UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO

ALAN GUSTAVO FERREIRA

ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS E DIDÁTICAS NO ENSINO DE COMBINATÓRIA

CARUARU
2019

ALAN GUSTAVO FERRERA

ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS E DIDÁTICAS NO ENSINO DE COMBINATÓRIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências

Orientador: Prof. Dr. Fernando Emílio Leite de Almeida.

CARUARU

2019

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Paula Silva - CRB/4 - 1223

F383o Ferreira, Alan Gustavo.
Organizações matemáticas e didáticas no ensino de combinatória. / Alan Gustavo Ferreira. – 2019.
191 f.; il.: 30 cm.

Orientador: Fernando Emílio Leite de Almeida.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, 2019.
Inclui Referências.

1. Análise combinatória - Pernambuco. 2. Didática (Ensino médio). 3. Ensino – Metodologia. 4. Matemática – Estudo e ensino - Pernambuco. I. Almeida, Fernando Emílio Leite de (Orientador). II. Título.

CDD 371.12 (23. ed.) UFPE (CAA 2019-365)

ALAN GUSTAVO FERREIRA

ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS E DIDÁTICAS NO ENSINO DE COMBINATÓRIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Aprovada em: 21/08/2019.

BANCA EXAMINADORA

Profº. Dr. Fernando Emílio Leite de Almeida (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Profº. Dr. Edelweis José Tavares Barbosa (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Profº. Drº. José Luiz Cavalcante (Examinador Externo)
Universidade Estadual da Paraíba

Dedico este trabalho à minha mãe, Luciana Ferreira, uma mulher simples e de um caráter sólido, que enxerga nas minhas conquistas, as suas realizações.

AGRADECIMENTOS

Ao término deste trabalho, o sentimento é de profunda gratidão. São tantas as pessoas que contribuíram, uns de forma direta, outros mais indiretamente, para que esta pesquisa e esta etapa da minha acadêmica se concretizassem.

Inicialmente, agradeço a Deus, fonte de todo conhecimento e sabedoria, pela Sua infinita bondade e misericórdia que têm me cercado todos os dias, por ter me oportunizado trilhar mais esse importante passo na minha jornada acadêmica. Se tem uma palavra, além de gratidão, que expressa bem esse momento é *Ebenézer*, que significa “Até aqui me ajudou o Senhor!”.

À minha mãe Luciana, que torce e vibra diariamente pelas minhas conquistas, pelas suas orações e preocupações durante as idas e vindas às aulas do Mestrado em Caruaru.

À minha tia Marinalva, que como uma segunda mãe tem cuidado de mim nos pequenos e grandes detalhes. Suas orações me guardam diariamente nos braços do Pai.

Aos meus irmãos Ana Paula e Jailton, pelo incentivo e apoio. Sou imensamente agradecido porque o que nos une é muito mais do que laços de sangue, são laços de amor.

Ao meu orientador Fernando Emílio, pelo zelo e comprometimento dispensados na realização dessa pesquisa, mesmo distante geograficamente, me abrindo os horizontes para compreender um pouco mais da didática da Matemática, especialmente os construtos da Teoria Antropológica do Didática. Agradeço imensamente por toda sua compreensão, respeitando meu tempo e minha produção acadêmica.

À Tarcísio Vieira, pelo ser humano incrível com o qual tenho tido o privilégio de conviver nos últimos anos, sempre me incentivando, me impulsionando e acreditando no meu potencial. Agradeço por todo apoio e ajuda dedicados ao meu trabalho, especialmente no auxílio na transcrição das aulas.

Aos membros da banca de qualificação e examinadora, Edelweis Barbosa e José Luiz Cavalcante, pelas valiosas e importantes contribuições para o desenvolvimento desta pesquisa.

À professora e alunos sujeitos desta pesquisa, bem como aos gestores da instituição de ensino, pela permissão de entrar na sala de aula e observar de perto os processos de ensino e aprendizagem.

Aos professores do PPGECM, especialmente aqueles com quem tive o privilégio de aprender e partilhar saberes.

Aos colegas da Turma 2017 do PPGECM, especialmente os da Linha de Pesquisa Metodologias e Práticas de Ensino, com os quais tive a imensa satisfação de cursar as disciplinas obrigatórias. O apoio e companheirismo disponibilizados durante a jornada do Mestrado, suavizaram os fardos. Um agradecimento especial à Franciane Almeida pelas alegrias e angústias partilhadas mutuamente de forma particular.

À direção da Escola Professora Fontainha de Abreu, na pessoa da Profª. Karla Roberta, por toda compreensão e apoio nos momentos de ausência para estudos e desenvolvimento desta pesquisa.

Aos professores Aparecida Rufino e José Roberto, com quem tenho aprendido desde a graduação e continuam a partilhar saberes e a me abrir portas para o meu crescimento acadêmico e profissional. Nutro enorme carinho por eles!

Aos amigos, de perto e de distante, que sempre torcem por mim e me incentivam a ir além.

“Quando alguém julga ter alcançado o saber, é porque ainda não sabe onde está o verdadeiro conhecimento.” (BÍBLIA, N. T. 1 Coríntios, 8:2)

RESUMO

Esta investigação teve como objetivo analisar as características relativas ao ensino de Combinatória no Ensino Médio; de maneira especial, centra-se na análise sobre as atividades matemática e didática do professor em torno do estudo de Combinatória. Para estudar as condições e as características do ensino de Combinatória, ancoramos este estudo na Teoria Antropológica do Didático, desenvolvida por Chevallard e colaboradores. Mais especificamente, centramos nossas análises nas praxeologias matemáticas e didáticas. Trata-se de uma pesquisa de abordagem qualitativa, do tipo estudo de caso. Elegemos como sujeito da pesquisa um professor de matemática do ensino médio. A implementação da metodologia possibilitou identificar, de forma explícita, os tipos de tarefas e as técnicas que permitem cumpri-las e tecnologias que justificam essas técnicas, bem como os seis momentos de estudo. Os principais resultados encontrados apontam que, é possível encontrarmos nas aulas observadas do professor os tipos de tarefa T_1, T_2 e T_3, que referem-se aos problemas de contagem do tipo permutação, arranjo e combinação. Dentre das técnicas utilizadas para realizar os tipos e subtipos de tarefas, destacamos a aplicação do princípio multiplicativo, que tem provado ser uma ferramenta útil na resolução de tarefas desses tipos. No entanto, foi possível perceber que, na constituição do entorno tecnológico-teórico, não se explorou adequadamente a demarcação dos agrupamentos a partir das distintas disposições que seus elementos podem adotar – ordem e natureza.

Palavras-chave: Combinatória. Teoria antropológica do didático. Organizações matemáticas. Organizações didáticas.

ABSTRACT

This research aimed to analyze the characteristics related to Combinatorial teaching in High School; In particular, it focuses on the analysis of the teacher's mathematical and didactic activities around the Combinatorial study. To study the conditions and characteristics of Combinatorial teaching, we anchored this study in the Anthropological Theory of Didactics, developed by Chevallard and collaborators. More specifically, we focus our analysis on mathematical and didactic praxeologies. This is a qualitative research, case study type. We elected as a research subject a high school math teacher. The implementation of the methodology made it possible to explicitly identify the types of tasks and the techniques that allow them to be fulfilled and the technologies that justify these techniques, as well as the six moments of study. The main results show that it is possible to find in the observed classes of the teacher the types of tasks T1, T2 and T3, which refer to the problems of counting type permutation, arrangement and combination. Among the techniques used to perform task types and subtypes, we highlight the application of the multiplicative principle, which has proven to be a useful tool in solving tasks of these types. However, it was possible to realize that, in the constitution of the technological-theoretical environment, the demarcation of the groups was not adequately explored from the different dispositions that their elements can adopt - order and nature.

Keywords: Combinatorial. Anthropological theory of didactics. Mathematical organizations. Didactic organizations.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

a.C.	Antes de Cristo
apud	Citado por
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
LD	Livro Didático
MEC	Ministério da Educação
NCTM	National Concil of Teachers of Mathematics
OD	Organização Didática
OM	Organização Matemática
OMG	Organização Matemática Global
OML	Organização Matemática Local
OMP	Organização Matemática Pontual
OMR	Organização Matemática Regional
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PFC	Princípio Fundamental da Contagem
PM	Princípio Multiplicativo
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SAEPE	Sistema de Avaliação de Pernambuco
TAD	Teoria Antropológica do Didático
TD	Transposição Didática

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Desde o surgimento da Didática da Matemática, como campo de conhecimento, na década de 70 do século passado, cuja competência de estudo sugere a compreensão da natureza do saber matemático na atividade escolar e a utilização de sua interpretação para melhor gerenciar os fenômenos de ensino e de aprendizagem no âmbito das instituições de ensino, numerosos trabalhos, com os mais variados enfoques, têm emergido. Apesar dos esforços e dos grandes avanços que se tem conquistado nessa área, esses estudos ainda não conseguem responder, na sua totalidade, as inquietações e os anseios por uma melhoria de ensino e, por conseguinte, de aprendizagem de Matemática nos ambientes educativos.

Os problemas em Educação Matemática são diversos e de diferentes natureza. No campo da Combinatória, por exemplo, esses problemas parecem ser ainda mais emblemáticos. As avaliações em larga escala realizadas no Brasil e no âmbito do Estado de Pernambuco, mais especificamente, denunciam o insucesso dos estudantes perante a resolução de problemas que envolvem esse importante campo matemático. A edição 2011[1] do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) apontou um baixo percentual de acertos (apenas 17%) nas questões do descritor *Resolver problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples* (BRASIL, 2012). Nas edições de 2013 e 2014[2] do Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE), o percentual de acertos nesse mesmo descritor é de aproximadamente 50% que, apesar de ser superior, se comparado com o desempenho no SAEB, ainda revela a dificuldade dos estudantes desse Estado na resolução de problemas que envolvam essa habilidade.

Um estudo realizado por Esteves (2001) sobre a aquisição dos conceitos de Análise Combinatória com adolescentes cursando a última série do Ensino Fundamental evidenciou a dificuldade que esses alunos apresentaram em resolver problemas desse campo, devido à confusão sobre a relevância da ordem, principalmente em problemas de combinação, falta de organização para enumerar os

[1] O Ministério da Educação (MEC) e o INEP não divulgaram o desempenho dos estudantes por descritores em edições posteriores do SAEB.
[2] O descritor que trata especificamente do campo da Combinatória não foi aferido nas edições de 2015 e 2016 do SAEPE; esses dados foram coletados a partir de consulta à equipe técnica da Secretaria de Educação de Pernambuco.

dados sistematicamente, dúvidas da identificação aritmética equivalente e interpretação incorreta do problema, quando este apresenta mais de uma etapa.

Ferreira, Rufino e Silva (2016) realizaram uma pesquisa com 112 estudantes ingressantes de um curso de licenciatura em Matemática que buscou identificar os obstáculos epistemológicos que impregnam as concepções desses estudantes a respeito dos conceitos de Combinatória, arranjo, permutação e combinação. Esse grupo de alunos respondeu a um questionário composto por questões conceituais e aplicações no qual revelou que, uma parte desses obstáculos é de origem didática que, para Brousseau (1983), parecem estar atrelados à escolha de uma estratégia do docente. Além disso, o estudo ainda evidenciou um percentual muito baixo de acertos na resolução das situações-problema propostas.

No que diz respeito à prática do professor, Lima (2016) apresentou um estudo com o objetivo de analisar práticas pedagógicas sobre Combinatória em turmas do 2º ano do Ensino Médio. O Estudo foi realizado com dois professores licenciados em Matemática. Os resultados apontaram que há dificuldades dos professores quanto ao trabalho com as situações, com os invariantes, com a explicação e organização das características dos problemas, pouco explorando diferentes representações, reduzindo, assim, a resolução do problema apenas à utilização de fórmulas. A autora ainda apontou a necessidade de se observar outros momentos de ensino e a prática de outros professores.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) indicam a importância do aprendizado de Combinatória desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, embora é possível observar que este conhecimento deve ser sistematizado na sala de aula no último ano do Ensino Fundamental e de maneira mais aprofundada no Ensino Médio.

Borba (2010), em suas pesquisas, argumenta que desde o início do processo de escolarização, deve-se trabalhar com variadas situações combinatórias e que a resolução de problemas de Combinatória possibilita ricos desenvolvimentos conceituais, não apenas específicos à Matemática, mas, também, de outras áreas do conhecimento.

As investigações que se tem desenvolvido no âmbito do ensino e da aprendizagem das noções de Combinatória tem experimentado durante os últimos anos no Brasil uma evolução significativa que pode muito bem apontar não apenas à relevância e notoriedade que esse conhecimento vem tendo, mas também a preocupação de educadores, psicólogos, pesquisadores e especialistas da educação quanto às condições de ensino e aprendizagem desse conhecimento.

Um levantamento bibliográfico realizado por Silva e Pessoa (2015b) em artigos científicos publicados em anais de eventos científicos nacionais e internacionais realizados no Brasil, na área da educação matemática, no período de 2009 a 2013, comprova a evolução não apenas quantitativa, mas também qualitativa desses trabalhos que abordam o campo da Combinatória.

O Estado da Arte produzido por essas autoras, além de analisar os artigos científicos publicados sobre o raciocínio combinatório, também, categorizaram esses trabalhos, de forma em apontar os objetivos mais comuns pesquisados (SILVA; PESSOA, 2015).

Os pesquisadores apontaram em que áreas estes estudos foram desenvolvidos, ou seja, pode-se perceber a predileção dos pesquisadores pelos estudos de sondagem que denotam o interesse em investigar os conhecimentos prévios dos estudantes a fim de se propor possibilidades de intervenção. Por outro lado, estudos com professores, figuram em penúltima colocação como categoria. Uma subdivisão com os trabalhos nessa categoria apontam para dois tipos principais de estudos: sondagem sobre o que os professores sabem sobre a Combinatória e/ou seu ensino e sobre propostas de formação específica para tal conceito.

Dentre os estudos envolvendo os processos de ensino e aprendizagem em combinatória, nos quais o professor aparecem como sujeito, podemos elencar os de Assis e Pessoa (2015), Sabo (2010), Martins (2018), Cunha (2015), Rocha (2011), Barbosa de Lima (2015), Oliveira (2014), Coutinho (2014) e Costa (2003). Os trabalhos supramencionados foram encontrados a partir de buscas realizadas em bases de dados como a plataforma SciELO e a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD). A primeira base tem se destacado por congregar numerosos e importantes periódicos na área educacional, tornando-se um importante meio de divulgação científica a nível internacional. Já a BDTD integra e dissemina textos completos das teses e dissertações defendidas nas instituições brasileiras de ensino e pesquisa. A seguir, apresentamos uma síntese dessas pesquisas.

Assis e Pessoa (2015), utilizando as ideias de situações, invariantes e representações simbólicas dos problemas combinatórios, advindas da Teoria dos Campos Conceituais, propuseram uma formação continuada para professores dos anos inicias do ensino fundamental. Na pesquisa, percebeu-se que, antes da realização da intervenção, os professores demonstravam dificuldades na diferenciação e classificação dos problemas combinatórios. Os resultados apontaram que a formação continuada se configurou numa importante ação para que os sujeitos da pesquisa pudessem refletir mais claramente sobre os problemas, analisando suas situações e invariantes e conseguindo estabelecer relações entre os diferentes tipos de problemas, com base nas características de cada um. As autores ainda chamaram a atenção para o fato de que a combinatória ainda é relegada nas práticas de ensino, provavelmente devido à falta de aprofundamento conceitual por parte de alguns professores.

Partindo do pressuposto de que as dificuldades dos estudantes em apropriar-se dos conceitos de análise combinatória possam emergir dos saberes e das práticas do professor, Sabo (2010) investigou, através de entrevistas semiestruturadas, os saberes dos professores de Matemática do Ensino Médio com relação ao ensino desse tema. A pesquisa revelou a dificuldade, por parte de alguns professores, para distinguir, a partir dos enunciados dos problemas, se a ordem dos elementos é ou não relevante na formação dos agrupamentos. Observou-se, também, uma situação divergente em relação ao uso de fórmulas, visto que alguns professores afirmaram que valorizam o uso do Princípio Multiplicativo, enquanto outros, o emprego de fórmulas.

Considerando que o ensino de Combinatória ainda está centralizado em definições e fórmulas, em detrimento do desenvolvimento do raciocínio estratégico, favorecendo a não aprendizagem e a capacidade de resolver problemas, Martins (2018) realizou um estudo exploratório-descritivo com 20 professores de Matemática do Ensino Médio das escolas estaduais de um município do Estado do Espírito Santo. Como resultado, constatou-se que a maioria deles considera que o tema é um dos tópicos mais difíceis de se ensinar e declara que o mesmo não foi devidamente estudado na sua formação inicial ou continuada. Na tentativa de suprir essa carência, eles utilizam apenas o livro didático e a internet.

Cunha (2015) buscou analisar o domínio conceitual de professores sobre os invariantes de problemas combinatórios a partir da elaboração de problemas, ancorando, também, sua abordagem na Teoria dos Campos Conceituais. Com a participação de 07 professores que lecionam na rede estadual de Pernambuco, a investigação evidenciou que esses sujeitos apresentavam dificuldade em diferenciar os invariantes de ordenação e escolha de elementos, de contextualizar e de estruturar problemas combinatórios. Isso se acentua na elaboração de problemas de combinação, se compararmos com os de permutação e arranjo.

Fundamentando-se no fato de que o número de erros cometidos na resolução de situações de Combinatória ainda é muito grande, o que indica dificuldades no ensino e/ou na aprendizagem desse conteúdo, Rocha (2011) se propôs a analisar os conhecimentos que professores do ensino fundamental e médio têm sobre Combinatória e seu ensino. A partir de entrevistas semiestruturadas realizadas com 06 de professores desses níveis, a pesquisa revelou que quase todos os professores apresentaram dificuldades na diferenciação de problemas de arranjo e combinação. As respostas dos professores também indicaram existir uma articulação entre suas experiências de formação e de prática docente.

Com o intuito de investigar os conhecimentos de professores da Educação Básica sobre como o Princípio Multiplicativo pode ser usado na resolução de variados problemas combinatórios e na construção das fórmulas da Análise Combinatória, Barbosa de Lima (2015) realizou dois estudos: o primeiro consistiu na aplicação de um teste de múltipla escolha e justificativa e o segundo, foi realizada uma entrevista semiestruturada com professores. Os resultados expuseram que os professores investigados não indicam como relacionar o PM com as fórmulas da Combinatória e o uso de outras estratégias, tais como árvores de possibilidades.

Coutinho (2014) realizou uma investigação que buscou identificar os invariantes operatórios que os professores que lecionam nos anos inicias do Ensino Fundamental mobilizam de forma estável, durante a análise de situações envolvendo combinatória. Os resultados encontrados demonstraram, quanto aos invariantes operatórios mobilizados pelos docentes, que eles possuem conceitos restritos sobre Combinatória, porque mobilizaram mais o invariante operatório da enumeração das possibilidades, do que os meios para generalizar o princípio multiplicativo. Todavia, em situações que envolvam mais de duas etapas e que tenham um número maior de possibilidades, esse invariante não era válido.

Com o objetivo de estudar e analisar os instrumentos disponíveis para o professor de Matemática ensinar Combinatória no Ensino Fundamental por meio da Modelagem, Costa (2003) desenvolveu uma pesquisa junto à professores participantes de um curso de formação continuada. Com os dados obtidos, a autora pode constatar dificuldades de estabelecer um procedimento sistemático, justificar as respostas, não uso ou pouco uso de representações e dificuldades para reconhecer se a ordem é relevante ou não na formação dos agrupamentos.

Diante do quadro investigativo levantado até aqui, fica evidente a necessidade de se ter um maior investimento em pesquisas que busquem analisar e refletir sobre práticas de ensino em Combinatória. Essa necessidade pode muito bem ser justificada pela ausência de estudos que privilegiem essa temática.

Assim, esta investigação, propõe como objetivo principal, analisar as características relativas ao ensino de Combinatória no Ensino Médio; de maneira especial, centra-se na análise sobre as atividades matemática e didática do professor em torno do estudo de Combinatória.

Para estudar as condições e as características do ensino de Combinatória, sentimos a necessidade de recorrer a um modelo teórico. Entre as manifestações que emergem das tendências em Didática da Matemática, surge a Teoria Antropológica do Didático (TAD), originalmente desenvolvida por Chevallard (1999), cujo objetivo primeiro de investigação é a análise da atividade matemática escolar com suas relações humanas e enquadradas em certas instituições sociais. Este referencial teórico tem provado ser uma poderosa ferramenta para analisar e descrever as práticas docentes.

O princípio fundamental da TAD consiste no fato de que toda atividade humana regularmente feita pode descrever-se como um modelo único, denominado praxeologia (CHEVALLARD, 1999). As noções de tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria, mobilizadas para certo tipo de tarefa, constituem uma organização praxeológica ou organização matemática, tornando-se ferramenta fundamental para modelizar qualquer atividade matemática. Por outro lado, a ideia de organização didática se firma em processos invariantes que permitem a construção matemática. Essas noções serão aprofundadas, posteriormente, no marco teórico deste estudo.

Desde a sua gênese, observamos uma forte concentração de estudos que se utilizam da TAD como marco teórico no eixo da Álgebra e Funções, dos quais podemos citar Araújo (2009), Bessa de Menezes (2010); Almeida (2016) e Barbosa (2017). Percebemos também que, esse referencial tem servido de âncora para o desdobramento de pesquisas no eixo das Grandezas e Medidas (SANTOS, 2015; CANNE, 2015), na Geometria (MAIA, 2008), no eixo do Tratamento da Informação (LIMA NAGAMINE *et. al.*, 2011) e até mesmo em áreas distintas à Educação Matemática, como é o caso da Química e da Física (ZANARDI *et. al.*, 2013). Diante dessas informações, é possível perceber, a ausência de estudos no campo da Combinatória que se alicerçam na TAD. Essa ausência, por um lado, também impulsiona a realização da nossa pesquisa.

Na tentativa de entendermos melhor as condições em torno da prática do professor no que diz respeito ao ensino de Combinatória, apresentamos agora as questões nas quais procuramos nortear este estudo: Como os saberes são apresentados na prática do professor no ensino de Combinatória no 2º ano do Ensino Médio? Que características têm as organizações matemáticas e didáticas que emergem na prática docente em relação ao ensino de Combinatória?

De modo mais específico, esse estudo pretende descrever e analisar as organizações matemáticas – os tipos de tarefas, as técnicas, as tecnologias e as teorias, bem como procura identificar e caracterizar as organizações didáticas – os seis momentos didáticos (primeiro encontro com a organização matemática, exploração do tipo de tarefas e da elaboração de uma técnica relativa à esse tipo de tarefas, constituição do entorno tecnológico-teórico, trabalho com a técnicas, institucionalização e avaliação) – relacionadas ao ensino de Combinatória.

Com a finalidade de atingirmos aos objetivos apresentados, em termos de metodologia, elegemos como sujeito participante da nossa investigação um professor de matemática do 2º ano do ensino fundamental e, de forma indireta, seus respectivos estudantes. A TAD também aponta um percurso metodológico de análise dos saberes e de sua construção nos processos de estudos a partir da modelização das organizações matemáticas e

Para alcançar os objetivos apontados acima, o referido trabalho está dividido em cinco capítulos: Introdução, a Teoria Antropológica do Didático, a Combinatória, o Percurso Metodológico e a Análise e Discussão dos Resultados. O primeiro capítulo é o que se tem apresentado até o momento.

Na sua fundamentação teórica, investiremos inicialmente em apresentar e discutir a Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999) em seus aspectos gerais, desde os germes dessa teoria, com a ideia de transposição didática, passeando pelas ideias de relação pessoas e institucionais, culminando com a noção de praxeologias, objetos de análise do presente estudo. Nessa última parte, nos deteremos a apresentação das noções de organização matemática e organização didática.

Detalhamos na segunda parte do referencial teórico, que corresponde ao capítulo 3, as bases dos raciocínios que dão sustentação aos problemas de contagem do tipo Arranjo, Permutação e Combinação buscando registrar que o processo evolutivo da ideia de contagem, até que se chegasse a esses problemas, está intimamente relacionada à origem e desenvolvimento do campo da Combinatória. Ainda nesse capítulo, nos dedicaremos à abordagem das orientações educacionais para o ensino de Combinatória a partir da análise de documentos oficiais que servem para nortear as opções dos docentes no que diz respeito aos conteúdos e metodologias de ensino. Vale ressaltar que, com o embasamento teórico, também procuramos construir critérios para análise e discussões dos resultados.

Na sequência, será demarcado o percurso metodológico. Inicialmente investiremos em caracterizar e justificar a opção metodológica deste estudo para, em seguida, caracterizar o sujeito e o campo da pesquisa. Também contemplamos nessa parte, as etapas da pesquisa e os critérios de análise.

O capítulo 5 será dedicado a análise e discussão dos resultados, momento no qual procuraremos responder às questões e objetivos que inicialmente foram construídos.

2 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

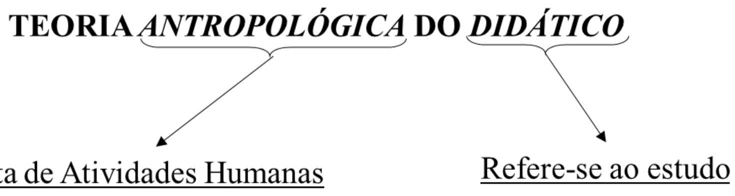
A Teoria Antropológica do Didático (TAD) foi inicialmente idealizada pelo investigador francês Yves Chevallard no final da década de 1980 com as primeiras teorizações sobre Transposição Didática (TD). A priori, o conceito de TD era entendido como corpo teórico, passando, mais tarde, a ser incorporada no marco teórico da TAD.

A TAD está inscrita dentro do programa de investigação denominado “programa epistemológico” que tem sua origem nos trabalhos de Guy Brousseau (BOSCH, 2000). A característica principal do programa epistemológico consiste em considerar que o objeto primeiro de investigação da didática é a atividade matemática tal como se realiza em distintas instituições da sociedade.

A preocupação desse programa não se reduz aos processos cognitivos dos estudantes. Nele, emerge a necessidade, para a didática, de criar seu próprio modelo, explícito e testável, da atividade matemática. Assim, esse programa amplia sua perspectiva e considera a Didática da Matemática como a ciência de estudo das condições da produção e difusão de saberes úteis à sociedade e as necessidades do homem (BROUSSEAU, 1998). É no âmbito desse programa que nasce um modelo teórico que consiste em questionar, reformular noções, métodos e processos, que se designa de Teoria Antropológica do Didático.

Sobre a TAD, Chevallard (1996) coloca que ela deve ser encarada com um desenvolvimento e uma articulação das noções cuja elaboração visa permitir de maneira unificada um grande número de fenômenos didáticos, que surgem no final de múltiplas análises. Dessa forma, a TAD situa a atividade matemática e, por conseguinte, o estudo da matemática, dentro do conjunto das atividades humanas e de instituições sociais. Essa afirmação pode muito bem justificar a razão pela qual o autor se utilizou do termo “antropológico”. O esquema a seguir sintetiza o enfoque da TAD e os motivos pelos quais recebe esse nome.

Figura 1 – Esquema sintetizador do enfoque da TAD



Fonte: Autoria Própria

2.1 A ideia de Transposição Didática

Apesar da ideia de Transposição Didática ter sido introduzida, enquanto marco teórico, no campo da Didática da Matemática por Chevallard, é preciso esclarecer que esse termo é anterior e que, a maior parte dos pesquisadores em Didática atribuem a paternidade do conceito de Transposição Didática a Michel Verret (1975), a partir da publicação da sua tese de doutorado em Sociologia.

Verret define didática como “a transmissão daqueles que sabem para aqueles que não sabem. Daqueles que já aprenderam para aqueles que aprendem.” (1975, p. 139). Esse autor ainda destaca que não se pode ensinar um objeto sem transformação e que toda prática de ensino de um objeto pressupõe, em efeito, a transformação prévia desse objeto em objeto de ensino.

Chevallard retoma, por própria conta, essa ideia de transposição didática em 1985 com o lançamento de um livro de mesmo nome. A preocupação central dessa teoria, que mais tarde seria ampliada, é a respeito dos saberes, instituições e do jogo dos saberes nas instituições.

Nessa perspectiva, pode-se definir, então, *Saber* como sendo uma categoria particular de objetos que são socialmente compartilhados. Logo, algumas características inerentes à esse conceito podem ser evidenciadas, entre elas: o saber pode ser aprendido e ensinado; não pode ser conhecido sem ter sido aprendido; pode ser utilizado e, para existir, deve ser produzido. Antagonicamente, o conhecimento é marcado por sua dimensão individual, isto é, não é socialmente compartilhado. No entanto, um conhecimento pode ser uma relação a um saber.

A respeito do conceito de Instituição, Chevallard (2002) define como um dispositivo social total, que certamente pode ter apenas uma extensão muito reduzida no espaço social, mas que permite – e impõe – a seus sujeitos maneiras próprias de fazer e de pensar. A sala de aula, por exemplo, é uma instituição, bem como são a família, um hospital, a construção civil, o sistema educativo.

Para Chevallard (1989), cada saber é vinculado a pelo menos uma instituição na qual é posto em jogo em relação a um domínio de realidade. O ponto essencial é considerar que um saber não existe “no vácuo”, em um vazio social: cada saber aparece em um determinado momento, no contexto de uma certa sociedade, ancorado em uma ou mais instituições. Daí, então, segundo Chaachuoa e Bittar (2019), originam-se as seguintes proposições:

- ✓ Todo saber é saber de uma instituição;
- ✓ Um mesmo objeto do saber pode viver em diferentes instituições;
- ✓ Para que um saber possa viver em uma instituição, é preciso que ele se submeta a uma certa quantidade de restrições e de condições.

Como exemplo de duas relações institucionais diferentes referentes a um mesmo objeto, podemos citar o Objeto O: “Teorema de Pitágoras”. A relação institucional desse objeto com a Instituição I_1 “Ensino Médio” certamente é diferente da relação institucional desse com a Instituição I_2 “Construção Civil”.

Podemos, então, distinguir, quatro tipos de instituições relativamente às manipulações de um saber:

- ✓ Instituições de produção e conservação de um saber;
- ✓ Instituições de utilização de um saber;
- ✓ Instituições de ensino de um saber;
- ✓ Instituições de transposição de um saber.

A manipulação transpositiva permite a um saber passar de uma instituição para outra. Quando nos referimos a uma instituição de ensino, falamos de transposição didática. Nesse sentido, Chevallard (1991) assinala que um objeto do saber dito sábio que foi designado como saber a ensinar sofre um conjunto de transformações adaptativas que o tornarão adequado para tomar lugar entre os objetos de ensino. O ‘trabalho’ que um objeto de saber a ensinar faz para transformá-lo em um objeto de ensino se chama transposição didática.

Por saber sábio entende-se como saber científico em sua forma original, que está diretamente ligado aos saberes produzidos no âmbito da academia, apresentados em linguagem codificada e que, geralmente, são comunicados à sociedade através de artigos, livros, teses e relatórios. No caso específico da Matemática, o saber sábio corresponde aos objetos do saber matemático.

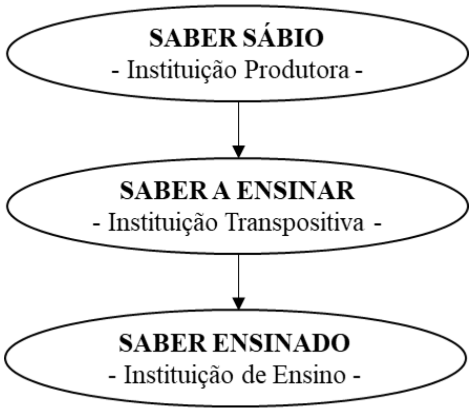
O saber a ensinar envolve a escolha dos conteúdos que devem estar prescritos nas estruturas curriculares e que, geralmente são apresentados nos programas de ensino, nas grades e matrizes curriculares, nos livros didáticos, em materiais de fins didáticos. Atualmente, no Brasil, com o advento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), as discussões em torno dos objetos de ensino na educação básica têm se dado em torno da adequação dos programas curriculares e materiais didáticos com a finalidade de unificação desses objetos, em nível nacional.

Já com relação ao saber ensinado, trata-se daquele que resulta do processo de ensino, aquele que está registrado no plano de aula. Almouloud (2011) chama a atenção para o fato de que, em didática da matemática, a aprendizagem ideal consiste em colocar o aluno em situações problemáticas cuja solução levaria à construção do conhecimento visado. Ele ainda acrescenta que

> O professor deve construir situações-problema em que o conhecimento matemático apontado seja recontextualizado e repersonalizado em vista de se tornar um conhecimento do aluno, ou seja, uma resposta mais natural às condições indispensáveis para que esse conhecimento tenha um sentido. (ALMOULOUD, 2011, p. 195)

Servat (2014) não teme ao afirmar que o processo de transposição didática representa uma unidade, todavia seu desenrolar ocorre em níveis e locais diferentes. Sendo assim, podemos distinguir esse processo em duas fases: transposição didática externa, na qual ocorre a seleção dos objetos de saberes produzidos pela ciência para ocuparem lugar entre os objetos de ensino, para serem incluídos nos programas curriculares e escolares; e a transposição didática interna, que envolve as transformações dos objetos de ensino realizadas pelos professores no processo de ensino. A definição de transposição didática pode ser representada pelo esquema a seguir:

Figura 2 – Esquema referente aos encadeamentos básicos da Transposição Didática



Fonte: Autoria Própria

Com relação as transformações do objeto de saber em objeto de ensino, Almouloud (2011, p.196) coloca que:

> devem ser necessariamente acompanhadas de uma análise epistemológica, das hipóteses de aprendizagem e do contexto social. O professor não

> transforma por iniciativa própria o saber sábio em objeto de ensino. A escolha dos objetos a ensinar é definida institucionalmente por meio de propostas curriculares, e é controlada de alguma forma pela sociedade (autoridades locais, pais de alunos, autoridades administrativas da educação).

Esse conjunto de influências na seleção dos objetos de ensino recebe o nome de noosfera. Ela é, conforme defende D'Amore (2007), a zona intermediária entre o sistema escolar (as escolha dos professores) e o ambiente social mais amplo (externo à escola). De acordo com Chevallard (1991), essa instituição (no sentido abstrato, pois trata-se de uma instituição escondida, não visível) é composta simultaneamente por representantes do sistema de educação e representantes da sociedade como, por exemplo, professores, pais de alunos, especialistas, representantes de órgãos políticos e autores de livros.

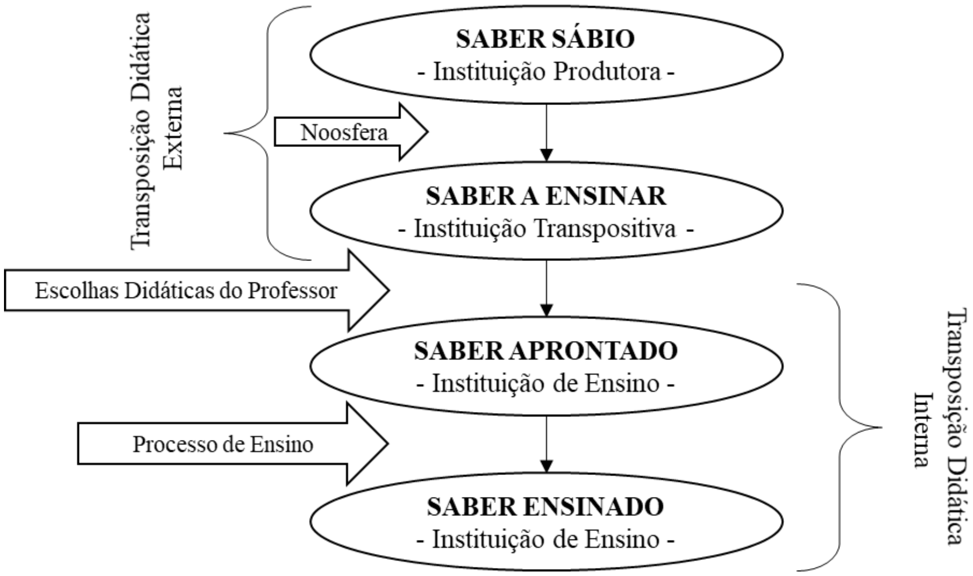
A respeito da noosfera, Chevallard (1991, p. 33) ainda pontua que ela "é considerada o centro operacional do processo de transposição, pois permite que os saberes passem de uma instituição a outra". Segundo Pais (2011), o resultado da influência da noosfera resulta não apenas na escolha dos objetos de ensino, como também na definição dos valores, objetivos e métodos que conduzem o sistema de ensino.

Precisamos ainda considerar que existe uma transformação entre o saber a ensinar e o saber ensinado que Ravel (2003) denomina de "saber aprontado". Ela advoga que um saber aprontado é um saber produzido pelo professor, segundo suas escolhas matemáticas e didáticas, na perspectiva de ensiná-lo.

No entanto, o saber ensinado não coincide necessariamente com os objetos de saberes a ensinar. O saber ensinado é aquele registrado no plano de aula do professor e, pode ter pouca relação ou nenhuma relação com a intenção prevista nos objetos programados (BARBOSA, 2017, p. 39). Por outro lado, não se pode garantir que, no plano individual, o conteúdo aprendido pelo aluno corresponda exatamente ao conteúdo ensinado pelo professor (PAIS, 2011, p. 22).

No intuito de sintetizar as etapas do processo transposição didática, retomamos o esquema da Figura 2, desta vez acrescentando as contribuições de Ravel (2003):

Figura 3 – Esquema referente as etapas do processo de transposição didática



Fonte: Autoria Própria

2.2 Relações Pessoais, Relações Institucionais

Chevallard (1998) considera que, são necessários três conceitos primitivos: os *objetos* O, as *pessoas* X e as *instituições* I. Contudo, há de se considerar que os objetos ocupam posição privilegiada da construção teórica por se constituírem o *material de base*. O autor ainda compara a ideia de objeto com o universo matemático contemporâneo, fundamentado na teoria dos conjuntos, que da mesma forma que tudo é um conjunto, todas as coisas são objetos. Até mesmo as pessoas X e as instituições I são objetos de um tipo particular.

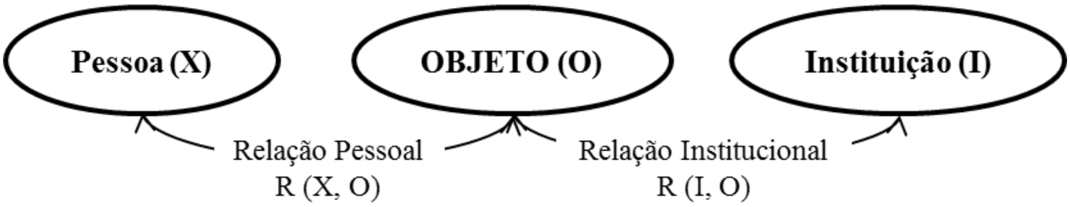
Um objeto existe a partir do momento em que uma pessoa X ou uma instituição I o reconhece como existente, ou seja, é preciso haver uma relação pessoal de X com O, e uma relação institucional de I com O, representada por R (I, O). A relação pessoal de um indivíduo X com um objeto O, denotada por R(X, O), designa o sistema de todas as interações que X pode ter com o objeto O. Segundo Chevallard (2002), isso parece dar sentido à ideia de *antropologia do conhecimento* ou *antropologia cognitiva*.

Chevallard (2002) considera que todo indivíduo é uma pessoa, inclusive uma criança muito pequena ou um bebê (aquele que ainda não fala). Com o tempo, o sistema de relações pessoas de X evolui: objetos que não existiam para ele começam a existir; outros deixam de existir; para outros, finalmente, muda a relação pessoal de X. Nesta evolução, o invariante é o indivíduo, que muda é a pessoa.

Desde o nascimento, todo indivíduo está sujeitado a múltiplas instituições, como a sua família, por exemplo, das quais ele se torna o sujeito. Geralmente, é por suas sujeições, pelo fato de ser o sujeito de muitas instituições, que o indivíduo X é constituído em pessoa.

O esquema abaixo apresenta, de maneira sucinta, esses conceitos primitivos e as relações existentes entre si.

Figura 4 – Esquema sobre conceitos primitivos da TAD e suas relações



Fonte: Autoria Própria

As análises de um ponto de vista da Transposição Didática limitavam-se a distinguir apenas objetos matemáticos, paramatemáticos e protomatemáticos. Dessa forma, o alargamento do quadro, conduziu Chevallard a propor uma teorização em que qualquer objeto pudesse ser analisado. Então, nessa perspectiva, a título de exemplo, podemos dizer que

> a função logarítmica é, evidentemente, um objeto (matemático), mas existe igualmente o objeto escola, o objeto professor, o objeto aprender, o objeto saber, o objeto dor de dente, o objeto fazer xixi, etc. Assim, passa-se de uma máquina a pensar um universo didático restrito a um conjunto de máquinas de alcance mais amplo, apto, em princípio, a nos permitir situar a didática no seio da antropologia (CHEVALLARD, 1996, p. 127-128).

2.3 Praxeologia Matemática ou Organização Matemática

Com objetivo de encontrar um modelo explícito e testável da atividade matemática, considerada dentro do conjunto das atividades humanas que são realizadas nas diferentes instituições sociais, Chevallard em meados dos anos 90 elaborou a noção de *praxeologia* que é uma das noções chave da TAD.

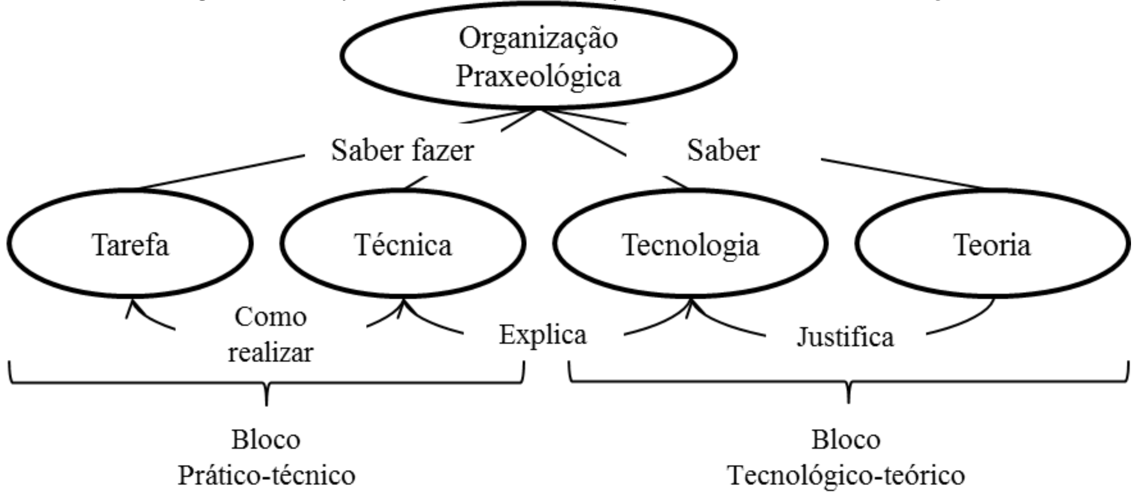
O postulado básico dessa teoria consiste em considerar que toda atividade humana regularmente realizada pode descrever-se como um modelo único, que se resume com a palavra *praxeologia*, negando a visão particularista do mundo social e incluindo a atividade matemática dentro de um modelo mais amplo de atividade humana (CHEVALLARD, 1999). Assim, uma praxeologia que descreve uma atividade matemática ou o saber que dela emerge se chama *praxeologia matemática* ou *organização matemática* (OM). A esse respeito, Bosch assinala que:

> Uma organização matemática é uma entidade composta por: *tipos de problemas* ou *tarefas problemáticas*; *tipos de técnicas* que permitem resolver os tipos de problemas; *tecnologias* ou discurso ("logos") que descrevem ou explicam as técnicas; uma *teoria* que fundamenta e organiza os discursos tecnológicos. (BOSCH, 2000, p. 16, tradução nossa)

Mais precisamente, numa organização matemática é possível distinguir dois aspectos inseparáveis que podem ser definidos a partir dos radicais etimológicos da própria palavra *praxeologia*:

- O nível da *prática* ou *<u>práxis</u>* ou do *saber fazer*, que engloba um certo tipo de tarefas e questões que se estudam, assim como as técnicas para resolvê-los. Este primeiro bloco se denomina *<u>bloco prático-técnico</u>*;
- O nível do *<u>logos</u>* ou do *saber*, em que estão situados os discursos racionais sobre a prática que descrevem, explicam e justificam as técnicas que se utilizam, e que recebe o nome de tecnologia. Também dentro do *saber*, aparece um segundo nível de descrição, explicação e justificativa que se denomina de *teoria*. Este segundo bloco se denomina *<u>bloco tecnológico-teórico</u>*.

Figura 5 – Mapa Conceitual dos componentes de uma Praxeologia



Fonte: Autoria Própria

A partir da noção de praxeologia, Bosch (2000) entende que fazer matemática consiste em ativar uma organização matemática, isto é, resolver determinados tipos de tarefas com determinados tipos de técnicas (o "saber fazer") de maneira inteligível, justificada e fundamentada (mediante o "saber"). Esse trabalho pode conduzir a construção de novas organizações matemáticas ou, simplesmente, a reprodução de organizações previamente construídas. Nessa perspectiva, a autora ainda advoga que "Ensinar e aprender matemática corresponde à atividade de reconstrução de organizações matemáticas para poder utilizá-las em novas situações e sob diferentes condições" (BOSCH, 2000, p. 16).

2.3.1 Componentes de uma praxeologia

A raiz da noção de praxeologia se encontra nas noções solidárias de <u>*tarefa*</u> *t*, e de *tipos de tarefas* T. Quando uma tarefa *t* faz parte de um tipo de tarefas T, se escreverá *t* Є T. Segundo Chevallard (1999), na maioria dos casos uma tarefa se expressa geralmente por um verbo como, por exemplo, *limpar* a casa, *desenvolver* uma expressão literal dada, *dividir* um inteiro por outro, etc.

Diante dessas considerações, podemos afirmar que a noção de tarefa, ou melhor, do tipo de tarefa, supõe um objeto relativamente preciso. Isso implica dizer que, o verbo em si pode caracterizar um tipo gênero de tarefa, mas ele apenas não é capaz de caracterizar um tipo de tarefa. Por exemplo, *calcular* representa um gênero de tarefa. Mas *calcular*, simplesmente, não haveria tarefa. Mas, se dizemos *calcular o valor exato de uma expressão numérica* teremos um tipo de tarefa.

