UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

LEONARDO AUGUSTO DE LEMOS BATISTA

LIMITES DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL: análise das praxeologias matemáticas e didáticas propostas em livros didáticos

Caruaru
2019

LEONARDO AUGUSTO DE LEMOS BATISTA

LIMITES DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL: análise das praxeologias matemáticas e didáticas propostas em livros didáticos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Área de concentração: Educação em Ciências e Matemática.

Orientador: Profº. Dr. Edelweis José Tavares Barbosa.

Caruaru

2019

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Paula Silva - CRB/4 - 1223

B333l Batista, Leonardo Augusto de Lemos.
Limites de funções de uma variável real: análise das praxeologias matemáticas e didáticas propostas em livros didáticos. / Leonardo Augusto de Lemos Batista. – 2019.
143 f.; il.: 30 cm.

Orientador: Edelweis José Tavares Barbosa.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, 2019.
Inclui Referências.

1. Cálculo diferencial. 2. Cálculo integral. 3. Funções de variáveis reais. 4. Livros didáticos. 5. Avaliação. 6. Matemática – Estudo e ensino. I. Barbosa, Edelweis José Tavares (Orientador). II. Título.

CDD 371.12 (23. ed.) UFPE (CAA 2019-403)

LEONARDO AUGUSTO DE LEMOS BATISTA

LIMITES DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL: análise das praxeologias matemáticas e didáticas propostas em livros didáticos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Aprovada em: 03/12/2019.

BANCA EXAMINADORA

____

Profº. Dr. Edelweis José Tavares Barbosa (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Profº. Dr. Marcus Bessa de Menezes (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Profº. Dr. Saddo Ag Almouloud (Examindaor Externo)
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

DEDICO ESTE TRABALHO

AO MEU DEUS,

Pois todas as coisas pertencem a **DEUS**, Criador dos Céus e da Terra. Esta vitória na minha vida é para honra e glória dEle.

AO MEU PAI, Paulo Pereira Batista *(in memorian),*

Que apesar de não ter completado os estudos formais, era um verdadeiro autodidata. Suas leituras constantes me incentivaram a ler e a aprender cada vez mais e em diversas áreas do conhecimento humano. Foi o meu grande professor e incentivador.

Saudades...um dia o reencontrarei no Céu...

AGRADECIMENTOS

A construção deste trabalho só aconteceu por causa da colaboração direta e indireta de muitas pessoas!

Gostaria de registrar aqui a minha profunda gratidão a todas estas pessoas que contribuíram para a elaboração do presente texto. Foram muitas leituras, análises, ideias, orientações, entre outros, que trouxeram mais luz à pesquisa e ao presente texto.

Agradeço primordialmente a **DEUS**, pois Ele me deu condições e forças para iniciar e terminar esta dissertação que marca o fim de mais uma etapa da minha vida acadêmica e profissional.

À TODA MINHA FAMÍLIA, em especial a minha esposa **Angélica**, minha **Mãe, Lúcia**, meu irmão **Lwygy** e minha irmã **Poluse**, que me proporcionaram o apoio afetivo e psicológico necessários para a concretização deste sonho. Obrigado a todos, pois sem vocês, nada disto faria sentido!

AO MEU ORIENTADOR, EDELWEIS uma pessoa ajudadora e compreensiva que me ensinou a dar os primeiros passos em minhas pesquisas acadêmicas na área de educação matemática. Agradeço profundamente ao Prof. Dr. Edelweis Jose Tavares Barbosa por ter aceitado ser meu orientador, por ter aberto as portas para mim e por ter me ajudado de todas as formas possíveis e imagináveis para a realização desta pesquisa. Agradeço ainda por todas as conversas que tivemos e por todos os conselhos dados, e que recebi com muita alegria.

Professor Edelweis, tens o meu respeito e a minha admiração!

Agradeço também aos pesquisadores Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud e Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes por aceitarem participar da avaliação deste trabalho, e também, por todas as contribuições feitas durante a qualificação da pesquisa.

Aos meus colegas da TURMA 2018 do MESTRADO pelas boas conversas, ajudas, trabalhos feitos em grupo, etc. Em especial, agradeço aos meus colegas de turma Roberto e Rafael.

Roberto, você realmente foi uma pessoa que Deus colocou ao meu lado nesta luta!

Aos **COLEGAS** Mauricio Pelloso, Jonh Cleidson, Marcílio Martins, Cacilda Tenório, Josilene e Clovis Gomes da Silva Júnior *(In Memory)*, pelos exemplos dados e pelos incentivos recebidos para o ingresso na área da pesquisa em educação matemática.

Aos **AMIGOS E IRMÃOS** Natan Silva, Carlos Eduardo, José Alberto e Vagner por todas as nossas conversas e compartilhamento de ideias e de orações.

Aos **COLEGAS DE TRABALHO** da **EREM Professor Vicente Monteiro** Giane, Rozemar, Íris, Jorge, Rogério Sobral, Rosemiro (Miro), Rafael, Rogério, e todos os demais que fazem parte da nossa grande equipe.

Aos **COLEGAS DE TRABALHO** da **ASCES-UNITA** Ivânia Porto, Vanúcio Pimentel, Ana Rosa, Saulo, e todos os demais que fazem parte da nossa excelente equipe.

A todos os **DOCENTES** do Programa que ensinaram coisas novas e empolgantes para somar à minha vida acadêmica e profissional.

RESUMO

O objetivo deste trabalho de pesquisa foi estudar como autores de livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral propõem situações visando a transformação de um estado de *não-saber* para um estado de *saber* no que se refere ao objeto matemático limites de funções reais de uma variável real. A realização deste estudo se baseou em elementos teóricos e metodológicos da Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Yves Chevallard e colaboradores (1991, 1999). A metodologia que foi adotada nesta pesquisa, trata-se de uma abordagem qualitativa de cunho documental. As duas obras submetidas à análise foram: O Cálculo com Geometria Analítica de Louis Leithold (1977) e Cálculo de James Stewart (2017). Para auxiliar nesta investigação, foram propostas as seguintes questões (mais gerais): *Como vivia e como vive o objeto matemático limites de funções de uma variável nos livros didáticos selecionados? Quais eram e quais são (e como se caracterizam) as organizações matemáticas e didáticas relativas aos limites que aparecem nas obras escolhidas? Qual era e qual é a razão de ser do conteúdo limites de funções nos referidos livros texto?* Após analisar cada um dos dois livros e comparar os resultados, foram encontradas algumas diferenças nos modos de *viver* dos limites considerados. Partindo-se da análise das *organizações praxeológicas* constituídas em torno dos *subtipos de tarefas* relacionadas à determinação desses limites, constatou-se que existe uma diferente distribuição (não muito grande) da representatividade de tais *tarefas*. Observou-se ainda, a *não-presença* (no livro mais antigo) e *presença* (no livro mais recente) das *praxeologias* a serem transpostas relacionadas à atividade de conjecturar limites numericamente; e também; das abordagens histórico-epistemológicas; do uso de calculadoras, computadores e sistemas de computação algébrica; e das aplicações aos demais campos do conhecimento humano. As *organizações matemáticas* são praticamente as mesmas (apenas com diferenças em relação à variedade das *técnicas* elaboradas). As *praxeologias didáticas* ocorrem (basicamente) em três *momentos,* a saber: (i) *exploração do subtipo de tarefa/elaboração da técnica*, (ii) *avaliação do ambiente técnico-tecnológico* e (iii) *trabalho da técnica*. As razões de ser para tais limites são essencialmente as mesmas, ou seja, estudam-se limites para explicar e justificar todo o resto do Cálculo Diferencial e Integral.

Palavras-chave: Livros didáticos de cálculo diferencial e integral. Limites de funções reais de uma variável real. Teoria antropológica do didático.

ABSTRACT

The objective of this research work was to study how authors of Differential and Integral Calculus textbooks propose situations aiming at the transformation from a state of *not knowing* to a state of *knowledge* regarding the mathematical object real function limits of a real variable. This study was based on theoretical and methodological elements of the Anthropological Theory of the Didactic (ATD), proposed by Yves Chevallard and collaborators (1991, 1999). The methodology that was adopted in this research, is a qualitative approach of documentary nature. The two works submitted for analysis were: Louis Leithold's Calculus with Analytical Geometry (1977) and James Stewart's Calculus (2017). To assist in this investigation, the following (more general) questions were proposed: *How did the mathematical object live and how do the function limits of a variable in the selected textbooks live? What were and what are (and how are they characterized) the mathematical and didactic organizations related to the limits that appear in the chosen works? What was and what is the raison d'être of the content limits of functions in those textbooks?* After analyzing each of the two books and comparing the results, some differences were found in the ways of *living* of the considered limits. From the analysis of the *praxeological organizations* constituted around the *subtypes of tasks* related to the determination of these limits, it was found that there is a different (not very large) distribution of the representativeness of such *tasks*. It was also observed the *non-presence* (in the oldest book) and *presence* (in the most recent book) of the *praxeologies* to be transposed related to the activity of conjecturing limits numerically; and also from historical-epistemological approaches; the use of calculators, computers and algebraic computing systems; and applications to other fields of human knowledge. *Mathematical organizations* are practically the same (only with differences in the variety of elaborate *techniques*). The *didactic praxeologies* occur (basically) in three *moments*, namely: (i) *exploration of the task subtype/elaboration of the technique*, (ii) *evaluation of the technical-technological environment* and (iii) *work of the technique*. The reasons for being for such limits are essentially the same, that is, limits are studied to explain and justify all the rest of the Differential and Integral Calculus.

Keywords**:** Textbooks of differential and integral calculus. Real function limits of a real variable. Anthropological theory of the didactic.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Durante o período de dois anos, o autor do presente trabalho de pesquisa lecionou Cálculo Diferencial e Integral (CDI) no Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco (CAA-UFPE), onde ministrava aulas para os alunos dos cursos de Engenharia de Produção e Engenharia Civil. Durante tal experiência como docente do ensino superior, teve a oportunidade de observar de perto as dificuldades vivenciadas nos processos de ensino e aprendizagem dos assuntos concernentes ao Cálculo, principalmente no que se refere ao conteúdo limites.

Desse modo, o autor resolveu iniciar uma busca por caminhos alternativos que pudessem auxiliar o seu fazer pedagógico, objetivando então, oferecer aos seus alunos a chance de transpor os obstáculos e avançar em relação aos saberes matemáticos relacionados ao CDI, com destaque para os limites.

No ano de 2017, começou a participar de um grupo de iniciação à pesquisa na própria UFPE. Grupo, esse, que é voltado para auxiliar futuros pesquisadores em educação matemática. Dessa maneira, a partir das discussões realizadas no tal grupo, toda essa inquietação começou a ser melhor compreendida, alguns pontos problemáticos (mais superficiais) da prática docente puderam ser identificados e corrigidos, e o desejo de investigar o problema mais a fundo surgiu.

O Cálculo Diferencial e Integral é também chamado de “a matemática do movimento e da variação”, constituindo algumas das mais tradicionais disciplinas do ensino universitário, e tendo preservado até os dias atuais bastante da sua estrutura original (SOUZA, 2001).

Segundo Taveira Neto (2016), o Cálculo possui aplicações nos mais diversos campos do conhecimento humano e constitui uma ferramenta matemática completa e dinâmica. Dessa forma, pode-se compreender a inevitável necessidade do estudo do CDI em vários cursos de graduação, indo desde Administração de Empresas até Matemática Pura, passando por Engenharia de Produção, Engenharia Civil, Física, Química, etc.

O primeiro curso de Cálculo com o qual um aluno se depara após ingressar no ensino superior, geralmente é composto pelo estudo de conjuntos numéricos, intervalos, álgebra básica, funções elementares, limites, derivadas e integrais (atendo-se ao caso de funções de uma única variável real).

Entretanto, segundo Rafael (2017), as aulas de Cálculo Diferencial e Integral costumam gerar nos alunos inquietações, expectativas pessimistas e angustiantes, e até mesmo o repúdio à disciplina. Essa autora afirma que por causa dos elevados índices de reprovação e abandono, o Cálculo, os seus conteúdos e os seus métodos, tem sido alvo de muitas pesquisas acadêmicas.

Para ilustrar tal afirmação, Rafael (2017) cita o exemplo do *Calculus Reform* (movimento iniciado na década de 1980 nos Estados Unidos, que visa enfrentar as dificuldades relacionadas ao ensino e aprendizagem do CDI).

Rafael (2017) ainda afirma que o problema aqui exposto pode ter várias origens, tais como: a baixa qualidade oferecida no ensino básico, as deficiências relacionadas à formação docente, a escolha equivocada de metodologias, a falta da relação conteúdo-aplicação, os problemas relativos aos livros didáticos produzidos, entre outras.

Segundo Chevallard (1991), em sala de aula, é o professor que serve de mediador para possibilitar que o aluno faça a construção do seu conhecimento matemático; no entanto, para que haja tal mediação, o docente baseia sua prática diária no *texto do saber*, ou seja, o professor fundamenta parte das suas ações nas informações existentes nos livros didáticos.

Desse modo, apoiando-se em Rafael (2017) e Chevallard (1991), escolheu-se fazer uma pesquisa baseada em uma análise de livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral.

Segundo Stewart (2013), o Cálculo é uma matemática que se diferencia de várias maneiras da matemática elementar. O autor afirma que esse ramo do saber matemático é menos estático e mais dinâmico, pois trata de variação e de movimento, principalmente quando discute acerca de quantidades que tendem a outras quantidades. Stewart (2013) diz que é útil iniciar o estudo do CDI através de uma visão global acerca do mesmo, destacando (ainda) como o conceito de limite surge naturalmente ao se tentar resolver os problemas que se apresentam.

Stewart (2013) afirma (também) que a ideia de limite é a base dos vários ramos do Cálculo Diferencial e Integral. Para esse autor, a importância do conceito de limite é tal, que (para ele), deve-se sempre iniciar o estudo do CDI examinando cuidadosamente os limites e as suas propriedades.

Dessa forma, pela importância inerente ao objeto matemático limites, destacada por Stewart (2013), decidiu-se analisar as maneiras de *viver* desse conteúdo em livros didáticos de Cálculo.

Para Santos (2013), a Teoria Antropológica do Didático (TAD) é munida dos instrumentos suficientes para analisar o conteúdo limites de funções como sendo um objeto matemático em si; sendo tal análise feita a partir da identificação e caracterização das organizações matemáticas e didáticas que se constituem em torno dos problemas relacionados ao estudo dos limites.

Um livro didático não é algo desenvolvido no *vazio*, pois se trata de uma construção que carrega as concepções adotadas pelo autor (no tempo e no espaço) em relação aos saberes ali contidos (BARBOSA, 2017). Pode-se afirmar então, que autores diferentes geram livros didáticos distintos.

Chevallard (1999) afirma que a formação dos saberes/conhecimentos, assim como as organizações praxeológicas, envelhecem, e que durante tal processo de envelhecimento, os elementos que as constituem podem perder seus créditos. Assim sendo, em uma determinada instituição, podem desaparecer praxeologias ou aparecer novas praxeologias, que serão produzidas e reproduzidas, caso passem a existir.

Durante uma conversa particular (em meados de 2018) entre Marianna Bosch Casabó (que é uma pesquisadora da TAD de destaque), Edelweis Jose Tavares Barbosa (orientador desta pesquisa) e Leonardo Augusto de Lemos Batista (autor deste estudo) – que ocorreu na UFPE no município de Caruaru-PE – surgiu a ideia de analisar um livro de Cálculo antigo e outro atual, para poder entender como *vivia* e como *vive* o objeto matemático limites de funções em livros didáticos.

Desse modo, foram escolhidas e analisadas as duas seguintes obras aprovadas e adotadas como bibliografia básica por várias universidades brasileiras renomadas: O Cálculo com Geometria Analítica de Leithold (1977) e Cálculo de James Stewart (2017).

Então, baseando-se em Santos (2013), Barbosa (2017), Chevallard (1999), e também, nas sugestões enviadas pela banca examinadora durante a qualificação do projeto de pesquisa que deu origem a este estudo, definiu-se que a investigação realizada consiste em uma pesquisa qualitativa de cunho documental, que teve por objetivo analisar como autores de livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral propõem situações visando a transformação de um estado de *não-saber* para um estado de *saber* no que se refere ao estudo do objeto matemático limites de funções reais de uma variável à luz da Teoria Antropológica do Didático.

A Teoria Antropológica do Didático estuda o homem perante às situações matemáticas. Nessa teoria, os objetos matemáticos emergem de sistemas de práticas existentes em dadas *instituições*. Os elementos primitivos de tal abordagem teórica são as *pessoas*, as *instituições* e os *objetos*, pondo ainda em evidência, as suas *relações*. Para Chevallard (1999), os saberes matemáticos são fruto da ação humana institucional. Essa teoria permite a realização de investigações a partir dos conceitos de Organizações Matemáticas (OM) e de Organizações Didáticas (OD), de que surgem as noções de *tarefas*, *técnicas*, *tecnologias*, *teorias*, e também, os chamados *momentos didáticos*.

A partir das considerações relatadas acima, foram propostas as seguintes questões (mais gerais) para nortear a pesquisa realizada: *Como vivia e como vive o objeto matemático limites de funções de uma variável nos livros didáticos selecionados? Quais eram e quais são (e como* *se caracterizam) as organizações matemáticas e didáticas relativas aos limites que aparecem nas obras escolhidas? Qual era e qual é a razão de ser do conteúdo limites de funções nos referidos livros texto?*

Partindo-se (também) das mesmas considerações anteriores, foram propostas as seguintes questões (mais específicas): *As tarefas são bem identificadas? Houve a construção clara das técnicas apresentadas para resolver as tarefas? As técnicas apresentadas são suficientes para as tarefas existentes? Existe a possibilidade de desenvolvimento de novas técnicas ou mesmo de adaptações acerca das mesmas? As tecnologias existentes são suficientes para justificar e esclarecer as técnicas usadas? As teorias são explicitadas e capazes de justificar as tecnologias?*

Esta dissertação está dividida em cinco capítulos.

No primeiro capítulo, que tem por título *Introdução*, foram apresentadas: as motivações que levaram à pesquisa, a importância de se estudar os saberes matemáticos relativos ao Cálculo, as principais dificuldades enfrentadas nos processos de ensino e aprendizagem do CDI, a relevância de estudos acerca de livros didáticos, os motivos existentes para se estudar o objeto matemático limites de funções, o delineamento da pesquisa e os elementos teóricos básicos acerca da TAD.

No segundo capítulo, que é intitulado por *Revisão de Literatura*, são apresentados: os principais estudos que forneceram apoio à esta pesquisa, algumas reflexões acerca dos elementos desses estudos que foram tomados para dar base ao presente trabalho e o desenho geral da pesquisa que foi desenvolvida.

No terceiro capítulo, que tem por título *Sobre a Teoria Antropológica do Didático*, são apresentados: os principais elementos teóricos acerca da Transposição Didática (TD) e da Teoria Antropológica do Didático, que serviram como aporte teórico deste estudo.

No quarto capítulo, intitulado por *Aspectos Metodológicos da Pesquisa e Construção de um Modelo de Referência*, são apresentados: os critérios que foram utilizados na escolha dos dois livros didáticos analisados, os principais aspectos históricos e epistemológicos sobre o desenvolvimento do conceito de limite, alguns elementos matemáticos fundamentais acerca dos limites de funções e o modelo de referência que foi proposto para servir de base para as análises realizadas.

No quinto capítulo, que tem por título *Análise Praxeológica de Limite de Função de uma Variável Real*, são apresentadas: a descrição, organização e distribuição dos conteúdos de ambos os livros estudados; a análise praxeológica acerca das situações propostas pelos dois autores (referentes à determinação de limites); a síntese avaliativa de cada um dos livros investigados; e a síntese conclusiva que comparou os principais aspectos das duas obras.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Serão descritas agora, algumas pesquisas que envolvem limites de funções, dificuldades em relação ao Cálculo Diferencial e Integral, Teoria Antropológica do Didático, construção de modelos de referência para analisar praxeologias matemáticas, e também, livros didáticos; de maneira que tais assuntos estejam relacionados com a pesquisa aqui desenvolvida.

Foram encontradas algumas pesquisas existentes nessa área, como as de Santos (2013), Rafael (2017), Barbosa (2011, 2017) e Araújo (2009). Essas escolhas se devem ao fato de tais pesquisas estarem, de várias maneiras, relacionadas ao tema desta investigação. Os estudos trazidos aqui, são voltados à prática pedagógica do professor, tendo contribuições dentro do campo da educação matemática, trabalhando com situações de sala de aula e o texto do saber (livro didático), conforme o que se segue:

2.1 SANTOS (2013)

Em sua tese de doutorado em educação matemática pela PUC-SP, Santos (2013) realizou um trabalho de pesquisa que tinha como objetivo trazer reflexões novas acerca do objeto matemático limite de uma função. Essa autora fez questionamentos acerca da origem por trás da dificuldade de aprendizagem de limites, levantou dados acerca de como vive tal conteúdo do saber matemático em livros didáticos e buscou compreender como são propostas as tarefas no tocante a tal assunto. Santos (2013) buscou descobrir em que tipos de fontes dos professores se baseiam para ensinar limites e investigou os aspectos motivacionais por parte deles. Procurou entender, quais são as definições que os professores costumam usar. Essa autora buscou ainda entender, como os professores veem as dificuldades de aprendizagem dos seus alunos e procurou compreender o que sentem os alunos em relação ao conteúdo limites.

Para tal, Santos (2013) se apoiou em quatro pilares, a saber: (1) realização de uma boa revisão de literatura para embasar a pesquisa; (2) busca por elementos histórico-epistemológicos acerca da construção do conceito de limite; (3) estudo do objeto matemático limites de funções tomando como base a Teoria Antropológica do Didático (para analisar as tarefas, técnicas, tecnologias e teorias), a Teoria dos Registros Semióticos (para análise dos registros das tarefas) e a teoria de Bakhtin (para análise dos discursos dos livros textos de Cálculo Diferencial e Integral); e (4) compreensão da percepção do professor universitário e do aluno acerca do conteúdo limites.

Para a realização desse trabalho, Santos (2013) fundamentou os aspectos quantitativos e qualitativos de sua análise, coletando dados por meio de questionários, atividade livre e entrevistas. A autora construiu os instrumentos de coletas de dados, e a análise dos mesmos, baseando-se na teoria de Bakhtin e na psicologia cognitiva.

No desenvolvimento do seu trabalho é notável o esforço para tentar construir um outro olhar acerca do conceito de limite. Olhar esse, segundo Santos (2013), que não privilegiasse aspectos isolados, mas que fosse capaz de fornecer elementos para entender o porquê de tal conteúdo do saber matemático ser tão desafiador e intrigante. Os resultados atingidos por Santos (2013) se dividem em três partes, a saber: (1) confirmou alguns resultados de pesquisas anteriores; (2) trouxe alguns novos elementos relacionados ao conceito de limite; e (3) gerou novos questionamentos. A autora destaca que um dos mais notáveis questionamentos que sua pesquisa gerou foi a respeito da definição formal de limite.

2.2 RAFAEL (2017)

Em sua dissertação em educação matemática pela UFJF-MG, Rafael (2017) realizou investigações acerca das intervenções metodológicas que são realizadas pelas universidades públicas e privadas em relação as estratégias para diminuir o percentual de reprovação na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1. A autora conseguiu elencar os principais fatores que foram apresentados por professores, alunos e pesquisadores que influenciam no baixo rendimento na disciplina.

Essa autora relacionou depois, as intervenções metodológicas aplicadas para redução dos índices de reprovação em Cálculo com os problemas desencadeados na vida acadêmica dos alunos. Para tal, Rafael (2017) realizou levantamentos de dados, através de pesquisa qualitativa, nas secretarias universitárias, e também, através da aplicação de questionários para professores e alunos (que estavam envolvidos de forma direta com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1).

A autora constatou que nas universidades privadas pesquisadas, os índices de reprovação eram menores, quando comparados com os índices de mesma natureza nas universidades públicas que fizeram parte do estudo. Rafael (2017) constatou que o volume de intervenções metodológicas para redução desses índices era maior nas universidades privadas, fato esse que pode ter contribuído para redução desses índices.

2.3 BARBOSA (2017)

Em sua pesquisa de doutorado em educação matemática pela UFRPE, Barbosa (2017) realizou um trabalho de pesquisa que consistiu em analisar (comparativamente) as praxeologias em documentos oficiais, no livro didático e do professor em relação ao ensino de equações polinomiais do primeiro grau (buscando estudar as relações de conformidade entre tais elementos). O referencial teórico que serviu de apoio para esse trabalho foi a Teoria Antropológica do Didático (TAD), que foi proposta por Yves Chevallard. Esse autor construiu a pesquisa se baseando numa metodologia qualitativa de cunho etnográfico. Barbosa (2017) analisou as organizações matemáticas e didáticas de três professores, comparando com as praxeologias identificadas no livro de referência dos mesmos, e também, com o modelo dominante.

Barbosa (2017) constatou que existe conformidade entre as praxeologias a serem ensinadas (que são propostas pelos autores dos livros didáticos) e as praxeologias efetivamente ensinadas na sala de aula. O autor ainda observou que as relações pessoais e institucionais relativas ao objeto matemático equações do primeiro grau dos professores, constituíram-se a partir dos seus equipamentos praxeológicos ($EP(X)$). Ainda foi constatado, que os próprios professores foram os organizadores das tarefas, técnicas e tecnologias de complexidade crescente, que se tornaram rotineiras e problematizadas no dia a dia da sala de aula. A tarefa T_1 foi o ponto de intersecção entre os três professores, mesmo que os professores 2 e 3 tenham trabalhado com mais outras tarefas.

O autor identificou procedimentos de resolução de equações do primeiro grau no modelo dominante entre os três livros didáticos estudados, que não podem ser efetuados em raciocínios puramente aritméticos. Barbosa (2017) constatou ainda, que o modelo dominante dos professores que foram analisados são as equações que podem ser resolvidas através de procedimentos aritméticos. Foi também observado, que havia apenas um professor em que houve coincidência entre o modelo dominante do livro de referência e o modelo dominante efetivamente ensinado em sala de aula.

No tocante às entrevistas, o autor constatou que os professores justificaram não trabalharem com o livro *Matemática* em virtude do que eles classificaram como sendo “nível dos estudantes”. A professora 2 disse que usa o livro *Matemática*, e explicou dizendo que a cada capítulo, o referido livro faz uma revisão do que foi visto até àquele ponto, e disse também, que isso era algo bom. Enquanto que os outros dois professores que não trabalham com o referido livro deram explicações distintas: um deles afirmou que o livro é muito resumido, já o outro disse que o livro era mais adequado para fazer trabalho de casa.

Barbosa (2017) também verificou que a ferramenta que os professores analisados assumem para construir planejamentos para suas aulas é o livro didático. O autor ainda constatou que tanto segundo os professores, como no livro didático, quanto nos documentos oficiais, equações do primeiro grau tem sua razão pautada na resolução de problemas.

2.4 ARAÚJO (2009)

Em sua pesquisa de doutorado em educação pela UFPE, Araújo (2009) buscou caracterizar, e depois comparar, as transposições didáticas realizadas na França e no Brasil acerca do ensino de equações do primeiro grau com uma incógnita. Desse modo, esse autor se pautou no referencial teórico baseado na Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1991), que destaca a importância do papel das instituições na relação com os objetos do saber, e também, na TAD (CHEVALLARD, 1999) que, trata-se de um método de análise para as organizações matemáticas existentes em uma determinada instituição.

A pesquisa de Araújo (2009) permitiu a construção de um modelo de referência acerca das praxeologias matemáticas pontuais referentes à resolução de equações do primeiro grau que forneceu os critérios e as categorias utilizadas para analisar programas de ensino, livros didáticos e estudos experimentais tocados com alunos nos dois países.

2.5 BARBOSA (2011)

Em sua dissertação de mestrado em educação matemática pela UEPB, Barbosa (2011) buscou analisar as possíveis mudanças sobre a introdução do conceito de equação do primeiro grau em duas coleções de livros aprovadas nas avaliações periódicas do PNLD (Programa Nacional do Livro Didático). Para tal, esse autor se apoiou na Teoria Antropológica do Didático.

Segundo Barbosa (2011), a referida teoria considera que os objetos matemáticos não são existentes em si mesmos, porém, são entidades que emergem de sistemas de práticas realizadas em instituições. Em sua pesquisa, Barbosa (2011) investigou as praxeologias matemáticas e didáticas acerca do objeto matemático equações do 1º grau, concentrando-se nos livros didáticos de duas coleções (ao longo do tempo).

2.6 ALGUMAS OBSERVAÇÕES SOBRE AS PESQUISAS REALIZADAS

Das pesquisas que foram contempladas na revisão de literatura, ora apresentada, observa-se que Santos (2013) investigou o objeto matemático limites de funções no contexto da sala de aula, levando em consideração o professor, o aluno, o livro didático e a linguagem. Quanto ao que se concebe acerca de limite, a autora identificou e classificou várias praxeologias matemáticas adotadas em livros didáticos. Rafael (2017), por sua vez, investigou as intervenções metodológicas realizadas pelas universidades públicas e privadas para reduzir os índices de reprovação na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1. Os levantamentos feitos por essa autora expuseram números preocupantes. Barbosa (2017), por sua vez, investigou as relações de conformidade entre o professor, o livro didático e os documentos oficiais acerca da resolução de equações do primeiro grau, baseando-se na Teoria Antropológica do Didático, sob a ótica das organizações matemáticas e didáticas.

Araújo (2009) caracterizou e comparou as transposições didáticas realizadas na França e no Brasil acerca do ensino de equações do primeiro grau com uma incógnita, realizando a construção de um modelo de referência que foi utilizado na pesquisa, tomando como aporte teórico a Teoria Antropológica do Didático. Barbosa (2011) realizou um estudo baseado na Teoria Antropológica do Didático que buscou investigar as mudanças ocorridas nas praxeologias matemáticas e didáticas pontuais constituídas em torno dos subtipos de tarefas relacionadas à resolução de equações do primeiro grau em livros didáticos ao longo do tempo.

Enfim, percebe-se que as exposições das pesquisas acima legitimam e justificam as análises e discussões dos dados deste trabalho investigativo, em especial: as praxeologias matemáticas acerca de limites de funções; a necessidade da realização de estudos que venham lançar um pouco de luz sobre os problemas relacionados ao ensino e aprendizagem do Cálculo, mais particularmente, do conteúdo limites; o referencial teórico da Teoria Antropológica do Didático; os métodos para construção de um modelo de referência para análise de organizações matemáticas; e as formas, baseadas na TAD, de análise de livros didáticos.

2.7 A PESQUISA DESENVOLVIDA

Esta pesquisa teve por objetivo estudar como autores de livros didáticos de Cálculo propõem situações visando a transformação de um estado de *não-saber* para um estado de *saber* em relação ao objeto matemático limites de funções de uma variável real, dessa maneira, selecionou-se duas obras aprovadas e indicadas por universidades brasileiras renomadas, a saber: O Cálculo com Geometria Analítica de Louis Leithold (1977) e Cálculo de James Stewart (2017). Obras, estas, que foram submetidas à análise.

Para a formação do referencial teórico, a partir da revisão de literatura, decidiu-se (por causa das adequações teóricas e técnicas), basear-se na Teoria Antropológica do Didático para analisar as praxeologias matemáticas e didáticas acerca da determinação de limites, que foram identificadas nos livros escolhidos.

As leituras e estudos efetuados na revisão de literatura conduziram aos seguintes questionamentos: *Como vivia e como vive o objeto matemático limites de funções de uma variável nos livros didáticos selecionados? Quais eram e quais são (e como se caracterizam) as organizações matemáticas e didáticas relativas aos limites que aparecem nas obras escolhidas? Qual era e qual é a razão de ser do conteúdo limites de funções nos referidos livros texto?*

A seguir, é apresentada e discutida a Teoria Antropológica do Didático, a qual, tornou-se o aporte teórico deste estudo.

3 SOBRE A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Neste capítulo, são trabalhadas algumas reflexões teóricas acerca da Transposição Didática e da Teoria Antropológica do Didático – propostas por Chevallard (1991, 1999) – no contexto dos estudos e investigações relacionadas à estrutura da didática da matemática que busca efetuar análises sobre fenômenos didáticos. Chevallard (1999) destaca na sua abordagem antropológica, a importância fundamental do papel das instituições no que se refere ao sistema didático.

3.1 TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA (TD)

> Embora tenhamos percebido o termo transposição didática mais recentemente, pelo trabalho de Philipe Perrenoud (1993, p. 25), que o define como a essência do ensinar, ou seja, *a ação de fabricar artesanalmente os saberes, tornando-os ensináveis, exercitáveis e passíveis de avaliação no quadro de uma turma, de um ano, de um horário, de um sistema de comunicação e trabalho*, é sabido que o termo foi introduzido pelo sociólogo Michel Verret, em 1975, e depois encorpado por Yves Chevallard, pensador e educador francês (ALMEIDA, 2007, p. 9).

Chevallard (1991) afirmou que um determinado conteúdo ou assunto do conhecimento, depois de ser classificado como *saber a ensinar*, necessita passar por processos de transformações e adaptações para se tornar em um *objeto de ensino*; e completa destacando que o trabalho de transformar um *objeto do saber a ensinar* em um *objeto de ensino* é chamado de transposição didática.

Assim sendo, pode-se compreender que existe a necessidade clara de se efetuar a transposição didática dos saberes para que os mesmos possam ser apreendidos por alunos; transpondo-se os saberes validados pela comunidade científica através de uma série de elementos relacionados ao sistema de ensino, tais como: livros didáticos, discursos de professores, exercícios, avaliações, etc.

Segundo Araújo (2009), a TD – seguindo a interpretação de Chevallard – é baseada nos conceitos e nas definições, devidamente contextualizadas, de *instituições*, *pessoas* e *objetos do saber*, e também, nas noções de *relações pessoais* e *institucionais* com o *objeto de estudo*. A transposição didática busca compreender – através do estudo da trajetória dos saberes – a distância e as relações que se estabelecem entre o *saber efetivamente ensinado* e o *saber científico*, permitindo ainda a efetuação de uma *vigilância epistemológica* sobre os mesmos.

> Em seu livro, *La transposition Didactique du savoir savant au savoir enseigné* (Editions La Pensée Sauvage, 1998), Yves Chevallard amplia o conceito e diz que a

> transposição didática é composta por três partes distintas e interligadas: o *savoir savant* (saber do sábio) (...) *savoir a enseigner* (saber a ensinar) (...) *savoir ensigné* (saber ensinado) (...) (ALMEIDA, 2007, p. 9-10).

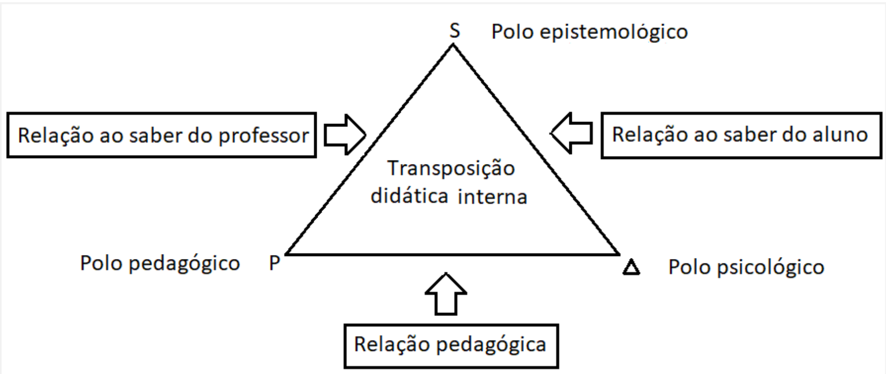
Savoir savant: Trata-se dos saberes desenvolvidos e sistematizados pela comunidade científica, estando estes relacionados com as descobertas, construções, produção e revisão de artigos acadêmicos, e posterior publicação destes saberes científicos validados.

Savoir a enseigner: São os saberes transpostos e eleitos como *saber a ensinar,* sendo tal transposição realizada por professores, especialistas, pesquisadores, técnicos, entre outros, que estão ligados às universidades, redes de ensino, órgãos do governo, etc., e que juntos formam o que Chevallard (1991) designa como sendo a *noosfera* (esfera pensante invisível responsável pela efetuação da transposição didática).

> O trabalho que a noosfera realiza [e que inclui a vigilância epistemológica] para elaborar o novo texto do saber se consagra como uma estratégia de ataque às dificuldades de aprendizagem, (...) definem-se os princípios que o aluno deve respeitar e delimitam-se então, em um determinado momento, os erros que o professor poderá identificar e para os quais (...) disporá de técnicas de ataque direto (...) (CHEVALLARD, 1991, p. 40-41).

Savoir enseigné: Trata-se dos *saberes efetivamente ensinados* dentro da sala de aula (transposição didática interna), podendo esta transposição ser entendida através da relação triangular descrita a seguir (Quadro 1).

Quadro 1 - Esquema da transposição didática interna dos saberes



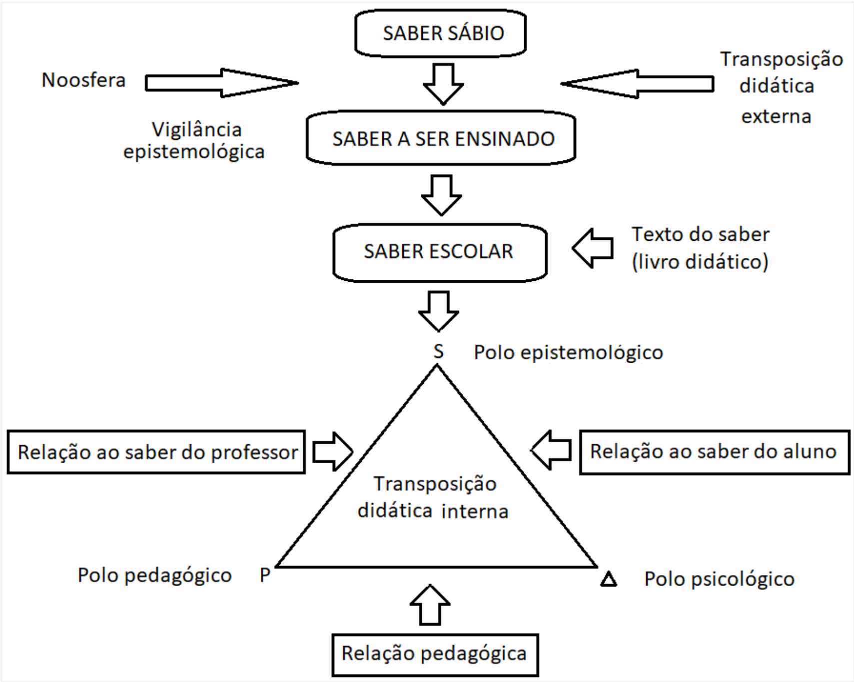
Fonte: Adaptado de Brito Menezes (2006, p. 26)

> A abordagem antropológica proposta por Chevallard (1999) ressalta o papel das instituições no sistema didático. Esse pesquisador entende o sistema didático como as relações (...) [entre] *sujeito*, *instituição* e o *saber* quanto ao sistema didático proposto por Brousseau (professor, aluno e saber) (BARBOSA, 2017, p. 34).

