0 \leq \frac{\tau_n}{2}(\dot{v}^2) - \tau_n \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{F} \leq v^2. \quad (4.27)$$

Para o potencial elíptico temos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{F} &= \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) [-(1 + \varepsilon)x \mathbf{e}_x - y \mathbf{e}_y] \\ &= \mathbf{v} \cdot \{[-(1 + \varepsilon)v_x] \mathbf{e}_x - y v_y \mathbf{e}_y\} \\ &= -(v_x^2 + v_y^2 + \varepsilon v_x^2) \\ \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{F} V &= -(v^2 + \varepsilon v_x^2). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Consequentemente, a inequação (4.27) se torna:

$$0 \leq \frac{\tau_n}{2} \dot{v}^2 + \tau_n v^2 + \tau_n \varepsilon v_x^2 \leq v^2,$$

o que implica em

$$-\tau_n v^2 \leq \frac{\tau_n}{2} \dot{v}^2 + \tau_n \varepsilon v_x^2 \leq (1 - \tau_n) v^2. \quad (4.29)$$

Como τ_n , ε , v_x^2 e v^2 são sempre positivos, a equação (4.29) garante que se $\tau_n > 1$,

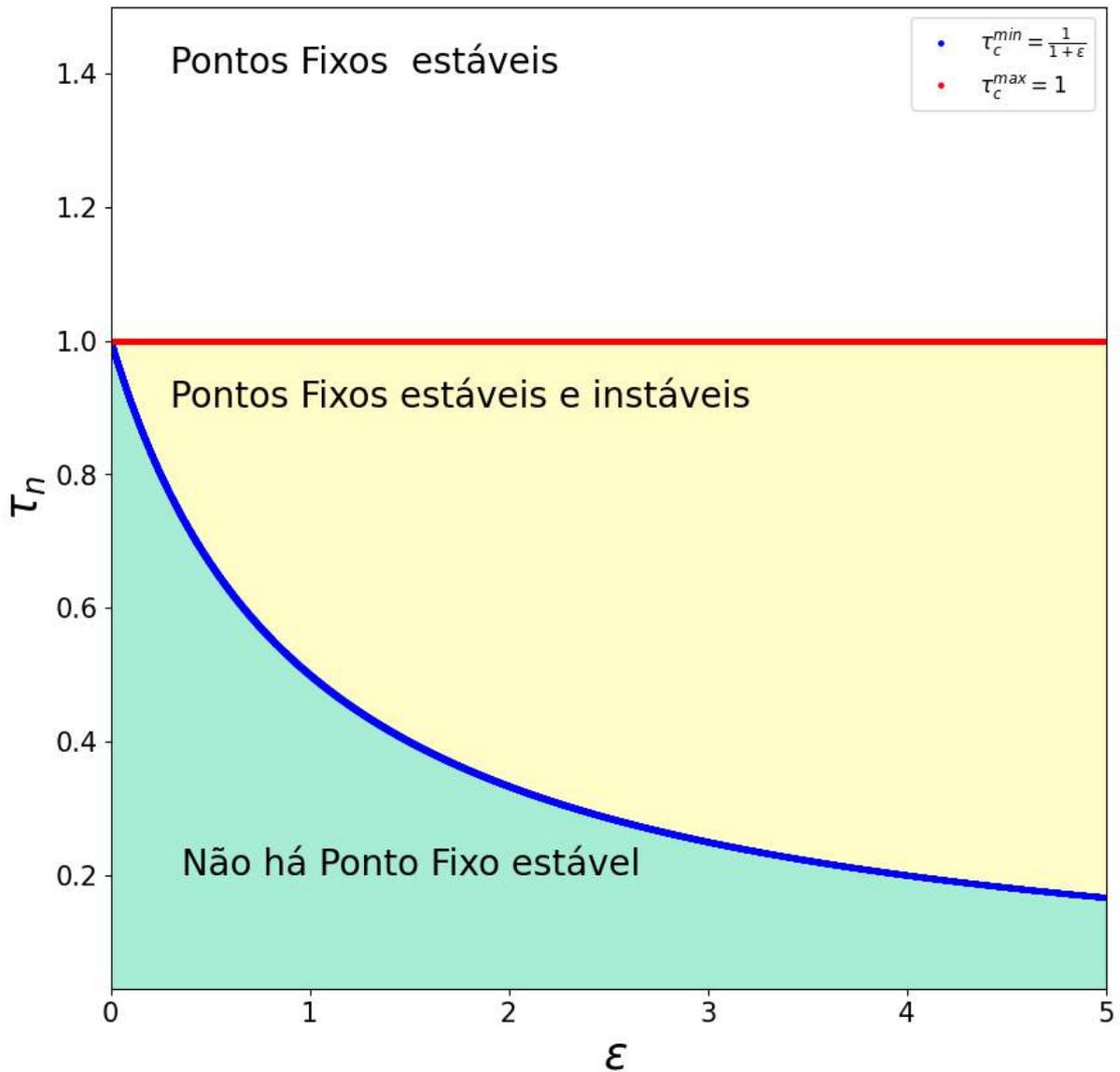
$$-\tau_n v^2 \leq \frac{\tau_n}{2} \dot{v}^2 + \tau_n \varepsilon v_x^2 \leq -(\tau_n - 1) v^2.$$

Isto é, certamente, $\dot{v}^2 < 0$, em todo plano (x, y) e, portanto, nessas condições devemos ter

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{v}| = 0,$$

o que indica que a partícula estará repousando em um ponto fixo estável. Em resumo, podemos dividir o plano (ε, τ_n) em três regiões. Uma região onde a fase escaladora é impossível ($\tau_n < \frac{1}{1+\varepsilon}$), uma onde não há restrição sobre nenhuma fase ($\frac{1}{1+\varepsilon} < \tau_n < 1$) e, por fim, uma terceira região onde apenas a fase escaladora é possível ($\tau_n > 1$). Esse plano (ε, τ_n) é mostrado na figura 7.

Figura 7 – Diagrama de fases para a dinâmica de uma partícula autopropelida em potencial elíptico. Abaixo da curva $\tau_c^{min} = 1/(1 + \varepsilon)$, em azul, a fase escaladora não é possível, acima da curva τ_c^{max} , em vermelho, apenas a fase escaladora é possível. Por fim, na região intermediária $\tau_c^{min} < \varepsilon < \tau_c^{max} = 1$, não existem restrições.



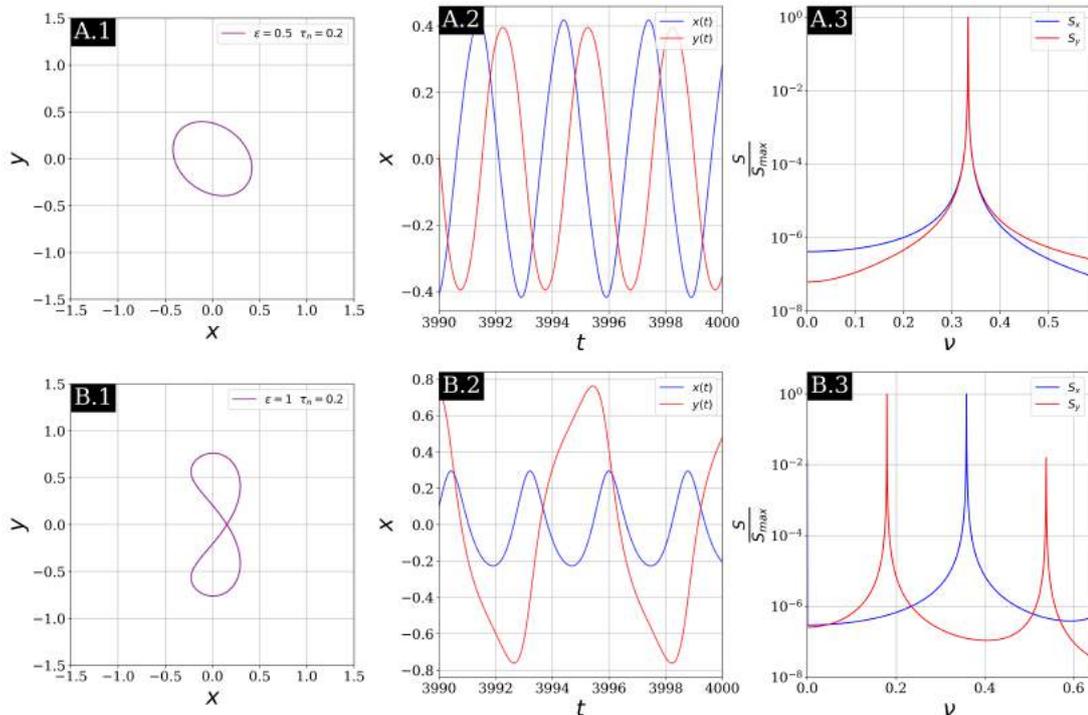
Fonte: O autor (2020)

4.2 CLASSIFICAÇÃO DOS ATRADORES PERIÓDICOS

A fase orbital pode ser caracterizada mais detalhadamente em termos dos atratores periódicos classificados pela razão entre os períodos associados ao movimentos ao longo de x e de y .