Podemos dizer que se um tipo de tarefa T é considerado em certas instituições é porque existe uma <u>*técnica*</u> τ ou um número limitado de técnicas que permitem não apenas resolver essa tarefa, mas também resolver muito mais tarefas do mesmo tipo.

É muito comum que numa instituição, a respeito de certo tipo de tarefas, se reconheça apenas uma técnica, conhecida como técnica canônica e exclua técnicas alternativas que podem existir em outras instituições. Esta exclusão tem relação com a ilusão de "naturalidade" das técnicas institucionais. Pensando em situações de ensino e aprendizagem no âmbito da matemática, professores que desconheçam ou não reconheçam a validade de técnicas alternativas na resolução das tarefas propostas além daquelas postas por ele, pode acabar restringindo o arsenal cognitivo dos estudantes.

Segundo Chevallard (1999), é preciso considerar que, uma determinada técnica τ pode não ser suficiente para realizar as tarefas *t* Є T. Ela pode dar conta de uma parte P(τ) das tarefas T e não ter êxito sobre T\ P(τ). A partir desta afirmação, pode-se dizer que uma técnica pode ser superior à outra, se não sobre toda T, mas sobre alguma parte dela. Por isso, é preciso considerar os limites de alcance da técnica ou a técnica tende a fracassar diante de T\ P(τ).

Nenhuma técnica pode sobreviver com normalidade em uma instituição se não aparece como uma maneira de fazer ou proceder corretamente, compreensível e justificada. Por tanto, a existência de uma técnica pressupõe que existe em seu entorno um discurso interpretativo e justificativo da técnica, que é o que chamamos de *tecnologia* θ. A esse respeito, Chevallard (1999, p. 4) considera que

> O estilo de racionalidade posta em jogo varia, é claro, no espaço institucional e, em uma determinada instituição, à beira da história desta instituição, de modo que uma racionalidade institucionalmente dada poderá aparecer... como pouco racional em outra instituição.

Ainda sobre tecnologia θ, Chevallard (1999) afirma que em uma instituição I, qualquer que seja o tipo de tarefas T, a técnica τ relativa a T está sempre acompanhada de ao menos um embrião ou mais frequentemente ainda, de um vestígio de tecnologia θ e que, em muitos casos, alguns elementos tecnológicos estão integrados na técnica. Câmara dos Santos e Bessa de Menezes (2015) afirmam que quando em uma instituição I existe, em princípio, somente uma técnica (t) que é reverenciada, reconhecida e empregada, essa técnica adquire um papel de “autotecnológica”, ou seja, não irá necessitar de justificativas, pois essa é a melhor maneira de se fazer nesta instituição I. Por outro lado, Rosa dos Santos (2015) afirma que, quando uma tecnologia não é explicitada claramente, a maneira como se resolve a tarefa assume a dupla função de ser técnica e tecnologia ao mesmo tempo. Já Santos e Freitas (2017) defendem que, em dado momento ou instituição, uma determinada técnica pode ser uma tecnologia e, uma tecnologia que justifica a técnica utilizada pode, em outra etapa da aula ou em outro ano escolar, passar a ser uma técnica.

Além de justificar a técnica e torná-la inteligível, a tecnologia tem a função de contribuir para modificar a técnica com a finalidade de ampliar seu alcance e, o que é mais importante, tornar possível a produção de novas técnicas. Também fazem parte da tecnologia associada a uma técnica as proposições que descrevem seu alcance, sua relação com outras técnicas, as possíveis generalizações e as causas de suas limitações.

Toda tecnologia precisa também de uma justificação já que suas afirmações, mais ou menos explícitas, pode se pedir uma razão, uma explicação. Passa-se, então, a um nível superior de justificação-explicação-produção, que chama *teoria* Θ, que tem para a tecnologia o mesmo papel que esta tem para a técnica, ou seja, uma tecnologia da tecnologia. A esse respeito, Almeida (2016, p. 99) enfatiza que

> a teoria assume para a instituição ou para a pessoa uma função, no caso, teórica para justificar e esclarecer. No entanto, os caminhos trilhados para tornar efetiva essa função não têm sido tão "transparentes", pois a prática educacional tem mostrado uma grande quantidade de abstração na apresentação da teoria por parte dos professores e na disposição dela (da teoria) nos livros didáticos.

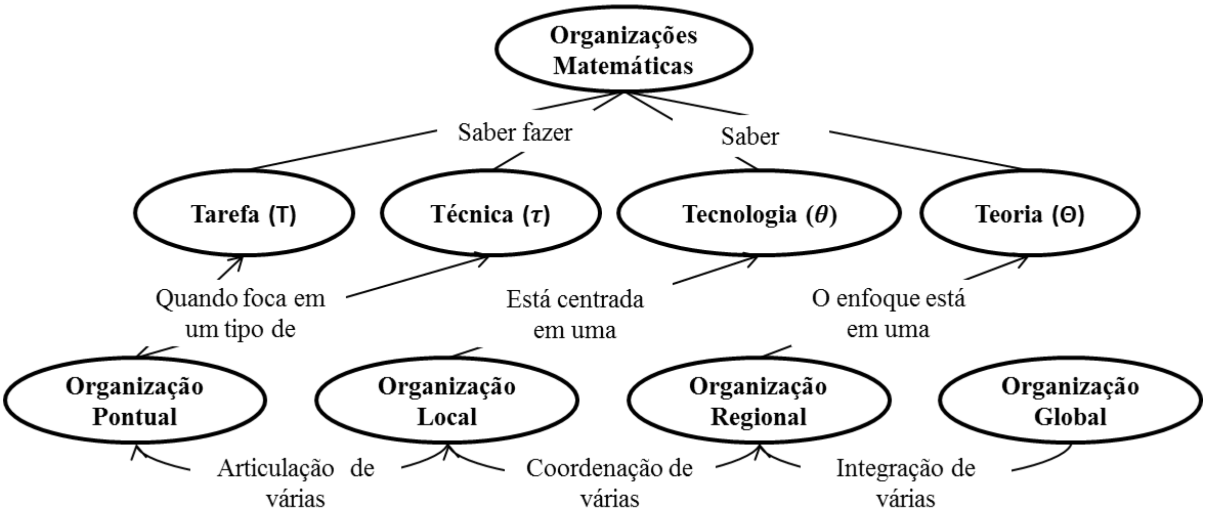
Por sua vez, Chevallard (1999) introduziu a distinção de diferentes tipos de Organizações Matemáticas (OM), de acordo com o grau de complexidade de seus componentes:

- ✓ *Organizações Pontuais* (OMP): Elas são geradas pelo que é considerado na instituição como um único tipo de tarefa e é definido a partir do bloco técnico-prático. Neste primeiro tipo de organização, os tipos de tarefas e as técnicas têm um papel claro e predominante. Além disso, raramente se encontram OMP já que, geralmente, uma teoria responde à várias tecnologias, cada uma das quais, a sua vez, justifica e torna inteligível várias técnicas correspondentes a vários tipos de tarefas. Ruiz Olarría (2015) advoga que é difícil encontrar para as OMP um discurso tecnológico-teórico que as descrevam, estruturem e justifiquem de forma mais ou menos sistemática;
- ✓ *Organizações Locais* (OML): É o resultado da integração de várias organizações pontuais. Em cada OML, o discurso tecnológico assume o protagonismo, já que ele serve para justificar, explicar, relacionar entre elas e produzem as técnicas de todas as OMP que a compõem. Neste caso, a técnica perde o *status* de autotecnológica;
- ✓ *Organizações Regionais* (OMR): Obtida mediante a coordenação, articulação e posterior integração de várias organizações locais a uma teoria

matemática em comum. Esta integração implica que o discurso teórico assuma o papel central;

- ✓ *Organizações Globais* (OMG): Emergem adicionando várias organizações regionais da integração de diferentes teorias.

Figura 6 – Mapa Conceitual dos elementos e distinção de OM's



Fonte: Autoria Própria

2.4 Organização Didática e Momentos de Estudos

A consideração dos vários processos que dizem respeito à construção matemática permite identificar seus aspectos invariantes, ou seja, as dimensões ou momentos que estruturam qualquer processo de elaboração matemática, independentemente de suas características culturais, sociais, individuais ou de outra natureza.

No desenvolvimento e análise da atividade matemática, dois aspectos inseparáveis aparecem: por um lado, o trabalho matemático que pode ser construído a partir do estudo de situações-problema e, por outro lado, a forma como o trabalho matemático pode ser construído, isto é, a forma como o processo de estudo dos problemas pode ser organizado. O primeiro aspecto é, de fato, resultado da construção, isto é, a organização matemática. O segundo aspecto é o processo de estudo e construção, o que denominamos de *Organização Didática.*

Para Chevallard (1999), esses dois aspectos, de fato, são inseparáveis porque não há organizações matemáticas sem um processo de estudo que as criem, da mesma forma que não existe um processo de estudo sem organizações matemáticas em construção. Almeida (2016) ainda assinala que essas organizações apresentadas se formam em pares (OM, OD), corroborando com a ideia de indissociabilidade existente entre essas organizações.

Dessa forma, uma OD surge a partir do momento em que existe uma OM a ser posta em prática. Assim, o processo de estudo se situa num espaço determinado denominado por Chevallard (1999) *momentos didáticos* ou *momentos de estudos*, sem a intenção de se propor uma estrutura linear dos processos de estudo. Isso implica dizer que cada momento poder ser vivido com diferentes intensidades, em tempos diversos, quantas vezes se necessite, inclusive é possível que alguns deles apareçam simultaneamente. É importante destacar que cada um dos seis momentos de estudos tem uma função específica necessária para realizar o processo corretamente.

Chevallard (1999, p. 22-25) descreve os seis momentos de estudo de uma organização matemática nos seguintes termos:

1. O *primeiro momento* de estudo é o do primeiro encontro com a organização matemática que está em jogo. Este primeiro encontro ou reencontro pode ocorrer de várias maneiras diferentes, sendo que uma dessas maneiras será a partir de pelo menos um tipo de tarefa. Ele também pode acontecer várias vezes em função, sobretudo, dos entornos matemáticos e didáticos estabelecidos.
2. O *segundo momento* é o da exploração do tipo de tarefas e da elaboração de uma técnica relativa a este tipo de tarefas. De fato, o estudo e a resolução de um problema de um determinado tipo está sempre a par com a constituição de pelo menos um embrião de técnica, a partir do qual uma técnica mais desenvolvida pode eventualmente surgir. É assim que uma dialética fundamental é enquadrada: estudar problemas é um meio para criar e implementar uma técnica relacionada a problemas do mesmo tipo, uma técnica que será então o meio para resolver problemas desse tipo quase rotineiramente.
3. O *terceiro momento* de estudo é o da constituição do entorno tecnológico-teórico [θ/Θ]. De maneira geral, este momento tem uma estreita relação com

cada um dos outros momentos. Assim, desde o primeiro encontro com um tipo de tarefas, geralmente existe uma conexão com o entorno tecnológico-teórico elaborado anteriormente e o início da criação de um novo ambiente, que se tornará mais preciso com a emergência da técnica. No ensino tradicional, esse momento constitui a primeira etapa de estudo e as tarefas aparecem como aplicação do bloco tecnológico-teórico.

4. O *quarto momento* é do trabalho com a técnica, que deve simultaneamente melhorar a técnica, tornando-a mais eficiente e mais confiável, o que geralmente requer o ajuste da tecnologia desenvolvida até então, e aumentando o domínio dela. Este passo de teste da técnica envolve, em particular, um conjunto de tarefas adequado de forma qualitativa e quantitativa. Para Artaud (2018), este momento é geralmente realizado nas organizações didáticas configuradas no ensino secundário (no caso do Brasil, no ensino médio) através do dispositivo de resolução de exercícios.
5. O *quinto momento* é o da institucionalização, que delimita e especifica os elementos constituintes da organização matemática construída. Nesse momento, elementos que fizeram parte do estudo em fases anteriores podem ser descartados e outros podem ser integrados definitivamente a partir da explicitação oficial desses elementos pelo professor ou pelo aluno, tornando-se parte integrante da cultura da instituição ou da classe (Almouloud (2007).
6. O *sexto momento* é o da avaliação, que se articula com o elemento da institucionalização. Na prática, sempre chega um momento em que o que foi aprendido deve ser observado, porque este momento de reflexão onde, seja qual for o critério e o juiz, se examina o valor que foi aprendido, esse momento de verificação que, apesar das memórias da infância, não é de todo uma invenção da instituição escolar, ela participa de fato na "respiração" de toda atividade humana. Em relação a esse momento, Almouloud (2007) ainda acrescenta que é uma fase muito importante, pois se supõe que o professor toma por objeto de estudo as soluções produzidas por seus alunos. O aluno, por sua vez, observa na realização de sua solução determinadas “maneiras de fazer”, analisando-as e avaliando-as para “desenvolver” sua própria solução.

Para Chevallard (1999, p. 25), o modelo dos momentos do estudo tem, para o professor, duas grandes finalidades. Em primeiro lugar, constitui uma grade para a análise dos processos didáticos. Posteriormente, permite colocar claramente o problema da realização dos diferentes momentos do estudo. Por exemplo, como realizar concretamente o primeiro encontro com a organização matemática? Com esse tipo de tarefas? Como realizar o estudo exploratório de um determinado tipo de tarefas? Como realizar a institucionalização? Como fazer o momento da avaliação? Estas são questões que são colocadas para o professor e que podem ser responda com uma fórmula genérica: criando as situações didáticas apropriadas.

2.5 Avaliação *a priori* das Organizações Matemáticas e Didáticas

Antes de tudo, é preciso considerar que, segundo Chevallard (1999), a avaliação é sempre e necessariamente relativa. O valor atribuído a um objeto, nunca é intrínseco, absoluto, porque a atribuição de valor se refere sempre, de maneira implícita ou não, a certo uso social do objeto avaliado, ou seja, se avalia sempre a partir de um determinado ponto de vista.

De forma mais particular, consideraremos a avaliação numa classe I, por um aluno *x*, ou um professor *y,* ou um observador *z*, de um objeto *o* que será uma organização matemática OM, ou uma organização didática OD, associadas a um tema de estudo matemático. A avaliação *a priori* das organizações matemática e didática, segundo Almouloud (2007), permitirá ao professor e/ou pesquisador afirmar em qual medida esses critérios são satisfatórios para avaliar a organização matemática estudada. Dessa forma, apresentaremos alguns critérios de análise de uma OM no quadro a seguir, baseados nos critérios apresentados por Chevallard (1999) e nas contribuições de Almouloud (2007). Esses critérios, na verdade, têm se constituído em uma ancoragem ou referência para muitos estudos que têm se dedicado à análise das OMs.

Quadro 1 – Critérios para análise de uma OM

Elementos da Organização Matemática	**Critérios adotados**	**Conjunto de indagações**
Tarefa (T)	Identificação	Os tipos de tarefas T são apresentados de forma clara e bem identificados?
	Razão de Ser	As razões de ser dos tipos de tarefas T são explicitadas? Ou, ao contrário, esses tipos de tarefas T aparecem sem motivos válidos?
	Pertinência	Quais tipos de tarefas T considerados são representativos das situações matemáticas frequentemente encontradas? São pertinentes as necessidades dos alunos? Ou, ao contrário, aparecem sem relação com a atividade matemática ou extramatemática dos alunos?
Técnica (τ)	Elaboração	As técnicas propostas são efetivamente elaboradas ou somente esboçadas?
	Facilidade	As técnicas são de fácil utilização?
	Alcance	As técnicas são imprescindíveis para o cumprimento do tipo de tarefas proposto?
	Confiabilidade	São fidedignas e confiáveis, tendo em vista as condições de sua utilização no cumprimento do tipo de tarefas proposto?
	Possibilidade de evolução	As técnicas utilizadas para resolver o tipo de tarefas podem evoluir?
Tecnologia e Teoria [θ, Θ]	Apresentação e justificativa do enunciado	Dado um enunciado, o problema de sua justificativa está somente colocado ou é considerado tacitamente como pertinente, evidente, natural ou ainda bem conhecido?
	Forma de justificativa: canônica ou não	As formas de justificativa utilizadas são próximas daquelas matematicamente válidas?
	Tipo de justificativa	Essas justificativas são adequadas tendo em vista o problema colocado? São do tipo explicativas, dedutivas, etc?
	Existência de elementos teóricos explícitos ou implícitos	Os argumentos utilizados são cientificamente válidos?
	Resultado tecnológico	O resultado tecnológico de uma determinada atividade pode ser explorado para produzir novas técnicas para resolver novas tarefas?

Fonte: Autoria própria

Em relação à avaliação de uma organização didática, Chevallard (1999) enfatiza que, mesmo se tratasse da questão de forma resumida, seria necessário um desenvolvimento mais amplo para tratar dessa avaliação, de forma que, o autor se absteve de definir critérios para tal ou, até mesmo, de tratar sobre. Contudo, os momentos de estudos citados anteriormente podem muito bem servir de critérios de análise do desenvolvimento de uma organização didática.

3 COMBINATÓRIA

Cada disciplina acadêmica tem uma estrutura articulada e hierarquicamente organizada de conceitos que é seu sistema de informação e que deve ser ensinado aos alunos. Na Combinatória, contar é o conceito mais geral. Os aspectos mais rudimentares dessa ideia estão intrinsecamente ligados à vida cotidiana das pessoas e são utilizados nas mais diversas atividades humanas, desde as mais simples até as mais complexas. No âmbito escolar, por exemplo, os alunos desde o início de sua formação estão sempre em contato com problemas e situações nos quais a contagem de elementos está presente.

Autores como Mol (2013) e Eves (2011), por exemplo, não temem ao afirmar que o processo de contar parece ser a ideia matemática mais simples e que seu surgimento antecede ao aparecimento da escrita e até mesmo da civilização. Portanto, a maneira como esse processo ocorreu é largamente conjectural, tendo em vista a existência de poucos elementos concretos para sua análise.

Todavia, pode-se admitir que a espécie humana, mesmo em tempos mais remotos, tinha algum senso numérico. Eves (2011) afirma que o início da ideia de contar se deu quando o homem desenvolveu a capacidade de comparar conjuntos de objetos e estabelecer entre eles uma correspondência um a um, ou seja, o princípio da correspondência biunívoca.

Devido à ausência de desenvolvimento de um sistema de numeração, nesse tipo de contagem, os marcadores eram concretos. Para uma contagem de um conjunto de animais, por exemplo, podia-se fazer nós numa corda, fazer ranhuras no barro, numa pedra ou num fragmento de osso ou produzir entalhes num pedaço de madeira.

No entanto, é preciso considerar que, quando se fez necessário efetuar contagens mais extensas, o processo de contar teve de ser sistematizado. Mol (2013), considerando vários exemplos advindos da linguística e da antropologia, pondera que a contagem iniciou com os dedos e que a maneira de usá-los foi determinante na escolha das bases para os sistemas de numeração. O autor ainda cita, como exemplos, a base 10 (utilizada atualmente no nosso sistema de numeração) empregada pelos antigos egípcios, a base 20, usada pelos maias (motivados pelos 10 dedos das mãos e dos 10 dedos dos pés). Ele ainda complementa que a própria palavra *dígito*, do latim *digitus*, para significar numeral escrito é um forte indício da utilização dos dedos na origem do processo de contagem.

Segundo Boyer (1972), o desenvolvimento da linguagem contribuiu de maneira essencial para que surgisse o pensamento matemático abstrato. No entanto, palavras que exprimem ideias numéricas apareceram lentamente, de forma que, *sinais* para números precederam *palavras* para números.

Eves (2011) coloca que o tipo mais antigo de sistema de numeração a se desenvolver parece ter sido aquele chamado *sistema de agrupamentos simples*. Nessa modalidade de sistema, os números são expressos pelo uso de símbolos aditivamente, repetindo-se cada um deles a quantidade de vezes necessária. Os hieróglifos egípcios, cujo emprego remonta acerca do ano 3400 a.C. e usados principalmente para fazer inscrições em pedras, fornecem um exemplo de sistema de agrupamentos simples.

Esse autor ainda aponta que há exemplos em que um sistema de agrupamentos simples evoluiu para o que pode ser chamado *sistema de agrupamentos multiplicativo*. Nessa nova configuração, empregam-se símbolos de dois conjuntos multiplicativamente de maneira a mostrar quantas unidades dos grupos de ordem superior são necessárias. Um exemplo desse tipo de sistema é o sistema de numeração chinês-japonês tradicional.

Outros tipos de sistemas de numeração surgiram ao longo do desenvolvimento da História como, por exemplo, os sistemas de numeração cifrados e os sistemas de numeração posicional (nosso próprio sistema de numeração é um exemplo deste último).

A respeito do desenvolvimento de processos aritméticos, Eves (2011) assinala que, contrariamente do que se imagina, os sistemas de numeração antigos favoreciam os cálculos mais simples. A adição e a subtração num sistema de agrupamentos simples requer apenas a capacidade de contar o número de símbolos de cada espécie e a conversão, posteriormente, em unidades de ordem superior. Já num sistema de numeração cifrado, bastava-se memorizar o suficiente das tábuas da adição e da multiplicação que o trabalho pode ser levado a efeito em grande parte como o fazemos hoje.

Com o advento dos sistemas de numeração, a contagem foi tornando-se cada vez mais abstrata e o processo de contar passou a ser enumerar. Entretanto, para Benítez e Brañas (2001), quando o número de elementos de um conjunto é “muito grande” ou mesmo quando a contagem apresenta um maior “grau de dificuldade”, o procedimento vai além de enumerar. Faz-se necessário, então, a introdução de operações aritméticas mais elaboradas do que uma simples enumeração. Corroborando com essa ideia, Silva (2009) assinala que a necessidade de ampliação das técnicas básicas de contagem para as técnicas chamadas mais sofisticadas do que considera a nossa aritmética elementar, faz com que a ideia de contagem progrida para o campo da Combinatória, chegando aos princípios aditivo e multiplicativo.

O princípio aditivo está associado a situações em que se pode realizar uma decisão de maneiras m e a outra, de n e não há como realizar as duas simultaneamente, o total é $m + n$ (PINTO, 2014; RIFO, 2017). Traduzindo essa ideia para a teoria dos conjuntos, podemos dizer que Se A e B são dois conjuntos disjuntos, m e n elementos, respectivamente, estão $A \cup B$ possui $m + n$ elementos. Para exemplificar tal princípio, consideramos o exemplo a seguir:

Exemplo 1: Paula tem 5 pares de tênis e 4 pares de sandálias. De quantas maneiras ela pode escolher um par de calçados para usar?
Solução: como os pares de tênis e de sandálias são conjuntos disjuntos, ou seja, não possuem pelo menos um elemento em comum, e como Paula quer calçar apenas um par de calçados sem nenhuma restrição, ela poderá calçar um par de calçados de $5 + 4 = 9$ maneiras diferentes.

A respeito do princípio multiplicativo, Pinto (2014) considera que

> Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e, se para cada uma dessas m maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é $m \cdot n$. Pensando em termos de conjuntos, outra maneira de se pensar é: se A e B são dois conjuntos com m e n elementos respectivamente, então o número de elementos de A x B (produto cartesiano) é $m \cdot n$. (PINTO, 2014, p. 12)

Exemplo 2: Quantas duplas diferentes, menino-menina, podemos formar considerando um grupo com 3 meninos e 4 meninas?

Solução: Este procedimento consiste em escolher um menino e, depois de ter escolhido o menino, escolher uma menina (pode-se escolher primeiro a menina e depois o menino, obtendo-se o mesmo resultado final). Para o primeiro passo, temos 3 possibilidade de escolha, e para o segundo, temos 4 possibilidades, independentemente do menino escolhido. Assim, podemos formar esta dupla de $3 \cdot 4 = 12$ formas diferentes.

Benítez e Brañas (2001) trazem à reflexão o fato de que, embora a combinatória tenha emergido das bases da aritmética, não é qualquer contagem que envolve a enumeração ou mesmo a simples aplicação das regras da soma ou do produto que caracteriza um problemas desse campo.

Diante disso, faz-se necessário se investir em uma melhor demarcação acerca do que trata o campo da Combinatória, de forma a tentar esclarecer qual é o seu objeto de estudo e quais são as bases e relações conceituais que dão sustentação aos raciocínios que estão subjacentes aos problemas de contagem do tipo Arranjo, Permutação e Combinação.

Tomando-se como base alguns livros e estudos que tratam desse conteúdo podem-se trazer definições como a que apresenta Merayo (2001, p.229) assinalando que:

> a análise combinatória, ou simplesmente combinatória, é a técnica de saber quantos objetos há em um conjunto sem realmente ter que contá-los ou enumerá-los, porque essa técnica não necessita listar ou enumerar todos os elementos que formam o conjunto.

Muito próximo a essa definição Torres (2004) argumenta que se pode dizer que a análise combinatória é a técnica que permite saber quantos elementos existe em um conjunto sem realmente ter que os conhecer.

Benítez e Brañas (2011*,* p. 125), por exemplo, colocam que “com a Análise Cominatória amplia-se as técnicas básicas de contagem, estudando os arranjos, permutações, combinações, partições e distribuições”. Quanto a Morgado *et al.* (2006, p.01) definem a Análise Combinatória como “a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas”.

Fazendo-se uma breve análise das definições apresentadas acima, se percebe que ou se trata de um discurso muito formal e demasiadamente abstrato, como é o caso do que propõe Morgado *et al* (2006) ou são definições bastante evasivas porque tratam o tema de forma superficial conforme se pode observar nas outras definições citadas.

Já outros autores, como é o caso de Santos *et. al.* (2008), quando se referem aos conteúdos que fazem parte desse campo, parecem estar muito mais preocupados em servir de fonte de exercícios para professores e alunos do que fornecer um texto que traga uma abordagem conceitual importante.

Além disso, a grande maioria dos autores, conforme lembra Silva (2009), não chegam a fazer distinção entre Combinatória e Analise Combinatória. Morgado *et al* (1991), por exemplo, apontam que os primeiros cursos de Análise Combinatória acabam privilegiando o estudo das *combinações*, *arranjos* e *permutações*, o que de certa forma conduz à ideia de que tal estudo em si caracteriza a Análise Combinatória. Devido a isso, terminam eliminando outras abordagens, a exemplo das formas (técnicas) de contagens como: o principio das gavetas de Dirichlet, o princípio da inclusão-exclusão, as funções geradoras, dentre outras.

Uma definição que pode ser considerada bem razoável é a que propõe Hazzan (2013, p. 1) quando advoga que

> A análise combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos, agrupamentos formados sob certas condições.

Corroborando com essa ideia, Silva (2009) aponta que a Combinatória é o campo da matemática que estuda a contagem de grupos de objetos, ou seja, a contagem dos subconjuntos nos quais se obedece a uma condição dada.

Outra definição muito próxima às duas últimas apresentadas é a proposta por Borba *et al* (2015, p. 1350) ao afirmar que “A Combinatória estuda técnicas de contagem – direta e indireta – de agrupamentos possíveis, a partir de elementos dados, que satisfaçam a determinadas condições.”. As autoras ainda reforçam a ideia de que a contagem de problemas combinatórios vai além de uma mera enumeração de objetos expostos, pois as contagens realizadas nesse campo devem atender a certos critérios.

Essas ideias possibilitam uma compreensão mais esclarecedora do que as outras até então apresentadas, uma vez que discriminam quem são os objetos da contagem, ou seja, grupos de objetos ou subconjuntos formados a partir de um conjunto finito dado e que obedecem a certas condições para sua formação.

No que diz respeito à natureza dos problemas que compõem esse campo matemático, conforme assinalam Santos *et. al.* (*2008*), são basicamente subdivididas em dois tipos de problemas: os problemas de contagem e os problemas de existência.

Complementando essa ideia, Morgado *(*2006, p. 1) coloca que há de fato dois tipos de problemas que ocorrem frequentemente em Combinatória, uns que buscam demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições e outros que contam ou classificam os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas.

A partir daí se pode concluir que os dois casos acima citados por Morgado (2006) correspondem respectivamente aos problemas que Santos *et. al.* (2008) classifica como problemas de existência e problemas de contagem.

Como o foco de interesse desse trabalho está centrado nos problemas de contagem, mais especificamente naqueles em que os objetos da contagem correspondem a subconjuntos ou agrupamentos binários, ternários..., dependendo do número de elementos que vai se tomar do conjunto gerador, nesses casos o Princípio Multiplicativo (P.M.) é uma ferramenta básica que fornece um bom instrumento de resolução.

Entretanto, a aplicação direta do P.M. nos casos acima citados pode às vezes tornar-se trabalhosa. Além disso, com a necessidade de não apenas contar, mas, também de classificar esses tipos de agrupamentos é preciso analisar as diferentes disposições que se podem adotar os elementos as quais se constituem basicamente em duas formas distintas a serem consideradas: a natureza e a ordem dos elementos na formação dos subconjuntos, chegando aos conceitos de Arranjo, Permutação e Combinação os quais são os objetos de interesse desse estudo.

Sendo assim, a partir de agora todos os esforços serão voltados para se fazer uma apresentação que consiga melhor demarcar os problemas de contagem do tipo Arranjo, Permutação e Combinação. No entanto, vale apena registrar que nesse momento tais conceitos serão definidos para os agrupamentos em que não se admite a repetição de elementos no mesmo subconjunto, caracterizando assim os agrupamentos do tipo simples.

Além disso, como se podem observar ora tem se feito referência a esses objetos matemáticos como conceitos ora como técnicas, isso está relacionado com a ideia de que a identificação do que está sendo contado, ou seja, das propriedades que demarcam o objeto da contagem, interfere na forma de contar, ou melhor, na técnica que vai ser utilizada para contar (RUFINO, 2015).

Entretanto, de uma forma geral, os autores de livros textos que abordam esse tema fazem apresentações demasiadamente formais a respeito desses objetos, privilegiando contextos definidores, estáticos, sem explorar a construção conceitual que lhe dá sustentação. Esse aspecto vem a justificar por que grande parte dos alunos não consegue compreendê-los.

A partir de um razoável levantamento observou-se, dentre os autores pesquisados, que a forma com que Merayo (2011) faz tais apresentações pode ser considerada mais esclarecedora, tendo em vista que busca analisar as distintas disposições com que se abordam os elementos, ou seja, estabelece a distinção desses agrupamentos a partir das ideias de ordem e natureza de seus elementos. Estudos como os de Pessoa e Borba (2008; 2009) e Silva e Pessoa (2015), por exemplo, baseiam-se também na apresentação desses agrupamentos por esse autor.

3.1 Arranjo Simples

Para Merayo (2011, p. 236) os Arranjos Simples podem ser apresentados da seguinte forma:

> Seja um conjunto de **m** elementos distintos. Recebem o nome de arranjo de ordem **n** desses **m** elementos, a todo grupo ordenado formado por **n** elementos tomados dos **m,** de tal maneira que dois grupos são considerados distintos se diferem em algum de seus

> elementos ou bem, se tendo os mesmos elementos, diferem pela ordem em que estão colocados.

Nessa definição o autor chama atenção para o fato de que os conjuntos formados por **n** elementos, gerados a partir dos **m** elementos distintos de outro conjunto finito dado, são chamados Arranjos quando se distinguem por dois tipos de características: grupos distintos por natureza, pois diferem pelo menos por um de seus elementos e grupos distintos por ordem, pois ainda que possuam os mesmos elementos, ou seja, possuam a mesma natureza, diferem pela ordem em que estão dispostos os elementos. Sendo o total desses grupos ordenados indicado por

$$A_{m,n} \ \ ou \ A_m^n.$$

Exemplo 3: Em uma empresa, três funcionários de candidataram para as vagas de diretor e vice-diretor financeiro. Eles serão escolhidos através do voto individual dos membros do conselho dessa empresa. De quantas maneiras distintas essa escolha poderá ser feita?

Solução: Seja $A = \{a, b, c\}$ o conjunto dos funcionários que se candidataram às vagas. Elencando algumas das possibilidades, pode-se observar que existem dois tipos de agrupamentos (subconjuntos de A). O primeiro daqueles que se diferenciam por algum dos seus elementos, por exemplo: $ab \neq ac \neq bc$. Esses agrupamentos são distintos pela natureza dos seus elementos, pois possuem ao menos um elemento distinto. Já o segundo tipo de agrupamentos são aqueles que possuem os mesmos elementos, diferenciando-se apenas pela ordem em que estão colocados, como por exemplo $ab \neq ba$, pois o resultado ab significa que o funcionário a foi escolhido como presidente e o funcionário b, como vice presidente. No caso do resultado ba quem foi escolhido como presidente foi o funcionário b e, por conseguinte, a foi escolhido como vice-presidente. Isso significa que esses agrupamentos são distintos pela ordem.

Tais características demarcam um tipo de contagem que se classifica como **Arranjos Simples** e no caso em questão de ordem 2 ou binários, uma vez que são tomados 2 dos 3 elementos do conjunto gerador (conjunto A). Simples porque não se admitem a repetição do mesmo elemento em duas ou mais decisões diferentes, do tipo aa, por exemplo; e nesse caso nem teria sentido, pois um mesmo funcionário não poderia ocupar o cargo de presidente e vice-presidente ao mesmo tempo.

Logo, para preencher as duas vagas, teremos de escolher dois funcionários distintos entre 3 funcionários no total, observando que a ordem da escolha irá interferir nas vagas. Para conta os possíveis resultados deve-se tomar duas decisões: a primeira, escolher o funcionário para o cargo de presidente; a segunda, escolher o funcionário para o cargo de vice-diretor. Como as decisões são sucessivas e independentes, para obtenção desse resultado, pode-se aplicar o princípio multiplicativo $\frac{3}{Pres.} x \frac{2}{Vice} = 6$ possibilidades.

Generalizando, quantos agrupamentos de n elementos distintos podemos formar de um conjunto com m elementos?

$$A_{m,n} = m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1).\frac{(m-n)!}{(m-n)!} =$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)(m-n)(m-n-1) \dots 3.2.1}{(m-n)!} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Pode-se pensar da seguinte maneira: para escolhermos o primeiro dos n elementos, temos m opções; uma vez escolhido um dos m elementos, este não pode ser mais utilizado, restando $(m - 1)$ opções para escolher o 2º elemento; o raciocínio é o mesmo até a escolha do n-ésimo elemento, que pode ser feia de $(m-n+1)$ maneiras. Então, utilizando o princípio multiplicativo, temos que o total de modos de escolher os n elementos é dado pelo produto: $m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)$. Multiplicando essa expressão por $\frac{(m-n)!}{(m-n)!}$, chega-se à

$$A_{m,n} = m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1).\frac{(m-n)!}{(m-n)!}$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)(m-n)(m-n-1) \dots 3.2.1}{(m-n)!}$$

$$= \frac{m!}{(m-n)!}$$

Temos então, $A_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$

3.2 Permutação Simples

Para demarcação das Permutações Simples, Merayo (2001, p. 241) propõe a seguinte definição:

> Recebe o nome de **permutação simples** de *m* elementos, cada um dos distintos grupos que pode formasse de maneira que cada um deles contenha os *m* elementos dados, diferindo um grupo do outro unicamente pela ordem de colocação de seus elementos. (grifo do autor)

Isso significa dizer que se nos Arranjos Simples ocorrer de $m = n$ nos agrupamentos formados se tomará todos os elementos que compõem o conjunto gerador.

Generalizando, seja um conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$ com m elementos. Uma permutação simples de n elementos de A é uma sequência formada de n elementos diferentes de A. Para escolher o 1° elemento dessa sequência, temos m opções; escolhido o 1°, restam apenas $(m-1)$ opções para o segundo (não podemos usar o elemento já escolhido para ocupar a 1ª posição); para o terceiro, $(m-2)$. Esse raciocínio prossegue até o n-ésmo elemento (para escolher o último elemento, resta apenas uma opção, o único elemento que ainda não foi escolhido). Pelo princípio multiplicativo, o total de maneiras de ordenar os elementos ou o número de permutações simples desses elementos é igual a $m(m-1)(m-2)\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n!$ (lê-se n fatorial) e é representado pelo produto em questão. Então, $P_m = m!$

Exemplo 4: Quantos números de quatro algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 5 e 7?

Solução: Considerando $A = \{1, 3, 5, 7\}$ o conjunto dos algarismos em questão. Na primeira extração, temos todos os elementos de A, nesse caso, temos 4 possíveis escolhas; na segunda extração, como restam 3 algarismos distintos, temos 3 possíveis escolhas; para escolher o 3º algarismo (3ª extração), temos 2 possíveis escolhas, já que restam 2 algarismos distintos; na escolha do 2º algarismo diferente dos escolhidos anteriormente, resta 1 algarismo diferente, o que torna possível apenas 1 escolha. Pelo princípio multiplicativo, teremos

$$\frac{4}{1^{a}} \cdot \frac{3}{2^{a}} \cdot \frac{2}{3^{a}} \cdot \frac{1}{4^{a}} = 24$$

Aplicando a fórmula de permutação simples ao exemplo anterior, temos $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ números diferentes.

3.3 Combinação Simples

Até então se definiram os agrupamentos em que a ordem dos elementos nos grupos é essencial os quais são denominamos de arranjos simples ou de permutações simples. Surge agora a necessidade de se contar outro tipo de agrupamento, denominados de **combinações**, nos quais a ordem é indiferente, isso significa que o que importa, ou que está sendo contado, são os agrupamentos que diferem por algum de seus elementos, ou seja, a distinção é por natureza.

Para esse tipo de agrupamento Merayo (2001*,* p. 269) apresenta como definição o seguinte argumento:

> Seja um conjunto formado por **m** elementos distintos. Recebe o nome de combinação de ordem **n** desses **m** elementos, cada grupo formado por **n** elementos tomado dos **m**, tal que duas combinações se consideram distintas se diferem em algum de seus elementos. Nesta ordenação não influi a ordem de colocação, isto quer dizer que, dois agrupamentos são iguais se contêm os mesmos elementos, ainda que colocados em distinta ordem.

A formatação algébrica para esse tipo de contagem será apresentada a partir da situação proposta abaixo:

Exemplo 5: Considere o conjunto dos principais times pernambucanos T = {Sport, Náutico, Santa Cruz}. De quantas maneiras diferentes esses times podem disputar um campeonato no qual cada time joga contra os demais uma única vez?

Solução: Elencando-se os subconjuntos para averiguar o que se deve ser considerado na contagem, temos {Sport, Náutico}, {Sport, Santa Cruz} e {Náutico, Santa Cruz}, num total de 3 subconjuntos e que esses diferem por natureza. Agora o que precisa ser averiguado é se a mudança de ordem dos elementos nos grupos deve ser considerada, lembrando que considerá-los significa dizer que, embora possuam os mesmos elementos, mas estando em ordem diferente, formam novos agrupamentos e que por isso devem ser contados. Observa-se que, por exemplo, {Sport, Náutico} = {Náutico, Sport}, o que remete a constatação de que considerá-los acarretaria em um grave erro de duplicação na contagem, pois correspondem a um mesmo subconjunto. Neste caso, diferentemente dos arranjos onde a mudança ordem dos elementos gera novas configurações, a ordem é irrelevante.

No entanto, quando trata-se de um conjunto com poucos elementos fica fácil listar as combinações do elementos, o que não acontece com um conjunto de muitos elementos. Sendo assim, faz-se necessário generalizar. Seja A um conjunto com m elementos. Combinações simples de m elementos tomados n a n $(0 \leq n \leq m)$ são os subconjuntos de A com exatamente n elementos que podem se formar com m elementos dados. Ressaltamos que subconjuntos diferem entre eles apenas pela natureza dos seus elementos. A quantidade total desses subconjuntos é denotada por $C_{m,n}$ ou C_m^n.

Como a intenção é calcular a quantidade de subconjuntos de n elementos tomados de um conjunto A com m elementos e utilizando o mesmo raciocínio feito para arranjos simples, chaga-se a $\frac{m!}{(m-n)!}$. No entanto, a ordem entre os n elementos escolhidos é irrelevante. Por isso, a permutação das ordenações possíveis entre esses n elementos não deve ser considerada, pois, caso contrário, um mesmo subconjunto será considerado mais de uma vez, conduzindo ao erro o processo de contagem. Para descontarmos essas permutações, basta dividir a expressão $\frac{m!}{(m-n)!}$ por $n!$. Assim, temos:

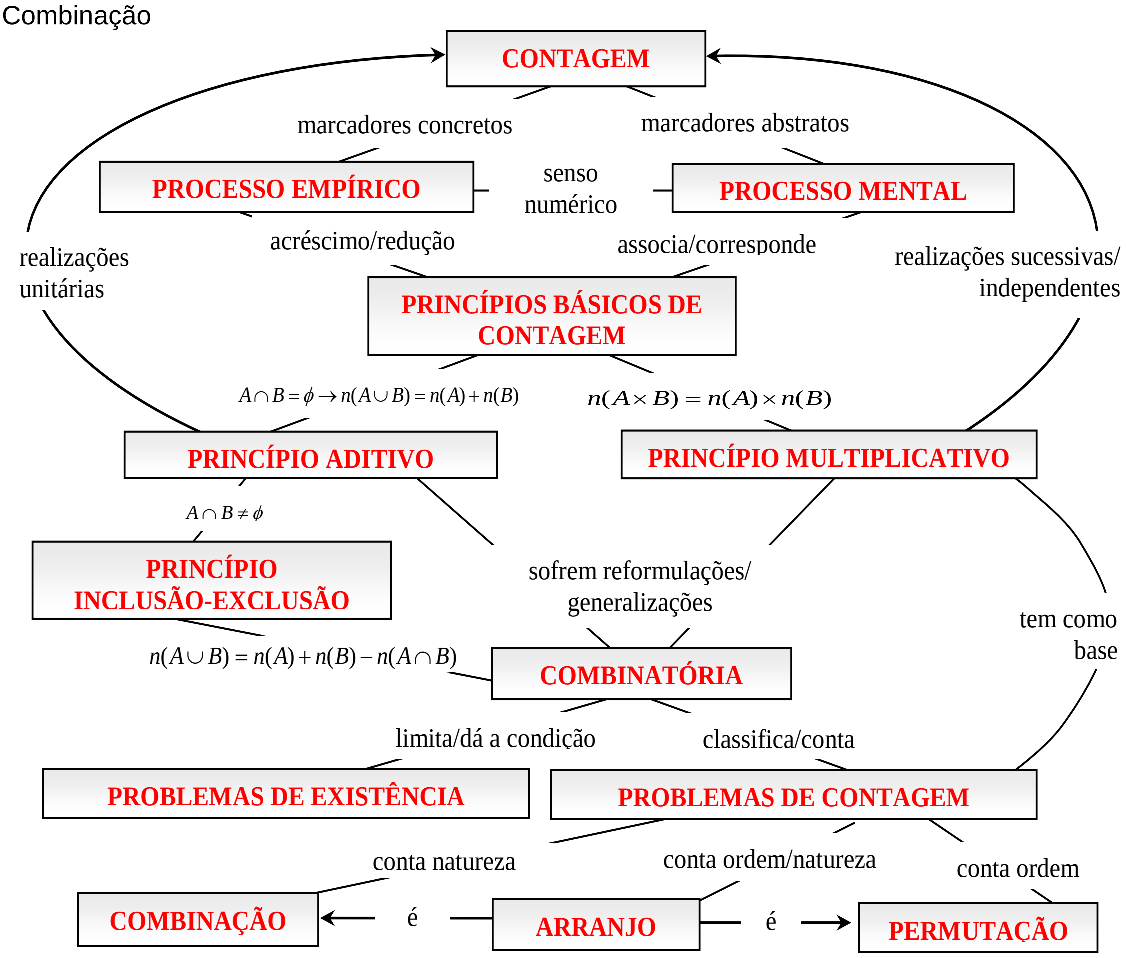
$$C_{m,n} = \frac{A_{m,n}}{P_n} = \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!}$$

$$C_{m,n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}, 0 \leq n \leq m$$

Retomando ao exemplo 5, temos uma combinação simples de 3 elementos, tomados 2 a 2, ou seja, $C_{3,2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2!}{2!1!} = 3$ possibilidades nas quais os times podem disputar partidas no campeonato.

Apresentamos, a seguir, uma síntese do sistema de informação da Combinatória.

Figura 7 – Mapa Conceitual de Combinatória, focando os conceitos de Arranjo, Permutação e Combinação



Fonte: Rufino (2015) *apud* Ferreira, Rufino e Silva (2016, p. 314)

Chamamos a atenção para o fato de que o mapa conceitual adicionado anteriormente está centrado nos problemas de contagem do tipo arranjo, permutação e combinação e nas ideias nas quais esses problemas estão alicerçados, já que esses problemas são os mais tratados no âmbito do Ensino Médio, como bem apontam as orientações curriculares para o ensino desse campo no Brasil.

2.4 Orientações curriculares para o ensino de Combinatória no Brasil

Apesar da Combinatória ter se consolidado enquanto campo matemático por volta do século XVII, a partir das contribuições do francês Blaise Pascal (1623 – 1662) e sendo complementada por Pierre de Fermat (1607 – 1665), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) e John Wallis (1616 – 1703), sua aparição nos currículos escolares brasileiros é recente.

Um estudo desenvolvido por Morales, Ambrósio, Magalhães e Pedrassoli (2003) com o objetivo de realizar um levantamento histórico da Educação Matemática no Brasil através dos livros didáticos de Matemática, aponta que noções de Combinatória aparecem pela primeira vez, em um material desse tipo, no ano de 1942, no livro *Matemática Elementar* de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Júlio César de Mello e Souza, no volume de número 5, adicionada aos conteúdos da Aritmética. Os autores destacam que Euclides Roxo, em 1929, começou a reformular os programas do Colégio Pedro II, que servia de modelo, à época, para todas as escolas do país.

Morales *et al.* ainda assinalam que

> Todas as reformas educativas, mesmo as grandes transformações nas reformas Francisco Campos (1931), Gustavo Capanema (1942), LDB de 1961 e LDB de 1971 mantiveram a ideia de um programa e currículo para as disciplinas que fosse nacional. (MORALES *et al.,*2003, p. 11).

Na década de 80 do século passado, o National Council of Teachers of Mathematics – NCTM, dos Estados Unidos, apresentou, no documento chamado “Agenda para Ação”, recomendações para o ensino de Matemática, destacando a resolução de problemas como foco do ensino dessa disciplina. Esse documento elaborou propostas que influenciaram reformas que ocorreram mundialmente, inclusive no Brasil. Nele, também chamou-se a atenção para a importância de se trabalhar, já no ensino fundamental, com um amplo espectro de conteúdo como, por exemplo, elementos de Combinatória, a fim de atender à uma demanda social que aponta para a necessidade de abordar esses assuntos (BRASIL, 1997).

Com essas recomendações do NCTM, as ideias de Combinatória, que antes apareciam apenas em livros e manuais direcionados ao Ensino Médio, começam a ganhar espaço nas discussões sobre sua implementação já no Ensino Fundamental.

