



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA

RAFAEL JOSÉ DA SILVA

VOLUME E CAPACIDADE:
análise praxeológica de duas coleções de livros didáticos dos anos finais do ensino
fundamental

Caruaru
2019

RAFAEL JOSÉ DA SILVA

VOLUME E CAPACIDADE:
**análise praxeológica de duas coleções de livros didáticos dos anos finais do ensino
fundamental**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Área de concentração: Educação.

Orientador: Prof^o. Dr. Marcus Bessa de Menezes.

Caruaru

2019

Catálogo na fonte:
Bibliotecária – Paula Silva - CRB/4 - 1223

S586v Silva, Rafael José da.
Volume e capacidade: análise praxeológica de duas coleções de livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental. / Rafael José da Silva. – 2019.
144 f.; il.: 30 cm.

Orientador: Marcus Bessa de Menezes.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, 2019.
Inclui Referências.

1. Livros didáticos - Brasil. 2. Matemática – Bibliografia - Brasil. 3. Matemática (Ensino fundamental). 4. Currículos – Mudança – Brasil. 5. Currículos – Avaliação – Brasil. 6. Matemática - Educação e ensino – Brasil. I. Menezes, Marcus Bessa de (Orientador). II. Título.

CDD 371.12 (23. ed.) UFPE (CAA 2019-393)

RAFAEL JOSÉ DA SILVA

VOLUME E CAPACIDADE:

**análise praxeológica de duas coleções de livros didáticos dos anos finais do ensino
fundamental**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Aprovada em: 03/12/2019.

BANCA EXAMINADORA

Profº. Dr. Marcus Bessa de Menezes (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Profº. Dr. Edelweis Tavares Barbosa (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Profº. Dr. Saddo Ag Almouloud (Examinador Externo)
Universidade de São Paulo

Dedico esse trabalho a minha mãe Cristina Silva, meu pai Ivan Silva (*in memorian*), minha irmã Nadja Silva Santos e meu sobrinho José Pedro Silva Santos, bem como a meu companheiro da jornada acadêmica Mawison Lima.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus, aquele que me tem por perto mesmo quando eu estou distante. Obrigado pelas tantas oportunidades e conquistas, por permitir (especialmente) que eu gozasse de saúde para aproveitar as tantas idas e vindas, as noites em claro, as tantas alegrias e cansaços e chegar até aqui.

A meus pais Cristina e Ivan (*in memoriam*) fontes de meus melhores exemplos e inspirações, que mesmo sem ter concluído o ensino básico me guiaram por entre lápis, canetas, livros e cadernos ao conhecimento que hoje me recompensa em tantas vitórias. Espero lhes dar ainda mais orgulho com meus estudos na mesma intensidade que fizeram e fazem me sentir tão orgulhoso das panelas, pratos e comidas, das colheres de pedreiro, tijolos e paredes que vocês empreenderam para dar além de exemplos, o melhor que podíamos usufruir. Obrigado pela vida, pela ética, pelos passos, pela alegria de tantos momentos juntos, enfim, por tudo. A senhora hoje tem a responsabilidade enorme de ser não somente a melhor mãe que eu podia ter, mas também representar o melhor pai que eu pude ter, e como fico feliz por isso. Cada dia da minha vida será vivido com o respeito e amor que aprendi com vocês.

Minha irmã Nadja (Najinha) pelas recorrentes palavras de incentivo e presença nas adversidades da vida. Pelo socorro na doença, pelos remédios administrados e pelos momentos de “família especial” acompanhada do meu sobrinho-filho José Pedro que me fez algumas vezes fugir da loucura acadêmica para lembrar que viver também é preciso. Pelos abraços e beijos, pelos passeios e rendição de acompanhante, pelas almoços e jantares preparados, por serem minha família. Vocês não imaginam o quanto vos amo! Obrigado por tudo.

Minha tia Josefa (Dica), por sempre, desde o cursinho pré-vestibular, me acolher de forma tão generosa e ser a pessoa certa com que eu posso sempre contar. Minha gratidão é eterna por cada gesto modesto e nobre para comigo.