Na perspectiva trazida por Henry (1991), ainda existe uma outra etapa da transposição didática designada pelo referido autor como sendo *savoir scolaire* (saber escolar), sendo tal etapa intermediária entre o saber a ensinar e o saber ensinado, podendo, ainda, ser cristalizada no *texto do saber* (ou seja, nos livros didáticos).

Desse modo, a representação a seguir (Quadro 2) mostra a trajetória da transposição dos saberes, partindo do saber científico e indo até o saber efetivamente ensinado.

Quadro 2 - Esquema da transposição didática dos saberes



Fonte: Adaptado Brito Menezes (2006, p. 26)

Chevallard (1991) introduziu o conceito de *vigilância epistemológica*, que tem por objetivo evitar crises que possam ser causadas pelo afastamento exagerado entre os saberes transpostos; ou seja, tal vigilância busca evitar que o saber efetivamente ensinado se torne demasiadamente diferente do saber científico, pois isto pode gerar obstáculos para a aprendizagem. A noosfera é a instituição responsável pela efetuação desta chamada vigilância epistemológica.

Segundo Brousseau (1986), a transposição didática pode apagar o contexto histórico-cultural do desenvolvimento dos saberes, ou seja, a transposição desregulada põe de lado todas as motivações, os problemas geradores, as dificuldades encontradas, entre outros; criando situações fictícias com o intuito de tornar o ensino mais simplificado, o que termina por isolar os saberes dos seus respectivos contextos. Brousseau completa afirmando que a transposição didática é necessária e inevitável, porém, deve ser mantida sob vigilância.

3.2 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (TAD)

Segundo Barbosa (2017), a TAD foi desenvolvida por Chevallard como sendo uma ampliação natural da sua própria abordagem acerca da transposição didática. Nesta teoria, os *objetos matemáticos* não são existentes em si mesmos, mas são elementos que emergem de sistemas de práticas adotadas dentro de *instituições*.

Chevallard (1999) construiu uma teoria que estuda o homem diante dos saberes matemáticos, colocando a atividade e o estudo da matemática dentro do conjunto das ações humanas desenvolvidas nas *instituições* sociais; portanto, fica dada uma razão contumaz para o uso do termo *antropológica* no título da TAD.

São considerados entes primitivos nesta abordagem teórica, os seguintes conceitos:

- *Instituição* (I) – É um dispositivo social total que impõe aos seus *sujeitos* (*indivíduos* e *pessoas*) formas próprias de fazer e de pensar, podendo ser ainda uma realidade constituída, tal como: família, escola, sala de aula, tempo de vida, etc.
- *Pessoa* (X) – É o indivíduo que desde cedo é submetido às ações institucionais que o fazem ser uma pessoa (através das relações estabelecidas).

> O conceito de pessoa, outro conceito da TAD, é definido como o par formado por um indivíduo X e pelo sistema de suas relações pessoais com os objetos O designadas por $R(X,O)$, em determinados momentos da história de X (BARBOSA, 2017, p. 63).

- *Objeto* (O) – É qualquer entidade (material ou imaterial) que é reconhecida por um ou mais indivíduos. Para Chevallard (1999), tudo é considerado objeto, incluindo as pessoas.

São noções fundamentais na TAD, as seguintes relações:

- *Relação institucional* $RI(O)$ – Sendo o tipo de relação estabelecida entre determinada instituição e um objeto considerado.
- *Relação pessoal* $R(X,O)$ – Como sendo o tipo de relação definida entre certa pessoa e um objeto considerado.

> Cada saber S é vinculado a pelo menos uma instituição, na qual é posto em jogo em relação a um domínio de realidade D. O ponto essencial é considerar que um saber

> não existe na vacuidade social: cada saber aparece em uma determinada sociedade como ancorado em uma ou várias instituições (CHEVALLARD, 1991, p. 1).

Nesta teoria, existem quatro tipos de instituições, a saber: as de *produção* (academias), de *utilização*, de *ensino* (escolas) e as *transpositivas* (noosfera).

> A expressão *transposição didática*, justifica-se quando uma instituição-alvo é uma instituição de ensino (...) o saber científico é transformado pela noosfera no saber e no saber ensinado, o qual é veiculado na sala de aula. Deste modo, os livros didáticos são instrumentos que [norteiam] a elaboração do saber ensinado (BARBOSA, 2011, p. 63).

Na TAD, entende-se que um objeto do saber O deve ser reconhecido por pelo menos uma instituição I. Dessa maneira, O pode ficar estruturado em mais de uma instituição; porém, para *viver* em I, O é submetido a certas condições (o que implica em transformação para conformidade). O processo de transposição também possibilita que um determinado objeto do saber possa passar de uma instituição para outra.

Nesta abordagem teórica, o conhecimento é caracterizado através da noção de relação. Determinado objeto é considerado existente, se existir uma relação com o mesmo, ou seja, se uma pessoa ou uma instituição o reconhece como tal. São as práticas efetuadas com o objeto que definem a relação institucional $RI(O)$.

> Dados um objeto (...) e uma instituição, a noção de relação diz respeito às práticas sociais que se realizam na instituição e que põe em jogo o objeto em questão, ou seja, *o que se faz na instituição com este objeto* (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 80).

Quando uma pessoa X entra numa instituição de aprendizagem I, na qual existe um objeto do saber O, então, estabelece-se ou modifica-se $R(X, O)$, em conformidade com as práticas usuais da instituição considerada em relação aquele determinado objeto, ou seja, com $RI(O)$. Assim sendo, aprender na TAD é um ato entendido através das modificações que ocorrem em $R(X, O)$ mediante $RI(O)$; portanto, pode-se afirmar que a aprendizagem de uma pessoa está ligada à compreensão das aprendizagens institucionais, segundo a teoria aqui apresentada.

> No momento em que o exame da relação pessoal do indivíduo X com um objeto O conduz a um veredicto de não conformidade, X pode experimentar o sentimento desagradável de ser vítima de uma arbitrariedade institucional (...): porque $R(X, O)$ foi encontrada não conforme, ou pouco conforme, [em consideração a] (...) $RI(O)$, decide-se [então] em I, que X não conhece ou conhece mal o objeto. (CHEVALLARD, 1992 apud BARBOSA, 2011, p. 64).

Segundo Chevallard (1998), a TAD foi desenvolvida, *a priori*, como sendo uma teoria que tem por objetivo conter e gerenciar a difusão do conhecimento, especialmente em relação aos saberes matemáticos.

Para a teoria aqui apresentada, os saberes da matemática são produto da ação humana institucional, e por tal motivo, a TAD possui um instrumental metodológico próprio que permite descrever e investigar os fatores relacionados às práticas institucionais.

3.3 A ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA OU PRAXEOLOGIA

Na TAD, *organização praxeológica* ou *praxeologia* pode ser entendida como sendo a realização de certo subtipo de tarefa t (expressa por um verbo e pertencente a um conjunto de tarefas do mesmo tipo) através de uma técnica τ. A relação tarefa-técnica $[t-\tau]$ define um saber-fazer próprio para a tarefa considerada, sendo por sua vez, justificada através de uma tecnologia θ que é apoiada numa teoria Θ, e que constitui o bloco denominado de tecnológico-teórico $[\theta - \Theta]$. Segundo Chevallard (1998), a teoria antropológica que lhe é atribuída, postula que as ações humanas, em especial as atividades matemáticas, colocam em execução uma *organização praxeológica* ou *praxeologia* que pode ser representada por $[t, \tau, \theta, \Theta]$.

Na TAD, o bloco $[t, \tau]$ é ligado à prática, sendo entendido como um saber-fazer; já o bloco $[\theta, \Theta]$ está ligado à razão, podendo ser interpretado como o saber.

> (...) a ecologia das tarefas e técnicas são as condições e necessidades que permitem a produção e utilização destas nas instituições, e a gente supõe que, para poder existir em uma instituição, uma técnica deve ser compreensível, legível e justificada (...) essa necessidade ecológica implica na existência de um discurso descritivo e justificado das tarefas e técnicas que a gente chama de tecnologia da técnica (...) toda tecnologia tem necessidade de uma justificativa que a gente chama de teoria da técnica e que constitui o fundamento último. (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 85-86).

Para Chevallard (1998), a existência de uma tarefa t tem por condição mínima, a ocorrência de ao menos uma técnica de estudo τ para a mesma e de uma tecnologia explicativa θ relativa à τ, mesmo que não seja explicitada uma teoria Θ que a justifique no contexto analisado.

As *tarefas* (t), na abordagem teórica aqui apresentada, são objetos bem definidos, conforme pode ser observado na explicação seguinte:

> As tarefas são identificadas por um verbo de ação, que sozinho caracterizaria um gênero de tarefa, por exemplo: calcular, decompor, resolver, somar, que definem o

> conteúdo em estudo. Por outro lado, resolver uma equação fracionária ou ainda decompor uma fração racional em elementos mais simples caracterizam (...) [subtipos] de tarefas, em que se encontram determinadas tarefas [de um mesmo tipo], por exemplo, resolver uma equação $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5$ (...). (SILVA, 2005 apud ALMOULOUD, 2007, p. 115).

Portanto, seria uma tarefa o seguinte exemplo: calcular o valor de $\lim_{x\to 0}\frac{x^3+2x^2-x-10}{3x+2}$, pois está bem definido aquilo que se pede; entretanto, o verbo *calcular* sozinho não constitui uma tarefa, mas apenas um gênero de tarefa.

Técnica (τ) é uma forma de realizar determinado subtipo de tarefa $t \in \tau$. Uma organização praxeológica relacionada a uma tarefa t exige, *a priori*, uma técnica τ relacionada à t. Porém, segundo a TAD, pode ocorrer de uma técnica τ não ser suficiente para dar conta de todos os subtipos de tarefas $t \in \tau$; isso acontece quando τ funcionar para uma parte $p(\tau)$ das tarefas t, mas não funcionar para as demais $t/p(\tau)$. Assim sendo, pode-se perceber que numa praxeologia pode existir uma ou mais técnicas superiores às demais.

Tecnologia (θ) pode ser compreendida como sendo um discurso racional acerca de uma técnica τ. Desse modo, o propósito inicial de uma tecnologia θ é justificar a técnica τ relacionada a uma tarefa t; em outras palavras, a tecnologia é o que garante que a técnica cumpra bem o seu papel em relação a uma determinada tarefa. Outro propósito relacionado a uma tecnologia θ pode ser entendido através dos objetivos de explicar, de tornar inteligível e de esclarecer determinada técnica τ; podendo ainda θ servir de base para a produção de técnicas renovadas ou mesmo de novas técnicas.

Uma *teoria* (Θ) tem como propósito justificar e esclarecer uma tecnologia θ, buscando tornar inteligível o discurso tecnológico. Portanto, a teoria é caracterizada por um nível mais avançado de justificação-explicação-produção. Chevallard (1998) chama atenção para o fato de que, normalmente, a justificação e o esclarecimento oferecidos por uma teoria Θ, apresentam-se obscurecidos pela maneira abstrata como os enunciados são colocados frequentemente.

Na teoria aqui apresentada, as organizações praxeológicas se dividem em quatro categorias, a saber: *praxeologia pontual*, *praxeologia local*, *praxeologia regional* e *praxeologia global*.

> *Praxeologia pontual* $[t,\tau,\theta,\Theta]$, [ocorre] quando é (...) [centrada] em torno de um determinado (único) (...) [subtipo] de tarefa t; *praxeologia local* $[t_i,\tau_i,\theta,\Theta]$, quando é associada a uma determinada tecnologia θ; *praxeologia regional* $\left[t_{ij},\tau_{ij},\theta_j,\Theta\right]$, quando é desenvolvida em torno de uma única teoria Θ; *praxeologia global* $\left[t_{ijk},\tau_{ijk},\theta_{jk},\Theta_k\right]$, quando resulta da agregação de várias organizações regionais correspondentes a várias teorias Θ_k. (BARBOSA, 2011, p. 67).

A mudança de uma praxeologia pontual $[t, \tau, \theta, \Theta]$ para uma local $[t_i, \tau_i, \theta, \Theta]$ coloca em evidência a tecnologia θ; e do mesmo modo, a mudança de uma praxeologia local para uma regional $[t_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$ põe em primeiro plano a teoria Θ.

3.3.1 Praxeologia Matemática ou Organização Matemática (OM)

As praxeologias relativas aos saberes matemáticos são de dois tipos, a saber: *matemáticas* e *didáticas*. As OM ou *praxeologias matemáticas* são relacionadas à realidade matemática que se pode constituir para desenvolver em sala de aula; já as OD ou *praxeologias didáticas* fazem referência à forma de como se executa tal construção (CHEVALLARD, 1999 apud ALMOULOUD, 2007); desse modo, surge uma relação que se estabelece entre as OM e as OD, que é chamada por Chevallard (2001) de *fenômeno de codeterminação*.

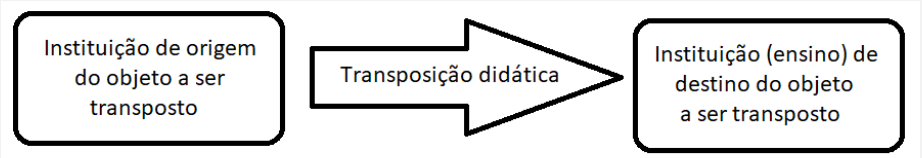
> Tal organização não é senão uma organização praxeológica de natureza matemática: ela se constitui em torno de um ou vários tipos de tarefas matemáticas, mais ou menos bem identificadas, que demandam a criação de técnicas matemáticas mais ou menos adaptadas, e mais ou menos justificadas por tecnologias mais ou menos sólidas, que são desenvolvidas no quadro de uma teoria mais ou menos explícita. (CHEVALLARD, 1998, p. 35).

Uma praxeologia matemática é construída no contexto das noções e dos conceitos relativos ao próprio corpo dos saberes matemáticos.

> (...) o objetivo de um processo de ensino [e] aprendizagem pode se formular nas perspectivas dos componentes das organizações matemáticas que se desejam reconstruir: que tipos de problemas devem ser capazes de resolver, com quais tipos de técnicas, com base em quais elementos descritivos e justificativos, com qual referencial teórico, etc. (BOSCH, 2000, p. 3 apud NOGUEIRA, 2008, p. 43).

Nos processos relacionados ao desenvolvimento dos saberes matemáticos, as organizações praxeológicas se desgastam, pois, seus elementos teóricos e tecnológicos perdem credibilidade ao longo do tempo. Contudo, numa dada instituição *I* aparecem novas praxeologias que podem ser produzidas, reproduzidas e/ou transpostas para outras instituições, conforme a descrição a seguir (Quadro 3):

Quadro 3 - Transposição de saberes entre instituições



Fonte: Adaptado de Almouloud (2007, p. 123)

Segundo Chevallard (1998), a atividade inicial de um pesquisador ou professor é delinear e descrever as praxeologias matemáticas a serem estudadas, e tal trabalho introdutório é feito se baseando em livros didáticos, programas e demais documentos oficiais. A abordagem da Teoria Antropológica do Didático permite a definição e a análise acurada dos conteúdos matemáticos, identificando as tarefas e analisando o nível de construção relacionado aos demais elementos praxeológicos, ou seja, as técnicas, as tecnologias e as teorias. Sendo assim, faz-se necessário ao pesquisador ou professor, buscar respostas para perguntas, tais como:

- As tarefas são bem identificadas?
- Houve a construção clara das técnicas apresentadas para resolver as tarefas? As técnicas apresentadas são suficientes para as tarefas existentes? Existe a possibilidade de desenvolvimento de novas técnicas ou mesmo de adaptações acerca das mesmas?
- As tecnologias existentes são suficientes para justificar e esclarecer as técnicas usadas?
- As teorias são explicitadas e capazes de justificar as tecnologias?

3.3.2 Praxeologia Didática ou Organização Didática (OD)

As praxeologias didáticas são relacionadas aos formatos que viabilizam o estudo de um certo conteúdo do saber matemático.

> Por organização didática podemos entender, *a priori*, o conjunto (...) [de] tarefas, de técnicas, de tecnologias, etc., mobilizadas para o estudo concreto em uma instituição concreta. O enfoque clássico em didática da matemática tem ignorado em geral os aspectos mais genéricos de uma organização de estudo de um tipo dado de sistemas didáticos. (CHEVALLARD, 1999, p. 238).

Qualquer que seja o caminho adotado para a trajetória dos trabalhos de estudo de uma certa OM, alguns elementos situacionais sempre surgem, mesmo que estes se apresentem em formatos variados. Tais elementos situacionais são conhecidos na TAD como *momentos de estudo* ou *momentos didáticos*; e não importa o caminho escolhido, inevitavelmente, os trabalhos sempre são conduzidos a um *momento de institucionalização*, ou a um *momento de avaliação*, etc.

> (...) podemos dizer que seja qual for o caminho seguido, chega-se forçosamente a um momento em que tal ou qual gesto de estudo deverá ser cumprido. A noção de momento não remete mais que em aparência à estrutura temporal do processo de estudo. Um momento, no sentido dado a palavra aqui, é em primeiro lugar uma *dimensão* em um espaço multidimensional (...) uma sã gestão do estudo exige que cada um dos momentos didáticos se realize *no bom momento*, ou mais exatamente, nos bons momentos. (CHEVALLARD, 1999, p. 241-242).

O *primeiro momento* é o do contato inicial com a praxeologia matemática que está sendo colocada em destaque no cenário didático. Tal encontro inicial (ou mesmo reencontro) pode se realizar de formas variadas; e uma destas maneiras é a partir de ao menos um subtipo de tarefa t, que faça parte da estrutura da OM posta em questão.

O *segundo momento* é o do trabalho de exploração do subtipo de tarefa t e da construção de uma técnica τ relacionada às tarefas consideradas.

> (...) estudar problemas é um meio que permite criar e usar uma técnica relativa a problemas do mesmo tipo, ou seja, a elaboração das técnicas é um meio de resolver de maneira quase rotineira estes problemas (...) mais do que a resolução de problemas isolados, a elaboração de técnicas é o coração da atividade matemática. (BARBOSA, 2011, p. 70).

O *terceiro momento* é o do estabelecimento do contexto tecnológico-teórico $[\theta - \Theta]$ que está relacionado à técnica τ. Deve-se compreender que tal momento não é isolado dos dois anteriores, pois, quando uma determinada técnica τ é escolhida e apresentada, a explicação e a justificação de τ é constituída através do bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$.

O *quarto momento* é o do trabalho da técnica τ, que tem como intuito aperfeiçoá-la, agregando mais confiabilidade à mesma; e isto demanda o aprimoramento da tecnologia θ associada, o que visa desenvolver o domínio sobre τ.

O *quinto momento* é o da *institucionalização* (ou da fixação), momento em que se explicita a realidade da OM construída, definindo as partes que permanecerão após o processo de estudo e as partes que serão dispensadas.

> O momento da institucionalização é, de início, aquele que, na construção *bruta* que pouco a pouco, emergido do estudo, vai separar, por um movimento que compromete o porvir, o “matematicamente necessário”, que será conservado, e o “matematicamente contingente”, que logo será esquecido. (CHEVALLARD, 1999, p. 244).

O *sexto momento* é o de *avaliação* das relações pessoais $R(X, O)$ e das relações institucionais $RI(O)$ tomando como foco o objeto de estudo matemático O; conforme pode ser visto no Quadro 4 (que resume os momentos de estudo da TAD).

Quadro 4 - Momentos didáticos

Momentos	Descrição
1º momento didático	Primeiro contato com a organização matemática estudada
2º momento didático	Exploração do subtipo de tarefa e construção de uma técnica
3º momento didático	Estabelecimento do contexto tecnológico/teórico relacionado à técnica
4º momento didático	Melhoramento da técnica através do trabalho
5º momento didático	Institucionalização
6º momento didático	Avaliação

Fonte: Adaptado de Almouloud (2007, p. 200)

> (...) este momento de reflexibilidade, onde qualquer que seja o critério e o juiz se examina o que vale, o que se já aprendeu, este momento de reflexão que, apesar das recordações da infância, não é em absoluto invenção da escola, participa da “respiração” mesma de toda atividade humana. (CHEVALLARD, 1999, p. 245).

O momento de avaliação na TAD constitui uma etapa de muita relevância, pois normalmente, é o momento em que o docente assume como sendo objeto de estudo as soluções desenvolvidas pelos seus alunos.

Na construção das soluções, o aluno observa certas formas de fazer (na sala de aula ou no livro), para então, desenvolver seu modo pessoal do saber-fazer.

4 ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA E CONSTRUÇÃO DE UM MODELO DE REFERÊNCIA

A metodologia que foi adotada nesta pesquisa, é de uma abordagem qualitativa de cunho documental.

Neste capítulo, são apresentados: os critérios de escolha dos livros analisados, os aspectos histórico-epistemológicos acerca do objeto matemático limites, os elementos matemáticos básicos sobre limites e o modelo de referência que foi construído para a análise das praxeologias matemáticas constituídas em torno dos subtipos de tarefas relacionadas à determinação de limites.

4.1 ESCOLHA DOS MANUAIS A SEREM ANALISADOS (CRITÉRIOS DE ESCOLHA)

Segue-se agora a descrição dos passos metodológicos que resultaram na escolha dos livros didáticos que foram analisados nesta pesquisa:

(1) No site da revista Exame, a jornalista Luísa Granato publicou uma matéria intitulada *As 20 melhores universidades do Brasil, segundo ranking da Folha* (através do Ranking Universitário criado em 2012 pela Folha de São Paulo).

> O Ranking Universitário da Folha (RUF) é uma avaliação anual de institutos públicos e privados de ensino de todo o país utilizando bases de dados e pesquisas de opinião. Para essa edição [2019], todas as universidades ativas do país foram avaliadas, [somando] um total de 197 instituições. O resultado depende de cinco componentes: ensino, pesquisa, mercado, inovação e internacionalização. (GRANATO, 2019).

Ainda segundo a mesma matéria, os resultados publicados pelo RUF estão de acordo com os resultados fornecidos no mesmo período pela reconhecida revista *Times Higher Education (THE)*, inclusive, apesar de algumas notas ligeiramente diferentes entre ambas as publicações, as posições das universidades brasileiras aparecem praticamente na mesma ordem.

Desse modo, tomando o RUF 2019 como base, foram escolhidas (para auxiliar nos critérios de seleção) as dez universidades brasileiras que detêm as posições mais destacadas (Quadro 5):

Quadro 5 - As dez universidades brasileiras mais bem colocadas no RUF 2019

POSIÇÃO NO RUF	UNIVERSIDADE
1ª	USP
2ª	UNICAMP
3ª	UFRJ
4ª	UFMG
5ª	UFRGS
6ª	UNESP
7ª	UFSC
8ª	UFPR
9ª	UNB
10ª	UFPE

Fonte: Adaptado de Granato (2019)

Vale salientar aqui, que o primeiro critério adotado pelo RUF para classificar as universidades é o **ensino**, que muito interessa ao presente trabalho de pesquisa.

(2) Buscou-se através da internet – aleatoriamente, para poder construir uma amostra pequena, porém com boa qualidade – nos canais de livre acesso de cada uma das universidades acima destacadas, por: ementas, planos de ensino, documentos oficiais, etc., acerca da disciplina Cálculo Diferencial e Integral 1 (ou outro nome correlato), na qual, normalmente, encontra-se o conteúdo matemático limites de funções de uma variável real.

Foi selecionado um (único) documento (cujo link de acesso livre está disponível nos dois quadros abaixo) para representar cada uma das dez universidades selecionadas.

Logo após, foi identificada toda a relação de livros aprovados e indicados pelas referidas universidades, restringindo-se tal busca à bibliografia básica, pois esta é mais utilizada (às vezes sendo a única utilizada).

Os dados coletados nesta etapa foram reunidos nos Quadros 6 e 7:

Quadro 6 - Levantamento das obras adotadas por universidades (Parte 1)

UNIVERSIDADE	CÓDIGO DA DISCIPLINA	(APENAS A) BIBLIOGRAFIA BÁSICA INDICADA	ANO DE PUBLICAÇÃO DO LIVRO	LINK DE ACESSO PÚBLICO
USP	MAT2453	CÁLCULO DE STEWART (VOLUME 1)	2010	https://uspdigital.usp.br/jupiterweb/obterDisciplina?sgldis=mat2453&nomdis=
		UM CURSO DE CÁLCULO DE GUIDORIZZI (VOLUME 1)	2001	
UNICAMP	MA111	CÁLCULO DE STEWART (VOLUME 1)	2014	https://cursos.ime.unicamp.br/disciplinas/calculo/bibliografia/
		INTRODUCTION TO CALCULUS AND ANALYSIS DE COURANT I	1999	
		CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA DE SWOKOWSKI (VOLUME 1)	1994	
UFRJ	MAC 118	CÁLCULO DE STEWART (VOLUME 1)	-	http://www.im.ufrj.br/calculo1/content.php?content=bibliography
		CURSO DE CÁLCULO DE UMA VARIÁVEL DE CABRAL	2013	
UFMG	MAT-001	CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA DE SIMMONS (VOLUME 1)	1987	http://www.mat.ufmg.br/disciplinas/ementas/MAT001.html
		O CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA DE LEITHOLD	-	
		CÁLCULO I DE ÁVILA	-	
		CÁLCULO DE APOSTOL (VOLUME 1)	-	
		CÁLCULO E ÁLGEBRA LINEAR DE LEWIS (VOLUMES 1 E 2)	-	
		CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA DE PENNEY (VOLUMES 1 E 2)	-	
		CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA DE SWOKOWSKI (VOLUME 1)	-	
UFRGS	MAT01353	CÁLCULO DE ANTON (VOLUME 1)	-	http://www.mat.ufrgs.br/~calculo/1calculo.html
UNESP	MMA5855	CÁLCULO DE ANTON (VOLUME 1)	2000	https://igce.rc.unesp.br/Home/DiretoriaTecnicaAcademica/graduacao/mma5855.pdf
		CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL DE BOULOS (VOLUME 1)	1999	
		UM CURSO DE CÁLCULO DE GUIDORIZZI (VOLUME 1)	1986	
		CÁLCULO: UM CURSO MODERNO E SUAS APLICAÇÕES DE HOFFMAN	1996	
		CÁLCULO DE LANG (VOLUME 1)	1978	
		CÁLCULO DE STEWART (VOLUME 1)	2009	
		CÁLCULO DE THOMAS (VOLUME 1)	2009	

Fonte: o autor (2019)

Quadro 7 - Levantamento das obras adotadas por universidades (Parte 2)

UFSC	MTM 5110	CÁLCULO I DE ÁVILA	-	http://www.mtm.ufsc.br/ensino/programas/5111.htm
		INTRODUÇÃO À ANÁLISE MATEMÁTICA DE ÁVILA	-	
		CÁLCULO A DE FLEMMING	-	
		UM CURSO DE CÁLCULO DE GUIDORIZZI (VOLUME 1)	-	
		ANÁLISE REAL DE LIMA	-	
		PROGRESSÕES E MATEMÁTICA FINANCEIRA DE MORGADO	-	
		CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA DE SIMMONS (VOLUME 1)	-	
		CALCULUS DE SPIVAK	1994	
UFPR	CMA111	UM CURSO DE CÁLCULO DE GUIDORIZZI (VOLUMES 1 E 2)	-	http://www.estruturas.ufpr.br/disciplinas/graduacao/calculo/
		CÁLCULO DE STEWART (VOLUME 1)	-	
		O CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA DE LEITHOLD (VOLUME 1)	-	
		CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA DE SWOKOWSKI (VOLUME 1)	-	
		CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL DE BOULOS (VOLUME 1)	-	
UNB	MAT 113034	CÁLCULO DE THOMAS	2008	https://matriculaweb.unb.br/graduacao/disciplina.aspx?cod=113034
		O CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA DE LEITHOLD	1994	
		EVERYTHING GUIDE TO CALCULUS I DE HILL	2011	
UFPE	PROD0001	O CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA DE LEITHOLD	1994	ESTA DISCIPLINA FOI LECIONADA PELO AUTOR DESTA PESQUISA DURANTE 4 SEMESTRES (2016.2-2018.1) NO CURSO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO DA UFPE - A CÓPIA DA EMENTA APROVADA E UTILIZADA ESTÁ NOS ANEXOS
		CÁLCULO DE STEWART	2010	
		CÁLCULO E ANÁLISE DE BARBONI	2007	

Fonte: o autor (2019)

(3) Posteriormente, os dados coletados foram tratados para quantificar a representatividade e a abrangência geográfica das coleções de livros didáticos identificadas. Desse modo, obteve-se os seguintes resultados (Quadro 8):

Quadro 8 - Representatividade e abrangência das obras identificadas

COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS	Nº DE UNIVERSIDADES QUE INDICAM	REPRESENTATIVIDADE DAS INDICAÇÕES	UNIVERSIDADES QUE INDICAM	REPRESENTATIVIDADE POR REGIÕES DO BRASIL
CÁLCULO DE STEWART	6	60%	USP	SUDESTE
			UNICAMP	
			UFRJ	
			UNESP	
			UFPR	SUL
			UFPE	NORDESTE
O CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA DE LEITHOLD	4	40%	UFMG	SUDESTE
			UFPR	
			UNB	CENTRO-OESTE
			UFPE	NORDESTE
UM CURSO DE CÁLCULO DE GUIDORIZZI	4	40%	USP	SUDESTE
			UNESP	
			UFSC	SUL
			UFPR	
CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA DE SWOKOWSKI	3	30%	UNICAMP	
			UFMG	
			UFPR	
CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA DE SIMMONS	2	20%	UFMG	
			UFSC	
CÁLCULO DE ÁVILA	2	20%	UFMG	
			UFSC	
CÁLCULO DE ANTON	2	20%	UFRGS	
			UNESP	
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL DE BOULOS	2	20%	UNESP	
			UFPR	
CÁLCULO DE THOMAS	2	20%	UNESP	
			UNB	

Fonte: o autor (2019)

A coleção *Cálculo de James Stewart*, na amostra selecionada, tem total predominância, tanto em número de universidades que a adotam como em quantidade de regiões geográficas que consegue atingir no território brasileiro. Dentro da amostra construída, pode-se constatar que o referido livro tem influência em praticamente todo o território nacional (com exceção das regiões Norte e Centro-Oeste, mas que provavelmente, devem seguir a tendência das demais regiões).

A coleção *O Cálculo com Geometria Analítica de Louis Leithold*, na amostra que foi delimitada, está praticamente empatada com a obra *Um Curso de Cálculo de Hamilton Luiz Guidorizzi* – ambas são indicadas por 40% das universidades pesquisadas. Entretanto, a coleção de Leithold foi indicada em 3 regiões (Sudeste, Centro-Oeste e Nordeste), já a coleção de Guidorizzi foi indicada em apenas 2 (Sudeste e Sul).

Dessa maneira, escolheu-se, para realização desta pesquisa, as duas primeiras coleções citadas no quadro acima (Quadro 8).

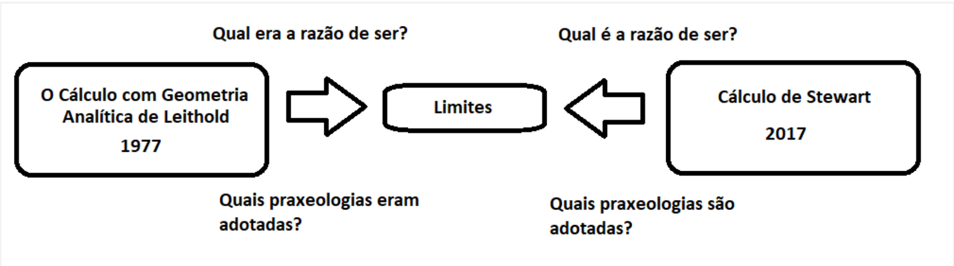
(4) Em conversa particular entre Marianna Bosch Casabó (pesquisadora e colaboradora de Yves Chevallard), Edelweis Jose Tavares Barbosa (orientador da pesquisa) e Leonardo Augusto de Lemos Batista (autor da pesquisa), na cidade de Caruaru-PE, surgiu a ideia de pesquisar um livro de Cálculo antigo e outro atual, para poder entender como *vivia* e como *vive* o objeto matemático limites em livros didáticos.

Permitindo então, a busca por respostas para questões, tais como:

- Como *vivia* e como *vive* o objeto matemático limites de funções de uma variável nos livros didáticos selecionados?
- Quais eram e quais são (e como se caracterizam) as organizações matemáticas e didáticas relativas aos limites que aparecem nas obras escolhidas?
- Qual era e qual é a razão de ser do conteúdo limites de funções nos referidos livros texto?

A coleção de Stewart domina nos dias atuais, então, escolheu-se a mais recente versão (física) da mesma que foi encontrada, e que data do ano 2017. A coleção de Leithold já vinha sendo editada no Brasil bem antes do surgimento da obra de Stewart (que se deu por volta da década de 1980). Então, a mais antiga versão (física) que se conseguiu encontrar da obra de Leithold foi adquirida e analisada, sendo datada de 1977. Um resumo da ideia geral sobre a pesquisa está apresentado no Quadro 9.

Quadro 9 - Ideia geral acerca da pesquisa desenvolvida



Fonte: o autor (2019)

Na construção do modelo de referência proposto adiante, a espinha dorsal foi a obra *Cálculo de Stewart (2013)*, no entanto, foram consultados vários outros títulos identificados na busca descrita acima, e também, foram consultados outros livros de Cálculo e de Análise que gozam de excelente prestígio nos círculos matemáticos brasileiros (mas que não foram identificados na amostra selecionada).

4.2 LIMITES DE FUNÇÕES: ASPECTOS HISTÓRICOS

Um dos fundamentos mais importantes do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) é o conceito de limite, pois o mesmo é utilizado para organizar e justificar as definições (modernas) acerca de continuidade de funções, de derivada, de integral, de convergência ou divergência de sequências e séries, etc. Toda a organização lógica do Cálculo (no formato atual) repousa sobre a concepção de limite.

Para exemplificar o que foi dito acima, seja a definição abaixo:

> **Definição**
> Se a função f é contínua em x_1, então a *reta tangente* ao gráfico de f no ponto $P(x_1, f(x_1))$ será:
> (i) a reta que passa por P, tendo inclinação $m(x_1)$, dada por:
> $$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$
> se, esse limite existir; ou
> (ii) a reta $x = x_1$, se, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} = +\infty$
> se nem (i) nem (ii) da Definição são válidos, então, não existe reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_1, f(x_1))$. (LEITHOLD, 1977, p. 110).

Segundo Boyer (1996), historicamente, o conceito de limite surgiu muito tempo após o desenvolvimento das concepções de integral (cuja a ideia inicial remonta a Antiguidade Clássica) e de derivada (que começou a ser estruturada no início da Idade Moderna).

Durante a história da construção do saber matemático, e mais especificamente do Cálculo Diferencial e Integral, as ideias acerca de limite eram espelhadas em vagas concepções relativas ao infinito. Por vários séculos, os matemáticos falavam em números infinitamente grandes ou infinitamente pequenos; entretanto, praticamente nada do que afirmavam possuía rigor lógico. Na referida época, era comum os estudiosos da matemática recorrerem ao pensamento geométrico intuitivo (como única forma de investigação matemática); muitas vezes subjetivas, outras vezes mais rigorosas.

O termo limite, no sentido atual, é algo que se originou na Europa dos séculos XVIII e XIX (algo bem tardio na longa história da matemática). A rigorosa definição moderna de limite tem menos de 150 anos de existência.

Ei-la, aqui:

> **Definição**
> Definição Formal de Limite
> Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de x_0, exceto talvez em x_0. Dizemos que $f(x)$ tem limite L, quando x tende a x_0, e escrevemos:
> $$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$
> se, para cada número [real] $\varepsilon > 0$, existir um número [real] correspondente $\delta > 0$, tal que, para todos os valores de x,
> $$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$
> (THOMAS et al., 2002, p. 90).

Segundo os registros históricos conhecidos, a primeira vez em que a ideia de limite apareceu foi (aproximadamente) em 450 a.C. Isso se deu na discussão dos paradoxos de Zenon (também conhecido como Zenão de Eléia (490 a.C. – 430 a.C.)).

O primeiro paradoxo – a dicotomia – tratava do movimento de um objeto entre dois pontos fixos, A e B (sendo que a distância assumida na argumentação de Zenon, entre A e B, era finita). Para tal, foi considerada uma sequência infinita de intervalos de tempo, como sendo: $T_0, T_1, T_2, \dots, T_n,$ ..., de tal maneira, que o tempo de cada intervalo é igual a metade do tempo gasto no movimento anterior. Sendo assim, Zenon analisou o problema e concluiu, que, dessa forma, o objeto nunca chegaria a B.

Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.) foi um dos mais importantes estudiosos do mundo antigo que também se debruçou sobre os paradoxos de Zenon, porém o fez (apenas) através de argumentações filosóficas.

Posteriormente, para conseguir elaborar demonstrações rigorosas acerca de diversas fórmulas para calcular áreas e volumes, Arquimedes (também conhecido como Arquimedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.)) efetuou diversas somas que possuíam um número infinito de termos (chegando a resultados rigorosamente – para não dizer assustadoramente – corretos). Como não havia o conceito moderno de limite, Arquimedes desenvolvia provas baseadas no método da dupla redução ao absurdo, *reductio ad absurdum*.

O Cálculo muitas vezes é identificado como sendo o estudo das curvas, das superfícies e dos sólidos. A história do desenvolvimento da geometria de tais objetos, seguiu através dos passos da elaboração da chamada geometria analítica, que teve como alguns de seus precursores mais famosos Pierre de Fermat (1601 – 1665) e René Descartes (1596 – 1650).

Fermat criou um método baseado em álgebra para descobrir os pontos de máximo e de mínimo de diversas curvas. Fermat ainda se dedicava para provar que nos pontos de máximo e de mínimo a reta tangente era horizontal, ou seja, de inclinação zero. (Ver a primeira Definição da presente secção (4.2)).