No Brasil, o advento dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), no final da década de 90 desse mesmo século, constituiu-se em um importante referencial para a educação básica, orientando a prática docente em cada ciclo e etapa. Neles, as recomendações e orientações do NCTM para o ensino da Matemática são ratificadas, a saber aquelas direcionadas ao ensino de Combinatória.

Os PCN destinados aos 1º e 2º ciclos (BRASIL, 1997), que compreendem aos anos iniciais do Ensino Fundamental, indicam as finalidades do ensino de Matemática e, entre os objetivos, destacamos o de fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número possível de relações entre eles, utilizando para isso o conhecimento matemático. Nesse objetivo, numa lista apresentada com conhecimentos matemáticos como o aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico e probabilístico, aparece também o combinatório, reforçando a importância do trabalho como esse conhecimento nas séries iniciais.

Na seleção de conteúdos destinada ao Ensino Fundamental, os PCN apontam que, a partir de um olhar mais atento para a nossa sociedade, percebe-se a necessidade de acrescentar aos conhecimentos gerais, conteúdos que permitam ao cidadão “tratar” as informações que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar utilizando ideias relativas à probabilidade e à combinatória.

Dividindo os conteúdos a partir de blocos, a combinatória integra o bloco denominado de Tratamento da Informação juntamente com estudos relativos às noções de estatística e de probabilidade. Os PCN já chamavam a atenção para a necessidade de se desenvolver um trabalho que fosse desprendido do uso de definição de termos ou de fórmulas.

No que se refere especificamente às noções de Combinatória, nesses primeiros ciclos, os PCN aponta como objetivo o de “levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem.” (BRASIL, 1997, p. 40). Todavia, é preciso acrescentar que é possível perceber ideias relativas à esse campo em outros blocos de conteúdos como, por exemplo, o de Números e Operações, no qual a ideia de Combinatória aparece associada a significados da multiplicação e da divisão.

Nos PCN de Matemática destinados aos terceiro e quarto ciclos, que compreendem aos anos finais do Ensino Fundamental, os conhecimentos concernentes à Combinatória podem ser percebidos já na seleção de conteúdos para o terceiro ciclo, figurando nos blocos de Números e Operações, com a proposição de resolução de problemas de contagem, incluindo os que envolvem o princípio multiplicativo, a partir de estratégias variadas, como a construção de esquemas e tabelas, e no bloco de Tratamento da Informação, no desenvolvimento de estudos com a representação e contagem dos casos possíveis em situações combinatórias (BRASIL, 1998).

No intuito de contribuir para a reflexão a respeito do ensino de Matemática, os PCN apresentam orientações didáticas, abordando aspectos ligados às condições em que se constituem os conhecimentos matemáticos. Tratando especificamente dessas orientações para o ensino de Combinatória, esse documento destaca a importância do trabalho com a resolução de problemas de contagem, a partir do ensino fundamental, com o objetivo de colocar o aluno diante de situações em que é necessário agrupar objetos, em diferentes quantidades, caracterizando os agrupamentos feitos. Advogam ainda que, ao tentar solucionar essas situações, os estudantes poderão progredir na maneira de contar os agrupamentos e, assim, desenvolver o raciocínio combinatório.

No ano 2000, o Ministério da Educação (MEC) publicou os PCN direcionados ao Ensino Médio (PCNEM), dividindo o conhecimento ensinado nessa etapa em três áreas: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Ciências Humanas e suas Tecnologias e Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. No entanto, esse documento preocupou-se mais em explicitar as habilidades básicas e as competências específicas que se espera que sejam desenvolvidas pelos alunos dessa etapa do que fornecer orientações curriculares específicas a cada área do conhecimento, o que impulsionou a publicação, dois anos mais tarde, de um novo documento chamado de PCN+ Ensino Médio com orientações educacionais complementares aos PCNEM.

Os PCN+ (BRASIL, 2002) dividiu os conhecimentos matemáticos em três conjuntos de temas estruturadores, que devem ser desenvolvidos de forma concomitante nos três anos do Ensino Médio:

1. Álgebra: números e operações;
2. Geometria e medidas;
3. Análise de dados.

Esses temas, segundo os PCN+, “possibilitam o desenvolvimento das competências almejadas com relevância científica e cultural e com uma articulação lógica das ideias e conteúdos matemáticos” (BRASIL, 2002, p. 120). Cada tema, por sua vez, foi dividido em unidades temáticas que são parcelas autônomas de conhecimentos específicos. Os conhecimentos relativos à Combinatória estão inseridos na unidade temática denominada “Contagem”, que faz parte do tema Análise de dados.

Os PCN+ advogam que essa unidade temática permite o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática que se chama raciocínio combinatório. No entanto, advertem também que esses conhecimentos não devem ser aprendidos com uma lista de fórmulas, mas, estas devem ser “consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande” (BRASIL, 2002, p. 126-127).

Em relação aos conteúdos e habilidades propostos para unidade temática “Contagem: princípio multiplicativo; problemas de contagem” a serem desenvolvidos, os PCN+ elencam:

> - Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos.
> - Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem.
> - Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem. (BRASIL, 2002, p. 127)

Quanto a organização do trabalho escolar, os PCN+ sugerem, dentro de uma sequência de distribuição dos temas nos três anos do ensino médio, que os conhecimentos e habilidades da unidade temática de Contagem sejam vivenciados no segundo ano dessa etapa da escolarização. Todavia, chamamos a atenção para o fato de que a proposta dos PCN+, assim como dos PCNEM, não é a de produzir uma lista de assuntos ou conteúdos, pois cada tema e unidade temática podem ser organizadas dentro do projeto pedagógico de cada professor ou escola, em função das características de seus alunos e dos tempos e espaços para sua realização (BRASIL, 2002).

Durante um período de aproximadamente 20 anos, mais precisamente entre os anos de 1997 e 2017, os PCN tanto do ensino fundamental quanto do ensino médio serviram de parâmetros e diretrizes, orientando a prática docente em cada ciclo e etapa da Educação Básica, bem como contribuindo na elaboração dos currículos e propostas curriculares dos estados e municípios em todo o país. No entanto, o advento da BNCC no ano de 2017 traz consigo um novo marco no que diz respeito às orientações curriculares para a Educação Escolar.

Diferentemente dos PCN, a natureza da BNCC é de ser

> um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de **aprendizagens essenciais** que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento. (BRASIL, 2018, p. 7, grifo do autor)

Concernentes às orientações curriculares para o ensino de Matemática no ensino fundamental, a BNCC propõe cinco unidades temáticas, correlacionadas, cuja finalidade é orientar a formulação de habilidades a serem desenvolvidas ao longo dessa etapa: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística. Destacamos que os conhecimentos relacionados à Combinatória aparecem, nessa etapa, apenas na unidade temática Números, sob a nomenclatura Problemas de contagem.

A BNCC ratifica as orientações dos PCN para o trabalho com os conhecimentos de Combinatória já nas séries iniciais do ensino fundamental, inserindo esse tema como objetivo de conhecimento da unidade temática Número no 4º ano. Já a habilidade que se relaciona a esse objeto é a de

> Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais. (BRASIL, 2018, p. 291)

Ao que parece, a proposição de resolução de problemas de contagem mediante suporte de imagem e/ou material manipulável está associada à utilização de esquemas ou diagramas, já que a BNCC defende que, inicialmente, esses problemas devem estar restritos aos casos em que as soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis (BRASIL, 2018). Daí a importância da utilização desses esquemas ou diagramas.

No 5º ano do Ensino Fundamental, é possível percebermos um objeto de conhecimento que trata de problemas de contagem. Dessa vez, há uma especificação a respeito de tipo de problema de contagem deve ser proposto nesse ano: “Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?” (BRASIL, 2018, p. 294), numa clara alusão ao princípio multiplicativo. A habilidade associada a esse objeto de conhecimento reforça a ideia de não apenas resolver, mas também elaborar problemas simples de contagem envolvendo esse princípio, nos quais a determinação do número de agrupamentos possíveis se dá ao combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra. Além disso, ela destaca que esse tipo de problema deve ser resolvido por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, encontramos as ideias de Combinatória apresentadas em um objetivo de conhecimento direcionado ao 8º ano dessa etapa chamado de “O princípio multiplicativo da contagem”. Quando se verifica a habilidade ligada à esse conhecimento, observa-se que dessa vez não há restrição quanto aos tipos de problemas envolvendo o PM, como se percebe nos anos anteriores analisados. Isso corrobora com o que também é defendido pela BNCC ao afirmar os problemas de contagem devem ir progredindo de forma que, posteriormente, devem estar restritos àquelas cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo e do princípio da casa dos pombos (BRASIL, 2018). No entanto, é preciso considerar que, embora haja essa orientação quanto a proposição de problemas envolvendo o princípio da casa dos pombos, não se percebe a exploração desse princípio nem nos objetos de aprendizagem nem nas habilidades específicas.

Tratando especificamente do Ensino Médio, a BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental (BRASIL, 2018). Dessa forma, ela organizou a elaboração curricular dessa área por unidades similares às propostas para o Ensino Fundamental, agrupando os conhecimentos em três áreas: Números e Álgebra, Geometria e Medidas e Probabilidade e Estatística. Nessa etapa, os conhecimentos de Combinatória estão inseridos nessa última área citada anteriormente.

A habilidade referente a Combinatória destinada ao Ensino Médio é a de “Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.” (BRASIL, 2018, p. 546). Embora não haja uma explicitação quanto ao trabalho com problemas do tipo arranjo, permutação e combinação, como havia nos PCN, é bem possível associarmos o trabalho com esses problemas à essa habilidade, uma vez que esses problemas são consequência da aplicação do PM.

Convém ressaltar que a BNCC traz uma justificativa para o uso da expressão “Resolver e Elaborar Problemas” em lugar de “Resolver Problemas” no início das habilidades. Ela defende que essa opção pode ampliar e aprofundar o significado dado à resolução de problemas, pois a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados, além de que sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada (BRASIL, 2018).

Dessa forma, é cabível afirmar que, embora os conhecimentos de Combinatória sejam mais explorados durante o Ensino Médio, existe uma tradição de mais de 20 anos nas orientações e diretrizes curriculares no Brasil que apontam para a importância do trabalho com esses conhecimentos desde as séries iniciais do ensino fundamental. Além disso, é perceptível que essas orientações restringem o trabalho com esse campo matemático aos problemas de contagem, especialmente aos que remetem ao princípio multiplicativo e de suas consequências (como na resolução de problemas do tipo arranjo, combinação, e permutação), o que pode muito bem condizer à ideia de que esse campo está restrito apenas a esses problemas. Talvez, seja por isso que a BNCC optou em denominar o trabalho com os conhecimentos desse campo em Problemas de Contagem.

4 PERCURSO METODOLÓGICO

Considerando o que defende Oliveira (2008), a metodologia de um trabalho científico deve englobar todos os passos da investigação que se deseja realizar descrevendo o tipo de investigação, que deve estar adequada com os objetivos e a justificativa concernente a essa investigação, além de coerente com a formulação do problema de maneira a que explique o procedimento de forma precisa.

Mediante o exposto, a partir de agora, o foco de interesse é demarcar a metodologia em que este estudo está baseado, assim como, de forma apropriada, caracterizar os meios e procedimentos utilizados para delimitar seu desenvolvimento. Dentro do campo das ciências humanas e sociais, nas quais se encontram a educação, há o embate entre duas visões metodológicas no tocante à realização de pesquisa científica. Uma delas é a que trabalha com os métodos quantitativos, baseados na visão positivista da ciência, e recebeu bastante enfoque durante boa parte do século XX.

O outro posicionamento metodológico surgiu somente no final desse século em contraposição ao método quantitativo, chamado de método qualitativo, inspirado nas ciências humanas, que também é conhecido como interpretacionismo. Quanto às características dos procedimentos utilizados na pesquisa quantitativa e qualitativa, Moreira (2011) afirma, em relação à primeira, que o interesse geralmente está atrelado a estudos experimentais ou correlacionais, que são caracterizados primordialmente por medições objetivas e análises quantitativas. Já em relação a essa última, o interesse central é fazer interpretação dos significados atribuídos pelos sujeitos às suas ações em uma realidade socialmente construída, através de observação participativa, ou seja, nesse tipo de abordagem, o pesquisador fica imerso no fenômeno de interesse.

Moreira (2011) ainda destaca que o termo pesquisa qualitativa tem sido usado alternativamente para designar várias abordagens à pesquisa em ensino, tais como pesquisa etnográfica, participativa observacional, estudo de caso, fenomenológica construtivista, interpretativa, antropológica cognitiva.

Na continuação, chama a atenção para o fato que se tem observado o uso acentuado da abordagem qualitativa nas pesquisas educacionais, pois enquanto a pesquisa quantitativa provavelmente está mais preocupada com valores instrumentais dos resultados, a pesquisa qualitativa tende a destacar valores sociais das asserções de conhecimento.

Além disso, segundo agora Bogdan e Biklen (2010) esse tipo de pesquisa se caracteriza, também, pelo seu caráter descritivo, pois examina o fenômeno de forma minuciosa com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para construir uma pista que se permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do objeto de estudo.

No caso deste estudo, especificamente, trata-se de uma pesquisa qualitativa com opção pelo método de estudos de caso descritivo. Indo pela visão qualitativa pode ser classificado como um estudo de caso educativo no qual Stake (1988 *apud* André, 1998) chama a atenção para o fato de que os estudos de caso educativo são extremamente úteis para conhecer os problemas e ajudar a entender a dinâmica da prática educativa, pois retrata um problema educacional em toda sua complexidade individual e social se transformando em uma descoberta preciosa.

Assim sendo, pode-se dizer que o estudo em pauta situa-se no âmbito das chamadas pesquisas qualitativas, em particular do tipo Estudo de Caso Educativo Descritivo no qual se pretende analisar e caracterizar as organizações matemáticas e didáticas do professor referentes ao ensino de Combinatória.

4.1 Caracterização dos Sujeitos e do Campo da Investigação

Elegemos, como sujeito participante desta investigação, uma professora de matemática do 2º ano do Ensino Médio, a quem chamamos pelo pseudônimo de Ana, para resguardar a identidade original da professora. A escolha de apenas um sujeito se justifica pelo fato de acreditarmos que as organizações matemáticas e didáticas que emergem em torno da atividade do professor são fenômenos didáticos e, por assim serem, se manifestam de diferentes formas. Também não temos a intenção de estabelecer comparação entre práticas distintas, mas de apenas caracterizá-la.

A investigação em si, foi realizada em uma escola pública do interior do Estado de Pernambuco, mais especificamente no município de São Vicente

Férrer. A escolha da referida escola se deu inicialmente por se tratar de uma escola da rede pública, já que os estudos levantados no contexto da construção da problemática desta pesquisa foram realizados com atores das escolas públicas. Também justificamos a escolha dessa escola pela relação profissional que existiu entre o campo da pesquisa e o pesquisador. Assim, a relação amistosa existente com a direção e os educadores da instituição, explicam também essa escolha. Vale ressaltar que, apesar do foco deste estudo está no ensino e não na aprendizagem, os estudantes dessa turma investigada participaram indiretamente desta pesquisa.

4.2 Procedimentos metodológicos da pesquisa

Como nossa pesquisa centra-se na análise da prática docente relativa ao ensino de Combinatória, do ponto de vista das praxeologias, algumas ações (etapas) foram realizadas.

Na **primeira etapa** realizamos uma análise a priori das organizações matemáticas que dizem respeito ao ensino de Combinatória, especificamente relativas aos problemas de contagem dos tipos arranjo, permutação e combinação, tipos de problemas geralmente mais abordados no Ensino Médio. Para tal análise, nos subsidiamos no livro didático adotado pela escola campo de investigação e utilizado pelo professor durante as aulas.

A opção em realizarmos essa análise a priori a partir do livro didático não se dá de forma desconexa. Esse recurso didático é parte integrante da cultura escolar e um dos recursos mais utilizados não apenas no processo de ensino e aprendizagem, em todos os níveis de ensino, mas também para determinar conteúdos e até mesmo estabelecer estratégias de ensino (SILVA e PESSOA, 2015a; FONSECA *et. al.*, 2014).

Então, o objetivo foi caracterizar as organizações matemáticas em torno desse conhecimento, presentes no livro didático, descrevendo e caracterizando as tarefas a partir dos tipos e subtipos, as técnicas, e o ambiente tecnológico-teórico. Ressaltamos que, nesta pesquisa, nos referimos a subtipo de tarefa (f_x) como sendo um tipo de tarefa que se relaciona à estrutura de um tipo de tarefa (T_x). Isso quer dizer que um subtipo de tarefa (f_x) nada mais é do que uma configuração de um determinado tipo de tarefa (T_x). Nossa intenção também foi de verificar se as organizações matemáticas existentes no livro didático adotado aparecem na prática do professor

Posteriormente, produzimos os dados do professor através de uma videografia. Nessa **segunda etapa**, as aulas referentes ao ensino de combinatória foram filmadas. Utilizamos uma câmera de vídeo e áudio como instrumento de coleta. A escolha pela videografia justifica-se porque ela permite uma análise mais detalhada das organizações matemáticas e didáticas mobilizadas pelo professor. André (2007) chama a atenção para o lado positivo de usar videografias, advogando que o vídeo pode ser visto e revisto inúmeras vezes, oportunizando discutir e confrontar diferentes interpretações a fim de refinar a análise, até que se atinja uma aproximação mais precisa ao objeto pesquisado. Nessa etapa da pesquisa também nos dedicamos à transcrição dos recortes das aulas. Os recortes nos ajudaram a identificar os momentos de surgimentos dos fenômenos e como se relacionam.

Na **terceira etapa** da pesquisa nos propusemos a identificar nas transcrições a organização matemática proposta pelo professor – as tarefas (tipos e subtipos), as técnicas e os elementos tecnológicos-teóricos.

A **quarta etapa** tratou de identificar e caracterizar as organizações didáticas que emergiram em torno dos problemas de contagem pesquisados. O interesse estava em conhecer como o professor pôs em prática o conteúdo matemático em análise. As organizações didáticas se estabelecem a partir de certo caminho, de certo tipo de situações, chamados de momentos de estudos ou momentos didáticos: (1º) o primeiro encontro propriamente dito com o tipo de tarefas, (2º) a exploração de um tipo de tarefas e da elaboração de uma técnica relativa a esse tipo de tarefas, (3º) a constituição do entorno tecnológico-teórico, (4º) o trabalho da técnica, (5º) a institucionalização e (6º) a avaliação.

Com o cumprimento dessas etapas, acreditamos que pudemos contemplar os questionamentos e objetivos elencados na parte introdutória deste estudo.

4.3 Critérios para análise

Todas as etapas descritas anteriormente foram analisadas de acordo com critérios estabelecidos, embasados no referencial teórico, que trataremos de apresentar a seguir.

A primeira etapa de categoria diz respeito à organização matemática, ou seja, os tipos de tarefas, técnicas, tecnologia e a teoria. Os elementos da praxeologia matemática serviram de norte para a análise do livro didático adotado pelo professor e das organizações matemáticas mobilizadas por ele nos momentos de estudo. Além disso, nos preocupamos, em última instância, em submeter as OM do professor aos critérios de avaliação *a priori* de uma OM, definidos por Chevallard (1999), sintetizados no quadro abaixo.

Quadro 2 – Critérios para avaliação *a priori* de uma organização matemática

Elementos da Praxeologia	**Critérios adotados**
Tarefa (T)	• Identificação • Razão de Ser • Pertinência
Técnica (τ)	• Elaboração • Facilidade • Alcance • Confiabilidade • Possibilidade de evolução
Tecnologia e Teoria [θ, Θ]	• Apresentação e justificativa do enunciado • Forma de justificativa: canônica ou não • Adaptação às condições de uso • Tipo de justificativa • Existência de elementos teóricos explícitos ou implícitos

Fonte: Autoria própria

Em relação à organização didática, tomaremos como critérios de análise os momentos de estudos propostos por Chevallard (1999), descritos na fundamentação teórica no capítulo referente à Teoria Antropológica do Didático, onde se definem os seis momentos didáticos:

- O primeiro momento: o primeiro encontro propriamente dito com as tarefas;
- O segundo momento: a exploração do tipo de tarefa e elaboração da técnica;
- O terceiro momento: a constituição do entorno tecnológico-teórico;

- O quarto momento: o trabalho da técnica;
- O quinto momento: a institucionalização;
- O sexto momento: a avaliação.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Nesta seção, nos debruçaremos na apresentação dos resultados da nossa investigação a partir do referencial teórico adotado e dos critérios de análise elegidos. Para tanto, na intenção de responder aos questionamentos e alcançar os objetivos delineados, dividiremos essa seção em duas partes.

A primeira parte será destinada para análise das organizações matemáticas dos tipos de tarefas referentes aos problemas de contagem do tipo arranjo, combinação e permutação encontrados no livro didático adotado pela escola campo de investigação e utilizado pelo professor em sala de aula. Denominaremos essa subseção de Análise *a priori* das organizações matemáticas, já que a intenção é identificar o saber a ensinar a partir da ótica das praxeologias matemáticas. Vale ressaltar que os livros didáticos, tradicionalmente, têm uma forte influência nas escolhas didáticas dos professores, inclusive funcionando, muitas vezes, como definidor de conteúdos e fonte de exercícios e problemas trabalhados nas aulas.

A segunda subseção será direcionada para o estudo da prática de ensino sobre esses problemas de contagem, ou seja, serão apresentadas as análises das organizações matemáticas e didáticas em torno da prática da professora sobre esses problemas. Visando tornar mais claras as ações dessa segunda parte, investiremos inicialmente na caracterização das organizações matemáticas em torno desses tipos de problemas de Combinatória. Em seguida, nos dedicaremos a descrever a forma como o processo de estudo dos problemas foi organizado pela professora, ou seja, apresentaremos as organizações didáticas (os seis momentos de estudos) que conduziram a construção das organizações matemáticas.

5.1 Análise *a priori* das organizações matemáticas

O livro didático objeto de análise é o “Matemática: ciências e aplicações – ensino médio, volume 2, Iezzi *et al*., 2016”. A coleção, a qual pertence esse livro, foi a escolhida pela unidade de ensino onde foi realizada a investigação para o triênio 2018 – 2020. O livro em análise é utilizado pelo professor (sujeito da pesquisa) durante as aulas.

De forma geral, o livro está organizado em capítulos identificados por títulos que expressam as temáticas trabalhadas, os quais, por sua vez, são subdivididos em várias seções que estão ligadas à temática maior. Os capítulos do livro e/ou suas respectivas seções geralmente estão estruturados da seguinte maneira:

1. Inicialmente é apresentado um problema do qual parte a discussão do conteúdo;
2. Em seguida são apresentadas algumas técnicas que podem resolver essa situação-problema;
3. Sistematização do conteúdo;
4. São apresentados exercícios resolvidos nos quais os autores buscam abordar a(s) forma(s) de resolver esses exercícios;
5. São propostos exercícios de graus diferentes de dificuldades para se resolver (geralmente essa seção parte de problemas mais simples para os mais complexos);
6. Por fim, há no final de cada capítulo uma seção intitulada de “Desafio” na qual é proposto um problema de natureza diferente das demais apresentadas anteriormente.

Em alguns capítulos ainda consta uma seção chamada de “Aplicações” na qual se encontra uma situação contextualizada de uma possível aplicação do conteúdo. Dos 11 capítulos que compõe o volume analisado, apenas o capítulo nº 10 é destinado ao conteúdo de Combinatória, que está disposto num total de 26 páginas.

Como o objeto de interesse nesse momento está centrado na caracterização das organizações matemáticas em torno do conteúdo de Combinatória, mais precisamente dos problemas de contagem do tipo permutação, arranjo e combinação, presentes no livro didático adotado pelo sujeito da pesquisa, classificaremos os tipos e subtipos de tarefas, totalizadas em 51, em três categorias, de acordo com o tipo de problema de contagem a qual pertencem. Ressaltamos que, nesta pesquisa, nos referimos a subtipo de tarefa ($\mathfrak{t}_x$) como sendo um tipo de tarefa que se relaciona à estrutura de um tipo de tarefa (T_x). Isso quer dizer que um subtipo de tarefa ($\mathfrak{t}_x$) nada mais é do que uma configuração de um determinado tipo de tarefa (T_x).

Quadro 3 – Distribuição dos subtipos de tarefas das presentes no LD referentes a Permutação Simples

Tipo de problema de contagem	Tipo de tarefa (T_x)	Subtipo de tarefa ($\mathfrak{t}_x$)
Permutação Simples	(T_1) Calcular o número de agrupamentos formados a partir de *m* elementos, nos quais todos os *m* elementos serão usados, ou seja, esses agrupamentos serão distintos entre si apenas pela ordem dos seus elementos.	($\mathfrak{t}_{11}$) Determinar o número de permutações P_m formadas a partir de m elementos ($\mathfrak{t}_{12}$) Determinar o número de permutações formadas a partir de m elementos das quais $m_1, m_2, \dots, m_{m-1} \in m$ devem estar fixados na sequência dos m elementos.; ($\mathfrak{t}_{13}$) Determinar o número de permutações formadas a partir de m elementos das quais $m_1, m_2, \dots, m_{m-1} \in m$, devem aparecer na sequência juntos, nessa ordem ou não. ($\mathfrak{t}_{14}$) Determinar a posição do elemento $m_x \in m$ na sequência de m elementos.

Fonte: Autoria própria

Quadro 4 – Distribuição dos subtipos de tarefas das presentes no LD referentes a Arranjo Simples

Tipo de problema de contagem	Tipo de tarefa (T_x)	Subtipo de tarefa ($\mathfrak{t}_x$)
Arranjo Simples	(T_2) Calcular o número de agrupamentos formados a partir de *m* elementos, nos quais poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ... , *n* elementos, com $0 < n < m$. Esses agrupamentos podem ser distintos um dos outros pela ordem ou natureza dos seus elementos.	($\mathfrak{t}_{21}$) Dado m elementos distintos, determinar $A_{m,n}$ (número de arranjos desses m elementos, tomados n a n). ($\mathfrak{t}_{22}$) Determinar $A_{m,n} \cdot B_{x,y}$, sendo A o número de arranjos de m elementos, tomados n a n, e B, o número de arranjos de x elementos tomados y a y. ($\mathfrak{t}_{23}$) Determinar o número de arranjos $A_{m,n}$ dos quais $m_1, m_2, \dots e/ou\ m_{m-1} \in m$ sempre aparecem ou não aparecem nesses agrupamentos;

Fonte: Autoria própria

Quadro 5 – Distribuição dos subtipos de tarefas das presentes no LD referentes a Combinação Simples

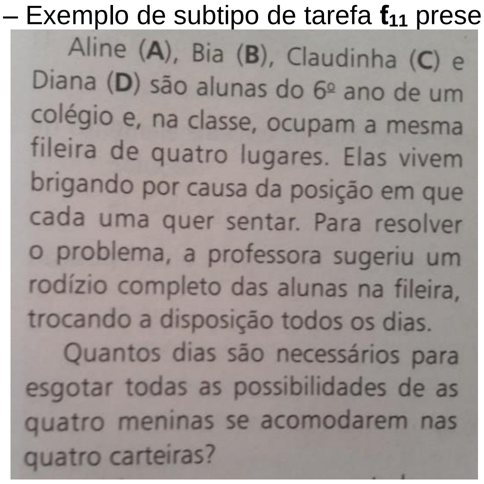
Tipo de problema de contagem	Tipo de tarefa (T_x)	Subtipo de tarefa (ƭx)
Combinação Simples	(T_3) Calcular o número de agrupamentos (subconjuntos) formados a partir de m elementos, nos quais poderão ser formados agrupamentos de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ... , n elementos, com $0 < n < m$. Esses agrupamentos são distintos uns dos outros apenas pela natureza dos seus elementos, pois a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.	(ƭ31) Dado m elementos distintos, determinar $C_{m,n}$ (número de combinações desses m elementos, tomados n a n, com n elementos distintos, escolhidos entre os m). (ƭ32) Determinar $C_{m,n} \cdot D_{x,y}$, sendo C o número de combinações de m elementos, tomados n a n, e D, o número de combinações de x elementos tomados y a y. (ƭ33) Determinar o número de combinações $C_{m,n}$ dos quais $m_1, m_2, \ldots e/ou\ m_{m-1} \in m$ sempre aparecem nesses agrupamentos.

Fonte: Autoria própria

A partir de agora, concentraremos esforços em apresentar a praxeologia matemática em torno dos subtipos de tarefas encontrados. Chamamos a atenção para o fato de apenas utilizarmos, nessa abordagem, os subtipos dos quais aparecem exemplos ou exercícios resolvidos no LD com a finalidade de mantermos uma estreita relação das praxeologias aqui apresentadas com aquelas que figuram no livro didático.

Em relação ao subtipo de tarefa **ƭ11**, foram empregadas duas técnicas, $\boldsymbol{\tau_1}$ e $\boldsymbol{\tau_2}$, para resolver a tarefa: $\boldsymbol{\tau_1}$, que compreende a listagem, uma a uma, de todas as possibilidades de agrupamentos, e $\boldsymbol{\tau_2}$, que corresponde à utilização do Princípio Fundamental da Contagem. A figura 4 traz um exemplo do subtipo de tarefa **ƭ11** apresentada no livro didático.

Figura 8 – Exemplo de subtipo de tarefa **ƭ11** presente no LD



Aline (**A**), Bia (**B**), Claudinha (**C**) e Diana (**D**) são alunas do 6º ano de um colégio e, na classe, ocupam a mesma fileira de quatro lugares. Elas vivem brigando por causa da posição em que cada uma quer sentar. Para resolver o problema, a professora sugeriu um rodízio completo das alunas na fileira, trocando a disposição todos os dias.

Quantos dias são necessários para esgotar todas as possibilidades de as quatro meninas se acomodarem nas quatro carteiras?

Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 235)

Nota-se que se trata de um problema de contagem do tipo permutação, nos quais os agrupamentos formados (nesse caso, a partir do conjunto $m = \{A, B, C, D\}$ são distintos uns dos outros apenas pela ordem de seus elementos e a escolha da técnica $\boldsymbol{\tau_1}$, por parte dos autores, se apoia justamente na intenção do leitor (aluno) perceber essa ideia, como se percebe no seguinte extrato: “Observe que uma disposição difere das demais apenas pela ordem em que as quatro alunas vão se sentar nas quatros carteiras.” (IEZZE *et al*., 2016, p. 235). É preciso explicitar que o nível de alcance dessa técnica torna-se limitado, uma vez que, quando se tem uma grande quantidade de elementos no conjunto *m*, o trabalho com essa técnica pode ser inviabilizado, pois se corre grande risco de esquecer ou contar mais de uma vez algum(ns) dos agrupamentos. Já em relação à técnica $\boldsymbol{\tau_2}$, os autores defendem no início do tópico sobre Agrupamentos simples que o PFC é a principal técnica para resolução de problemas de contagem, inclusive das permutações. A respeito do entorno tecnológico-teórico, os autores não abordam de forma explícita uma justificativa matemática para a técnica. Isso também se estende aos demais subtipos de tarefas. Dessa forma, realizamos algumas inferências no que se refere a apresentação desse entorno, como se pode perceber no quadro-síntese a seguir:

Quadro 6 – Síntese da praxeologia matemática em torno do subtipo de tarefa $\mathbf{f_{11}}$

Subtipo de Tarefa	Técnicas	Entorno tecnológico-teórico
f_{11} – Determinar o número de permutações P_m formadas a partir de m elementos	(τ_1) Listagem, uma a uma, de todas as possibilidades de agrupamentos.	Contagem/Enumeração – Aritmética (θ_{CT}).
	(τ_2) Princípio Fundamental da Contagem	Utilização da definição e do conceito de Permutação simples para *m* objetos – Combinatória (θ_{PS}).

Fonte: Autoria própria

Sobre o subtipo de tarefa $\mathbf{f_{13}}$, a técnica utilizada para resolução dessa tarefa foi a do produto fatorial (que é uma consequência do PFC), que chamaremos de $\boldsymbol{\tau_3}$. Essa técnica tem um nível de alcance bastante abrangente, tratando-se de problemas de contagem do tipo permutação. A figura 5 apresenta um exemplo do subtipo de tarefa $\mathbf{f_{13}}$.

Figura 9 – Exemplo de subtipo de tarefa **ƭ$_{13}$** presente no LD

Giba e Gina têm três filhos: Carla, Luís e Daniel. A família quer tirar uma foto de recordação de uma viagem na qual todos apareçam lado a lado.

Em quantas possibilidades o casal aparece lado a lado?

Fonte: Iezzi *et al*. (2016, p. 237)

É possível perceber que nesse subtipo de tarefa **ƭ$_{13}$** se exige que a técnica seja trabalhada em mais etapas do que no subtipo de tarefa **ƭ$_{11}$**, já que apesar dos agrupamentos serem formados por todos os 5 elementos de *m*, o número de permutações desses *m* elementos será P_4, pois dois desses elementos (Giba e Gina) deverão ficar sempre lado a lado e, por isso, serão considerados como um elemento único. Após permutar os 4 elementos a ordenar (nessa situação temos ($P_4 = 4! = 24$:), faz-se necessário permutar os elementos que deverão ficar sempre juntos ($P_2 = 2! = 2$), o que significa que para cada um dos agrupamentos, formados a partir de P_4, teremos duas possibilidades diferentes, ou seja, a permutação dos dois elementos que deverão ficar juntos. Assim, o resultado procurado é $P_4 \cdot P_2 = 24 \cdot 2 = 48$ possibilidades de se ordenar os elementos de *m* sob as condições dadas. Assim temos:

Quadro 7 – Síntese da praxeologia matemática em torno do subtipo de tarefa **ƭ$_{13}$**

Subtipo de Tarefa	Técnica	Entorno tecnológico-teórico
ƭ$_{13}$ – Determinar o número de permutações formadas a partir de m elementos das quais $m_1, m_2, \ldots, m_{m-1} \in m$, devem aparecer na sequência juntos, nessa ordem ou não.	(τ_3) Produto fatorial	Utilização da definição e do conceito de Permutação simples para *m* objetos – Combinatória (θ_{PS}).

Fonte: Autoria própria

A respeito do subtipo de tarefa **ƭ$_{21}$**, os autores propuseram a utilização de duas técnicas para resolução: a técnica $\boldsymbol{\tau_2}$, que se trata da utilização do Princípio Fundamental da Contagem, e a $\boldsymbol{\tau_4}$, que se refere à aplicação direta da fórmula de arranjo simples, ambas as técnicas com um nível de alcance bastante abrangente, já que podem ser aplicadas à resolução de todas as tarefas do subtipo **ƭ$_{21}$** que pode ser conhecida no exemplo a seguir:

Figura 10 – Exemplo de subtipo de tarefa **ŧ**$_{21}$ presente no LD

Dado o conjunto das vogais V = {a, e, i, o, u}, determine a quantidade de arranjos que podemos formar com três elementos de **V**.

Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 240)

É possível perceber que características da tarefa acima demarcam um tipo de contagem que se classifica Arranjo Simples, já que os agrupamentos formados a partir de *V* podem ser distintos um dos outros pela ordem ou natureza dos seus elementos. Além disso, o próprio enunciado da tarefa já demarca o tipo de contagem e faz inferir também o tipo de técnica que se deve utilizar como se percebe em "... determine a quantidade de arranjos" Iezzi *et al*. (2016, p. 240). Como, nessa situação, todo arranjo formado é um agrupamento ordenado de três elementos, escolhidos entre os cinco de *V*, fazendo a contagem pela técnica $\boldsymbol{\tau_2}$, teremos 5 possibilidades para a 1ª letra da sequência, 4 para a 2ª letra da sequência e 3 para a 3ª letra da sequência. Multiplicando as possibilidades, obtemos o número de arranjos $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Já realizando a contagem pela técnica $\boldsymbol{\tau_4}$, teremos $A_{5,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!}$ = 60. O próximo quadro apresenta a síntese da praxeologia do subtipo de tarefa **ŧ**$_{21}$:

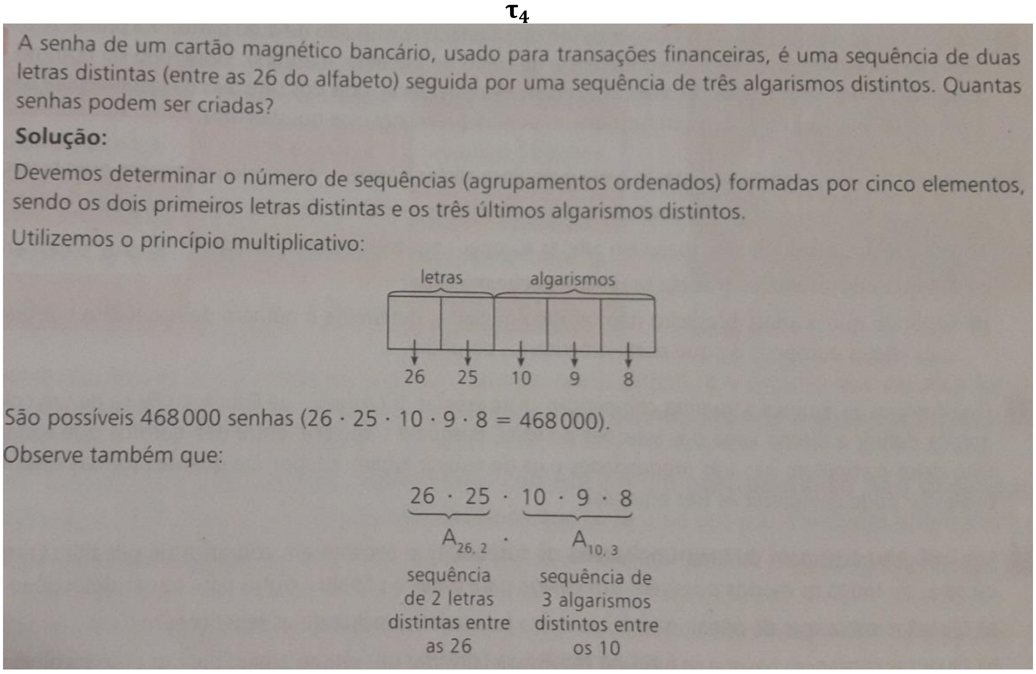
Quadro 8 – Síntese da praxeologia matemática em torno do subtipo de tarefa **ŧ**$_{21}$

<table>
<tr><th>Subtipo de Tarefa</th><th>Técnicas</th><th>Entorno tecnológico-teórico</th></tr>
<tr><td rowspan="2">f$_{21}$ – Dado m elementos distintos, determinar $A_{m,n}$ (número de arranjos desses m elementos, tomados n a n).</td><td>(τ_2) Princípio Fundamental da Contagem</td><td rowspan="2">Utilização da definição e do conceito de Arranjo Simples para *m* elementos, tomados *n* a *n* – Combinatória (θ_{AS}).</td></tr>
<tr><td>(τ_4) Fórmula de Arranjo Simples</td></tr>
</table>

Fonte: Autoria própria

Sobre o subtipo de tarefa **ŧ**$_{22}$, os autores também indicaram as técnicas $\boldsymbol{\tau_2}$ e $\boldsymbol{\tau_4}$ para realização da contagem. Os autores também propuseram a utilização de esquemas resolutivos no momento de se trabalhar com a técnica $\boldsymbol{\tau_2}$. A figura 7 exemplifica esse tipo de situação:

Figura 11 – Exemplo de subtipo de tarefa $\mathfrak{t}_{22}$ presente no LD trabalhada com as técnicas $\boldsymbol{\tau_2}$ e $\boldsymbol{\tau_4}$



A senha de um cartão magnético bancário, usado para transações financeiras, é uma sequência de duas letras distintas (entre as 26 do alfabeto) seguida por uma sequência de três algarismos distintos. Quantas senhas podem ser criadas?

Solução:

Devemos determinar o número de sequências (agrupamentos ordenados) formadas por cinco elementos, sendo os dois primeiros letras distintas e os três últimos algarismos distintos.

Utilizemos o princípio multiplicativo:

São possíveis 468 000 senhas ($26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 468\,000$).

Observe também que:

$$\underbrace{26 \cdot 25}_{A_{26,\,2}} \cdot \underbrace{10 \cdot 9 \cdot 8}_{A_{10,\,3}}$$

sequência de 2 letras distintas entre as 26 · sequência de 3 algarismos distintos entre os 10

Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 241)

O quadro a seguir sintetiza a praxeologia do subtipo de tarefa $\mathfrak{t}_{22}$:

Quadro 9 – Síntese da praxeologia matemática em torno do subtipo de tarefa $\mathfrak{t}_{22}$

Subtipo de Tarefa	Técnicas	Entorno tecnológico-teórico
$\mathfrak{t}_{22}$ – Determinar $A_{m,n} \cdot B_{x,y}$, sendo A o número de arranjos de m elementos, tomados n a n, e B, o número de arranjos de x elementos tomados y a y.	(τ_2) Princípio Fundamental da Contagem	Utilização da definição e do conceito de Arranjo Simples para *m* elementos, tomados *n* a *n* – Combinatória (θ_{AS}).
	(τ_4) Fórmula de Arranjo Simples	

Fonte: Autoria própria

A respeito do subtipo de tarefa $\mathfrak{t}_{31}$, os autores elegeram as técnicas $\boldsymbol{\tau_2}$ e $\boldsymbol{\tau_5}$, que se tratam do Princípio Fundamental da Contagem e da Fórmula de Combinação Simples, respectivamente. É preciso ressaltar que o trabalho com a técnica $\boldsymbol{\tau_2}$, nesse caso, necessita de mais uma etapa, já que, nos problemas desse tipo, a permutação de *m* elementos dá origem a uma única combinação, pois os agrupamentos formados a partir de *m* são distintos um dos outros apenas pela natureza dos seus elementos. Logo, é necessário excluir a quantidade de vezes que um mesmo agrupamento foi contado. Podemos perceber um exemplo de subtipo de tarefa $\mathfrak{t}_{31}$ na figura abaixo:

Figura 12 – Exemplo de subtipo de tarefa $\mathfrak{t}_{31}$ presente no LD

Em uma classe de 30 alunos pretende-se formar uma comissão de três alunos para representação discente no colégio. Quantas comissões distintas podem ser formadas?

Fonte: Iezzi *et al*. (2016, p. 241)

Como podemos constatar, trata-se de um problema de combinação simples. Para se resolver esse exemplo utilizando a técnica $\boldsymbol{\tau_2}$, realizam-se duas etapas: na primeira, se determina o número de comissões formadas levando em consideração a ordem de escolha dos elementos $(30 \cdot 29 \cdot 28)$; por fim, como a ordem não importa, determina-se o número de ordens possíveis para escolher três determinados alunos ($3 \cdot 2 \cdot 1$ ou $P_3 = 3!$). Assim, o número de combinações é $\frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1}$ = 4060. Já o trabalho com a técnica $\boldsymbol{\tau_5}$, consiste na aplicação direta da fórmula de combinação simples:

$$C_{30,3} = \frac{30!}{(30-3)!\,3!} = \frac{30!}{27!\,3!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27!}{27! \cdot 6} = 4060$$

Apresentamos a síntese da praxeologia do subtipo de tarefa $\mathfrak{t}_{31}$ no quadro a seguir:

Quadro 10 – Síntese da praxeologia matemática em torno do subtipo de tarefa $\mathfrak{t}_{31}$

Subtipo de Tarefa	Técnicas	Entorno tecnológico-teórico
$\mathfrak{t}_{31}$ – Dado m elementos distintos, determinar $C_{m,n}$ (número de combinações desses m elementos, tomados n a n, com n elementos distintos, escolhidos entre os m).	(τ_2) Princípio Fundamental da Contagem	Utilização da definição e do conceito de Combinação Simples para *m* elementos, tomados *n* a *n* – Combinatória (θ_{CS}).
	(τ_5) Fórmula de Combinação Simples	

Fonte: Autoria própria

Em relação ao subtipo de tarefa $\mathfrak{t}_{32}$, os autores aplicaram a fórmula de Combinação Simples ($\boldsymbol{\tau_5}$) no seu processo de resolução. Como justificativa da técnica, utilizaram-se da enumeração de agrupamentos e também do diagrama da árvore de possibilidades. Chamamos a atenção para o fato de que a tecnologia aqui empregada corresponde a técnicas utilizadas, em outros momentos, para a resolução de outros tipos e subtipos de tarefas no campo da Combinatória. A esse respeito, Santos e Freitas (2017) assinalam que, em dado momento ou instituição, uma determinada técnica pode ser uma tecnologia e, uma tecnologia que justifica a técnica utilizada pode, em outra etapa da aula ou em outro ano escolar, passar a ser uma técnica. Temos, na Figura 9, um exemplo do subtipo de tarefa $\mathfrak{t}_{32}$.

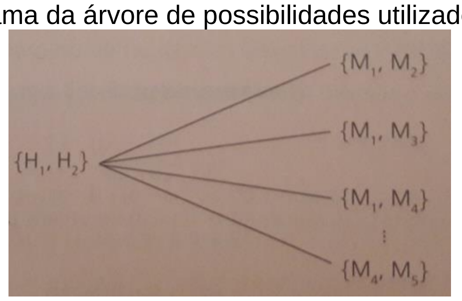
Figura 13 – Exemplo de subtipo de tarefa $\mathfrak{t}_{32}$ presente no LD

Nove funcionários de uma grande empresa (5 mulheres e 4 homens) foram participar das gravações para uma campanha publicitária. Chegando ao local da filmagem, foram informados de que, na cena que seria gravada, deveriam aparecer apenas quatro pessoas, sendo 2 homens e 2 mulheres.
De quantas maneiras distintas poderão ser escolhidos os quatro funcionários?

Fonte: Iezzi *et al*. (2016, p. 246)

Os autores dividiram o trabalho com a técnica em três momentos: no primeiro momento escolhem-se os dois funcionários homens ($C_{4,2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$). Para justificar o uso da fórmula de Combinação Simples, os autores enumeram as 6 possibilidades na tentativa evidenciar que os agrupamentos formados nesse caso são não ordenados e distintos um dos outros apenas pela natureza dos seus elementos; no segundo momento, é realizado o mesmo procedimento para a contagem das possibilidades das duas funcionárias ($C_{5,2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$); no terceiro momento, antes da contagem do número de possibilidades de composição com as duplas, os autores justificam a escolha da técnica utilizando o diagrama da árvore de possibilidades, como podemos ver na figura 10:

Figura 14 – Diagrama da árvore de possibilidades utilizado na θ da $\mathfrak{t}_{32}$ do LD



Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 246)

Como o diagrama deixa evidente que cada dupla masculina poderá se juntar a qualquer uma das dez duplas femininas, o resultado procurado é $C_{4,2} \cdot C_{5,2} = 6 \cdot 10 = 60$ possibilidades. No próximo quadro, elencamos a síntese da praxeologia relativa ao subtipo de tarefa $\mathfrak{t}_{32}$.