Primeiramente, considere T_x como o período de $x(t)$ e T_y o período de $y(t)$, definindo como T_{xy} razão entre o período das variáveis $x(t)$ e $y(t)$, $T_{xy} = \frac{T_x}{T_y}$. Para o nosso sistema, observamos existência de atratores com $T_x = T_y$ ($T_{xy} = 1$), e atratores com $2T_x = T_y$ ($T_{xy} = 0,5$). Os atratores onde $T_{xy} = 1$ e $T_{xy} = 0,5$ serão nomeados

Figura 8 – Nas figuras acima temos o comportamento das variáveis x e y em função do tempo (coluna 2) e os seus espectros de potências $S_x(\nu)/S_{xmax}$ e $S_y(\nu)/S_{ymax}$ (coluna 3) para dois tipos de atratores, onde ν representa frequência. É perceptível tanto no gráfico da evolução temporal quanto no espectro de potência que que $T_{xy} = 1$ para o atrator em A, e $T_{xy} = 0,5$ para o atrator em B.



Fonte: O autor (2020)

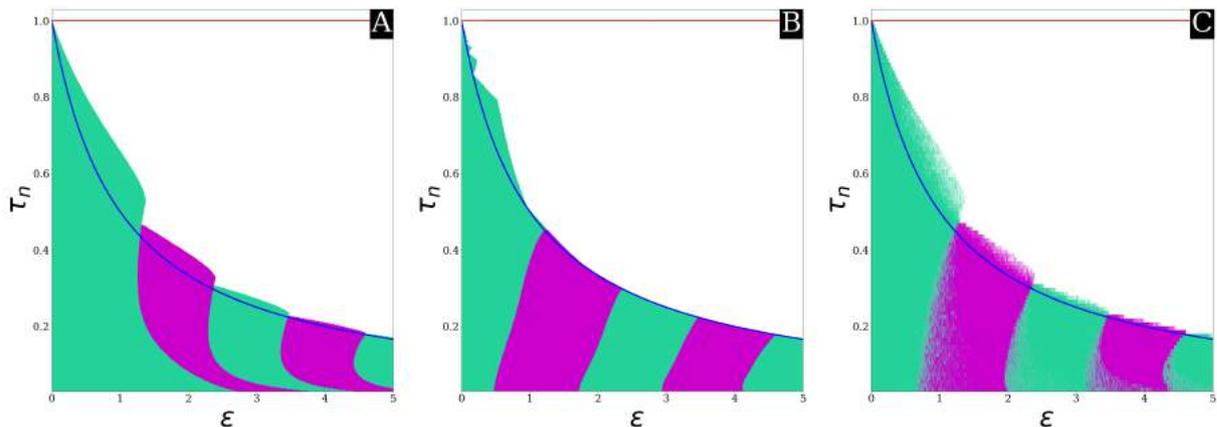
por atratores de período simples e duplo respectivamente. Na figura 8 vemos de forma mais detalhada as características de um atrator de período simples e de período duplo. A obtenção da fração T_{xy} foi feita analisando o espectro de potência de cada variável. Os espectros de potência presentes nesta dissertação foram obtidos usando o algoritmo de Transformadas Rápidas de Fourier (Fast Fourier Transform) presente na biblioteca GSL (GALASSI; GOUGH, 2009). Vale salientar que, a partir de agora, quando nos referirmos a um “atrator de período simples ou duplo” estaremos nos referindo ao par de atratores, como os presentes na figura 6, que satisfazem $T_{xy} = 1$ ou $T_{xy} = 0,5$. Um resultado importante é que um mesmo ponto no plano (ε, τ_n) pode ter mais de um atrator periódico acessível, diferentemente do caso harmônico, onde tínhamos apenas um atrator possível. As condições iniciais nesse caso passam a ser importantes, pois órbitas diferentes podem ser acessadas dependendo delas. Para investigar a disposição dos atratores periódicos no plano (ε, τ_n) , e tentar estudar que pontos admitem apenas órbitas de período simples, apenas órbitas de período duplo, ou órbitas de ambos os tipos realizamos no plano (ε, τ_n) três tipos de varreduras. Na região retangular $[0, 5] \times [0.03, 1]$, onde $0 \leq \varepsilon \leq 5$ e $0.03 \leq \tau_n \leq 1$.

- Varredura do tipo A: tomando uma linha com τ_n fixo e partindo de $\varepsilon = 0$, a cada

incremento $d\varepsilon$ tomamos como condição inicial o ponto (espaço de fase) onde a partícula parou na simulação anterior, isto é, condição inicial de $(\varepsilon + d\varepsilon, \tau_n)$ é onde a partícula parou em (ε, τ_n) .

- Varredura do tipo B: semelhante a do tipo A, entretanto, partimos de $\varepsilon = 5$ e vamos até $\varepsilon = 0$, a condição inicial do ponto $(\varepsilon - d\varepsilon, \tau_n)$ é onde a partícula parou em (ε, τ_n) .
- Varredura do tipo C: para cada par (ε, τ_n) sorteamos aleatoriamente condições iniciais.

Figura 9 – Em A, B e C temos respectivamente as varreduras do tipo A, B e C descritas no texto. A cor branca representa pontos onde o sistema evoluiu para um de seus pontos fixos e, portanto, representam a fase escaladora. As cores verde e magenta representam os pontos onde obtivemos trajetórias de período simples e duplo respectivamente. Em especial, na varredura do tipo C, a sobreposição de cores indica que mais de um tipo de periodicidade ocorreu. Nesse caso, a cor predominante indica qual das fases ocorreu mais vezes. As curvas τ_c^{max} e τ_c^{min} , obtidas na seção 4.1.1, estão, respectivamente, marcadas em vermelho e azul.



Fonte: O autor (2020)

Varreduras do tipo A e B fazem com que o ponto de partida do sistema dinâmico atual seja o atrator periódico ao qual o sistema do ponto anterior ($(\varepsilon - d\varepsilon, \tau_n)$ varredura do tipo A, ou $(\varepsilon + d\varepsilon, \tau_n)$ varredura do tipo B) estava preso. Sendo assim, se no ponto atual existir um atrator periódico do mesmo tipo, então, o sistema iniciará próximo a ele. Para as varreduras do tipo A e B, consideramos os incrementos $d\varepsilon = d\tau_n = 0.0027$, enquanto que para a varredura do tipo C, consideramos $d\varepsilon = d\tau_n = 0.01$. Os mesmos incrementos foram usados para as varreduras presentes no capítulo 5. Nas figuras 9-A e 9-B observamos o prolongamento das regiões no sentido da varredura. Dado esse comportamento, a depender do valor de $d\varepsilon$, os pontos onde cada tipo de atrator deixa de ser acessado na figura 9-A se tornam uma boa aproximação para os pontos $(\varepsilon_c^{sup}(\tau_n), \tau_n)$, pontos onde o atrator periódico deixa de ser estável. De forma análoga, na figura 9-B, os pontos onde cada atrator passa a ser acessado se tornam uma aproximação para os pontos $(\varepsilon_c^{inf}(\tau_n), \tau_n)$, pontos onde o atrator periódico passa a ser estável. Vale destacar que na figura 9-B a aproximação de onde a fase escaladora torna-se estável condiz com o resultado