Segundo Eves (2011), o problema de procurar a reta tangente a uma curva (num ponto dado) é um dos problemas mais fundamentais do CDI (que remete ao conceito de derivada). No século XVII, muitos geômetras criaram métodos algébricos (bastante laboriosos) para fazer a determinação de retas tangentes a algumas dessas curvas.

René Descartes, por exemplo, desenvolveu um método que se baseava num conceito matemático chamado de dobro-raízes de uma equação auxiliar. Esse método de Descartes foi (posteriormente) refinado por Johannes Hudde (1628 – 1704), que foi um grande matemático holandês. O matemático René-François de Sluse (1622 – 1685) inventou outro processo mais sofisticado para obter tangentes a curvas. Acredita-se que no universo de todos esses métodos desenvolvidos na época, o conceito de limite deve ter sido usado (ao menos em algum momento decisivo), no entanto, nenhum desses matemáticos foi capaz de perceber a necessidade de um conceito rigoroso de limite. Então, vê-se claramente que cada um deles encontrou alguma forma inteligente para chegar aos resultados que chegaram (e que estavam em grande parte, corretos), porém, sem o rigor matemático necessário.

Seja a definição moderna de derivada (construída a partir do conceito de limite) a seguir:

> Sejam $f: X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. A *derivada* da função f no ponto a é o limite:
> $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
> (...)
> o limite acima pode existir ou não. Se existir, diz-se que f é *derivável no ponto* a. (LIMA, 1997, p. 88).

Calcular valores exatos para áreas limitadas por curvas é outro dos mais importantes problemas enfrentados pelo Cálculo. Frequentemente, chama-se este tipo de tarefa de *problema de quadratura*, ou seja, determinação de uma certa área. Do mesmo modo, tem-se o chamado *problema de cubatura*, que faz menção aos cálculos de volumes de sólidos limitados por superfícies. Tais problemas estão relacionados às integrais.

Johannes Kepler (1571 – 1630), que foi um dos astrônomos mais famosos do seu tempo, também era um dos mais entusiasmados com problemas de cubatura. Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647) criou todo um conjunto de estudos arrojados acerca de quadraturas. Outros matemáticos, tais como Evangelista Torricelli (1608 – 1647), Pierre de Fermat, John Wallis (1616 – 1703) e Grégoire de Saint-Vicent (1584 – 1667) desenvolveram técnicas para quadrar várias regiões e cubar muitos sólidos. No entanto, não existem registros históricos de que esses estudiosos usaram o conceito de limite. Praticamente todos os resultados eram coerentes e com bastante precisão. Contudo, esses matemáticos recorriam a argumentos intuitivos (geométricos e/ou filosóficos); ou seja, sem o rigor matemático necessário (sempre deixando margens para questionamentos).

Seja a definição moderna de integral (construída a partir do conceito de limite) a seguir:

> *Integral* [Integral de Riemann]
> Sendo f integrável em $[a, b]$, o número I é chamado *integral* de f em $[a, b]$ (ou *integral definida* de f em $[a, b]$) e é representado por $\int_a^b f(x)dx$; resulta que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que:
> $$\mu < \delta \Rightarrow \left| \sum f(\overline{x_i}) \Delta_i x - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$$
> (IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 2002, p. 213).

Apesar de não percebida, **a necessidade da construção do conceito de limite era grande** para que se pudesse organizar, explicar e justificar as operações de derivação, de integração, entre outras (como pode ser constatado através de todas as definições colocadas na presente secção (4.2)).

Isaac Newton (1642 – 1727), nos seus *Principia Mathematica* – que se tornou a sua obra máxima – foi o primeiro a reconhecer a necessidade do limite (num certo sentido). No início do livro I dos *Principia*, Newton se esforçou para construir um conceito preciso acerca de limite (ainda que maneira introdutória). Em outras palavras, Newton conseguiu vislumbrar a importância que tal conceito viria a ter dentro do CDI. Desse modo, pode-se creditar a Newton o lançamento da semente que viria a florescer bem mais tarde.

Entretanto, para fornecer as bases do Cálculo, nenhum matemático (durante décadas) se propôs a investigar as sugestões dadas por Newton.

Com o ferramental já existente na referida época, os problemas da geometria foram solucionados, agora os novos esforços passaram a ser nas aplicações do Cálculo à física e à astronomia. Então, novos campos em matemática surgiram, como as chamadas equações diferenciais e o cálculo das variações.

Segundo Boyer (1996), no século XVIII, pouca atenção foi dada aos fundamentos do Cálculo, e isso incluía o limite e todas as demais questões minuciosas relacionadas.

Colin Maclaurin (1698 – 1746) argumentou a favor do método dos fluxos de Newton, entretanto, o fez com argumentos bem anteriores que remetiam à Fermat e à Arquimedes. Maclaurin perdeu uma grande chance de fornecer rigor ao Cálculo, pois não deu atenção às sugestões de Newton acerca dos limites.

Segundo Eves (2011), Jean le Rond d'Alembert (1717 – 1783) foi o único de sua época a reconhecer o papel central do limite para todo o Cálculo. Na *Encyclopédie*, D'Alembert disse que a adequada conceituação acerca de derivada necessita da correta compreensão de limite. D'Alembert forneceu a seguinte definição: "Um valor é dito ser o limite de um outro valor, quando o segundo pode se aproximar do primeiro, dentro de algum valor dado, de qualquer modo pequeno, embora o segundo valor nunca possa exceder ao qual se aproxima".

Pode-se afirmar que D'Alembert entendeu que o conceito de limite era a "verdadeira metafísica do Cálculo".

No ano de 1784, a Academia de Ciências de Berlim anunciou que daria uma premiação para o primeiro a explicar com sucesso uma teoria acerca do infinitamente pequeno e do infinitamente grande em matemática (teoria, essa, que pudesse ser aplicada como fundamento lógico e consistente para o Cálculo Diferencial e Integral). Simon Antoine Jean l'Huillier (1750

– 1840) venceu o referido prêmio, não por resolver o problema, mas sim, como uma forma de recompensa pelo laborioso trabalho realizado. Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796 – 1832) elaborou uma proposta um tanto popular para tentar resolver o problema. Carnot propôs que o limite fazia uma espécie de *compensação dos erros*, entretanto, Carnot nunca conseguiu explicar de que maneira tais erros sempre se balanceavam perfeitamente.

Segundo Boyer (1996), nos últimos anos do século XVIII, o matemático Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) (considerado por muitos como o maior do seu tempo) construiu uma reformulação da mecânica newtoniana em termos do Cálculo. Lagrange deu grande atenção aos fundamentos do CDI. Seja a seguinte parte da sua solução: “toda a consideração de quantidades infinitamente pequenas, dos limites ou dos fluxos”. Lagrange realizou um notável esforço para fundamentar o Cálculo puramente em Álgebra.

Destaca-se que no século XVIII, não houve interesse por parte dos matemáticos na realização de estudos que abordassem convergência ou divergência de sequências e séries infinitas. No ano de 1812, Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) elaborou um tratado bastante rigoroso sobre convergência de sequências e séries (mas não utilizou a terminologia de limite). Nos estudos analíticos sobre o calor, desenvolvidos por Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830), tentou-se dar uma definição para convergência de uma série infinita sem a utilização de limite. Fourier conseguiu mostrar que, respeitadas determinadas hipóteses, toda função pode ser expressa como uma soma das hoje chamadas séries de Fourier.

No século XVIII, as concepções acerca de limites (ainda) eram desconcertantes.

No século XIX, Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) buscava uma coerente maneira de fazer a exposição do Cálculo para poder apresentar para os seus alunos de Engenharia da *École Polytechnique* de Paris. Cauchy iniciou suas aulas apresentando uma definição moderna para limite. Nas notas de aula de Cauchy (que se tornaram verdadeiros documentos históricos), o matemático utilizou o limite como o fundamento para as definições precisas de continuidade, de derivada e de integral. Não obstante, alguns detalhes técnicos passaram desapercebidos por Cauchy.

Seja (ainda) o seguinte exceto sobre Cauchy:

> Natural de Paris, Cauchy estudou na Escola Politécnica e, a despeito de seu grande talento para a ciência pura, chegou a encetar uma promissora carreira de engenheiro, abandonada em 1815 por razões de saúde. Nesse mesmo ano, inicia-se como professor na Escola Politécnica – afinal, a essa altura, seu currículo já exibia vários trabalhos no campo da matemática, o primeiro de 1811. No ano seguinte, aceita sua indicação para a Academia de Ciências, mesmo sendo para o lugar de Monge, excluído por razões políticas. (IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 2002, p. 206).

Finalmente, entre os anos de 1840 e 1850, Karl Weierstrass (1815 – 1897) descobriu que a primeira etapa para corrigir as pequenas falhas nas definições fornecidas por Cauchy, era iniciar a definição de limite de Cauchy em termos aritméticos estritos, e isso deveria ser usando, exclusivamente, valores absolutos e desigualdades. (Ver as Definições formais de limite na próxima secção (4.3)).

Seja (ainda) o exceto abaixo sobre Weierstrass:

> Natural do povoado de Ostenfeld (Alemanha), Weierstrass era filho de um inspetor de alfândega autoritário que desejava vê-lo num alto posto administrativo – tanto mais que sua passagem pela escola secundária fora brilhante. Mas Weierstrass não deu essa alegria ao pai, embora tivesse ficado de 1834 a 1838 em Bonn matriculado no curso indicado (leis, que afinal não concluiu). Em 1839, habilitou-se para o ensino médio de matemática em curso intensivo, no qual, teve como professor C. Guderman (1798 – 1852), especialista em funções elípticas, seu grande inspirador. Paralelamente ao exercício do magistério secundário, Weierstrass, lançou-se à pesquisa (...) em 1855 obtinha um doutorado honorário na Universidade de Königsberg, e em 1856, tornou-se professor da Universidade de Berlim (...) Weierstrass publicou pouco, comparado a Cauchy. Mas sua obra se distingue pela qualidade e, em especial, pelo rigor. (IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 2002, p. 207).

4.3 LIMITES DE FUNÇÕES: ELEMENTOS MATEMÁTICOS BÁSICOS

Nesta secção são apresentadas as seguintes noções matemáticas acerca de limites de funções: ideia intuitiva de limite, definição formal de limite, limite da função constante, unicidade do limite, limites laterais, continuidade de funções e exemplos de funções contínuas.

- **Ideia intuitiva de limite**

Stewart (2013) inicia sua abordagem acerca do conceito de limite de uma função, propondo analisar o comportamento (numérico e gráfico) da função real $f(x)$, definida por $f(x) = x^2 - x + 2$, quando x se aproxima de 2 (tanto por valores maiores do que 2 como valores menores do que 2).

Então, o referido autor começa sua apresentação expondo os resultados (que já se mostram calculados) na Tabela 1 a seguir (para valores de x próximos de 2, mas não iguais a 2):

Tabela 1 - Aproximação dos valores acerca do limite considerado

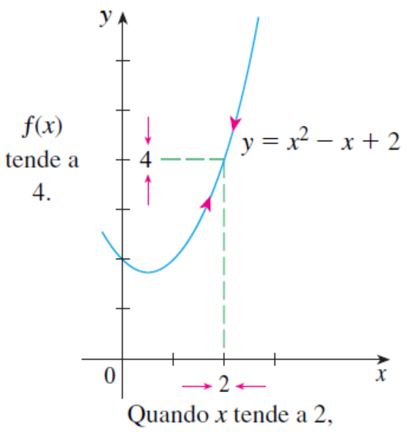
x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	2,000000	3,0	8,000000
1,5	2,750000	2,5	5,750000
1,8	3,440000	2,2	4,640000
1,9	3,710000	2,1	4,310000
1,95	3,852500	2,05	4,152500
1,99	3,970100	2,01	4,030100
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001

Fonte: Stewart (2013, p. 80)

Observando os números trazidos na tabela acima, vê-se claramente que, quando os valores de x vão crescendo, chegando cada vez mais próximos de 2 (por valores inferiores a 2), os valores de $f(x)$ vão se tornando cada vez mais próximos de 4. O mesmo ocorre quando os valores de x vão diminuindo, chegando cada vez mais próximos de 2 (por valores superiores a 2).

Em seguida, Stewart (2013) traz a ilustração gráfica abaixo (Gráfico 1) para esclarecer (visualmente) o que está acontecendo.

Gráfico 1 - Aproximações sucessivas acerca do limite considerado



Fonte: Stewart (2013, p. 80)

O comportamento do gráfico mostra que, quando x se aproxima de 2, por valores à esquerda de 2, $f(x)$ se aproxima de 4, por valores inferiores a 4; já quando x se aproxima de 2, por valores à direita de 2, $f(x)$ se aproxima de 4, por valores superiores a 4.

O processo de sucessivas aproximações (numericamente ou graficamente) pode ser realizado tanto quanto se queira, no entanto, nem x assume o valor 2 (exatamente), nem $f(x)$ assume o valor 4 (exatamente).

Tal constatação é expressa da seguinte maneira: "o limite da função $f(x) = x^2 - x + 2$, quando x tende a 2, é igual a 4". Em símbolos, tem-se:

$$\lim_{x \to 2}(x^2 - x + 2) = 4$$

- **Definindo limite de função real de uma variável**

Para continuar a discussão acerca do que vem a ser o objeto matemático limite (do tipo aqui apresentado); seja a definição a seguir – que foi retirada do reconhecido livro Um Curso de Cálculo (volume 1) de Hamilton Luiz Guidorizzi:

> **Definição.** Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f. Dizemos que f *tem limite* L, *em* p, *se, para todo* $\varepsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$, tal que, para todo $x \in D_f$,
> $$0 < |x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$
> tal número L, que quando existe é único, será indicado por $\lim_{x \to p} f(x)$.
> Assim:
> $$\lim_{x \to p} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, tal\ que, para\ todo\ x \in D_f, \\ \quad 0 < |x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{cases}$$
> (GUIDORIZZI, 2015, p. 85).

Seja ainda a definição sobre o mesmo objeto matemático retirada do consagrado livro Curso de Análise (volume 1) de Elon Lages Lima.

> Seja $f: X \to \mathbb{R}$ uma função com valores reais, definida num subconjunto $X \subset \mathbb{R}$. Seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X, isto é, $a \in X'$. Diremos que o número real L é o *limite de* $f(x)$ *quando* x *tende para* a, *e escrevemos*
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
> para significar o seguinte: para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que se tenha $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$. (LIMA, 1999, p. 152).

As definições formais de limite de função fornecidas em livros didáticos possuem uma certa complexidade por causa do simbolismo envolvido e da dificuldade inerente à captação da ideia em si mesma. Para tentar facilitar a compreensão acerca deste objeto matemático, considere a seguinte definição informal (que foi retirada do conhecido livro Análise Real (volume 1) também de Elon Lages Lima): "$\lim_{x \to a} f(x) = L$, quer dizer que se pode tornar $f(x)$

tão próximo de L quanto se queira desde que se tome $x \in X$ suficientemente próximo, porém diferente, de a" (LIMA, 1997).

Pode-se aplicar a definição formal de limite de uma função para provar (ou demonstrar) a veracidade do valor de certo limite dado.

<u>Exemplo:</u> (ANTAR NETO et al., 2010, p. 84) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x - 5$. Prove que $\lim_{x \to 4}(2x - 5) = 3$.

PROPOSIÇÃO: Deve-se mostrar que para qualquer número positivo ε, pode-se encontrar um número positivo δ, tal que,

$$0 < |x - 4| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon$$

INVESTIGAÇÃO: A condição $|(2x - 5) - 3| < \varepsilon$ equivale a $|2x - 8| < \varepsilon$, ou ainda,

$$|2(x - 4)| < \varepsilon$$

$$2|x - 4| < \varepsilon$$

$$|x - 4| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Deve-se, então, escolher $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

DEMONSTRAÇÃO: Dado $\varepsilon > 0$, escolhe-se $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Seja $0 < |x - 4| < \delta$. Então, tem-se:

$$|f(x) - 3| = |(2x - 5) - 3| = |2x - 8| = 2|x - 4| < 2\delta = \varepsilon$$

Isto é:

$$|f(x) - 3| < \varepsilon$$

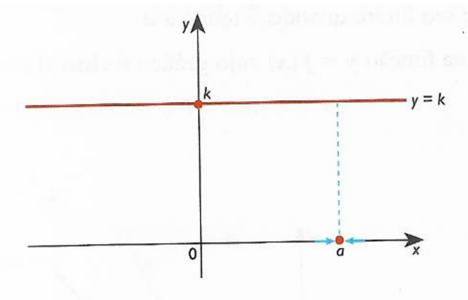
O que conclui a prova!

- **Limite da função constante**

> Se $c \in \mathbb{R}$ e f é a função definida por $f(x) = c$, para todo x real, então $\lim_{x \to a} c = c$.
> *Demonstração*
> Devemos provar:
> $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$$
> é sempre verdadeiro, pois:
> $$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$
> (IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 2002, p. 30).

Esta constatação, ou seja, de que $\lim_{x \to a} k = k$ $(a, k \in \mathbb{R})$, também pode ser feita intuitivamente através da observação do gráfico a seguir (Figura 1):

Figura 1 - Limite da função constante



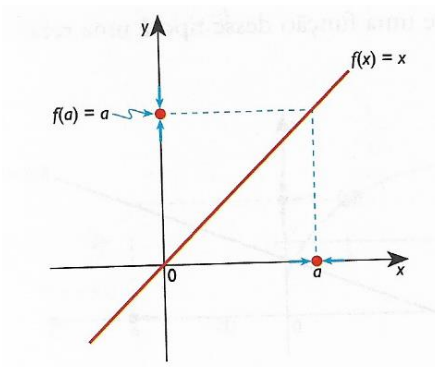
Fonte: Bianchini e Paccola (1997, p. 220)

Vale salientar aqui, a existência do chamado limite da função identidade que, juntamente com o limite da função constante, serve para auxiliar nos cálculos de outros limites mais elaborados.

(Limite da função identidade) Dada a função real $y = x$, tem-se que: $\lim_{x \to a} x = a$.

Graficamente, tem-se (Figura 2):

Figura 2 - Limite da função identidade



Fonte: Bianchini e Paccola (1997, p. 222)

- **Unicidade do limite**

O valor de $\lim_{x \to a} f(x)$, se existir, é único. Isto pode ser visto no teorema "se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$." (IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 2002).

Demonstração [da unicidade do limite]
Demonstraremos esse teorema por redução ao absurdo.
Supondo $L_1 \neq L_2$, temos:
sendo $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, vem:
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$ (...) [i]
sendo $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, vem:
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon$ (...) [ii]

escrevendo $L_1 - L_2$ como $L_1 - f(x) + f(x) - L_2$ e aplicando a desigualdade triangular ($|a+b| \leq |a| + |b|, \forall a, b \in \mathbb{R}$), temos:

$$|L_1 - L_2| = \left|\left(L_1 - f(x)\right) + \left(f(x) - L_2\right) \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2|\right|$$
$$= |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2|$$

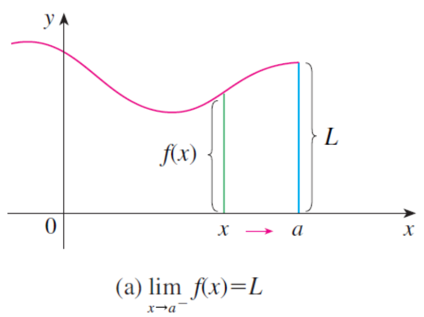
chamando de δ o menor número δ_1 e δ_2, temos $\delta \leq \delta_1$ e $\delta \leq \delta_2$ e considerando (...) [i] e [ii], temos:
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tal que:
$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < 2\varepsilon$
mas $|L_1 - L_2| < |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2|$, então:
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tal que:
$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |L_1 - L_2| < 2\varepsilon$
se tomarmos $\varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{2}$, vem:
para $\varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{2}$, $\exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$,
tal que, $0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$
que é uma contradição e, portanto, a nossa suposição é falsa. Logo $L_1 = L_2$.
(IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 2002, p. 25).

- **Limites laterais**

Para compreensão do que vem a ser limites laterais de uma função, sejam as definições e representações gráficas a seguir (Figuras 3 e 4):

Definição Escrevemos
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$
e dizemos que o **limite à esquerda** de $f(x)$ **quando x tende a a** [ou o **limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda**] é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L, para x suficientemente próximo de a e x menor que a.
(STEWART, 2013, p. 85).

Figura 3 - Limite lateral à esquerda

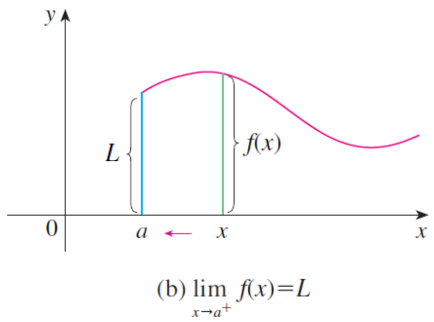


Fonte: Stewart (2013, p. 85)

Definição Escrevemos
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$
e dizemos que o **limite à direita** de $f(x)$ **quando x tende a a** [ou o **limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita**] é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$

arbitrariamente próximos de L, para x suficientemente próximo de a e x maior que a. (STEWART, 2013, p. 85).

Figura 4 - Limite lateral à direita



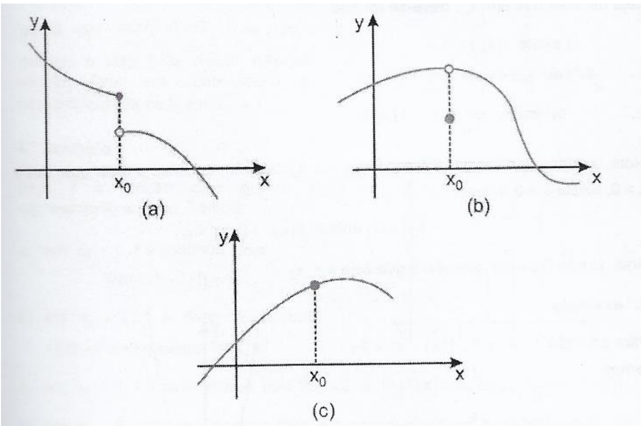
Fonte: Stewart (2013, p. 85)

➢ **Continuidade de funções**

A concepção que é uma das mais relevantes consequências acerca do objeto matemático limites é a continuidade de funções. Para iniciar o estudo desta ideia matemática, seja a seguinte definição intuitiva: "uma função é contínua, se o seu gráfico não é quebrado, ou seja, não tem saltos ou furos". (ANTAR NETO et al., 2010).

Uma rápida olhada nos gráficos a seguir (Figuras 5 - 15) é o suficiente para esclarecer o conceito dado acima.

Figura 5 - Funções contínuas e descontínuas



Fonte: Antar Neto et al. (2010, p. 97)

- No item (a) acima, vê-se um salto no gráfico, ou seja, uma grande interrupção, logo a função não é contínua no ponto considerado x_0.

- No item (b) acima, vê-se um “furo” no gráfico, ou seja, x_0 é um ponto de descontinuidade da função.
- No item (c) acima, vê-se uma linha do gráfico sem nenhuma interrupção, logo, a grosso modo, chega-se à conclusão que a função é contínua em x_0.

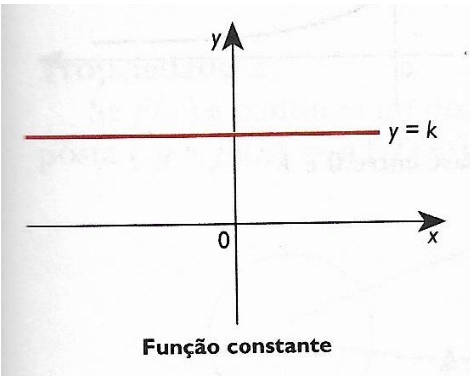
➢ **Alguns exemplos de funções contínuas**

Quando ocorre de uma certa função ser contínua em todos os pontos do seu respectivo domínio, diz-se simplesmente que ela é uma função contínua.

Algumas das principais funções contínuas que surgem nas tarefas a serem realizadas em livros didáticos são (Figura 6 - 15):

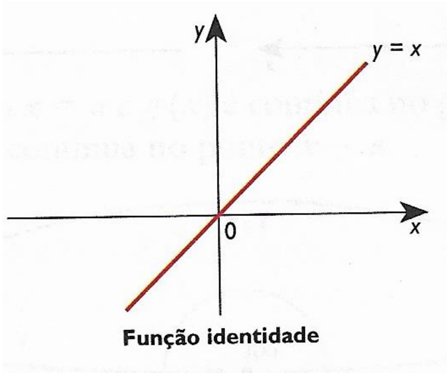
- Função polinomial $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ (casos particulares: função constante, função identidade, função polinomial do 1º grau, função trinômio do 2º grau, etc.).
- Função racional fracionária $f(x) = \frac{F(x)}{G(x)}, G(x) \neq 0$.
- Função exponencial.
- Função logarítmica.
- Função seno.
- Função cosseno.

Figura 6 - Funções contínuas (função constante)



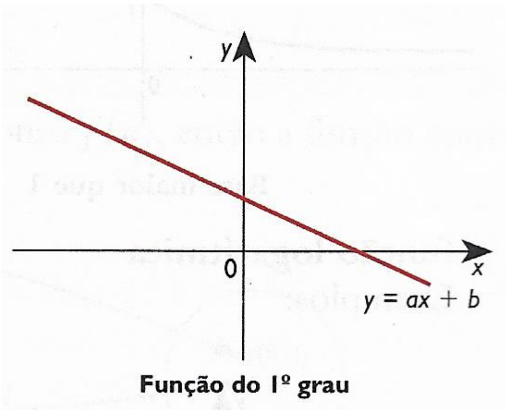
Fonte: Bianchini e Paccolla (1997, p. 231)

Figura 7 - Funções contínuas (função identidade)



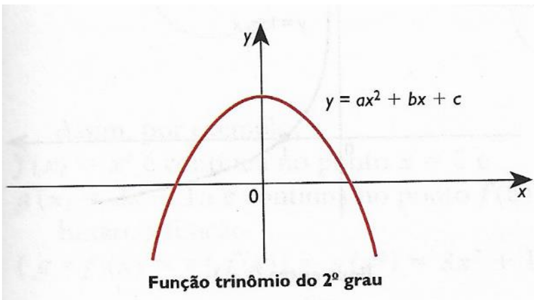
Fonte: Bianchini e Paccolla (1997, p. 231)

Figura 8 - Funções contínuas (função do 1º grau)



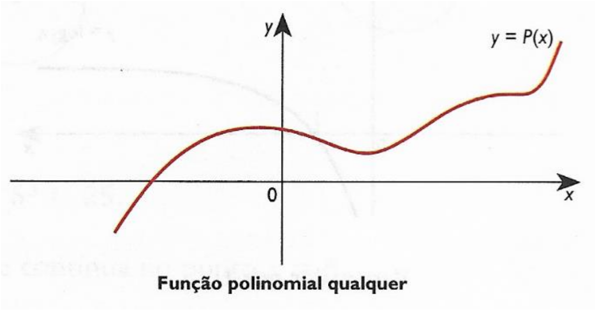
Fonte: Bianchini e Paccolla (1997, p. 231)

Figura 9 - Funções contínuas (função trinômio do 2º grau)



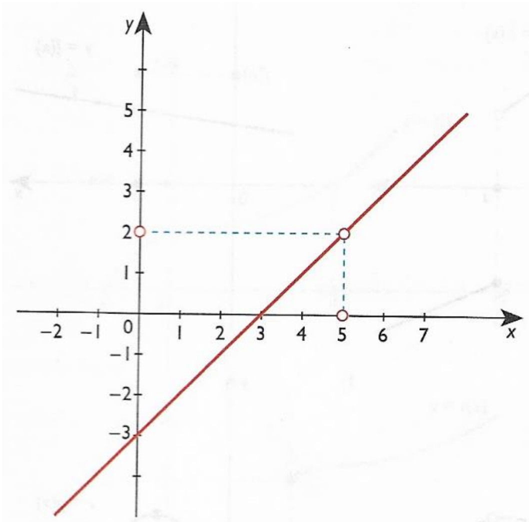
Fonte: Bianchini e Paccolla (1997, p. 231)

Figura 10 - Funções contínuas (função polinomial)



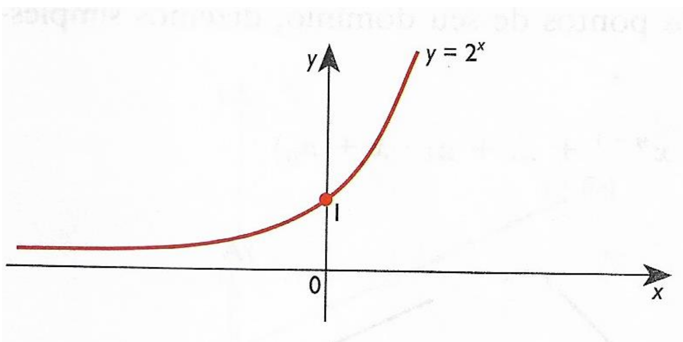
Fonte: Bianchini e Paccolla (1997, p. 231)

Figura 11 - Funções contínuas (função racional – contínua no seu domínio)



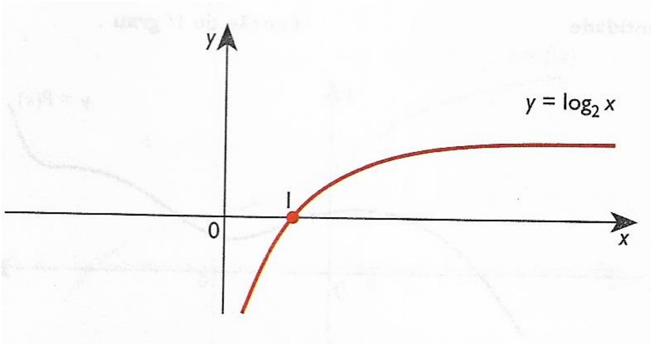
Fonte: Bianchini e Paccolla (1997, p. 232)

Figura 12 - Funções contínuas (função exponencial)



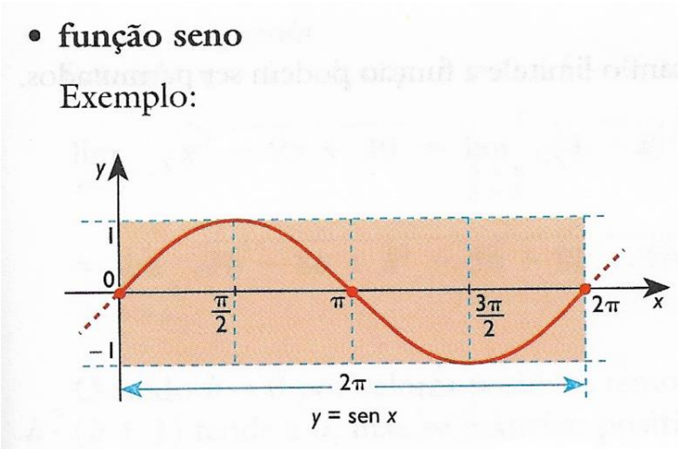
Fonte: Bianchini e Paccolla (1997, p. 232)

Figura 13 - Funções contínuas (função logarítmica)



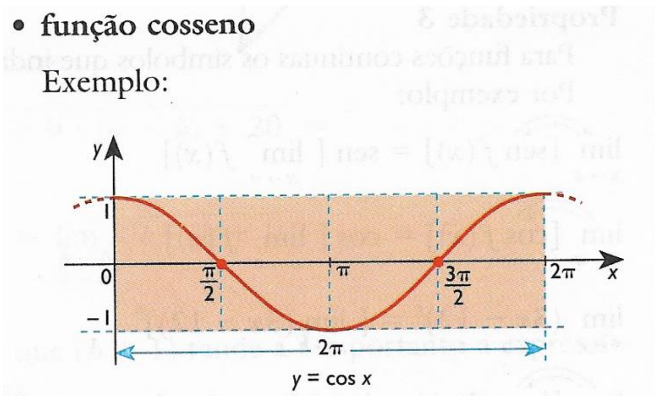
Fonte: Bianchini e Paccolla (1997, p. 232)

Figura 14 - Funções contínuas (função seno)



Fonte: Bianchini e Paccolla (1997, p. 233)

Figura 15 - Funções contínuas (função cosseno)



Fonte: Bianchini e Paccolla (1997, p. 233)

4.4 MODELIZAÇÃO DAS PRAXEOLOGIAS MATEMÁTICAS

Será agora relatada a construção de uma proposta de modelo de referência para as praxeologias matemáticas pontuais que podem ser estabelecidas no contexto dos subtipos de tarefas relacionadas à determinação de limites de funções de uma variável real a valores reais.

São quatro as componentes que fundamentam uma praxeologia matemática, a saber: (t) subtipos de tarefas resolvidas, (τ) técnicas apresentadas, (θ)□tecnologias e (Θ) teoria. (BARBOSA, 2011).

Na proposta formulada, delineou-se os subtipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias, e também, a sintetização de um modelo de referência através da investigação do objeto matemático limites de funções no livro didático *Cálculo de Stewart (2013)* com o apoio de vários outros livros de Cálculo e de Análise que gozam de grande prestígio nos círculos matemáticos brasileiros.

4.4.1 Subtipos de Tarefas

Santos (2013) identificou algumas praxeologias matemáticas referentes à determinação de limites de funções reais de uma variável, conforme pode ser visto nos seguintes quadros (Quadros 10 - 13):

Quadro 10 - Praxeologia matemática – Estimar o valor do limite de uma função

Teoria	**Tecnologia**
Limite de função (de maneira intuitiva)	$\lim_{x \to p} f(x) = L$
Tarefa	**Técnica**
Calcule	- determinar o valor do limite da função para valores próximos a 2, tanto maiores quanto menores. Verificar para qual valor tende o limite.

Fonte: Santos (2013, p. 231)

Quadro 11 - Praxeologia matemática **-** Determinar o limite de uma função com o auxílio do gráfico

Teoria	Tecnologia
Ideia intuitiva de limite, limites laterais, existência do limite da função num ponto dado.	Se x_0 é ponto de acumulação bilateral do domínio de f, tem-se: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *se e somente se* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$ *e* $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$
Tarefa	**Técnica**
Dê o limite da função em x_0, se existir, nos casos da figura 13-4. Caso não exista, dê os limites laterais.	Para a resolução de uma tarefa como essa, o aluno deverá: - interpretar graficamente o limite da função, especialmente as tendências a ele associadas; - calcular os limites laterais; - verificar as condições de existência do limite de uma função em determinado ponto do domínio (sem perder a ideia de que o conceito de limite é local); - determinar o limite da função mesmo quando o ponto não pertence ao domínio da função.

Fonte: Santos (2013, p. 221-222)

Quadro 12 - Praxeologia matemática – Calcular o limite de uma função num ponto

Teoria	Tecnologia
Limite de uma função	$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$; Propriedades operatórias do limite (precisamos destacar que Ávila não apresenta a tecnologia envolvida nesse estudo, mas sim os procedimentos através de exemplos).
Tarefa	**Técnica**
Calcular o limite da função no ponto considerado. Observação: quando x_0 tende a mais ou menos infinito, a “verificação” do valor para o qual L tende pode ser feita de maneiras diferentes.	- substituir o valor de x_0 na função se o ponto pertencer ao domínio da função (exercício 1). - se o ponto não pertencer ao domínio da função, o cálculo é feito para valores próximos do ponto x_0 (exercício 14). - no (exercício 18), as funções polinomiais que compõem a função racional têm o mesmo grau, analisa-se então qual a tendência do numerador e do denominador. - no (exercício 30), temos polinômios que apresentam diferenças de graus. Nesse caso, é preciso que se coloque em evidência o fator de maior grau e, depois das simplificações, analisar qual será o sinal determinante.

Fonte: Santos (2013, p. 219-220)

Quadro 13 - Praxeologia matemática – Determinar limites que envolvam o infinito

Teoria	**Tecnologia**
Limite de funções compostas: Conceituação de limite de função composta.	(na última igualdade usamos o resultado anteriormente enunciado). Em geral, tem-se: Para calcular $\lim_{x \to x_0} f(g(x))$, chamamos u = g(x), e se, para x→ x_0, tem –se u → $\pm\infty$, então $$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{u \to \pm\infty} f(u)$$ O resultado vale se, em lugar de x_0, figurar ∞ ou - ∞, ou se o limite for lateral.
Tarefa	**Técnica**
Calcule	O aluno deverá: - fazer a substituição da função que está dentro do radical por uma letra, por exemplo, u; - verificar o que acontece com a função u quando x tende a infinito; - o resultado encontrado será quase o valor da função composta; - deve-se verificar o que a função primeira modifica o resultado da segunda e concluir qual o valor do limite para essa segunda função.

Fonte: Santos (2013, p.226)

O presente modelo foi construído tomando como ponto de partida as praxeologias matemáticas de Santos (2013).

Foram identificados e classificados – por meio de adaptações e novas interpretações – os seis subtipos de tarefas relativas à determinação de limites de funções (a seguir):

(1) Pode-se estimar o valor do limite de uma função real através da realização de sucessivos cálculos nas proximidades do ponto de tendência. Este tipo de procedimento pode envolver tanto o lado esquerdo como o direito em relação ao ponto de tendência $x = a$. Ressalta-se ainda, a existência de diversos obstáculos que podem dificultar este tipo de abordagem (por exemplo, expressões muito longas e/ou muito complexas), exigindo por consequência, caminhos alternativos (e por vezes mais práticos).

(2) Outra maneira para se determinar o valor relacionado ao limite de uma função $f(x)$ num dado ponto é a execução de uma análise do comportamento gráfico de $f(x)$, que é efetuada por meio de sucessivas observações nas proximidades do ponto de tendência considerado – análise, esta, que pode ser efetuada tanto pelo lado esquerdo quanto pelo direito de $x = a$. Contudo, a prévia construção do gráfico de $f(x)$ para (posteriormente) através de uma análise gráfica, determinar o valor de $\lim_{x \to a} f(x)$, pode ser algo relativamente difícil de ser feito.

(3) Ainda é possível realizar o estudo de $\lim_{x \to a} f(x)$ através de uma análise intuitiva das expressões matemáticas que compõem $f(x)$; no entanto, a amplitude da aplicabilidade deste tipo de procedimento é relativamente curta, restringindo-se (basicamente) aos casos mais elementares.