Quadro 11 – Síntese da praxeologia matemática em torno do subtipo de tarefa **$\mathfrak{t}_{32}$**

Subtipo de Tarefa	Técnicas	Entorno tecnológico-teórico
$\mathfrak{t}_{32}$ – Determinar $C_{m,n} \cdot D_{x,y}$, sendo C o número de combinações de m elementos, tomados n a n, e D, o número de combinações de x elementos tomados y a y.	(τ_5) Fórmula de Combinação Simples	• Listagem, uma a uma, das possibilidades de agrupamento (θ_{CT}); • Diagrama da árvore de possibilidades (θ_{AP}); • Utilização da definição e do conceito de Combinação Simples para *m* elementos, tomados *n* a *n* – Combinatória (θ_{CS}).

Fonte: Elaboração própria

Em relação à classificação das OM's, quanto ao grau de complexidade de seus elementos, presentes no livro didático, é possível classificar as OM's apresentadas como Organizações Matemáticas Locais, pois o que se observa é a existência da articulação de várias Organizações Pontuais em torno de um mesmo discurso tecnológico. O quadro a seguir sintetiza as Organizações Matemáticas descritas neste estudo.

Quadro 12: Síntese das Organizações Matemáticas apresentadas no LD

Subtipo de Tarefa	Técnicas	Entorno tecnológico-teórico
$\mathfrak{t}_{11}$	τ_1	θ_{CT}
	τ_2	θ_{PS}
$\mathfrak{t}_{13}$	τ_3	
$\mathfrak{t}_{21}$ $\mathfrak{t}_{22}$	τ_2 τ_4	θ_{AS}
$\mathfrak{t}_{31}$	τ_2	θ_{CS}
	τ_5	
$\mathfrak{t}_{32}$		

Fonte: Autoria própria

5.2 Estudo da prática de ensino da professora do ponto de vista das praxeologias

Antes de procedermos com as análises, precisamos esclarecer que não temos a intenção de fazer nenhum juízo de valor sobre a atuação da professora, no sentido de depreciar ou enaltecer a sua forma de condução das aulas. Nossa análise será pautada estritamente do ponto de vista do referencial teórico e metodológico levantado neste estudo, ou seja, nossa análise, com vistas a responder às questões da pesquisa, estarão submetidas ao crivo das organizações matemáticas e didáticas.

A turma onde aconteceram as filmagens das aulas é do segundo ano do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de ensino, localizada no interior do Estado de Pernambuco. É uma turma composta por 46 estudantes, oriundos das zonas urbana e rural. Ressaltamos que, neste estudo, os estudantes participaram de forma indireta, já que as análises se restringiram apenas às organizações matemáticas e didáticas da professora da turma.

As filmagens das aulas aconteceram no período de 09 de agosto à 14 de setembro de 2018, totalizando um total de 13 horas/aula (cada aula dura 50 minutos aproximadamente). No entanto, enumeramos as aulas de acordo com a quantidade de dias utilizados para a produção das videografias, que no caso totalizaram em 09 dias, ou seja, consideraremos um conjunto de 09 aulas. Apesar de serem direcionadas 04 aulas semanais para a disciplina de Matemática no segundo ano do Ensino Médio, nessa escola, levou-se mais tempo à conclusão das filmagens tendo em vista a realização de programações escolares e a ausência da professora em determinados dias em que aconteceriam as aulas de matemática na turma.

Com a compreensão do que afirmam Santos e Freitas (2017) a respeito de que uma técnica, em determinado momento da aula, por exemplo, pode vir a assumir a função de uma tecnologia, ou vice-versa, e, baseando-se também nas considerações levantadas na seção sobre Combinatória de que o Princípio Multiplicativo pode ser uma ferramenta útil para a resolução de problemas de contagem, bem como considerando as análises *a priori* das OM's, convém ressaltar que realizamos a videografia de todas as aulas em que foram tratados conteúdos referentes à Combinatória. Sendo assim, as filmagens realizadas contemplaram, em ordem cronológica em que apareceram nas aulas, os seguintes conteúdos:

- Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo;
- Arranjo com repetição;
- Arranjo simples
- Combinação simples;
- Permutação simples;

- Permutação com repetição.

Apesar da produção videográfica das aulas contemplarem todos esses conteúdos, é preciso reafirmar que nossa análise centrou-se apenas nos problemas de contagem do tipo arranjo, combinação e permutação, todos do tipo simples, ou seja, agrupamentos nos quais não se admite a repetição de elementos no mesmo subconjunto.

5.2.1 Organizações Matemáticas da aula da professora

De acordo com Chevallard (1999), o postulado básico da TAD reside no fato de que toda atividade humana pode ser descrita pela ideia de praxeologia que, por sua vez, está ancorada nos conceitos de tipos de tarefa a se realizar, de técnicas mobilizadas na realização desses tipos de tarefas, de tecnologias que expliquem ou justifiquem a técnica e de teorias que expliquem ou justifiquem as tecnologias. Quando uma praxeologia define descreve uma atividade matemática, denomina-se praxeologia matemática ou organização matemática.

Partindo da noção do primeiro componente da praxeologia, os tipos de tarefas T_X, e após uma leitura das transcrições das aulas observadas, verificamos que a professora apresentou um total de 89 tarefas matemáticas durante as aulas observadas, das quais, 85 tarefas foram respondidas conjuntamente com os seus alunos.

Do total de todas as tarefas apresentadas durante as aulas, 25 tarefas podem ser categorizadas como tipo de tarefas que envolvem os problemas de contagem dos tipos arranjo, combinação e permutação, sendo que 24 delas foram efetivamente trabalhadas (respondidas) ao longo das aulas e 01 delas, apenas enunciada. Comparando a quantidade de tarefas propostas relacionadas a esses problemas de contagem com o total de todas as tarefas, percebe-se uma quantidade muito aquém do que se esperava, uma vez que esses problemas são tratados exclusivamente no âmbito do Ensino Médio. Se fizermos a comparação com o número de tarefas que podem ser categorizadas em problemas que envolvem os princípios aditivo e multiplicativo ou situações que tratam apenas do produto fatorial e suas operações básicas, por exemplo, percebemos uma discrepância ainda maior, já que encontramos um total de 13 tarefas que envolvem os PM e PA e 37 que se relacionam ao produto fatorial. Na tabela, a seguir, apresentamos a distribuição de tarefas matemáticas apresentadas na aula da professora:

Tabela 01 – Distribuição das tarefas apresentadas nas aulas da professora

Tarefas apresentadas nas aulas da professora	Quantidade	Percentual (%)
Tarefas relacionadas aos problemas de contagem dos tipos arranjo, permutação, combinação	25	28
Tarefas relacionadas aos problemas que envolvem os PA e PM	13	15
Tarefas envolvendo o produto fatorial e suas operações básicas	37	42
Outras tarefas matemáticas	14	15
TOTAL	89	100

Fonte: Autoria Própria

Nossas análises se concentraram nessas 25 tarefas apresentadas durante as aulas da professora, que foram agrupadas utilizando a mesma categorização adotada nas análises *a priori* da subseção anterior, ou seja, nos tipos de tarefa T_1, T_2 e T_3, que correspondem aos problemas de contagem dos tipos permutação, arranjo e combinação, respectivamente, como se descrevem a seguir, adaptadas ao gênero calcular:

- T_1 – Calcular o número de agrupamentos formados a partir de *m* elementos, nos quais todos os *m* elementos serão usados, ou seja, esses agrupamentos serão distintos entre si apenas pela ordem dos seus elementos;
- T_2 – Calcular o número de agrupamentos formados a partir de *m* elementos, nos quais poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ... , *n* elementos, com $0 < n < m$, nos quais esses agrupamentos podem ser distintos um dos outros pela ordem ou natureza dos seus elementos;
- T_3 – Calcular o número de agrupamentos (subconjuntos) formados a partir de *m* elementos, nos quais poderão ser formados agrupamentos de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ... , *n* elementos, com $0 < n < m$, nos quais esses agrupamentos são distintos uns dos outros apenas pela natureza dos seus elementos, pois a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

No tipo de tarefa T_1, identificamos a apresentação de 13 tarefas durante as aulas da professora, as quais podem ser categorizadas nos seguintes subtipos de tarefas, dispostos na tabela a seguir:

Tabela 02 – Categorização e distribuição das tarefas do tipo T_1 encontradas na aula da professora

Tipo de Tarefa T_x	**Subtipos de Tarefa t_x**	**Total de Tarefas**
T_1 – Calcular o número de agrupamentos formados a partir de m elementos, nos quais todos os m elementos serão usados, ou seja, esses agrupamentos serão distintos entre si apenas pela ordem dos seus elementos	t_{11} – Determinar o número de permutações P_m formadas a partir de m elementos	11
	t_{12} – Determinar o número de permutações formadas a partir de m elementos das quais $m_1, m_2, \dots, m_{m-1} \in m$ devem estar fixados na sequência dos m elementos	01
	t_{13} – Determinar o número de permutações formadas a partir de m elementos das quais $m_1, m_2, \dots, m_{m-1} \in m$, devem aparecer na sequência juntos, nessa ordem ou não.	01
	TOTAL	13

Fonte: Autoria Própria

Notamos uma predileção pelo trabalho com o subtipo de tarefas t_{11} em detrimento dos demais subtipos de tarefa. É possível também percebermos que a professora, em suas aulas, lança mão dos mesmos subtipos de tarefas explorados no livro didático analisado, exceto pela ausência do subtipo de tarefa t_{14} que implica em "Determinar a posição do elemento $m_x \in m$ na sequência de m elementos".

O subtipo de tarefa t_{11} aparece na aula 6 e pode ser percebido na seguinte tarefa proposta pela professora:

> **P:** Agora eu vou distribuir aqui essas cédulas e você vai pegar 4 cédulas diferentes, certo? Porque agora a gente vai fazer permutação com essas cédulas... Escolha 4 cédulas diferentes... Vamos fazer a permutação!

Percebe-se que, quando a professora faz enunciação dessa tarefa, a mesma já explicita a técnica que vai ser utilizada, nesse caso, a fórmula de permutação, uma vez que, a aula inicia com a apresentação da fórmula para o cálculo das permutações simples. Podemos inferir que, a utilização cédulas na aula para explorar esse subtipo de tarefas se justifica exclusivamente para fixar a ideia trazida pela professora de que permutar significa trocar a posição dos elementos, já que a utilização das cédulas se deu apenas para escrever agrupamentos formados por essas cédulas que se diferenciavam um do outro apenas pela posição dessas células. Essa ideia foi igualmente explorada em outras tarefas apresentadas pela professora como se pode perceber nos seguintes fragmentos das transcrições da Aula 6.

> **P:** 3 objetos diferentes. Pega aí. Pronto! Peguem aí 3 objetos. Vamos formar um anagrama com esses objetos. Pegue aí 3 objetos. Eu vou pegar aqui o apagador, o brilho e piloto, certo? Pegue aí seus objetos também. Vamos formar anagramas com isso daqui.
> (...)
> **P:** Será que a gente pode fazer anagramas com moedas?
> **Al:** Pode.
> **P:** Sim ou não?
> **Al:** Pode.
> **P:** Será que a gente pode fazer com pessoas?
> **Al:** Pode.
> **P:** Vem cá! Quatro pessoas aqui na frente.
> **Al:** Eu vou, professora.
> **P:** Ana, Pedro, Tiago, João e Felipe. Vou colocar as iniciais A, P, T, J e F. Será que a gente pode formar anagramas com eles, minha gente? Vamos fazer uma permutação, não é, com eles aqui?

Notamos a intenção implícita da professora em fazer com que os estudantes compreendessem que nas tarefas do subtipo t_{11} os agrupamentos seriam formados a partir da troca da posição dos seus elementos, ou seja, um agrupamento diferencia um do outro apenas pela ordem dos seus elementos, o que pode nos conduzir a inferir que isso se trata de elementos do entorno tecnológico.

Um fato que nos chama a atenção, nessa porção da transcrição anterior, é o de que a professora atribui o mesmo significado de permutação à palavra “anagrama”, apesar da definição desta palavra ter sido apresentada de forma correta anteriormente. Isso pode ser justificado pelo fato de que é bastante comum encontrarmos tarefas desse subtipo nas quais é preciso determinar o número de anagramas a partir de uma certa quantidade de letras, o que pode ter induzido a conclusão de que realizar permutações signifique escrever anagramas.

Como já informado anteriormente, a técnica utilizada pela professora na resolução do subtipo de tarefa t_{11} é explicitada desde o enunciado da tarefa e reforçada a todo instante do trabalho com o tarefa, como se pode observar no fragmento de transcrição abaixo:

> **P:** Qual é a fórmula agora? Nós vamos pegar isso aqui e aplicar na fórmula? Anote aí a fórmula agora. Aplique aí a fórmula! (...) Vamos lá!? Aplique aí fórmula do jeito que eu apliquei aqui *[fazendo referência à utilização da fórmula de permutação na resolução da tarefa anterior]*.

Fica evidente o uso da técnica τ_3, que é a aplicação do produto fatorial, na resolução do subtipo de tarefa $ƭ_{11}$. A professora observa que um grupo de estudantes conseguiu resolver a tarefa a partir da técnica sugerida e, em seguida escreve a resolução no quadro:

> **P:** Ela fez aqui, ó. A equipe de Ana. P_n. P de que? P representa o que?
> (...)
> **P:** Permutação. O P, permutação e n é o que? O número. E n!, esse n a gente coloca pelo número. Elas colocaram aqui 4 vezes 3 vezes 2 vezes 1 igual...

Quadro 13 – Registro da professora no quadro

$$P_n = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Fonte: Transcrição (Ver Apêndice)

Essa técnica é igualmente utilizada para resolver todas as tarefas desse mesmo subtipo. O quadro a seguir sintetiza da organização matemática em torno do subtipo de tarefa $ƭ_{11}$:

Quadro 14 – Síntese da praxeologia matemática em torno do subtipo de tarefa $ƭ_{11}$ apresentada pela professora

Subtipo de Tarefa	Técnica	Entorno tecnológico-teórico
$ƭ_{11}$ – Determinar o número de permutações P_m formadas a partir de m elementos	(τ_3)Produto fatorial	Utilização da definição e do conceito de Permutação simples para *m* objetos – Combinatória (θ_{PS}).

Fonte: Autoria Própria

Utilizando os critérios de avaliação das OM apresentados no marco teórico e metodológico deste trabalho, a partir das contribuições de Chevallard

(1999) e Almouloud (2007), para a OM em torno do subtipo de tarefa f_{11}, podemos deduzir, a partir das transcrições que as tarefas desse subtipo trabalhadas durante as aulas são apresentadas de forma clara e bem identificadas e são representativas de situações matemáticas frequentemente encontradas. No entanto, as razões de ser não são explicitadas. Em relação a técnica τ_3 empregada na resolução do subtipo de tarefa f_{11}, pode-se dizer que ela é apenas esboçada, no entanto é de fácil utilização. Além disso, essa técnica é imprescindível, eficaz e confiável na resolução desse tipo de tarefa. Todavia não se percebe possibilidade de evolução dessa técnica. A respeito do entorno tecnológico-teórico, as justificativas utilizadas são do tipo explicativas e estão relativamente próximas daquelas matematicamente válidas, embora fiquem implícitas no discurso da professora.

O subtipo de tarefa f_{13} que é "Determinar o número de permutações formadas a partir de m elementos das quais $m_1, m_2, \dots, m_{m-1} \in m$, devem aparecer na sequência juntos, nessa ordem ou não." aparece na Aula 8 em uma tarefa proposta do livro didático, apresentada a seguir:

Figura 15 - Tarefa do subtipo f_{13} apresentada na aula da professora

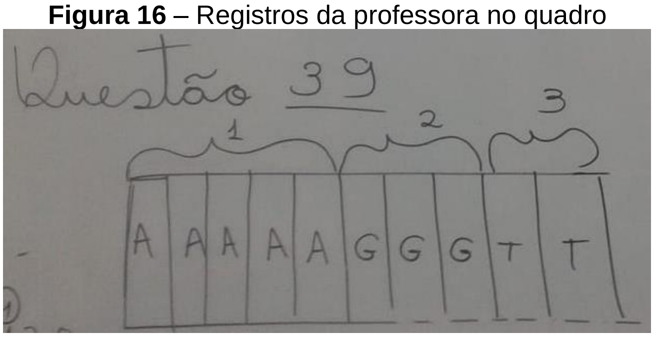
Em uma mesma prateleira de uma estante há 10 livros distintos, sendo cinco de Álgebra, três de Geometria e dois de Trigonometria.

a) De quantos modos distintos podemos arrumar esses livros nessa prateleira, se desejamos que os livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?

Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 238)

A professora divide a técnica na resolução dessa tarefa em algumas etapas. Inicialmente representa os livros no quadro, indicando cada um pela letra inicial do assunto a que pertencente, conforme figura a seguir:

Figura 16 – Registros da professora no quadro



Fonte: Acervo da Pesquisa

Em seguida, a professora continua a resolução, considerando cada grupo de livros como sendo apenas um, já que os livros de mesmo assunto devem permanecer juntos, segundo o que se pode observar na porção da transcrição abaixo:

> **P:** Um grupo de A, um grupo de G e um grupo de T. Então quantos grupos nós temos?
> **Al:** 3
> **P:** 3. Se nós temos 3 grupos então a gente vai fazer uma permutação de 3. Uma permutação de 3. Da seguinte forma: pensando nas matérias então eu posso arrumar de 3 modos. Então a permuta vai ser por 3 que é igual a quem? Quem é 3!? 3 fatorial é igual a 6. Nós temos 6.

Apesar dos 10 livros estarem organizados por assuntos, é preciso considerar que eles são distintos entres si, mesmo os de mesmo assunto. Daí a necessidade de se contar o número de permutações que cada grupo de livros pode gerar. Isso pode ser percebido na parte da transcrição a seguir:

> P: (...) E dentro de cada uma das matérias existe uma quantidade de possibilidades também, psiu, eu estou representando aqui só as 3 possibilidades. Mas dentro de cada uma aqui nós temos maneiras. Os de A são quantos?
> **Al:** 5
> **P:** Então eu vou fazer uma permutação por 5. $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.
> (...)
> **P:** Geometria agora. Permutação aqui pelos 3 livros agora. 3 livros de geometria então vai ser assim: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Depois eu tenho aqui trigonometria que vai ser uma $P_2 = 2$. Então, nós fizemos aqui as permutações por disciplinas, agora. Quantas maneiras eu posso arrumar livros de álgebra? Eu tenho 120 possibilidades. Quantas maneiras eu posso arrumar livros de geometria? Permutação por 3. Eu tenho 6 possibilidades. Trigonometria eu tenho 2 possibilidades. Mas além dessas possibilidades eu também tenho aqui 6. Eu já encontrei 6. *[Fazendo referência a permutação entre os grupos de assuntos]* Eu vou multiplicar por $120 \cdot 6 \cdot 2$, certo? Ou seja, primeiro eu vou multiplicar o que há nos parênteses e depois vezes 6.

Os registros da professora, em seguida, complementam a resolução da tarefa proposta do subtipo de tarefa f_{13}.

Quadro 15 – Registro da professora no quadro

$$6 \cdot (120 \cdot 6 \cdot 2) = 6 \cdot 1440 = 8640$$

Fonte: Transcrição das Aulas (Ver Apêndice)

Podemos inferir, então, que a técnica utilizada na resolução desse subtipo de tarefa é a do produto fatorial e suas operações básicas, pois ela pode ser resolvida na forma $x(P_m \cdot P_n \cdot \ldots \cdot P_o)$. Sobre o entorno tecnológico-teórico, não identificamos na transcrição da fala da professora elementos que possamos associar a esse bloco. Isso pode ser justificado pelo que argumentam Câmara dos Santos e Bessa de Menezes (2015) ao firmar que, em determinada Instituição, uma técnica pode adquirir o papel de autotecnológica, ou seja, não necessitará de justificativa. Já para Rosa do Santos (2015), quando uma situação como essa acontece, a autora afirma que a maneira como se resolve a tarefa tem a dupla função de ser técnica e tecnologia ao mesmo tempo. Todavia, podemos inferir o entorno tecnológico-teórico, já que se trata de um subtipo de tarefa associada ao tipo de tarefa T_1. No quadro abaixo, apresentamos a síntese da organização matemática em torno do subtipo de tarefa t_{13} trabalhada na aula da professora, que coincide com a OM apresentada no livro didático utilizado.

Quadro 16 – Síntese da praxeologia matemática em torno do subtipo de tarefa t_{13} apresentada pela professora

Subtipo de Tarefa	Técnica	Entorno tecnológico-teórico
t_{13} - Determinar o número de permutações formadas a partir de m elementos das quais $m_1, m_2, \ldots, m_{m-1} \in m$, devem aparecer na sequência juntos, nessa ordem ou não.	(τ_3) Produto fatorial e suas operações básicas.	Utilização da definição e do conceito de Permutação simples para *m* objetos – Combinatória (θ_{PS}).

Fonte: Autoria Própria

Avaliando a OM em torno do subtipo de tarefa t_{13} seguindo os critérios advindos das contribuições de Chevallard (1999) e Almouloud (2007), podemos inferir, em relação a tarefa proposta na aula, a mesma foi apresentada de forma clara e bem identificada e parece, todavia não se explicita a razão de ser desse subtipo de tarefa, apesar de considerarmos como uma tarefa que pode ser encontrada facilmente. A técnica utilizada não foi elaborada, mas é de fácil utilização e tem um nível de alcance abrangente. Como o entorno tecnológico-teórico a esse subtipo de tarefa não foi suficientemente explícito nas aulas da professora, nos eximimos de submetê-lo aos critérios de análise da avaliação das OM.

O subtipo de tarefa ƭ$_{12}$ – “Determinar o número de permutações formadas a partir de m elementos das quais $m_1, m_2, \dots, m_{m-1} \in m$ devem estar fixados na sequência dos m elementos” e é apresentado também na Aula 8, na correção de exercícios do livro didático, indicados na aula anterior, através da seguinte tarefa:

Figura 17 – Tarefa do subtipo ƭ$_{12}$ apresentada na aula da professora

Em uma mesma prateleira de uma estante há 10 livros distintos, sendo cinco de Álgebra, três de Geometria e dois de Trigonometria.

b) De quantos modos distintos podemos arrumar esses livros nessa prateleira de modo que nas extremidades apareçam livros de Álgebra e os livros de Trigonometria fiquem juntos?

Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 238)

Como se pode observar, trata-se da continuação do mesmo exercício no qual foi apresentado a tarefa anteriormente explorada em nossas análises. Todavia, o item “b” constitui uma nova tarefa que está categorizada como sendo do subtipo ƭ$_{12}$. No entanto, essa tarefa não respondida pela professora. Essa tarefa foi trabalhada através da exibição de um vídeo da internet no qual um professor aparece resolvendo tanto essa tarefa, como também a tarefa anterior. Como o foco da nossa análise está direcionado as praxeologias da professora, nos isentaremos de fazermos uma análise dessa tarefa, já que ela não foi trabalhada pelo professora. Além disso, comparando a praxeologia da professora com a praxeologia do professor do vídeo, pode-se notar diferença entre elas, sendo essa fato também confirmado na fala da professora apresentada a seguir nessa parte da transcrição:

> **P:** ... Mostrar aqui no final o mesmo resultado. Essa questão foi a questão que a gente acabou de resolver que dá 8640, a primeira, a letra A. A maneira como ele fez aqui o cálculo é diferente do que eu fiz.

No tipo de tarefa T$_2$, que refere-se aos problemas de contagem do tipo arranjo simples, identificamos 5 tarefas que podem ser associadas a esse tipo de tarefa e categorizadas nos subtipos de tarefas, distribuídos na tabela abaixo:

Tabela 03 – Categorização e distribuição das tarefas do tipo T_2 encontradas na aula da professora

Tipo de Tarefa T_x	Subtipos de Tarefa t_x	Total de Tarefas
T_2 – Calcular o número de agrupamentos formados a partir de m elementos, nos quais poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ... , n elementos, com $0 < n < m$, nos quais esses agrupamentos podem ser distintos um dos outros pela ordem ou natureza dos seus elementos	t_{21} – Dado m elementos distintos, determinar $A_{m,n}$ (número de arranjos desses m elementos, tomados n a n).	06
	t_{22} – Determinar $A_{m,n} \cdot B_{x,y}$, sendo A o número de arranjos de m elementos, tomados n a n, e B, o número de arranjos de x elementos tomados y a y.	0
	(t_{23}) Determinar o número de arranjos $A_{m,n}$ dos quais $m_1, m_2, \ldots e/ou\ m_{m-1} \in m$ sempre aparecem ou não aparecem nesses agrupamentos;	0
	TOTAL	06

Fonte: Autoria Própria

Como se pode observar, apenas um subtipo de tarefa, o t_{21}, foi encontrado na aula professora. Os demais tipos, não foram trabalhados, nem mesmo enunciados. Esse subtipo de tarefa aparece pela primeira vez no final da Aula 3, com a apresentação da seguinte tarefa, que pode ser percebida na fala da professora:

> **P:** (...) Com os algarismos: 4, 5, 6, 8 e 9, quantos números de 3 algarismos distintos eu posso formar?

Como essa aula chegou ao fim, não foi possível trabalhar na resolução dessa tarefa, ficando a mesma apenas enunciada. Na aula seguinte, de número 05, esse tipo de tarefa é retomado, sendo que dessa vez com a tarefa que aparece no diálogo entre a professora e os estudantes, nessa parte da transcrição:

> **P:** Agora eu tenho aqui números distintos. Agora com esses mesmos números 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7... Vamos aqui ver os números distintos que eu posso usar. Esse numeral aqui ó, os algarismos são distintos? *[apontando para o número 123 escrito no quadro]*
> **Al:** Não
> **P:** Distintos é diferente, minha gente. Aqui está distinto?
> **Al:** Anhan
> **P:** Então, se está distinto, presta atenção, eu estou pedindo aqui agora pra gente formar as possibilidades de números distintos.

Apesar da tarefa não está suficientemente clara nesse trecho da transcrição, ela torna-se clara pelo contexto no qual a professora a insere, pois a tarefa anterior apresentada nessa aula se referia a determinar números com três algarismos com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, que pode ser categorizada como um tipo de tarefa de arranjo com repetição. Logo após a resolução dessa tarefa, a professora propõe determinar também números com três algarismos, sendo que dessa vez os algarismos tinham de ser distintos, utilizando os mesmos dígitos.

Para resolver essa tarefa, a professora conjuntamente com os estudantes utilizam a técnica τ_2, que trata da aplicação do PM ou PFC. O trabalho com a τ_2 pode ser percebido na conversa entre a professora e os estudantes no seguinte trecho da transcrição, complementado pelo quadro que traz os registros feitos no quadro pela professora :

> **P:** Então, se está distinto, presta atenção, eu estou pedindo aqui agora pra gente formar as possibilidades de números distintos. No primeiro tracinho, eu posso usar esses 7 algarismos?
> **Al:** Anhan
> **P:** Eles são distintos?
> **Al:** São
> **P:** São. Eu posso usar os 7?
> **Al:** Anhan
> **P:** Então eu tenho quantas possibilidades?... Mas agora se eu já usei o 1 e eu quero números distintos... Eu posso repetir o 1 aqui?
> **Al:** Não
> **P:** Não. Então eu usei 1 possibilidade e agora ficaram quantas possibilidades?
> **Al:** 6
> **P:** 6. E agora? Vamos dizer que eu usei o 2?
> **Al:** Aí fica 5.
> **P:** Eu vou poder repetir o 2 aqui?
> **Al:** Não
> **P:** Então restaram quantas possibilidades?
> **Al:** 5
> **P:** Agora ó, esse problema aqui ó, números distintos. Quando for para o próximo tracinho, considerar o elemento do tracinho anterior. Então no próximo tracinho a gente já considerou que já usamos o 1. Então a gente agora só tem 6 possibilidades. Já usamos as 2 possibilidades. Agora só nos restam?
> **Al:** 5
> **P:** Então a gente faz ó, aqui também eu tô dizendo que a gente tem 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Então se é "E" também vai ser o princípio multiplicativo. Aí eu resolvo: 7 vezes 6 dá quanto?
> **Al:** 42
> **P:** 42 vezes 5 vai dar 210, certo?

Quadro 17 – Registros da professora no quadro

$\underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} = 210$

Fonte: Transcrição das aulas (Ver Apêndice)

Percebemos que a professora nomeia a técnica τ_2 como sendo técnica do tracinho. Essa técnica é apresentada no início da aula como uma dica para resolver as tarefas envolvendo arranjo. No entanto, pode-se notar no final do trecho da transcrição apresentado anteriormente, a necessidade do uso do PM, já que os eventos são sucessivos e independentes entre si.

Logo após a resolução da tarefa utilizando τ_2, a professora anuncia que vai resolver o problema a partir de uma técnica mais fácil, que é a partir uso da fórmula de arranjo simples, como se nota no diálogo entre elas e os estudantes na porção da transcrição a seguir, complementado por um quadro contendo os registros da professora no quadro:

> **P:** Uma técnica mais fácil é essa aqui ó... A é de arranjo né? A é de arranjo. Aí eu vou colocar n, p... Veja bem "$A_{n,p}$". Arranjo de um número maior por um número menor, certo? *[o número maior faz referência ao "n" da fórmula de arranjo e o número menor, ao "p"].*
> **P:** Presta atenção! Essa técnica não funciona para esses números repetidos. Só para os distintos. Então essa técnica aqui a gente só utiliza quando o problema for pedir a questão distinta. Então $A_{n,p}$, n vai ser o número de possibilidades que nós temos. Que são quantos?
> **Al:** 7
> **P:** 7 né? São 7. E p eu vou descer o número de vezes que eu estou pedindo. Qual foi o número de vezes que eu pedi aqui? 3. Tô pedindo pra descer 3 vezes. Vai ficar assim, ó, $A_{7,3}$. Esse n representa o número de algarismos e esse p a quantidade de algarismos que está sendo pedido aqui. 4. Então 7 eu desço 3 vezes. 7 eu desço 3 vezes. 7 eu desço?
> **Als:** 3 vezes
> **P:** Então vai ficar assim ó: 7 eu desço 3 vezes em ordem consecutivas, né? Então vem qual? Pelo fatorial. 7 vezes 6 vezes 5... Veja que ficou igual aqui né? 7 desço 3 vezes, 7 desço 3 vezes. 7 vezes 6 vezes 5 que também é igual a 210.

Quadro 18 – Registros da professora no quadro

$A_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$

Fonte: Transcrição das aulas (Ver Apêndice)

Quando se observa o trabalho com técnica, nesse trecho da transcrição, percebemos que na verdade não se trata da aplicação da fórmula de arranjo, como mencionado pela professora, mas da aplicação do princípio multiplicativo. O que utiliza da forma de arranjo é apenas a referência do número de elementos *n* disponíveis (que a professora chama de número maior) para formar os agrupamentos com *p* elementos (chamado pela professora de número menor) tomados desses *n*.

Em relação ao entorno tecnológico-teórico, a justificativa para a técnica utilizada na resolução esse subtipo de tarefa apresentado pela professora é dada pela distintas disposições que se podem adotar os elementos na constituição dos agrupamentos, que são a ordem e natureza. Nesse caso, a professora considera que a tarefa se trata de um problema do tipo arranjo quando a ordem dos elementos é capaz de gerar um novo agrupamento, desconsiderando que os agrupamentos também podem se distinguir um dos outros pela natureza dos seus elementos, como se pode perceber na sua fala alcunhada no trecho da transcrição abaixo:

> **P:** Pronto, gente, essa técnica aqui que a gente fez, ela é toda de arranjo. Isso aqui já é o arranjo, certo? É quando a ordem influi? Anhan. Arranjo.

No quadro que segue, apresentamos a síntese da organização matemática em torno do subtipo de tarefa $\mathfrak{t}_{21}$ apresentada pela professora:

Quadro 19 – Síntese da praxeologia matemática em torno do subtipo de tarefa $\mathfrak{t}_{21}$ apresentada pela professora

Subtipo de Tarefa	Técnica	Entorno tecnológico-teórico
$\mathfrak{t}_{21}$ – Dado m elementos distintos, determinar $A_{m,n}$ (número de arranjos desses m elementos, tomados n a n).	(τ_2) Princípio Fundamental da Contagem	Utilização da definição e do conceito de Arranjo Simples para *m* elementos, tomados *n* a *n* – Combinatória (θ_{AS}).

Fonte: Autoria Própria

Avaliando a OM em torno do subtipo de tarefa $\mathfrak{t}_{21}$, segundo os critérios supramencionados no marco teórico e metodológico deste estudo, podemos concluir que as tarefas foram apresentadas de forma clara, bem identificadas e tratam-se de situações matemáticas comuns. Todavia essas tarefas aparecem sem motivos válidos. A técnica proposta (τ_2) foi apenas esboçada, no entanto é de fácil utilização e é confiável e eficaz no cumprimento do tipo de tarefa proposto. A justificava é relativamente próxima daquela matematicamente aceita, já que considera apenas a ordem na formação dos agrupamentos.

A respeito do tipo de tarefa T2, que refere-se aos problemas de contagem do tipo combinação simples, percebeu-se, a partir da transcrição das aulas, que foram apresentadas apenas 05 tarefas desse tipo. Essas tarefas estão categorizadas nos subtipos de tarefas, de acordo com a distribuição na tabela a seguir:

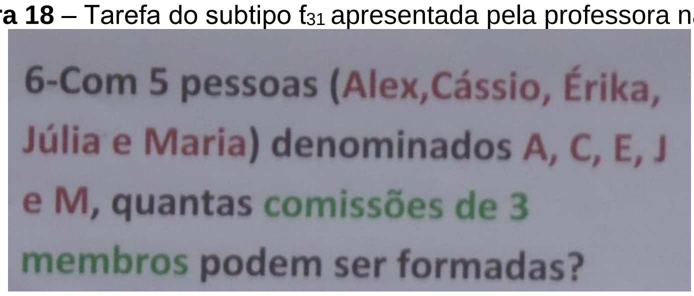
Tabela 04: Categorização e distribuição das tarefas do tipo T_2 encontradas na aula da professora

Tipo de Tarefa T_x	**Subtipos de Tarefa f_x**	**Total de Tarefas**
(T_3) Calcular o número de agrupamentos (subconjuntos) formados a partir de m elementos, nos quais poderão ser formados agrupamentos de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ... , n elementos, com $0 < n < m$. Esses agrupamentos são distintos uns dos outros apenas pela natureza dos seus elementos, pois a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.	f_{31} – Dado m elementos distintos, determinar $C_{m,n}$ (número de combinações desses m elementos, tomados n a n, com n elementos distintos, escolhidos entre os m).	05
	f_{32} – Determinar $C_{m,n} \cdot D_{x,y}$, sendo C o número de combinações de m elementos, tomados n a n, e D, o número de combinações de x elementos tomados y a y. .	0
	f_{33} – Determinar o número de combinações $C_{m,n}$ dos quais $m_1, m_2, \ldots e/ou\; m_{m-1} \in m$ sempre aparecem nesses agrupamentos.	0
	TOTAL	05

Fonte: Autoria Própria

O subtipo de tarefa f_{31} é apresentado na Aula 4 a partir da tarefa apresentada pela professora que se percebe a seguir:

Figura 18 – Tarefa do subtipo f_{31} apresentada pela professora na aula



Fonte: Acervo da Pesquisa

A técnica utilizada na resolução desse tipo de tarefa é a τ_2, que se refere a aplicação do princípio multiplicativo. O trabalho com essa técnica pode ser percebido na fala da professora na porção da transcrição que segue e no quadro com os registros realizados no quadro, posteriormente:

> **P:** E como é que eu resolvo essa técnica? Então é 1, 2, 3, 4, 5 eu tenho 5 pessoas aqui, certo? *[a professora conta a quantidade de elementos considerados na contagem]* A técnica de combinação. Combinação eu tenho 5 para formar grupos de 3. Grupos de 3. (...) Organizar comissões de 3 pessoas, certo? 3 em 3. Então, olha outra técnica de combinação que é mais fácil de resolver. 5 é o número de elementos. Psiu! Ó, 1, 2, 3, 4, 5. 5 para organizar 3. Então eu faço... Eu faço do mesmo jeito só que eu vou acrescentar um denominador fatorial. 5 aí eu desço 3.. (inaudível) 4... 5 vezes 4 vezes 3 (...)

Quadro 20 – Registros da professora no quadro

$$C_{5,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{60}{6} = 10$$

Fonte: Transcrição das Aulas (Ver Apêndice)

No processo de resolução da tarefa, apesar do uso de elementos típicos do trabalho com a fórmula de combinação (τ_5) como, por exemplo, "$C_{5,3}$", fica claro a aplicação do PM. Pode-se perceber, no fragmento da transcrição apresentado anteriormente, que a professora entende que não se trata do uso da fórmula, mas de uma "técnica mais simples" que não foi nomeada devidamente. Esse fato é reforçado mais uma vez na fala da professora, como se apresenta na parte da transcrição a seguir:

> **P:** Então, com essa técnica *[referindo-se a última técnica apresentada]* a gente descarta essa *[referindo-se a fórmula de combinação simples]*. Mas se a gente aplicar aqui... Se eu pegar 5 e colocar no lugar de n. Se colocar o 3 aqui e o 5 aqui e o 3 aqui vai dar o mesmo resultado, vai dar 10 *[referindo-se ao termos da fórmula de combinação]*. Essa técnica aqui ela é mais rápida, certo? *[referindo-se a última técnica apresentada]*

No tocante ao entorno tecnológico-teórico, o que se percebe é que a professora não o apresenta de maneira suficientemente clara. No entanto, percebe-se em alguns momentos da transcrição alguns indicativos ou tentativas de apresentar um discurso tecnológico, que trazemos no trecho a seguir:

> **P:** Quando a gente não modifica a situação, então continua sendo... é... será combinação, certo?
> (...)
> **P:** Combinação vai ser assim ó: pessoas, objetos... Quando for números é de arranjo... Combinação vai ser pessoas, professores, alunos... É assim envolvendo essas situações.

Como se pode notar, a professora não apresenta um discurso tecnológico-teórico que sustente a utilização da técnica. No entanto, ao considerarmos que os tipos de tarefas envolvendo as combinações simples foram apresentadas na mesma aula, e ponderando que no trabalho com tarefas que envolvem arranjo, a professora frisou que nesses agrupamentos a ordem é importante, talvez, implicitamente, para a professora, tenha ficado claro que, nas combinações o que é importante é a natureza dos agrupamentos. Abaixo, apresentamos a síntese da OM em torno do subtipo de tarefa t_{31}.

Quadro 21 – Síntese da praxeologia matemática em torno do subtipo de tarefa t_{21} apresentada pela professora

Subtipo de Tarefa	Técnica	Entorno tecnológico-teórico
Dado m elementos distintos, determinar $C_{m,n}$ (número de combinações desses m elementos, tomados n a n, com n elementos distintos, escolhidos entre os m).	(τ_2) Princípio Fundamental da Contagem	Utilização da definição e do conceito de Combinação Simples para *m* elementos, tomados *n* a *n* – Combinatória (θ_{CS}).

Fonte: Autoria Própria

Avaliando essa OM do ponto de vista dos critérios esboçados no referencial teórico e metodológico deste estudo, podemos inferir que as tarefas são bem identificadas e facilmente encontradas em situações matemáticas, mas sem apresentar a razão de ser das mesmas. As técnicas são apenas esboçadas, mas apresentam um nível de alcance muito abrangente, são de fácil acesso e confiável, sendo capaz de cumprir o tipo de tarefa proposto. Como os elementos do entorno tecnológico-teórico não estão explicitamente claros, nos desobrigamos de submetê-las a essa avaliação.

5.2.2 Organizações Didáticas da aula da professora

Na subseção anterior, nos debruçamos em analisar as organizações matemáticas em torno dos problemas de contagem dos tipos arranjo, combinação e permutação que emergiram nas aulas observadas da professora. Todavia, como já citado anteriormente no marco teórico desta investigação, Chevallard (1999) assinala a impossibilidade de haver OM sem um processo que as criem.

Dessa forma, se faz necessário entendermos de que forma se estruturam as dimensões do processo de elaboração dessas OM observadas e analisadas anteriormente, ou seja, é preciso descrever e analisar o processo de estudo e construção das OM que se denomina de Organização Didática.

Na tentativa de atingirmos a um dos objetivos levantado na parte introdutória deste estudo, nesta subseção, nos dedicaremos a identificar e caracterizar os seis momentos de estudo ou momentos didáticos, descritos por Chevallard (1999) – primeiro encontro com o tipo de tarefas, exploração do tipo de tarefas e de elaboração de uma técnica, constituição do ambiente tecnológico-teórico, trabalho com a técnica, institucionalização e avaliação. É importante salientarmos, mais uma vez, que a ordem dos momentos é, *a priori,* uma ordem de apresentação, já que eles não se propõem a seguir uma estrutura linear nos processos de estudo, podendo inclusive que alguns deles apareçam simultaneamente.

Como nosso interesse matemático está centrado nos problemas de contagem supramencionados, nos restringiremos a descrever as organizações didáticas em torno dos tipo de tarefas que envolvem esses problemas. Embora tenhamos categorizado alguns subtipos de tarefa a partir dos tipos de tarefas descritos anteriormente, ressaltamos que esses subtipos de tarefa nada mais é do que uma configuração de um determinado tipo de tarefa.

A seguir, descreveremos as Organizações Didáticas em torno dos tipos de tarefa T_1, T_2 e T_3. Vale enfatizar que a ordem cronológica em que aparecem esses tipos de tarefas nas aulas observadas da professora é diferente da que será apresentada aqui, já que viemos desde a análise *a priori* das OM seguindo essa ordem de apresentação.

- **Organização Didática do tipo de tarefas T_1 – Permutação Simples**

O ***primeiro momento de estudo*** – *encontro com o tipo de tarefas T_1* – aconteceu na Aula 6, destinada exclusivamente para o trabalho com permutação simples. A professora distribuiu aos estudantes algumas cédulas de papel e pediu para que eles realizassem permutações. Isso pode ser notado na fala da professora trazida no trecho da transcrição a seguir:

> **P:** Agora eu vou distribuir aqui essas cédulas e você vai pegar 4 cédulas diferentes, certo? Porque agora a gente vai fazer permutação com essas cédulas... Escolha 4 cédulas diferentes... Vamos fazer a permutação!

Como dito anteriormente, a utilização de cédulas na aula para explorar esse subtipo de tarefas se justifica exclusivamente para fixar a ideia trazida pela professora de que permutar significa trocar a posição dos elementos, já que a utilização das cédulas se deu apenas para identificar agrupamentos formados por essas cédulas que se diferenciavam um do outro apenas pela posição dessas células. Podemos notar também que a ideia era formar permutações simples, ou seja, agrupamentos onde não há repetição de elementos, já que a professora frisa que os estudantes devem escolher cédulas diferentes. Todavia, o processo de estudo de T_1 se dá a partir do reencontro com esse tipo de tarefa. Chevallard (1999) assinala que esse primeiro encontro ou reencontro pode acontecer várias vezes e de maneiras diferentes. No trecho do diálogo a seguir entre a professora e os estudantes, extraído das transcrições, podemos perceber esse reencontro com o tipo de tarefa, que marca, basicamente, o início do processo de estudo de T_1.

> **P:** 3 objetos diferentes. Pega aí. Pronto! Peguem aí 3 objetos. Vamos formar um anagrama com esses objetos. Pegue aí 3 objetos. Eu vou pegar aqui o apagador, o brilho e piloto, certo? Pegue aí seus objetos também. Vamos formar anagramas com isso daqui.
> (...)
> **P:** Será que a gente pode fazer anagramas com moedas?
> **Al:** Pode.
> **P:** Sim ou não?
> **Al:** Pode.
> **P:** Será que a gente pode fazer com pessoas?
> **Al:** Pode.
> **P:** Vem cá! Quatro pessoas aqui na frente.
> **Al:** Eu vou, professora.

Apesar da confusão entre as definições de anagrama e permutação por parte da professora, como se percebe acima, verificamos que a intenção da mesma é fixar a ideia de que a tarefa proposta é construir agrupamentos formados por todos os elementos de um determinado conjunto, nos quais eles serão diferentes entre si, apenas pela ordem em que ocupam esses elementos. Podemos deduzir, também, a partir de sua fala, que o fato de tomar as palavras anagrama e permutação como sinônimas, pode se remeter ao fato de que encontramos frequentemente situações matemáticas nas quais construir anagramas está geralmente ligadas ao tipo de tarefas T_1.

O ***segundo momento de estudo*** - *exploração do tipo de tarefas e de elaboração de uma técnica* – pode ser percebido quando a professora começa a explorar a tarefa a partir de um técnica embrionária denominada pela professora de “método do tracinho”. No entanto, percebemos que, nessa situação, esse método apontado pela professora difere de outro, também de mesmo nome, quando se trabalha, por exemplo, na resolução de tarefas envolvendo arranjos. Ou seja, esse método do tracinho utilizado em outras OM se remete a aplicação do PM (τ_2). Já nessa situação, esse método do tracinho refere-se a listagem dos agrupamentos, um a um, nos quais os tracinhos são apenas indicativos para expressar a quantidade de elementos do conjunto que vai gerar esses agrupamentos, conforme se observa na porção da transcrição a seguir, complementada por um quadro com os registros da professora no quadro.

> **P:** Então quatro tracinhos porque a gente tem quatro cédulas. E se fossem três cédulas, seriam três tracinhos. Então nós temos aqui quatro cédulas, temos aqui a terceira maneira. Vá anotando aí! Minha primeira maneira agora foi 10, 5, 1 real e 2.

Quadro 22 – Registros da professora no quadro

$\underline{1}\ \ \underline{2}\ \ \underline{5}\ \ \underline{10} \rightarrow 1$

$\underline{2}\ \ \underline{1}\ \ \underline{5}\ \ \underline{10} \rightarrow 2$

$\underline{10}\ \ \underline{5}\ \ \underline{1}\ \ \underline{2} \rightarrow 3$

Fonte: Transcrição das Aulas (Ver Apêndice)

No entanto, ao que parece, a professora percebe a limitação dessa técnica, da listagem dos agrupamentos, para resolver satisfatoriamente esse tipo de tarefa, tornando-se limitada, uma vez que quando se tem uma grande quantidade de elementos no conjunto, o trabalho com essa técnica pode ser inviabilizado, pois se corre grande risco de esquecer e/ou contar mais de uma vez algum(ns) dos agrupamentos. Depois de elencar algumas possibilidades de agrupamentos, a professora, juntamente com os estudantes, retomam a fórmula para o cálculo de permutações simples, apresentada no início da aula. Os fragmentos da transcrição, a seguir, trazem o momento em que essa fórmula foi apresentada pela professora e, em seguida, explorada na resolução do tipo de tarefa proposto, complementado por um quadro contendo os registros da professora no quadro.