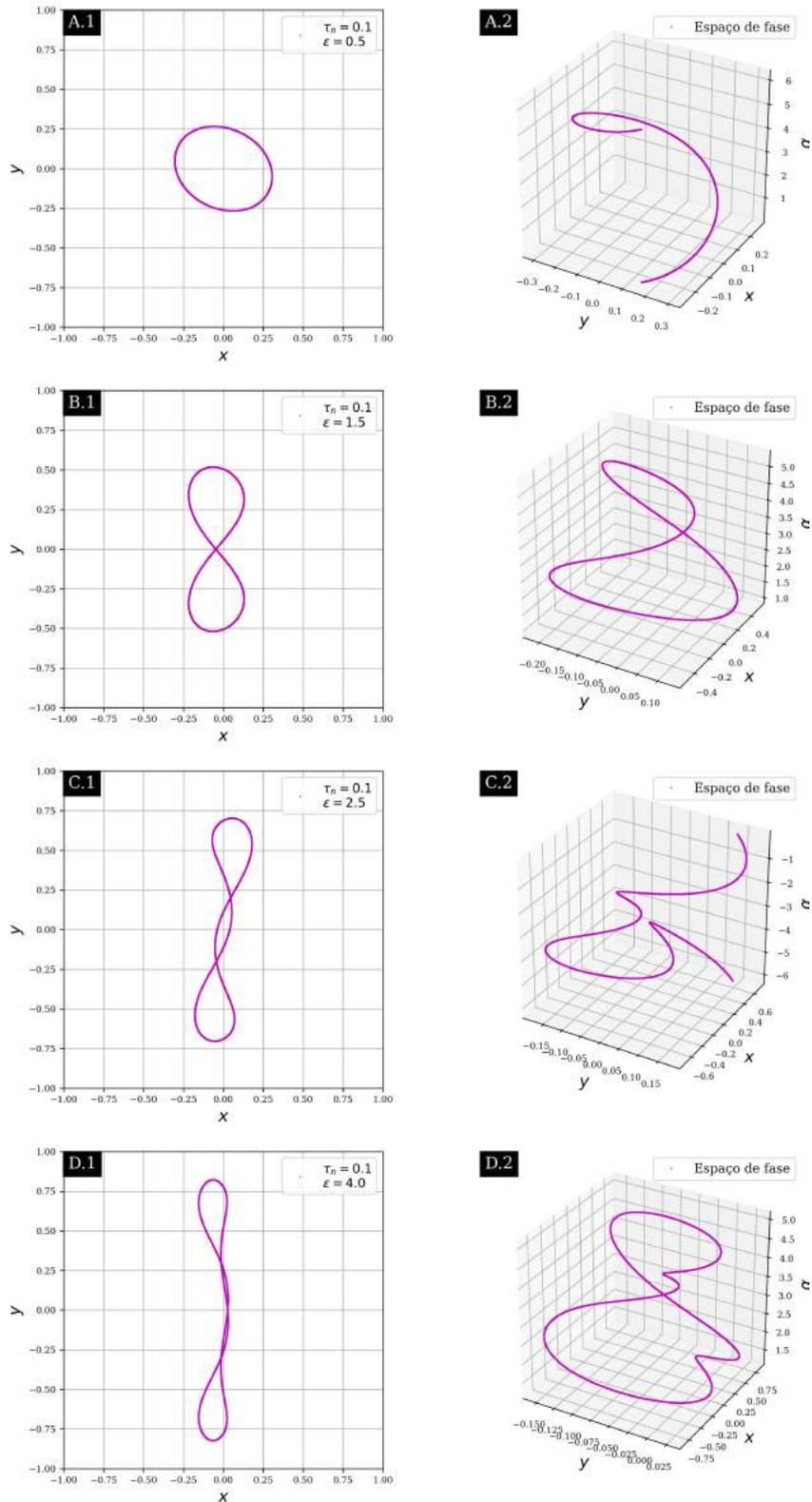
analítico. Na varredura do tipo C (figura 9-C), podemos observar as regiões onde dois atratores são simultaneamente estáveis, bem como, regiões robustas onde apenas um tipo de atrator é possível. Note que se tomarmos como início da estabilidade de um atrator os pontos $(\varepsilon_c^{inf}(\tau_n), \tau_n)$ obtidos na varredura do tipo B, e como fim da estabilidade os pontos $(\varepsilon_c^{sup}(\tau_n), \tau_n)$ obtidos na varredura do tipo A, teríamos uma região de sobreposição maior em relação ao que observamos na varredura do tipo C. Isso indica que o número de condições iniciais que levam o sistema ao atrator, diminui próximo ao seu limite de estabilidade. Vale salientar que, temos diferentes padrões de órbitas com período simples e duplo. Por exemplo, nas figuras 6-A e 6-C os atratores são de período simples, enquanto que, nas figuras 6-B e 6-D são de período duplo.

Nas varreduras obtivemos pontos que não puderam ser caracterizados como de período simples ou duplo. Esses pontos constam nas varreduras e estão localizados praticamente na linha de transição. Investigamos individualmente alguns desses pontos e suas trajetórias são similares as de sua vizinhança, o que indica que tratam-se de erros causados pela falta de precisão do algoritmo implementado. Os pontos constam nas varreduras (em preto) e como pode-se observar são minoria absoluta.

4.2.1 Comportamento do ângulo de orientação

De modo semelhante às variáveis x e y , o ângulo de orientação α também apresenta dinâmicas distintas no plano (ε, τ_n) . Simultaneamente as trocas de periodicidade dos atratores, verificamos que o ângulo de orientação apresenta duas fases dinâmicas: rotação e libração. Na fase de rotação o vetor \mathbf{n} dá uma volta completa (2π) ao longo de uma órbita completa no plano xy , enquanto que na libração o vetor oscila sem girar completamente. Nos moldes do que definimos na seção anterior, para atratores de período simples a dinâmica da variável α é a de rotação, enquanto que, para atratores de período duplo sua dinâmica é de libração. Note que no caso harmônico resolvido analiticamente (seção 3.2) obtivemos como solução $\alpha = \omega t$, que se encontra na fase de rotação. Na figura 10 reduzimos a variável α ao intervalo $[0, 2\pi]$ e traçamos os atratores de duas formas: na primeira traçamos sua projeção no plano xy , e na segunda sua forma no espaço de fase (3D). Na fase rotação α está definido em todo intervalo $[0, 2\pi]$ e nas figuras 10-A.2 e 10-C.2 temos a trajetória realizada em um período. Na fase de libração (figuras 10-B.2 e 10-D.2) α oscila em torno de alguns valores no intervalo $[0, 2\pi]$, resultando em curvas fechadas no espaço de fase. Em resumo, no espaço de fase $[x, y, \alpha]$, os atratores de período simples são curvas abertas em $\alpha_0 \leq \alpha < \infty$ ou $-\infty < \alpha < \alpha_0$, onde α_0 é o ângulo inicial. Por outro lado, para a fase de libração temos curvas fechadas.

Figura 10 – Nas figuras acima temos a projeção dos atratores no plano xy (coluna 1) e o atrator no espaço de fase (coluna 2). Como citado no texto, α tem dinâmica de rotação para atratores de período simples, como ilustrado em A e C, e dinâmica de libração para atratores de período duplo, como ilustrado em B e D. Na dinâmica de rotação, temos uma curva periódica no espaço de fase, corroborando que o versor de orientação dá uma volta completa em conjunto com a órbita do atrator.



Fonte: O autor (2020)

Como último resultado, é possível mostrar, de forma simples, que o sistema dinâmico admite duas soluções. Para isso, suponha que $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + \alpha(t)\mathbf{e}_\alpha$ é solução do sistema dinâmico descrito pelas equações (4.1) - (4.3). Substituindo $\mathbf{r}' = x'(t)\mathbf{e}_x + y'(t)\mathbf{e}_y - \dot{\alpha}(t)\mathbf{e}_\alpha$ nas equações obtemos que:

$$\begin{aligned}\dot{x}' &= \cos(\alpha) - (1 + \varepsilon)x', \\ \dot{y}' &= -\sin(\alpha) - y', \\ -\tau_n \dot{\alpha} &= -(1 + \varepsilon)x' \sin(\alpha) + y' \cos(\alpha).\end{aligned}$$

O que implica que, se $x'(t) = x(t)$ e $y'(t) = -y(t)$, então $\mathbf{r}' = x(t)\mathbf{e}_x - y(t)\mathbf{e}_y - \dot{\alpha}(t)\mathbf{e}_\alpha$ é solução e tem relação com \mathbf{r} . Esse resultado pode ser melhor visualizado considerando a fase de rotação da variável α . Nessa fase temos uma solução para cada sentido de rotação.

O resultado obtido acima vale para o potencial harmônico (basta fazer $\varepsilon = 0$). Acreditamos que as inversões no sentido de circulação observadas por Dauchot e Démary (DAUCHOT; DÉMERY, 2019) na fase orbital ocorram devido a troca de sentido na rotação do ângulo de orientação. Isto é, o efeito do ruído faz com que α deixe de rotacionar no sentido positivo ($\alpha > 0$) e passe a rotacionar no sentido negativo $\alpha < 0$, nesse caso específico, invertendo também a circulação no plano xy .

5 DINÂMICA PARA O POTENCIAL BIESTÁVEL

Neste capítulo, vamos estudar a dinâmica da partícula autopropelida considerando o potencial biestável. Na seção 5.1 estudaremos os pontos de máximo e mínimo do potencial. Na seção 5.2 estudaremos o comportamento da fase escaladora e orbital para o potencial e, analogamente ao que foi feito na seção 4.1, construiremos um diagrama de fase.

5.1 POTENCIAL BIESTÁVEL

O potencial biestável tem a seguinte forma:

$$V(x, y) = \frac{\kappa}{2} (x^2 + y^2) + \kappa L_0^2 \varepsilon e^{-\frac{x^2}{L_0^2}}. \quad (5.1)$$

Podemos interpretar o potencial como uma perturbação gaussiana no potencial harmônico. Na equação (5.1) temos o coeficiente κ que representa a rigidez do potencial harmônico, o coeficiente ε , que está relacionado com a intensidade da perturbação e, por fim, a constante L_0 que tem dimensão de espaço e torna adimensional o argumento na exponencial. A principal característica do potencial é sua deformação com a evolução do parâmetro ε . No princípio, temos um único mínimo local situado na origem $(0,0)$. Acima de $\varepsilon = \varepsilon_c$ passamos a ter um ponto de sela na origem e outros dois pontos de mínimos, simétricos em torno de y como veremos a seguir.