(4 e 5) O cálculo direto de $\lim_{x \to a} f(x)$ também é possível e compõe uma das partes mais importantes do objeto matemático limites de funções – cálculo, este, que consiste em determinar o valor numérico de $f(a)$. Então, pode-se perceber que muitos limites podem ser resolvidos exclusivamente através de cálculos aritméticos, todavia, existem outros tipos que não podem. Quando durante a execução do cálculo de certo limite são encontradas indeterminações ou impossibilidades, faz-se necessária a aplicação de técnicas algébricas e/ou outras alternativas para eliminar (ou superar) tais obstáculos (e possibilitar a continuidade do procedimento).

(6) Existem ainda os limites que envolvem os símbolos relacionados ao infinito (positivo e negativo); e isso tanto pode ocorrer na tendência: $x \to \pm\infty$, como no resultado: $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Vários procedimentos algébricos (e artifícios) podem ser aplicados para o estudo destes tipos de limites, tais como fatoração, divisão de polinômios, multiplicação por expressões conjugadas na forma de fração unitária, etc.

Subtipos de tarefas identificadas e classificadas:

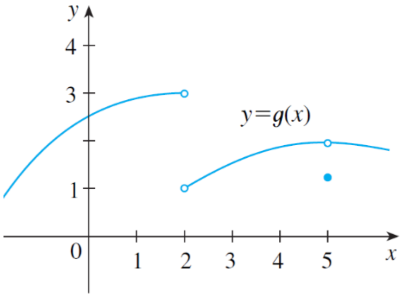
- t_1: Estimar numericamente (se possível) o valor de $\lim_{x \to a} f(x)$, sendo $f(x)$ uma função real qualquer.

  Exemplo: (STEWART, 2013, p. 81) Estime o valor de $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$.

- t_2: Encontrar (se possível) o limite de uma função real $f(x)$ através do estudo do comportamento gráfico da mesma.

  Exemplo: (STEWART, 2013, p. 85) Encontrar o valor de $\lim_{x \to 2^-} g(x)$, sendo o gráfico de $g(x)$ dado abaixo (Gráfico 2).

Gráfico 2 - Determinação do limite considerado com o auxílio do gráfico



Fonte: Stewart (2013, p. 85)

- t_3: Determinar (se possível) os limites laterais de uma função real $f(x)$ qualquer, através da investigação intuitiva da expressão matemática da mesma.

  Exemplo: (STEWART, 2013, p. 87) Encontre $\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3}$.

- t_4: Calcular $\lim_{x \to a} f(x)$, sendo $f(x)$ uma função real cujo cálculo do valor numérico para $x = a$ não apresenta indeterminações nem impossibilidades.

  Exemplo: (SWOKOWSKI, 1983, p. 67) Calcule $\lim_{x \to 3} \frac{5x^2-2x+1}{6x-7}$.

- t_5: Calcular $\lim_{x \to a} f(x)$, sendo $f(x)$ uma função real cujo cálculo do valor numérico para $x = a$ apresenta indeterminações.

  Exemplo 1: (SIMMONS, 1987, p. 100) Calcular $\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x-\sqrt{x}-2}$.

  Exemplo 2: (DI PIERRO NETTO, 1984, p. 143) Determinar o valor de $\lim_{x \to 0} \frac{x}{2-\sqrt{4-x}}$.

  Exemplo 3: (THOMAS et al., 2002, p. 98) Calcular $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$.

- t_6: Determinar (se possível) limites que envolvam o infinito.

  Exemplo 1: (STEWART, 2013, p. 122) Calcule $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}$.

<u>Exemplo 2:</u> (STEWART, 2013, p. 124) Calcule $\lim_{x \to 2^+} arctg\left(\frac{1}{x-2}\right)$.

Assim, como apresentado acima, foram tomadas as seis categorias relativas à determinação de limites de funções que serviram de base para a identificação dos subtipos de tarefas nos livros didáticos utilizados nesta pesquisa. A seguir, são apresentadas as técnicas.

4.4.2 Técnicas

O que foi apresentado até este momento possibilita sintetizar os conjuntos de técnicas matemáticas a seguir; técnicas que são propostas para serem aplicadas na determinação de limites de funções reais de uma variável real.

Técnicas para determinação de limites de funções de uma variável real

- τ_{CVN}: Calcular (alguns) valores numéricos para a função $f(x)$ nas proximidades do ponto $x = a$ (utilizando valores maiores e menores do que a).
- τ_{ACG}: Analisar o comportamento gráfico da função $f(x)$ e suas tendências.
- τ_{AIC}: Analisar intuitivamente o comportamento da função $f(x)$ através das expressões matemáticas nela existentes.
- τ_{DVN}: Determinar o valor numérico de $f(x)$ (ou seja, de todas as suas funções componentes) no ponto $x = a$.

Técnicas auxiliares

- τ_{FEA}: Fatorar as expressões algébricas existentes.
- τ_{DRE}: Desenvolver e/ou reduzir as expressões matemáticas envolvidas.
- τ_{EIE}: Eliminar as indeterminações existentes.
- τ_{MEC}: Multiplicar por expressões conjugadas na forma de fração unitária.
- τ_{FTV}: Fazer a troca de variáveis no cálculo de limites.
- τ_{DND}: Dividir o numerador e o denominador da fração algébrica pelo termo de maior potência do denominador.

Dessa forma, dependendo das características matemáticas mobilizadas na confecção dos diferentes subtipos de tarefas sobre determinação de limites, pode-se lançar mão sobre uma ou mais técnicas para serem combinadas, dando origem às técnicas mistas.

Calcular valores numéricos (τ_{CVN}): Esta técnica consiste em calcular alguns valores numéricos para a função $f(x)$ nas proximidades do ponto de tendência do limite considerado (através de valores inferiores e/ou superiores a $x = a$); desse modo, a partir das tendências numéricas observadas nos resultados, pode-se estimar (muitas vezes) o valor para o qual o limite está tendendo.

Exemplo: (STEWART, 2013, p. 81) Estime o valor de $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}$.

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1} = ?$$

ETAPA ÚNICA: Calcular alguns valores numéricos para $f(x)$ à esquerda e à direita de $x = 1$.

Dessa maneira, tem-se (Tabela 2):

Tabela 2 - Estimativa numérica para o valor do limite considerado

$x < 1$	$f(x)$
0,5	0,666667
0,9	0,526316
0,99	0,502513
0,999	0,500250
0,9999	0,500025

$x > 1$	$f(x)$
1,5	0,400000
1,1	0,476190
1,01	0,497512
1,001	0,499750
1,0001	0,499975

Fonte: Stewart (2013, p. 82)

Observando-se o comportamento dos resultados tabelados acima, pode-se conjecturar que: conforme x se aproxima de 1, por valores menores do que 1, $f(x)$ se aproxima de $0{,}5$; e conforme x se aproxima de 1, por valores maiores do que 1, $f(x)$ também se aproxima de $0{,}5$.

Conclui-se, então, que:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0,5$$

Esta técnica é explicada e justificada pelo aparato tecnológico relacionado à *ideia intuitiva de limite*, que por sua vez, repousa sobre os elementos teóricos concernentes às *definições grosso modo e formal de limite*.

A referida técnica é normalmente utilizada para a introdução ao estudo de limites com o objetivo de dar sentido às ideias de comportamento numérico e de tendência da função envolvida. Quanto à eficiência e ao alcance, em geral, trata-se de uma técnica pouco econômica em relação ao tempo gasto em sua aplicação, tendo ainda um alcance bastante limitado, pois, a prática de resolver limites através de aproximações numéricas pode esbarrar em dificuldades significativas, como por exemplo, expressões muito grandes e/ou muito complexas.

Analisar o comportamento gráfico ($\boldsymbol{\tau_{ACG}}$): A técnica aqui apresentada consiste em observar o comportamento do gráfico da função $f(x)$ nas proximidades do ponto de tendência do limite considerado (pelo lado esquerdo e/ou pelo lado direito de $x = a$); então, a partir das tendências observadas no gráfico, pode-se encontrar (muitas vezes) o valor para o qual o limite está tendendo.

A técnica τ_{ACG} é explicada e justificada pelos elementos tecnológicos relacionados à *ideia gráfica intuitiva*, que por sua vez, está embasada na teoria dos limites através das *definições grosso modo e formal*.

A referida técnica é utilizada para resolver o subtipo de tarefa t_2 com o objetivo de ampliar às ideias acerca dos limites e funções sob uma perspectiva gráfica. Em relação à eficiência e ao alcance, de maneira geral, trata-se de uma técnica bastante econômica em relação ao tempo gasto em sua utilização, mas tendo um alcance bastante limitado, pois, exige o esboço do gráfico (ou um gráfico já esboçado).

Analisar intuitivamente o comportamento ($\boldsymbol{\tau_{AIC}}$): Esta técnica consiste em conjecturar (rigorosamente) padrões ou valores para o limite de $f(x)$ a partir da observação das expressões matemáticas envolvidas na composição dela.

Exemplo: (STEWART, 2013, p. 87) Encontre $\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3}$.

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{2x}{x-3}=?$$

ETAPA ÚNICA: Fazer x tender (intuitivamente) a 3, por valores maiores do que 3.

Observa-se que quando x vai se aproximando de 3, por valores superiores a 3 (ou à direita de 3), $x-3$ vai se tornando cada vez menor, chegando próximo de zero, porém, mantendo-se positivo; já $2x$ vai tendendo a 6.

É possível, então, conjecturar que valores cada vez mais próximos de 6 estão sendo divididos por valores cada vez mais próximos de zero; logo, tal divisão tende a valores arbitrariamente grandes.

Ou seja, pode-se intuir que:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{2x}{x-3}=+\infty$$

A técnica acima referida é explicada e justificada pelo conjunto tecnológico concernente à *ideia intuitiva de limites infinitos e no infinito*, que por sua vez, tem como base teórica as *definições de limites infinitos e no infinito*.

A técnica τ_{AIC} é aplicada para resolver os subtipos de tarefa t_3 e t_6 como uma ferramenta (às vezes auxiliar) para trabalhar com expressões que tendem ao infinito ou tendem a zero. No tocante à eficiência e ao alcance, de forma geral, trata-se de uma técnica bastante econômica no que se refere ao tempo gasto em sua aplicação, tendo ainda alcance razoavelmente amplo, dada a quantidade relativamente alta de problemas que consegue dar conta.

Determinar o valor numérico ($\boldsymbol{\tau_{DVN}}$): Esta técnica consiste em substituir o x da função $f(x)$ pelo valor de a de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, efetuando-se os cálculos normalmente.

<u>Exemplo:</u> (SWOKOWSKI, 1983, p. 67) Calcule $\lim\limits_{x\to 3}\frac{5x^2-2x+1}{6x-7}$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{5x^2-2x+1}{6x-7}=?$$

ETAPA ÚNICA: Substituir o x da função por 3, efetuando-se os cálculos normalmente.

Desse modo, vem:

$$\frac{5.3^2-2.3+1}{6.3-7}=\frac{5.9-6+1}{18-7}=\frac{45-5}{11}=\frac{40}{11}$$

Logo:

$$\lim_{x \to 3} \frac{5x^2 - 2x + 1}{6x - 7} = \frac{40}{11}$$

A técnica τ_{DVN} é explicada e justificada pelos elementos tecnológicos relacionados às *propriedades operatórias dos limites* e à *propriedade da substituição direta* juntamente com as *propriedades das funções contínuas*, que estão amparadas na *definição formal de limite* e nas *definições sobre funções contínuas*.

Esta técnica é utilizada (às vezes de maneira auxiliar) na resolução dos subtipos de tarefa t_2, t_4 e t_5 para uma rápida efetuação dos cálculos que permitem chegar ao resultado desejado. Em relação à eficiência e ao alcance, de forma geral, trata-se de uma técnica bastante econômica em relação ao tempo gasto em sua utilização, tendo também um alcance bastante amplo, sendo praticamente a maneira mais comum de se determinar o valor de um limite (quando possível).

São obstáculos para a aplicação desta ferramenta técnica: as impossibilidades e as indeterminações.

Exemplo 1: Determine $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x}{x-1}$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x}{x - 1} =?$$

Aplicando-se a técnica τ_{DVN}, obtém-se:

$$\frac{1^2 + 2\,.\,1}{1 - 1} = \frac{1 + 2}{0} = \frac{3}{0}$$

Entretanto, não se pode dividir por zero (impossibilidade), então, esta técnica falha! Sendo necessária outra abordagem para superar a impossibilidade.

Exemplo 2: Determine $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} =?$$

Aplicando-se a técnica τ_{DVN}, tem-se:

$$\frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

Entretanto, a divisão de zero por zero é uma indeterminação, então, a técnica falha novamente! Sendo necessária outra abordagem para eliminar a indeterminação.

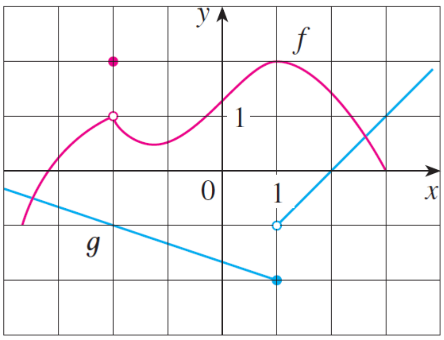
Para contornar a última dificuldade acima relatada (indeterminação), pode-se lançar mão sobre técnicas auxiliares, substituindo-se a função $f(x)$, que apresenta indeterminação em $x = a$, por outra função $g(x)$, que não apresenta tal obstáculo, mas que possui comportamento semelhante ao de $f(x)$ em pontos vizinhos. Isso será trabalhado nas técnicas mistas a seguir.

Técnicas mistas:

- $\boldsymbol{\tau_{ACG\_DVN}}$: Analisar o comportamento gráfico/ Determinar o valor numérico.

<u>Exemplo:</u> (STEWART, 2013, p. 92) Aplique as propriedades dos limites observando os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ na figura destacada abaixo (Gráfico 3) para calcular o limite logo após.

Gráfico 3 - Funções dadas para a determinação do limite considerado



Fonte: Stewart (2013, p. 92)

$\lim_{x \to -2} [f(x)g(x)]$.

$$\lim_{x \to -2} [f(x)g(x)] = ?$$

ETAPA 1: Analisar o comportamento gráfico das funções $f(x)$ e $g(x)$, quando x se aproxima de -2.

Desse modo, vê-se que:

$$lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

$$lim_{x \to 1} g(x) = -1.$$

ETAPA 2: Determinar o valor numérico do produto dos limites das funções.

Então:

$$\lim_{x \to 1} f(x). \lim_{x \to 1} g(x) = 1.(-1) = -1$$

Logo, tem-se:

$$\lim_{x \to -2} [f(x)g(x)] = -1$$

ALCANCE E EFICÁCIA: A técnica τ_{ACG_DVN} tem um alcance curto, pois apenas pode ser utilizada em tarefas do subtipo t_2, através da análise do respectivo gráfico (o que pode demandar o esboço do mesmo). Esta técnica é eficaz, pois oferece resultados confiáveis e é de rápida aplicação.

ELEMENTOS TECNOLÓGICOS: A técnica aqui apresentada é justificada pela *ideia gráfica intuitiva* e pelas *propriedades operatórias dos limites*, que por vez, são baseadas nas *definições grosso modo e formal de limites.*

- $\boldsymbol{\tau_{FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}}$: Fatorar as expressões algébricas/ Eliminar as indeterminações existentes/ Determinar o valor numérico.

Exemplo: (IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 2002, p. 40) Calcule o valor de $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = ?$$

ETAPA 1: Fatorar a expressão do numerador através da diferença de quadrados.

Então, vem:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} =$$

ETAPA 2: Eliminar a indeterminação existente.

Logo, tem-se:

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) =$$

ETAPA 3: Determinar o valor numérico.

Então:

$$= 1 + 1 = 2$$

Desse modo, conclui-se que:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

ALCANCE E EFICÁCIA: A técnica $\tau_{FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$ tem um alcance razoavelmente grande, pois pode ser aplicada em tarefas do subtipo t_5, nas quais, a função apresente expressões que possam ser convenientemente fatoradas. Esta técnica é bastante eficaz, pois além de fornecer resultados confiáveis, é de rápida aplicação (apesar de demandar algum trabalho algébrico). Existem outras combinações técnicas que também podem resolver este subtipo específico de tarefa.

ELEMENTOS TECNOLÓGICOS: A técnica aqui explanada é justificada pelo *teorema da troca para limites* e pelas *propriedades operatórias e da substituição direta para limites* juntamente com as *propriedades sobre continuidade de funções*, que por vez, são baseadas na teoria dos limites através das *definições formal e sobre funções contínuas*.

- $\boldsymbol{\tau_{MEC\_DRE\_EIE\_}\tau_{DVN}}$: Multiplicar por expressões conjugadas/ Desenvolver e/ou reduzir as expressões/ Eliminar as indeterminações existentes/ Determinar o valor numérico.

<u>Exemplo:</u> (STEWART, 2013, p. 95) Encontre $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$.

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = ?$$

ETAPA 1: Multiplicar tanto o numerador quanto o denominador da fração pela expressão conjugada do numerador (em forma de fração).

Então:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 9} + 3}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 + 9 - 9}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} =$$

ETAPA 2: Reduzir os termos.

Logo, vem:

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} =$$

ETAPA 3: Eliminar a indeterminação.

Dessa forma, tem-se:

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} =$$

ETAPA 4: Determinar o valor numérico.

Então:

$$= \frac{1}{\sqrt{0^2 + 9} + 3} = \frac{1}{\sqrt{9} + 3} = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}$$

Chega-se, então, ao seguinte resultado:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = \frac{1}{6}$$

ALCANCE E EFICÁCIA: A técnica $\tau_{MEC\_DRE\_EIE\_}\tau_{DVN}$ tem um alcance razoavelmente amplo, pois pode ser aplicada em tarefas do subtipo t_5, nas quais, a função apresente expressões com radicais – ou mesmo outras configurações matemáticas – que possam ser convenientemente manipuladas. Esta técnica é bastante eficaz, pois além de oferecer resultados válidos, é de aplicação razoavelmente rápida (apesar de demandar certo trabalho algébrico). Existem outras técnicas (às vezes com maior alcance e eficácia) que podem ser aplicadas para a determinação destes subtipos de limites de funções, como por exemplo, a regra de L'Hôpital.

> Estes exemplos devem bastar para que se entenda o significado da "expressão indeterminada". O instrumento mais eficaz para o cálculo do limite de expressões indeterminadas é a chamada "Regra de L'Hôpital", que é objeto de infindáveis exercícios nos cursos de Cálculo. (LIMA, 1997, p. 71).

ELEMENTOS TECNOLÓGICOS: Esta técnica é justificada pelo *teorema da troca para limites* e pelas *propriedades operatórias e da substituição direta para limites* em conjunto com as *propriedades sobre continuidade de funções*, que por vez, são embasadas nas *definições formal e sobre funções contínuas*.

- $\boldsymbol{\tau_{DRE\_FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}}$: Desenvolver e/ou reduzir as expressões/ Fatorar as expressões algébricas/ Eliminar as indeterminações existentes/ Determinar o valor numérico.

Exemplo: (GUIDORIZZI, 2015, p. 94) Determine $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h} = ?$$

ETAPA 1: Desenvolver, e depois, reduzir a expressão do numerador.

Então, vem:

$$\lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} =$$

ETAPA 2: Fatorar através de fator comum em evidência a expressão do numerador.

Logo, tem-se:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} =$$

ETAPA 3: Eliminar a indeterminação que se apresenta.

Vale salientar, que na eliminação aqui efetuada, não se trata de divisão por "zero", pois $h \neq 0$ *(por ser ponto de tendência).*

Desse modo, vem:

$$= \lim_{h \to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) =$$

ETAPA 4: Determinar o valor numérico (nesse caso particular, determinar a expressão).

Logo:

$$= 3x^2 + 3x\,.\,0 + 0^2 = 3x^2$$

Conclui-se, então, que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h} = 3x^2$$

ALCANCE E EFICÁCIA: A técnica $\tau_{DRE\_FEA\_EIE}\_\tau_{DVN}$ tem um alcance razoável, pois pode ser utilizada em tarefas do subtipo t_5, nas quais, a função apresente expressões que possam ser convenientemente fatoradas. Esta técnica é eficaz, pois além de fornecer resultados confiáveis, é de rápida aplicação (apesar de demandar algum trabalho algébrico). Existem outras combinações entre técnicas que podem resolver este subtipo específico de tarefa de maneira mais rápida, apesar de demandar mais conhecimento algébrico (além do que já foi apresentado acima).

ELEMENTOS TECNOLÓGICOS: A referida técnica é explicada e justificada pelo *teorema da troca para limites* e pelas *propriedades operatórias e da substituição direta para limites* em conjunto com as *propriedades sobre continuidade de funções*, que por vez, são baseadas nas *definições formal e sobre funções contínuas*.

- $\boldsymbol{\tau_{FTV\_}\tau_{AIC}}$: Fazer a troca de variáveis/ Analisar intuitivamente o comportamento.

<u>Exemplo:</u> (STEWART, 2013, p. 124) Calcule $\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$.

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = ?$$

ETAPA 1: Fazer a seguinte troca de variáveis $\frac{1}{x} = t$.

Percebe-se, então, que $t \to -\infty$, *quando* $x \to 0^-$.

Dessa forma, tem-se:

$$\lim_{t \to -\infty} e^t =$$

ETAPA 2: Analisar intuitivamente o comportamento de e^t, *quando* $t \to -\infty$.

Logo, vem:

$$= 0$$

Pode-se, então, concluir que:

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

ALCANCE E EFICÁCIA: A técnica $\tau_{FTV\_}\tau_{AIC}$ tem um alcance curto, pois pode ser utilizada em tarefas do subtipo t_6, nas quais, a função tenha características similares às do exemplo trazido acima. Esta técnica é eficaz, pois além de fornecer resultados confiáveis, é de rápida aplicação (apesar de possuir muitas limitações).

ELEMENTOS TECNOLÓGICOS: A técnica aqui apresentada é justificada pelo aparato tecnológico relacionado à *ideia intuitiva de limites infinitos e no infinito*, que por sua vez, é baseada nas *definições de limites infinitos e no infinito*.

- $\boldsymbol{\tau_{MEC\_DRE\_}\tau_{AIC}}$: Multiplicar por expressões conjugadas/ Desenvolver e/ou reduzir as expressões/ Analisar intuitivamente o comportamento.

  <u>Exemplo:</u> (STEWART, 2013, p. 123) Calcule $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = ?$$

ETAPA 1: Multiplicar a expressão dada pela expressão conjugada do numerador (na forma de fração).

Então, tem-se:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right).\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

ETAPA 2: Reduzir os termos.

Logo, vem:

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

ETAPA 3: Analisar intuitivamente o que acontece com a expressão como um todo, quando o denominador cresce arbitrariamente e o numerador permanece fixo.

Desse modo, tem-se:

$$=0$$

Então, chega-se ao seguinte resultado:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0$$

ALCANCE E EFICÁCIA: A técnica $\tau_{MEC\_DRE\_}\tau_{AIC}$ tem um alcance razoavelmente grande, pois pode ser utilizada em tarefas do subtipo t_6, nas quais, a função apresente radicais com inúmeras configurações distintas, mas que possibilitem manipulações adequadas. Esta técnica é eficaz, pois além de fornecer resultados confiáveis, é de rápida aplicação (apesar de demandar algum trabalho algébrico mais elaborado). A referida técnica pode ainda ser combinada com outras técnicas para possibilitar a resolução de tarefas do mesmo subtipo t_6 que apresentem formatos matemáticos diferentes do que foi apresentado.

ELEMENTOS TECNOLÓGICOS: Esta técnica é explicada e justificada pelo aparato tecnológico relacionado à *ideia intuitiva de limites infinitos e no infinito*, que por sua vez, é embasada nas *definições de limites infinitos e no infinito*.

- $\boldsymbol{\tau_{FEA\_}\tau_{AIC}}$: Fatorar as expressões algébricas/ Analisar intuitivamente o comportamento.

<u>Exemplo:</u> (STEWART, 2013, p. 125) Encontre $\lim_{x\to+\infty}(x^2-x)$.

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-x)=?$$

ETAPA 1: Fatorar através de fator comum em evidência.

Então, vem:

$$\lim_{x\to+\infty} x(x-1) =$$

ETAPA 2: Analisar intuitivamente o comportamento de x e de $x-1$, quando $x \to +\infty$.

Pode-se perceber que tanto $x \to +\infty$ como $x-1 \to +\infty$; logo, o mesmo acontece com o produto entre ambos (cresce arbitrariamente).

Logo, tem-se:

$$= +\infty$$

Então, conclui-se que:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 - x) = +\infty$$

ALCANCE E EFICÁCIA: A técnica $\tau_{FEA\_}\tau_{AIC}$ tem um alcance curto, pois só pode ser utilizada em tarefas do subtipo t_6, nas quais, a expressão da função possa ser convenientemente fatorada. Esta técnica não é muito eficaz, pois existem outras formas mais simples, rápidas e com demonstrações fáceis para abordar esse tipo de problema.

ELEMENTOS TECNOLÓGICOS: A referida técnica é explicada e justificada pelo conjunto tecnológico relativo à *ideia intuitiva de limites infinitos e no infinito*, que por sua vez, baseia-se nas *definições de limites infinitos e no infinito*.

- $\boldsymbol{\tau_{DND\_}\tau_{AIC}}$: Dividir o numerador e o denominador/ Analisar intuitivamente o comportamento.

Exemplo: (STEWART, 2013, p. 115) Encontre $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{3-x}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{3-x} = ?$$

ETAPA 1: Dividir o numerador e o denominador da fração pelo termo de maior potência de x do denominador.

Então, vem:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x}+\frac{x}{x}}{\frac{3}{x}-\frac{x}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\frac{3}{x}-1} =$$

ETAPA 2: Analisar o comportamento de cada expressão da última fração acima, quando $x \to +\infty$; para poder entender o que acontece com a expressão como um todo.

Vê-se, então, que a expressão que está no numerador cresce arbitrariamente, quando $x \to +\infty$; enquanto a expressão do denominador tende a -1.

Logo, tem-se:

$$= -\infty$$

Dessa maneira, chega-se a seguinte conclusão:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x} = -\infty$$

ALCANCE E EFICÁCIA: A técnica $\tau_{DND\_}\tau_{AIC}$ tem um alcance razoável, pois pode ser utilizada em tarefas do subtipo t_6, nas quais, a função permita a manipulação necessária para a aplicação da segunda parte da técnica. Esta técnica é bastante eficaz, pois além de fornecer resultados confiáveis, é de rápida aplicação. A referida técnica pode ainda ser combinada com outras técnicas para possibilitar a resolução de tarefas do mesmo subtipo t_6 que apresentem configurações matemáticas distintas.

ELEMENTOS TECNOLÓGICOS: A técnica aqui apresentada é explicada e justificada pela *ideia intuitiva de limites infinitos e no infinito*, que por sua vez, repousa sobre as *definições de limites infinitos e no infinito*.

4.4.3 Tecnologias

Tudo que foi apresentado até este momento possibilita identificar o seguinte conjunto de elementos tecnológicos, que por sua vez, serve para explicar e justificar as técnicas elaboradas (indicadas) para a determinação de limites de funções reais de uma variável: ideia intuitiva de limite, ideia gráfica intuitiva de limite, ideia intuitiva de limites infinitos e no infinito, propriedades operatórias dos limites, propriedade da substituição direta, teorema da troca para limites e propriedades das funções contínuas.

- ✓ **Ideia intuitiva de limite ($\boldsymbol{\theta_{IIL}}$)** de função de uma variável real.

Para expor a *ideia intuitiva de limite* proposta neste estudo, segue-se o exemplo ilustrado e comentado abaixo.

<u>Exemplo:</u> (STEWART, 2013, p.83) Estime o valor de $\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = ?$$

1º MOMENTO: Calcular alguns valores para $\frac{sen\, x}{x}$ *nas proximidades de* $x = 0$ *(tanto à esquerda como à direita do ponto de tendência do limite considerado). Resumindo na tabela a seguir todos os resultados obtidos com a ajuda de uma calculadora eletrônica no 1º MOMENTO, tem-se (Tabela 3):*

Tabela 3 - Estimativa numérica para o valor do limite considerado

x	$\frac{\text{sen}\, x}{x}$
$\pm 1{,}0$	0,84147098
$\pm 0{,}5$	0,95885108
$\pm 0{,}4$	0,97354586
$\pm 0{,}3$	0,98506736
$\pm 0{,}2$	0,99334665
$\pm 0{,}1$	0,99833417
$\pm 0{,}05$	0,99958339
$\pm 0{,}01$	0,99998333
$\pm 0{,}005$	0,99999583
$\pm 0{,}001$	0,99999983

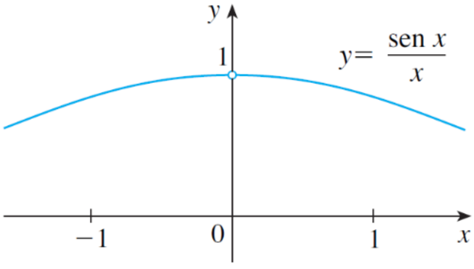
Fonte: Stewart (2013, p. 83)

Então, a partir dos resultados resumidos acima, pode-se estimar (inicialmente) que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$$

2º MOMENTO: Analisar o comportamento do gráfico a seguir (Gráfico 4), quando x *se aproxima de* 0 *(tanto por valores inferiores como por valores superiores a* 0*).*

Gráfico 4 - Análise do comportamento do gráfico da função do limite considerado



Fonte: Stewart (2013, p. 83)

Então, a partir das tendências constatadas no gráfico, pode-se estimar (novamente) que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$$

A análise intuitiva do comportamento da função (em termos numéricos) feita no 1º MOMENTO forneceu um resultado que confere com a análise gráfica intuitiva realizada no 2º MOMENTO. O próprio método explicitado e comentado no 1º MOMENTO consegue exprimir a *ideia intuitiva de limite* aqui pretendida.

ELEMENTOS TEÓRICOS: A tecnologia θ_{IIL}, vista nesta secção, é baseada nas *definições grosso modo e formal de limites.*

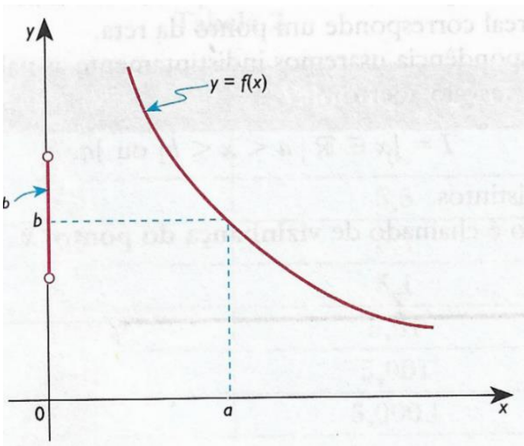
- ✓ **Ideia gráfica intuitiva ($\boldsymbol{\theta_{IGI}}$)** de limite de uma função.

> [DEFINIÇÃO 1:] Vizinhança de $\overline{x}$ é qualquer intervalo aberto ao qual $\overline{x}$ pertença.
> (...)
> [DEFINIÇÃO 2:] Vizinhança simétrica de $\overline{x}$ é qualquer intervalo aberto do qual $\overline{x}$ é ponto médio.
> (...)
> [DEFINIÇÃO 3:] Dizemos que o limite de $y = f(x)$ é b, quando x tende a a, se, para qualquer vizinhança V_b de b, existir em correspondência uma conveniente vizinhança V_a de a, tal que, para qualquer $x \in V_a$ (com $x \neq a$), se tenha $f(x) \in V_b$.
> $$\lim_{x \to a} f(x) = b$$
> (BIANCHINI; PACCOLLA, 1997, p. 217-219).

Através da análise gráfica intuitiva da função $y = f(x)$ a seguir (Figura 16), tem-se:

Se fixada arbitrariamente uma vizinhança V_b de b...

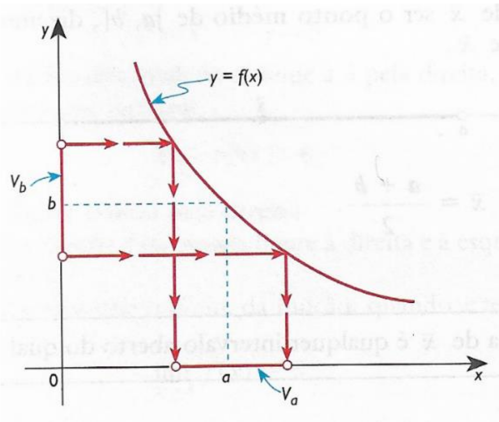
Figura 16 - Ideia gráfica intuitiva de limite



Fonte: Bianchini e Paccola (1997, p. 218)

... pode-se encontrar uma conveniente vizinhança V_a de a... (Figura 17)

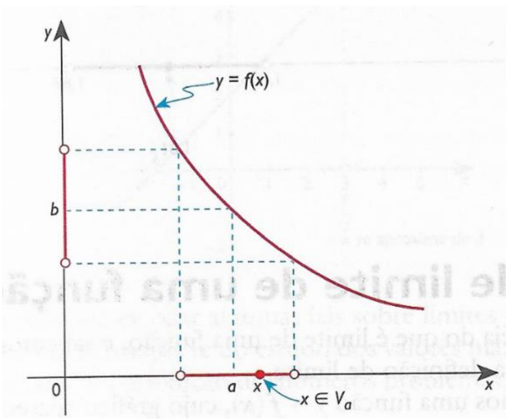
Figura 17 - Ideia gráfica intuitiva de limite



Fonte: Bianchini e Paccola (1997, p. 218)

... tal que, para qualquer valor x pertencente a V_a, com $x \neq a$... (Figura 18)

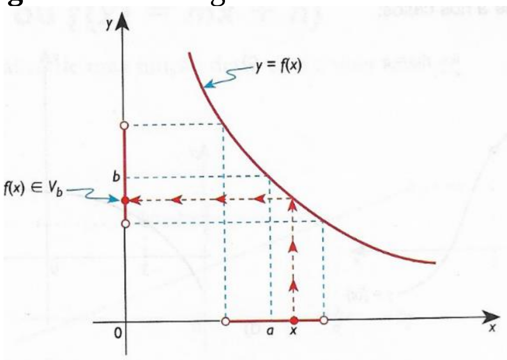
Figura 18 - Ideia gráfica intuitiva de limite



Fonte: Bianchini e Paccola (1997, p. 218)

... se tenha $f(x) \in V_b$... (Figura 19)

Figura 19 - Ideia gráfica intuitiva de limite



Fonte: Bianchini e Paccola (1997, p. 219)

... diz-se, então, que o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a b, e é indicado por

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

ELEMENTOS TEÓRICOS: A tecnologia θ_{IGI}, aqui apresentada, repousa sobre as *definições grosso modo e formal de limites.*

- ✓ **Ideia intuitiva (de limites) infinitos (θ_{III})** e no infinito (positivo e negativo)

> [Definição] Dizemos que:
> $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$
> (...)
> se, fixado $\varepsilon > 0$, arbitrariamente pequeno, existir um conveniente valor $\bar{x}$ de x, tal que, para todo $x > \bar{x}$, tenhamos $|f(x) - b| < \varepsilon$.
> (BIANCHINI; PACCOLLA, 1997, p. 236).

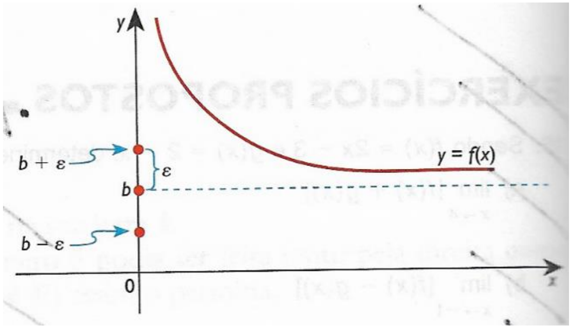
Para esclarecer a definição fornecida acima, seja a seguinte explicação intuitiva:

Diz-se que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b,$$

se fixado arbitrariamente $\varepsilon > 0$... (Figura 20)

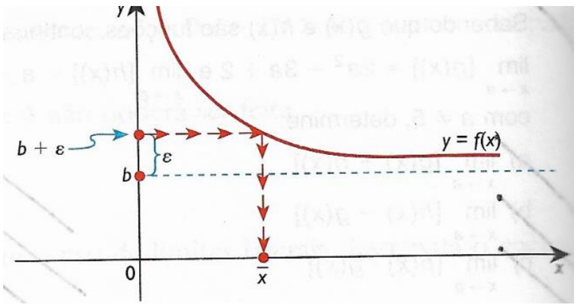
Figura 20 - Limite no infinito positivo



Fonte: Bianchini e Paccolla (1997, p. 236)

... existe $\bar{x}$ conveniente, tal que, ... (Figura 21)

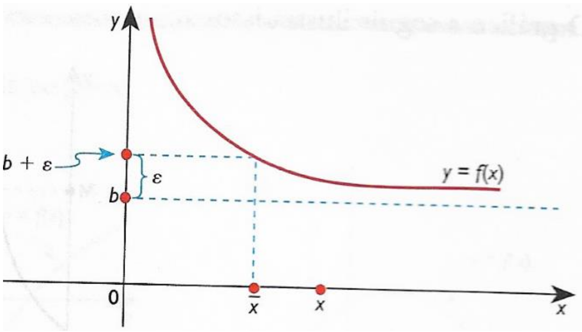
Figura 21 - Limite no infinito positivo



Fonte: Bianchini e Paccolla (1997, p. 236)

... para qualquer $x > \overline{x}$... (Figura 22)

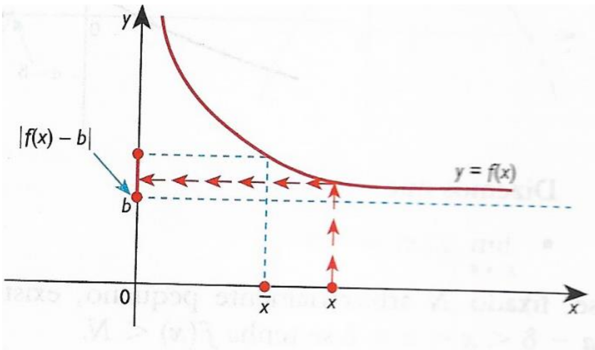
Figura 22 - Limite no infinito positivo



Fonte: Bianchini e Paccolla (1997, p. 237)

... se tenha $|f(x) - b| < \varepsilon$ (Figura 23).