> **P:** Ó, isso aqui é uma permutação. É a fórmula da permutação simples. Então, eu vou "botar" aqui de novo $P_n = n!$. Quando eu tenho aqui $P_n = n!$, esse n vale um número e esse n também é um número. Esse mesmo número que está aqui, vai estar aqui também... Sendo que aqui tem aqui uma exclamação (!)... Representando o que? Um fatorial...
> (...)
> **P:** Qual é a fórmula agora? Nós vamos pegar isso aqui e aplicar na fórmula? Anote aí a fórmula agora. Aplique aí a fórmula! Quem me mostrar primeiro vai ganhar um lanchinho. Vamos lá!? Aplique aí fórmula do jeito que eu apliquei aqui. Valendo o lanchinho de sexta.
> (barulho dos estudantes enquanto realizam o procedimento orientado pela professora)
> **P:** Ela fez aqui, ó. A equipe de Ana. Pn. P de que? P representa o que?
> **Al:** A permuta.
> **P:** Permutação. O P, permutação e n é o que? O número. E n!, esse n a gente coloca pelo número. Elas colocaram aqui 4 vezes 3 vezes 2 vezes 1 igual.

Quadro 23 – Registros da professora no quadro

$$P_n = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Fonte: Transcrição das Aulas (Ver Apêndice)

Dessa forma, podemos concluir que a técnica utilizada pela professora no momento exploratório desse tipo de tarefa foi ampliada para a técnica τ_3, que refere-se a aplicação do produto fatorial. Essa técnica, conforme assinalado anteriormente no estudo das OM, pode ser um bom meio para resolver problemas desse tipo.

O ***terceiro momento de estudo*** – *constituição do ambiente tecnológico-teórico* – aparece, na maioria das vezes, de forma implícita em alguns momentos das aulas. No entanto, pode-se perceber mais claramente elementos do entorno tecnológico-teórico no início da Aula 6. Isso remete ao que afirma Chevallard (1999) ao considerar que, no ensino tradicional, esse momento constitui a primeira etapa de estudo (em ordem cronológica) e as tarefas aparecem como aplicação desse bloco. Notamos alguns vestígios desse entorno nos trechos dos diálogos retirados da transcrição que se segue.

> **P:** (...) Então, o que é uma permutação? Vamos lá, vê o que vocês compreendem por PERMUTAR. O que é permutar? Uma permuta. Vamos fazer uma permuta? Vocês já ouviram essa palavra? Quem fez uma permuta? Hã?
> **Al:** É um agrupamento
> **P:** Um agrupamento. Ele acha que é um agrupamento. Será que permutar é um agrupamento?
> **Al:** Permuta é uma permuta.
> **P:** Permutar. Permutação vem de permutar.
> **Al:** Professora, eu sei o que é permuta.
> **P:** Alguém sabe o que é permutar? Eu acho que muita gente já fez permutas aqui.
> **Al:** Todo dia.
> **P:** Sabe não? Ninguém sabe? Permutar é trocar, modificar, substituir... Tudo isso aí é permutar. Psiu! Permutação, permutar quer dizer isso. Permutação simples. Permutações... Psiu! Silêncio, senão vocês não vão me ouvir. Permutações são agrupamentos feitos com todos os elementos do conjunto dado, sendo que cada agrupamento difere dos demais apenas pela ordem dos seus elementos. Dado o conjunto n, um conjunto com n elementos, vamos fazer todos os arranjos possíveis com os elementos n. *[a professora ler a definição de permutação que está afixada no quadro]*. Então mais uma vez apareceu o n aqui. Esse n está representando o número, porém esse n poderia ser outra letra. Poderia ser um j, um m, um k, um y... Então, isso aqui que está destacado aqui ó, de verde... Ó, isso aqui é uma permutação. É a fórmula da permutação simples. Então eu vou botar aqui de novo $P_n = n!$. Quando eu tenho aqui ó, $P_n = n!$, esse n vale um número e esse n também é um número. Esse mesmo número que está aqui, vai estar aqui também... Sendo que aqui tem aqui uma exclamação (!)... Representando o que? Um fatorial...

Desde o início desse trecho, percebemos as tentativas da professora de construir um discurso que justifique a escolha da técnica a partir das ideias intuitivas de permutação. No entanto, percebe-se mais adiante que maneira bem explícita a definição de permutação, a partir da leitura realizada pela professora de um cartaz afixado no quadro. Fica evidente que o uso da fórmula apresentada se faz necessário, tendo em vista de que todos os elementos de um determinado conjunto serão usados e que as distintas disposições em que os elementos desses agrupamentos se formam se dão unicamente pela ordem dos seus elementos.

O ***quarto momento de estudo*** – *o trabalho com a técnica* – é percebido durante a parte final da aula 6, quando a professora propõe uma nova tarefa do mesmo tipo e resolve conjuntamente com os estudantes, como é percebido no diálogo entre eles no trecho da transcrição a seguir, acrescentado de um quadro com o registro de um estudante no quadro.

> **P:** Ana, Pedro, Tiago, João e Felipe. Vou colocar as iniciais A, P, T, J e F. Será que a gente pode formar anagramas com eles, minha gente? Vamos fazer uma permutação, não é, com eles aqui?
> (...)
> **P:** Agora quem gostaria de vir aqui anotar a fórmula para esse anagrama? Quem gostaria de resolver este anagrama?
> **Al:** Pedro, professora!
> *[Uma estudante se dirige ao quadro para fazer anotações]*
> **P:** Lúcia está resolvendo. Vamos ver se ela vai acertar este anagrama de 5 pessoas.

Quadro 24 – Registro de um estudante no quadro

$$P_n = n!$$
$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Fonte: Transcrição das Aulas (Ver Apêndice)

Notamos que na resolução da tarefa proposta acima, já se pode observar que o trabalho com técnica vai ganhando mais confiança de forma que até mesmo os estudantes conseguem perceber a eficiência da mesma na resolução desse tipo de tarefas. Na continuidade da aula 6, a professora propõe uma lista de tarefas do mesmo tipo que, apesar de não serem resolvidas por ela na aula, pode-se concluir que a técnica proposta é imprescindível para o cumprimento do tipo de tarefas proposto. A esse aspecto, rememoramos o que considera Artaud (2018) ao afirmar que este momento pode ser marcado pela resolução de exercícios.

O ***quinto momento de estudo*** – *institucionalização* – acontece conjuntamente com a constituição do ambiente tecnológico-teórico. Além disso, podemos observar que, ao final da aula 6, a professora propõe uma revisão na qual retoma aos aspectos da OM que considera importante, como é possível constatar no seu diálogo com os estudantes retirado da transcrição que segue:

> **P:** Prestem atenção! Vamos fazer uma revisão antes de acabar a aula. Revisão da aula: as permutações que eu falei aqui, o que é permutar, que no começo eu falei, ninguém sabia? Agora vocês sabem o que é permutar? As permutações podem ser de dois modos. Quem lembra? Quais os modos em que as permutações aparecem? Duas maneiras de permutação.
> (Inaudível)
> **P:** A simples. Permutação simples. Qual a outra? Com repetição. A simples são essas aqui que estamos trabalhando e com repetição, sexta-feira. Mas a gente já viu a repetição, se for letras, repete-se letras, se for numerais, repete-se numerais. Qual é a fórmula de permutação simples?
> **Al:** P_n...
> **P:** Esse n tá no lugar de quem? Quem é n? Números iguais da situação... O que é um anagrama? Anagrama? Quem lembra o que é anagrama?
> **Al:** Agrupamento formado por letras, números...

No trecho do diálogo acima fica evidente a tentativa da professora em oficializar a OM proposta elencando elementos que devem fazer parte da cultura escola que ela julga importante como, por exemplo, a distinção entre as tarefas que evolvem permutação simples e com repetição, a fórmula para o cálculo de permutação simples e a ideia de anagrama que, ao que parece, há uma tentativa de associá-la a uma tarefa comum no estudo de permutação simples. No entanto, elementos do ambiente tecnológico-teórico só são legitimados no momento da sua constituição, no início da aula.

O ***sexto momento de estudo*** – *avaliação* – conforma considera Chevallard (1999), acontece conjuntamente com o momento da institucionalização. O processo de estudo de construção da OM foi realizado em parceria com os estudantes, oportunizando-os de apresentarem suas soluções na tentativa de perceber as fragilidades com o trabalho com a técnica, por exemplo.

- **Organização Didática do tipo de tarefas T_2 – Arranjo Simples**

O ***primeiro momento de estudo*** – *encontro com o tipo de tarefas T_2* – aconteceu no final da Aula 4, no entanto o processo de estudo com esse tipo de tarefa, acontece a partir de um reencontro durante a Aula 5. Inicialmente, a professora propõe uma tarefa para determinar a quantidade de números que se poderiam formar utilizando os algarismos de 1 a 7. Como não se havia restrição quanto a repetição dos algarismos, essa tarefa caracteriza um problema de contagem do tipo arranjo com repetição de elementos. Logo em seguida, a partir dos dados da mesma tarefa, a professora solicita que os estudantes determinem a quantidade de números que se poderiam formar, utilizando os mesmos algarismos, sendo que dessa vez a restrição é que os algarismos teriam que ser diferentes. O diálogo entre a professora e os estudantes pode ser notado na fração da transcrição a seguir:

> **P:** Agora eu tenho aqui números distintos. Agora com esses mesmos números 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7... Vamos aqui ver os números distintos que eu posso usar. Esse numeral aqui ó, os algarismos são distintos? *[apontando para o número 123 escrito no quadro]*
> **Al:** Não
> **P:** Distintos é diferente, minha gente. Aqui está distinto?
> **Al:** Anhan
> **P:** Então, se está distinto, presta atenção, eu estou pedindo aqui agora pra gente formar as possibilidades de números distintos.

Percebemos que, tanto no primeiro encontro como no reencontro com o tipo de tarefa, a professora explora as tarefas buscando sempre a participação e envolvimento dos estudantes.

O ***segundo momento de estudo*** - *exploração do tipo de tarefas e de elaboração de uma técnica* – aconteceu no início da Aula 4 quando a professora apresenta a fórmula de Arranjo Simples. Essa técnica proposta foi apenas esboçada e não efetivamente elaborada. Além disso, no primeiro momento, a técnica não foi devidamente trabalhada na resolução da tarefa proposta. O tipo de tarefas proposto é trabalhado inicialmente a partir da técnica denominada pela professora de “técnica do tracinho”, que nada mais é do que a aplicação do princípio multiplicativo. Na partícula da transcrição a seguir, notamos o trabalho com essa técnica a partir das falas da professora e dos estudantes, complementadas por um quadro com os registros da professora no quadro.

> **P:** Primeira dica, tracinhos. Usar os tracinhos observando no problema o que se está pedindo... Por exemplo: se no problema pedir para organizar números de 4 algarismos, você desenha 4 tracinhos e vai organizando os números. Se o problema pedir 3 algarismos você anota 3 tracinhos e vai organizando os números. Pronto aqui só temos de 3 e 4 tracinhos. Esse aqui meu ó: é de 3 tracinhos... Fiz uma combinação aqui, né? De 3 tracinhos e multiplicando deu 24. Em um outro momento a gente também vai usar e começar pela casa da encrenca. Isso também é uma dica. Não tem nos livros.
> (...)
> **P:** Agora ó, esse problema aqui ó, números distintos. Quando for para o próximo tracinho, considerar o elemento do tracinho anterior. Então no

próximo tracinho a gente já considerou que já usamos o 1. Então a gente agora só tem 6 possibilidades. Já usamos as 2 possibilidades. Agora só nos restam?
Al: 5
P: Então a gente faz ó, aqui também eu tô dizendo que a gente tem 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Então se é "E" também vai ser o princípio multiplicativo. Aí eu resolvo: 7 vezes 6 dá quanto?
Al: 42
P: 42 vezes 5 vai dar 210, certo?

Quadro 25 – Registros da professora no quadro

$\underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} = 210$

Fonte: Transcrição das aulas (Ver Apêndice)

A partir das falas, notamos que apesar da professora inicialmente referir-se a técnica como sendo do tracinho, mais adiante fica claro que trata-se da aplicação do princípio multiplicativo. Chamamos a atenção, também, para o fato de que, embora a professora refira-se a técnica do tracinho como uma dica pessoal e que a mesma não consta nos livros, é possível percebermos a utilização do princípio multiplicativo como técnica para resolver os tipos de tarefas relacionadas a arranjo simples no livro didático, conforme já analisado anteriormente.

Mais adiante, a professora informou que iria resolver a tarefa utilizando outra técnica mais fácil, que seria a partir do uso da fórmula de arranjo simples. Todavia, conforme já explanado na análise das organizações matemáticas, trata-se apenas da aplicação do princípio multiplicativo. O que utiliza da fórmula de arranjo é apenas a referência do número de elementos n disponíveis (que a professora chama de número maior) para formar os agrupamentos com p elementos (chamado pela professora de número menor) tomados desses n.

O ***terceiro momento de estudo*** – *constituição do ambiente tecnológico-teórico* – se dá logo após o trabalho com o tipo de tarefas e a elaboração da técnica. No início da aula, ao apresentar as fórmulas de arranjo e de combinação[3], a professora chama a atenção para a necessidade de saber

[3] Na aula 4, a professora apresentou as OM em torno dos tipos de tarefas que envolvem os problemas de contagem dos tipos arranjo e combinação.

quando se deve utilizar cada uma dessas fórmulas. Isso pode ser percebido no seguinte trecho do diálogo entre ela e os estudantes, extraído da transcrição:

> **P:** (...) Então $A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ isso aqui é a fórmula de arranjo *[a professora mostra um cartaz afixado no quadro com a fórmula de arranjo]*. E temos também aqui um outra fórmula que é a de combinação, representada pela letra C. Ela é assim ó: $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ *[a professora mostra um cartaz afixado no quadro com a fórmula de combinação]*. Vejam que aqui já tem o p. Poderia ser o k, professora? Poderia. Qualquer letra. Isso aqui quer dizer: Número maior pelo número menor, certo?... Aí $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Essa aqui que inicia-se com o C, representa o que minha gente? Combinação. A é de que?
> **Al:** Arranjo
> **P:** E C? Combinação. Então, alguns problemas vão ser resolvidos pela técnica de arranjo e outros pela forma de combinação. A primeira coisa que a gente tem que aprender é quando um problema vai ser resolvido pela forma de arranjo e quando vai ser por combinação.

Apesar dessa tentativa de justificar a escolha da técnica da fórmula de arranjo nesse momento da aula apresentado acima, a professora, na sequência, se detém ao trabalho com o tipo de tarefa a partir da técnica do princípio multiplicativo. Apenas após a resolução da tarefa proposta, é que a justificativa da técnica é apresentada, como se pode perceber na sua fala evidenciada no trecho da transcrição abaixo:

> **P:** Pronto, gente, essa técnica aqui que a gente fez, ela é toda de arranjo. Isso aqui já é o arranjo, certo? É quando a ordem influi? Anhan. Arranjo.

Conforme já retratado anteriormente, a justificativa apresentada pela professora se dá a partir das distintas disposições que se podem adotar os elementos na constituição dos agrupamentos, que são a ordem e natureza. Nesse caso, a professora considera que a tarefa se trata de um problema do tipo arranjo quando a ordem dos elementos é capaz de gerar um novo agrupamento, desconsiderando que os agrupamentos também podem se distinguir um dos outros pela natureza dos seus elementos.

O ***quarto momento de estudo*** – *o trabalho com a técnica* – desenrola-se na aula seguinte, com a resolução de uma lista de exercícios que estudantes deveriam ter resolvido em casa. Essa lista continha tarefas envolvendo arranjo simples. A técnica explorada na resolução dessas tarefas foi a do princípio multiplicativo.

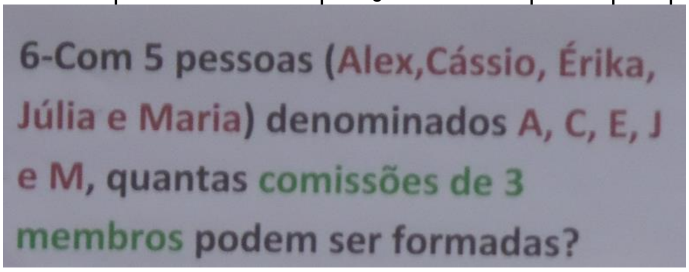
O ***quinto momento de estudo*** – *institucionalização* – se sucedeu juntamente com a constituição do entorno tecnológico-teórico e do trabalho com a técnica. Durante a resolução dos exemplos de tarefa, a professora enfatiza sempre os aspectos da resolução que ela acha importante para os estudantes, com a finalidade de que os mesmos sigam as orientações que lhes garantam êxito como, por exemplo, considerar a quantidade de decisões/eventos que acontecerão para a formação dos agrupamentos, associando a cada um deles um tracinho, observar a quantidade de elementos do conjunto que vai gerar os agrupamentos e observar se a ordem dos elementos é capaz de gerar novos agrupamentos.

O ***sexto momento de estudo*** – *avaliação* – ocorreu de forma articulada com o momento da institucionalização e do trabalho com a técnica. É possível percebermos que durante todo o processo de estudo de construção da organização matemática, uma preocupação da professora em oportunizar os estudantes a externalizar as soluções produzidas por eles com a finalidade de revelar e corrigir atitudes que não favoreciam a aprendizagem. Como a construção dessa OM sobre o tipo de tarefa T_2 aconteceu vinculada com a OM em torno dos problemas envolvendo arranjo com repetição, pode-se notar, por exemplo, a inquietação da professora quando os estudantes não se atentavam para a diferença entre esses tipos de tarefas.

- **Organização Didática do tipo de tarefas T_3 – Combinação Simples**

O ***primeiro momento de estudo*** – *encontro com o tipo de tarefas T_3* – realizou-se na aula 5 com a apresentação de uma tarefa afixada no quadro pela professora, como se percebe na figura a seguir, como também percebemos o reencontro com esse tipo de tarefas no momento de trabalho com a técnica.

Figura 19 – Exemplo de tarefa do tipo $\mathbf{T_3}$ afixado no quadro pela professora



Fonte: Acervo da pesquisa

Em relação ao ***segundo momento de estudo*** - *exploração do tipo de tarefas e de elaboração de uma técnica* – a professora apresenta no início da aula a fórmula para o cálculo combinações simples. No entanto, a técnica, assim como as demais, não foi devidamente elaborada, mas apenas esboçada. No trecho da transcrição que se sucede, percebemos, na fala da professora, a apresentação dessa técnica.

> **P:** (...)E temos também aqui um outra fórmula que é a de combinação, representada pela letra C. Ela é assim ó: $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ *[a professora mostra um cartaz afixado no quadro com a fórmula de combinação]*. Vejam que aqui já tem o p. Poderia ser o k, professora? Poderia. Qualquer letra. Isso aqui quer dizer: Número maior pelo número menor, certo?... Aí $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Essa aqui que inicia-se com o C, representa o que, minha gente? Combinação.

Percebemos, também, a partir desse trecho anterior alguns vestígios implícitos da constituição do entorno tecnológico-teórico a partir da apresentação da fórmula de combinação. Apesar de, como já assinalado anteriormente, essa técnica não ter sido devidamente elaborada, Rufino (2015) considera que aquilo que está sendo contado interfere na forma de contar, ou seja, na escolha da técnica. Quando se opta, por exemplo, pela fórmula de Combinação na resolução de uma tarefa, subentende-se que o que se está contando trata-se do número de subconjuntos ou de agrupamentos que são distintos uns dos outros apenas pela natureza dos seus elementos.

Todavia, percebemos que essa técnica é relegada pela professora, por considerar que o trabalho com a mesma é difícil. A técnica utilizada pela professora na resolução do tipo de tarefa é a da aplicação do princípio multiplicativo, como podemos verificar no diálogo, extraído da transcrição, entre a mesma e os estudantes.

P: E como é que eu resolvo essa técnica? Então é 1, 2, 3, 4, 5 eu tenho 5 pessoas aqui, certo? *[a professora conta a quantidade de elementos considerados na contagem]* A técnica de combinação. Combinação eu tenho 5 para formar grupos de 3. Grupos de 3. Então a gente vai formar aí de 3 algarismos. Números de 3 algarismos. Organizar comissões de 3 pessoas, certo? 3 em 3. Então ó: olha outra técnica de combinação que é mais fácil de resolver. 5 é o número de elementos. Psiu! Ó, 1, 2, 3, 4, 5. 5 para organizar 3. Então eu faço... Eu faço do mesmo jeito só que eu vou acrescentar um denominador fatorial. 5 aí eu desço 3.. (inaudível) 4... 5 vezes 4 vezes 3... Agora esse 3 eles vai virar um fatorial... Então ficou aqui ó: 5 vezes 4 dá quanto?
Al: 20
P: 20. 20 vezes 3?
Al: Dá 120
P: Dividido por... quem é 3 fatorial? Vocês lembram quem é 3 fatorial? 3 vezes 1 vezes 3. $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$ é igual a?
Al: 6
P: 6. Então quem é 3!? 6. 60 dividido por 6?
Al: 10

Registros da Professora no quadro
$C_{5,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{60}{6} = 10$

P: Então. Com essa técnica *[referindo-se a última técnica apresentada]* a gente descarta essa *[referindo-se a fórmula de combinação simples]*. Mas se a gente aplicar aqui... Se eu pegar 5 e colocar no lugar de n. Se colocar o 3 aqui e o 5 aqui e o 3 aqui vai dar o mesmo resultado, vai dar 10 *[referindo-se ao termos da fórmula de combinação]*. Essa técnica aqui ela é mais rápida, certo? *[referindo-se a última técnica apresentada]*

Mesmo não ficando claro na fala da professora, percebe-se a opção pela técnica de princípio multiplicativo, apesar do uso de elementos típicos do trabalho com a fórmula de combinação (τ_5) como, por exemplo, “$C_{5,3}$”.

O ***terceiro momento de estudo*** – *constituição do ambiente tecnológico-teórico* – não é apresentado suficientemente explícito, o que pode remontar à ideia de técnica autotecnológica, conforme consideram Câmara dos Santos e Bessa de Menezes (2015). No entanto, pode-se perceber algumas tentativas de justificar a utilização da técnica a partir da exploração do tipo de tarefa, no momento em que a professora apresenta um exemplo de agrupamento formado a partir do conjunto dado e questiona os estudantes se a mudança da ordem dos elementos gera um novo agrupamento. Essa situação é expressa no diálogo com os estudantes, como se percebe na fração da transcrição a seguir:

P: (...) Se eu formar um grupo de Alex, Cassio e Erika... E depois eu misturar, se eu colocar assim: Alex, Cassio e Erika. Se eu inverter: Erika, Cassio e Alex. Modificou as pessoas?

Al: Não
P: Então é o que? Combina...
Al: Combinação
P: Combinação.
(...)
P: Se eu colocar aqui Júlia, Marina e Erika. J, M e E. E depois se eu misturar E, J e M. Modificou o grupo?
Al: Não
P: Não. Então é combinação.
Al: Combinação.

Podemos inferir, a partir do diálogo acima, que a professora parece justificar a escolha da técnica a partir das distintas disposições em que se pode adotar os elementos nos agrupamentos, que é a ordem e natureza. No entanto, nesse caso especificamente, a professora elenca sua justificativa a partir daquilo que não é relevante nessa tarefa que é a ordem dos elementos, ao invés de justificar que os agrupamentos formados nesse tipo de tarefa são distintos uns dos outros apenas pela natureza dos seus elementos.

O ***quarto momento de estudo*** – *o trabalho com a técnica* – se deu na aula seguinte, com a resolução de exercícios que serviram como tarefa de casa para os estudantes. As tarefas do tipo T_3 propostas nessa lista foram todas resolvidas pela professora conjuntamente com os estudantes utilizando a técnica do princípio multiplicativo.

O ***quinto momento de estudo*** – *institucionalização* – se sucedeu juntamente com a constituição do entorno tecnológico-teórico e do trabalho com a técnica. Especialmente durante o trabalho com técnica, a professora retomou elementos que considerava importante a fazer parte do repertório de conhecimentos dos estudantes, enfatizando a técnica utilizada e considerando que, nesse tipo de tarefa, a ordem não é relevante na constituição dos agrupamentos.

O ***sexto momento de estudo*** – *avaliação* – assim como no tipo de tarefas T_2, aconteceu conjuntamente com o momento da institucionalização e do trabalho com a técnica. Como já ressaltado anteriormente, a professora sempre oportunizava aos estudantes a apresentação das suas soluções com o objetivo de ajustar situações que não estivessem em conformidade com a OM estabelecida.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Procedendo a uma breve retrospectiva da nossa dissertação, tomamos como ponto de partida a necessidade de se analisar as características relativas ao ensino de Combinatória no Ensino Médio sob o olhar das organizações matemáticas (tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias) e didáticas (os seis momentos de estudos).

A escolha do objeto matemático Combinatória deu-se, inicialmente, pelo fato do mesmo ocupar posição de destaque no currículo escolar nas escolas de educação básica no Brasil. Segundo, o estado da arte levantado em torno desse tema revela uma evolução quantitativa e qualitativa de trabalhos apresentados e publicados em eventos científicos na área da educação matemática, em âmbito nacional e internacional, realizados no Brasil nos últimos anos. Isso pode evidenciar a relevância da temática. Por outro lado, observa-se que estudos com professores configuram na quarta posição em relação à um grupo de cinco categorias de trabalhos, o que pode apontar para a necessidade de se ter um melhor investimento nessa categoria. Além disso, dentre as investigações realizadas com professores apresentadas na parte introdutória deste trabalho, apenas uma delas, a de Lima (2016), tem uma preocupação direcionada para a prática de ensino, no contexto da sala de aula. Todavia, essa autora aponta para a necessidade de se observar e analisar outras práticas educativas.

Além das motivações elencadas anteriormente, percebe-se dificuldades dos estudantes dos diversos níveis educativos em resolver problemas nos quais o processo resolutivo envolve o raciocínio combinatório. Isso pode ser constatado a partir dos resultados encontrados em avaliações em larga escala, em nível estadual e nacional, como também em diversos estudos.

Para ancorar nossa investigação, elegemos a teoria antropológica do didático, especialmente as organizações matemáticas e didáticas, para subsidiar nossas análises. Este referencial teórico tem provado ser uma poderosa ferramenta para analisar e descrever as práticas docentes e tem despontado nas pesquisas em didática da matemática.

Ademais este estudo empenhou-se em descrever e analisar as organizações matemáticas – os tipos de tarefas, as técnicas, as tecnologias e as teorias, bem como procura identificar e caracterizar as organizações didáticas – os seis momentos didáticos – relacionadas ao ensino de Combinatória.

Com a finalidade de contemplarmos os objetivos delineados, elegemos como sujeito participante da nossa investigação uma professora de matemática do 2º ano de Ensino Médio de uma escola da rede estadual de Pernambuco. A escolha de apenas um sujeito se justificou pelo fato de acreditarmos que as organizações matemáticas e didáticas que emergem em torno da atividade do professor são fenômenos didáticos e, por assim serem, se manifestam de diferentes formas. Também não tínhamos a intenção de estabelecer comparação entre práticas distintas, mas de apenas caracterizá-la sob a ótica das praxeologias.

Nos que diz respeito aos procedimentos da pesquisa, dividimos a nossa investigação em quatro etapas: na primeira realizamos uma análise *a priori* das organizações matemáticas a partir do livro didático adotado pela escola campo de investigação e utilizado pela professora, na segunda etapa, procedemos com a produção de uma videografia das aulas da professora sobre o objeto de saber Combinatória e realizamos a transcrição dos recortes das aulas; a terceira etapa foi marcada pela identificação e análise das organizações matemáticas da aula da professora; e na última etapa, identificamos e caracterizamos as organizações didáticas (os seis momentos de estudo). Salientamos que as análises foram embasadas nos critérios estabelecidos na metodologia, referenciados no marco teórico deste estudo.

Quantos aos resultados da nossa pesquisa, inicialmente analisamos o livro didático adotado pela escola e utilizado pela professora nas suas aulas com objetivo de modelizar, *a priori*, as organizações matemáticas em torno dos problemas de contagem dos tipos permutação, arranjo e combinação, todos do tipo simples, ou seja, quando não se admite repetição de elementos na formação dos agrupamentos. Categorizamos cada um desses problemas como tipos de tarefas T_1, T_2 e T_3, respectivamente. A partir desses tipos de tarefas, categorizamos as tarefas em subtipos de tarefas, que nada verdade se tratavam de configurações do tipo de tarefas a qual pertencem.

Dessa forma, em relação ao tipo de tarefas T_1, encontramos os subtipos de tarefas t_{11}, t_{12}, t_{13} e t_{14}. No entanto, apenas os subtipos de tarefas t_{11} e t_{13} são explorados em tarefas resolvidas. As técnicas utilizadas na resolução das tarefas foram a τ_2, que corresponde a aplicação do Princípio Multiplicativo e a τ_3, que trata da aplicação do Produto fatorial. Na constituição do ambiente tecnológico-teórico, o livro analisado baseou-se na contagem e/ou enumeração um a um dos agrupamentos possíveis e também a definição do conceito de Permutação simples para *m* objetos.

Sobre o tipo de tarefas T_2, que trata dos problemas envolvendo arranjo simples, categorizamos as tarefas encontradas no livro didático nos subtipos de tarefas t_{21}, t_{22} e t_{23}. Desses subtipos, apenas t_{21} e t_{22} aparecem em tarefas resolvidas. As técnicas mobilizadas na resolução desses subtipos de tarefas foram a τ_2, que trata do Princípio Multiplicativo e a τ_4, que alude à fórmula de arranjo simples. A constituição do bloco tecnológico-teórico se deu a partir da utilização da definição e do conceito de arranjo simples para *m* elementos, tomados *n* a *n*.

Já em relação ao tipo de tarefas T_3, que refere-se aos problemas de combinação simples, pudemos identificar tarefas associadas aos subtipos t_{31}, t_{32} e t_{33}, dos quais, apenas os dois primeiros aparecem em tarefas resolvidas. A formação do entorno tecnológico-teórico se concretiza a partir da listagem, uma a uma, das possibilidades de agrupamentos, utilização do diagrama da árvore de possibilidades e da utilização da definição e do conceito de Combinação Simples para *m* elementos, tomados *n* a *n* – Combinatória.

Ao que tudo indica, na análise realizada, o livro didático apresenta subsídios suficientes para que o aluno possa compreender a distinção dos problemas de contagem da Combinatória a partir das ideias de ordem e natureza, embora reconheçamos, embora se reconheça que outras técnicas podem ser utilizadas na realização dos tipos e subtipos de tarefas propostos.

Antes de prosseguirmos com a síntese das nossas análises, desta vez voltados para a prática de ensino observada, é preciso ressaltar que realizamos a videografia de 13 aulas da professora sujeita da pesquisa, no período de 09 de agosto a 14 de setembro de 2018. Desse total de aulas, 08 foram destinadas ao ensino dos problemas de contagem que nos propusemos a investigar.

Em relação as organizações matemáticas que emergiram na prática da professora, pudemos perceber o aparecimento dos tipos de tarefas T_1, T_2 e T_3. No que diz respeito aos subtipos de tarefas, as tarefas exploradas durante as aulas foram categorizadas nos subtipos t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{21} e t_{31}. É possível percebermos uma divergência entre as organizações matemáticas presentes no livro didático e na aula do professor, ao menos do ponto de vista dos subtipos de tarefas apresentados, já que, nas aulas, não aparecem todos os subtipos de tarefas presentes no livro didático. Duas técnicas foram empregadas pela professora na solução dos subtipos de tarefas:

(τ_2) Princípio Fundamental da Contagem e (τ_3) Produto fatorial e suas operações básicas, sendo que esta última foi usada apenas na resolução de tarefas do subtipo f_{13}. O entorno tecnológico-teórico nem sempre esteve explicitamente claro. No entanto as utilizações das definições e dos conceitos dos problemas de contagem foram as justificativas mais aplicadas na escolha das técnicas. Além disso, foi possível perceber que a professora incorporou à aula organizações matemáticas de outros sujeitos, a partir de vídeos extraídos da internet. No entanto, não submetemos essas OM às análises tendo em visto que o nosso objetivo estava firmado nas OM da professora.

Quantos às organizações didáticas, a professora contemplou os seis momentos didáticos, mas as sequências didáticas aconteceram de maneiras diferentes para os três tipos de tarefas. Com exceção do tipo de tarefas T_1, as organizações didáticas propostas pela professora iniciavam-se com o momento da exploração do entorno tecnológico-teórico, a partir da apresentação de definições bastante formais, e com o esboço de uma técnica, que geralmente tratava-se de uma fórmula. Isso pode denotar, segundo Chevallard (1999), características do ensino tradicional. Vale ressaltar também que as tarefas apresentadas eram pouco problemáticas e, de certo modo, padronizadas, o que poderia facilitar a escolha da técnica e sua justificativa. Isso se tornou muito claro quando observamos o momento do trabalho com a técnica.

No que diz respeito ao momento da institucionalização, quase sempre se dava de forma híbrida ao momento da constituição do ambiente tecnológico-teórico e, em alguns momentos, juntamente com o trabalho com a técnica. Todavia, salientamos que esse momento aconteceu de forma mais independente no trabalho com o tipo de tarefas T_1.

No tocante às técnicas utilizadas na resolução dos tipos de tarefas apresentadas pela professora nas aulas observadas, ratificamos a importância do uso do Princípio Multiplicativo. Além de estar em consonância com as orientações curriculares e metodológicas para o ensino de Combinatória preconizadas nos PCN e na BNCC, muitos estudos apontam para a importância do trabalho com essa técnica nos problemas de contagem, desprendendo-se do uso abusivo de fórmulas.

No entanto, quando se observa a formação do ambiente tecnológico-teórico, não se explora de forma suficientemente transparente as devidas justificativas para a escolha das técnicas. A justificativa a partir das distintas disposições que se podem adotar os elementos nos agrupamentos, ou seja, a ideia de ordem e natureza, não foi explorada de forma substancial.

Acreditamos que, após realizarmos as etapas previstas no nosso percurso metodológico, conseguimos responder aos questionamentos e atingirmos os objetivos delineados na introdução desta investigação.

Concernente a relevância que apresenta esta dissertação, acreditamos que nosso trabalho agrega importantes contribuições para a área da educação matemática, especialmente às discussões em torno do ensino e aprendizagem de Combinatória na educação básica, considerando a quantidade limitada de estudos realizados cujo olhar esteja direcionado para as práticas de ensino.

Do ponto de vista do referencial teórico que alicerçou nossas análises, consideremos também que nossa investigação propiciou um importante incremento para ratificar a relevância da TAD na análise de práticas de ensino em campos distintos da Álgebra, onde se percebe uma maior concentração de trabalhos que se fundamentam nesse importante referencial.

Todavia, consideramos que nossa dissertação não tinha a pretensão de ser generalista, já que nos propomos a realizar um estudo de caso, o que nos impulsiona a propor a observação de outras práticas de ensino relativas a esse campo matemático tão importante. Consideramos, também, que outros enfoques a partir de outros referenciais teóricos podem ser utilizados para submeter essa e outras práticas à análise na tentativa de elucidar outros fenômenos didáticos que, por uma questão de tempo, não foi possível realizarmos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, F. E. L. de. **O contrato didático e as organizações matemáticas e didáticas**: analisando as relações no ensino de equação do segundo grau a uma incógnita. 2016. 305f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.

ALMOULOUD,S. As transformações do saber científico ao saber ensinado: o caso do logaritmo. **Educar em Revista**, Curitiba, Brasil, n. Especial 1/2011, p. 191-210, 2011.

ALMOULOUD, S. A. **Didática da Matemática**. São Paulo: PUC, 2007.

ARAÚJO, A. J. **O ensino de álgebra no Brasil e na França:** estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático. 2009. 290f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Educação – Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

ARTAUD, M. **Constituir uma organização matemática e uma organização de estudo**: praxeologias para o professor, praxeologias para o pesquisador e sua ecologia. In: ALMOULOUD, S; FARIAS, L. M. S; HENRIQUES, A. A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos. Curitiba: CRV, 2018.

ASSIS, A. M. R. B; PESSOA, C. A. S. Discutindo combinatória em um processo de formação continuada com professores dos anos iniciais. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v.96, n. 24, p. 666-682, 2015.

BARBOSA, E. J. T. **Praxeologia do professor**: análise comparativa com os documentos oficiais e do livro didático no ensino de equações polinomiais do primeiro grau. 2017. 252f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.

BARBOSA DE LIMA, A. P. **Princípio fundamental da contagem**: conhecimentos de professores de matemática sobre seu uso na resolução de situações combinatórias. 2015. 139 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife – PE.

BENÍTEZ, P. R. A; BRAÑAS, J. R. F. **Introducción a la matemática aplicada (matemática discreta)**. Colección Textos Universitarios. Canarias, Litografía A. Romero S, 2001.

BESSA DE MENEZES, M. **Praxeologia do professor e do aluno**: uma análise das diferenças no ensino de equações do segundo grau. 2010. 178f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

BÍBLIA, N. T. 1 Coríntios. *In*: Bíblia: **Bíblia Sagrada Versão Católica com cabeçalhos**: Antigo e Novo Testamentos. Disponível em: <<https://www.bibliatodo.com/pt/a-biblia/versao-catolica/1corintios-8>>

BOGMAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em educação: uma introdução à teoria dos métodos**. Porto, Portugal: Porto Editora, 2010.

BORBA, R. E. S. R. O. raciocínio combinatório na educação básica. In: **Anais**... 10 Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador-BA, 2010.

BORBA, R. E. S. R. O; ROCHA, C. A.; AZEVEDO, C. Estudos em raciocínios combinatórios: investigações e práticas de ensino na educação básica. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro – SP, v. 29, n. 53, p. 1348-1368, 2015.

BOSCH, M. **Un punto de vista antropológico**: la evolución de los “instrumentos de representación” en la actividad matemática. In: IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Huelva – Espanha. p.15-28, 2000.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **PDE**: Plano de Desenvolvimento da Educação Básica: SAEB: ensino médio: matrizes de referência, tópicos e descritores: MEC, SEB; Inep, 2012.

________. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ciências da natureza, Matemática e Tecnologias. Ensino Médio. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental, 2000.

________. Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

________. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 3º e 4º ciclos. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental, 1998.

________. **PCN+ Ensino Médio, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**, Ministério da Educação, Brasília, 2002.

BROUSSEAU, G. **Les obstacles epistemologiqueset les problemes en mathematiques.** Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 4, n. 2, p. 165-198, 1983.

Brousseau, G. **Problèmes et résultats de Didactique des Mathématiques**, ICMI Study 94, 1994.

CÂMARA DOS SANTOS, M; BESSA DE MENEZES, M. A teoria antropológica do didático: uma releitura sobre a teoria. **Perspectivas da educação matemática**, Mato Grosso do Sul, Volume 8, Número Temático – 2015

CANNE, D. V. **Uma análise praxeológica das tarefas referentes à abordagem da área e perímetro nos finais do ensino fundamental**. 2015. 160f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

CARDOSO SILVA, M; PESSOA, C A S. A combinatória: estado da arte em anais de eventos científicos nacionais e internacionais ocorridos no Brasil de 2009 a 2013. **Educação matemática pesquisa**. v. 17, n. 4, p. 670-693, 2015.

CHAACHOUA, H; BITTAR, M. A teoria antropológica do didático: paradigmas, avanços e perspectivas. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**; v. 9, n. 1, p. 29-44, 2019.

CHEVALLARD Y. **Le concept de rapport au savoir, Rapport personnel, rapport institutionnel**, Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique 108 Grenoble, 1989

_______________. **Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques**. Communication aux 3es Journées d'étude franco-québécoises. Université René-Descartes Paris 5, 17-18 juin, 2002. Publicado posteriormente em: S. Maury S. & M. Caillot (éds), Rapport au savoir et didactiques, Éditions Fabert, Paris, 2003, p. 81-104. Disponível em: <<http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Approche_anthropologique_rapport_au_savoir.pdf>>

______________. **Conceitos Fundamentais da Didática:** as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: Didáctica das matemáticas / Jean Brun. Trad: Maria José Figueredo, Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

______________. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

______________. **La transposicion didactique**. Grenoble, La pensée Sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Y., BOSH, M. e GASCÓN J. **Estudar Matemáticas o Elo entre o Ensino e a Aprendizagem**. Arimed. Porto Alegre, 2001.

COSTA, A. P. **As concepções dos professores de matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no ensino fundamental**. 2003. 163 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

COUTINHO, E. G. **Raciocínio combinatório na resolução de problemas nos anos iniciais do ensino fundamental**: um estudo com professores. 2014. 225 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

CUNHA, M. J. G. **Elaboração de problemas combinatórios pro professores de matemática do ensino médio**. 2015. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife – PE.

D'AMORE, Bruno. **Elementos de didática da matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

ESTEVES, I. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do ensino fundamental**. 2000. 203f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. 5 ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FERREIRA, A. G; RUFINO, M. A. S; SILVA, J. R. **Os obstáculos epistemológicos em combinatória**: um estudo com os licenciandos em matemática. In: II CONGRESO INTERNACIONAL DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS E LA MATEMÁTICA, 1, 2016, Tandil – Argentina. Libro de Atctas. Tandil – Argentina: NIECyT/FCE, 2016, p. 312-319.

FONSECA, S. S. *et al*. Uma reflexão sobre conteúdo Análise Combinatória em dois livros didáticos do ensino médio. **Scientia Plena**, Sergipe, v.10, n. 04, p. 01-08, 2014.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática elementar**, v. 5: Combinatória, probabilidade, 8ª ed. São Paulo: Atual, 2013.

LIMA NAGARNINE, C. M. *et al*. Análise praxeológica dos passeios aleatórios da Mônica. **BOLEMA**, v. 24, n. 39, p. 451-472, 2011.

LIMA, I. B. **Aula de combinatória no ensino médio**: como estão ocorrendo. 2016. 115 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

MAIA, C. K. **A organização praxeológica do objeto triângulos nos livros didáticos da 7ª série do ensino fundamental**. 2008. 186f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

MARTINS, G. G. **Ensino de Análise Combinatória**: um estudo das representações de professores de matemática do Ensino Médio público de São Mateus. 2018. 149 f. Dissertação (Mestrado em Ensino na Educação Básica) – Universidade Federal do Espírito Santo, São Mateus – ES.

MERAYO, F. **Matemática Discreta**. Madrid: Paraninfo, 2001.

MOL, R. S. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

MORALES, C; AMBRÓSIO, B; MAGALHÃES, O. L. C. S; PEDRASSOLI, R. **Uma história da educação matemática no Brasil através dos livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental**. 2003. 174 f. Monografia (Pós Graduação Lato Sensu em Metodologia do Ensino-Aprendizagem da Matemática no Processo Educativo). Faculdade de Educação São Luís. Jaboticabal – SP.

MOREIRA, M. A. **Metodologias de Pesquisa em Ensino**. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

MORGADO**,**ALGUSTO C ; OLIVEIRA. et *al.* **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro : Grafica Wagner Ltda*, 1991*.

OLIVEIRA, M. M. de. **Como fazer projetos, relatórios, monografias, dissertações e teses**. 3. ed. Rio de Janeiro : Elsevier, 2005.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**; uma análise da influência francesa. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora. 2011.

PESSOA, C; BORBA, R. **Como crianças de 1ª a 4ª série resolvem problemas de raciocínio combinatório?** Anais do 2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Recife, 2008.

PESSOA, C; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **ZETETIKÉ** – Cempem – FE – Unicamp, v. 17, jan-jun, 2009.

PINTO, R. C. **Introdução à Análise Combinatória.** 2014. 59 f. Dissertação (Metrado em Pós-graduação em Matemática) – Departamento de Matemática. Pontifícia Universidade Católica do Rio. Rio de Janeiro – RJ**.**

RAVEL-BUENO, L. **Des programmes a la classe**: etude de la transposition didactique interne: exemple de l'arithmétique en terminale S espécialtité mathématique. 2003. Tese (Doutorado em Matemática e Informática). Universidade Grenoble I Joseph Fourier, Grenogle.

RIFO, L. R. F. **Análise Combinatória, Probabilidade, Noções de Estatística**. Campinas, 2017. Disponível em: <<https://www.ime.unicamp.br/~laurarifo/apostila/apostila1.pdf>>

ROCHA, C. R. **Formação docente e o ensino de problemas combinatórios**: diversos olhares, diferentes conhecimentos. 2011. 192 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife – PE.

ROSA DOS SANTOS, M. **A transposição didática do conceito de área de figuras geométricas planas no 6º ano do ensino fundamental**: um olhar sob a ótica da teoria antropológica do didático. 2015. 282f. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.

RUFINO, M. A. S. **Aprendizagem Significativa na Resolução de Problemas de Matemática**: o Arsenal Operatório Cognitivo dos Professores do Ensino Básico. 2015. 307 f. Tese (Programa Internacional de Doctorado Enseñanza de las Ciencias) – Departamento de Didácticas Específicas. Universidad de Burgos - Espanha.

RUIZ OLARRÍA, A. **La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria**: de las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza. 2015. 372 f. Tese (Doctorado en Educación) – Facultad de Formación de Profesorado y Educación – Universidad Autonoma de Madrid – Espanha.

SABO, R. D. **Saberes docentes**: a análise combinatória no ensino médio. 2010. 210 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SANTOS, C. M.; FREITAS, J. L. M. Contribuições da teoria antropológica do didático na formação dos professores de matemática. **Amazônia Revista de Educação em Ciências e Matemática**. v. 13, n. 27, p. 51-66, 2017.

SANTOS, J. P. O. *et al.* **Introdução à Análise Combinatória**. Rio de Janeiro : Ciência Moderna, 2008.

SERVAT, A. **Do saber sábio ao saber ensinado**: indicativos sobre a transposição didática do conceito de evolução biológica. 2014. 147f. Dissertação (Programa de Pós-graduação em Educação) – Centro de Educação, Comunicação e Artes. Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Cascavel – PR.

SILVA, J. R. **Uso de Textos de apoyo como Organizador Previo**: Matemáticas para la Enseñanza Fundamental y Media. 2009. 390 f. Tese (Programa Internacional de Doctorado Enseñanza de las Ciencias) – Departamento de Didácticas Específicas. Universidad de Burgos (España), Burgos.

SILVA, M. C.; PESSOA, C. A. S. A combinatória em livros didáticos do ensino fundamental. **ZETETIKÉ**, Campinas – SP, v. 23, n. 44, p. 377–394, 2015a.