Caso existam, os pontos críticos satisfazem as seguintes condições:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x^*, y^*) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y}(x^*, y^*) = 0. \quad (5.2)$$

Portanto, buscamos por pontos (x^*, y^*) que satisfaçam as equações acima. Começando pela condição para a derivada em y :

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x^*, y^*) = \kappa y^* = 0, \implies y^* = 0. \quad (5.3)$$

Consequentemente, $y = 0$ é ponto crítico do potencial. Realizando o mesmo procedimento para a derivada parcial em x , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x}(x^*, y^*) &= \kappa x^* - 2\kappa \varepsilon x^* e^{-\frac{x^{*2}}{L_0^2}} = \kappa x^* \left(1 - 2\varepsilon e^{-\frac{x^{*2}}{L_0^2}} \right) \\ \frac{\partial V}{\partial x}(x^*, y^*) &= \kappa x^* \left(1 - 2\varepsilon e^{-\frac{x^{*2}}{L_0^2}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

portanto, $x^* = 0$ ou $\left(1 - 2\varepsilon e^{-\frac{x^{*2}}{L_0^2}} \right) = 0$.

$$\left(1 - 2\varepsilon e^{-\frac{x^{*2}}{L_0^2}} \right) = 0 \implies e^{-\frac{x^{*2}}{L_0^2}} = \frac{1}{2\varepsilon} \implies \frac{-x^{*2}}{L_0^2} = \ln \left(\frac{1}{2\varepsilon} \right).$$

Consequentemente,

$$x^* = \pm L_0 \sqrt{\ln(2\varepsilon)}, \quad (5.5)$$

que existem apenas para $\varepsilon > \frac{1}{2}$. Chegamos aos seguintes pontos críticos:

$$\begin{cases} (0, 0) & \text{se } \varepsilon < \frac{1}{2} \\ (0, 0), (\pm L_0 \sqrt{\ln(2\varepsilon)}, 0) & \text{se } \varepsilon > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vamos agora investigar se os pontos críticos são pontos de máximo, mínimo ou sela. Para isso, faremos o teste da segunda derivada. Para o nosso potencial temos:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x^*, y^*) \equiv V_{xx}(x^*, y^*) = \kappa - 2\kappa\varepsilon e^{\frac{-x^{*2}}{L_0^2}} + \frac{4\kappa\varepsilon}{L_0^2} x^{*2} e^{\frac{-x^{*2}}{L_0^2}}, \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x^*, y^*) \equiv V_{yy}(x^*, y^*) = \kappa, \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(x^*, y^*) \equiv V_{xy}(x^*, y^*) = 0, \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}(x^*, y^*) \equiv V_{yx}(x^*, y^*) = 0, \quad (5.9)$$

$$H = \det \begin{bmatrix} V_{xx}(x^*, y^*) & V_{xy}(x^*, y^*) \\ V_{yx}(x^*, y^*) & V_{yy}(x^*, y^*) \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

$$H = V_{xx}V_{yy} - \underbrace{V_{xy}V_{yx}}_{=0} = \kappa V_{xx}. \quad (5.11)$$

Obtemos então que o valor de H depende apenas do valor de V_{xx} , $H = \kappa V_{xx}$. Como κ é sempre positivo, teremos que:

- Se $V_{xx}(x^*, y^*) > 0$, então, $V(x^*, y^*)$ é mínimo local, logo (x^*, y^*) é ponto de mínimo.
- Se $V_{xx}(x^*, y^*) < 0$, então, $V(x^*, y^*)$ não é ponto de máximo nem de mínimo, portanto, (x^*, y^*) é ponto de sela.

Por fim, basta calcular o valor de $V_{xx}(x^*, y^*)$, para os pontos críticos obtidos anteriormente. Começando pelo ponto $(x^*, y^*) = (0, 0)$, temos que:

$$V_{xx}(0, 0) = \kappa(1 - 2\varepsilon). \quad (5.12)$$

Logo,

- Se $\varepsilon < \frac{1}{2}$, então $V_{xx}(0, 0) > 0$.

- Se $\varepsilon > \frac{1}{2}$, então, $V_{xx}(0, 0) < 0$.

Verificamos então que o ponto $(0, 0)$ é ponto de mínimo se $\varepsilon < \frac{1}{2}$, porém torna-se ponto de sela quando $\varepsilon > \frac{1}{2}$. Vamos repetir o procedimento para os pontos $(x^*, y^*) = (\pm L_0 \sqrt{\ln(2\varepsilon)}, 0)$.

$$V_{xx} \left(\pm L_0 \sqrt{\ln(2\varepsilon)}, 0 \right) = \underbrace{\kappa - 2\kappa\varepsilon \left(\frac{1}{2\varepsilon} \right)}_{\kappa - \kappa = 0} + \frac{4\kappa\varepsilon}{L_0^2} L_0^2 \left(\frac{1}{2\varepsilon} \right) \ln(2\varepsilon)$$

$$V_{xx} \left(\pm L_0 \sqrt{\ln(2\varepsilon)}, 0 \right) = 2\kappa \ln(2\varepsilon). \quad (5.13)$$

Como $\varepsilon > \frac{1}{2}$ é condição para a existência para os pontos então

$$2\kappa \ln(2\varepsilon) > 0. \quad (5.14)$$

Portanto, os pontos $(x^*, y^*) = (\pm L_0 \sqrt{\ln(2\varepsilon)}, 0)$, quando existem, são mínimos locais. Em $\varepsilon = 1/2$ ocorre a bifurcação dos pontos de máximo e mínimo do potencial. Substituindo os pontos críticos no potencial obtemos

$$V(0, 0) = \kappa L_0^2 \varepsilon, \quad V \left(\pm L_0 \sqrt{\ln(2\varepsilon)}, 0 \right) = \frac{\kappa L_0^2}{2} (\ln(2\varepsilon) + 1). \quad (5.15)$$

Note que o potencial cresce linearmente com ε na origem e de forma logarítmica com os pontos $(x^*, y^*) = (\pm L_0 \sqrt{\ln(2\varepsilon)}, 0)$.

5.2 FASE ESCALADORA E ORBITAL NO POTENCIAL BIESTÁVEL

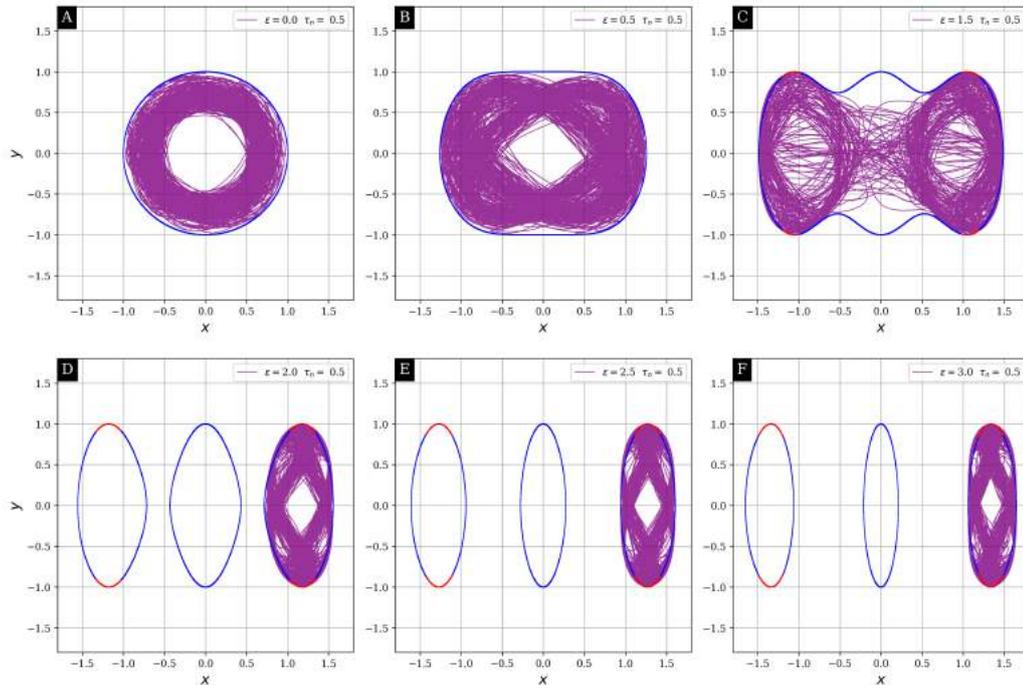
Nesta seção, vamos descrever o comportamento das fases escaladora e orbital para o potencial biestável. As equações do modelo são dadas pelas equações (3.22), (3.23) e (3.24), para a versão adimensional do potencial

$$V(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \varepsilon e^{-x^2}. \quad (5.16)$$

Diferente do potencial elíptico, em que o fator perturbativo transformava os círculos equipotenciais em elipses, a atuação da perturbação gaussiana presente no potencial pode ser dividida em duas partes: para $\varepsilon < \frac{1}{2}$ deforma as curvas equipotenciais, mas mantendo potencial atrativo em todos os pontos, e para $\varepsilon > \frac{1}{2}$ torna a região em torno da origem repulsiva, eventualmente criando uma barreira de potencial separando dois poços de potencial.