Figura 23 - Limite no infinito positivo

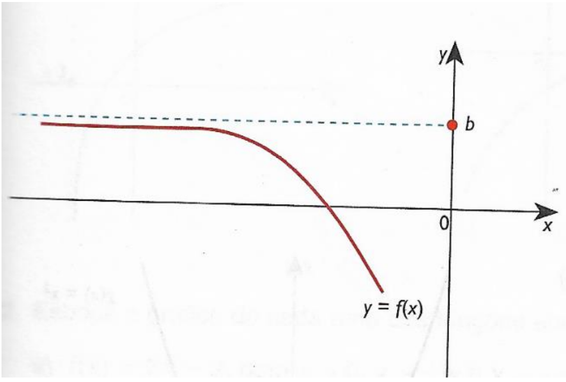


Fonte: Bianchini e Paccolla (1997, p. 237)

Os demais casos podem ser observados nos gráficos a seguir (Figuras 24 - 27):

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

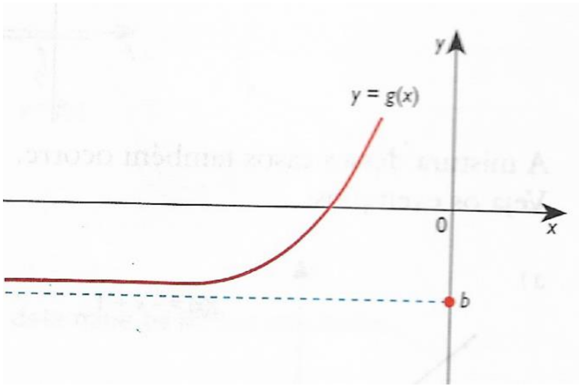
Figura 24 - Limite no infinito negativo



Fonte: Bianchini e Paccolla (1997, p. 237)

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = b$$

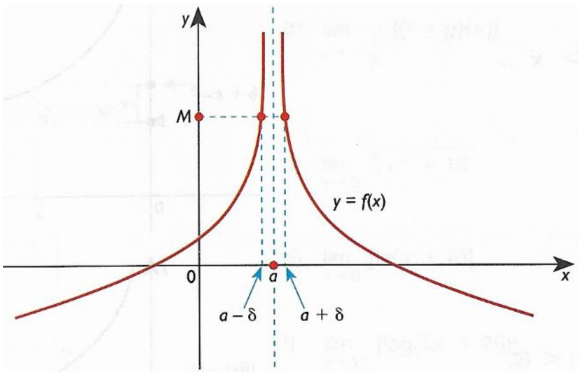
Figura 25 - Limite no infinito negativo



Fonte: Bianchini e Paccolla (1997, p. 237)

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

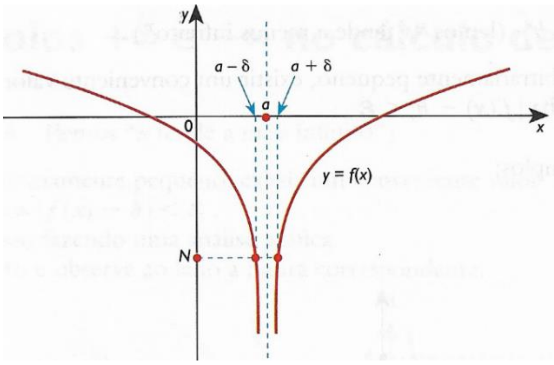
Figura 26 - Limite infinito positivo



Fonte: Bianchini e Paccolla (1997, p. 238)

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Figura 27 - Limite infinito negativo



Fonte: Bianchini e Paccolla (1997, p. 238)

ELEMENTOS TEÓRICOS: A tecnologia θ_{III}, aqui exposta, repousa sobre as *definições de limites infinitos e no infinito (positivo e negativo).*

✓ **Propriedades operatórias dos limites ($\boldsymbol{\theta_{POL}}$).**

> Consideremos as funções reais f e g, tais que:
>
> $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$
>
> valem as propriedades seguintes:
>
> PL1 – $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$.
> PL2 – $\lim_{x \to x_0} k \,.\, f(x) = k \,.\, L_1$ $(k \in \mathbb{R})$.
> PL3 – $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = L_1 - L_2$.
> PL4 – $\lim_{x \to x_0} f(x).\, g(x) = L_1 \,.\, L_2$.
> PL5 – $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = L^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
> PL6 – $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ $(se\ L_2 \neq 0)$.
> [PL7] – $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}, se\ n \in \mathbb{N}^*\ e\ L \geq 0\ ou\ se\ n\ é\ ímpar\ e\ L \leq 0$. (ANTAR NETO et al., 2010, p. 111).

A propriedade identificada como PL1 acima pode ser ampliada para um determinado número n (finito) de funções da seguinte forma:

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{x \to x_0} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

Do mesmo modo, a propriedade PL4 pode ser ampliada para um certo número n (finito) de funções da seguinte maneira:

$$\lim_{x\to x_0}\prod_{i=1}^{n} f_i(x) = \prod_{i=1}^{n}\lim_{x\to x_0} f_i(x) = \prod_{i=1}^{n} L_i$$

As propriedades operatórias dos limites geram, por consequência, lemas que são extremamente úteis na resolução de problemas.

> **Lema 1**
> $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{x\to a}(f(x) - L) = 0$.
> (...)
> **Lema 2**
> $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to a}(f\ .g)(x) = 0$.
> (...)
> **Lema 3**
> Se $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$, então existem δ e N positivos, tais que, $0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x)| > N$.
> (...)
> **Lema 4**
> Se $\lim_{x\to a} g(x) = M \neq 0$, então $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$.
> [**Limite da função polinomial**]
> $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)\, , sendo\ P(x) = a_0\, .x^n + a_1\, .x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, .x + a_n$.
> (IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 2002, p. 35-37).

ELEMENTOS TEÓRICOS: A tecnologia θ_{POL}, aqui apresentada, é baseada na *definição formal de limite*.

- ✓ **Propriedade da substituição direta ($\boldsymbol{\theta_{PSD}}$).**

"Se f for uma função polinomial ou racional e a estiver no domínio de f, então $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$" (STEWART, 2013).

ELEMENTOS TEÓRICOS: A tecnologia θ_{PSD}, aqui apresentada, repousa sobre as *definições formais acerca de continuidade de funções*.

- ✓ **Teorema da troca para limites ($\boldsymbol{\theta_{TTL}}$)** de funções.

> Seja $V^*(x_0, \delta)$ uma vizinhança reduzida de x_0. Admitamos que f e g sejam funções, tais que, todo $x \in V^*(x_0, \delta)$, se tenha $f(x) = g(x)$. Sendo assim,

> se $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$
> então, também, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.
> (ANTAR NETO et al., 2010, p. 109).

Explicando de maneira mais simples, se as funções $f(x)$ e $g(x)$ coincidem numa vizinhança reduzida de x_0, ao calcular-se o limite de $f(x)$ para $x \to x_0$, pode-se trocar $f(x)$ por $g(x)$, sem que ocorra alteração no valor do limite.

- ✓ **Propriedades das funções contínuas ($\boldsymbol{\theta_{PFC}}$)** em relação ao cálculo de limites.

> **Propriedade 1:**
> Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas no ponto a, então são contínuas em a as funções: $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x).g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ para $g(a) \neq 0$.
> **Propriedade 2:**
> Se $f(x)$ é contínua no ponto $x = a$ e $g(x)$ é contínua no ponto $f(a)$, então a função composta $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ é contínua no ponto $x = a$.
> **Propriedade 3:**
> Em funções contínuas, os símbolos que indicam o limite e a função podem ser permutados. (BIANCHINI; PACCOLA, 1997, p. 233-234).

ELEMENTOS TEÓRICOS: A tecnologia θ_{PFC}, aqui apresentada, tem por base as *definições formais acerca de continuidade de funções*.

4.4.4 Teorias

Os estudos desenvolvidos até o presente momento permitem ainda identificar os elementos teóricos a seguir que servem como base de sustentação para o aparato tecnológico já apresentado anteriormente, e que por sua vez, explica e justifica as técnicas que foram elaboradas para a determinação de limites de funções: definição formal de limite, definição grosso modo de limite, definições de limites infinitos e definições sobre funções contínuas.

- ✓ **Definição formal de limite ($\boldsymbol{\Theta_{DFL}}$)**.

> **DEFINIÇÃO**
> Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo a (exceto possivelmente no próprio a) e seja L um número real. A afirmação
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
> significa que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que,
> se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$. (SWOKOWSKI, 1983, p. 57).

- ✓ **Definição grosso modo ($\boldsymbol{\Theta_{DGM}}$)** de limite de função de uma variável real.

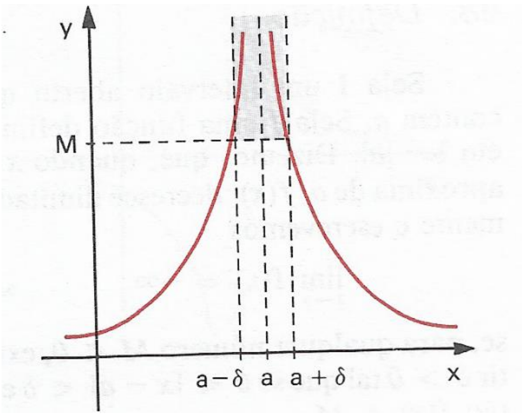
> [Definição] *Grosso modo*, isso significa que os valores de $f(x)$ tendem a L, quando x tende a a. Em outras palavras, os valores de $f(x)$ tendem a ficar cada vez mais próximos do número L à medida que x tende ao número a (por qualquer lado de a), mas com $x \neq a$.
> (...)
> Uma notação alternativa para
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
> é
> $$f(x) \to L, \text{ quando } x \to a$$
> que geralmente é lida como "$f(x)$ tende a L, quando x tende a a". (STEWART, 2013, p. 81).

- ✓ **Definições de limites infinitos ($\boldsymbol{\Theta_{DLI}}$)** e no infinito (positivo e negativo).

> DEFINIÇÃO [1:] Seja I um intervalo aberto que contém o número real a. Seja f uma função definida em $I - \{a\}$. Dizemos que, quando x se aproxima de a, $f(x)$ cresce ilimitadamente, (...) se, para qualquer número real $M > 0$, existir $\delta > 0$, tal que, se $0 < |x - a| < \delta$, então $f(x) > M$.
> $$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$
> (IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 2002, p. 55).

A Figura 28 mostra o gráfico do limite infinito positivo.

Figura 28 - Limite infinito positivo

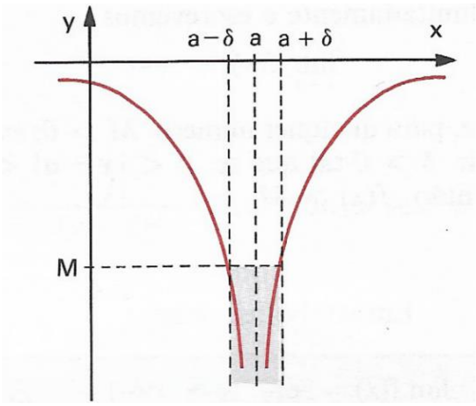


Fonte: Iezzi, Murakami e Machado (2002, p. 55)

> DEFINIÇÃO [2:] Seja I um intervalo real aberto que contém a. Seja f uma função definida em $I - \{a\}$. Dizemos que, quando x se aproxima de a, $f(x)$ decresce ilimitadamente, (...) se, para qualquer número real $M < 0$, existir $\delta > 0$, tal que, se $0 < |x - a| < \delta$, então $f(x) < M$.
> $$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$
> (IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 2002, p. 56).

A Figura 29 mostra o gráfico do limite infinito negativo.

Figura 29 - Limite infinito negativo

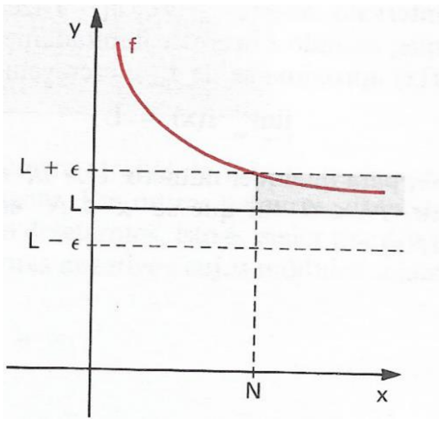


Fonte: Iezzi, Murakami e Machado (2002, p. 56)

> DEFINIÇÃO [3:] Seja f uma função real definida em um intervalo aberto $]a, +\infty[$. Dizemos que, quando x cresce ilimitadamente, $f(x)$ se aproxima de L, (...) se, para qualquer número $\varepsilon > 0$, existir $N > 0$, tal que, se $x < N$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.
> $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$
> (IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 2002, p. 71).

A Figura 30 mostra o gráfico do limite no infinito positivo.

Figura 30 - Limite no infinito positivo

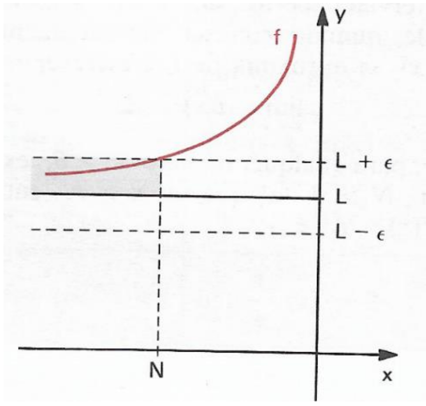


Fonte: Iezzi, Murakami e Machado (2002, p. 71)

> DEFINIÇÃO [4:] Seja f uma função definida em um intervalo aberto $]-\infty, a[$. Dizemos que, quando x decresce ilimitadamente, $f(x)$ aproxima-se de L, (...) se, para qualquer número $\varepsilon > 0$, existir $N < 0$, tal que, se $x < N$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.
> $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$
> (IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 2002, p. 72).

A Figura 31 mostra o gráfico do limite no infinito negativo.

Figura 31 - Limite no infinito negativo



Fonte: Iezzi, Murakami e Machado (2002, p. 72)

PROPRIEDADES DOS LIMITES INFINITOS [E NO INFINITO]

> Sejam duas funções f e g que podem ter, para $x \to x_0$, limites infinitos ou não, e vejamos o que se pode dizer sobre os limites das funções:
> $$f + g, f \cdot g, \frac{f}{g}$$
> Os vários casos encontram-se resumidos nas tabelas a seguir **(Tabelas 4 - 6)**. As conclusões ali apresentadas valem igualmente para os casos dos limites laterais, com $x \to {x_0}^-$ ou $x \to {x_0}^+$ e também, com alguma adaptação, para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$. (ANTAR NETO et al., 2010, p. 146, grifo nosso).

Tabela 4 - Limite da soma

	Se f(x) tende a	e g(x) tende a	então f(x) + g(x) tende a
1	L	$+\infty$	$+\infty$
2	L	$-\infty$	$-\infty$
3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
4	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
5	$+\infty$	$-\infty$	?
6	$-\infty$	$+\infty$	?

Fonte: Antar Neto et al. (2010, p. 146)

Tabela 5 - Limite do produto

	Se f(x) tende a	e g(x) tende a	então f(x) · g(x) tende a
1	L > 0	$+\infty$	$+\infty$
2	L > 0	$-\infty$	$-\infty$
3	L < 0	$+\infty$	$-\infty$
4	L < 0	$-\infty$	$+\infty$
5	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
6	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
7	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
8	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
9	L = 0	$+\infty$	?
10	L = 0	$-\infty$	?

Fonte: Antar Neto et al. (2010, p. 146)

Tabela 6 - Limite do quociente

	Se f(x) tende a	e g(x) tende a	Então $\frac{f(x)}{g(x)}$ tende a
1	$+\infty$	$L > 0$	$+\infty$
2	$+\infty$	$L < 0$	$-\infty$
3	$+\infty$	$L = 0$	$\begin{cases} +\infty \text{ se } g(x) > 0 \text{ em uma vizinhança de } x_0 \\ -\infty \text{ se } g(x) < 0 \text{ em uma vizinhança de } x_0 \end{cases}$
4	$-\infty$	$L > 0$	$-\infty$
5	$-\infty$	$L < 0$	$+\infty$
6	$-\infty$	$L = 0$	$\begin{cases} -\infty \text{ se } g(x) > 0 \text{ em uma vizinhança de } x_0 \\ +\infty \text{ se } g(x) < 0 \text{ em uma vizinhança de } x_0 \end{cases}$
7	$L_1 > 0$	$L_2 = 0$	$\begin{cases} +\infty \text{ se } g(x) > 0 \text{ em uma vizinhança de } x_0 \\ -\infty \text{ se } g(x) < 0 \text{ em uma vizinhança de } x_0 \end{cases}$
8	$L_1 < 0$	$L_2 = 0$	$\begin{cases} -\infty \text{ se } g(x) > 0 \text{ em uma vizinhança de } x_0 \\ +\infty \text{ se } g(x) < 0 \text{ em uma vizinhança de } x_0 \end{cases}$
9	L	$+\infty$	0
10	L	$-\infty$	0
11	$+\infty$	$+\infty$	?
12	$+\infty$	$-\infty$	?
13	$-\infty$	$+\infty$	?
14	$-\infty$	$-\infty$	?
15	$L_1 = 0$	$L_2 = 0$	?

Fonte: Antar Neto et al. (2010, p. 147)

- ✓ **Definições sobre funções contínuas (Θ_{DFC}):**

Definição
Seja f uma função definida em um intervalo aberto I e a um elemento de I. Dizemos que f é contínua em a, se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Notemos que para falarmos em continuidade de uma função em um ponto é necessário que este ponto pertença ao domínio da função.
Da definição decorre que, se f é contínua em a, então as três condições deverão ser satisfeitas:
1) existe $f(a)$
2) existe $\lim_{x \to a} f(x)$
3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
(IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 2002, p. 115).

Outra definição importante acerca de continuidade de uma função pode ser dada do seguinte modo "Dizemos que uma função f é contínua em um intervalo aberto $]a, b[$, se f for contínua em qualquer elemento x desse intervalo." (IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 2002).

Os elementos teóricos aqui abordados podem ser aplicados em processos de demonstração ou prova matemática acerca das tecnologias que foram trazidas no presente estudo.

<u>Exemplo:</u> (ANTAR NETO et al., 2010, p. 112) Demonstrar a propriedade PL1 (que está descrita na secção das tecnologias deste trabalho).

Seja a PL1 em forma de teorema (se ..., então ...):

Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = M$, *então* $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = L + M$

Deve-se, então, provar que:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \mid 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |(f+g)(x) - (L+M)| < \varepsilon$$

Para todo $\varepsilon > 0$*; pode-se, então, considerar* $\frac{\varepsilon}{2}$.

Desse modo, vem:

$$\exists\delta_1 > 0 \mid 0 < |x-a| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists\delta_2 > 0 \mid 0 < |x-a| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pode-se também considerar que $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, *e por consequência,* $\delta \leq \delta_1$ *e* $\delta \leq \delta_2$.

Logo, tem-se:

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \mid 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Pode-se, dessa maneira, aplicar a desigualdade triangular.

Da seguinte forma:

$$|f(x) - L| + |g(x) - M| \leq |f(x) + g(x) - (L+M)| = |(f+g)(x) - (L+M)|$$

Logo, vem:

$$\exists\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \mid 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |(f+g)(x) - (L+M)| < \varepsilon$$

O que conclui a demonstração!

4.4.5 Síntese da Modelização

Resumindo, apresenta-se no quadro abaixo (Quadro 14) as organizações matemáticas pontuais, construídas a partir das praxeologias matemáticas de Santos (2013), relativas aos subtipos de tarefas sobre determinação de limites de funções de uma variável real que se apresentam no livro *Cálculo de Stewart (2013)*.

Quadro 14 - Praxeologias matemáticas pontuais relativas à determinação de limites de funções

Subtipos de tarefas tarefas	**Técnicas**	**Tecnologias**	**Teorias**
t_1	τ_{CVN}	θ_{IIL}	Θ_{DGM_DFL}
t_2	τ_{ACG}	θ_{IGI}	
	τ_{ACG_DVN}	θ_{IGI_POL}	
t_3	τ_{AIC}	θ_{III}	Θ_{DLI}
t_4	τ_{DVN}	θ_{POL_PSD}; θ_{PFC}	Θ_{DFL}; Θ_{DFC}
t_5	$\tau_{FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$	θ_{TTL}; θ_{POL_PSD}; θ_{PFC}	
	$\tau_{MEC\_DRE\_EIE\_}\tau_{DVN}$		
	$\tau_{DRE\_FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$		
t_6	τ_{AIC}	θ_{III}	Θ_{DLI}
	$\tau_{FTV\_}\tau_{AIC}$		
	$\tau_{MEC\_DRE\_}\tau_{AIC}$		
	$\tau_{FEA\_}\tau_{AIC}$		
	$\tau_{DND\_}\tau_{AIC}$		

Fonte: o autor (2019)

Dependendo da configuração que se apresentar na expressão matemática da função em $\lim_{x \to a} f(x)$ ou $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$, pode-se combinar as diferentes técnicas acima elencadas para o estudo do limite considerado.

A observação realizada através da delimitação das praxeologias didáticas e das praxeologias matemáticas (os seis subtipos de tarefas, as doze técnicas, as seis tecnologias e as quatro teorias) forneceu elementos de respostas às questões da pesquisa apresentada.

5 ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DE LIMITE DE FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL REAL

No presente capítulo, são apresentadas as análises praxeológicas das duas obras selecionadas, e a síntese conclusiva entre ambas.

5.1 LIVRO: O CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA DE LEITHOLD (1977)

Nesta secção são apresentadas: a descrição do livro, a organização e a distribuição dos conteúdos do capítulo analisado, a análise praxeológica sobre o ensino de limites de funções, e a síntese avaliativa do livro.

5.1.1 Descrição, Organização e Distribuição dos Conteúdos

No referido livro, os conteúdos matemáticos são organizados por intermédio de capítulos identificados por títulos que explicitam os temas trabalhados, os quais, por sua vez, são subdivididos em vários tópicos. Tais tópicos tratam de conceitos e/ou procedimentos ligados ao conteúdo dominante de cada capítulo.

Não aparecem (na maioria das vezes) tópicos especiais para tratar de contextualização nem mesmo de exercícios interativos. Na verdade, ao final de cada tópico do capítulo existem exercícios em razoável quantidade e variedade.

O capítulo destinado ao objeto matemático limites é distribuído da seguinte maneira (Capítulo 2: *Funções, Limites e Continuidade*):

1) Funções e Seus Gráficos;
2) Notação Funcional e Operações Sobre Funções;
3) Tipos de Funções e Algumas Funções Especiais;
4) O Limite de uma Função;
5) Teoremas Sobre Limites de Funções;
6) Limites Unilaterais;
7) Limites no Infinito;
8) Limites Infinitos;
9) Assíntotas Horizontais e Verticais;
10) Teoremas Adicionais Sobre Limites de Funções;

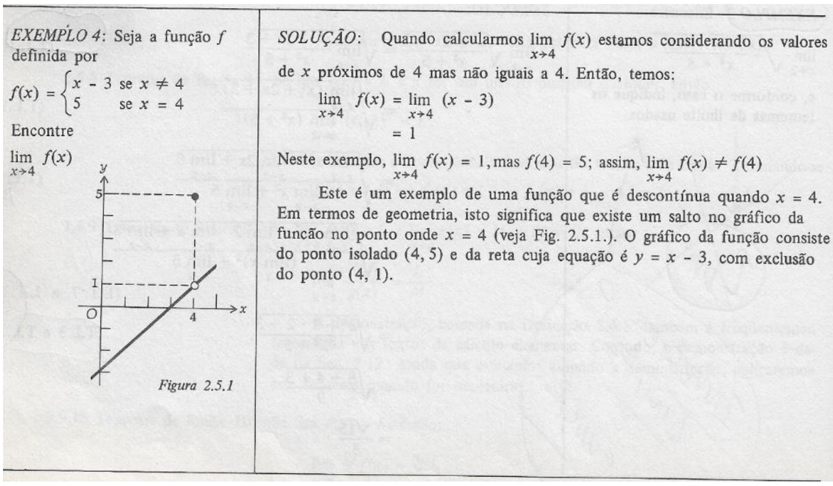
11) Continuidade de uma Função em um Número;
12) Teoremas Sobre Continuidade;
13) Continuidade em um Intervalo.

5.1.2 Análise Praxeológica sobre o Ensino de Limites de Funções

São especificados abaixo os componentes das análises, a saber: (1) exploração do subtipo de tarefa t_2 e elaboração da técnica τ_{ACG}, constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica τ_{ACG}, trabalho da técnica τ_{ACG}, (2) exploração do subtipo de tarefa t_3 e elaboração da técnica τ_{AIC}, constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica τ_{AIC}, trabalho da técnica τ_{AIC}, (3) exploração do subtipo de tarefa t_4 e elaboração da técnica τ_{DVN}, constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica τ_{DVN}, avaliação dos elementos técnico-tecnológicos, trabalho da técnica τ_{DVN}, (4) exploração do subtipo de tarefa t_5 e elaboração da técnica mista $\tau_{FEA\_EIE}\_\tau_{DVN}$, constituição do ambiente tecnológico e elaboração da técnica mista $\tau_{FEA\_EIE}\_\tau_{DVN}$, trabalho da técnica $\tau_{FEA\_EIE}\_\tau_{DVN}$, e (5) exploração do subtipo de tarefa t_6 e elaboração da técnica mista $\tau_{DND}\_\tau_{AIC}$, constituição do ambiente tecnológico e elaboração da técnica mista $\tau_{DND}\_\tau_{AIC}$, trabalho da técnica $\tau_{DND}\_\tau_{AIC}$.

(1) Exploração do subtipo de tarefa t_2 e elaboração da técnica τ_{ACG}. Esse momento se dá com a apresentação do processo de determinação do valor de $\lim_{x \to 4} f(x)$, que corresponde à realização do subtipo de tarefa t_2 (encontrar o limite de $f(x)$ com o auxílio do gráfico), conforme pode ser constatado na Figura 32 logo abaixo:

Figura 32 - Determinação de limites por meio da técnica τ_{ACG}



EXEMPLO 4: Seja a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x \neq 4 \\ 5 & \text{se } x = 4 \end{cases}$$

Encontre $\lim_{x \to 4} f(x)$

Figura 2.5.1

SOLUÇÃO: Quando calcularmos $\lim_{x \to 4} f(x)$ estamos considerando os valores de x próximos de 4 mas não iguais a 4. Então, temos:

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} (x - 3) = 1$$

Neste exemplo, $\lim_{x \to 4} f(x) = 1$, mas $f(4) = 5$; assim, $\lim_{x \to 4} f(x) \neq f(4)$

Este é um exemplo de uma função que é descontínua quando $x = 4$. Em termos de geometria, isto significa que existe um salto no gráfico da função no ponto onde $x = 4$ (veja Fig. 2.5.1.). O gráfico da função consiste do ponto isolado (4, 5) e da reta cuja equação é $y = x - 3$, com exclusão do ponto (4, 1).

Fonte: Leithold (1977, p. 72)

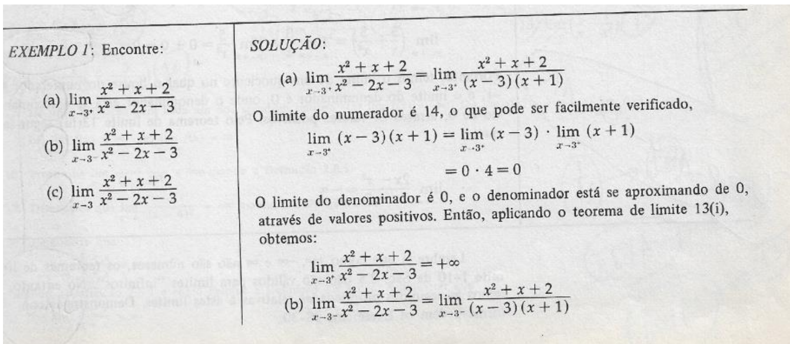
Constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica $\boldsymbol{\tau_{ACG}}$. O momento de sistematização da referida técnica coincide com o momento de elaboração dela, segundo a figura 32, assim explicado: *Estamos considerando os valores de x próximos de* 4*, mas não iguais a* 4*. Então, temos:* $\lim_{x \to 4} f(x) = 1$. Essa técnica se baseia implicitamente nos elementos tecnológicos relacionados à *ideia gráfica intuitiva* (θ_{IGI}).

Esse momento de oficialização da técnica τ_{ACG} é seguido pela apresentação de alguns comentários relativos à descontinuidade da função dada em $x = 4$, mostrando que esse fato não afeta o valor do limite, pois, para limites, interessa o que ocorre nas proximidades do ponto de tendência, não no ponto em si mesmo.

Trabalho da técnica $\boldsymbol{\tau_{ACG}}$. Esse momento é proposto para ser realizado no *Exemplo 4* da página 97, no qual, o autor mostra como se pode estudar os limites laterais de uma função através da técnica τ_{ACG}.

(2) Exploração do subtipo de tarefa $\boldsymbol{t_3}$ e elaboração da técnica $\boldsymbol{\tau_{AIC}}$. Esse momento é proposto para se concretizar através do estudo de $\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3}$, que corresponde à realização do subtipo de tarefa t_3 (determinar os limites laterais de $f(x)$ com o auxílio de uma investigação intuitiva da expressão matemática envolvida), conforme pode ser observado no extrato da Figura 33:

Figura 33 - Extrato com o modelo de investigação de limites por meio da técnica τ_{AIC}


EXEMPLO 1: Encontre:

(a) $\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3}$

(b) $\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3}$

(c) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3}$

SOLUÇÃO:

(a) $\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{(x - 3)(x + 1)}$

O limite do numerador é 14, o que pode ser facilmente verificado,

$$\lim_{x \to 3^+} (x - 3)(x + 1) = \lim_{x \to 3^+} (x - 3) \cdot \lim_{x \to 3^+} (x + 1)$$
$$= 0 \cdot 4 = 0$$

O limite do denominador é 0, e o denominador está se aproximando de 0, através de valores positivos. Então, aplicando o teorema de limite 13(i), obtemos:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = +\infty$$

(b) $\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{(x - 3)(x + 1)}$

Fonte: Leithold (1977, p. 85)

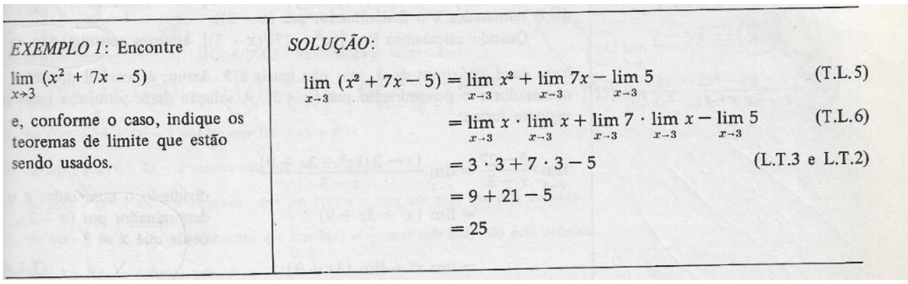
Constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica $\boldsymbol{\tau_{AIC}}$. De fato, os momentos de exploração do subtipo de tarefa t_3 e elaboração da técnica τ_{AIC}, bem como de constituição do ambiente tecnológico e sistematização, acontecem concomitantemente. Como se pode verificar, a partir do extrato da figura 33, a sistematização da técnica τ_{AIC} é realizada implicitamente por elementos tecnológicos que constituem a *ideia intuitiva de limites infinitos*

(θ_{III}), assim enunciada: *O limite do denominador é* 0, *e o denominador está se aproximando de* 0, *através de valores positivos. Então, aplicando o teorema de limite 13(i), obtemos:* $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3} = +\infty$.

Trabalho da técnica $\boldsymbol{\tau_{AIC}}$. Esse trabalho é proposto para ser realizado nas atividades das páginas 87 e 88, nas quais, pede-se para estudar várias configurações diferentes de limites através da técnica τ_{AIC}. Assim, ao praticarem tais exercícios, os alunos trabalham a referida técnica nas situações previstas pelo autor do livro.

(3) Exploração do subtipo de tarefa $\boldsymbol{t_4}$ e elaboração da técnica $\boldsymbol{\tau_{DVN}}$. Esse momento se dá com a apresentação do processo que consiste em calcular o valor de $\lim\limits_{x \to 3}(x^2 + 7x - 5)$, que corresponde à realização do subtipo de tarefa t_4 (calcular o valor de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, sendo que não ocorrem indeterminações nem impossibilidades em $x = a$), conforme pode ser visto na Figura 34:

Figura 34 - Extrato com o modelo de cálculo de limites por meio da técnica τ_{DVN}



EXEMPLO 1: Encontre $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 + 7x - 5)$ e, conforme o caso, indique os teoremas de limite que estão sendo usados.	*SOLUÇÃO*: $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 + 7x - 5) = \lim\limits_{x \to 3} x^2 + \lim\limits_{x \to 3} 7x - \lim\limits_{x \to 3} 5$ (T.L.5) $= \lim\limits_{x \to 3} x \cdot \lim\limits_{x \to 3} x + \lim\limits_{x \to 3} 7 \cdot \lim\limits_{x \to 3} x - \lim\limits_{x \to 3} 5$ (T.L.6) $= 3 \cdot 3 + 7 \cdot 3 - 5$ (L.T.3 e L.T.2) $= 9 + 21 - 5$ $= 25$

Fonte: Leithold (1977, p. 71)

Constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica $\boldsymbol{\tau_{DVN}}$. O momento de sistematização da referida técnica coincide com o momento de elaboração dela, assim indicado: *T.L.*5*; T.L.6; T.L.3 e T.L.2*. A técnica τ_{DVN} se baseia nos elementos tecnológicos (invocados pela simbologia acrescida – por parte do autor – no lado direito do extrato da figura acima) das *propriedades operatórias e da substituição direta para limites* (θ_{POL_PSD}), assim como também, das *propriedades das funções contínuas* (θ_{PFC}).

Avaliação dos elementos técnico-tecnológicos. Esse momento é proposto na secção logo após a resolução que está contida no extrato da figura 34, percebido nos seguintes comentários (Figura 35):

Figura 35 - Reflexões sobre o cálculo de limites

É importante, neste ponto, percebermos que o limite no Exemplo 1 foi calculado através da aplicação direta dos teoremas sobre limites. Para a função f definida por $f(x) = x^2 + 7x - 5$, vemos que $f(3) = 3^2 + 7 \cdot 3 - 5 = 25$ é o mesmo que $\lim_{x \to 3} (x^2 + 7x - 5)$. Não é sempre verdadeiro termos $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (veja o Exemplo 4). No Exemplo 1, $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$, pois a função f é contínua em $x = 3$. Discutiremos o significado de funções contínuas na Sec. 2.11.

Fonte: Leithold (1977, p. 71)

Nessa ocasião, o aluno é conduzido à validação do processo desenvolvido anteriormente por meio da técnica τ_{DVN}; porém, o autor alerta que a referida técnica não pode ser aplicada a qualquer tipo de limite.

Trabalho da técnica $\boldsymbol{\tau_{DVN}}$. Esse momento é proposto para se efetivar nas secções intituladas *Exercícios 2.5* (LEITHOLD, 1977, p. 73-74) e *Exercícios de Revisão (Capítulo 2)* (LEITHOLD, 1977, p. 107-108). Assim, ao executarem esses exercícios, os alunos trabalham a referida técnica nas situações propostas nesse livro.

(4) Exploração do subtipo de tarefa $\boldsymbol{t_5}$ e elaboração da técnica mista $\boldsymbol{\tau_{FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}}$. Esse momento se dá com a apresentação do processo para calcular o valor de $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$, que corresponde à realização do subtipo de tarefa t_5 (calcular o valor de $\lim_{x \to a} f(x)$, sendo que ocorre indeterminação em $x = a$), conforme a Figura 36:

Figura 36 - Extrato com o modelo de cálculo de limites por meio da técnica mista $\tau_{FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$

EXEMPLO 3: Encontre

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$$

e, conforme o caso, indique os teoremas de limite usados.

SOLUÇÃO: Aqui temos um problema mais difícil, uma vez que o teorema de limite 9 não pode ser aplicado ao quociente $(x^3 - 27)(x - 3)$ pois $\lim_{x \to 3} (x - 3) = 0$.

Contudo, fatorando o numerador, obtemos:

$$\frac{x^3 - 27}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3}$$

O quociente é $(x^2 + 3x + 9)$ se $x \neq 3$ (desde que se $x \neq 3$ podemos dividir o numerador e o denominador por $(x - 3)$).

Quando calculamos $\lim_{x \to 3} [(x^3 - 27)/(x - 3)]$, estamos considerando valores de x, próximos de 3, mas não iguais a 3. Assim, é possível dividir o numerador e o denominador por $(x - 3)$. A solução deste problema toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} &= \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3} \\
&= \lim_{x \to 3} (x^2 + 3x + 9) && \text{dividindo o numerador e o denominador por } (x - 3)\text{, desde que } x \neq 3 \\
&= \lim_{x \to 3} x^2 + \lim_{x \to 3} (3x + 9) && \text{(T.L.4)} \\
&= (\lim_{x \to 3} x)^2 + 18 && \text{(T.L.8 e T.L.1)} \\
&= 3^2 + 18 && \text{(T.L.3)} \\
&= 27
\end{aligned}$$

Fonte: Leithold (1977, p. 72)

Constituição do ambiente tecnológico e elaboração da técnica mista $\tau_{FEA\_EIE}\_\tau_{DVN}$. A partir da figura 36, verifica-se que a técnica τ_{FEA} (fatorar as expressões algébricas) busca gerar um produto, no qual, a expressão que está conduzindo à indeterminação seja explicitada como um fator; a técnica τ_{EIE} (eliminar as indeterminações existentes) consiste em cancelar as expressões responsáveis pela indeterminação; e a técnica τ_{DVN} (determinar o valor numérico) consiste em calcular o valor do novo limite gerado após o cancelamento (que é igual ao valor do limite inicial). Essas técnicas são justificadas implicitamente pelo *teorema da troca para limites* (θ_{TTL}), assim enunciado: *Estamos considerando valores de x, próximos de* 3, *mas não iguais a* 3. *Assim, é possível dividir o numerador e o denominador por* $(x-3)$; e pelas *propriedades operatórias e da substituição direta para limites* (θ_{POL_PSD}), assim como também, pelas *propriedades das funções contínuas* (θ_{PFC}), assim enunciadas: *T.L.4; T.L.8; T.L.1 e T.L.3* (invocadas pela simbologia acrescida – por parte do autor – no lado direito do extrato figura acima).