______________________________. A. A combinatória: estado da arte em anais de eventos científicos nacionais e internacionais ocorridos no Brasil de 2009 a 2013. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo – SP, v. 17, n. 4, p. 670-693, 2015b.

VERRET M. **Le temps des études**, Paris, Librairie Honoré Champion, 1975.

ZANARDI, D. C; KNEUBIL, F. B; PEREIRA, V. S. Organização praxeológica de saberes escolares: uma comparação da equação de Clapeyron em livros de física e química. **Investigações em ensino de ciências**, v.18, n. 3, p. 601-620, 2013.

APÊNDICE A – TRANSCRIÇÃO DAS AULAS DA PROFESSORA

LEGENDA:

P – professora;

Al – aluno;

Als – alunos (será utilizado, quando mais de um aluno, em um só momento, expressar-se);

[ ] Colchetes – Explicação do pesquisador para algum termo ou fala que surgir no diálogo da professora e/ou alunos;

( ) Parênteses – Refere-se a pausas, interrupções ou momentos inaudíveis da aula

... Reticências – Quando uma fala é interrompida ou não concluída, ou ainda, quando abre espaço para falas dos outros interlocutores;

Obs.: A transcrição foi realizada respeitando a linguagem da professora e dos alunos, como, por exemplo, "né"; "ó"; "peraí". Não usamos o "sic" no texto, para indicar que fizemos a transcrição literal da fala, pela grande quantidade de expressões desse tipo, mas alerto o leitor para o fato de que a transcrição é literal. Além disso, usamos pseudônimos para nos referirmos a algum(ns) aluno(s) que foi evocado durante a aula no intuito de mantermos o anonimato e preservar a imagem dos indivíduos.

AULA 1

P: Boa tarde! Nós vamos fazer o seguinte: nós temos uns trabalhos em grupo para a gente desenvolver na tarde de hoje, então vamos formar grupos de quatro pessoas...
(Pausa para formação dos grupos)

P: Pronto! Vamos fazer silêncio agora, tá certo? Eu vou fazer uma amostragem de uma coisa que eu trouxe e depois eu vou dividir com vocês os desafios aí, tá certo? Olhe, vejam bem, o assunto, né? Que vamos trabalhar como eu já havia dito a vocês é Análise combinatória. E o que é a Análise Combinatória? A Análise Combinatória é um assunto que vivenciamos no dia a dia, a todo momento a gente já está trabalhando com combinações. Então assim, hoje, quando eu estava me organizando para vir.... Eu fui lá no meu guarda-roupa e eu vim aqui... Tenho essa farda, tenho essa aqui e tenho essa aqui também... Essa eu já tinha usado uma vez mas essa aqui estava limpinha... *[A professora tira de uma sacola 02 camisetas da farda escolar]* Então eu escolhi essa aqui *[Aponta para a camiseta que está usando]*. Mas eu tinha essas outras duas possibilidades. Sim ou não?

Als: Sim

P: A calça, veja bem, qual a cor da calça que eu estou?

Al: Preta

P: Aí eu tinha mais duas em casa... Então quem estiver chegando agora... Voltando, eu estava falando da escolha das blusas para aula de hoje, eu tinha essas blusas aqui, essa, essa e essa... Quantas blusas eu tinha?

Al: Três

P: Eu tinha lá três blusas. Então se eu tinha três blusas, eu tinha três possibilidades para me vestir, né? Três opções de blusas. E eu tinha além essa calça eu tinha mais duas lá, uma jeans escura e outra jeans mais clarinha. Mas aí eu resolvi vir com essa aqui. Também saí procurando brinco, eu gosto de brinco. E o brinco que eu escolhi foi esse aqui de florzinha, eu também tinha outro de perolazinha mas eu achei esse mais discreto. E o calçado? Eu tinha lá uma 'percatinha'... mas tinha esse 'tamanquinho', como eu sou baixinha, vou com o tamanquinho que aí eu fico mais alta. Então o que eu fiz hoje antes de vir para escola? Eu combinei, me organizei para ver com qual roupa eu viria para escola... E eu tenho certeza que vocês também...

Al: Eu não... (inaudível) Eu só coloco a farda.

P: Mas e para uma festa? Quem gosta de ir para festas aqui?

Al: Eu!

P: Mas antes da festa? Vocês se programam para ver com qual roupa vocês vão usar? Você, Amanda, pensam em que?

Amanda: Roupa, calçado, brinco, maquiagem, cabelo...

P: Então nós fazemos um planejamento, uma escolha e a gente chega no espelho e fica lá combinando as coisas... Psiu, e você, Pedro, também combina as coisas para ir para festa?

Pedro: Não... (Inaudível) só tenho uma calça.

P: Mas é isso mesmo, até nessa situação econômica em que vivemos, Pedro, temos que fazer combinações. Com apenas uma calça podemos fazer várias combinações é só ir trocando as blusas... Mas e hoje no café da manhã, vocês escolheram... Quem tomou café hoje levanta a mão.

(muitos alunos ralando ao mesmo tempo)

P: André, você comeu o que hoje no café da manhã? Geralmente o que você gosta de comer?

André: Pão com queijo...

P: Mas além do queijo o que a gente pode comer como o pão? Queijo, ovo, manteiga, requeijão, mortadela, presunto, né? Então assim, o pão a gente pode combinar com várias coisas, né? E dá um sanduiche bem legal... E os tipos de pães que existem, vocês sabem os nomes?

André: Francês, doce, pão de queijo....

P: Então, oh, psiu, silêncio... E esses tipos de pães combinam também com esses outros que falamos? Sim, né? Com queijo, mortadela... Psiu... Então essa conversa que estou tendo com vocês é um levantamento de conhecimentos prévios pra saber o que é que vocês sabem de combinação, vejam que combinação já é tudo isso que a gente vivencia. Hoje no almoço também lá na minha casa quem fez o almoço fui eu também. Eu cozinhei macarrão, feijão verde, fiz carne de boi torrada e não fiz suco... Veja o que eu comi hoje: feijão verde, arroz, a carne e chupei uma laranja mimo. Eu não fiz suco... Veja que isso foi uma combinação. Quem aqui almoçou hoje? Psiiiiu, quem for chegando agora vai silenciando, psiiiiu. O que vocês comeram hoje na hora do almoço? Um de cada vez, tá certo? Você!

Al: O que eu almocei?

P: Sim

Al: Feijão verde, macarrão, verdura e carne de boi guisada.

João: Quer saber o meu?

P: Sim

João: Estou esperando o cardápio da merenda.

(risadas)

P: Qual a merenda que você mais gosta?

João: Sopa

P: Qual a sopa que você mais gosta?

João: Só tem um sabor

P: Canja né? Mas pra fazer uma canja será que a gente tem que fazer combinações, João, também?

João: Não

P: Não? Vocês concordam com João, minha gente? Pra fazer uma canja o que vocês colocam?

Al: Galinha, arroz, macarrão, água...

P: Essa canja que você toma aqui também é uma combinação. Eu acho que já deu para entender, né, gente? Agora nós vamos partir para prática da leitura. Eu trouxe aqui alguns problemas que eu não vou explicar agora. Mas eu quero ver as estratégias de vocês para resolver essa situação de acordo com essa conversa de combinação que tivemos aqui. Como vocês resolveriam essas situações? Vocês irão resolver em grupo, partilhando entre vocês e vão encontrar uma solução. Depois eu vou escolher uma pessoa de cada grupo para fazer uma demonstração aqui, mostrar como foi que vocês resolveram o problema. Psiu! Depois dessa etapa eu vou entregar o resultado que já está impresso para ver se vocês conseguiram realizar da maneira correta, ok? Depois eu vou continuar a explicação. Então esse grupo aqui será o Grupo 1, esse o grupo 2, grupo 3.... 6 e 7...

[A professora vai distribuindo as fichas com os problemas e nomeando os grupos]

P: Psiu! olha a conversa! Tem situações aí que são situações-problema e outros que são as situações desenhos. Esses que são os desenhos vocês vão tentar montar e ver quantas combinações vocês vão fazer com essas peças que estão aí. E quem está com problema, vai ler o problema, desenvolver e tentar descobrir como se resolve...

(*Pausa para resolução das atividades nos grupos)*

P: Vamos ao grupo 1... Clara e Maria vão mostrar aqui como elas resolveram e depois a gente vai comparar aqui com a resposta. Silêncio! Clara vai fazer a leitura e Maria vai explicar o que entenderam disso aí e como chegaram a solução.

Clara: Acompanhe o raciocínio e resolução do problema a seguir: Uma pessoa vai ao restaurante na promoção. Ela deve montar sua refeição escolhendo uma entrada, um prato principal e sobremesa. No cardápio constam 3 tipos de entrada, 5 tipos de pratos quentes e 4 quatros tipos de sobremesa. De quantas formas diferentes essa pessoa pode montar a refeição?

P: Pronto, prestem atenção! Quais os 3 pratos que tem aí?

Clara: Os 3 pratos de entrada são: salada, sopa e (inaudível). Os 5 pratos quentes são: bife, massa, torta, frango e peixe. Os 4 tipos de sobremesa são: bolo, fruta, mousse e pudim.

P: - E aí? Como foi que vocês conseguiram resolver? Qual foi a resposta?

Clara: Botou 3 pratos que são as entradas vezes 5 que são os pratos quentes vezes 4 que são as sobremesas. Aí deu 60.

P: Tá certo isso aí? Mostra aí! Olha, tá vendo aqui o raciocínio delas, né? Elas fizeram aqui uma operação. Que operação foi essas que elas usaram? Adição, multiplicação ou divisão?

Als: Multiplicação.

P: Pronto! Usaram a multiplicação. Pronto! Mostra aqui a resposta. Vira aqui. Olha, aqui a explicação disso: A quantidade de refeições obtidas, multiplicando todas as possibilidades. Sendo assim, ficaram: aí houve uma multiplicação. 3 possibilidades mais 5 possibilidades mais 4 possibilidades. Foi multiplicado $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ refeições. Acertaram, viu? Palmas aí!

(Os alunos aplaudem)

P: Cadê o grupo 2?

Al: Ainda estamos fazendo, professora.

P: Gente, esse problema tem um outro grupo que também está com ele... É o seu?

Al: É

P: Então vamos juntar um representante desse grupo com um do outro grupo. Eu vou ler aqui e vocês me dizem qual a resposta, tá certo? No bar da escola há dois tipos de sucos, laranja e pêssego e 3 tipos de sanduiches: queijo, fiambre e manteiga. Se um aluno quer fazer um lanche de quantas formas pode fazer sua escolha? Vocês aí, qual foi o resultado de vocês? Quantas formas deu e como vocês resolveram isso?

Al: 6

P: 6? Como foi que vocês chegaram nesse resultado?

(inaudível)

P: Psiu, e esse grupo aí quais foram as possibilidades de vocês?

Al: 6

P: 6 também? Como vocês fizeram?

Al: 2 vezes 3

P: Então de novo, qual foi a operação que vocês usaram?

Als: Multiplicação.

P: Então ninguém somou, né? Então vejam aí os dois grupos como chegaram aí. Vejam como vocês chegaram a mesma solução. Então aqui . Aqui a gente tem laranja e pêssego. Foi combinado aqui com queijo, fiambre e manteiga. Aqui com o pêssego: foi combinado também com queijo, fiambre e manteiga. Então realmente 6 possibilidades. Quem é o próximo agora? Vamos lá: equipe 3. Alguém quer vir apresentar?

Al: Não precisa não, professora. Vou mostrar a senhora.

P: Resolvido. Aí somaram aqui: 3+3. Certo. E o outro grupo aí de trás, vocês fizeram como? Tem alguém que quer ler? Quer vir aqui na frente?

(inaudível)

P: Prestem atenção agora. Vocês já resolveram aí da forma de vocês. Agora vou fazer a leitura do assunto e depois tem outras atividades para a gente resolver. O que estamos estudando hoje é análise combinatória. Nós vamos iniciar pelo princípio fundamental da contagem. Que são as estratégias que vocês usaram aí. Teve um pessoal que somou, outro que multiplicou... Então tudo aqui inicia-se pelo Princípio Fundamental da Contagem (PCF). Nós temos aqui um árvore representando porque nós vamos trabalhar com diagramas de árvores. E o que é o princípio fundamental da contagem? São as operações que nós vamos utilizar para resolver as situações-problemas da análise combinatória. Porque depois nós vamos ver arranjo, permutação e combinação. Então aqui tem dizendo assim o: Análise Combinatória é a parte da matemática que estuda e desenvolve métodos para resolução de problemas que envolvem as contagens. Então o que nós estávamos fazendo aí foi combinando. O PFC nos mostra um método algébrico para determinar o número de possibilidades de ocorrência de um acontecimento sem precisar descrever todas as possibilidades. Os desenhos que você fizeram foram demonstrados através de rabiscos como chegaríamos numa solução, mas a forma algébrica é quando usamos as operações. A operação que foi usada aí foi a multiplicação, mas em algumas situações nós vamos usar a soma. Mas quando vou saber quando usar a multiplicação ou a soma? Então, existe uma dica que é bem interessante. Veja bem! É quando eu disse aqui que estava escolhendo entre as blusas e as calças que eu tinha em casa, eu estava ali fazendo uma combinação. Eu poderia vir somente de blusa para a escola?

Al: Não!

P: Não. Eu teria que vir com a blusa e a calça. Quando eu leio um problema em que me faço a pergunta: Eu vou usar blusa E calça ou vou usar blusa OU calça? Então, nesse caso, hoje eu precisava vir de blusa e calça. Quando eu vou usar blusa e calça então o princípio usado é o multiplicativo. Posso usar assim ó: Esse “E’ aqui, ó, é pra representar que é o princípio multiplicativo. E quando usar “OU”? Por exemplo, eu tenho um sapato e uma bota e tenho lá um vestido e uma calça... Eu vou fazer um passeio. Eu posso usar o sapato e a bota no mesmo momento?

Al: NÃO

P: Vou ter que escolher o sapato ou a bota. Então, nesse caso, quando eu uso o OU, nessa situação eu vou somar. Aqui eu uso o princípio multiplicativo e aqui eu vou somar.

Registros da Professora no quadro
E – Multiplicativo OU – sOUmar

P: Então essa é uma dica muito importante para saber quando você vai somar ou multiplicar. Sendo assim nós temos o Princípio Multiplicativo e o Aditivo. Aditivo vem de adição, onde eu uso o sinal + e o multiplicativo o x, obvio, né? Então aqui eu tenho: PFC. Aqui eu tenho um diagrama de árvore, modos de se vestir, aí eu tenho 3 opções de blusas, 2 opções de saias e 2 calçados. Resolução: 3 vezes 2 vezes2 = 12 opções para me arrumar.

P: Qual o princípio usado aqui?

Al: Multiplicativo

P: Agora veja aqui: NUMEROS NATURAIS. Quem lembra quais são os números naturais?

P: 0,1,2,3,4...9... infinito, esse símbolo aqui ó: símbolo de infinito. A esses números eu chamo de naturais pois a gente vai conhecer aqui os números fatoriais... Aqui acrescentamos uma exclamação. Esse N representa naturais, mas agora eu vou colocar N! (Números fatoriais). Como a gente representa os números fatorais? Essa exclamação é o que vai diferenciar. Quando existe aqui uma exclamação eu estou dizendo que esse número é fatorial.

Registros da Professora no quadro
Números naturais N: {0, 1, 2, 3, 4, 5, ... ∞} Números fatoriais N!

P: Aqui temos exemplos: 5! 4! 3! 2! 1! e 0! E o que é fatorial? É a combinação que a gente usa em análise combinatória. Aqui nós vamos chegar a um produto. Por exemplo, O zero fatorial... Aqui eu tenho apenas 0. Se eu coloco uma exclamação, aqui nós temos Zero fatorial. Vamos repetir, minha gente?

Als: Zero Fatorial

P: E qual a resolução do 0! ? Todo 0! é igual a 1. 1! Também é igual a 1. Isso é uma regra. E o 2? Se eu escrever somente 2 ele é um número natural, mas se eu colocar uma ! ele passou a ser o que?

Als: Fatorial

P: E como eu represento o 2? Eu multiplico ó: 2 vezes 1. Eu vou organizando em ordem decrescente do 2 até o 1... E o 3!? Eu faço: 3 vezes 2 vezes 1. Eu vou encontrar o produto aqui. 3 vezes 2?

Al: 6

P: vezes 1? 6 mesmo

Registros da Professora no quadro
$0! = 1$ $1! = 1$ $2! = 2 \cdot 1 = 2$ $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

P: Então aqui tem outros exemplos e assim a gente vai: 4! 5!... Vamos resolvendo do mesmo jeito: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$... Vamos aqui $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Então esses números que encontrei, foram os números fatoriais. E com esses números fatorais eu posso resolver situações de adição, multiplicação e divisão. Por exemplo, vou fazer uma soma: 0! + 2!. Quem é zero fatorial?

Al: 1

P: E 2!?

Al: 2

P: Então eu tenho 3.

Registros da Professora no quadro
$0! + 1! = 1 + 1 = 2$

P: Vou dar outro exemplo: 2! e o 3! Eu não tenho nenhum sinal aqui ó. Isso significa que aqui eu tenho uma multiplicação. Então eu vou fazer: 2! = 2 vezes 3! = 6. Então vejam: 2! 3! = 12. Uma outra situação que posso resolver é uma divisão que é uma simplificação. Vou colocar aqui: 3!/2!. Como resolvo essa situação? Você tem que saber: 3! = 6 e 2! = 2, então $\frac{3!}{2!} = 6$. Outra coisa: não existem números fatoriais negativos. No caso seriam os inteiros aqui, caso a gente fosse acrescentar. Os números fatoriais são todos naturais.

P: Pronto! Aqui eu trouxe outros exemplos pra completar caso vocês tenho dúvidas. Esses aqui eu não vou explicar... Aqui a gente tem um outro conceito explicando as definições sobre (inaudível). Aí tem aqui formas adequadas de organizar, ordenar essas possibilidades que nós temos... Temos também aqui o diagrama de árvore.

P: Pronto! Eu trouxe aqui umas questões pra vocês resolverem. Vou distribuir, vocês vão tentar resolver. Está valendo ponto esta atividade. Vocês vão colocar aqui a data de hoje, o nome. Resolva pelo diagrama de árvore e depois vocês resolvem pelos princípios multiplicativo e aditivo. Na parte de trás tem aí perguntando o que é fatorial pra ver se vocês prestaram atenção. Diferenças entre número natural e fatorial. Façam as multiplicações. Se quiser usar a calculadora, pode usar, porque há números que são bem altos... Nas últimas questões vocês vão fazer as simplificações que são as divisões.

(TEMPO PARA RESOLUÇÃO DAS QUESTÕES)

P: Eu vou deixar essa atividade pra vocês terminarem em casa e na próxima quarta corrigiremos em sala, tá?

AULA 2

P: Veja bem, quem estava aqui eu distribui a atividade da aula passada para as pessoas que faltaram. Porém quem faltou vai perder a pontuação da atividade...
Al: Eu esqueci o meu em casa.
P: Quem esqueceu em casa também perdeu. Eu vou chamar aqui e vou anotar. Quem está com atividade respondida eu vou dar o visto agora. E depois a gente vai fazer a correção e você vai ver seus erros e acertos. Essa atividade vocês vão colar nos cadernos de vocês porque vamos usar para estudar para o teste que iremos fazer.... Eu vou chamando... Quem não respondeu em casa não adianta responder agora. A atividade deveria ter feita em casa...
(ruídos)
P: Quem não fez perdeu. Numa turma de 47 alunos somente 10 fizeram....
(ruídos)
P: Vamos lá, quem lembra o assunto que iniciamos na aula passada?
Al: Analise Combinatória
P: Isso. Análise de Analisar e Combinatória de combinação. Quem lembra alguma coisa que a gente fez sobre Analise combinatória?
Al: Combinar a calça
P: Combinar a calça com a blusa, quem mais?
Al: Sapato
P: Sapato e Bota, combina? Ou um ou outro né? Que mais?
Al: Alimentação
P: Combinar o que? O sanduiche por exemplo, né? Então a gente viu a parte de análise... Quem lembra o que é um diagrama de árvore?
Al: Quando vai combinando as coisas, professora.
P: Quando a gente vai desenhando e combinando, né? Quem lembra o que é um fatorial?
Al: Um número.
P: São os números que a gente vai somando. Qual a diferença dos números fatorais para os números naturais?
Al: É o que tem a exclamação
P: Quais os que tem a exclamação: os fatoriais ou naturais?
Al: Fatoriais

P: Muito bem! Então agora vamos fazer a leitura dos problemas que nós temos aqui e vamos ver quem foi que acertou. Eu não vou fazer um diagrama de arvore, tá? Mas vocês devem fazer. Porque é uma maneira de se compreender o assunto que estamos trabalhando. Mas: “Ah professora, numa prova de concurso quando eu for fazer e cair Análise Combinatória, eu preciso fazer um diagrama de árvore?” Se você estiver confuso na operação, faça. Se não, não tem necessidade. Quem gostaria de ler o primeiro problema?

Al: Joana tem 3 calças nas cores preta, azul e branca e 3 blusas de modelos diferentes. De quantas maneiras diferentes ela pode se vestir?

P: Minha gente, as blusas combinam com as calças?

Al: Sim

P: Quando eu uso, eu uso calças ou blusas ou calças e blusas?

Al: Calça e blusa.

P: Certo! Vocês lembram uma dica que dei a vocês para vocês saberem interpretar quando usamos o E ou o OU? Quando a gente vai usar calça E blusa? Qual o princípio que a gente vai usar para resolver? Quem lembra?

(risos)

P: Ninguém lembra? Tem o princípio aditivo e ou princípio multiplicativo, né? Aqui a gente vai multiplicar ou vai somar?

Al: Multiplicar

P: Multiplicar... Vocês lembram que eu escrevi assim, ó. Isso aqui é uma dica, certo. A gente consegue compreender dessa forma que vou usar calça E blusa conseguimos compreender que devo usar o princípio multiplicativo.

Registros da Professora no quadro
E – Multiplicativo OU – sOUmar

P: Então eu tenho aí 3 calças vezes 3 blusas que é igual a 9. Então quantas possibilidades nós encontramos?

Al: 9.

P: 9 possibilidades. Questão 2. Quem lê a questão 2?

Al: Ana Maria tem 4 saias e 6 blusas. De quantas maneiras ela pode se vestir?

P: 4 saias e 6 blusas. Nós usamos saias com blusas?

Al: Sim

P: Usa a saia e a blusa ou a saia ou a blusa?

Al: E a blusa

P: Então qual o princípio que iremos utilizar? Multiplicativo mais uma vez. Então só é multiplicar:$4 \cdot 6 = 24$. 24 o que?

Al: Possibilidades.

P: Outra pessoa para ler a 3.

Al: Alguém dispõem de 3 calças e 3 vestidos. De quantas maneiras poderá se vestir?

P: Agora são calças e vestidos. Geralmente a gente usa calça e vestido ou calça ou o vestido?

Al: Ou

P: Então o que vamos fazer?

Al: Somar.

P: Então vamos somar. Aqui eu tenho 3 calças e 3 vestidos. Então eu vou usar ou as calças ou os vestidos. Se é para somar:$3 + 3 = 6$. Quantas possibilidades nós temos de roupa? 6. Quem acertou até agora?

Al: Eu, eu...

P: Quem vai ler a questão 4?

Al: Dispondo de 3 calças e 4 blusas. De quantas maneiras diferentes poderemos nos vestir?

P: Novamente aí calças e blusas. Como usaremos Calças e Blusas ou calças ou blusas?

Al: Calças e blusas.

P: Então vai ser que princípio aditivo ou multiplicativo?

Al: Multiplicativo

P: Nós temos aí: 3 calças vezes 4 blusas. Quantas possibilidades teremos? $3 \cdot 4 = 13$ possibilidades. Questão 5, quem vai ler a 5?

Al: Eduarda tem 6 calças e 4 vestidos. De quantas maneiras diferentes ela poderá usar?

P: Ela vai usar calça e vestido ou calça ou vestido?

Al: Calça ou vestido

P: Então a gente vai usar o princípio multiplicativo ou aditivo? Vamos somar ou multiplicar?

Al: Somar

P: Então a questão cinco. $6 + 4 = 10$ possibilidades. Questão 6 agora.

(inaudível)

P: Pronto 5 modelos de tênis e 4 modelos de sapato. Nós iremos usar o sapato e o tênis ao mesmo tempo ou usaremos o sapato ou o tênis?

Al: Ou o sapato ou tênis

P: Então novamente nós temos qual princípio? Vai somar ou multiplicar?

Al: Somar

P: Questão 6. $5 + 4 = 9$ possibilidades. Pronto! Essas questões eu coloquei umas bem parecida com as outras para vocês irem exercitando porque essa é a parte mais simples da Análise Combinatória. Alguém tem dúvida? Posso ir pra 7? Uma bandeira é formada por 5 listras que devem ser coloridas usando apenas cores: verde, azul e preto. Se cada listra deve ter apenas uma cor e não se pode usar cores iguais em listras adjacentes, de quantos modos pode-se colorir a bandeira? Quem conseguiu resolver? Alguém fez o desenho da bandeira? Não? A questão 7 está dizendo que existe uma bandeira que é formada por listras adjacentes. Quem sabe o que são listras adjacentes? Quem sabe? Quem sabe? Se não soubermos o significado das palavras no contexto da questão teremos dificuldades para resolver. Listras adjacentes são aquelas listras que estão ao lado. Vou desenhar aqui ó: uma ao lado da outra. São 5 né? Aí nós temos 3 cores pra pintar: verde, azul e preto. Eu posso pintar aqui de verde?

Al: pode

P: Eu posso pintar de preto?

Al: não

P: EU posso pintar de azul?

Al: Não

P: Quem tá dizendo não e por quê?

Al: Porque a senhora tinha pintado de verde.

P: Mas se outra pessoa quiser pintar de verde pode?

Al: pode

P: E se não quiser pintar de preto nem de verde, pode pintar de azul?

Al: Pode

P: Então nessa primeira aqui quantas possibilidades de cores temos?

Al: 3

P: E nessa segunda? Nós já escolhemos preto aqui. Se eu já escolhi preto vai sobrar quantas?

Al: 2

P: Quais são? Verde e azul. Poderemos pintar de verde ou azul. Então quantas possibilidades nós temos agora?

Al: 2

P: Tá dizendo que não pode repetir a lista adjacentes. Então se eu pintei de preto e aqui de verde me resta quantas opções?

Al: 1

P: Só uma? Eu posso pintar aqui de verde? Só não pode se a lista for adjacente, né? Essa que está ao lado. Não pode ser assim: verde e verde. Mas se for: verde, preto e verde, pode?

Al: Pode

P: Se eu pintei aqui de verde e preto, aqui eu posso pintar de novo de qual cor?

Al: Azul

P: Azul ou?

Al: Verde!

P: Então eu tenho mais quantas possibilidades?

Al: 2

P: Mais 2 possibilidades. E aqui na 4 lista?

Al: 2

P: Mais 2 possibilidades eu tenho. E aqui, novamente? Mais 2 possibilidades. E ela pergunta de quantas maneiras eu posso pintar a bandeira? Aqui então a gente vai usar o princípio multiplicativo e a gente vai então determinar o número de possibilidades. 3 vezes 2, dá quanto?

Al: 6

P: 6 vezes 2?

Al: 12

P: 12 vezes 2?

Al: 24

P: 24 vezes 2 é igual a 48. Então nós teremos aí 48 modos para colorir a bandeira. Vamos agora para parte de trás da atividade que vem falando sobre fatorial.

(sinal sonoro)

P: Então amanhã a gente continua, não faltem.

AULA 3

P: Olhem! A parte da frente a gente já concluiu. Vamos agora para parte de fatoriais. Então a gente tem aí: Fatoriais. O que é um fatorial? O que vocês compreenderam sobre fatorial? Pode ser com as palavras de vocês mesmos. O que vocês compreenderam por fatorial? O que é um número fatorial?

Al: É aquele que vem com uma exclamação, não é professora?

P: Exatamente, aquele que vem com uma exclamação. Existem números negativos fatoriais? Sim ou não?

Al: Não

P: Existem números decimais fatoriais?

Al: Não. Não sei.

P: Então vamos colocar assim: O fatorial é a operação da análise combinatória, acompanha o número... Olhe! Você pode colocar de acordo com o que você compreendeu. Eu coloquei assim ó: é a operação da análise combinatória, ou seja, é quando a exclamação acompanha o número. Nós temos aqui os exemplos fatoriais, né? Temos aqui 5 com exclamação (5!), 4 com exclamação (4!), 3 com exclamação (3!)... E nós lemos de uma forma diferente: 5 fatorial, 4 fatorial, 3 fatorial, 2 fatorial... Então quando os números naturais vêm acompanhados da exclamação, nós dizemos que existe ali um fatorial. E esse fatorial a gente pode considerar que é a operação da Análise Combinatória. Nas operações de Análise Combinatória, nós vamos utilizar o fatorial, certo? Então nós temos aí: representem os conjuntos. Nós temos aí 2 tipos de conjuntos para representar. Temos o conjunto N. Quais são os elementos que formam o conjunto N? A gente pode colocar até o 10. Quem sabe? Quais são os números naturais?

Al: 0, 1, 2, 3, 4, 5....

P: Muito bem! Do 0 até o 10. Como eu pedi até o 10, vocês iriam fazer até o 10. Mas os números naturais eles são finitos ou infinitos?

Al: Infinitos.

P: Isso! Então se eu quiser representar, eu coloco assim ó: os 3 pontinhos e esse símbolo, que é o símbolo do infinito. Aí nós temos aí também... Agora para formar os números fatoriais, até o 10 também. Então vamos ver aqui como a gente representa esses números fatoriais até o 10. Quem vai me dizendo para eu ir anotando aqui?

Al: 0!, 1!, 2!, 3!, 4!, 5!, 6!, 7!, 8!...

P: Olhem, eu coloquei essa questão para vocês irem memorizando e vendo as diferenças de uns para outros. Vejam, aqui nós temos os números naturais e aqui nós temos os números fatoriais. Aí eu coloquei um asterisco e coloquei entre N e N!. Aí você vai anotando de acordo com a sua compreensão. N sem a exclamação, é o que?

Al: Números naturais.

P: E N com a exclamação representa os fatoriais. Pronto! Agora vamos para o 3º. Determine o produto dos números fatoriais. Então temos uma relação, uma lista de números fatoriais. Então nós vamos multiplicar, resolver qual a solução deles. Temos aí a letra A: 0!. Quem é o 0!?

Al: 1.

P: Muito bem! Quem é o 1!?

Al: 1

P: 1 também, né? É a regra. Aí nós temos aí: letra C, o 2!. Como eu resolvo essa questão do 2!?

Al: 2 vezes 1.

P: 2 vezes 1. Eu termino sempre no 1.$2 \cdot 1 = 2$. Letra D. Quem é 3!?

Al: $3 \cdot 2 \cdot 1$

P: Dá quanto? 6. Aí nós temos, letra E. Quem é 4!?

Al: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

P: Eu vou diminuindo até chegar ao 1. E se eu fizer ao contrário também dá certo? Dá. A ordem não vai alterar o resultado. Se eu começar aqui do 1 para o 4 também não vai alterar. Eu estou colocando em ordem decrescente até chegar ao resultado.$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Letra F. 5!. Quem é 5!?

Al: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

P: Dá quanto? 120. Eu vou agora para o 6!. Quem é o 6!?

Al: $6 \cdot 5 \cdot 4$ ...

P: Pra eu não chegar ao 1, se eu colocar $6 \cdot 5!$, eu chego ao mesmo resultado?

Al: Chega.

P: Isso! Em Análise Combinatória a gente pode simplificar. Eu só estou fazendo detalhado pra vocês entenderem. Porque imaginem por exemplo, se eu quisesse 188!? Quantas vezes eu teria que repetir isso aqui? Então vamos lá: 6x5!... Qual foi o valor de 5!? 120.$120 \cdot 6 = 720$. Quem resolveu deu esse valor também? Então essa é a maneira da gente simplificar. Letra H. H nós temos 7!. Aí eu posso também fazer assim: Eu já sei quem é 6!, que é 720. Eu posso também colocar aqui $7 \cdot 6!$? Agora se eu anotar assim minha gente: $7! \cdot 6!$, eu vou chegar a resposta correta?

Al: Não

P: Esse 7 representa o 7 natural dos números naturais? Esse 7 aqui? Sim ou Não?

Al: Não.

P: Não representa. Esse 7 é quem? 7 vezes 720. Se eu colocar 7 vezes 720 mas o 6 que representa 720 vai dar um número enorme. Ou seja, 7! Que é 7x6x5x4... vai dar um número enorme e ainda se eu colocar 6! Que é 720, vai dar um número muito grande e vai estar errado. Aí eu tenho que compreender o que? Que é 7! vezes o 6! Que representa 720. Vocês estão entendendo ou não?

Al$_1$: Não, assim eu não entendo não.

Al$_2$: Assim é mais difícil.

P: Não? Resumindo assim? Mas é a mesma coisa minha gente.

Al: Mas e não tô entendendo nada.

P: Vou fazer assim: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$... Certo? É a mesma coisa, ó. Quem achar mais fácil assim, faça $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Vai dar a mesma coisa. Vai dar 720. E esse daqui: 7 vezes 720... Quanto deu esse resultado de vocês? Foi 5.040? 5.040, né? Quem achar melhor pode fazer $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Olha, como a gente trabalha mais e nós vamos chegar também em 5.040. Se você compreender que em 6!, eu já cheguei no resultado que é 720, vai ser mais rápido você multiplicar $7 \cdot 720$. Vamos ver aqui, I. Nós temos aí 8!.... Então voltando, Lucas colocou aqui: 8 vezes 7. $8 \cdot 7$ quanto é que dá, minha gente?

Al: Dá 56.

P: Mas é esse o resultado para o que estou pedindo? 8! é $8 \cdot 7$?

Al: Não

P: É 8 o que? $8 \cdot 7!$. Quem é 7!?

Al: 5.040

P: 8 vezes 5.040 ou você pode fazer aí ó, quem quiser trabalhar mais pode fazer:$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$... Vai ter situações que vai ser necessário que eu faça dessa forma e tem situações que eu posso resumir. $8 \cdot 7!$, certo? Quanto foi que deu?

Al: 40.320

P: Quem não estava entendendo agora está compreendendo? A relação de um pra outro? 7! Quem foi 7!? 5.040. Se 7! já foi 5.040, então basta eu multiplicar $8 \cdot 7!$ que eu vou chegar em 40.320. Do mesmo jeito que se eu fizer diminuindo até o 1 eu vou chegar a esse mesmo resultado. Vamos aqui para o 9!. 9!, como posso resolver isso aqui?

Al: 9 vezes 8!

P: 9 vezes 8! quanto deu o de vocês? 362.880. Vejam que os valores estão aumentando. Ou quem preferir pode fazer da forma $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, diminui até chegar no 1, que também vai dar 362.880. Agora nós temos o 10!. Quem é 10!? Como eu posso representar?

Al: 10 vezes 9!

P: 10 vezes 9 o que? 9!. O 9! Eu já descobri que vale quanto? 362.880. Se o 9! equivale a isso aqui, então eu posso multiplicar 10 vezes o valor de 9!. 10 vezes 362.880. Eu pulei aqui e quem quiser colocar, 9 vezes 8! Foi 40.320. Pronto e agora? 11!. Ou você vai anotar todos os números, né? $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Qual o resultado que deu o de vocês?

Al: 3.628.800

P: É só acrescentar o 0, né, minha gente? Vezes 10 é só acrescentar 0 aqui, ó. Aí eu conto: 1,2,3,1,2,3 *[fazendo referência a divisão de classes do número]*. Olha, vezes 10, eu multiplico vezes 1 e acrescento o 0. E conto 1, 2, 3 de trás pra frente 1, 2, 3, 3.628.800. Vamos lá: 11! Quanto deu? 11 vezes 10!. 3.628.800, vai dar um número enorme, não é mesmo?

Al: É professora.

P: Ou você pode faze: 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4... *[fazendo referência ao desenvolvimento de um número fatorial]* E aí? Quanto foi que deu o de vocês?

Al: 39.916.800

P: E vezes 12 agora? O 12 fatorial é 12 vezes?

Al: 12 vezes 11

P: 11! Que vai ser 12 vezes todo esse número aqui 39.916.800. Isso aqui foi igual a quanto? Quem fez?

Al: 479.001.600

P: Aqui todo mundo compreendeu? Quem tem dúvidas?

Al: Tudo

P: Tudo o que? Você sabe o que é um número natural, um número fatorial?

Al: (Inaudível)

P: Isso. Quando o número vem acompanhado de uma exclamação (!). Quando um número vem acompanhado de uma exclamação (!). Exemplo, 4!, representa só o 4?

Al: Não.

P: Representa o que?

Al: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

P: Vai multiplicando e chega no resultado. É somente isso que estamos fazendo. Mais alguém não entendeu? Vamos ao 4º agora. Calcule o valor dos números fatoriais. Nós temos a expressão aí 0! + 3! O que foi que vocês colocaram aí? Quem é 0! + 3!? Quem é 0! Minha gente?

Al: 1

P: Quem é 3!?

Al: 6

P: Dá quanto?

Al: 7

Registros da Professora no quadro
$0! + 3! = 1 + 6 = 7$

P: ... Pronto? Letra C: 2! + 3!. Quem é 2!?

Al: 2

P: Quem é 3!?

Al: 6

P: 2! + 3! Vai dar quanto?

Al: 8

P: Letra D: 6! + 2!. Quanto deu 6!? 720 + 2!, foi quanto?

Al: 2

P: Então 722. Aí nós temos 7! Deu quanto? 5.040 + 6, né? 6!. Então 5.046. Vamos lá: 1! + 4!? Vamos ver? 1+ 24=25 Letra G nós temos: 3! – 2!... Quem foi 3!?

Al: 6

P: 6-2= 4... 2!3!... Quem é 2 fatorial?

Al: 2

P: x3! Foi quanto? 6. Letra I, nós temos 1!, 2! E 0!. Uma sequência assim

Registros da Professora no quadro
$1!\,2!\,0!$

P: Vocês sabem o que ela representa $1!\,2!\,0!$? Também representa uma multiplicação. Então quando não há nenhum sinal entre eles, existe uma multiplicação aqui. Então tem que multiplicar um pelo outro. Então aqui ó:$1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$. E J. 4! É quanto? 24 vezes 0! Vezes 2 que dá quanto?

Al: 48

P: 48. Quem não fez essas questões?... Terminamos aqui não foi? Agora nós vamos simplificar. Agora temos "Simplifique as expressões"

Registros da Professora no quadro
a) $\frac{9!}{6!}$ b) $\frac{8!}{4!}$ c) $\frac{4!}{2!}$ d) $15!$

P: Esse 15 fatorial eu vou fazer uma correção porque vai ficar muito grande para a gente simplificar. Coloca aqui em baixo ó: 14! Certo?

Registros da Professora no quadro
d) $\frac{15!}{14!}$

P: Nós vamos simplificar, a gente vai resolvendo e vai reduzindo aqui o cálculo... Quem é 9!? Nessa Simplificação nós vamos representar... Aqui eu tenho 6!, né? Quem é o denominador daqui? 6!. Eu vou resolver quando eu chegar no 6 eu vou dar uma paradinha e vou colocar aqui fatorial para simplificar com esse. Assim:

Registros da Professora no quadro
a) $\frac{9!}{6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!}$

P: Se eu resolvesse até o 1 eu só iria repetir uma sucessão de números. Então vou começar aqui detrás ó: simplifica 6! Por 6!. Divida aqui ó: já eliminei 6!.Quem sobrou aqui para eu multiplicar? $9 \cdot 8 \cdot 7$. Quem foi que resolveu aí? 9 vezes 8 dá quanto?

Al: 72

P: 72 vezes 7? Quinhentos e?

Al: 504

P: 504. Agora se eu fosse fazer da outra forma anotando todos os números, ficaria assim: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Ó, Tiago perguntou: “Professora, há outra maneira de simplificar?”... Então aqui: 9! É isso aqui. Se eu for simplificar por 6! Vai ser isso aqui ó. Onde eu trabalhei mais gente? Na primeira ou na segunda?

Al: segunda

P: Eu tenho que buscar o que é mais simples, gente. 1/1=1 2/2=1 3/3=1 4/4=1... Sobrou quem? 9x8x7. Sobrou a mesma coisa? Sim ou não?

Al: Sim

Registros da Professora no quadro
$\frac{9!}{6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 504$

P: Então, o que foi que eu mostrei? Quando eu simplifiquei: 6! Com 6! Sobrou somente esses 3. Ficou uma continha menor. Mesma coisa aqui, ó. Vocês têm que se habituar a resolver desta forma também. 8!/4!. Pela lógica em que número desse devo parar?

Al: 4

P: Exatamente. Vamos lá: quem é 8!? Vá dizendo para mim.

Al: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!$ e para no 4.

P: Eu coloco como um número natural ou coloco a exclamação?

Al: Coloca a exclamação.

P: Exato! Para ficar igual ao 4!. Dividido por quem?

Al: 4

P: 4!. Isso aqui é uma divisão. Quem é que eu posso simplificar aqui?

Al: 4

P: Eu tenho aqui 4! Dividido por 4!. Posso dividir aqui? Quanto dá? 1. Sobrou quem? 8 vezes 7 vezes 6 vezes 5. Quanto deu? $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ Se a gente fosse fazer dessa forma dá a mesma coisa, mas assim é a maneira mais prática. 4!/2! Como resolvo aqui? Eu vou parar quando chego em?

Al: 2

P: Só 2?

Al: Fatorial

P: Muito bem, tá aprendendo. Aqui eu vou colocar agora? 2!. Quem eu posso cortar aqui?

Al: Os dois 2

P: 2! Com 2!... Sobrou quem aqui?$4 \cdot 3 = 12$... Aí aqui, 15! e 14!, se eu fosse deixar 5, ia ficar um número enorme... Por isso mudei para o 14 para facilitar. 15!?

Al: 15x14!

P: Sobrou quem? 15. Letra E nós temos aí $\frac{6!}{5!2!}$. Quem é o número mais próximo 5 ou 2?

Al: 5

P: Então eu posso ir diminuindo $\frac{6 \cdot 5!}{5!2!}$. Quem é 2!?

Al: 2

P: Tem alguém aqui que eu posso cortar, simplificar? Isso aqui, né? Quando eu divido fica 1. 5!/5!=1. 6x1=6 6/2=3. Entenderam?

Registros da Professora no quadro
e) $\frac{6!}{5!2!} = \frac{6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 2} = \frac{6}{2} = 3$

Al: É muito fácil.

P: Letra F nós temos aí $\frac{2 \cdot 4!}{4! \cdot 4!}$. Vamos lá: Esse 2 aqui também é fatorial?

Al: Não

P: Então vai ser ó: 2 vezes... Eu posso simplificar alguma coisa aqui? Posso ó: esse por esse... *[a professora explica como proceder com a simplificação, fazendo anotações no quadro]*

Registros da Professora no quadro
$\frac{2 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 4!} = \frac{2}{4!} = \frac{\cancel{2}}{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1} = \frac{1}{12}$

P: Qual a letra? G?

Registros da Professora no quadro
g) $\frac{8!}{4!6!}$

P: Quem já entendeu? Como que eu vou dividir o 8!? Foi fazer até quanto? $8 \cdot 7 \cdot 6!$, né isso? Repito agora aqui o 4!, por enquanto, para simplificar logo o 6!... 6/6 aqui... 8 vezes 7? 56 por 4! É quanto? 4 vezes 3 vezes 2 vezes1... 4 vezes 3 dá quanto? 12? 12 vezes 2? 24. 56 eu posso dividir por 24? Será que vai dar? Mas eu posso encontrar um número que eu simplifique? Tenho que encontrar um número que divida o 56 e também divida o 24... Aqui, por exemplo, 8 vezes 7. 56 é múltiplo de 8? É ou não? Dá pra dividir por 8? Sim ou não?

Al: Dá!

P: Dá, né? 56 dividido por 8 é igual 7. Se 7 vezes 8 é 56, 56 dividido 8 é quanto? 7. E 24 dá pra dividir por 8? Dá quanto?

Al: 3

P: Então 7/3...

Registros da Professora no quadro
g) $\frac{8!}{4!6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{4!6!} = \frac{56}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{56}{24} = \frac{7}{3}$

P: $\frac{0!2!4!}{3!2!1!}$ pronto! Eu já posso aqui simplificar alguma coisa? Quem está igual aqui? Sim ou não? Já posso cortar algum número aqui?

Al: Os 2!

P: 2! Por 2!... Sobrou quem? 0!4!. Quem é 0!? 1, né . Quem é 4!? 4 vezes... Eu posso parar aqui em 3!? Já que aqui me restou 3! E 1!? Posso ou não? Posso aqui né? Cortar? Sobrou quem? Esse 1 será que é igual a 1!? Mas se eu resolver aqui, 1! é 1? É. Aí ó, cortando aqui, sobrou quem?

Al: 4.

Registros da Professora no quadro
h) $\frac{0!\cancel{2!}4!}{3!\cancel{2!}1!} = \frac{1 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}1!} = 4$

P: 4! E 6! $\left[\frac{4!}{6!}\right]$. Quem é 6!? 6 vezes 5... Eu posso parar em 4! aqui? Posso! Vai dar o que? 1/ 6x5?

Al: 30

P: 1/30...

Registros da Professora no quadro
i) $\frac{4!}{6!} = \frac{\cancel{4!}}{6 \cdot 5 \cancel{4!}} = \frac{1}{30}$

P: Pronto, treinem em casa! Vai começar outro assunto agora. Eu quero que vocês organizem duplas. Eu trouxe aqui os pacotinhos com os números... Trouxe pipoca e bis também para quem acertar...

Al: Oba!!!

P: Quem acertar vai ganhar...

(barulho enquanto se formam as duplas)

P: Eu vou distribuir esses pacotinhos para cada dupla. Vocês vão ter que guardar tudo. Deixa só o caderno e o lápis. Observem o que vocês ganharam... Primeira pergunta: Qual a ordem que esses papeizinhos se encontram aí?

Al: 4, 5 (inaudível)

P: Ana já disse aqui, ordem crescente. Próxima: Quantos algarismos existem nesse pacote?

Al: 6, 7, 4, 3, 2....

P: que são algarismos? São esses símbolos aqui ó: 1,2,3... Quantos algarismos temos aqui?

Al: 6

P: Agora você vai retirar e espalhar os números na mesa em ordem crescente... Quantos algarismos tem aí agora?

Al$_1$: Algarismos romanos é, professora?