Nas figuras 11-(A-F) e 12-(A-F), vemos o reflexo desse comportamento para a partícula autopropelida. Independente da fase dinâmica (escaladora ou orbital), para ε grande, a partícula permanece em apenas um dos poços. Embora o surgimento dos novos pontos de mínimo seja instantâneo, o mesmo não ocorre com o processo de confinamento.

Figura 11 – Trajetórias da partícula autopropelida obtidas integrando as equações (3.22), (3.23) e (3.24) para o potencial biestável definido na equação (5.16) para $\tau_n = 0.5$, $D = 0,01$ e alguns valores de ε . Em magenta temos as trajetórias da partícula. Em azul e vermelho temos a projeção dos pontos fixos instáveis e estáveis no plano xy respectivamente. Com o crescimento do parâmetro ε observamos um processo de confinamento das trajetórias em torno dos novos mínimos do potencial. Nos gráficos acima, a partícula se encontra na fase orbital. Nas últimas três figuras, devido a condição inicial, a partícula ficou confinada em torno do mínimo positivo.



Fonte: O autor (2020)

Nas figuras 11-C e 12-C, observamos um comportamento intermediário onde a partícula acessa pontos em torno de ambos os mínimos do potencial.

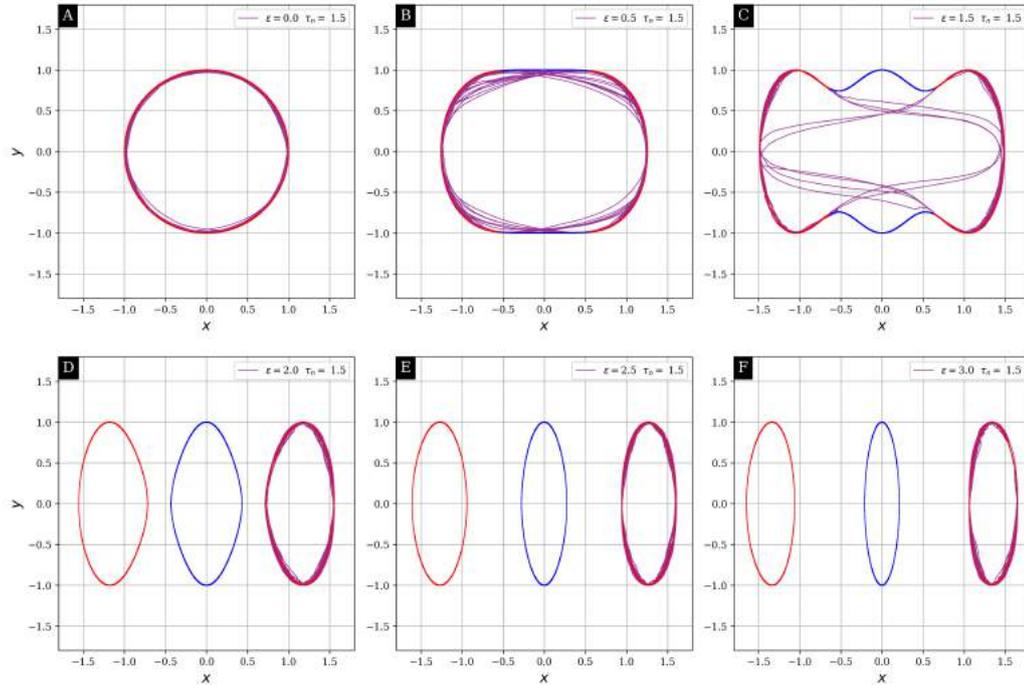
A existência da fase de transição pode ser entendida estudando o valor no potencial em seus pontos críticos em função de ε . A diferença entre o valor do potencial no ponto de sela e nos pontos de mínimo nos dá a “altura” da barreira que separa os dois mínimos. Portanto, a fase de transição ocorre quando a partícula tem energia, ou, sendo mais específico, propulsão suficiente para sobrepujar a barreira de potencial. Na figura 13, temos o valor do potencial avaliado em seus pontos crítico em função de ε . Vale salientar que imediatamente após a bifurcação existe um intervalo onde a altura da barreira é baixa. Acreditamos que esse efeito adicionado a uma alta propulsão (baixo valor de τ_n) sejam a causa para o aparecimento de alguns atratores aperiódicos que veremos mais adiante.

Das equações (3.64) e (5.16) obtemos a curva de pontos fixos no plano xy .

$$\left(x_f - 2\varepsilon x_f e^{-x_f^2}\right)^2 + y_f^2 = 1. \quad (5.17)$$

A curva de pontos fixos também sofre uma bifurcação. A princípio, temos uma única curva que se deforma até se separar em 3 curvas similares, porém, desconexas. Não foi possível

Figura 12 – Trajetórias da partícula autopropelida obtidas integrando as equações (3.22), (3.23) e (3.24) para o potencial biestável definido na equação (5.16) para $\tau_n = 1.5$, $D = 0,01$ e alguns valores de ε . Em magenta temos as trajetórias da partícula. Em azul e vermelho temos a projeção dos pontos fixos instáveis e estáveis no plano xy respectivamente. Novamente observamos um processo de confinamento com o crescimento do parâmetro ε . Nos gráficos acima, a partícula se encontra na fase escaladora.

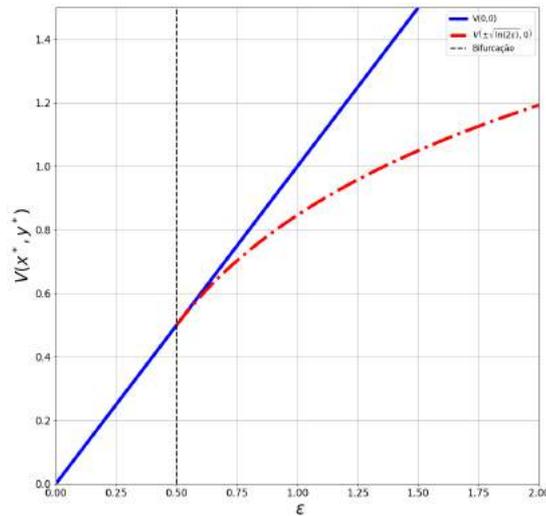


Fonte: O autor (2020)

obter as expressões analíticas para as curvas τ_c^{max} e τ_c^{min} obtidas para o potencial elíptico na seção 4.1.1. Entretanto, ainda é possível obtê-las avaliando a estabilidade de todos os pontos fixos usando os critérios definidos na seção 3.3. Além disso, conceitualmente, a curva τ_c^{max} passa a não ter sentido, pois como consequência da barreira de potencial, após a divisão da curva de pontos fixos em três, os pontos fixos presentes na curva em torno da origem (ponto de sela) são sempre instáveis. Sendo assim, na montagem do diagrama de fase iremos adicionar apenas a curva $\tau_c^{min}(\varepsilon)$, obtida numericamente.

Na figura 14 vemos que, em geral, o comportamento da partícula continua sendo influenciado pelos atratores periódicos. No entanto, existem alguns pontos importantes a serem destacados. Os atratores periódicos presentes na figura 14-A.1 representam a primeira classe de atratores que encontramos. Assim como no caso do potencial elíptico, para valores altos de τ_n , são os únicos atratores possíveis. Na figura 14-B.1 temos a segunda classe de atratores, são de período duplo e apresentam um único nó, entretanto, o dobramento de período ocorre na variável y , isto é $T_{xy} = 2$. O atrator presente na figura 14-C.1 é também de período duplo na variável x , porém, sua forma reflete um estado próximo ao confinamento da partícula. Na figura 14-D.1 temos um par de atratores de período simples em torno de cada mínimo do potencial. Nesse estágio, na ausência de ruído a partícula é confinada em torno de um dos mínimos do potencial, entretanto, a depender

Figura 13 – Na figura acima temos o valor do potencial biestável definido na equação (5.16) avaliado em seus pontos críticos em função de ε . Em azul temos o potencial avaliado na origem, e em vermelho o potencial é avaliado nos pontos $(\pm\sqrt{\ln(2\varepsilon)}, 0)$. A curva em preto marca a bifurcação onde os pontos $(\pm\sqrt{\ln(2\varepsilon)}, 0)$ passam a existir e tornam-se mínimos do potencial. Note que existe um intervalo em ε após a bifurcação onde o valor do potencial no ponto de sela (barreira) e nos mínimos (poços) são próximos.