Trabalho da técnica $\tau_{FEA\_EIE}\_\tau_{DVN}$. Esse momento é proposto para se concretizar nas secções que tem por títulos *Exercícios 2.5* (LEITHOLD, 1977, p. 73-74) e *Exercícios de Revisão (Capítulo 2)* (LEITHOLD, 1977, p. 107-108). Assim, ao efetuarem tais exercícios, os alunos trabalham a técnica $\tau_{FEA\_EIE}\_\tau_{DVN}$ nas situações propostas no referido livro.

(5) Exploração do subtipo de tarefa t_6 e elaboração da técnica mista $\tau_{DND}\_\tau_{AIC}$. O subtipo de tarefa t_6 (determinar limites que envolvam $\pm\infty$) é introduzido por meio da apresentação do processo de estudo de $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-3}{2x+5}$, conforme a Figura 37:

Figura 37 - Atividade utilizada para sistematizar a técnica mista $\tau_{DND}\_\tau_{AIC}$

EXEMPLO 1	SOLUÇÃO
EXEMPLO 1: Encontre $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-3}{2x+5}$ e conforme o caso, indique os teoremas de limite que foram usados.	*SOLUÇÃO*: Para usarmos o teorema de limite 11, dividimos o numerador e o denominador por x, obtendo: $$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-3}{2x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-3/x}{2+5/x}$$ $$=\frac{\lim_{x\to+\infty}(4-3/x)}{\lim_{x\to+\infty}(2+5/x)} \quad \text{(T.L.9)}$$ $$=\frac{\lim_{x\to+\infty}4-\lim_{x\to+\infty}(3/x)}{\lim_{x\to+\infty}2+\lim_{x\to+\infty}(5/x)} \quad \text{(T.L.4)}$$ $$=\frac{\lim_{x\to+\infty}4-\lim_{x\to+\infty}3\cdot\lim_{x\to+\infty}(1/x)}{\lim_{x\to+\infty}2+\lim_{x\to+\infty}5\cdot\lim_{x\to+\infty}(1/x)} \quad \text{(T.L.6)}$$ $$=\frac{4-3\cdot 0}{2+5\cdot 0} \quad \text{(T.L.2 e T.L.11)}$$ $$=2$$

Fonte: Leithold (1977, p. 79)

Constituição do ambiente tecnológico e elaboração da técnica mista $\boldsymbol{\tau_{DND\_}\tau_{AIC}}$. Verifica-se, a partir da figura 37, que a determinação do referido limite se dá em duas etapas mais gerais: (a) *dividir o numerador e o denominador* (τ_{DND}), dividindo os termos do denominador e do numerador pelo termo de maior potência de x do denominador; (b) *analisar intuitivamente o comportamento* (τ_{AIC}), determinando o que acontece com cada expressão da fração, quando $x \to +\infty$ (no entanto, o autor o faz de maneira detalhada, mostrando o passo-a-passo, aproveitando ainda para justificar algumas passagens através dos teoremas indicados no lado direito da figura acima). De maneira implícita, a técnica $\tau_{DND\_}\tau_{AIC}$ é explicada pelo aparato tecnológico relacionado à *ideia intuitiva de limites no infinito* (θ_{III}), assim enunciado (por exemplo): $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ (o mesmo acontece noutras partes do desenvolvimento da resolução apresentada na figura acima).

Trabalho da técnica $\boldsymbol{\tau_{DND\_}\tau_{AIC}}$. Esse momento é proposto para ser realizado nas secções *Exercícios 2.7* (LEITHOLD, 1977, p. 81) e *Exercícios de Revisão (Capítulo 2)* (LEITHOLD, 1977, p. 107-108).

5.1.3 Síntese Avaliativa do Livro: O Cálculo com Geometria Analítica (1977)

A avaliação das praxeologias matemáticas pontuais identificadas no referido livro em relação à determinação de limites de funções reais de uma variável adota como referencial os seguintes critérios que foram propostos por Chevallard (1999):

- Verificar se os subtipos de tarefas estão ou são: bem *identificados*; acompanhados de explicações acerca de sua razão de ser ou pertinência; *representativos* tanto em qualidade quanto em quantidade.
- Os elementos técnico-tecnológicos estão ou são: *explicitados* ou não; bem *enunciados* e *justificados*.

Desse modo, tais elementos de avaliação serão descritos a seguir.

Identificação dos subtipos de tarefas. No referido livro, os enunciados que tratam da determinação de limites de funções fazem referência às palavras *encontre* e *calcule*. Geralmente, os enunciados são simples e curtos, por exemplo: “Encontre $\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3}$”. (LEITHOLD, 1977, p. 85). O que colabora para não causar confusão na hora de entender o significado daquilo que se deseja. Os enunciados (normalmente) permitem identificar rapidamente o subtipo de tarefa abordada, por exemplo: “Encontre $\lim_{x\to 3}(x^2+7x-5)$ e, conforme o caso, indique os teoremas de limite que estão sendo usados”. (LEITHOLD, 1977, p. 71). Neste último exemplo, a tarefa é do subtipo t_4 (calcular o valor de $\lim_{x\to a} f(x)$, sendo que não ocorrem indeterminações nem impossibilidades em $x=a$).

Pertinência ou razão de ser. O tipo de tarefa relacionada à determinação de limites de funções reais de uma variável é um recurso (ou ferramenta) a ser utilizado para dar base aos demais ramos do Cálculo Diferencial e Integral.

Representatividade. Os exercícios explorados em relação à determinação de limites de funções contemplam os seguintes diferentes subtipos de tarefas (t_2, t_3, t_4, t_5 e t_6). No total, foram identificados 73 exercícios no capítulo que foi estudado, dos quais, 17 estão resolvidos e devidamente comentados, e 56 são propostos para o trabalho do aluno. Assim, foram identificadas as seguintes tarefas (Tabela 7):

Tabela 7 - Subtipos de tarefas no livro: O Cálculo com Geometria Analítica (1977)

SUBTIPOS DE TAREFAS	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	Total parcial	%
τ_{CVN}	-	-	-	-	-	-	**0**	**0,00**
τ_{ACG}	-	6	-	-	-	-	**6**	**8,22**
τ_{ACG_DVN}	-	-	-	-	-	-	**0**	**0,00**
τ_{AIC}	-	-	17	-	-	-	**17**	**23,29**
τ_{DVN}	-	-	-	10	-	-	**10**	**13,70**
$\tau_{FEA\_EIE}\_\tau_{DVN}$	-	-	-	-	11	-	**11**	**15,07**
$\tau_{MEC\_DRE\_EIE}\_\tau_{DVN}$	-	-	-	-	7	-	**7**	**9,59**
$\tau_{DRE\_FEA\_EIE}\_\tau_{DVN}$	-	-	-	-	-	-	**0**	**0,00**
τ_{AIC}	-	-	-	-	-	-	**0**	**0,00**
$\tau_{FTV}\_\tau_{AIC}$	-	-	-	-	-	-	**0**	**0,00**
$\tau_{MEC\_DRE}\_\tau_{AIC}$	-	-	-	-	-	6	**6**	**8,22**
$\tau_{FEA}\_\tau_{AIC}$	-	-	-	-	-	-	**0**	**0,00**
$\tau_{DND}\_\tau_{AIC}$	-	-	-	-	-	16	**16**	**21,92**

Fonte: o autor (2019)

Elementos técnico-tecnológicos. O conceito de limite foi (inicialmente) apresentado, partindo-se da observação do **comportamento numérico da função $f(x)$**, quando são considerados para x, valores nas proximidades de $x=a$ (o que corresponderia ao subtipo de tarefa t_1). Entretanto, nenhuma tarefa do subtipo t_1 foi proposta para o momento de trabalho da técnica, assim como também, a técnica τ_{CVN} (calcular valores numéricos) não foi elaborada e nem sistematizada como algo que faz parte de uma praxeologia matemática a ser transposta. A abordagem numérica apresentada no livro, serviu meramente como uma forma para explicar (intuitivamente) o que acontece com os valores de uma função, quando se faz alguns cálculos nas proximidades de um determinado ponto do seu domínio.

Em relação às *técnicas* elaboradas e/ou sistematizadas, foram identificadas as 3 seguintes:

- ✓ τ_{ACG}: *Analisar o comportamento gráfico*, mais ou menos justificada pela *ideia gráfica intuitiva* (θ_{IGI});
- ✓ τ_{AIC}: *Analisar intuitivamente o comportamento*, mais ou menos justificada pela *ideia intuitiva de limites infinitos e no infinito* (θ_{III});
- ✓ τ_{DVN}: *Determinar o valor numérico*, elaborada e justificada por meio das *propriedades operatórias e da substituição direta para limites* (θ_{POL_PSD}) e das *propriedades das funções contínuas* (θ_{PFC}).

A partir das técnicas destacadas acima, através de combinações com as já elencadas técnicas auxiliares, foram elaboradas as 4 seguintes técnicas mistas:

- ✓ $\tau_{FEA\_EIE}\_\tau_{DVN}$: *Fatorar as expressões algébricas/ Eliminar as indeterminações existentes/ Determinar o valor numérico*;
- ✓ $\tau_{MEC\_DRE\_EIE}\_\tau_{DVN}$: *Multiplicar por expressões conjugadas/ Desenvolver e/ou reduzir as expressões/ Eliminar as indeterminações existentes/ Determinar o valor numérico*;
- ✓ $\tau_{MEC\_DRE}\_\tau_{AIC}$: *Multiplicar por expressões conjugadas/ Desenvolver e/ou reduzir as expressões/ Analisar intuitivamente o comportamento*;
- ✓ $\tau_{DND}\_\tau_{AIC}$: *Dividir o numerador e o denominador/ Analisar intuitivamente o comportamento*.

Evolução dos subtipos de tarefas e da tecnologia. (1) A introdução ao estudo de limites de funções de uma variável real é feita através da exploração de atividades que correspondem à realização do subtipo de tarefa t_4 (calcular o valor de $\lim_{x \to a} f(x)$, sendo que não ocorrem indeterminações nem impossibilidades em $x = a$). O subtipo de tarefa (aqui referido) gerou à sistematização da técnica que consiste em *determinar o valor numérico* (τ_{DVN}), que é por sua vez, explicada e justificada pelas *propriedades operatórias e da substituição direta para limites* (θ_{POL_PSD}) e pelas *propriedades das funções contínuas* (θ_{PFC}). **(2)** Logo após, foram propostos exercícios que correspondem à realização do subtipo de tarefa t_5 (calcular $\lim_{x \to a} f(x)$, sendo que ocorrem indeterminações para $x = a$), que originou à técnica mista $\tau_{FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$. Esta técnica é composta por três etapas: (i) *fatorar as expressões algébricas* (τ_{FEA}), para expor as expressões que estão conduzindo às indeterminações; (ii) *eliminar as indeterminações existentes* (τ_{EIE}), para transformar o limite em outro equivalente; e (iii) *determinar o valor numérico* (τ_{DVN}), para calcular o valor final do novo limite (que é igual ao valor do limite inicial). Os elementos tecnológicos que acompanham a elaboração da técnica (τ_{EIE}), estão relacionados com o *teorema da troca para limites* (θ_{TTL}).

(3) Na sequência, foram explorados exercícios que correspondem à realização do subtipo de tarefa t_2 (encontrar o limite de $f(x)$ com o auxílio do gráfico). Então, foi sistematizada a técnica cujo objetivo é *analisar o comportamento gráfico* (τ_{ACG}), sendo esta, mais ou menos justificada por meio da *ideia gráfica intuitiva* (θ_{IGI}). **(4)** Seguindo a ordem, foram trabalhados exercícios que correspondem à realização do subtipo de tarefa t_6 (determinar limites que envolvam $\pm\infty$). Para resolução de tais exercícios, foi sistematizada a técnica mista $\tau_{DND\_}\tau_{AIC}$, que é composta por duas etapas: (i) *dividir o numerador e o denominador* (τ_{DND}), para preparar as expressões do limite da próxima etapa; e (ii) *analisar intuitivamente o comportamento* (τ_{AIC}), para determinar o valor do limite.

(5) Por fim, foram explorados exercícios que correspondem à realização do subtipo de tarefa t_3 (determinar limites laterais de $f(x)$ com o auxílio de uma investigação intuitiva da expressão matemática envolvida). A técnica que foi sistematizada consiste em *analisar intuitivamente o comportamento* (τ_{AIC}), sendo esta, mais ou menos justificada por meio da *ideia intuitiva de limites infinitos e no infinito* (θ_{III}), conforme descrito abaixo (Tabela 8):

Tabela 8 - Tecnologias no livro: O Cálculo com Geometria Analítica (1977)

TECNOLOGIAS	θ_{IIL}	θ_{IGI}	θ_{IGI_POL}	θ_{III}	θ_{POL_PSD}	θ_{TTL}	θ_{PFC}
τ_{CVN}	-	-	-	-	-	-	-
τ_{ACG}	-	6	-	-	-	-	-
τ_{ACG_DVN}	-	-	-	-	-	-	-
τ_{AIC}	-	-	-	17	-	-	-
τ_{DVN}	-	-	-	-	10	-	10
$\tau_{FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$	-	-	-	-	11	11	11
$\tau_{MEC\_DRE\_EIE\_}\tau_{DVN}$	-	-	-	-	7	7	7
$\tau_{DRE\_FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$	-	-	-	-	-	-	-
τ_{AIC}	-	-	-	-	-	-	-
$\tau_{FTV\_}\tau_{AIC}$	-	-	-	-	-	-	-
$\tau_{MEC\_DRE\_}\tau_{AIC}$	-	-	-	-	-	-	-
$\tau_{FEA\_}\tau_{AIC}$	-	-	-	-	-	-	-
$\tau_{DND\_}\tau_{AIC}$	-	-	-	6	-	-	-
Total parcial	**0**	**6**	**0**	**23**	**28**	**18**	**28**
%	**0,00**	**5,83**	**0,00**	**22,33**	**27,18**	**17,48**	**27,18**

Fonte: o autor (2019)

Organização didática. A transposição didática das praxeologias matemáticas identificadas em torno dos subtipos de tarefas referentes à determinação de limites de funções reais (no referido livro) ocorreu em três momentos:

- ✓ *Primeiro momento:* Introdução de uma situação para elaborar e sistematizar uma técnica (com a devida explicação do procedimento desenvolvido) que possa estudar um dado limite (subtipo de tarefa). É ainda nesse primeiro momento que são enunciadas as propriedades e afirmações que compõem os elementos que explicam e justificam a técnica elaborada.
- ✓ *Segundo momento:* É o momento destinado à *avaliação* dos elementos técnico-tecnológicos que surgem na situação proposta. Tal momento ocorre em comentários, logo após cada exercício resolvido (aparecendo apenas em alguns casos dentre os identificados). Desse modo, no referido momento, o aluno é conduzido à validação e reflexão acerca das respostas construídas e apresentadas pelo autor.
- ✓ *Terceiro momento:* É o momento dedicado ao *trabalho da técnica*, ocorrendo nas diversas secções intituladas por *Exercícios* e *Exercícios de Revisão (Capítulo 2).*

Apesar das teorias elencadas no modelo de referência não terem sido detectadas (de modo claro) nas praxeologias matemáticas estudadas no referido livro didático, ressalta-se aqui, que as 4 teorias foram encontradas no corpo do texto (capítulo 2 – volume 1). As apresentações das teorias são completas e organizadas, e fornecem ainda, os elementos teóricos suficientes para justificar as tecnologias identificadas.

As tecnologias presentes no livro estudado aparecem (muitas vezes) com nomenclaturas diferentes (e formatos ligeiramente distintos), porém, são essencialmente as mesmas; e são explicadas e justificadas pelas teorias (apoiando-se em processos de demonstração ou prova).

O capítulo analisado não trata exclusivamente do objeto matemático limites de funções, trabalha (ainda) o conteúdo de funções (em forma de revisão e aprofundamento). Na parte destinada ao estudo de funções, o autor trata de temas, tais como: definições de funções, gráficos, funções elementares e funções não-elementares.

Já na parte que trata de limites, além das praxeologias matemáticas pontuais que foram identificadas e analisadas acerca da determinação de limites, também são trabalhados problemas relacionados a demonstrações sobre limites, estudo de assíntotas e continuidade de funções.

5.2 LIVRO: CÁLCULO DE STEWART (2017)

Agora, são apresentadas: a descrição do livro, a organização e a distribuição dos temas do capítulo analisado, a análise praxeológica acerca do ensino de limites de funções, e a síntese avaliativa da obra.

5.2.1 Descrição, Organização e Distribuição dos Conteúdos

Nesse livro, os assuntos são organizados através de capítulos identificados por títulos que explicitam os temas trabalhados, os quais, por sua vez, são subdivididos em tópicos. Tais tópicos tratam de conceitos e/ou procedimentos ligados ao conteúdo dominante de cada capítulo.

Aparecem tópicos especiais para tratar de contextualização e exercícios interativos (com muitas aplicações). Na verdade, ao final de cada tópico do capítulo existem exercícios em boa quantidade e variedade.

O capítulo destinado ao objeto matemático limites é distribuído da seguinte maneira (Capítulo 2: *Limites e Derivadas*):

1) Os Problemas da Tangente e da Velocidade;
2) O Limite de uma Função;

3) Cálculos Usando Propriedades dos Limites;
4) A Definição Precisa de um Limite;
5) Continuidade;
6) Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais;
7) Derivadas e Taxas de Variação;
8) A Derivada Como uma Função;
9) Revisão.

5.2.2 Análise Praxeológica sobre o Ensino de Limites de Funções

São especificados abaixo os componentes das análises, a saber: (1) exploração do subtipo de tarefa t_1 e elaboração da técnica τ_{CVN}, constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica τ_{CVN}, avaliação dos elementos técnico-tecnológicos, trabalho da técnica τ_{CVN}, (2.1) exploração do subtipo de tarefa t_2 e elaboração da técnica τ_{ACG}, constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica τ_{ACG}, avaliação dos elementos técnico-tecnológicos, trabalho da técnica τ_{ACG}, (2.2) exploração do subtipo de tarefa t_2 e elaboração da técnica mista τ_{ACG_DVN}, constituição da tecnologia e sistematização da técnica mista τ_{ACG_DVN}, trabalho da técnica τ_{ACG_DVN}, (3) exploração do subtipo de tarefa t_3 e elaboração da técnica τ_{AIC}, constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica τ_{AIC}, avaliação dos elementos técnico-tecnológicos, trabalho da técnica τ_{AIC}, (4) exploração do subtipo de tarefa t_4 e elaboração da técnica τ_{DVN}, constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica τ_{DVN}, Avaliação dos elementos técnico-tecnológicos, trabalho da técnica τ_{AIC}, (5.1) exploração do subtipo de tarefa t_5 e elaboração da técnica mista $\tau_{FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$, constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica mista $\tau_{FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$, trabalho da técnica $\tau_{FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$, (5.2) exploração do subtipo de tarefa t_5 e elaboração da técnica mista $\tau_{MEC\_DRE\_EIE\_}\tau_{DVN}$, constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica mista $\tau_{MEC\_DRE\_EIE\_}\tau_{DVN}$, trabalho da técnica $\tau_{MEC\_DRE\_EIE\_}\tau_{DVN}$, (5.3) exploração do subtipo de tarefa t_5 e elaboração da técnica mista $\tau_{DRE\_FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$, constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica mista $\tau_{DRE\_FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$, trabalho da técnica $\tau_{DRE\_FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$, (6.1) exploração do subtipo de tarefa t_6 e elaboração da técnica mista $\tau_{FTV\_}\tau_{AIC}$, constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica mista $\tau_{FTV\_}\tau_{AIC}$, trabalho da técnica $\tau_{FTV\_}\tau_{AIC}$, (6.2) exploração do subtipo de tarefa t_6 e elaboração da técnica mista $\tau_{MEC\_DRE\_}\tau_{AIC}$, constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica mista $\tau_{MEC\_DRE\_}\tau_{AIC}$, trabalho da técnica

$\tau_{MEC\_DRE}\_\tau_{AIC}$, (6.3) exploração do subtipo de tarefa t_6 e elaboração da técnica mista $\tau_{FEA}\_\tau_{AIC}$, constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica mista $\tau_{FEA}\_\tau_{AIC}$, trabalho da técnica $\tau_{FEA}\_\tau_{AIC}$, (6.4) exploração do subtipo de tarefa t_6 e elaboração da técnica mista $\tau_{DND}\_\tau_{AIC}$, constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica mista $\tau_{DND}\_\tau_{AIC}$ e trabalho da técnica $\tau_{DND}\_\tau_{AIC}$.

(1) Exploração do subtipo de tarefa t_1 e elaboração da técnica τ_{CVN}. Nesse momento ocorre a apresentação da técnica que consiste em *calcular valores numéricos* (τ_{CVN}) nas proximidades do ponto de tendência de $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$, que corresponde ao subtipo de tarefa t_1 (estimar numericamente o valor de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$), conforme a Figura 38:

Figura 38 - Estimativa para limites de funções através da técnica τ_{CVN}

EXEMPLO 1 Estime o valor de $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$.

SOLUÇÃO Observe que a função $f(x) = (x-1)/(x^2-1)$ não está definida quando $x = 1$, mas isso não importa, pois a definição de $\lim_{x\to a} f(x)$ diz que devemos considerar valores de x que estão próximos de a, mas não são iguais a a.

As tabelas à esquerda na próxima página dão os valores de $f(x)$ (com precisão de seis casas decimais) para os valores de x que tendem a 1 (mas não são iguais a 1). Com base nesses valores, podemos conjecturar que

$x < 1$	$f(x)$
0,5	0,666667
0,9	0,526316
0,99	0,502513
0,999	0,500250
0,9999	0,500025

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1} = 0{,}5$$

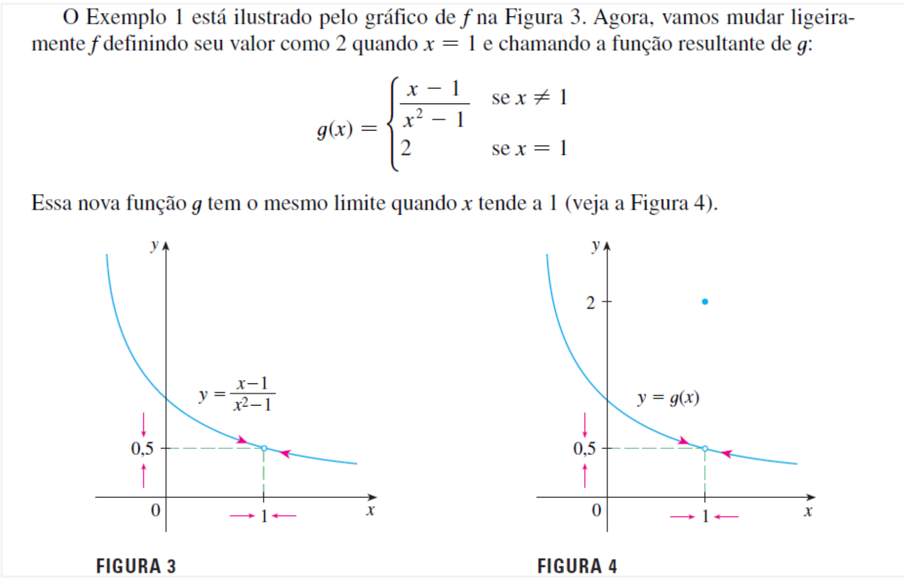
$x > 1$	$f(x)$
1,5	0,400000
1,1	0,476190
1,01	0,497512
1,001	0,499750
1,0001	0,499975

Fonte: Adaptado Stewart (2017, p. 71-72)

Constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica τ_{CVN}. De fato, os momentos de exploração do subtipo de tarefa t_1 e elaboração da técnica τ_{CVN}, bem como de constituição do ambiente tecnológico e sistematização, ocorrem simultaneamente. Como se pode compreender, a partir da figura acima, a sistematização da técnica τ_{CVN} é implicitamente justificada por elementos tecnológicos que constituem a *ideia intuitiva de limite* (θ_{IIL}), assim enunciada: $\lim_{x \to a} f(x)$ *diz que devemos considerar valores de* x *que estão próximos de* a*, mas não são iguais a* a.

Avaliação dos elementos técnico-tecnológicos. Esse momento é proposto para se realizar logo após o exercício resolvido da figura acima (ainda na mesma secção), por intermédio do que foi apresentado na Figura 39:

Figura 39 - Extrato com reflexões sobre limites



O Exemplo 1 está ilustrado pelo gráfico de f na Figura 3. Agora, vamos mudar ligeiramente f definindo seu valor como 2 quando $x = 1$ e chamando a função resultante de g:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Essa nova função g tem o mesmo limite quando x tende a 1 (veja a Figura 4).

Fonte: Stewart (2017, p. 72)

Nessa ocasião, o aluno é direcionado à validação – através da constatação realizada no gráfico – acerca do resultado que foi obtido através do procedimento anterior. É também nesse momento que é exemplificado o fato de que – para limites – não importa o que ocorre no ponto de tendência, mas apenas em suas proximidades.

Trabalho da técnica $\boldsymbol{\tau_{CVN}}$. Esse momento é proposto para se concretizar nas secções intituladas *2.2 Exercícios* (STEWART, 2017, pp.78-81), *2.3 Exercícios* (STEWART, 2017, pp.88-90) e *2.6 Exercícios* (STEWART, 2017, pp.119-121), de modo que, ao efetuarem tais exercícios, os alunos aprimoram o manuseio da técnica τ_{CVN} nas situações propostas pelo autor do livro.

(2.1) Exploração do subtipo de tarefa $\boldsymbol{t_2}$ e elaboração da técnica $\boldsymbol{\tau_{ACG}}$. Nesse momento ocorre a apresentação da técnica cujo o objetivo é *analisar o comportamento gráfico* (τ_{ACG}) para determinar o valor de $\lim_{x \to 2^-} g(x)$, que corresponde a uma tarefa do subtipo t_2 (encontrar o limite de $f(x)$ com o auxílio do gráfico), conforme pode ser visto na Figura 40:

Figura 40 - Determinação de limites por meio da técnica τ_{ACG}

EXEMPLO 7 O gráfico de uma função g é apresentado na Figura 10. Use-o para estabelecer os valores (caso existam) dos seguintes limites:

(a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (c) $\lim_{x \to 2} g(x)$

(d) $\lim_{x \to 5^-} g(x)$ (e) $\lim_{x \to 5^+} g(x)$ (f) $\lim_{x \to 5} g(x)$

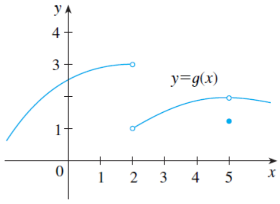


FIGURA 10

SOLUÇÃO A partir do gráfico, vemos que os valores de $g(x)$ tendem a 3 à medida que os de x tendem a 2 pela esquerda, mas tendem a 1 quando x tende a 2 pela direita. Logo

(a) $\lim_{x \to 2^-} g(x) = 3$ e (b) $\lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$

Fonte: Stewart (2017, p. 75)

Constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica $\boldsymbol{\tau_{ACG}}$. Os momentos de exploração do subtipo de tarefa t_2 e elaboração da técnica τ_{ACG}, como também de constituição do ambiente tecnológico e sistematização, acontecem ao mesmo tempo. Como se pode verificar na figura acima, a sistematização da técnica τ_{ACG} é implicitamente justificada por elementos tecnológicos que constituem a *ideia gráfica intuitiva* (θ_{IGI}), assim enunciada: *A partir do gráfico, vemos que os valores de* $g(x)$ *tendem a* 3 *à medida que os de* x *tendem a 2 pela esquerda*.

Avaliação dos elementos técnico-tecnológicos. Esse momento é proposto para se efetuar ainda na mesma secção por meio dos seguintes complementos teóricos e observações (Figura 41):

Figura 41 - Extrato com reflexões sobre análises gráficas de limites

(c) Uma vez que são diferentes os limites à esquerda e à direita, concluímos de $\boxed{3}$ que $\lim_{x \to 2} g(x)$ não existe.

O gráfico mostra também que

$$\text{(d)} \quad \lim_{x \to 5^-} g(x) = 2 \qquad \text{e} \qquad \text{(e)} \quad \lim_{x \to 5^+} g(x) = 2$$

(f) Agora, os limites à esquerda e à direita são iguais; assim, de $\boxed{3}$, temos

$$\lim_{x \to 5} g(x) = 2$$

Apesar desse fato, observe que $g(5) \neq 2$.

Fonte: Stewart (2017, p. 75-76)

Nessa ocasião, o aluno é levado a refletir (Figura 41) – por meio de exemplos – acerca da validade do limite (Figura 40) condicionada à existência dos limites laterais no mesmo ponto de tendência. Ressalta-se novamente, nesse momento, que, para limites, não importa o que acontece no ponto de tendência, mas sim, nas proximidades do mesmo.

Trabalho da técnica τ_{ACG}. Esse momento é proposto para se efetuar nas partes do capítulo intituladas por *2.2 Exercícios* (STEWART, 2017, p. 78-81), *2.3 Exercícios* (STEWART, 2017, p. 88-90) e *2.6 Exercícios* (STEWART, 2017, p. 119-121), de maneira que, ao realizarem tais exercícios propostos, os alunos trabalham a referida técnica nas situações construídas pelo autor do livro.

(2.2) Exploração do subtipo de tarefa t_2 e elaboração da técnica mista τ_{ACG_DVN}. O subtipo de tarefa t_2 (encontrar o limite de $f(x)$ com o auxílio do gráfico) é ainda introduzido por meio do problema que consiste em determinar o valor de $\lim_{x \to -2}[f(x) + 5g(x)]$. O referido problema é solucionado através da técnica mista τ_{ACG_DVN}, conforme pode ser observado na Figura 42:

Figura 42 - Extrato com o modelo de resolução de limites através da técnica mista τ_{ACG_DVN}

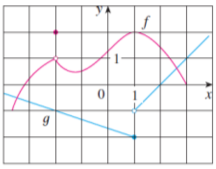


FIGURA 1

EXEMPLO 1 Use as Propriedades dos Limites e os gráficos de f e g na Figura 1 para calcular os seguintes limites, se eles existirem.

(a) $\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ (c) $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

SOLUÇÃO

(a) Dos gráficos de f e g vemos que

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -2} g(x) = -1$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)] &= \lim_{x \to -2} f(x) + \lim_{x \to -2} [5g(x)] && \text{(pela Propriedade 1)} \\ &= \lim_{x \to -2} f(x) + 5 \lim_{x \to -2} g(x) && \text{(pela Propriedade 3)} \\ &= 1 + 5(-1) = -4 \end{aligned}$$

Fonte: Stewart (2017, p. 82)

Constituição da tecnologia e sistematização da técnica mista τ_{ACG_DVN}. A partir da figura acima, pode-se observar que o processo de resolução do limite considerado é composto por duas técnicas: *analisar o comportamento gráfico* (τ_{ACG}), para determinar os valores (separadamente) de $\lim_{x \to -2} f(x)$ e de $\lim_{x \to -2} g(x)$; e *determinar o valor numérico* (τ_{DVN}), para calcular o valor de $\lim_{x \to -2}[f(x) + 5g(x)]$.

Trabalho da técnica τ_{ACG_DVN}. Esse momento é proposto nas secções intituladas *2.2 Exercícios* (STEWART, 2017, p. 78-81), *2.3 Exercícios* (STEWART, 2017, p. 88-90) e *2.6 Exercícios* (STEWART, 2017, p. 119-121) através de atividades, nas quais, deve ser feito o uso da técnica mista τ_{ACG_DVN} para a determinação de limites.

(3) Exploração do subtipo de tarefa t_3 e elaboração da técnica τ_{AIC}. Esse momento é proposto para se realizar com a apresentação do processo de determinação de $\lim_{x\to 3^+} \frac{2x}{x-3}$, da seguinte maneira (Figura 43):

Figura 43 - Extrato com o modelo de determinação de limites laterais por meio da técnica τ_{AIC}

EXEMPLO 9 Encontre $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{2x}{x-3}$ e $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{2x}{x-3}$.

SOLUÇÃO Se x está próximo a 3 mas é maior que 3, então o denominador $x-3$ é um número positivo pequeno e $2x$ está próximo a 6. Portanto, o quociente $2x/(x-3)$ é um número *positivo* grande. Então, intuitivamente, temos que

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

Fonte: Stewart (2017, p. 77)

O limite considerado na figura acima, corresponde à realização do subtipo de tarefa t_3 (determinar os limites laterais de $f(x)$ com o auxílio de uma investigação intuitiva da expressão matemática envolvida).

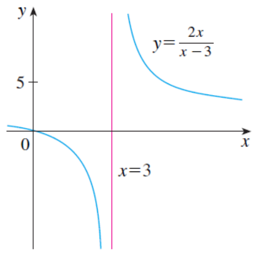
Constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica τ_{AIC}. Os momentos de exploração do subtipo de tarefa t_3 e elaboração da técnica τ_{AIC}, como também de constituição do ambiente tecnológico e sistematização, ocorrem simultaneamente. Observa-se, a partir do extrato da figura acima, que foi feito o uso da técnica τ_{AIC} (analisar intuitivamente o comportamento) para estudar o que ocorre com o limite considerado, quando x se aproxima de 3, por valores maiores do que 3. A referida técnica é justificada implicitamente por meio da *ideia intuitiva de limites infinitos* (θ_{III}), assim enunciada:

> Se x está próximo de 3, mas é maior que 3, então, o denominador $x - 3$ é um número positivo pequeno e $2x$ está próximo a 6. Portanto, o quociente $2x/(x-3)$ é um número positivo grande. Então, intuitivamente, temos que (...). (STEWART, 2017, p. 77).

Avaliação dos elementos técnico-tecnológicos. Esse momento é proposto ainda na mesma secção, sendo percebido através dos comentários representados na Figura 44:

Figura 44 - Reflexões acerca do resultado obtido com a aplicação da técnica τ_{AIC}

O gráfico da curva $y = 2x/(x - 3)$ está dado na Figura 15. A reta $x = 3$ é uma assíntota vertical.



Fonte: Stewart (2017, p. 78)

A partir do gráfico que está contido na figura acima, o aluno consegue validar o resultado que foi obtido através da aplicação da técnica τ_{AIC} (Figura 43).

Trabalho da técnica $\boldsymbol{\tau_{AIC}}$. Esse momento é proposto para se efetivar na secção intitulada *2.2 Exercícios* (STEWART, 2017, p. 78-81). Assim, ao efetuarem esses exercícios, os alunos trabalham a técnica τ_{AIC} nas situações propostas pelo autor.

(4) Exploração do subtipo de tarefa $\boldsymbol{t_4}$ e elaboração da técnica $\boldsymbol{\tau_{DVN}}$. Esse momento é proposto para se concretizar com a apresentação do processo para calcular o valor de $\lim_{x \to 5}(2x^2 - 3x + 4)$ – de acordo com a Figura 45:

Figura 45 - Extrato com o modelo de cálculo de limites por meio da técnica τ_{DVN}

EXEMPLO 2 Calcule os limites a seguir justificando cada passagem.

(a) $\lim\limits_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$ (b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

SOLUÇÃO

(a)
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4) &= \lim_{x \to 5} (2x^2) - \lim_{x \to 5} (3x) + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(pelas Propriedades 2 e 1)} \\ &= 2 \lim_{x \to 5} x^2 - 3 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(pela Propriedade 3)} \\ &= 2(5^2) - 3(5) + 4 && \text{(pelas Propriedades 9, 8 e 7)} \\ &= 39. \end{aligned}$$

Fonte: Stewart (2017, p. 83)

O limite considerado na figura acima, corresponde à realização do subtipo de tarefa t_4 (calcular o valor de $\lim_{x \to a} f(x)$, sendo que não ocorrem indeterminações nem impossibilidades em $x = a$).

Constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica $\boldsymbol{\tau_{DVN}}$. Os momentos de exploração do subtipo de tarefa t_4 e elaboração da técnica τ_{DVN}, como ainda de constituição do ambiente tecnológico e sistematização, ocorrem concomitantemente. Observa-se, a partir do extrato da figura acima, que foi feito o uso da técnica τ_{DVN} (determinar o valor numérico) para calcular o valor do limite considerado. A técnica τ_{DVN} é justificada por meio das *propriedades operatórias e da substituição direta para limites* (θ_{POL_PSD}), assim como também, das *propriedades das funções contínuas* (θ_{PFC}), enunciadas da seguinte forma: *Pelas propriedades 2 e 1*; *pela propriedade 3* e *pelas propriedades 9, 8 e 7*.

Avaliação dos elementos técnico-tecnológicos. O referido momento é proposto ainda na mesma secção, sendo percebido por meio dos seguintes comentários (Figura 46):

Figura 46 - Reflexões sobre o cálculo de limites através da técnica τ_{DVN}

OBSERVAÇÃO: Se tornamos $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, então $f(5) = 39$. Em outras palavras, teríamos obtido a resposta correta no Exemplo 2(a) substituindo x por 5. Analogamente, a substituição direta fornece a resposta correta na parte (b). As funções no Exemplo 2 são polinomial e racional, respectivamente, e o uso similar das Propriedades dos Limites demonstra que a substituição direta sempre funciona para essas funções (veja os Exercícios 55 e 56). Enunciamos esse fato a seguir.

Propriedade de Substituição Direta Se f for uma função polinomial ou racional e a estiver no domínio de f, então

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

As funções que possuem essa propriedade de substituição direta, chamadas de *contínuas em a*, serão estudadas na Seção 2.5. Entretanto, nem todos os limites podem ser calculados pela substituição direta, como mostram os exemplos a seguir.