Al$_2$: 4

Al$_3$: 6

Al$_4$: 4, 3, 2.... Nenhum

P: 6. Muito bem! Agora quero saber quantos algarismos distintos tem aí? O que são distintos?

Al: O que tem a bolinha né?

P: Se você diz que são esses algarismos, só ganha o brinde quem souber o que é distinto.

Al$_1$: Diferente

Al$_2$: Distante.

Al$_3$: Finito.

Al$_4$: Separado.

P: Algarismos distintos? São 6. Mas porque são distintos.

Al: Ei, professora, diferentes.

P: Muito bem. Algarismos distintos são algarismos diferentes. Agora: quantos números? Existem números pares? Quais são eles?

Al: 4, 6, 8.

P: Quais os números ímpares?

Al: 5, 7, 9.

P: Agora, outra pergunta. Quantos números de 3 algarismos você é capaz de formar com esses 6 algarismos?

Al: 9? 9?

P: Será que é somente 9? Quantos números de 3 algarismos você é capaz de formar? Vai anotando aí..

Al$_1$: 2.

Al$_2$: 4.

Al$_3$: 9.

Al$_4$: 2.

P: O que é que vocês estão entendendo quando digo “Quantos números de 3 algarismos você é capaz de formar utilizando essas peças?” Vá vendo as possibilidades.

Al$_1$: 24.

Al$_2$: 36.

P: Vá anotando as possibilidades. Vou dar uma dica: quantos algarismos vocês tem aí?

Al: 6

P: Será que a gente pode repetir os algarismos? Sim ou não? 454 é um número, né? 544, pode? Eu estou usando os algarismos e perguntando quantos números vocês podem formar utilizando esses algarismos... Aqui ó: 3 algarismos, vou deixar 3 possibilidades. Lembram do exercício das bandeiras?

Al: Sim

P: A primeira eu poderia pintar com qualquer uma das cores?

Al: Poderia

P: E com esses números aí? Eu poderia começar com os 6?

Al: Pode

P: Então tenho 6 possibilidades e depois?

Al: 5

P: Mas se eu posso repetir?

Al: Então é 6 de novo

P: 6, 6 e 6. Eu tinha dito a vocês que quando a gente usa o E a gente multiplica e quando usamos o OU a gente soma. Então 6, 6 e 6 é E ou OU?

Al: E

P: Então vai multiplicar. Quem acertar ganha uma pipoca.

Al: 216

P: Deu quanto?

Al: 216

P: Agora eu quero que vocês observem isso aqui. Esses mesmos números eu vou alterar a pergunta aqui. Com os algarismos: 4, 5, 6, 8 e 9, quantos números de 3 algarismos distintos eu posso formar?

(barulho)

P: 5 vezes 4 vezes 3...

Al: Dá 120, professora...

P: Amanhã a gente vai continuar.

AULA 4

P: Nós estamos esses dias todos trabalhando com Análise Combinatória. Hoje eu trouxe alguns problemas de arranjo e combinação. Arranjo e combinação... Haverá um momento em que farei perguntas a vocês e vocês terão que responder assim: se a resposta for sim, vocês dirão “anhan” e se for não, é “não” mesmo, tá certo? E a gente vai associar essa expressão “anhan” com arranjo e quando a gente disser “não” é combinação, certo? Essa forma é uma dica mas vocês não encontrarão isso num livro... É uma dica que estou dando... Então “anhan” vai ser o que?

Al: Arranjo

P: E se for não é não mesmo. Então associa já mesmo: “anhan”, arranjo, “não”, combinação. Repitam comigo!

Als: “anhan”, arranjo, “não”, combinação

P: De novo!

Als: “anhan” , arranjo, “não”, combinação

P: Ó, presta atenção: matemática, analise cominatória, arranjo e combinação simples. Então nós temos aqui formas de arranjo e também colunas de combinação. Essa forma de arranjo ela vem associada desse n – aquele n que a gente coloca n! – aquele n, na verdade, ele pode ser um x, z, y... representa um número. Então se eu disser: me diga aí um x! então você vai dizer o que? Vai dizer 2, professora. 2 fatorial (2!)... A gente pode substituir esse x por um 2. Se tivesse aqui um y!, eu poderia representar 3!... Entendeu? A letra representa um número e só pode representar os números naturais. Mas na verdade essa letra, ela não tem o poder de ser somente ela. Ela representa um número, certo? Mas assim, nessas questões aparece muito o n. Nós temos aqui A, esse A é de arranjo. Aí a fórmula é: A, n vai ser o número maior... e aqui eu tenho um k, que poderia ser um p. Então $A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ isso aqui é a fórmula de arranjo *[a professora mostra um cartaz afixado no quadro com a fórmula de arranjo]*. E temos também aqui um outra fórmula que é a de combinação, representada pela letra C. Ela é assim ó: $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ *[a professora mostra um cartaz afixado no quadro com a fórmula de combinação]*. Vejam que aqui já tem o p. Poderia ser o k, professora? Poderia. Qualquer letra. Isso aqui quer dizer: Número maior pelo número menor, certo?... Aí $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Essa aqui que inicia-se com o C, representa o que, minha gente? Combinação. A é de que?

Al: Arranjo

P: E C? Combinação. Então, alguns problemas vão ser resolvidos pela técnica de arranjo e outros pela forma de combinação. A primeira coisa que a gente tem que aprender é quando um problema vai ser resolvido pela forma de arranjo e quando vai ser por combinação. Essas fórmulas aqui, vocês acharam elas simples?

Al: Não.

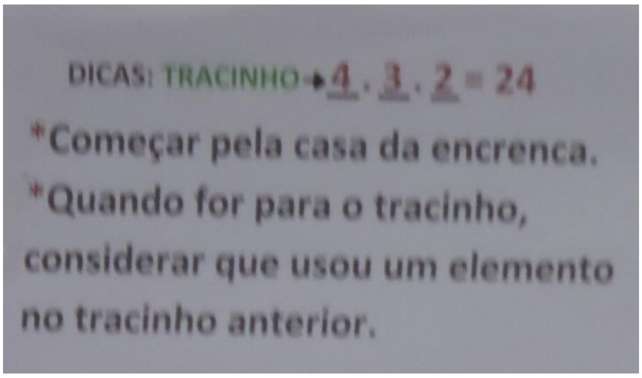
P: O que vocês acharam dessas fórmulas?

Al: Difícil

P: Ela é complexa né? .... (Inaudível)... Muita coisa. Eu vou mostrar uma técnica mais fácil para você resolver um problema de arranjo e um problema de combinação sem precisar usar tudo isso. Nesses problemas aqui a gente vai usar *[a professora faz referências a alguns problemas que foram afixados no quadro]*. Mas é importante vocês conhecerem a fórmula. Por quê? Se a gente aplicar os valores aqui também vai dar o mesmo resultado da técnica mais simples que eu vou ensinar pra vocês. Se vocês verem o livro lá, na próxima semana a gente vai ver as questões do livro, vai ter lá as fórmulas. Então o que é isso aqui? A fórmula de arranjo. E o que é isso aqui? A fórmula de combinação *[a professora a ponta para as fórmulas de arranjo e combinação que foram escritas no quadro]*.

Registros da Professora no quadro
$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$
Arranjo
$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$
Combinação

P: Aí aqui eu botei uma dica, ó, dica, tracinhos. Aí eu coloquei aqui, ó, 3 tracinhos, coloquei 4, 3, 2, certo? 3 tracinhos, 4, 3, 2.



P: Eu estou aqui formando um algarismo com 3 tracinhos. Ontem eu perguntei aqui no exercício dos pacotinhos o que é um algarismo. Quem lembra aqui o é algarismo?

Al: Um número

P: É o próprio número. Um número é um algarismo, né? Eu dei a vocês pacotinhos com vários algarismos para vocês misturarem... Eu vou até distribuir novamente porque nós vamos precisar parar resolver os problemas.

(pausa para distribuição dos pacotinhos)

P: Continuando a explicação: Aqui eu tenho um exemplo de um princípio multiplicativo. Onde eu tenho aqui os números: 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7... Quem tá pertinho, fica em dupla.

(barulho dos estudantes)

P: Primeira dica, tracinhos. Usar os tracinhos observando no problema o que se está pedindo... Por exemplo: se no problema pedir para organizar números de 4 algarismos, você desenha 4 tracinhos e vai organizando os números. Se o problema pedir 3 algarismos você anota 3 tracinhos e vai organizando os números. Pronto aqui só temos de 3 e 4 tracinhos. Esse aqui meu ó: é de 3 tracinhos... Fiz uma combinação aqui, né? De 3 tracinhos e multiplicando deu 24. Em um outro momento a gente também vai usar e começar pela casa da encrenca. Isso também é uma dica. Não tem nos livros. Vai ter uns problemas que você vai ter que fazer pela casa da encrenca. E aqui quando for para o próximo tracinho, considerar que usou um elemento do tracinho anterior. Então minha gente aqui nós já temos um exemplo do problema resolvido. Tem aqui os algarismos: 1, 2, 3, 4, 5 6 e 7... Se eu tenho do 1 até o 7, eu tenho quantos algarismos?

Al: 7

P: Do 1 até o 7. Quantos algarismos eu tenho aqui? 7, né? Aí aqui tá perguntando os número de 3 algarismos. Organize esses números para que eles possam representar números de 3 algarismos...

(Barulho dos estudantes)

P: Presta atenção porque vocês vão resolver isso daqui e quem acertar vai ganhar sonho de valsa. Hoje é melhor do que ontem... Temos aqui 7 algarismos e aqui eu vou organizar 7 algarismos de modo que eles formem números de 3 algarismos, ou seja, ontem eu distribui os números e disse assim "Gente, formem aí números de 3 algarismos." e teve gente que ficou mexendo apenas nas 3 peças, teve gente que só formou dois números. Mas será que com essa quantidade toda de números a gente só forma 2 números? Vejam: 1, 2,3.. Se eu pegar aqui ó: 1, 2 e 3 eu já formo que número? Que numeral é esse aqui?

Al: 123

P: 123. Usei 3 algarismos e formei 123. Agora eu vou misturar... Aqui 2, 1, 3...

Al: 213

P: Mais um número de 3 algarismos. Esses números são iguais?

Al: Não

P: Vamos lá! 4, 5, 6... Número também de 3 algarismos. Que número é esse?

Al: 456

P: É igual a esses daqui?

Al: Não

P: Vamos lá! Outro aqui 3, 4, 5, formei agora o que?

Al: 345

P: Está igual?

Al: Não

P: 3,3,3 tem algum igual a esses?

Al: Tem

P: Que número é esse?

Al: 333, os 3 são números iguais.

P: E agora?

Al: 3 algarismos iguais

P: Muito bem, João! Ele fez uma observação importante. 3 algarismos iguais. Eu coloquei 3 algarismos iguais aqui porque a situação que estou resolvendo não pede que os algarismos sejam distintos. Alguém lembra o que são distintos?

Al: Diferentes

P: Muito bem! Distintos significa diferentes. Quando o problema não vier com essa palavra "distintos", você pode repetir os números. Quando vier você não pode repetir... Veja bem! Eu tenho aqui 7 algarismos, se eu continuar formando mais números eu vou achar mais possibilidades de números? Diga aí um número.

Al: 789

P: 789. Só pode ser com 3 algarismos. Outra pessoa?

Al: 565

P: 565, outra pessoa.

Al: 457

P: Se eu fosse gente pedir a cada pessoa para dizer um número aqui formado com esses 7 algarismos nós íamos passar o intervalo aqui e a gente ainda estaria resolvendo. Então pra isso existe técnicas de arranjos para facilitar e pra gente concluir isso mais rápido. Então vou fazer aquela pergunta do começo: Se for sim, você vai responder?

Al: Anhan

P: Se for não, vai responder não mesmo. Se for anhan?

Al: Arranjo

P: Se for não? Combinação. Aqui, olha a pergunta: A ordem desses algarismos modificou o número? 123 é igual a 213?

Al: Não

P: Quem tem 123 reais tem 213 reais?

Al: Não

P: Quem tem 345 reais tem 333? Tem a mais, não é? Vou perguntar de novo: a ordem dos algarismos modificou o número?

Al: Anhan

P: Aqui eu tenho 123, 213, 565... Então isso aqui que a gente fez é uma situação de arranjo. Por isso que dei a dica. Vocês tem que fazer a pergunta: A ordem desses algarismos modifica o número? Anhan. Então é uma questão de arranjo. Então como a gente resolve aqui ó: Eu tenho aqui: 7 números e eu quero formar números de 3 algarismos... A gente viu aqui que nós temos aqui números repetidos e números distintos. Se eu posso repetir os números, nesse primeiro tracinho eu posso usar o 1?

Al: Pode

P: Posso usar o 2?

Al: Pode

P: Posso usar o 3, 4, 5, 6 e o 7?

Al: Pode

P: Então eu tenho quantas possibilidades?

Al: 7

P: Nesse segundo tracinho eu vou novamente fazer a pergunta: Na segunda posição pode aparecer o número 1?

Al: Anhan

P: O 2?

Al: Anhan

P: O 3,4,5,6 e o 7?

Al: Anhan

P: Se aqui apareceu 444, aqui também pode aparecer 777. E pela lógica, aqui também pode?

Al: Anhan

P: Eu posso usar o 1, 2, 3... Aí aqui eu tenho ó? E 7, E 7. Quando eu uso essa expressão “E 7”, eu utilizo o princípio multiplicativo ou aditivo?

Al: Multiplicativo

P: Multiplica... Se eu usar aqui... E7 eu vou usar o princípio multiplicativo. Então eu vou colocar aqui $7 \cdot 7 \cdot 7$. 7 vezes 7?

Al: 49

P: 49 vezes 7 vai dar 340...?

Al: 343

Registros da Professora no quadro
$\underline{7} \cdot \underline{7} \cdot \underline{7} = 343$

P: Agora eu tenho aqui números distintos. Agora com esses mesmos números... E 7... Vamos aqui ver os números distintos que eu posso usar. Esse numeral aqui ó, os algarismos são distintos? *[apontando para o número 123 escrito no quadro]*

Al: Não

P: Distintos é diferente, minha gente. Aqui está distinto?

Al: Anhan

P: Então, se está distinto, presta atenção, eu estou pedindo aqui agora pra gente formar as possibilidades de números distintos. No primeiro tracinho, eu posso usar esses 7 algarismos?

Al: Anhan

P: Eles são distintos?

Al: São

P: São. Eu posso usar os 7?

Al: Anhan

P: Então eu tenho quantas possibilidades?... Mas agora se eu já usei o 1 e eu quero números distintos... Eu posso repetir o 1 aqui?

Al: Não

P: Não. Então eu usei 1 possibilidade e agora ficaram quantas possibilidades?

Al: 6

P: 6. E agora? Vamos dizer que eu usei o 2?

Al: Aí fica 5.

P: Eu vou poder repetir o 2 aqui?

Al: Não

P: Então restaram quantas possibilidades?

Al: 5

P: Agora ó, esse problema aqui ó, números distintos. Quando for para o próximo tracinho, considerar o elemento do tracinho anterior. Então no próximo tracinho a gente já considerou que já usamos o 1. Então a gente agora só tem 6 possibilidades. Já usamos as 2 possibilidades. Agora só nos restam?

Al: 5

P: Então a gente faz ó, aqui também eu tô dizendo ó que a gente tem: 1, 2, 3, 4, 5 e 7. Então se é E também vai ser o princípio multiplicativo. Aí eu resolvo: 7 vezes 6 dá quanto?

Al: 42

P: 42x5 vai dar 210, certo?

Registros da Professora no quadro
$\underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5}$=210

P: Pronto, gente, essa técnica aqui que a gente fez, ela é toda de arranjo. Isso aqui já é o arranjo, certo? É quando... A ordem influi? Anhan. Arranjo. Agora e esses dois modelos que eu usei foram as técnicas do tracinho... Psiu, presta atenção! Então eu digo a vocês que todas as questões de arranjo você pode resolver pela técnica do tracinho se não quiser usar a fórmula... mas tem uma fórmula mais fácil que eu vou mostrar agora... Psiu... Uma técnica mais fácil é essa aqui ó... A é de arranjo né? A é de arranjo. Aí eu vou colocar n, p... Veja bem "$A_{n,p}$". Arranjo de um número maior por um número menor, certo? *[o número maior faz referência ao "n" da fórmula de arranjo e o número menor, ao "p"]*.

P: Presta atenção! Essa técnica não funciona para esses números repetidos. Só para os distintos. Então essa técnica aqui a gente só utiliza quando o problema for pedir a questão distinta. Então $A_{n,p}$, n vai ser o número de possibilidades que nós temos. Que são quantos?

Al: 7

P: 7 né? São 7. E p eu vou descer o número de vezes que eu estou pedindo. Qual foi o número de vezes que eu pedi aqui? 3. Tô pedindo pra descer 3 vezes. Vai ficar assim, ó, $A_{7,3}$. Esse n representa o número de algarismos e esse p a quantidade de algarismos que está sendo pedido aqui. 4. Então 7 eu desço 3 vezes. 7 eu desço 3 vezes. 7 eu desço?

Als: 3 vezes

P: Então vai ficar assim ó: 7 eu desço 3 vezes em ordem consecutivas, né? Então vem qual? Pelo fatorial. 7 vezes 6 vezes 5... Veja que ficou igual aqui né? 7 desço 3 vezes, 7 desço 3 vezes. 7 vezes 6 vezes 5 que também é igual a 210.

Registros da Professora no quadro
$A_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

P: Então em algumas situações se você quiser essa fórmula e se quiser usar o tracinho é melhor... Eu indico o tracinho para os arranjos. Certo? Combinação não. Combinação não. Combinação a gente não tem saída. A gente tem que resolver mesmo pela fórmula. Mas, vejam bem! Uma de combinação agora. Aqui na nossa sala nós formamos o 2º ano B com 46 alunos. Eram 47, mas teve alguém que desistiu, 47. 47 alunos. Se eu pegar vocês aqui e formar pares? Aqui dentro da sala.

Al: É bom.

P: Vai deixar de ser 47 alunos?

Al: Não

P: Vai continuar sendo 47 alunos, não vai?

Al: Vai.

P: Então essa organização que eu fiz de pares, modificou a quantidade?

Al: Não

P: Então é o que? Combina... E aí? Quando a gente diz Anhan é arranjo... Agora essa ordem... Se eu formar aqui grupos de 4 pessoas... grupos de 5 pessoas. Vai deixar de ser... Essas pessoas aqui da sala vão deixar de ser os 47 alunos?

Al: Não

P: Então é técnica de combinação. Quando a gente não modifica a situação, então continua sendo... é... será combinação, certo? Por exemplo: eu tenho aqui ó.... Eu tenho aqui um problema que diz assim ó: 5 pessoas.

Al: 5 pessoas, 5.

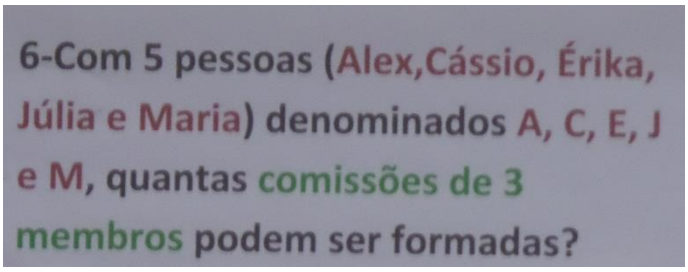
P: Alex, Cassio, Érika, Júlia e Marina. Denominamos, essas pessoas a gente vai representar pelas letras A, C, E, J e M. Se eu formar um grupo de Alex, Cassio e Erika... E depois eu misturar, se eu colocar assim: Alex, Cassio e Erika. Se eu inverter: Erika, Cassio e Alex. Modificou as pessoas?

Al: Não

P: Então é o que? Combina...

Al: Combinação

P: Combinação.



P: Se eu colocar aqui Júlia, Marina e Erika. J, M e E. E depois se eu misturar E, J e M. Modificou o grupo?

Al: Não

P: Não. Então é combinação.

Al: Combinação.

P: E como é que eu resolvo essa técnica? Então é 1, 2, 3, 4, 5 eu tenho 5 pessoas aqui, certo? *[a professora conta a quantidade de elementos considerados na contagem]* A técnica de combinação. Combinação eu tenho 5 para formar grupos de 3. Grupos de 3. Então a gente vai formar aí de 3 algarismos. Números de 3 algarismos. Organizar comissões de 3 pessoas, certo? 3 em 3. Então ó: olha outra técnica de combinação que é mais fácil de resolver. 5 é o número de elementos. Psiu! Ó, 1, 2, 3, 4, 5. 5 para organizar 3. Então eu faço... Eu faço do mesmo jeito só que eu vou acrescentar um denominador fatorial. 5 aí eu desço 3.. (inaudível) 4... 5 vezes 4 vezes 3... Agora esse 3 eles vai virar um fatorial... Então ficou aqui ó: 5 vezes 4 dá quanto?

Al: 20

P: 20. 20 vezes 3?

Al: Dá 120

P: Dividido por... quem é 3 fatorial? Vocês lembram quem é 3 fatorial? 3 vezes 1 vezes 3. $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$ é igual a?

Al: 6

P: 6. Então quem é 3!? 6. 60 dividido por 6?

Al: 10

Registros da Professora no quadro
$C_{5,3} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \dfrac{60}{6} = 10$

P: Então. Com essa técnica *[referindo-se a última técnica apresentada]* a gente descarta essa *[referindo-se a fórmula de combinação simples]*. Mas se a gente aplicar aqui... Se eu pegar 5 e colocar no lugar de n. Se colocar o 3 aqui e o 5 aqui e o 3 aqui vai dar o mesmo resultado, vai dar 10 *[referindo-se ao termos da fórmula de combinação]*. Essa técnica aqui ela é mais rápida, certo? *[referindo-se a última técnica apresentada]* Então mostrei a vocês 3 situações: arranjo simples com repetição, arranjo com situações distintas e agora uma técnica com combinação. Agora valendo o sonho de valsa. Essa primeira questão, vocês tem aí em mãos... Com os algarismos 4, 5, 6, 7, 8 e 9, quantos números de 4 algarismos podemos formar? Resolvam aí...

Al: O meu deu 696

P: 696? Pedro já fez aqui? Tem certeza?

Al: Tenho pode colocar aí.

P: Vou dar mais um tempo aí para ver se mais alguém...

Al: Não... (inaudível)

P: Tem que mostrar o que você fez. Não é assim não que a banda toca... Quem sabe resolver? Pedro vai mostrar como resolveu, viu, Pedro? Oh, com os algarismos 4, 5, 6, 7, 8 e 9. quantos números de 4 algarismos podemos formar? Pelo que eu já expliquei, esse problema é de arranjo ou combinação?

Al: Arranjo

P: Arranjo, não é? Combinação vai ser assim ó: pessoas, objetos... Quando for números é de arranjo... Combinação vai ser pessoas, professores, alunos... É assim envolvendo essas situações. Pronto. É... Pedro fez aqui o seguinte: 1, 2, 3, 4, 5, 6... Ele repetiu aqui 6 possibilidades... Ele desenhou 4 tracinhos. Tava ligado na explicação, viu? 4 tracinhos, ele teve 6 possibilidades... $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 696$. 696, né? Pronto, a forma como ele organizou está correta agora vamos ver se ele multiplicou direito... Façam aí minha gente, no celular $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$...

Al: É como professora, diga aí de novo?

P: 6 vezes 6...

Al: Professora se ninguém respondeu eu posso responder de novo, né?

P: Eu já achei a resposta, mas tem aqui a segunda... Ninguém ganhou até agora... Com os algarismos 4, 5, 6, 7 e 8 quantos números de 3 algarismo podemos formar? Ele disse agora 125, será que ele acertou? Aqui tá falando distintos? Não. Não está. Então pode repetir os números? Vê se ele acertou?

Al: Professora, bote ele pra fora ele acertou tudinho...

P: Mas o primeiro ele não acertou não, viu? Mas tem que ser ágil, vá fazendo outro... 125... Agora olha os outros algarismos ó, 4, 5 ,6, e 7...

Al: 256

P: Quantos números de 3 algarismos.... Quanto?

Al$_1$: 226

Al$_2$: 64 professora

P: O dele deu 64...

Al: O meu deu 256

P: 256. Mais algum?

Al: O meu deu 64 também

P: Ali não tem distintos... Vamos, minha gente! Valendo aqui o lanchinho... Olha ele tá dizendo aqui 64... Vamos ver se é? Números de 3 algarismos... (inaudível) Ei, bora? Ei com esses algarismos agora, pisiu, ei gente, distintos olha, distintos, bora lá, vamos ver.... Com esses algarismos, quantos números você pode formar?

Al$_1$: Dá 60

Al$_2$: 67

(sinal sonoro)

P: Ei, eu tenho uma atividade pra dar a vocês... Não saiam sem pegar a atividade não. Tá valendo tempo pra nota e é uma pontuação boa.... Na próxima aula nós vamos continuar e eu vou pontuar que trouxer respondido.

AULA 5

P: Pronto, minha gente! Vamos lá! Na aula passada eu deixei uma folhinha com vocês com algumas questões de arranjo e combinação. Quem fez?

Al$_1$: Eu, professora!

Al$_2$: Não fiz tudo. Fiz apenas uma parte, não sei se tá certo.

P: Não tem problema! O mais importante é tentar. Eu também disse que hoje estaria dando uma pontuação pra quem resolvesse as questões, lembram?

Al: Por isso que eu fiz tudinho. Coloque meu 10 aí, vá!

P: Psiu! Eu vou fazer a chamada agora e a medida que eu for chamando, cada um vai trazendo a sua tarefinha pra que eu possa anotar quem fez, tá bem?

(A professora vai fazendo a chamada por ordem alfabética e anotando o nome dos estudantes que fizeram a atividade da aula anterior)

P: Pronto! Agora a gente vai corrigir as questões pra ver quem acertou mesmo. Vamos aproveitar, também, para tirar dúvidas. Vocês estão lembrados o que é arranjo e o que é combinação?

Al: Arranjo é arranjar e combinação é combinar.

P: Quem mais pode dizer o que é arranjo e combinação? Ou melhor, qual a diferença entre um e outro?

Al: Esqueci, professora.

P: No arranjo quando a gente muda a ordem dos elementos, por exemplo, quando a gente muda a ordem dos algarismos, a gente forma novos números?

Al: Sim.

P: A gente responde como? Quem lembra?

Als: Anhan!

P: Isso! E quando for combinação, é não mesmo. Combinação vai ser sempre de pessoas, objetos... Arranjo vai ser de números. Aqui estão as fórmulas de arranjo e combinação *[a professora aponta para um cartaz afixado na parede, utilizado na aula anterior, no qual estão as fórmulas para o cálculo de arranjo e permutação]*. Mas a gente pode usar a técnica do tracinho pro arranjo e aquela outra pra combinação. Vocês podem usar a que vocês quiseram.

(Inaudível. Conversa paralela dos estudantes)

P: Minha gente, vamos fazer silêncio, por favor! Vou começar aqui com a questão 1. Prestem atenção! Diz assim “Quantos números distintos com 2 algarismos diferentes, podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9?” Essa é uma questão de arranjo ou combinação?

Al: Arranjo!

P: Arranjo. A gente pode resolver usando o método do tracinho. Quem conseguiu resolver essa?

Al: Eu!

P: Então, se a gente quer formar números distintos com dois algarismos, vamos usar quantos tracinhos?

Als: Dois!

P: Isso mesmo! Então no primeiro tracinho eu vou ter quantas possibilidades de algarismos?

Al: 9.

P: 9, né? Se a gente quer formar com algarismos distintos... Lembram o que é distinto?

Al: Diferente.

P: Muito bem! Distinto é diferente. Digamos que a gente usou o algarismos 6 na primeira posição, quantas possibilidades eu vou ter agora para a segunda posição?

Al: 8.

P: 8 possibilidades, né? Então, ó, vamos usar o princípio aditivo ou o multiplicativo.

Al: Multiplicativo.

P: Multiplicativo, né? Quanto é 9 vezes 8?

Al: 72.

P: Então vamos ter 72 números distintos.

Registros da professora no quadro
$\underline{9} \cdot \underline{8} = 72$

P: Se a gente usar a fórmula de arranjo que eu mostrei para vocês na aula passada, vai dar a mesma coisa. Mas a gente vai trabalhar mais. Essa técnica do tracinho é um dica que eu dei pra vocês. Vamos para o próximo? Uma pessoa leia, por favor, a questão 2?

Al: Quantos números distintos com 2 algarismos podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9?"

P: Agora nessa questão pediu algarismos distintos?

Al: Não.

P: Então aplicando a técnica do tracinho, quantas possibilidades eu terei para a primeira posição?

Al: 9.

P: Para a segunda posição, eu posso repetir os algarismos? Podemos, né? Então quantas possibilidades eu vou ter aqui agora?

Al: 9.

P: 9 também, né? 9 vezes 9?

Al: 81.

P: 81 possibilidades

Registros da professora no quadro

<u>9</u> . <u>9</u> = 81

P: Outra pessoa para ler a questão 3.

Al: Usando-se apenas os algarismos 1, 3, 5, 7, 9 quantos números com 3 algarismos podem ser montados?

P: Quem quer vir resolver essa questão aqui no quadro?

(Barulho dos estudantes)

P: Vamos lá! Uma pessoa pra vir resolver aqui. Lembrando que hoje não tem lanchinho, mas a participação na aula está valendo ponto.

Bruna: Eu vou professora.

P: Venha, Bruna!

(A aula se dirige ao quadro e faz as suas anotações)

Registros da estudante no quadro
$5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

P: Muito bem, Bruna! Vamos ver se ela acertou. Quem fez igual?

Al: O meu deu 60, professora.

P: Como foi que você fez?

Al: Eu fiz 5 vezes 4 vezes 3.

P: Veja bem, o probleminha tem dizendo a palavra distintos?

Al: Não.

P: Então, a gente pode repetir os algarismos nas posições. Por isso que deu 125, como Bruna fez aqui no quadro. Vamos para a próxima questão. Outra pessoa leia a questão por favor!

(Barulho dos estudantes)

P: Psiu! Vamos, minha gente! Já que ninguém leu, eu vou ler aqui. Diz assim “Um indivíduo possui 25 livros diferentes. De quantas formas distintas ele poderá empacotar tais livros em grupos de 6 livros?” Quem foi que conseguiu resolver essa?

Al: Eu!

P: Eu vou resolver essa daqui com vocês porque o tempo está indo embora e eu quero terminar essa lista hoje. Essa questão é de arranjo ou combinação?

Al: Arranjo.

P: Então, vejam só! Uma pessoa quer organizar os seus livros pacotes com 6 livros. Então vou usar quantos tracinhos?

Al: 6.

P: Isso! Vou usar 6 tracinhos. Então nessa primeira posição, quantas possibilidades de livros em tenho?

Al: 25, né?

P: Isso mesmo! 25 possiblidades. Eu posso colocar qualquer um dos livros aqui. Na segunda posição eu vou ter 25 possibilidades também?

Al_1: Não.

Al_2: 24, professora.

P: Correto. Eu vou ter 24 possibilidades. Estão percebendo que aqui tem a palavra distintos, né? E no terceiro tracinho?

Al: 23.

P: No quarto?

Al: 22

P: 21 no quinto e 20 na sexta posição. Alguém aí multiplique na calculadora pra ser mais rápido.

Al: A gente vai usar a calculadora na prova também?

P: Não sei. A gente pode pensar nessa possibilidade.

Al: Deu 127.512.000.

P: Pronto! Tá aqui a resposta. Um número bem grande, né?

Registros da professora no quadro
$\underline{25} \cdot \underline{24} \cdot \underline{23} \cdot \underline{22} \cdot \underline{21} \cdot \underline{20} = 127.512.000$

P: Pronto! Vamos para próxima. Diz assim, ó, “Quantos grupos de 3 pessoas podem ser montados com 8 pessoas?”. Essa questão é de arranjo ou combinação?

Al_1: Arranjo.

Al_2: Combinação.

P: É combinação, né? Estão lembrados da fórmula de combinação?

(Inaudível)

P: Então vai ser combinação. Esse C é aqui é de combinação. Veja só, temos 8 pessoas para formar grupos com 3 pessoas. Vamos fazer do mesmo jeito que pro arranjo, só que vamos acrescentar o fatorial no denominador. Vai ficar assim, ó. Combinação de 8, aí eu desço 3. Vou escrevendo até a quantidade de pessoas do grupo, que são 3, né? E desço o 3 fatorial. 8 vezes 7?

Al: 56

P: 56 vezes 6? Podem fazer na calculadora mesmo.

Al: 336.

P: E quanto é 3!?

Al: Dá 6.

P: Agora é só dividir 336 por 6. Vai dar quanto?

Al: 56.

P: Estou confiando na resposta dele, viu minha gente?

Registros da professora no quadro
$C_{8,3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \frac{336}{6} = 56$

(Barulho dos estudantes)

P: Vamos lá! Que horas são?

Al: Já vai tocar, professora.

P: Dá tempo de fazer mais uma ainda. Vejam aí a próxima questão. Diz assim “Quantas combinações com 4 elementos podem ser montadas com as 10 primeiras letras do alfabeto?”. Quem fez essa?

Al: Eu.

(Sinal sonoro)

P: Psiu! As questões que ficaram, a gente corrige depois. Na próxima aula vamos continuar com o assunto.

AULA 6

P: Ô gente, vamos se organizando... A organização também já está valendo ponto. Sua postura de estudante de ensino médio, de obedecer as coordenadas quando o professor diz: “Organizem duplas” isso também já vale ponto, certo? Isso já é um exercício, se avalia. Vamos se organizando? Em dupla, procure alguém para formar sua dupla...

(barulho dos estudantes enquanto formam duplas)

P: Psiiiiu!

(inaudível)

P: Olha, quem gosta de dinheiro? Quem gosta de dinheiro?

Al: Eu não.

P: Pois eu trouxe... (inaudível) Psiu, senta aí! Quem participar vai ganhar um real. (ruído, conversa paralela dos estudantes)

P: Pronto? Psiu. Silêncio. Psiuuuu. Quem gostaria, por exemplo, de pegar uma nota de cem, hoje, na aula e a professora trocasse por uma de verdade?

Al: Eu gostaria... (inaudível)

P: Tô fazendo uma pergunta. Cuidado para não perder a oportunidade. Quem gostaria de receber uma nota de cem depois que eu trocasse por uma original? Ninguém quer não?

Al: Eu quero.

P: Só ela quer, né?

Al_1: Eu, professora.

Al_2: Eu tava pensando em ir embora mas...

P: Perderam a oportunidade. Passou a pergunta. Quem não responder perdeu. Psiu. Na aula de hoje... (Inaudível) Psiu. Presta atenção. Psiu. Anota aqui o nome dela. Deixa eu pegar a folhinha.

Al: Ganhar cem conto?

P: Ela respondeu que quer a nota de cem reais.

Al: Cem. Cem reais... (inaudível)

P: Cem reais.

Al: Eu tô ligado.

P: Presta atenção, Agora! A gente não pode aprender com esse barulho. Eu coloquei aqui... Dando continuidade, né? A análise combinatória... A gente vai ver aqui a questão de permutação.

Al: O que?

P: Permutação. Aí eu tenho aqui: Análise combinatória, Permutação com repetição. Com repetição. Por exemplo, ESTUDANTE. Tem letras repetidas aqui? *[a professora aponta para um cartaz fixado no quadro]*

Al: Tem

P: Quais são elas?

Al: E, T...

P: Isso aqui é uma palavra que se a gente for fazer a permutação dela, tem aqui letras repetidas. E aqui eu tenho permutação simples. Permutação simples é quando não existe letras repetidas, por exemplo. Eu tenho aqui a palavra...

Al: Não repete.

P: ESCOLA. Tem alguma letra repetida?

Al: Não

P: Então veja bem! Essa permutação com repetição eu vou mostrar a vocês sexta-feira pra gente não ficar confuso. Vou mostrar a vocês a permutação simples hoje, certo? A gente vai trabalhar com a simples e sexta-feira a gente trabalha com a permutação com repetição. Então, o que é uma permutação? Vamos lá vê o que vocês compreender por PERMUTAR. O que é permutar? Uma permuta. Vamos fazer uma permuta? Vocês já ouviram essa palavra? Quem fez uma permuta? Hã?

Al: É um agrupamento

P: Um agrupamento. Ele acha que é um agrupamento. Será que permutar é um agrupamento?

Al: Permuta é uma permuta.

P: Permutar. Permutação vem de permutar.

Al: Professora, eu sei o que é permuta.

P: Alguém sabe o que é permutar? Eu acho que muita gente já fez permutas aqui.

Al: Todo dia.

P: Sabe não? Ninguém sabe? Permutar é trocar, modificar, substituir... Tudo isso aí é permutar. Psiu! Permutação, permutar quer dizer isso. Permutação simples. Permutações... Psiu! Silêncio, senão vocês não vão me ouvir. Permutações são agrupamentos feitos com todos os elementos do conjunto dado, sendo que cada agrupamento difere dos demais apenas pela ordem dos seus elementos. Dado o conjunto n, um conjunto com n elementos, vamos fazer todos os arranjos possíveis com os elementos n. *[a professora ler a definição de permutação que está afixada no quadro]*. Então mais uma vez apareceu o n aqui. Esse n está representando o número, porém esse n poderia ser outra letra. Poderia ser um j, um m, um k, um y... Então, isso aqui que está destacado aqui ó, de verde... Ó, isso aqui é uma permutação. É a fórmula da permutação simples. Então eu vou botar aqui de novo $P_n = n!$. Quando eu tenho aqui ó, $P_n = n!$, esse n vale um número e esse n também é um número. Esse mesmo número que está aqui, vai estar aqui também... Sendo que aqui tem aqui uma exclamação (!)... Representando o que? Um fatorial... Presta atenção! Psiu. Diga aí um número! Um número pequeno.

Pedro: 2

P: 2. Então no lugar desse n aqui eu vou trocar por um 2. Esse P aqui significa permutação. P significa permutação. E o n é o 2 que Pedro falou. Se ele falou 2 e eu coloquei 2, esse n aqui também vai ser 2, né?

Al: 2

P: Vamos lá! 2! Agora o que foi que eu aprendi sobre o 2!? Vamos retomar as aulas lembrando do fatorial. O que são números fatoriais? São aqueles números que? Estão... O que são números fatoriais, hã?

Al: Eles estão aqui

P: Os números vem acompanhados de... De quem?

Al: Exclamação

P: Da exclamação... E esses números fatoriais. É o fatorial, ele vai representar a operação de análise combinatória. E mais uma vez aqui ó: permutação de 2. Eu já aprendi aulas passadas quanto é que vale o fatorial de 2. (inaudível) $2 \cdot 1 = 2$. Olha, deixa passar esse som. (ruídos) Presta atenção, ó: permutação de 2 é igual a 2! Certo? $P_2 = 2!$. Quem é 2!?

Al: 2

P: 2 vezes 1 é igual a 2.

Registros da professora no quadro
$P_2 = 2! = 2 \cdot 1 = 2$

P: Nós aprendemos que o fatorial a gente faz assim: colocando o número e os números consecutivos, né? Uma sequência de números menores que está sendo representado até o número 1, certo? A palavrinha nova ANAGRAMA faz parte da linguagem matemática. A gente usa também no dia-a-dia esses anagramas e a gente nem percebe. O que é um anagrama? Alguém já ouviu falar em anagrama?

Al: Eu não.

P: Já?

Al: Ana na grama

P: Ana na grama. Ela acha que é Ana na grama... Psiu! Anagrama... Ó: denomina-se anagrama o agrupamento formado pelas letras de uma palavra que pode ter significado ou não... Se Ana na grama estiver junto com Jéssica, com Elen... A gente pode sim fazer um anagrama.

Al: Na grama, na grama.

P: Certo? A gente pode pegar Elen...

Al: Eu não.

P: Jéssica e Ana e formar um anagrama. Psiu! Aí vocês vão entender o que é um anagrama.

Al: Aí não pode.

P: Pode sim! A gente pode fazer anagramas com pessoas. Pode fazer anagramas com objetos, psiuuu. Podemos fazer anagramas objetos, com pessoas, com números...

Al: Com números? Eu nunca vi não...

P: Por exemplo: pega aí 3 objetos que tenha na sua banca

Al: (inaudível)... caneta.

P: 3 objetos diferentes. Pega aí. Pronto! Peguem aí 3 objetos. Vamos formar um anagrama com esses objetos. Pegue aí 3 objetos. Eu vou pegar aqui o apagador, o brilho e piloto, certo? Pegue aí seus objetos também. Vamos formar anagramas com isso daqui.

(palmas)

P: Se está dizendo aqui, ó: Psiu, anagramas são grupos formados... E nesses anagramas a gente vai fazer trocas. Psiu, por exemplo: eu tenho aqui um agrupamento, psiu... Um brilho labial, um apagador e um piloto. Pegue os seus 3 objetos aí. Pegue os 3 objetos na mesa e não pode ser iguais senão vai ser com repetição e a gente não está tratando disso hoje. Estamos fazendo permutações simples, Pegue 3 objetos diferentes. Pronto? Então, anote aí uma maneira que você conseguiu formar, organizar. O meu, por exemplo, vá anotando na folha: primeiro aqui ficou piloto – vou representar por P – Apagador, presta atenção! Piloto, apagador... Tem gente conversando. E o brilho labial. Psiu! Piloto, apagador e o brilho labial, psiu. Certo? Agora anote o de vocês também. As letras iniciais dos objetos de vocês. Se

for caneta, lápis... Coloque aí: caneta, lápis e borracha. C de caneta, L de lápis, B de borracha. Coloca assim ó como eu coloquei na folha. Presta atenção! Agora a gente vai fazer umas trocas porque a gente tá trabalhando com permutação. A gente vai permutar essas trocas, esses objetos aqui. Como é que a gente vai permutar? Vou trocar o lugar... Vou colocar o piloto pra cá (inaudível)... O brilho vai permanecer aqui, certo? Então agora na minha permutação, na minha troca... Eu coloquei aqui ó: o A de apagador, P de piloto e o brilho continua lá. Então eu já fiz 1 vez, 2 vezes, né?
(Pausa para aviso da direção)

P: Pronto! Ó gente, troquei aqui minha ordem: apagador, piloto e brilho. Vocês trocaram a de vocês?

Al: Troquei

P: Vamos? É porque eu fiz a primeira maneira de um jeito, né? Agora a terceira, vamos lá? Psiu! Troquei agora ó: brilho... Psiu. Tem gente conversando. Quem estiver conversando vai se retirar, certo? Ó, vê só, troquei aqui a ordem dos meus objetos, troquem a de vocês, ouviu? Troquem a ordem. Nós estamos permutando. Olha a permutação: agora eu coloquei o brilho, apagador e o piloto. E agora eu tenho aqui 3 maneiras de ordenar, certo? Então ó: quem lembra, quem lembra... psiu! Presta atenção! Quem lembra qual é a fórmula que eu disse que é a fórmula da permutação simples?

Al: $P_n = n!$

P: Essa aqui né? $P_n = n!$, certo? Se eu contar aqui no número de letras?

Al: 9

P: 9 letras né? Aqui quantos objetos eu tenho?

Al: 3

P: E quantas maneiras diferentes eu organizei aqui?

Al: 3

P: 3. Então ó, eu vou me apresentar com a fórmula agora, certo? Permutação de n que é igual a n!... n aqui é o número de objetos. Quantos objetos eu tenho aqui?

Al: 3

P: 3. Aí eu vou colocar aqui ó, permutação de 3 é igual a... Esse 3 eu repito aqui? 3! $P_3 = 3!$ Quem é 3 fatorial? Vocês lembram quem é 3!?

Al: Sim

P: Permutação de 3, vai ser $3 \cdot 2 \cdot 1$. 3 vezes 2 é igual a 6, certo? Então aqui eu resolvi através da fórmula e aqui eu resolvi através da permutação. Permutei. Aquela atividade que eu passei para casa, a correção vai ser amanhã. Hoje eu tô trabalhando permutação... E sexta-feira é pra trazer o livro que o colega perguntou aqui. Sexta-feira tragam o livro de vocês. Anota aí na folha de vocês. Ó, vocês tinham 3 objetos, organizou aí de 3 formas... O 3 a gente troca pelo 3. Que é igual... Se é n, onde tiver n eu coloco o 3. 3! a gente já aprendeu como se resolve $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Essa maneira aqui foi a primeira permutação que a gente fez com objetos. Agora eu vou distribuir aqui essas cédulas e você vai pegar 4 cédulas diferentes, certo? Porque agora a gente vai fazer permutação com essas cédulas. Se você pegar igual, ó, vão fazendo assim: tire 4 e passe para trás, tire 4 e passe para trás. Escolha 4 cédulas e passe para trás. Escolha 4 cédulas diferente e passe para trás... 4 cédulas de valores diferentes, viu? Valores distintos. Passe para trás... tem mais alguém? 4 cédulas... Vai passando para trás...

(os estudantes vão retirando 4 cédulas de um pacote e passando as demais)

P: Pronto, está distribuído? Sobrou? Todos estão aí com as cédulas na mesa? Não?

(conversa paralela dos estudantes)

P: Ó, presta atenção! Todos estão com 4 cédulas? Vamos fazer a permutação. Pegue as cédulas de vocês e organizem... Psiu! Primeira posição, a primeira possibilidade pra eu organizar essas cédulas... Psiu, presta atenção! Eu organizei aqui ó: a minha maneira. O primeiro modo aqui de organizar e vocês vão fazer a mesma coisa com o de vocês. Eu não sei os valores que vocês estão mas vocês vão fazer o seguinte: pegue aí as cédulas de vocês. Coloca nessa ordem aqui ó... Vocês vão fazer do jeito que você quiser. Agora, na folha, na folha vocês vão fazer assim...

(Inaudível)

P: Quantas cédulas tem aqui?

Al: 4

P: A gente vai utilizar o método do tracinho, certo? Coloca aí, ó, 1, 2, 3, 4. Quatro tracinhos. Escreve aí na folha quatro tracinhos, certo? E em cada tracinho anote o valor das suas cédulas. A minha aqui é de 1 real, 2, 5 e 10. Pronto! Agora a gente vai permutar. Quem já sabe o que é permutar? Trocar. Vamos trocar? Vamos lá! Vamos permutar? Vamos fazer uma permutação aqui? Modifica aí o valor, a posição das cédulas. Por exemplo, a minha eu vou pegar aqui, ó... A de 2 reais aqui agora, vou colocar 5 aqui agora... Então você permutou uma vez, aqui foi a primeira possibilidade. Vamos para a segunda possibilidade? Olha aqui a segunda possibilidade! Bota aí de novo 4 tracinhos, nós temos 4 cédulas e qual foi a ordem sua agora? Anote a sua ordem! Vou colocar a minha ordem: 2, 1 real, 5 e 10. Minha segunda maneira de ordenar, certo? Vá colocando de acordo com as suas cédulas. Pronto? Fizeram a segunda maneira?