Fonte: O autor (2020)

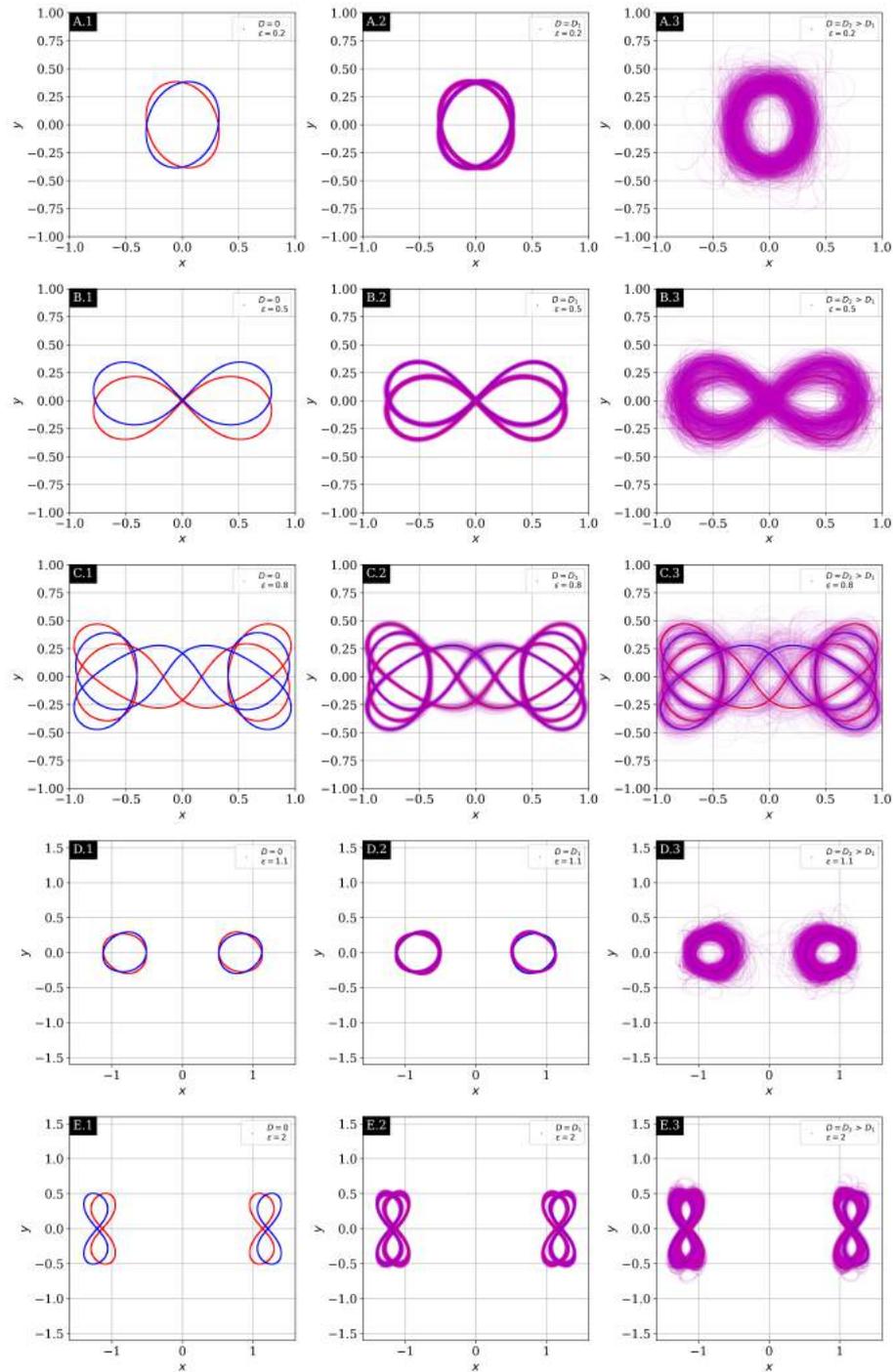
da intensidade do ruído pode sobrepujar a barreira de potencial como vemos na figura 14-D.3. Algo que vale salientar é que aumentando o valor de ε após o confinamento (estado com dois pares de atratores), os atratores evoluem de forma semelhante aos atratores vistos no potencial elíptico. Isto é, atratores semelhantes a elipses (figura 14-D.1), depois órbitas alongadas paralelamente ao eixo y e estreitas em x com padrões de nós (figura 14-E.1). Como resultado disto, após uma região intermediária, o diagrama de fase do potencial biestável é semelhante ao do elíptico.

Na figura 15 temos as varreduras realizadas de forma idêntica as realizadas na 4.2. Em comparação com o potencial elíptico, temos dobramento de período tanto na variável x quanto na y . Além disso, verificamos uma região robusta de pontos que não puderam ser classificados como período duplo ou simples. Diferentemente do potencial elíptico, onde esses pontos ocorriam na linha de transição entre fases e verificamos que se tratavam de falha no algoritmo, ao investigarmos esses pontos encontramos atratores aparentemente aperiódicos. Note que para baixos valores de τ_n e próximos de $\varepsilon \approx 0.6$, temos uma região com órbitas que não foram classificadas em período duplo e simples, nas três varreduras.

Na figura 16 vemos algumas dessas órbitas atratoras encontrados nessa região. Acreditamos que essas órbitas apareçam devido a baixa altura na barreira de potencial nessa região (veja a figura 13) em conjunto com uma alta propulsão da partícula (valor baixo de τ_n).

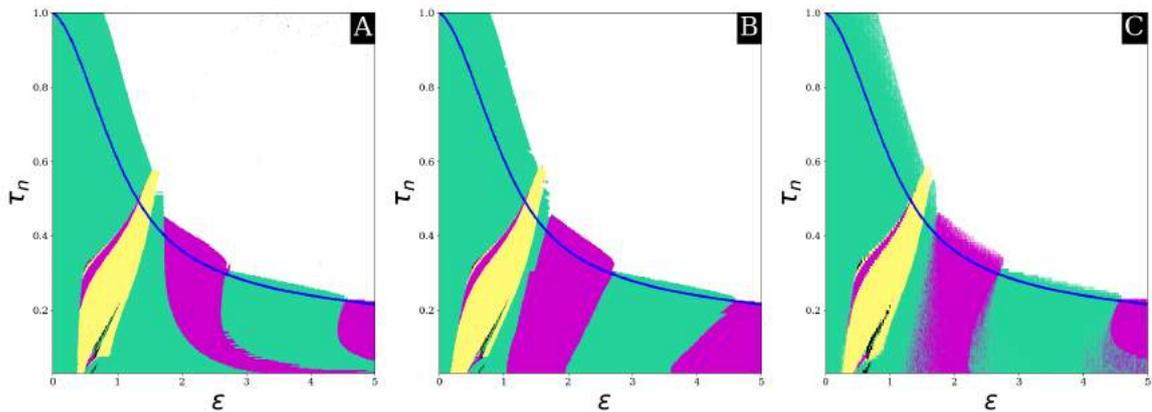
Na figura 17 vemos o comportamento de dois atratores próximos ao atrator presente na

Figura 14 – Em azul e vermelho temos os atratores periódicos do sistema dinâmico descrito pelas equações (3.52),(3.53) e (3.54) para o potencial biestável (equação 5.16) com $\tau_n = 0,1$. Na coluna 1($D = 0$) temos os atratores periódicos. Nas colunas 2 e 3, sobreposto em magenta, temos a trajetória realizada pela partícula $D = D_1$, e $D_2 > D_1$ respectivamente. Para $D = 0$, dependendo das condições iniciais, a partícula é atraída e passa a realizar a órbita ou em azul, ou vermelho. Para $D > 0$ (colunas 2 e 3) a partícula também é atraída, porém, pode se afastar das órbitas devido ao ruído. Em especial nas linhas D e E, temos um par de atratores em torno dos dois mínimos do potencial. Na ausência do ruído a partícula é atraída para um dos dois pares. Os valores de D_1 e D_2 foram ajustados em cada linha para uma melhor visualização, sendo D_1 e D_2 da ordem de 10^{-5} e 10^{-3} respectivamente.