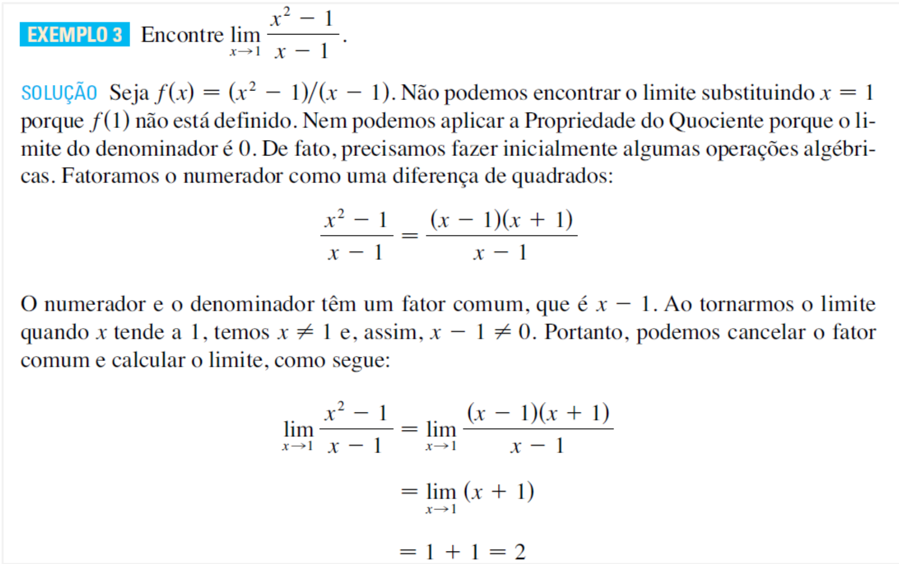
Fonte: Stewart (2017, p. 83-84)

Nesse momento, o aluno é levado à explicação e validação do processo que consiste em aplicar a técnica τ_{DVN} nas tarefas do subtipo t_4. O autor ainda tece comentários acerca da chamada propriedade de substituição direta e sobre funções contínuas num dado ponto.

Trabalho da técnica $\boldsymbol{\tau_{AIC}}$. O referido momento é proposto para se concretizar nas secções intituladas *2.3 Exercícios* (STEWART, 2017, p. 88-90) e *2.6 Exercícios* (STEWART, 2017, p. 119-121). Desse modo, ao realizarem tais exercícios, os alunos trabalham a técnica τ_{AIC} nas situações propostas nesse livro.

(5.1) Exploração do subtipo de tarefa $\boldsymbol{t_5}$ e elaboração da técnica mista $\boldsymbol{\tau_{FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}}$. Esse momento ocorre com a apresentação do processo de determinação do valor de $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$, que corresponde à realização do subtipo de tarefa t_5 (calcular $\lim_{x\to a} f(x)$, sendo que ocorrem indeterminações para $x = a$), de acordo com a Figura 47:

Figura 47 - Extrato de modelo de cálculo de limites por meio da técnica mista $\tau_{FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$



EXEMPLO 3 Encontre $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$.

SOLUÇÃO Seja $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$. Não podemos encontrar o limite substituindo $x = 1$ porque $f(1)$ não está definido. Nem podemos aplicar a Propriedade do Quociente porque o limite do denominador é 0. De fato, precisamos fazer inicialmente algumas operações algébricas. Fatoramos o numerador como uma diferença de quadrados:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

O numerador e o denominador têm um fator comum, que é $x - 1$. Ao tornarmos o limite quando x tende a 1, temos $x \neq 1$ e, assim, $x - 1 \neq 0$. Portanto, podemos cancelar o fator comum e calcular o limite, como segue:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1}(x+1)$$
$$= 1 + 1 = 2$$

Fonte: Stewart (2017, p. 84)

Constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica mista $\boldsymbol{\tau_{FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}}$. A partir da figura acima, verifica-se que a técnica τ_{FEA} (fatorar as expressões algébricas) consiste em transformar as expressões que fazem parte do limite de maneira que se possa eliminar as indeterminações existentes para possibilitar o cálculo do valor do limite. A técnica $\tau_{FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$ é justificada por meio do *teorema da troca para limites* (θ_{TTL}), das *propriedades operatórias e da substituição direta para limites* (θ_{POL_PSD}) e das *propriedades das funções contínuas* (θ_{PFC}), enunciadas da seguinte forma: *O numerador e o denominador têm um fator comum, que é* $x - 1$. *Ao tornarmos o limite, quando* x *tende a* 1, *temos* $x \neq 1$ *e, assim,* $x - 1 \neq 0$. *Portanto, podemos cancelar o fator comum, e então, calcular o limite por substituição direta.*

Trabalho da técnica $\boldsymbol{\tau_{FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}}$. Esse momento é proposto para ser concretizado nos *2.3 Exercícios* (STEWART, 2017, pp.88-90), nos *Exercícios* (STEWART, 2017, pp.144-146) e nos *Problemas Quentes* (STEWART, 2017, pp.147-148).

(5.2) Exploração do subtipo de tarefa $\boldsymbol{t_5}$ e elaboração da técnica mista $\boldsymbol{\tau_{MEC\_DRE\_EIE\_}\tau_{DVN}}$. Esse momento ocorre com a apresentação do processo de cálculo de

$\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-9}{t^2}$, que corresponde à realização do subtipo de tarefa t_5 (calcular $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, sendo que ocorrem indeterminações para $x = a$), conforme a Figura 48:

Figura 48 - Extrato de modelo de cálculo de limites por meio da técnica mista $\tau_{MEC\_DRE\_EIE\_}\tau_{DVN}$

EXEMPLO 6 Encontre $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2}$.

SOLUÇÃO Não podemos aplicar a Propriedade do Quociente de imediato, uma vez que o limite do denominador é 0. Aqui as operações algébricas preliminares consistem em racionalizar o numerador:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2} &= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2+9} + 3}{\sqrt{t^2+9} + 3} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(t^2+9) - 9}{t^2\left(\sqrt{t^2+9} + 3\right)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2+9} + 3\right)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2+9} + 3} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{t \to 0} (t^2+9)} + 3} \\
&= \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Fonte: Stewart (2017, p. 85)

Constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica mista $\boldsymbol{\tau_{MEC\_DRE\_EIE\_}\tau_{DVN}}$. A partir da figura acima, verifica-se que a técnica τ_{MEC} (multiplicar por expressões conjugadas) consiste em transformar as expressões matemáticas que fazem parte do limite de maneira que se possa eliminar as indeterminações existentes para possibilitar o cálculo do valor do limite. A técnica $\tau_{MEC\_DRE\_EIE\_}\tau_{DVN}$ é justificada implicitamente por meio do *teorema da troca para limites* (θ_{TTL}), das *propriedades operatórias e da substituição direta para limites* (θ_{POL_PSD}) e das *propriedades das funções contínuas* (θ_{PFC}).

Trabalho da técnica $\boldsymbol{\tau_{MEC\_DRE\_EIE\_}\tau_{DVN}}$. Esse momento é proposto para ser efetuado nos *2.3 Exercícios* (STEWART, 2017, p. 88-90), nos *Exercícios* (STEWART, 2017, p. 144-146) e nos *Problemas Quentes* (STEWART, 2017, p. 147-148).

(5.3) Exploração do subtipo de tarefa $\boldsymbol{t_5}$ e elaboração da técnica mista $\boldsymbol{\tau_{DRE\_FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}}$. Esse momento se dá com a apresentação do processo para calcular o valor de $\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h}$, que corresponde à realização do subtipo de tarefa t_5 (calcular $\lim_{x\to a} f(x)$, sendo que ocorrem indeterminações para $x = a$), conforme a Figura 49:

Figura 49: Extrato de modelo de cálculo de limites por meio da técnica mista $\tau_{DRE\_FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$

EXEMPLO 5 Calcule $\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h}$.

SOLUÇÃO Se definirmos

$$F(h) = \frac{(3+h)^2-9}{h}$$

então, como no Exemplo 3, não podemos calcular $\lim_{h\to 0} F(h)$ fazendo $h = 0$, uma vez que $F(0)$ não está definida. Mas, se simplificarmos algebricamente $F(h)$, encontraremos que

$$F(h) = \frac{(9+6h+h^2)-9}{h} = \frac{6h+h^2}{h} = 6+h$$

(Lembre-se de que consideramos apenas $h \neq 0$ quando fazemos h tender a 0.) Assim,

$$\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h} = \lim_{h\to 0}(6+h) = 6$$

Fonte: Stewart (2017, p. 85)

Constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica mista $\boldsymbol{\tau_{DRE\_FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}}$. A partir do extrato da figura acima, pode-se verificar que a técnica τ_{DRE} (desenvolver e/ou reduzir as expressões) consiste em transformar as expressões matemáticas que fazem parte do limite de maneira que se possa eliminar as indeterminações existentes para possibilitar o cálculo do valor do limite. A técnica $\tau_{DRE\_FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$ é justificada implicitamente por meio do *teorema da troca para limites* (θ_{TTL}), das *propriedades operatórias e da substituição direta para limites* (θ_{POL_PSD}) e das *propriedades das funções contínuas* (θ_{PFC}).

Trabalho da técnica $\boldsymbol{\tau_{DRE\_FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}}$. Esse momento é proposto para ser realizado nos *2.3 Exercícios* (STEWART, 2017, p. 88-90), nos *Exercícios* (STEWART, 2017, p. 144-146) e nos *Problemas Quentes* (STEWART, 2017, p. 147-148).

(6.1) Exploração do subtipo de tarefa $\boldsymbol{t_6}$ e elaboração da técnica mista $\boldsymbol{\tau_{FTV\_}\tau_{AIC}}$. O referido momento ocorre com a apresentação do processo de determinação de $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$, que corresponde à realização do subtipo de tarefa t_6 (determinar limites que envolvam $\pm\infty$), de acordo com a Figura 50:

Figura 50: Extrato de modelo de resolução de limites por meio da técnica mista $\tau_{FTV\_}\tau_{AIC}$

EXEMPLO 7 Calcule $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x}$.

SOLUÇÃO Se deixarmos $t = 1/x$, sabemos que $t \to -\infty$ quando $x \to 0^-$. Assim, por $\boxed{6}$,

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

Fonte: Stewart (2017, p. 115)

Constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica mista $\boldsymbol{\tau_{FTV\_}\tau_{AIC}}$. A partir da figura acima, pode-se observar que a técnica τ_{FTV} (fazer a troca de variáveis) consiste em transformar as expressões matemáticas que fazem parte do limite de tal forma que se possa analisar intuitivamente o que acontece com cada expressão envolvida, quando x tende ao infinito (positivo ou negativo). A técnica $\tau_{FTV\_}\tau_{AIC}$ é implicitamente justificada por meio da *ideia intuitiva de limites infinitos* (θ_{III}).

Trabalho da técnica $\boldsymbol{\tau_{FTV\_}\tau_{AIC}}$. Esse momento é proposto para ser concretizado nos *2.6 Exercícios* (STEWART, 2017, p. 119-121) e nos *Exercícios* (STEWART, 2017, p. 144-146).

(6.2) Exploração do subtipo de tarefa $\boldsymbol{t_6}$ e elaboração da técnica mista $\boldsymbol{\tau_{MEC\_DRE\_}\tau_{AIC}}$. Esse momento se dá com a apresentação do processo de determinação de $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$, que corresponde à realização do subtipo de tarefa t_6 (determinar limites que envolvam $\pm\infty$), conforme Figura 51:

Figura 51 - Extrato de modelo de resolução de limites por meio da técnica mista $\tau_{MEC\_DRE\_}\tau_{AIC}$

EXEMPLO 5 Calcule $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

SOLUÇÃO Como tanto $\sqrt{x^2+1}$ quanto x são grandes quando x é grande, é difícil ver o que acontece com sua diferença; logo, usamos a álgebra para reescrever a função. Vamos primeiro multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado radical:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(x^2+1) - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

Note que o denominador desta última expressão $\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$ cresce ilimitadamente quando $x \to \infty$ (é maior que x). Logo,

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$$

Fonte: Stewart (2017, p. 114)

Constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica mista $\tau_{MEC\_DRE\_}\tau_{AIC}$. A partir da figura logo acima, observa-se que a técnica τ_{MEC} (multiplicar por expressões conjugadas) consiste em transformar as expressões que fazem parte do limite de maneira que se possa analisar intuitivamente o que acontece com cada expressão matemática em jogo, quando x tende ao infinito (positivo ou negativo). A técnica $\tau_{MEC\_DRE\_}\tau_{AIC}$ é implicitamente justificada por meio da *ideia intuitiva de limites no infinito* (θ_{III}).

Trabalho da técnica $\tau_{MEC\_DRE\_}\tau_{AIC}$. O referido momento é proposto para ser concretizado nos *2.6 Exercícios* (STEWART, 2017, pp.119-121) e nos *Exercícios* (STEWART, 2017, p. 144-146).

(6.3) Exploração do subtipo de tarefa t_6 e elaboração da técnica mista $\tau_{FEA\_}\tau_{AIC}$. Esse momento ocorre com a apresentação do procedimento de estudo de $\lim_{x\to+\infty}(x^2 - x)$, que corresponde à realização do subtipo de tarefa t_6 (determinar limites que envolvam $\pm\infty$), de acordo com a Figura 52:

Figura 52 - Extrato de modelo de investigação de limites por meio da técnica mista $\tau_{FEA\_}\tau_{AIC}$

EXEMPLO 10 Encontre $\lim_{x\to\infty}(x^2 - x)$.

SOLUÇÃO Seria **errado** escrever

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - x) = \lim_{x\to\infty} x^2 - \lim_{x\to\infty} x = \infty - \infty$$

As Propriedades dos Limites não podem ser aplicadas para os limites infinitos, pois ∞ não é um número (não podemos definir $\infty - \infty$). Contudo, *podemos* escrever

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - x) = \lim_{x\to\infty} x(x - 1) = \infty$$

porque, como x e $x - 1$ tornam-se arbitrariamente grandes, o mesmo acontece com seu produto.

Fonte: Stewart (2017, p. 115)

Constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica mista $\tau_{FEA\_}\tau_{AIC}$. A partir do extrato da Figura 51 acima, observa-se que a técnica τ_{FEA} (fatorar as expressões algébricas) consiste em transformar as expressões que fazem parte do limite de forma que se possa analisar intuitivamente o que acontece com cada expressão envolvida, quando x tende ao infinito (positivo ou negativo). A técnica $\tau_{FEA\_}\tau_{AIC}$ é justificada de maneira implícita através da *ideia intuitiva de limites no infinito* (θ_{III}).

Trabalho da técnica $\tau_{FEA\_}\tau_{AIC}$. O referido momento é proposto para ser concretizado nas secções intituladas por *2.6 Exercícios* (STEWART, 2017, p. 119-121) e *Exercícios* (STEWART, 2017, p. 144-146).

(6.4) Exploração do subtipo de tarefa t_6 e elaboração da técnica mista $\tau_{DND\_}\tau_{AIC}$. Esse momento se dá com a apresentação do processo de determinação do valor de $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}$, que corresponde à realização do subtipo de tarefa t_6 (determinar limites que envolvam $\pm\infty$), conforme a Figura 53:

Figura 53 - Extrato de modelo de resolução de limites por meio da técnica $\tau_{DND\_}\tau_{AIC}$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}$$

e indique quais propriedades de limites foram usadas em cada etapa.

SOLUÇÃO Quando x cresce, o numerador e o denominador também crescem, logo, não fica óbvio o que ocorre com a razão entre eles. Para eliminar essa indeterminação, precisaremos antes manipular algebricamente a expressão.

Para calcular o limite no infinito de uma função racional, primeiro dividimos o numerador e o denominador pela maior potência de x que ocorre no denominador. (Podemos assumir que $x \neq 0$, uma vez que estamos interessados apenas em valores grandes de x.) Nesse caso a maior potência de no denominador é x^2; logo, temos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2-x-2}{x^2}}{\dfrac{5x^2+4x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{5+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)} \qquad \text{(pela Propriedade dos Limites 5)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}-2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}5+4\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}} \qquad \text{(pelas Propriedades 1, 2 e 3)}$$

$$=\frac{3-0-0}{5+0+0} \qquad \text{(pela Propriedade 7 e pelo Teorema 5)}$$

$$=\frac{3}{5}$$

Fonte: Stewart (2017, p. 112-113)

Constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica mista $\tau_{DND\_}\tau_{AIC}$. A partir da figura acima, verifica-se que a técnica τ_{DND} (dividir o numerador e o denominador) consiste em transformar as expressões que compõem o limite de maneira que se possa analisar intuitivamente o que ocorre com cada expressão matemática envolvida, quando x tende ao infinito (positivo ou negativo) – no entanto, o autor o faz de maneira detalhada, mostrando o passo-a-passo, aproveitando ainda para justificar algumas passagens através das propriedades indicadas no lado direito do extrato (Figura 53). A técnica $\tau_{DND\_}\tau_{AIC}$ é implicitamente justificada por meio da *ideia intuitiva de limites infinitos* (θ_{III}), assim enunciada (por exemplo):

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ (o mesmo acontece noutras partes do desenvolvimento da resolução apresentada – Figura 53).

Trabalho da técnica $\boldsymbol{\tau_{DND\_}\tau_{AIC}}$. Esse momento é proposto para ser realizado nos *2.6 Exercícios* (STEWART, 2017, p. 119-121) e nos *Exercícios* (STEWART, 2017, p. 144-146).

5.2.3 Síntese Avaliativa do Livro: Cálculo (2017)

São agora apresentados os elementos da síntese avaliativa: identificação dos subtipos de tarefas, pertinência ou razão de ser, representatividade, elementos técnico-tecnológicos, evolução dos subtipos de tarefas e da tecnologia, e a organização didática.

Identificação dos subtipos de tarefas. Nesse livro, os enunciados que tratam do estudo de limites de funções fazem referência às palavras *estime*, *estabelecer*, *calcular*, *encontre* e *calcule*. Normalmente, os enunciados são pequenos e simples, por exemplo: “Estime o valor de $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$”. (STEWART, 2017, p. 71). O que ajuda a evitar confusões na hora de entender o significado daquilo que se deseja. Geralmente, os enunciados permitem identificar de maneira rápida o subtipo de tarefa que está sendo abordada, por exemplo: “O gráfico de uma função g é apresentado na Figura 10. Use-o para estabelecer os valores (caso existam) dos seguintes limites”. (STEWART, 2017, p. 75). Neste último exemplo, a tarefa é do subtipo t_2 (encontrar o limite de $f(x)$ com o auxílio do gráfico).

Pertinência ou razão de ser. O tipo de tarefa relacionada a determinação limites de funções reais de uma variável é um recurso (ou ferramenta) a ser utilizado para dar base aos demais ramos do Cálculo Diferencial e Integral, conforme pode ser constatado no próprio livro analisado:

> O Cálculo (...) é menos estático e mais dinâmico. Trata de variação e de movimento, bem como de quantidades que tendem a outras quantidades (...) algumas das principais ideias do Cálculo (...) como o conceito de limite surge quando tentamos resolver diversos problemas (...) A ideia de **limite é a base dos vários ramos do Cálculo.** Por isso, é apropriado começar nosso estudo de Cálculo examinando os limites e suas propriedades. O tipo especial de limite usado para encontrar as tangentes e as velocidades dá origem à ideia central do Cálculo Diferencial – a derivada. (STEWART, 2017, p. 29-65).

Representatividade. Os problemas explorados em relação à determinação de limites de funções reais contemplam todos os diferentes subtipos de tarefas (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 e t_6). No total, foram identificados 182 problemas no capítulo que foi investigado, dos quais, 27 estão resolvidos e devidamente explicados, e 155 são propostos como momento de trabalho do aluno. Assim, foram identificadas as seguintes tarefas (Tabela 9):

Tabela 9 - Subtipos de tarefas no livro: Cálculo (2017)

SUBTIPOS DE TAREFAS	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	Total parcial	%
τ_{CVN}	23	-	-	-	-	-	**23**	**12,64**
τ_{ACG}	-	28	-	-	-	-	**28**	**15,38**
τ_{ACG_DVN}	-	13	-	-	-	-	**13**	**7,14**
τ_{AIC}	-	-	17	-	-	-	**17**	**9,34**
τ_{DVN}	-	-	-	14	-	-	**14**	**7,69**
$\tau_{FEA\_EIE}\_\tau_{DVN}$	-	-	-	-	18	-	**18**	**9,89**
$\tau_{MEC\_DRE\_EIE}\_\tau_{DVN}$	-	-	-	-	10	-	**10**	**5,49**
$\tau_{DRE\_FEA\_EIE}\_\tau_{DVN}$	-	-	-	-	9	-	**9**	**4,94**
τ_{AIC}	-	-	-	-	-	12	**12**	**6,59**
$\tau_{FTV}\_\tau_{AIC}$	-	-	-	-	-	6	**6**	**3,30**
$\tau_{MEC\_DRE}\_\tau_{AIC}$	-	-	-	-	-	7	**7**	**3,85**
$\tau_{FEA}\_\tau_{AIC}$	-	-	-	-	-	7	**7**	**3,85**
$\tau_{DND}\_\tau_{AIC}$	-	-	-	-	-	18	**18**	**9,89**

Fonte: o autor (2019)

Elementos técnico-tecnológicos. A concepção acerca de limite é (inicialmente) apresentada, partindo-se da análise do **comportamento numérico da função $\boldsymbol{f(x)}$**, quando são considerados para x, valores próximos de $x = a$ (tanto pela esquerda quanto pela direita de $x = a$). O autor desse livro propôs 23 exercícios relativos (somente) ao subtipo de tarefa t_1. A técnica τ_{CVN} (calcular valores numéricos) foi mais ou menos elaborada e justificada como parte de uma praxeologia matemática pontual (muito especial) acerca da determinação de limites de funções, cujo objetivo é estudar o comportamento das funções através de estimativas e padrões numéricos.

No que diz respeito às *técnicas* elaboradas e/ou sistematizadas, foram identificadas as 4 técnicas que se seguem:

- ✓ τ_{CVN}: *Calcular valores numéricos*, mais ou menos justificada pela *ideia intuitiva de limites* (θ_{IIL});
- ✓ τ_{ACG}: *Analisar o comportamento gráfico*, mais ou menos justificada pela *ideia gráfica intuitiva* (θ_{IGI});
- ✓ τ_{AIC}: *Analisar intuitivamente o comportamento*, mais ou menos justificada pela *ideia intuitiva de limites infinitos e no infinito* (θ_{III});

- ✓ τ_{DVN}: *Determinar o valor numérico*, elaborada e justificada através das *propriedades operatórias e da substituição direta para limites* (θ_{POL_PSD}) e das *propriedades das funções contínuas* (θ_{PFC}).

A partir dessas 4 técnicas acima, através de combinações com as já elencadas técnicas auxiliares, foram elaboradas as 8 técnicas mistas a seguir:

- ✓ τ_{ACG_DVN}: *Analisar o comportamento gráfico/ Determinar o valor numérico*;
- ✓ $\tau_{FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$: *Fatorar as expressões algébricas/ Eliminar as indeterminações existentes/ Determinar o valor numérico*;
- ✓ $\tau_{MEC\_DRE\_EIE\_}\tau_{DVN}$: *Multiplicar por expressões conjugadas/ Desenvolver e/ou reduzir as expressões/ Eliminar as indeterminações existentes/ Determinar o valor numérico*;
- ✓ $\tau_{DRE\_FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$: *Desenvolver e/ou reduzir as expressões/ Fatorar as expressões algébricas/ Eliminar as indeterminações existentes/ Determinar o valor numérico*;
- ✓ $\tau_{FTV\_}\tau_{AIC}$: *Fazer a troca de variáveis/ Analisar intuitivamente o comportamento*;
- ✓ $\tau_{MEC\_DRE\_}\tau_{AIC}$: *Multiplicar por expressões conjugadas/ Desenvolver e/ou reduzir as expressões/ Analisar intuitivamente o comportamento*;
- ✓ $\tau_{FEA\_}\tau_{AIC}$: *Fatorar as expressões algébricas/ Analisar intuitivamente o comportamento*;
- ✓ $\tau_{DND\_}\tau_{AIC}$: *Dividir o numerador e o denominador/ Analisar intuitivamente o comportamento*.

Evolução dos subtipos de tarefas e da tecnologia. (1) O estudo de limites de funções reais de uma variável é introduzido através da exploração de exercícios que correspondem à realização do subtipo de tarefa t_1 (estimar numericamente o valor de $\lim_{x\to a} f(x)$). O autor sistematizou a técnica que consiste em *calcular valores numéricos* (τ_{CVN}), mais ou menos justificada pela *ideia intuitiva de limites* (θ_{IIL}). **(2)** Na sequência, foram explorados exercícios que correspondem à realização do subtipo de tarefa t_2 (encontrar o limite de $f(x)$ com o auxílio do gráfico). Então, foi sistematizada a técnica que consiste em *analisar o comportamento gráfico* (τ_{ACG}), mais ou menos justificada por meio da *ideia gráfica intuitiva* (θ_{IGI}). **(3)** Logo após, foram explorados exercícios que correspondem à realização do subtipo de tarefa t_3 (determinar limites laterais de $f(x)$ com o auxílio de uma investigação intuitiva da expressão matemática envolvida). A técnica que foi sistematizada consiste em *analisar intuitivamente o comportamento* (τ_{AIC}), mais ou menos justificada por meio da *ideia intuitiva de limites infinitos e no infinito* (θ_{III}). **(4)** Assim sendo, foram (posteriormente) trabalhados exercícios que correspondem à realização do subtipo de tarefa t_2 (encontrar o limite de $f(x)$ com o auxílio do gráfico). Para resolução de tais exercícios, sistematizou-se a técnica mista τ_{ACG_DVN}, que consiste em duas etapas: (i) *analisar o comportamento gráfico* (τ_{ACG}), para encontrar os limites iniciais (partindo-se do gráfico); e (ii) *determinar o valor numérico* (τ_{DVN}), para calcular o valor final do limite.

(5) Desse modo, seguindo a ordem, foram exploradas atividades que correspondem à realização do subtipo de tarefa t_4 (calcular o valor de $\lim_{x \to a} f(x)$, sendo que não ocorrem indeterminações nem impossibilidades em $x = a$). O subtipo de tarefa (aqui referido) deu origem à sistematização da técnica que consiste em *determinar o valor numérico* (τ_{DVN}), que é por sua vez, elaborada e justificada pelas *propriedades operatórias e da substituição direta para limites* (θ_{POL_PSD}) e pelas *propriedades das funções contínuas* (θ_{PFC}). **(6)** Em seguida, foram propostos exercícios que correspondem à realização do subtipo de tarefa t_5 (calcular $\lim_{x \to a} f(x)$, sendo que ocorrem indeterminações para $x = a$), dando origem à técnica mista $\tau_{FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$. Tal técnica é composta por três etapas: (i) *fatorar as expressões algébricas* (τ_{FEA}), para expor as expressões que estão conduzindo às indeterminações; (ii) *eliminar as indeterminações existentes* (τ_{EIE}), para transformar o limite em outro equivalente; e (iii) *determinar o valor numérico* (τ_{DVN}), para calcular o valor final do novo limite (que é igual ao valor do limite inicial). Os elementos tecnológicos que acompanham a elaboração da técnica (τ_{EIE}), estão relacionados com o *teorema da troca para limites* (θ_{TTL}).

(7) Então, foram propostos exercícios que correspondem à realização do subtipo de tarefa t_5 (calcular $\lim_{x \to a} f(x)$, sendo que ocorrem indeterminações para $x = a$), dando origem à técnica mista $\tau_{DRE\_FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$. Esta técnica satisfaz quatro etapas: (i) *desenvolver e/ou reduzir as expressões* (τ_{DRE}), para iniciar o preparo das expressões dos próximos passos; (ii) *fatorar as expressões algébricas* (τ_{FEA}), para expor as expressões que estão conduzindo às indeterminações; (iii) *eliminar as indeterminações existentes* (τ_{EIE}), para transformar o limite em outro equivalente; e (iv) *determinar o valor numérico* (τ_{DVN}), para calcular o valor final do novo limite (que é igual ao valor do limite inicial). **(8)** Depois, foram propostos exercícios que correspondem à realização do subtipo de tarefa t_5 (calcular $\lim_{x \to a} f(x)$, sendo que ocorrem indeterminações para $x = a$), dando origem à técnica mista $\tau_{MEC\_DRE\_EIE\_}\tau_{DVN}$. Esta técnica satisfaz quatro etapas: (i) *multiplicar por expressões conjugadas* (τ_{MEC}), para racionalizar as expressões que compõem o limite; (ii) *desenvolver e/ou reduzir as expressões* (τ_{DRE}), para iniciar o preparo das expressões dos próximos passos; (iii) *eliminar as indeterminações existentes* (τ_{EIE}), para transformar o limite em outro equivalente; e (iv) *determinar o valor numérico* (τ_{DVN}), para calcular o valor final do novo limite (que é igual ao valor do limite inicial).

(9) Na sequência, foram trabalhados exercícios que correspondem à realização do subtipo de tarefa t_6 (determinar limites que envolvam $\pm\infty$). Para resolução de tais exercícios, foi sistematizada a técnica mista $\tau_{DND\_}\tau_{AIC}$, que consiste em duas etapas: (i) *dividir o numerador e o denominador* (τ_{DND}), para preparar as expressões do limite da próxima etapa; e (ii) *analisar intuitivamente o comportamento* (τ_{AIC}), para determinar o valor do limite. **(10)** Seguindo a ordem, foram (posteriormente) trabalhados exercícios que correspondem à realização do subtipo de tarefa t_6 (determinar limites que envolvam $\pm\infty$). Para resolução desses exercícios, sistematizou-se a técnica mista $\tau_{MEC\_DRE\_}\tau_{AIC}$, que consiste em três etapas: (i) *multiplicar por expressões conjugadas* (τ_{MEC}), para racionalizar as expressões que compõem o limite; (ii) *desenvolver e/ou reduzir as expressões* (τ_{DRE}), para preparar as expressões da próxima etapa; e (iii) *analisar intuitivamente o comportamento* (τ_{AIC}), para determinar o valor do limite.

(11) Dando continuidade, foram trabalhados exercícios que correspondem à realização do subtipo de tarefa t_6 (determinar limites que envolvam $\pm\infty$). Para resolução desses exercícios, sistematizou-se a técnica mista $\tau_{FTV\_}\tau_{AIC}$, que é composta por duas etapas: (i) *fazer a troca de variáveis* (τ_{FTV}), para transformar o limite em outro equivalente; e (ii) *analisar intuitivamente o comportamento* (τ_{AIC}), para determinar o valor do novo limite (que é igual ao valor do limite inicial). **(12)** Por fim, foram trabalhados exercícios que correspondem à realização do subtipo de tarefa t_6 (determinar limites que envolvam $\pm\infty$). Para resolução desses exercícios, sistematizou-se a técnica mista $\tau_{FEA\_}\tau_{AIC}$, que consiste em duas etapas: (i) *fatorar as expressões algébricas* (τ_{FEA}), para transformar o limite em outro equivalente; e (ii) *analisar intuitivamente o comportamento* (τ_{AIC}), para determinar o novo limite (que é igual ao limite inicial), conforme descrito na Tabela 10:

Tabela 10 - Tecnologias no livro: Cálculo (2017)

TECNOLOGIAS	θ_{IIL}	θ_{IGI}	θ_{IGI_POL}	θ_{III}	θ_{POL_PSD}	θ_{TTL}	θ_{PFC}
τ_{CVN}	23	-	-	-	-	-	-
τ_{ACG}	-	28	-	-	-	-	-
τ_{ACG_DVN}	-	-	13	-	-	-	-
τ_{AIC}	-	-	-	29	-	-	-
τ_{DVN}	-	-	-	-	14	-	14
$\tau_{FEA\_EIE}\_\tau_{DVN}$	-	-	-	-	18	18	18
$\tau_{MEC\_DRE\_EIE}\_\tau_{DVN}$	-	-	-	-	10	10	10
$\tau_{DRE\_FEA\_EIE}\_\tau_{DVN}$	-	-	-	-	9	9	9
τ_{AIC}	-	-	-	-	-	-	-
$\tau_{FTV}\_\tau_{AIC}$	-	-	-	6	-	-	-
$\tau_{MEC\_DRE}\_\tau_{AIC}$	-	-	-	7	-	-	-
$\tau_{FEA}\_\tau_{AIC}$	-	-	-	7	-	-	-
$\tau_{DND}\_\tau_{AIC}$	-	-	-	18	-	-	-
Total parcial	**23**	**28**	**13**	**67**	**51**	**37**	**51**
%	**8,52**	**10,37**	**4,81**	**24,81**	**18,89**	**13,70**	**18,89**

Fonte: o autor (2019)

Organização didática. A transposição das organizações matemáticas identificadas em torno dos subtipos de tarefas referentes ao estudo de limites de funções reais de uma variável (no referido livro) ocorreu em três momentos:

- ✓ *Primeiro momento:* Introdução de um problema para elaborar e sistematizar uma técnica (com a respectiva explicação do procedimento colocado em prática) que consiga resolver um dado limite (subtipo de tarefa). É ainda nesse momento que são enunciadas as propriedades e afirmações que formam os elementos que explicam e justificam a técnica elaborada.
- ✓ *Segundo momento:* É o momento que tem por objetivo a *avaliação* dos elementos técnico-tecnológicos que surgem na situação considerada. Esse momento ocorre em comentários, logo após cada exercício resolvido (aparecendo apenas em alguns casos dentre os identificados). Dessa maneira, no referido momento, o aluno é levado à validação e reflexão sobre as respostas desenvolvidas pelo autor.
- ✓ *Terceiro momento:* É o momento do *trabalho da técnica*, sendo concretizado nas diversas secções intituladas por *Exercícios*, *Teste – Verdadeiro ou Falso* e *Problemas Quentes*.

Mesmo que as teorias descritas no modelo de referência não tenham sido identificadas (de maneira clara) nas organizações matemáticas estudadas nesse livro, ressalta-se aqui, que as

4 teorias foram encontradas nas demais partes do capítulo investigado (capítulo 2 – volume 1). As apresentações acerca dessas teorias são estruturadas e completas, e oferecem ainda, os elementos teóricos necessários para justificar as tecnologias detectadas.

No corpo do texto, as tecnologias são explicadas e justificadas pelas teorias (apoiando-se em demonstrações ou provas matemáticas).

O capítulo estudado não trata exclusivamente do objeto matemático limites de funções, trabalha (também) o conteúdo de derivadas. Na parte destinada ao estudo de derivadas, o autor trata de temas, tais como: tangentes, velocidades, derivadas, taxas de variação, derivabilidade (ou diferenciabilidade) e derivadas de ordem superior. Trazendo ainda, aplicações diversas acerca das derivadas.

Na parte que trata de limites, além das organizações matemáticas pontuais que foram identificadas e analisadas sobre determinação de limites, também são trabalhados problemas relacionados a demonstrações sobre limites, estudo de retas assíntotas, continuidade de funções, teorema do confronto e teorema do valor intermediário. Trazendo ainda, várias aplicações à física relativística, geometria plana e informática, conforme pode ser visto a seguir:

> De fato, o Teorema do Valor Intermediário desempenha um papel [importante] na própria maneira de funcionar destas ferramentas [sistemas de plotagem de gráficos]. Um computador calcula um número finito de pontos sobre o gráfico e acende os pixels que contém os pontos calculados. Ele pressupõe que a função é contínua e acende todos os valores intermediários entre dois pontos consecutivos. O computador, portanto, "conecta os pontos" acendendo os pixels intermediários. (STEWART, 2017, p. 107).

O capítulo que foi analisado é repleto de referências ao uso de calculadoras gráficas, computadores e sistemas de computação algébrica (SCA), mostrando as limitações e o potencial de uso de tais ferramentas, conforme pode ser constatado abaixo:

> **Sistemas de Computação Algébrica**
> Os sistemas de computação algébrica (SCA) tem comandos para calcular limites. A fim de evitar falhas como as ilustradas nos Exemplos 2, 4 e 5, eles não encontram os limites por experimentação numérica. Em vez disso, usam técnicas mais sofisticadas, como cálculo de séries infinitas. Se você tiver acesso a um SCA, use o comando limite para calcular os limites nos exemplos desta secção e verificar [momento de avaliação] suas respostas para os exercícios deste capítulo. (STEWART, 2017, p. 73).

O autor faz diversas referências histórico-epistemológicas acerca do objeto matemático limites, por exemplo, quando fala da construção da ideia de limite, de Cauchy, de Weierstrass, etc. E também acerca do Cálculo como um todo, quando fala do desenvolvimento das derivadas e das integrais, de Newton, de Leibniz, etc. Já no final do capítulo, o autor apresenta toda uma bibliografia especializada para corroborar com as informações históricas e epistemológicas trazidas.

5.3 SÍNTESE CONCLUSIVA DAS DUAS OBRAS (1977/2017)

O principal objetivo desta investigação foi estudar como autores de livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral propõem situações visando a transformação de um estado de *não-saber* para um estado de *saber* em relação ao objeto matemático limites de funções reais de uma variável. Buscou-se então, estudar, como *vivia* (por volta dos anos 1970) e como *vive* (atualmente) o conteúdo limites de funções em duas obras aprovadas e indicadas por renomadas universidades brasileiras. Desse modo, esta pesquisa foi conduzida, partindo-se da modelização, identificação e caracterização das praxeologias matemáticas e didáticas acerca da determinação de limites de funções de uma variável real. A seguir, são apresentados os principais resultados da investigação realizada.

Organização curricular. Os temas matemáticos dos dois livros analisados nem sempre são tratados em capítulos próprios (temas isolados), conforme pode ser visto abaixo:

- *O Cálculo com Geometria Analítica de Leithold* (volume 1): **(1) Números Reais e Introdução à Geometria Analítica**; **(2) Funções, Limites e Continuidade**; (3) A Derivada; (4) Aplicações da Derivada; **(5) A Diferencial e a Antidiferenciação**; (6) A Integral Definida; (7) Aplicações da Integral Definida; **(8) Funções Logarítmica e Exponencial**; **(9) As Funções Trigonométricas e Hiperbólicas**; (10) Técnicas de Integração; (11) Coordenadas Polares; (12) As Secções Cônicas; e **(13) Formas Indeterminadas, Integrais Impróprias e a Fórmula de Taylor.**
- *Cálculo de Stewart* (volume 1): **(1) Funções e Modelos**; **(2) Limites e Derivadas**; (3) Regras de Derivação; (4) Aplicações de Derivação; (5) Integrais; (6) Aplicações de Integração; (7) Técnicas de Integração; e (8) Mais Aplicações de Integração.

Ambos os livros didáticos tratam basicamente dos mesmos temas matemáticos, apenas com algumas diferenças pontuais. Vale salientar aqui, que a obra *Cálculo* também trabalha a parte de geometria analítica, tal qual, a outra obra analisada.