Al: Já.

P: Vamos permutar de novo? Tem outra maneira pra permutar aí? Tem ou não?

Al: Tem.

P: Vamos ver aí outra maneira! Vou ver aqui outra maneira.

(barulho dos estudantes enquanto realizam o procedimento orientado pela professora)

P: Permutei aqui de outra maneira, certo? Organizem aí de outro modo, minha gente. Outro modo, outra permutação. Coloca de novo os 4 tracinhos...

Al: Quatro ou três?

P: Quantas cédulas nós temos?

Al: Quatro

P: Então quatro tracinhos porque a gente tem quatro cédulas. E se fossem três cédulas, seriam três tracinhos. Então nós temos aqui quatro cédulas, temos aqui a terceira maneira. Vá anotando aí! Minha primeira maneira agora foi 10, 5, 1 real e 2.

Registros da Professora no quadro
1 2 5 10 → 1
2 1 5 10 → 2
10 5 1 2 → 3

P: E agora vocês vão fazer mais uma. Tem outra maneira aí de mostrar? Quatro cédulas, então vai fazer 4 permutações.

(barulho dos estudantes enquanto realizam o procedimento orientado pela professora)

P: Anota mais quatro tracinhos... Quarta maneira. O meu ficou assim, ó, 10, 5, 1 real e 2.

Registros da Professora no quadro
10 5 1 2 → 3

P: Observem uma coisa: tem números repetidos nessa primeira maneira?

Als: Não.

P: E aqui tem? *[apontando para a segunda maneira escrita no quadro]*

Als: Não.

P: Na terceira, tem?

Als: Não

P: Na quarta? Não tem porque nós estamos trabalhando com permutação simples. Quando a gente for fazer com repetição, aí nós vamos ter números repetidos, certo? Então, ficou assim o de vocês?

(Inaudível)

P: Qual é a fórmula agora? Nós vamos pegar isso aqui e aplicar na fórmula? Anote aí a fórmula agora. Aplique aí a fórmula! Quem me mostrar primeiro vai ganhar um lanchinho. Vamos lá!? Aplique aí fórmula do jeito que eu apliquei aqui. Valendo o lanchinho de sexta.

(barulho dos estudantes enquanto realizam o procedimento orientado pela professora)

P: Ela fez aqui, ó. A equipe de Ana. Pn. P de que? P representa o que?

Al: A permuta

P: Permutação. O P, permutação e n é o que? O número. E n!, esse n a gente coloca pelo número. Elas colocaram aqui 4 vezes 3 vezes 2 vezes 1 igual.

Registros da Professora no quadro
$P_n = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

P: Aqui, quem fosse observador, teria prestado atenção aqui, ó *[fazendo referência a um exemplo fixado no quadro]*. Tem quatro letras diferentes. Então foi feito aqui um anagrama e as possibilidades. Foi igual a essa $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Os valores, o produto vai modificar de acordo de objetos ou o número de letras ou o número de cédulas ou o número de moedas. Será que a gente pode fazer anagramas com moedas?

Al: Pode.

P: Sim ou não?

Al: Pode.

P: Será que a gente pode fazer com pessoas?

Al: Pode.

P: Vem cá! Quatro pessoas aqui na frente.

Al: Eu vou, professora.

(barulho enquanto os estudantes se dirigem à frente da sala)

P: Ana, Pedro, Tiago, João e Felipe. Vou colocar as iniciais A, P, T, J e F. Será que a gente pode formar anagramas com eles, minha gente? Vamos fazer uma permutação, não é, com eles aqui? Ó, mudem a ordem, se misturem. Olhem a posição deles agora!

Agora ficou T, P, A, F e J. Pronto. Mais uma vez, vamos ver aí as possibilidades. Troca a ordem de novo! Trocou? Pronto! Agora temos F, J, T, A e P. De novo, vamos ver outra possibilidade! Olha aí formando os anagramas com os meninos. P, F, J, T e A. Tem outra ordem aí? Vamos ver? J, P, T, A e F. Vamos fazer outros? Veja bem! Uma, duas, três, quatro, cinco. Como eu tenho 5 pessoas, meu anagrama é de 5, minha permutação é por 5. Se eu quiser misturar mais, eu misturo. Veja aí! Pode misturar? Tem outra possibilidade?

(Os estudantes voltam aos seus lugares)

P: Agora quem gostaria de vir aqui anotar a fórmula para esse anagrama? Quem gostaria de resolver este anagrama?

Al: Pedro, professora!

(Uma estudante se dirige ao quadro para fazer anotações)

P: Lúcia está resolvendo. Vamos ver se ela vai acertar este anagrama de 5 pessoas.

Registros da estudante no quadro
$P_n = n!$ $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

P: Vamos ver aí se ela acertou? Vocês acham que está correto?

Al: Tá!

P: Temos aqui 5 pessoas, permutação por 5 pessoas. P e n repete aqui, 5!, 5 vezes 4? Dá quanto?

Al: 20

P: 20 vezes 3?

Al: 60

P: 60 vezes 2? 120. Palma aí, tá?

(aplausos dos estudantes)

P: Agora a gente vai fazer isso nas soluções dos problemas, certo?

(Inaudível)

P: Vê só! Tem uma atividade agora que também está valendo ponto.

(A professora começa a escrever a atividade no quadro)

Registros da Professora no quadro
Atividade – Permutação

1) Com as vogais A, E, I, O e U, quantas permutações podem ser formadas contendo as letras: A, E e I? (Forme anagrama) 2) De quantos modos distintos podemos colocar 3 livros juntos em uma estante de biblioteca? 3) De quantos modos distintos 5 pessoas podem sentar-se em um banco de jardim com 5 lugares? 4) Qual o número possível de anagramas que se pode montar com as letras AMOR? 5) Quantos números com cinco algarismos podemos construir com os números ímpares 1, 3, 5, 7 e 9? 6) Quantos são os anagramas possíveis com as letras: A, B, C, D, E, F, G, H, I?

P: Prestem atenção! Vamos fazer uma revisão antes de acabar a aula. Revisão da aula: as permutações que eu falei aqui, o que é permutar, que no começo eu falei, ninguém sabia. Agora vocês sabem o que é permutar? As permutações podem ser de dois modos. Quem lembra? Quais os modos em que as permutações aparecem? Duas maneiras de permutação.

(Inaudível)

P: A simples. Permutação simples. Qual a outra? Com repetição. A simples são essas aqui que estamos trabalhando e com repetição, sexta-feira. Mas a gente já viu a repetição, se for letras, repete-se letras, se for numerais, repete-se numerais. Qual é a fórmula de permutação simples?

Al: Pn...

P: Esse n tá no lugar de quem? Quem é n? Números iguais da situação... O que é um anagrama? Anagrama? Quem lembra o que é anagrama?

Al: Agrupamento formado por letras, números...

P: O que é anagrama? Nas palavras de vocês mesmo. O que é um anagrama? Um grupo de objetos que vai permutar. Essa permutação pode ser o que? Pode ser pessoas?

Al: Pode.

P: Pode ser cédulas?

Als: Pode.

P: Objetos?

Als: Pode.

AULA 7

P: Semana passada eu fiquei de trazer... (inaudível) Vamos lá, vamos fazer silêncio, psiu!!!
(ruído)
P: Vamos lá silêncio, prestando atenção... Vejam bem: permutação com repetição. Revisando. Quem lembra o que é permutação?
Al: Números
P: Permutação vem da palavra permutar. O que é permutar, quem lembra? O que foi que a gente fez com as cédulas? Juntou?
Al: Permutou...
(inaudível)
P: Trocou?
Al: Professora eu disse primeiro
P: Ei, psiiiu! Tenho 3 sonhos de valsa aqui...
Al: Permutar, você pode fazer troca...
P: Permutar... trocar os elementos como nós fizemos com as cédulas... fizemos trocas de pessoas aqui... Quem foi que participou?
Al: Pedro e Tiago.
P: O que foi que vocês fizeram aqui?
Al$_1$: As células, as células, AS CÉLULAS....
Al$_2$: Um anagrama
P: Aqui vocês estavam fazendo o que?
Al: Análise combinatória
P: Vocês estavam combinando entre vocês? Vocês estavam fazendo o que?
Al: Permutação
P: Muito bem, vocês estavam fazendo permutações. Permutação. Eles estavam aqui fazendo trocas... Trocando de lugares... Permutando. Quem não estiver pensando atenção eu vou tirar 2 pontos no 3º bimestre, viu?
Al: Eu digo a mãe.
P: Ouviu, João? Menos 2, vou colocar aqui. Vamos ver quem vai ser o primeiro. Olhem, permutação por repetição está bem claro aqui a gente tem que associar o que a gente está vendo, está lendo... Permutação por repetição. Se é permutação por repetição é porque alguma coisa vai ser repetida. Nessa situação e o que é que nós

vamos repetir? Olha aqui: é... O colega aqui tá dizendo ó: a gente vai repetir os elementos? Sim. Por exemplo, a gente vai colocar uma palavra aqui... Que palavra é essa?

Al: Carro

P: Carro tem quantas letras?

Al: Tem 5

P: 5 letras. 5 letras. Existe alguma letra repetida aqui?

Al: Tem R

P: RR né? RR está repetido. Então nós vamos fazer... eu vou convidar pessoas aqui para fazer permutações com a palavra CARRO. Nas permutações que a gente faz com as letras, com as palavras... Não é necessário que a palavra tenha um sentido, ela perde completamente o sentido na hora que eu estou misturando as letras. E quando eu vou misturar as letras, eu vou formando uma coisa que eu disse aqui a vocês. Quem lembra? Quando eu vou trocando aqui as letras, por exemplo: vou trocar aqui, essa 3ª mudança que nós fizemos... Como é que se chama o que eu vou construindo a partir da mudança das letras. Quem lembra? Quem lembra? O nome que se dá a essa organização de troca de letras... Que eu vou permutando, eu vou construindo o que?

Al: Novas palavras

P: ANA...

Als: Anagramas.

P: Anagramas. Muito bem! Quando eu vou fazendo essas trocas eu vou construindo anagramas. Quem me ajuda aqui a desenvolver esses anagramas?

Al: Eu.

P: Pronto. Misture essas letras... Veja as possibilidades

Al: Professora quem fizer vai ganhar um sonho de valsa né?

P: É

Al: Eu vou depois

P: Pronto, vá fazendo aí... Tem outras palavras... Você pode, é você vai modificando as letras. Permutando. Olha aí ele está permutando. Vou tirar uma foto dele permutando... Faça outra... Deixa ele fazendo aí... Somente? Vê se tem mais...

Al: ORRAC

P: Tem mais?

Registros do estudante no quadro
ACRRO
RCRAU
OCRAR
ROCAR
RACOR
CROAR
ORRAC
RORCA

P: Pode sentar. Pronto? Prestem atenção aqui. Foram feitos o que minha gente? Como chamamos?

Al: Anagramas

P: Anagramas, né? Então tudo isso aqui, anagramas. Agora vejam bem... isso aqui é a maneira prática, né, que a gente constrói. Psiu! João, sente direito! Nós vamos fazer com a fórmula. Psiu... Quem estiver conversando eu vou pedir pra se retirar e vou colocar ali menos 2. Prestem atenção! Escute o que vou dizer aqui! Preste atenção! Permutação com repetição: É a permutação em que aparecem elementos repetidos, se trocarmos a ordem destes não aparecerá mudanças na posição. *[a professora ler a definição de permutação com repetição afixada no quadro]* Então nós fizemos aqui a ordem né? Misturamos as letras, perdeu o sentido, mas nós fizemos uma permutação por repetição porque tem aqui as duas letras repetidas. Aqui nós temos essa fórmula: P_n e em cima nós temos umas letras gregas. Quem sabe como se chamam essas letras gregas?

Figura XX: Fórmula de Permutação com repetição afixada no quadro

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$$

Fonte: Acervo da pesquisa

Al: A é Alfa

P: A é Alfa?

Al: B é Beta? Isso muito bem.

(Aplausos)

Al$_2$: Merece um sonho de valsa ele.

P: Repetiam aqui comigo: Alfa, beta e gama.... O que quer dizer isso professora? Isso aqui são letras gregas que nós vamos colocar no lugar de qualquer número... Elas podem ser substituídas por qualquer número... Nós temos aqui n, este n gente é igual a este?

Al: Não

P: Este é o n...?

Al$_1$: n de número

Al$_2$: Fatorial

P: Fatorial! Fatorial... Esse outro n? Ele vai representar um número mas esse número poderia ser um y, g, w... Qualquer letra gente. As letras elas não têm aquele valor próprio. Psiuuuu! Olha, presta atenção! Eu só vou dar no final, se se comportarem... Ô mocinho... (inaudível) conversando, não é hora não. Ó: em alguns livros vocês vão encontrar um P, α, β, γ e em outro vocês vão encontrar $P_n^{x,y,z\ldots} = \frac{n!}{x!y!z!}$ também, certo? E o que isso significa minha gente? Que nós vamos pegar alguns dados dessa palavra e vamos substituir aqui nessa fórmula. Por exemplo: quantas letras tem a palavra CARRO?

Al: 5

P: 5. 5 é o número de letras então eu vou colocar no lugar de n. Toda vez que aparecer n eu vou colocar 5. Se aqui tem n eu vou trocar aqui por 5 porque o número de letras desta palavra CARRO são 5. E aqui ó onde tem n! eu vou colocar o 5 também.

Al: 5!

P: Só que vou colocar 5! P_5. 5 é o número de letras. Agora x, y e z é o número de letras repetidas. Número de Letras repetidas. Por exemplo, quantas letras temos aqui?

Al: Tem 2

P: 2. Esse x eu vou trocar por 2. Professora, e esse y e esse z? Eu não vou utilizar. Pode haver até infinitas letras repetidas em uma palavra. Aí eu vou trocando, eu vou substituindo x, y, z. Aqui só houve 2 letras e eu vou trocar pelo x. Quem é o n!?

Al: 5

P: 5. Eu já falei pra vocês que nós vamos trocar o n pelo valor, pelo número de letras? Então 5!, quem foi o valor de x?

Al: 2

P: Sendo que vai ser 2 também fatorial. Ó, quando nós trabalhamos os números fatoriais eu mostrei pra vocês a forma de simplificação. Na divisão a gente também vai simplificar, ou seja, então eu vou fatorar aqui o número 5 e quando chegar no 2, eu vou parar, vou colocar 2! para poder dividir com esse. Vamos lá, quem é 5!?

Al: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$

P: $5 \cdot 4 \cdot 3$... Como aqui é 2! Vou parar em 2. Vou colocar 2! Dividido por 2!, certo? Este 2! é esse aqui. Eu posso simplificar esse 2?

Al: Pode

P: Eu vou cortar aqui...$5 \cdot 4 = 20.20 \cdot 3 = 60$... Presta ateção, meninas. Vou tirar pontos de vocês. Ó, $5 \cdot 4 = 20$... $20 \cdot 3 = 60$. Gente a pergunta seria: quantos anagramas eu posso fazer com a palavra CARRO? Eu posso fazer 60 anagramas. Os meninos fizeram aqui alguns 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 possibilidades, mas eu tenho 60 maneiras. Tenho 60 anagramas que posso fazer com a palavra carro.

Registros da professora no quadro
$P_5^2 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 60$

P: Pronto? Essa tabela aqui que eu trouxe. É a tabela das letras gregas. Teve gente que ficou bem impressionado quando Pedro acertou porque vocês têm que aprender a observar as coisas que eu tô colocando no quadro que estou colando... Ele observou aqui ó, ele viu aqui ó: α, β, γ. Isso aqui são letras gregas que aparecem em matemática. Eu trouxe outras aqui também: π pra vocês saberem quando aparecer... ω, μ, λ...

(inaudível)

P: Pronto, minha gente? Agora eu passei pra vocês um exercício. Vamos para primeira questão. Psiiiiiu! Determine o número de anagramas da palavra BARRACA... Pegue ali, vamos ver quem consegue fazer. Aqui está o exemplo, né? Eu quero que vocês façam isso. A gente não vai ficar amedrontado com a fórmula. A partir do momento que você vai substituindo você vai aprendendo com o cálculo. Pronto? Faça aí pelo menos 4 anagramas com a palavra barraca... Clara, quais são os anagramas com a palavra: BARRACA? Quem vem fazer aqui? BARRACA.

Al: Eu

P: 2 vezes só. 3 vezes. Faça aí BARRACO 3 vezes.

Al: Eu já fiz 4. (ruídos)

Registros do estudante no quadro
BARRACA RRACABA CARRABA RRABACA

(pausa para aviso da direção)

P: A gente vai concluir esse assunto, pois nós vamos encerrar com essa atividade, certo? Quem gostaria de fazer este cálculo agora? Eu vou fazer rapidinho por causa da hora, né? Eu disse a vocês que a fórmula era essa P_n. Qual o número desse P aqui? Quantas letras a gente tem aqui gente? 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Tenho 7 letras. Quantas letras repetidas nós temos?

Al: 2

P: Temos 3 A_s. 3 vezes o A. Então o A eu vou colocar aqui. Vamos terminar. Temos 2 R_s. Nós vamos colocar aqui também ó. Temos $\frac{7!}{3!2!}$, né? E aí e $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!$ sobre... (Inaudível)

$$P_7^{3,2} = \frac{7!}{3!\,2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\,2!} = \frac{840}{2} = 420$$

P: Próxima aula a gente continua. Faça a atividade porque está valendo pontos. Procura ó na internet. Tem um site lá chamado... Você pode pesquisar assim: “Professor Dani permutação por repetição”. Tem Marcos também que é muito bom. Ele vai explicar também... Permutação, repetição aí você vai revisando...

AULA 8

P: Vejam bem, na última aula eu passei umas questões no vídeo. No vídeo não, no livro. Teve gente questionando: “a gente copia tudo?” “Todas as questões ou somente as respostas? ”

(Inaudível)

P: Olha, tinham algumas pessoas questionando se era para copiar... mas o mais importante é a pergunta. Quem quiser copiar... O que eu coloquei no quadro que era pra copiar as questões... seria interessante também para você saber quais foram as questões que você respondeu, certo? Quem quiser ficar mais na frente aqui também pode ficar para não ficar tão disperso né?

(Inaudível)

P: Pronto gente? Tem mais alguém lá fora? Vocês aí se posicionem de uma forma melhor... Pra não ficar tão disperso e pare de assoviar... Preste atenção! Olhe, quem copiou as questões é bom porque fica “organizadinho” o caderno. Quem não anotou as respostas se você tiver organização para saber onde fica as páginas para não ficar perdido quando for estudar... Vai dizer: essas respostas foram de onde? Qual página? Eu não sei. Então, quem anotou somente as respostas não tem problema não. Mas se organizem para não ficar perdidos. Olhem no livro de vocês o último capítulo vem todos...

(Conversa paralela dos estudantes)

P: Veja só! A primeira questão, gente, foi na página 230. Se vocês observarem no livro de vocês, esse assunto que estamos trabalhando, ele veio no último capítulo, certo? Mas não importa a ordem porque também a gente segue o currículo, os parâmetros curriculares de Pernambuco e nos parâmetros os conteúdos já se organizam de outra forma. Então não importa se a gente começou, seguiu a ordem do livro ou não, certo? Aqui nós temos aqui o capítulo 10, quem escreve no livro pegue aí. Se, por acaso, alguém não respondeu, preste atenção. É na página 226 que inicia-se o capitulo de análise combinatória. Então ó, tem todos os subtítulos que nós trabalhamos aqui em análise combinatória. Iniciando por princípio fundamental da contagem aí tem aqui a sigla, né, PFC. Aí vem aqui as explicações, as anotações, as explicações. Vem aqui uma amostragem com um exemplo feito com uma moeda. Cara ou coroa. Temos aqui outros exemplos. Temos exercícios resolvidos que vocês podem em casa, ler, tentar fazer novamente e vê se você acertou. Esses exercícios resolvidos já são para facilitar para o aluno, né? O entendimento, a compreensão. E aqui vem uma lista imensa de exercícios. Situações-problemas. Tem alguns problemas mais simples, tem outros mais complexos, né? Que o aluno sente mais dificuldade, que exige mais raciocínio. Eu selecionei porque eu achei que vocês seriam capazes de resolver pelo nível de aprendizagem de vocês. Aqui também a página 231 tem outra lista de exercícios. E atrás do livro tem um suporte, certo? Esse livro aqui é igual ao do aluno, eu não tenho o do professor. Porque eu fui procurar, só tinha um livro, aí quem ficou foi a outra professora de matemática. Mas atrás vem as questões, as respostas que você pode tentar resolver e observar se você acertou ou não. Eu trouxe vocês aqui para a sala do 1º também porque além da gente vê, nós vamos fazer a correção e vamos ver também alguns vídeos que dão suporte as questões que você não souber, quando for uma questão mais complexa, você pode digitar o começo da questão ou no Youtube ou no Google mesmo e você vai ver porque muitas vezes tem na internet as questões que às vezes você não sabe o caminho e que pode ajudar você a resolver. Então próxima semana nós vamos fazer um "testezinho" sobre esses conteúdos, por isso que eu vou corrigir hoje, vou mostrar alguns vídeos para dar suporte a vocês pra vocês estudarem também no Youtube para na próxima semana vocês estarem mais preparados. Estudem as questões que vocês já viram também. Continuando aqui no livro, tem a parte, é bem "organizadinho", permutações, fatorial de um número natural que é aquela questão de número fatorial que nós trabalhamos, tem as permutações, depois vem arranjos, combinações, permutações com elementos repetidos... Pronto. Encerra. Então assim, tem uma série de exercícios que você pode tentar responder em casa. Vamos lá! A primeira questão que foi colocada aí pra vocês foi da página 230. Diz assim... Vamos ler juntos? Quem tá com o livro? Ninguém tá não?

Al: Eu tô.

P: Tem mais alguém com o livro para me ajudar na leitura? Não né? Então vamos lá! Para ir à praia Silvia pretende colocar um maiô e uma canga. Sabendo que ela possui 5 maiôs diferentes e 3 modelos diferentes de canga, determine o número de maneiras distintas de Silvia se vestir. Essa aí é bem semelhante aquelas questões que eu fiz com vocês de calças, de saias, vocês estão lembrados? Quem conseguiu resolver ou até desenhar... vocês poderiam ter usado desenhos. Quem conseguiu resolver isso? Como é o nome?

Al: Junior.

P: Junior? Quem mais? Pedro? Quais foram as metodologias que vocês usaram? Vocês fizeram o que?

Al: 5 vezes 3

P: Multiplicou 5 vezes 3? Quem mais? Quem usou uma forma diferente?

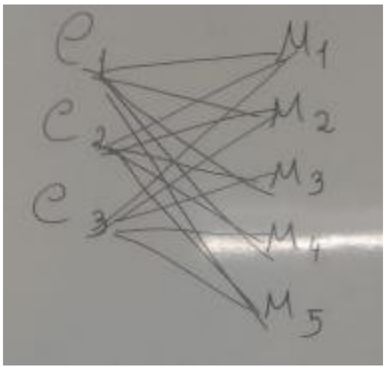
Al: Aí deu 15 maneiras.

P: 15 maneiras, foi? Alguém usou aquela questão do diagrama de árvore?

Al: Não.

P: Ninguém usou o diagrama de árvore? Mas seria interessante ter feito também para revisar o diagrama de árvore. Se eu tenho aí, colocar 1 maiô e 1 canga, sabendo que ela possui 5 maiôs e 3 modelos diferentes de cangas. Quem saberia representar aqui para a gente ir revisando... Quem saberia representar aqui um diagrama de árvore? A quantidade de maiôs e a quantidade de cangas, quem saberia? Vamos colocar aqui cangas representado pela letra C, maiô representado por M... Quem quer vir aqui fazer? Vocês já disseram aí que o cálculo vai dar 5 vezes 3 né? $5 \cdot 3 = 15$, não é isso? Então seria: as cangas 1, 2 e 3... Nós teríamos o número de maiôs ainda... Maiô 1, maiô 2, maiô 3, maiô 4, maiô 5... Então a gente vai aqui também juntando esse com esse com esse...Canga 1 com um dos 5 maiôs é uma possibilidade. Você pode ir à praia e você tem lá as meninas... 5 maiôs diferentes... você pode usar os 5 maiôs com essa mesma canga branca... Vamos dizer que essa canga aqui já é amarela. Você pode também usar a canga 2 com todos os maiôs. E você pode usar também, vamos dizer que isso aqui é uma canga azul-marinho e você pode usar com todos os maiôs aqui. Então $5 \cdot 3 = 15$.

Figura XX: Diagrama de árvore feito pela professora na resolução da questão 1



Fonte: Acervo da pesquisa

P: Então qual foi a outra questão que a gente viu?

Al: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

P: Isso. Foi qual essa daí? A questão 2? Um restaurante oferece almoço a R$ 40,00, incluindo entrada, prato principal e sobremesa. De quantas formas distintas. Quem lembra o que são distintas?

Al: Diferentes

P: Diferentes. Um cliente pode fazer seu pedido se existe 4 opções de entrada, 3 de prato principal e 2 de sobremesa? Então Rodrigo já foi dizendo aí... Como foi que você fez?

Rodrigo: $4 \cdot 3 \cdot 2$

P: $4 \cdot 3 \cdot 2$. Deu quanto? 24 maneiras né? Então nós temos aí... Esse 4 representa o que?

(Inaudível)

P: As 4 opções de entrada né? O 3 representa? Os 3 pratos principais. E o 2 as sobremesas. Isso!

Registros da professora no quadro
2) $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

P: Pronto, agora vamos aí para a página 231. Nós temos aí uma questão da OBMEP. Diz assim a questão: Manoela quer pintar as 4 paredes do seu quarto. Psiuuu! Eita, Zé! Quer explicar no meu lugar? Tá tão falante... Imagina que isso aqui é o quarto de Manoela não é? 1, 2, 3, 4 paredes *[a professora aponta para as paredes da sala]*. Veja esse espaço aqui, essa sala de vídeo. Manoela quer pintar as 4 paredes do seu quarto usando as cores: azul, rosa, verde e branco. Cada parede de uma cor diferente. Ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para a outra. De quantas maneiras diferentes ela pode pintar o seu quarto?

Al: 16.

P: São 16, é a resposta. Mas quem sabe fazer o esboço desse desenho aqui no quadro? Por exemplo, são 4 paredes... Vou colocar aqui: 1, 2, 3, 4 paredes. Ela não quer que as paredes, essa de frente pra essa, fiquem nas cores rosa e azul, não é isso?

Al: É

P: Cada parede diferente. Ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para a outra. Não pode ficar aqui azul e rosa uma de frente para outra nem aqui azul e rosa, uma de frente para a outra. Quem saberia representar maneiras usando aqui as cores? Temos aqui: Azul, rosa, verde e branco. Azul, rosa, verde e branco. Azul, rosa, verde e branco. As cores: Azul, rosa, verde e branco. Pronto! Qual a estratégia minha gente que poderíamos usar aqui para não ficar repetido: azul e rosa, azul e rosa repetidos aí no mesmo lugar... azul e rosa não podem ficar aí, uma de frente para outra. Então eu posso colocar azul aqui e combinar com qual cor?

Al: Branco

P: Branco... Posso usar... Posso também usar o azul com o...

Al: Rosa

P: Posso usar o rosa?

Al: Não

P: Ela não quer que fique azul com o rosa juntos. Verde... Posso usar quem? Ao contrário também, pode ser aqui azul com branco?

Al: Pode

P: Pode ser verde ao contrário aqui do branco. Olha as possibilidades, pode ser azul com verde, verde e branco, branco com verde, azul com verde. Aqui tá repetido, tem algum repetido?

Al: Não! Tem!

P: Azul e verde, né? Tá repetido? Vamos ver aí... E nas outras cores a mesma coisa, Só não pode ficar rosa e rosa. Então vão ficar 4 cores do lado e... Oi?

Al: Rosa e azul, né?

P: Rosa e azul... Então vai ficar $4 \cdot 4 = 16$. Eu posso colocar verde com rosa. Pode ser branco com rosa também. Certo? Então seria 4 possibilidades. 16. Vamos agora para o fatorial? Fatorial é lá na página 234. Aí nós temos letra A, 6!. Quem lembra como a gente representa 6!?

Al: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ ...

P: Isso! E você multiplicar o número até o número 1, a partir do 6, né, vai multiplicando. $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Quanto deu, minha gente, o de vocês?

Al: 720

P: 720. Letra B, letra V... Vamos até a letra?

Al: D

P: Vamos lá! Representar aqui o 4! Quem resolveu o 4!?

Al: Dá 24, professora.

P: 24. Tem alguém que ainda tem dúvidas nos fatoriais?

Al: Não.

P: Porque eu vou fazer, vou marcar a prova e a prova vale a nota do bimestre, né? Pra no dia você não ficar perdido, desorientado. Então esse é o momento de revisar, tirar as dúvidas, de entender. Quem já entendeu, ótimo. Quem não entendeu, pergunte, tire suas dúvidas. Então vai ser $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Aí nós temos o outro aí 0!+1!. 0! É quanto?

Al: 1

P: Mais 1 que é igual? A 2. Letra D nós temos 3! – 2!. Então 3! vale quanto?

Al: 6

P: Então será $6 - 2 = 4$. Temos também $7! - 5!$. Quem fez esse?

Al: Eu

P: Deu quanto?

Al: 5040 menos120

P: Vai dá quanto aqui?

Al: 4920

P: 4920. Temos aí agora 5 vezes 3!. $5 \cdot 3!$. Nós já sabemos que é 6. Então $5 \cdot 6 = 30$. Pronto terminamos esse?

Al: Graças à Deus.

P: O 29 também foi?

Al: Foi

P: Então vamos lá! Nós temos aí: obtenha o valor de cada uma das expressões seguintes. Nós temos aí as formas de simplificação. Maneiras da gente simplificar as expressões, não é? Vamos simplificar aí $\frac{8!}{6!}$. Vocês lembram que a gente pode fazer pela forma de simplificação para facilitar? Eu posso aqui reduzir, por exemplo, 8!, como que eu represento? 8 vezes 7. Aí o 6 eu posso cortar 6! dividido para 6!. Olha como ficou menor agora, mais fácil de resolver. Ao invés de eu representar: 6! Aqui no numerador e 6! no denominador eu paro, corto um pelo outro, simplifico, divido eles dois e vou multiplicar somente 8 vezes 7...

Al: 56

P: Que é igual a 56.

Registros da professora no quadro
$\frac{8!}{6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 56$

P: Letra B, 9! Dividido por 10!. Vamos lá! $\frac{9!}{10!}$... 9! por 10! Eu posso repetir aqui 9!. Quem é 10!? 10 vezes 9! E eu já simplifico esse com esse aqui, fica $\frac{1}{10}$. 1 décimo.

Registros da professora no quadro
$\frac{9!}{10!} = \frac{\cancel{9!}}{10 \cdot \cancel{9!}} = \frac{1}{10}$

Al: Tá tudo errado.

P: Porque vocês fizeram repetindo tudinho foi?

Al: Não

(inaudível)

P: Dividindo? Poderia ser também. Só que aqui, a gente tá usando a simplificação, certo? Para facilitar. Agora nós temos $\frac{3!}{4!} + \frac{4!}{5!}$. Então o que é que eu vou resolver aqui?

Al: ...fatorial

(inaudível)

P: Pronto! Vamos lá! 3! eu posso repetir aqui, 3! dividido por... Quem é 4!? $4 \cdot 3!$. Corto esse por esse e + 4! dividido por... quem é 5!? $5 \cdot 4!$. Cortando aqui o que foi que sobrou aqui em cima? Sobrou $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.Gente nós aprendemos que nas frações a gente não pode somar $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ porque os denominadores estão diferentes. Então nisso aqui a gente tem que tirar o que? O mínimo múltiplo comum de um e do outro. A gente não pode somar$\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$. Então a gente vai fazer assim: 4 e 5. Vamos tirar o mínimo. Qual o número que divide 4?

Al: 2

P: Eu posso colocar o próprio 4 ou 2. Se eu colocar o 2 eu vou trabalhar mais né? 4 dividido por 2 dá 2. Mas o 5 pode se dividir por 2? Não. Aí eu abaixo o 5, certo? Aí aqui eu vou até terminar, reduzir o 2. 2 dividido por 2 dá 1 e 5 dividido por 2 também não posso dividir. Então eu tenho que pensar num número que eu possa dividir o 5 e é o próprio 5. Deu 1 e deu 1. 5 vezes 2 é igual a 10. 10 vezes 2? Aí eu multiplico aqui 2 vezes 2 é igual a 4. 4 vezes 5 é igual a 20. Então vai dar $\frac{9}{20}$.

Registros da professora no quadro
$\frac{3!}{4!} + \frac{4!}{5!} = \frac{3!}{4 \cdot 3!} + \frac{4!}{5 \cdot 4!} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{5}{20} + \frac{4}{20} = \frac{9}{20}$

P: Vamos agora para próxima questão. Tão achando fácil ou difícil?

Al$_1$: Fácil.

Al$_2$: Difícil.

P: Letra D, $\frac{7!}{5! \cdot 2!}$. Vamos lá! Eu posso aqui reduzir primeiro o 7. $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 2!}$ ... Aí eu corto aqui 5 por 5. 7 vezes 6 dá quanto?

Al: 42

P: 42. Dividido por 2!. 2! É quanto?

Al: 2

P: 2. E quem é 42 dividido por 2?

Al: 21

P: 21.

Registros da professora no quadro
$\frac{7!}{5!\cdot 2!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 2!}=\frac{42}{2}=21$

P: Letra E agora. Letra E nós temos $\frac{20!}{18!\cdot 2!}$... $\frac{20\cdot 19\cdot 18!}{18!\cdot 2!}$... Quem é 2!? 2. Aí esse 18 eu repito 18! para simplificar pelo 18 e vou multiplicar 19 vezes 20 dividido por2. Aí eu posso fazer assim: 19 vezes 2, guarda o zero aqui. 2 vezes9? 18, Vai 1. 2 vezes 1? 2 mais 1 é igual a 3, vai acrescentando o zero... 380. Então 20 vezes 19 é igual a 380 dividido por 2. 3 dividido por 1 dá quanto?
Al: 1.
P: Dá 1. 1 vezes 2 é igual a 2, para 3? 1. Baixa aqui o 8. 18 dividido por 2 é igual a 9... 9 vezes 2 é igual a 18, para 18? Nada. Baixa o zero aqui. Então vai dar aqui $\frac{380}{2}=190$.

Registros da professora no quadro
$\frac{20!}{18!\cdot 2!}=\frac{20\cdot 19\cdot 18!}{18!\cdot 2!}=\frac{380}{2}=190$

P: Terminamos, não foi? Tem mais uma aqui.
Al: Professora, dê uma descansada, pelo amor de Deus?
P: Parar um pouquinho, né?
Al: Deixe a gente ir embora, professora?
P: Nada disso.
(Inaudível)
P: Pronto? Vamos lá. 238 a questão.
Al: 37
P: 237 foi o que? Os anagramas foi? Foi a questão (inaudível). Determine o número de anagramas, não foi? Psiu! Vê só, esses de anagramas, eu vou deixar para corrigir amanhã porque (inaudível)... Mas ele tá cobrando aqui a questão L vamos lá... Eu vou corrigir a outra questão da prateleira, aquele problemazinho que é mais complexo. Vou mostrar também um vídeo a vocês. 8!/7!. Faça assim: 8!x7!/7!x6!/7x6!. 8x1...8/7... 8 sétimos. Esse dos anagramas é mais fácil. Eu não vou fazer esse, eu vou pular. Amanhã a gente corrige esse. Vamos para os problemas que são mais complexos, pagina 238, vamos para 238. 238. Eu passei a questão 38 e 39, né isso?

Al: Foi

P: Eu vou fazer com vocês a 38, psiu, gente, pronto? Vamos aqui para a questão 39 senão não vai dar tempo. Que horas são? Psiu. Que horas são já aí? 4 e quanto? Ó 39. Quem tá com o livro acompanha aí. Em uma mesma prateleira de uma estante há 10 livros distintos, psiu, presta atenção... Sendo 5 de álgebra, 3 de Geometria e 2 de trigonometria. Psiu. Júlia, presta atenção. Ó no livro de vocês já tem o desenho dos livros. Tem 10 livros aí... Olha com essa conversa...

Al: Cala a boca.

P: E vou ficar até 5h20... (ruídos)... Vou desenhar aqui os 10 livros já que vocês não trouxeram livro hoje. Aí tem aqui 10 livros, aí tá dizendo o seguinte ó: psiu, escuta minha gente... Sendo 5 livros de álgebra. Então eu vou representar pela letra A. Os 5 primeiros eu vou representar pela letra A. 1,2,3,4,5. 5 de álgebra, 3 de geometria... Olha os 3 de geometria, vou colocar aqui ó: presta atenção!... Gente, quando vier questões assim falando de livros, falando dessas combinações de objetos... Quer explicar?

Al: Não

P: (inaudível) Você e Estefane... Ó, vê só: temos 5 de algebra, 3 de geometria e 2 de trigonometria, certo? Então a primeira pergunta é a seguinte: de quantos modos distintos podemos arrumar estes livros nesta prateleira, se desejamos que os livros do mesmo assunto permaneçam juntos? É uma maneira de organizar esses livros para que eles permaneçam juntos de acordo com a disciplina de cada um. Por exemplo: esses aqui que estão representados pela letra A? Significam o que?

Al: Álgebra

P: Livros de álgebra. Os de letra G? Geometria e o T? Vamos minha gente, meu Deus...

Al: Trigonometria

P: Trigonometria. Né isso? Psiu. Presta atenção. Então se tá pedindo para deixar eles juntinhos eu já fiz o desenho aqui deixando eles juntinhos. Está aqui juntinho a álgebra, trigonometria e geometria. Mas está perguntando: de quantos modos distintos podemos arrumar estes livros nesta prateleira, se desejamos que os livros do mesmo assunto permaneçam juntos? Permaneçam juntos. Se nós agruparmos aqui ó: por disciplina, nós vamos ter... Um grupo aqui de A...

Al: Eu não consegui fazer esse aí não professora.

P: Um grupo de A, um grupo de G e um grupo de T. Então quantos grupos nós temos?

Al: 3

P: 3. Se nós temos 3 grupos então a gente vai fazer uma permutação de 3. Uma permutação de 3. Da seguinte forma: pensando nas matérias então eu posso arrumar de 3 modos. Então a permuta vai ser por 3 que é igual a quem? Quem é 3!? 3 fatorial é igual a 6. Nós temos 6. E dentro de cada uma das matérias existe uma quantidade de possibilidades também, psiu, eu estou representando aqui só as 3 possibilidades. Mas dentro de cada uma aqui nós temos maneiras. Os de A são quantos?

Al: 5

P: Então eu vou fazer uma permutação por 5. 5! = 5x4x3x2x1. 5x4= ... vamos lá pessoal? Quanto? Mas vocês não têm futuro não. Me desculpem, mas é um povo sem interesse que não tá nem aí para vida... Amanhã vai ser tarde, estou avisando. Então ó nessa multiplicação aqui nós temos 5 possibilidades pelo livro de álgebra.

Al: (cantarolando) amanhã pode ser muito tarde...

P: Ó tem gente que... Minha gente eu já terminei meus estudos, já fiz minha faculdade, minhas especializações... Eu estou aqui cumprindo a minha obrigação de professora, entendeu?... Agora não pensem que eu estou perdendo nada com esses alunos acomodados... Quem tá perdendo são vocês. Eu, vocês aprendendo ou não, ganho meu dinheiro. Passando ou não, no final do mês eu ganho meu dinheiro, meu querido. O problema é de vocês... Vamos lá: Geometria agora ó. Permutação aqui pelos 3 livros agora. 3 livros de geometria então vai ser assim: permutação por 3. 3x2x1=6. Depois eu tenho aqui trigonometria que vai ser uma permutação por 2 que é igual a 2. Então nós fizemos aqui as permutações por disciplinas agora. Quantas maneiras eu posso arrumar livros de álgebra? Eu tenho 120 possibilidades. Quantas maneiras eu posso arrumar livros de geometria? Permutação por 3. Eu tenho 6 possibilidades. Trigonometria eu tenho 2 possibilidades. Mas além dessas possibilidades eu também tenho aqui ó: 6. Eu já encontrei 6. Eu vou multiplicar ó por 120x6x2 , certo? Ou seja, primeiro eu vou multiplicar o que há nos parênteses e depois vezes 6. 120x6? Posso pegar aqui ó: 120x6. 6xnada = nada. 6x2=12 vai 1. 6x1=6+1=7. 720x2 ó 2xnada= nada. Isso aqui é... Todo esse problema da questão da letra A a gente nem começou a resolver a B ainda.

Al: Pois eu vou fazer aqui

Aluno 2 - Misericórdia

P: 2x7=14. Então até agora eu encontrei 1440 dessa questão. Até aqui multiplicado da 1440. Agora vezes 6 isso daqui vai dar: 8640, certo? Então esses livros aqui com essas disciplinas eu tenho 8640 possibilidades. 8640 possibilidades de organizar esses livros. Vou anotar aqui a resposta da letra B. A letra B a pergunta é a seguinte: De quantos modos distintos podemos arrumar esses livros nesta prateleira, de modo que, nas extremidades apareçam livros de álgebra e os livros trigonometria fiquem juntos, eu quero que os livros de trigonometria fiquem juntos e os livros de álgebra. Então essa questão aqui de geometria não está pedindo... De quantos modos distintos? De modo que nessas extremidades apareçam álgebra... Extremidades é isso aqui ó, extremidades. Nas pontas, extremidades, nos cantos. Então aqui tem álgebra... Aqui eu posso colocar, psiu, vamos enumerar esses livros de álgebra. Pode ser: álgebra 1, álgebra 2, álgebra 3, álgebra 4, álgebra 5. Nessa primeira extremidade eu posso colocar qualquer um desses livros e na última extremidade eu posso colocar quantos livros? Se aqui eu coloquei... Eu tenho 5 possibilidades, 5 tipos de livros, se eu já usei 5 possibilidades aqui, tirando uma me restam quantas? Vamos dizer que eu coloquei aqui o A2, tirando uma me restam quantas para a outra extremidade?

Al: 4

P: Então aqui me restam 4 possibilidades. Pode ser: A1, A3, A4 ou A5 se eu usei o A2 alí. Então eu faço assim ó: 5x4 dá quanto? 20. Nas extremidades eu estou colocando os livros de álgebra, nos cantos, no início e final. Extremidades significa isso. Aí agora vem o seguinte: e os de trigonometria tem que ficar juntos. Quantos são os de trigonometria?

Al: 3

P: 3. Vou colocar eles aqui ó, 2 livros de trigonometria. Trigonometria 1 e trigonometria 2. Essa permutação aqui ó é uma permutação de 2=2. Tanto faz eu colocar aqui ou aqui e ainda faltam os livros de geometria que não citou aí mas não são 10 ao todo? Então eu vou colocar eles aqui ó: geometria, geometria e geometria, certo? Geometria 1,2,3. Então ao todo, será que nós temos 10 livros aqui? 5. Esse 5 representa 1. 1+2=3... 3+3=6... 6+4= 10. Ao todo nós temos aqui 10 livros. Então nós vamos fazer o seguinte. Nós vamos aqui ó: nós já temos 20. Resultado final vai ficar ó o número total vai ser 20x2!x, psiu, vamos ver quantos livros me restam quando eu tirar 1 daqui

- que foi o primeiro que eu coloquei – tirando 1 daqui, 1 daqui... Juntando mais esses 3 e esses 4. Então vai me restar 7, 7 possibilidades. Então vai ser x7! Então aqui ó: o numero total vai ser, eu posso multiplicar aqui 20x2=40. E 40x7! Psiu, se você fizer 7! Vai dar 5040, certo? Então esse N aqui vai dar 201.600 multiplicado. 5040. 40x5040 vai dar = 201.600. Então nós temos aí: de quantos modos distintos podemos arrumar esses livros? Podemos arrumar de 201.600 maneiras esses livros. É um cálculo grande minha gente, se não prestar atenção e não quiser aprender...

Al: Professora, a senhora vai colocar uma dessa na prova?

P: Com certeza. Olhe, vou mostrar aqui rapidinho um dos sites...

Al: (Inaudível)

P: Mas é rapidinho, 5 minutos, que horas são?

Al: Oxe, já é mais de 5 horas. A gente vai perder o ônibus.

P: Dá tempo, dá tempo.

Al: Dá não professora.

P: 5h15 nós saímos. Espera aí que é bem rápido. Deixa eu mostrar pelo menos os sites para vocês.

Al: Precisa não. Ninguém vai procurar mesmo.

P: Vai não né? Porque hein Julia?

Al: (ruídos)

P: Eu queria saber porque vocês não gostam de estudar hein minha gente?

Al: (inaudível) ... Dá preguiça... (inaudível) 0,1 (risos) (assovio) (ruídos)

P: Ó, vê só: eu vou só mostrar a vocês, psiu, rapidinho. Esse problema é bem semelhante ao que a gente fez. Não é igual, mas é parecido ó. Então ó, vocês vão me trazer essa resposta amanhã... Nós vamos fazer aqui mesmo.

- (Vídeo) De quantas maneiras podemos arrumar lado a lado 5 livros de geometria, 4 de estatística, 3 de calculo.... que fique sempre juntos...

P: Ó não vou mostrar o calculo todo. Mas o que eu quero dizer é o seguinte: na internet, no youtube tá cheio de questões parecidas... A gente trabalha ó...

Al: Qual o nome desse site aí?

P: Vou mostrar daqui a pouco. Olha aqui, tudo explicadinho para quem quiser aprender. Mas como Julia disse: “ninguém assiste não”. Ninguém assiste porque não tem interesse né?

Al: Eu assisto (risos)

P: Esse professor aqui ó, vê só, esse professor ele trabalha esse mesmo problema que a gente fez, da prateleira, a mesma quantidade, igualzinho ó... Não vai dar pra passar todo... (vídeo) A mesma questão... Mostrar aqui no final o mesmo resultado. Essa questão foi a questão que a gente acabou de resolver que dá 8640, a primeira, a letra A. A maneira como ele fez aqui o cálculo é diferente do que eu fiz. aolha a letra B dele aqui ó... Ele só mudou a ordem mas no final... Outro aqui que eu vou mostrar a vocês... Psiu. Ó esse aqui é o que eu sempre digo a vocês para assistir, MARCOS ABA é um professor excelente. Você coloca lá no Youtube: Marcos Aba e o nome do assunto e ele explica. Permutação.... (Inaudível) Anagramas... Com o bozó tá vendo? (Sinal sonoro)