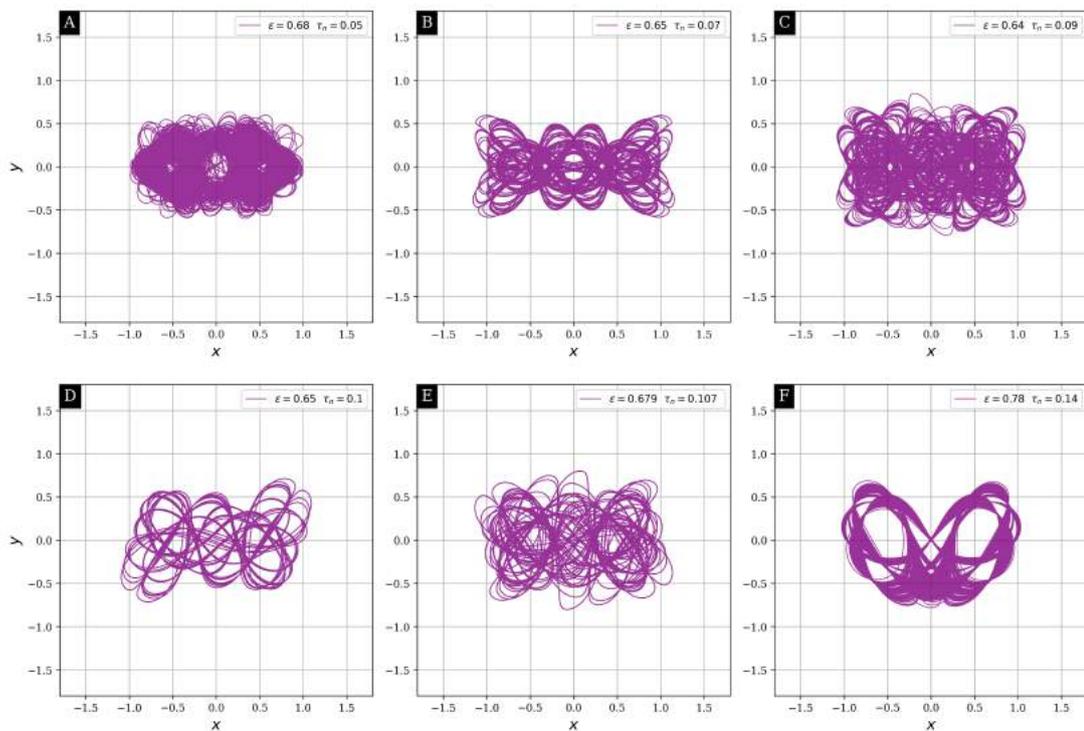
Fonte: O autor (2020)

Figura 15 – Em A, B e C temos respectivamente as varreduras do tipo A, B e C definidas na seção 4.2. De modo semelhante ao que vimos na figura 9, branco representa a fase escaladora, verde período simples, e magenta período duplo em y . Como novidade temos a cor creme, representando atratores de período duplo em x , e a cor preta representa atratores que não puderam ser classificados nas periodicidades acima. Novamente, na varredura do tipo C a sobreposição de cores indica que mais de um tipo de periodicidade ocorreu. Nesse caso, a cor predominante indica qual das fases ocorreu mais vezes. Em azul temos a curva numérica para para τ_{min}^c . Diferente da varredura no potencial elíptico, encontramos uma região robusta de pontos que não puderam ser classificados. Na região com τ_n pequeno e ε próximo a 0,6 encontramos alguns atratores aparentemente aperiódicos.



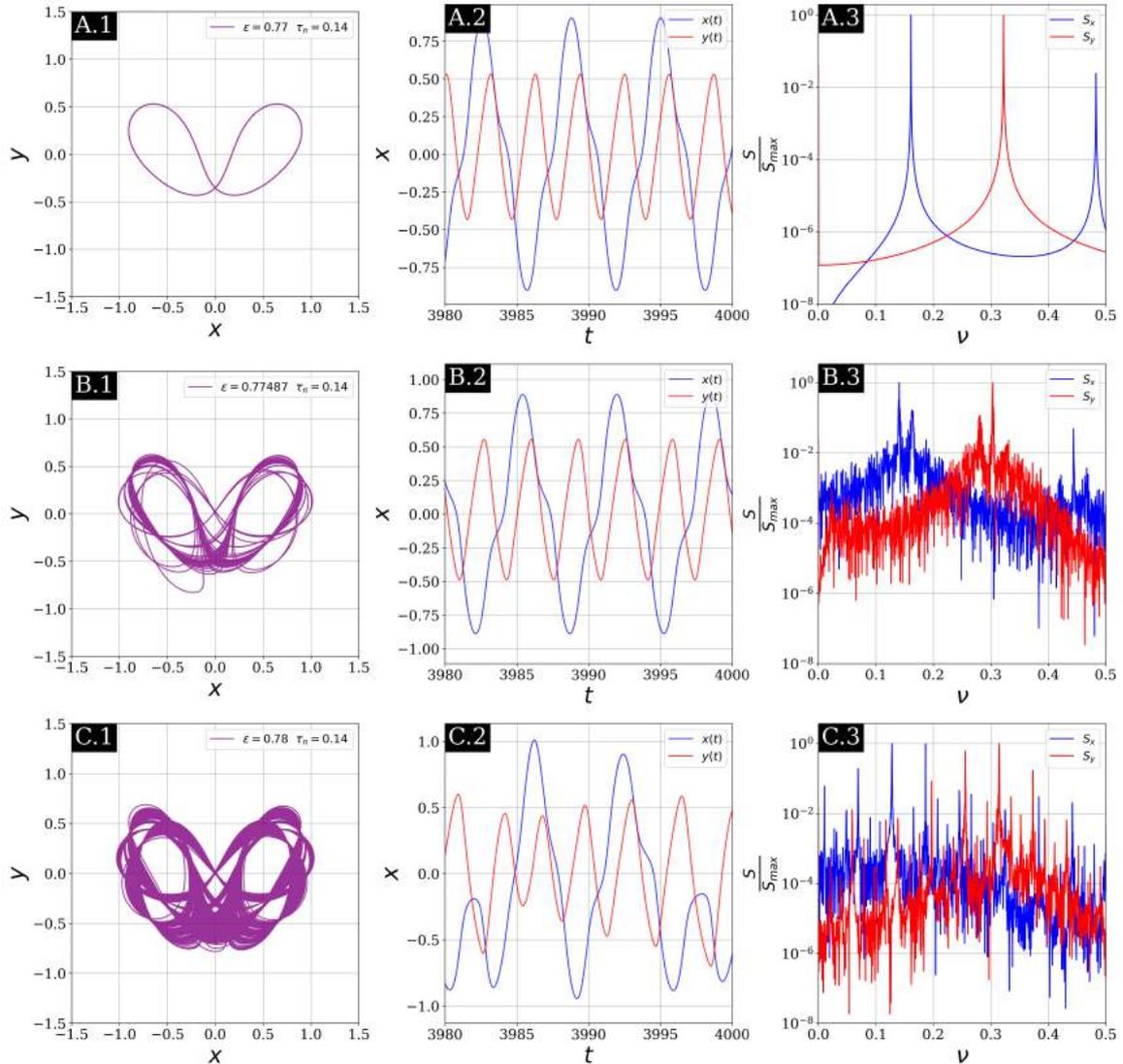
Fonte: O autor (2020)

Figura 16 – Nas figuras acima vemos alguns dos atratores aparentemente aperiódicos presentes próximo a $\varepsilon = 0,6$ e baixos valores de τ_n .



Fonte: O autor (2020)

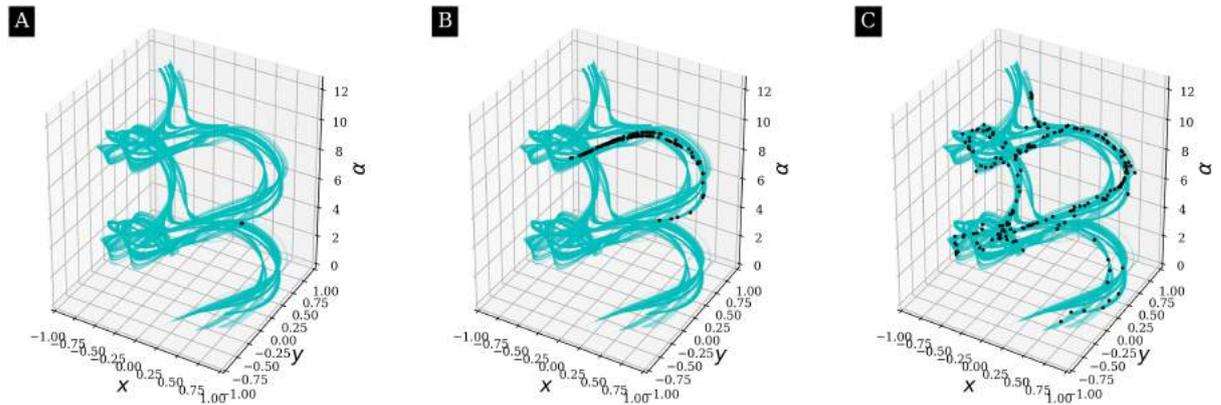
Figura 17 – Nas figuras acima vemos dois outros atratores com ε próximo ao atrator descrito na figura 16-F. Tanto na órbita quanto nos espectros de potência vemos um comportamento semelhante à transição para o caos via dobramento de períodos (ANISHCHENKO; VADIVASOVA; STRELKOVA, 2014)



Fonte: O autor (2020)

figura 16-F. O comportamento ruidoso dos espectros de potência é uma característica sugestiva de comportamento caótico. A figura 17 estaria representando uma transição para o caos via dobramento de períodos (ANISHCHENKO; VADIVASOVA; STRELKOVA, 2014). Além disso, na figura 18 vemos ainda para o mesmo atrator presente na figura 16-F, outra característica típica de atratores caóticos: a sensibilidade às condições iniciais. Esse comportamento também observado nos outros atratores aperiódicos encontrados. Investigar a rigorosamente a existência de caos nesse sistema é uma das perspectivas para a continuidade do trabalho.