Observando-se a duas descrições acima (referentes aos sumários dos livros investigados), pode-se perceber que a organização curricular de ambos os títulos segue (basicamente) o seguinte modelo (Quadro 15):

Quadro 15 - Organização curricular básica (temas matemáticos gerais)

Funções $\Rightarrow$ **Limites** $\Rightarrow$ **Derivadas** $\Rightarrow$ **Integrais**

Fonte: o autor (2019)

Na organização dos elementos internos das partes analisadas em cada uma das obras, também não há diferenças significativas (apenas inversões pontuais na ordem dos elementos), conforme pode ser visto nos dois quadros a seguir (Quadros 16 e 17):

Quadro 16 - Organização interna (básica) do capítulo estudado no livro: O Cálculo com Geometria Analítica (1977)

Limite e Definição Formal de Limite $\longrightarrow$ **Propriedades dos Limites** $\longrightarrow$ **Limites Infinito e no Infinito** $\longrightarrow$ **Continuidade**

Fonte: o autor (2019)

Quadro 17 - Organização interna (básica) do capítulo estudado no livro: Cálculo (2017)

Limite $\longrightarrow$ **Propriedades dos Limites** $\longrightarrow$ **Definição Formal de Limite** $\longrightarrow$ **Continuidade** $\longrightarrow$ **Limites Infinito e no Infinito**

Fonte: o autor (2019)

Organização matemática. A análise das duas coleções de livros didáticos à luz das praxeologias matemáticas (modelizadas anteriormente neste estudo) relativas à determinação de limites de funções, permitiu identificar as seguintes organizações matemáticas pontuais relativas ao:

Subtipo de tarefa t_1 (estimar numericamente o valor de $\lim_{x \to a} f(x)$). Os resultados mostram que no livro *O Cálculo com Geometria Analítica*, não foram propostos exercícios relativos a este subtipo de tarefa. No livro *Cálculo*, tais exercícios foram propostos para serem resolvidos por meio da técnica *calcular valores numéricos* (τ_{CVN}), mais ou menos sistematizada através da *ideia intuitiva de limites* (θ_{IIL}).

Subtipo de tarefa t_2 (encontrar o limite de $f(x)$ com o auxílio do gráfico). Os resultados mostram que no livro didático *O Cálculo com Geometria Analítica*, os exercícios relativos a este subtipo de tarefa foram propostos para serem resolvidos por meio da técnica *analisar o comportamento gráfico* (τ_{ACG}), mais ou menos justificada pela *ideia gráfica intuitiva* (θ_{IGI}). No livro *Cálculo*, tais exercícios foram propostos para serem resolvidos de duas formas distintas (dependendo da situação): (1) Por meio da técnica *analisar o comportamento gráfico* (τ_{ACG}), mais ou menos sistematizada por meio da *ideia gráfica intuitiva* (θ_{IGI}); e (2) Através da técnica mista τ_{ACG_DVN}, que consiste em *analisar o comportamento gráfico/ determinar o valor numérico*.

Subtipo de tarefa t_3 (determinar limites laterais de $f(x)$ com o auxílio de uma investigação intuitiva da expressão matemática envolvida). Os resultados mostram que no livro *O Cálculo com Geometria Analítica*, os problemas relativos a este subtipo de tarefa foram propostos para serem resolvidos por meio da técnica *analisar intuitivamente o comportamento* (τ_{AIC}), mais ou menos justificada pela *ideia intuitiva de limites infinitos e no infinito* (θ_{III}). No livro *Cálculo*, tais exercícios foram propostos para serem resolvidos por meio da técnica *analisar intuitivamente o comportamento* (τ_{AIC}), mais ou menos justificada pela *ideia intuitiva de limites infinitos e no infinito* (θ_{III}).

Subtipo de tarefa t_4 (calcular o valor de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, sendo que não ocorrem indeterminações nem impossibilidades em $x = a$). Os resultados mostram que no livro *O Cálculo com Geometria Analítica*, os exercícios relacionados a este subtipo de tarefa foram propostos para serem resolvidos através da técnica *determinar o valor numérico* (τ_{DVN}), elaborada e justificada pelas *propriedades operatórias e da substituição direta para limites* (θ_{POL_PSD}) e pelas *propriedades das funções contínuas* (θ_{PFC}). No livro *Cálculo*, esses exercícios foram propostos para serem resolvidos por meio da técnica *determinar o valor numérico* (τ_{DVN}), elaborada e sistematizada pelas *propriedades operatórias e da substituição direta para limites* (θ_{POL_PSD}) e pelas *propriedades das funções contínuas* (θ_{PFC}).

Subtipo de tarefa t_5 (calcular $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, sendo que ocorrem indeterminações para $x = a$). Os resultados mostram que no livro *O Cálculo com Geometria Analítica*, os problemas relativos a este subtipo de tarefa foram propostos para serem resolvidos por meio da técnica mista $\tau_{FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$, que consiste em *fatorar as expressões algébricas/ eliminar as indeterminações existentes/ determinar o valor numérico*. No livro *Cálculo*, tais exercícios foram propostos para serem resolvidos de três maneiras distintas (dependendo da situação): (1) Por meio da técnica mista $\tau_{FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$, que consiste em *fatorar as expressões algébricas/ eliminar as indeterminações existentes/ determinar o valor numérico*; (2) Através da técnica mista $\tau_{MEC\_DRE\_EIE\_}\tau_{DVN}$, que consiste em *multiplicar por expressões conjugadas/ desenvolver* *e/ou reduzir as expressões/ eliminar as indeterminações existentes/ determinar o valor numérico*; e (3) Por meio da técnica mista $\tau_{DRE\_FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$, que consiste em *desenvolver e/ou reduzir as expressões/ fatorar as expressões algébricas/ eliminar as indeterminações existentes/ determinar o valor numérico.*

Subtipo de tarefa t_6 (determinar limites que envolvam $\pm\infty$). Os resultados mostram que no livro *O Cálculo com Geometria Analítica*, os exercícios relativos a este subtipo de tarefa foram propostos para serem resolvidos por meio da técnica mista $\tau_{DND\_}\tau_{AIC}$, que consiste em *dividir o numerador e o denominador/ analisar intuitivamente o comportamento*. No livro *Cálculo*, tais problemas foram propostos para serem resolvidos de cinco formas diferentes (dependendo da situação): (1) Por meio da técnica *analisar intuitivamente o comportamento* (τ_{AIC}), mais ou menos justificada pela *ideia intuitiva de limites infinitos e no infinito* (θ_{III}); (2) Através da técnica mista $\tau_{FTV\_}\tau_{AIC}$, que consiste em *fazer a troca de variáveis/ analisar intuitivamente o comportamento*; (3) Por meio da técnica mista $\tau_{MEC\_DRE\_}\tau_{AIC}$, que consiste em *multiplicar por expressões conjugadas/ desenvolver e/ou reduzir as expressões/ analisar intuitivamente o comportamento*; (4) Através da técnica mista $\tau_{FEA\_}\tau_{AIC}$, que consiste em *fatorar as expressões algébricas/ analisar intuitivamente o comportamento*; e (5) Por meio da técnica mista $\tau_{DND\_}\tau_{AIC}$, que consiste em *dividir o numerador e o denominador/ analisar intuitivamente o comportamento*, conforme apresentado a seguir (Quadro 18):

Quadro 18 - Comparativo entre os dois livros analisados quanto aos subtipos de tarefas e técnicas

<table>
<tr><th rowspan="2">SUBTIPOS DE TAREFAS</th><th colspan="2">LIVRO DE LEITHOLD (1977)</th><th colspan="2">LIVRO DE STEWART (2017)</th></tr>
<tr><th>TÉCNICA</th><th>TECNOLOGIA</th><th>TÉCNICA</th><th>TECNOLOGIA</th></tr>
<tr><td>t_1</td><td>-</td><td>-</td><td>τ_{CVN}</td><td>θ_{IIL}</td></tr>
<tr><td rowspan="2">t_2</td><td rowspan="2">τ_{ACG}</td><td rowspan="2">θ_{IGI}</td><td>τ_{ACG}</td><td>θ_{IGI}</td></tr>
<tr><td>τ_{ACG_DVN}</td><td>θ_{IGI_POL}</td></tr>
<tr><td>t_3</td><td>τ_{AIC}</td><td>θ_{III}</td><td>τ_{AIC}</td><td>θ_{III}</td></tr>
<tr><td>t_4</td><td>τ_{DVN}</td><td>θ_{POL_PSD}; θ_{PFC}</td><td>τ_{DVN}</td><td>θ_{POL_PSD}; θ_{PFC}</td></tr>
<tr><td rowspan="3">t_5</td><td rowspan="3">$\tau_{FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$</td><td rowspan="3">$\theta_{TTL}$; θ_{POL_PSD}; θ_{PFC}</td><td>$\tau_{FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$</td><td rowspan="3">$\theta_{TTL}$; θ_{POL_PSD}; θ_{PFC}</td></tr>
<tr><td>$\tau_{MEC\_DRE\_EIE\_}\tau_{DVN}$</td></tr>
<tr><td>$\tau_{DRE\_FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">t_6</td><td rowspan="5">$\tau_{DND\_}\tau_{AIC}$</td><td rowspan="5">θ_{III}</td><td>τ_{AIC}</td><td rowspan="5">θ_{III}</td></tr>
<tr><td>$\tau_{FTV\_}\tau_{AIC}$</td></tr>
<tr><td>$\tau_{MEC\_DRE\_}\tau_{AIC}$</td></tr>
<tr><td>$\tau_{FEA\_}\tau_{AIC}$</td></tr>
<tr><td>$\tau_{DND\_}\tau_{AIC}$</td></tr>
</table>

Fonte: o autor (2019)

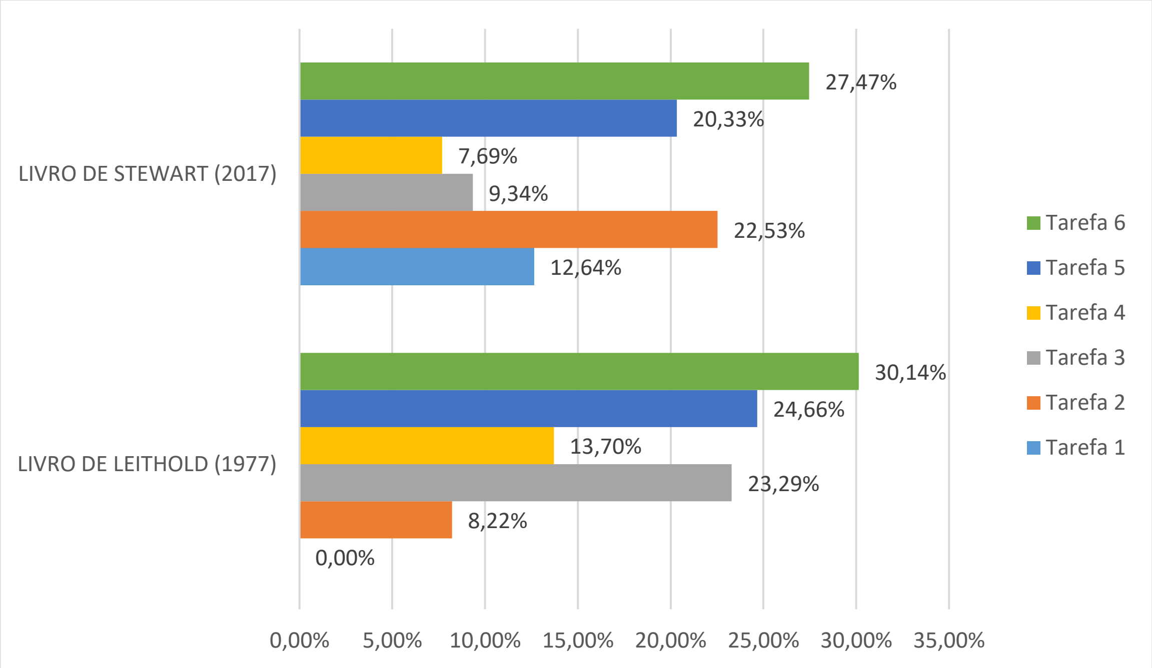
A organização didática. Os resultados deste estudo demonstram que as transposições didáticas das praxeologias matemáticas pontuais existentes nas duas coleções avaliadas, constituídas em torno da determinação de limites de funções, cumprem-se em três momentos (elaboração e sistematização das técnicas, avaliação do ambiente técnico-tecnológico e trabalho da técnica).

O segundo momento (o de avaliação da técnica), em ambas as obras, não acontece em todos os exemplos resolvidos. Pelo contrário, no livro *O Cálculo com Geometria Analítica*, em apenas 1 de todas as praxeologias identificadas ocorreu o momento de avaliação da técnica; já no livro *Cálculo*, em apenas 4 de todas as organizações identificadas ocorreu o momento de avaliação do ambiente técnico-tecnológico.

Em ambos os livros (nos casos destacados no parágrafo anterior), no momento referente à avaliação dos elementos técnico-tecnológicos, o aluno tem a oportunidade de refletir sobre o que está sendo ensinado, participando então, da sua aprendizagem de maneira ativa. Nos demais casos, a participação do aluno é restrita à leitura e observação do modelo previsto por cada um dos autores para aplicar (depois) no estudo de outros limites no momento dedicado ao trabalho da técnica.

Pode-se destacar, com base no gráfico 5, que o livro *O Cálculo com Geometria Analítica de Leithold* dá maior ênfase às tarefas t_6 (determinar limites que envolvam $\pm\infty$), ou seja, limites do tipo $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x}{x^5}$, com 30,14% das atividades propostas. Vale destacar aqui, que o autor da referida obra, dá maior preferência à técnica mista $\tau_{DND\_}\tau_{AIC}$ (dividir o numerador e o denominador / analisar intuitivamente o comportamento) para a realização das tarefas t_6. No livro *Cálculo de Stewart*, também há uma concentração maior das tarefas t_6, com 27,47% dos problemas propostos em relação ao total. O autor desse livro, também dá maior ênfase ao uso da técnica mista $\tau_{DND\_}\tau_{AIC}$ para a realização de tais tarefas.

Gráfico 5 - Comparativo entre os dois livros analisados em relação ao quantitativo de tarefas



Fonte: o autor (2019)

Desse modo, pode-se perceber que (em ambos os livros), não há diferenças significativas no que concerne às preferências (majoritárias) em relação às tarefas e às técnicas.

De maneira um pouco mais geral, partindo-se do gráfico acima, e observando-se as tarefas t_4 (calcular o valor de $\lim_{x \to a} f(x)$, sendo que não ocorrem indeterminações nem impossibilidades em $x = a$), t_5 (calcular $\lim_{x \to a} f(x)$, sendo que ocorrem indeterminações para $x = a$) e t_6, vê-se que não há diferenças significativas em relação às proporções de tais tarefas nas duas obras estudadas.

A tarefa t_3 (determinar limites laterais de $f(x)$ com o auxílio de uma investigação intuitiva da expressão matemática envolvida) é tratada de maneira diferente nos dois livros. Do gráfico acima, observa-se que, no livro *O Cálculo com Geometria Analítica*, os problemas relacionados à tarefa t_3 aparecem com 23,29% do total dos problemas identificados (sendo a 3ª maior proporção no referido livro). No livro *Cálculo*, tais problemas aparecem apenas com 9,34% (sendo a 5ª maior proporção do total desse livro). Logo, no que concerne à representatividade da tarefa t_3, existe uma diferença significativa em relação aos dois livros estudados.

A tarefa t_2 (encontrar o limite de $f(x)$ com o auxílio do gráfico) é (também) tratada de maneira diferente pelos dois autores. A partir do gráfico acima, observa-se que, no livro *O Cálculo com Geometria Analítica*, os problemas relacionados à tarefa t_2 aparecem com 8,22%

do total dos problemas identificados (sendo a 5ª maior proporção no referido livro). No livro *Cálculo*, tais problemas aparecem com 22,53% (sendo a 2ª maior proporção do total desse livro). Logo, no que concerne à tarefa t_2, existe uma diferença significativa em relação aos dois livros estudados.

Em relação as praxeologias matemáticas constituídas em torno das tarefas t_2, t_3, t_4, t_5 e t_6, não há muitas distinções, o que há é uma diferente distribuição das proporções relativas ao quantitativo de exercícios existentes em ambos os livros.

A partir do gráfico acima, pode-se ainda concluir que, a organização matemática constituída em torno da tarefa t_1 (estimar numericamente o valor de $\lim_{x \to a} f(x)$) não aparece no livro *O Cálculo com Geometria Analítica*. Já no livro *Cálculo*, essa tarefa aparece com 12,64% do total de exercícios existentes (sendo a 4ª maior proporção em relação ao total).

Em relação às tecnologias, o livro *O Cálculo com Geometria Analítica*, concentra-se mais intensamente nas propriedades operatórias e da substituição direta para limites (θ_{POL_PSD}), assim como também, nas propriedades das funções contínuas (θ_{PFC}), com 27,18% em relação ao total. Já o livro *Cálculo*, trabalha mais com a ideia intuitiva de limites infinitos e no infinito, com 24,81% das situações propostas em seus exercícios.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o objetivo de estudar como autores de livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral propõem situações visando a transformação de um estado de *não-saber* para um estado de *saber* em relação ao objeto matemático limites de funções reais de uma variável, escolheu-se duas obras aprovadas e indicadas por prestigiadas universidades brasileiras, a saber: O Cálculo com Geometria Analítica de Louis Leithold (1977) e Cálculo de James Stewart (2017), para serem submetidas à análise.

Como referencial teórico, foi decidido (por questões de adequação técnica e teórica), apoiar-se na Teoria Antropológica do Didático para estudar as organizações matemáticas e didáticas acerca da determinação de limites de funções, que foram encontradas nos livros selecionados.

Chevallard (1999) afirma que a formação dos saberes/conhecimentos, assim como as praxeologias, envelhecem, e que durante tal processo de envelhecimento, seus elementos constituintes podem perder seus créditos. Desse modo, em uma determinada instituição, podem desaparecer praxeologias ou aparecer novas praxeologias, que serão produzidas e reproduzidas (caso passem a existir).

Para tal, esta dissertação foi iniciada relatando, como forma de motivação, as dificuldades enfrentadas por alunos e professores nos processos de ensino e aprendizagem do Cálculo, em especial, do conteúdo limites de funções de uma variável real.

Por meio de leituras realizadas sobre livros didáticos, dificuldades nos processos de ensino e aprendizagem, e organizações matemáticas e didáticas no contexto da sala de aula, foram capturados os elementos teóricos e metodológicos necessários para a formulação da estratégia que foi adotada nesta pesquisa; e que teve por objetivo, estudar maneiras de *viver* do objeto matemático limites em livros didáticos.

Tais estudos conduziram aos seguintes questionamentos (mais gerais): *Como vivia e como vive o objeto matemático limites de funções de uma variável nos livros didáticos selecionados? Quais eram e quais são (e como se caracterizam) as organizações matemáticas e didáticas relativas aos limites que aparecem nas obras escolhidas? Qual era e qual é a razão de ser do conteúdo limites de funções nos referidos livros texto?*

Os estudos acima (também) conduziram aos seguintes questionamentos (mais específicos): *As tarefas são bem identificadas? Houve a construção clara das técnicas apresentadas para resolver as tarefas? As técnicas apresentadas são suficientes para as tarefas existentes? Existe a possibilidade de desenvolvimento de novas técnicas ou mesmo de* *adaptações acerca delas? As tecnologias existentes são suficientes para justificar e esclarecer as técnicas usadas? As teorias são explicitadas e capazes de justificar as tecnologias?*

Em seguida, foram realizadas buscas acerca de pesquisas que dissertaram sobre o mesmo tema, e de contribuições teóricas (outras) que auxiliaram na construção do presente trabalho.

Das pesquisas que foram contempladas na revisão de literatura, observa-se que Santos (2013), em sua tese de doutorado em educação matemática pela PUC-SP, investigou o objeto matemático limites de funções de uma variável real no contexto da sala de aula, levando em consideração o professor, o aluno, o livro didático e a linguagem. Quanto ao que se concebe acerca de limites, a referida autora identificou e classificou várias praxeologias matemáticas adotadas em livros didáticos, que gozam de grande aceitação em universidades brasileiras de renome. Dentre os aportes teóricos tomados por tal autora, destaca-se a Teoria Antropológica do Didático (TAD). Rafael (2017), em sua dissertação de mestrado em educação matemática pela UFJF-MG, investigou as intervenções metodológicas realizadas por universidades públicas e privadas para tentar reduzir os índices de reprovação na disciplina Cálculo Diferencial e Integral 1. Através de levantamentos e estudos, essa autora trouxe resultados preocupantes em relação às dificuldades enfrentadas por professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos concernentes ao Cálculo. Barbosa (2017), em sua tese de doutorado em educação matemática pela UFRPE, investigou as relações de conformidade entre o professor, o livro didático e os documentos oficiais acerca da resolução de equações do primeiro grau, baseando-se para tal, na Teoria Antropológica do Didático.

Araújo (2009), em sua tese de doutorado em educação pela UFPE, caracterizou e comparou as transposições didáticas realizadas na França e no Brasil acerca do ensino de equações, construindo um modelo de referência acerca das praxeologias matemáticas pontuais constituídas em torno da resolução de equações do primeiro grau. A TAD foi o aporte teórico tomado por esse autor. Barbosa (2011), em sua dissertação de mestrado em educação matemática pela UEPB, realizou um estudo baseado na Teoria Antropológica do Didático, que buscou investigar as mudanças ocorridas nas praxeologias matemáticas e didáticas constituídas em torno dos subtipos de tarefas relacionadas à resolução de equações do primeiro grau em livros didáticos (ao longo do tempo).

Então, partindo-se das organizações matemáticas identificadas e classificadas por Santos (2013), foi construído um modelo de referência (de praxeologias matemáticas) acerca dos diferentes subtipos de tarefas relacionadas à determinação de limites de funções de uma variável real. Para que tal modelo pudesse ser construído e finalizado, foram observados e adaptados, os passos metodológicos usados por Araújo (2009) na construção de um modelo de referência relativo às equações do primeiro grau.

O livro *Cálculo de Stewart (2013)* foi tomado como espinha dorsal para essa modelização – por se tratar de uma boa versão da coleção de livros didáticos de Cálculo mais aprovada como bibliografia básica de cursos de graduação, em um levantamento simplificado realizado dentro da presente pesquisa).

Também foram consultados vários outros livros de Cálculo e de Análise aprovados e adotados por universidades brasileiras.

Ainda foram consultadas, 9 ementas ou planos de ensino (de livre acesso na internet) de cursos de graduação de universidades públicas brasileiras, e 1 ementa e plano de ensino da disciplina Cálculo Diferencial e Integral 1, fornecida pelo Núcleo de Tecnologia do Centro Acadêmico do Agreste da UFPE (ver anexos).

A experiência do autor, que lecionou a referida disciplina acima durante dois anos para alunos de Engenharia de Produção e Engenharia Civil da UFPE, também serviu de alguma maneira para colaborar com o formato final do modelo de referência construído.

Logo após, procurou-se identificar e caracterizar, em ambos os livros analisados, as organizações matemáticas e didáticas referentes à determinação de limites de funções. Tais praxeologias são estabelecidas em torno dos subtipos de tarefas e dos elementos técnico-tecnológicos (conceitos básicos e propriedades), que são utilizados para justificar e explicar as técnicas.

Quanto à metodologia adotada nesta pesquisa, tratou-se de uma abordagem qualitativa de cunho documental.

Os resultados mostram, que ambas as coleções de livros analisadas, desenvolvem trabalhos de elaboração e sistematização de técnicas distintas para realizar os diferentes subtipos de tarefas relacionadas à determinação de limites.

Os livros analisados justificam, de maneira mais ou menos explícita, a existência dessas diferentes técnicas, procurando deixar claro, os limites e as potencialidades de cada técnica.

A análise do livro *O Cálculo com Geometria Analítica* revelou que o ensino dos limites de funções é organizado em torno do estudo dos problemas relacionados aos seguintes subtipos de tarefas (t_2, t_3, t_4, t_5 e t_6), dando-se mais ênfase à elaboração e oficialização da realização do subtipo de tarefa t_6 (determinar limites que envolvam $\pm\infty$).

Em relação às técnicas:

$(\tau_{ACG}, \tau_{AIC}, \tau_{DVN}, \tau_{FEA_{EIE}} \quad \tau_{DVN}, \tau_{DND_{\tau_{AIC}}}).$

Para realizar os subtipos de tarefas relativos à determinação de limites, os resultados deste estudo mostram que o livro *O Cálculo com Geometria Analítica* privilegia a técnica mista $\tau_{DND\_}\tau_{AIC}$, que consiste em dividir o numerador e o denominador/analisar intuitivamente o comportamento, para resolver os exercícios relacionados ao subtipo de tarefa t_6.

No tocante ao subtipo de tarefa t_1(estimar numericamente o valor de $\lim_{x \to a} f(x)$), esse livro não realiza nenhum trabalho de elaboração de técnica.

Em relação à exploração dos subtipos de tarefas e da elaboração das técnicas, no livro *O Cálculo com Geometria Analítica*, o trabalho é realizado de forma a esclarecer as diferenças existentes entre os subtipos de tarefas, isto é, buscando esclarecer os limites e as possibilidades das técnicas elaboradas e sistematizadas.

A análise do livro *Cálculo* revelou que o ensino dos limites de funções é organizado em torno do estudo dos problemas que contemplam os seguintes subtipos de tarefas (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 e t_6), com ênfase na elaboração e oficialização da realização do subtipo de tarefa t_6.

Em relação às técnicas:

(τ_{CVN}, τ_{ACG}, τ_{ACG_DVN}, τ_{AIC}, τ_{DVN}, $\tau_{FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$, $\tau_{MEC\_DRE\_EIE\_}\tau_{DVN}$, $\tau_{DRE\_FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$, $\tau_{FTV\_}\tau_{AIC}$, $\tau_{MEC\_DRE\_}\tau_{AIC}$, $\tau_{FEA\_}\tau_{AIC}$, $\tau_{DND\_}\tau_{AIC}$).

Para realizar os subtipos de tarefas relativos à resolução de limites de funções, os resultados deste estudo mostram que o livro *Cálculo* privilegia a técnica mista $\tau_{DND\_}\tau_{AIC}$, que consiste em dividir o numerador e o denominador/analisar intuitivamente o comportamento, para realizar o subtipo de tarefa t_6.

Em relação à exploração dos subtipos de tarefas e da elaboração das técnicas, no livro *Cálculo*, o trabalho é desenvolvido de forma a explicar as diferenças existentes entre os subtipos de tarefas, isto é, buscando mostrar os limites e as possibilidades das técnicas elaboradas e sistematizadas.

Algumas respostas para os questionamentos (mais específicos) levantados durante a pesquisa (sempre em relação aos dois livros ao mesmo tempo). *As tarefas são bem identificadas (com linguagem simples e direta), permitindo a rápida identificação dos diferentes subtipos de tarefas. As técnicas elaboradas para resolver as tarefas são claras (e mais ou menos justificadas). As técnicas apresentadas não são suficientes para resolver todos os exercícios propostos. As técnicas podem ser combinadas e recombinadas, adaptadas, etc., para enfrentar os exercícios propostos mais difíceis (mas exige um estudante bastante habilidoso). As tecnologias são suficientes para explicar e justificar as técnicas apresentadas (mas nem sempre são explicitadas nos momentos didáticos). As teorias não são claramente explicitadas nas* *praxeologias analisadas, mas claramente, são encontradas nos textos e são suficientes (na maioria dos casos) para justificar as tecnologias.*

Algumas respostas para os questionamentos (mais gerais) levantados durante a pesquisa (sempre em relação aos dois livros ao mesmo tempo). *Percebem-se algumas diferenças nas maneiras de viver do objeto matemático limites (há, por exemplo, uma diferente distribuição da representatividade das tarefas estudadas, e também, a não-presença (no livro mais antigo) e presença (no livro mais recente) da praxeologia relacionada com a atividade de estimar limites numericamente; das abordagens histórico-epistemológicas; do uso de calculadoras, computadores e sistemas de computação algébrica; e das aplicações aos demais campos do conhecimento humano). As praxeologias matemáticas são praticamente as mesmas (apenas com diferenças em relação à variedade das técnicas). As organizações didáticas são praticamente as mesmas. A razão de ser para limites permanece igual (estudam-se limites para explicar e justificar todo o resto do Cálculo Diferencial e Integral).*

Contudo, acredita-se que novos estudos a respeito do funcionamento dessas técnicas, tarefas, tecnologias, teorias e suas aplicações em sala de aula, sejam necessários (uma vez que os autores fazem escolhas diferentes para abordar limites em livros didáticos). Diante disso, pode-se indagar: *Qual ou quais são as implicações no cotidiano do aluno dessas escolhas? Quais os obstáculos que essas escolhas dos autores podem gerar nos anos seguintes da vida acadêmica do aluno?*

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, G. P. **Transposição Didática: Por Onde Começar?** São Paulo: Cortez, 2007, 71 p.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática.** Curitiba: Ed. UFPR, 2007, 218 p.

ANTAR NETO, A.; SAMPAIO, J. L. P.; LAPA, N.; CAVALLANTTE, S. L. **Noções de Matemática – Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral.** Fortaleza: Ed. Vestseller, 2010. 454 p. v. 8.

ARAÚJO, A. J. **O ENSINO DE ÁLGEBRA NO BRASIL E NA FRANÇA: Estudo Sobre o Ensino de Equações do 1º Grau à Luz da Teoria Antropológica do Didático.** 2009, 292 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, UFPE, Centro de Educação, Recife, 2009.

BARBOSA, E. J. T. **Equação do Primeiro Grau em Livros Didáticos Sob a Ótica da Teoria Antropológica do Didático.** 2011, 134 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, UEPB, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, 2011.

______. **PRAXEOLOGIA DO PROFESSOR: Análise Comparativa com os Documentos Oficiais e do Livro Didático no Ensino de Equações Polinomiais do Primeiro Grau.** 2017, 252 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, UFRPE, Recife, 2017.

BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. **Matemática.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 1997. 354 p. v. 3.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução: Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgar Blücher, 1996. 496 p.

BRITO MENEZES, A. P. A. **CONTRATO DIDÁTICO E TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA: inter-relações entre os fenômenos didáticos na iniciação à Álgebra na 6ª série do ensino fundamental.** 2006, 259 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, UFPE, Centro de Educação, Recife, 2006.

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactiques Des Mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

CHEVALLARD, Y. **Sur la Notion de Temps Didactique**. IVème École d’Eté de Didactique Des Mathématiques, 1991.

______. **Analyse Des Pratiques Enseignantes et Didactique des Mathematiques: L’Approche Anthropologique**. Actes de l’U.E. de la Rochelle, 1998.

______. L’Analyse Des Pratiques Enseignantes en Théorie Anthropologie Didactique. In: **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, 1999. p. 221-266.

CHEVALLARD, Y. **Duperret J.C, Fenice J.C. L'Accès au Calcul Littéral et Algébrique: Um Enjeu du Collège**. Repères IREM, n. 34, 1999. p. 29-54.

______. Organiser l'Etude 1. Structures et Fonctions. *In* Dorier, J. L. et al. (eds). **Actes de la 1 Lieme Ecole d'Ete de Didactique des Mathematiques – corps – 21 – 30 A.** Grenoble: La Pensée Sauvage, 2001, p. 3-22.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas: O Elo Perdido Entre o Ensino e a Aprendizagem.** Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001, 336 p.

DI PIERRO NETTO, S. **Matemática.** 2. ed. São Paulo: Scipione Autores Editores, 1984. 312 p. v. 3.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011. 844 p.

GRANATO, L. As 20 melhores universidades do brasil, segundo ranking da folha. **EXAME**, São Paulo, 7 out. 2019. Disponível em: https://exame.abril.com.br/carreira/as-20-melhores-universidades-do-brasil-segundo-ranking-da-folha/. Acesso em: 11 out. 2019.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo.** 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. 530 p. v. 4.

HENRY, M. (1991). Didactiques Des Mathématiques: Sensibilizations à la Didactique en Vue de la Formation Initiale Dês Ensignants de Mathématiques. Laboratoire de Mathématiques – IREM, Besançon.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J. **Fundamentos de Matemática Elementar: Limites, Derivadas e Noções de Integral.** 5. ed. São Paulo: Atual, 2002. 269 p. v. 8.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica.** Tradução: Antonio Paques, Otilia Teresinha W. Paques e Sebastião Antonio José Filho. 2. ed. São Paulo: Harbra, 1977. 526 p. v. 1.

LIMA, E. L. **Análise Real.** 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1997. 220 p. v. 1.

______. **Curso de Análise.** 9. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1999. 334 p. v.1.

NOGUEIRA, R. C. S. **A ÁLGEBRA NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL: Uma Análise Praxeológica.** 2008, 125 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Centro de Ciências Humanas e Sociais, Campo Grande - MS, 2008.

RAFAEL, R. C. **Cálculo Diferencial e Integral: um estudo sobre estratégias para redução do percentual de não aprovação.** 2017. 104 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, UFJF, Juiz de Fora, 2017.

SANTOS, M. B. S. **UM OLHAR PARA O CONCEITO DE LIMITE: Constituição, Apresentação e Percepção de Professores e Alunos Sobre o seu Ensino e Aprendizado.**

2013, 388 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, São Paulo, 2013.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica.** Tradução: Seiji Hariki. São Paulo: McGraw-Hill, 1987. 829 p. v.1.

SOUZA, V. C. **A Origem do Cálculo Diferencial e Integral.** 2001. 27 f. Monografia (Especialização em Orientação Educacional) - Universidade Cândico Mendes, UCAM, Rio de Janeiro, 2001.

STEWART, J. **Cálculo.** Tradução: Cyro C. Patarra, Ana Flora Hunmes, Cláudio Asano e Márcia Tamanaha. 4. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003. 579 p., v. 1.

______. **Cálculo.** Tradução: EZ2Translate. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. 661 p. v. 1.

______. **Cálculo.** Tradução: Helena Maria Ávila de Castro. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017. 680 p. v. 1.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica.** Tradução: Alfredo Alves de Faria. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1983. 618 p. v. 1.

TAVEIRA NETO, J. G. **A Importância do Estudo do Cálculo Diferencial na Educação Básica.** 2016. 49 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Tocantins, UFT, Campus Universitário de Palmas, Palmas - TO, 2016.

THOMAS, G. B.; FINNEY, R. L.; WEIR, M. D.; GIORDANO, F. R. **Cálculo.** Tradução: Paulo Boschcov. 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002. 656 p. v.1.

ANEXO A - EMENTA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I DO CURSO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO - 2017/2018 DA UFPE

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA PARA ASSUNTOS ACADÊMICOS
DEPARTAMENTO DE DESENVOLVIMENTO DO ENSINO

PROGRAMA DE COMPONENTE CURRICULAR

TIPO DE COMPONENTE (Marque um X na opção)

[X] Disciplina
[ ] Atividade complementar
[ ] Monografia
[ ] Estágio
[ ] Prática de ensino
[ ] Módulo

STATUS DO COMPONENTE (Marque um X na opção)

[X] OBRIGATÓRIO [ ] ELETIVO [ ] OPTATIVO

DADOS DO COMPONENTE

Código	Nome	Carga Horária Semanal		Nº. de Créditos	C. H. Global	Período
		Teórica	Prática			
PROD0001	Cálculo Diferencial e Integral 1	04	00	4	60	1

Pré-requisitos		Co-Requisitos		Requisitos C.H.	

EMENTA

Derivada de Funções de uma Variável, Propriedades Básicas das Funções de uma Variável, Integrais de Funções de uma Variável.

OBJETIVO(S) DO COMPONENTE

Apresentar ao aluno conceitos básicos de cálculo diferencial e integral, preparando o aluno para conceitos mais aprofundados e aplicações específicas à engenharia que serão apresentados em outras disciplinas.

METODOLOGIA

A disciplina consistirá de aulas expositivas, exercícios em sala de aula e estudos de casos práticos.

AVALIAÇÃO

Deverão ser realizados 2 exercícios escolares (EE_1 e EE_2) em sala de aula, individuais e sem consulta.

A média da disciplina (MEDIA) é calculada a partir da fórmula: ([EE_1 ou SCH1]+[EE_2 ou SCH2])/2.

Será considerado aprovado por média o aluno que obtiver média da disciplina superior ou igual a 7,0 e freqüência igual ou superior a 75%.

O aluno que obtiver 3,0 ≤ média da disciplina < 7,0 e freqüência igual ou superior a 75% deverá realizar exame final (EXFN). Para o exame final será considerado todo o conteúdo ministrado na disciplina durante o período letivo.

A média final é calculada a partir da fórmula: (MEDIA+[EXFN ou SCHF])/2

Será considerado aprovado o aluno cuja média final > 5,0.

Apenas uma prova de Segunda Chamada (SCH1, SCH2 ou SCHF) poderá ser realizada pelo aluno que tiver faltado uma das provas realizadas (EE_1, EE_2 ou EXFN).

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

Introdução. Definição de função contínua, definição de limite, limites laterais, propriedades operatórias, teorema do confronto, teorema do valor intermediário.
Introdução. Derivada de uma função, existência da derivada, regras de derivação, derivadas das funções trigonométricas, regra da cadeia para a derivação de função composta, derivação de função dada implicitamente, derivada da função inversa.
Teorema do valor médio, intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade e pontos de inflexão, grafias.
Primitiva de uma função, integral definida, teorema fundamental do cálculo, cálculo de área. Métodos de Integração: Substituição e por partes.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

Leithold, L. O cálculo com geometria analítica. 3.ed. São Paulo: Harbra, c1994.
Stewart, J. Cálculo. São Paulo: Cengage Learning, 2010.
Barboni, A; Paulette, W. Cálculo e análise: cálculo diferencial e integral a uma variável. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

Boulos, P. Cálculo diferencial e integral. São Paulo: Pearson Makron Books, 1999
Boulos, P. Pré-cálculo. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.
Flemming, D. M; Gonçalves, M. B. Cálculo A: funções, limite, derivação, integração. 6.ed. rev. e ampl. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
Goldstein, L. J; Lay, D. C; Schneider, D. I. Cálculo e suas aplicações. São Paulo: Hemus, c2007.
MORETTIN, Pedro Alberto; HAZZAN, Samuel; BUSSAB, Wilton de Oliveira. Cálculo: funções de uma e várias variáveis. 1.ed. São Paulo: Saraiva, 2003.

DEPARTAMENTO A QUE PERTENCE A DISCIPLINA	HOMOLOGADO PELO COLEGIADO DE CURSO
Núcleo de Tecnologia – Curso de Eng. de Produção	10/05/13

ASSINATURA DO CHEFE DO DEPARTAMENTO

Prof. Gilson Lima
SIAPE: 2282722
Coordenador do Núcleo de Tecnologia
Campus do Agreste
UFPE

ASSINATURA DO COORDENADOR DO CURSO OU ÁREA

Ana Paula H. de Gusmão
Professora Adjunta
SIAPE 1767370
Campus do Agreste
Núcleo de Tecnologia
UFPE