Figura 18 – Em A, B e C temos a trajetória de 225 partículas que iniciaram próximas em três tempos diferentes. O atrator está marcado em azul e as soluções marcadas em preto. As condições iniciais formam no espaço de fase uma casca esférica de raio 10^{-5} em torno de um ponto dentro do atrator. O tempo de simulação em A, B e C são 30, 50, e 320 unidades de tempo do sistema respectivamente. Com a passagem do tempo as soluções que começaram próximas passam a separar. O atrator em questão é o mesmo presente na figura 16-F, agora representado no espaço de fase. Para uma melhor visualização do efeito reduzimos a variável angular (α) ao intervalo $[0, 4\pi]$.



Fonte: O autor (2020)

Assim como no potencial elíptico, a variável angular continua realizando a dinâmica de rotação nos atratores de períodos simples e libração nos atratores de período duplo.

6 CONCLUSÃO

Nesta dissertação estudamos a dinâmica de uma partícula autopropelida em potenciais de confinamento diferentes, usando o modelo de Dauchot e Démery (DAUCHOT; DÉMERY, 2019) no limite sobreamortecido. O estudo foi realizado tanto analiticamente, como utilizando simulações computacionais, com a integração numérica das equações de movimento (DAUCHOT; DÉMERY, 2019). Os sistemas investigados apresentam duas fases dinâmicas: fase escaladora associada a pontos fixos estáveis, e a fase orbital, ligada a ciclos limite estáveis, os quais chamamos de atratores periódicos ou órbitas atratoras. Além disso, vimos que a equação de autoalinhamento é ingrediente fundamental para a existência de ambas as fases.

Inicialmente, reproduzimos os resultados obtidos por Dauchot e Démery, onde encontramos as fases escaladora e orbital sob as mesmas condições da referência (DAUCHOT; DÉMERY, 2019). Posteriormente, as regiões de estabilidade da fase escaladora foram determinadas para potenciais arbitrários a partir da obtenção do conjunto de pontos fixos do sistema. Também pudemos definir as regiões onde esta fase não pode ser acessada pelo sistema. Já a fase orbital, por outro lado, depende da existência de atratores periódicos, que aparecem em pares.

Para os potenciais elíptico e biestável, onde ocorre quebra de simetria radial, obtivemos uma dinâmica rica de fases orbitais, mesmo na ausência de inércia e ruído nos sistemas. No potencial elíptico encontramos alternância de órbitas de período simples e duplo à medida que o parâmetro perturbativo ε é variado. No potencial biestável, além do dobramento de período, há regiões no diagrama de fase $\varepsilon \times \tau_n$ em que trajetórias aperiódicas são observadas. Além disso, verificamos que essas trajetórias aperiódicas são sensíveis às condições iniciais, sendo, portanto, candidatos a atratores caóticos.

Como desdobramento dessa dissertação vemos três possibilidades: o primeiro é considerar o termo de inércia ($\tau_v > 0$), de modo entender como a inércia influencia a dinâmica do sistema; no segundo, outros potenciais de confinamento seriam estudados com o objetivo de buscar por evidência de comportamento caótico; finalmente, poderíamos considerar a dinâmica de muitas partículas autopropelidas mutuamente interagentes e procurar por fases de movimento coletivo das partículas.

REFERÊNCIAS

- ABDELMOHSEN, L. K. E. A.; PENG, F.; TU, Y.; WILSON, D. A. Micro- and nano-motors for biomedical applications. *J. Mater. Chem. B*, The Royal Society of Chemistry, v. 2, p. 2395–2408, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1039/C3TB21451F>>.
- ANISHCHENKO, V.; VADIVASOVA, T.; STRELKOVA, G. *Deterministic Nonlinear Systems: A Short Course*. Springer International Publishing, 2014. (Springer Series in Synergetics). ISBN 9783319068718. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=FV4IBAAAQBAJ>>.
- BASU, U.; MAJUMDAR, S. N.; ROSSO, A.; SCHEHR, G. Active brownian motion in two dimensions. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 98, p. 062121, Dec 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.98.062121>>.
- BERG, H. C.; TURNER, L. Movement of microorganisms in viscous environments. *Nature*, Springer, v. 278, n. 5702, p. 349–351, 1979. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/278349a0>>.
- BUHL, J.; SUMPTER, D. J. T.; COUZIN, I. D.; HALE, J. J.; DESPLAND, E.; MILLER, E. R.; SIMPSON, S. J. From disorder to order in marching locusts. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 312, n. 5778, p. 1402–1406, 2006. ISSN 0036-8075. Disponível em: <<https://science.sciencemag.org/content/312/5778/1402>>.
- CZIRÓK, A.; VICSEK, T. Collective behavior of interacting self-propelled particles. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 281, n. 1, p. 17 – 29, 2000. ISSN 0378-4371. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437100000133>>.
- DAUCHOT, O.; DÉMERY, V. Dynamics of a self-propelled particle in a harmonic trap. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 122, p. 068002, Feb 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.122.068002>>.
- GALASSI, M.; GOUGH, B. *GNU Scientific Library: Reference Manual*. Network Theory, 2009. (GNU manual). ISBN 9780954612078. Disponível em: <<http://www.gnu.org/software/gsl/>>.
- HELBING, D. Traffic and related self-driven many-particle systems. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 73, p. 1067–1141, Dec 2001. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.73.1067>>.
- HIGHAM, D. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *SIAM Review*, v. 43, p. 525–546, 2001.
- JAHANSHAHI, S.; LÖWEN, H.; HAGEN, B. ten. Brownian motion of a circle swimmer in a harmonic trap. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 95, p. 022606, Feb 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.95.022606>>.
- LAM, K.-D. N. T.; SCHINDLER, M.; DAUCHOT, O. Self-propelled hard disks: implicit alignment and transition to collective motion. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 17, n. 11, p. 113056, nov 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1367-2630%2F17%2F11%2F113056>>.

LAUGA, E.; DILUZIO, W. R.; WHITESIDES, G. M.; STONE, H. A. Swimming in circles: Motion of bacteria near solid boundaries. *Biophysical Journal*, v. 90, n. 2, p. 400–412, 2006. ISSN 0006-3495. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0006349506722214>>.

LEMONS, D. S.; GYTHIEL, A. Paul langevin's 1908 paper "on the theory of brownian motion" ["sur la théorie du mouvement brownien," *cr acad. sci.(paris)* 146, 530–533 (1908)]. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 65, n. 11, p. 1079–1081, 1997.

OTT, E. *Chaos in Dynamical Systems*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002.

PERRARD, S.; LABOUSSE, M.; MISKIN, M.; FORT, E.; COUDER, Y. Self-organization into quantized eigenstates of a classical wave-driven particle. *Nature communications*, Nature Publishing Group, v. 5, n. 1, p. 1–8, 2014.

QUILLEN, A. C.; SMUCKER, J. P.; PESHKOV, A. Boids in a loop: Self-propelled particles within a flexible boundary. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 101, p. 052618, May 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.101.052618>>.

RAMASWAMY, S. The mechanics and statistics of active matter. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, v. 1, n. 1, p. 323–345, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-070909-104101>>.

REYNOLDS, C. W. Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, v. 21, n. 4, p. 25–34, ago. 1987. ISSN 0097-8930. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/37402.37406>>.

SHENOY, V. B.; TAMBE, D. T.; PRASAD, A.; THERIOT, J. A. A kinematic description of the trajectories of listeria monocytogenes propelled by actin comet tails. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Academy of Sciences, v. 104, n. 20, p. 8229–8234, 2007. ISSN 0027-8424. Disponível em: <<https://www.pnas.org/content/104/20/8229>>.

STROGATZ, S. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Avalon Publishing, 2014. (Studies in Nonlinearity). ISBN 9780813349114. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=JDQGAwAAQBAJ>>.

VICSEK, T.; CZIRÓK, A.; BEN-JACOB, E.; COHEN, I.; SHOCHET, O. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 75, p. 1226–1229, Aug 1995. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.1226>>.

WANG, J.; GAO, W. Nano/microscale motors: Biomedical opportunities and challenges. *ACS Nano*, v. 6, n. 7, p. 5745–5751, 2012. PMID: 22770233. Disponível em: <<https://doi.org/10.1021/nn3028997>>.

WEBER, C. A.; HANKE, T.; DESEIGNE, J.; LÉONARD, S.; DAUCHOT, O.; FREY, E.; CHATÉ, H. Long-range ordering of vibrated polar disks. *Phys. Rev.*

Lett., American Physical Society, v. 110, p. 208001, May 2013. Disponível em:
<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.208001>>.