Mawison Lima, um amigão de todas as horas a quem eu vou ser eternamente grato por ter conhecido e ter permitido fazer parte de sua vida. Hoje seu “dever” está cumprido (risos). Obrigado por me auxiliar durante todos processos de seleção do(s) mestrado(s), por me incentivar com palavras e orientar com ações, por mostrar em mim algo que não foi fomentado pelos meus professores de graduação ou mesmo de pós-graduação: o pesquisador. Obrigado por compartilhar suas experiências, seus conhecimentos e ser fator decisivo nessa caminhada.

Bessa, muito obrigado por acreditar em mim e no que eu poderia fazer mesmo quando minhas ideias estavam tão atrapalhadas que eu não sabia realmente como remodelar meu projeto de pesquisa. Obrigado pelas orientações que podem até não ter sido em grande número,

mas foram de qualidade ímpar. Obrigado pela ‘liberdade vigiada’ de me deixar escrever, e escrever, e continuar escrevendo... mas lembrar das (e cobrar as) ações e prazos necessários. É um prazer ímpar poder registrar seu nome como orientador desse processo de pesquisa.

Edelweis e Saddo, vocês não imaginam a admiração pelo trabalho de vocês e a alegria que tive em saber que os teria na banca para esta pesquisa. Sem qualquer exagero, meu coração quase sai pela boca quando Bessa me informou que vocês avaliaram e contribuiriam para o trabalho. E como contribuíram! Foram decisivos na forma de pontuar as potencialidades e riscos da pesquisa, os caminhos para entregar um bom trabalho à comunidade acadêmica. Certamente o exemplo de vocês como pessoas, junto ao de Bessa, me dá certeza que é possível ser (um bom) humano sem deixar também de ser um pesquisador extraordinário. Obrigado por participar dessa etapa e, porque não, estender o convite para uma próxima.

Existem agradecimentos acadêmicos que vão além da banca aqui formada por serem professores-pesquisadores aos quais tenho muito apreço desde minha graduação e que me ajudaram bastante durante as pesquisas do mestrado.

Paula Baltar, que há mais de uma década participa de minha formação, obrigado pelos aprofundamentos na TAD na Tópicos de Educação Matemática e nas Escolas de Altos Estudos, em parceria com a UFMS. Anna Paula, obrigado pelas palavras no grupo Fenômeno Didático. Também aos professores Adriano Pedrosa e Paulo Figueiredo, que mesmo em breves encontros me ajudaram a descobrir o Memorial do PNLD, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Uma entidade que resgatou uma valiosa história do livro didático no Brasil.

Sobre o Memorial, inclusive, há uma menção orgulhosa neste trabalho por tomar a responsabilidade de salvaguardar a história do livro didático no país, digitalizar todo o material e compartilhar legalmente esses materiais com todos os pesquisadores que o desejarem, e me ceder também parte do material que me ajudará em pesquisas futuras.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco (IFPE), na pessoa de Daniel Assunção (meu amigo, meu irmão e, para sorte dele, meu chefe), e à Secretaria de Educação do município do Ipojuca, na pessoa do antigo gestor Noberto Júnior, por permitirem meus afastamentos (parcial em alguns momentos, total nesta reta final), para que eu pudesse ter disponibilidade o suficiente para produzir uma pesquisa como esta. Muito obrigado!

Luiz Eduardo, mais que um grande colega, você foi um amigo extraordinário. Minha gratidão será eterna por todas as turmas que você assumiu para que eu tivesse mais tempo para o mestrado, pelos conselhos e até mesmo por compartilhar o espaço do Lucas (‘cabra’ tão fantástico quanto o pai) para que eu pudesse repousar e estudar no curso de algumas disciplinas.

Outros agradecimentos muito especiais irão para os amigos que me ajudaram desde as concepções do anteprojeto para a seleção, passando por empréstimos dos livros para análise e, compartilhamento de textos, revisões do trabalho e as benditas traduções para outras línguas: Quele (decisiva desde o processo de seleção) obrigado por todas as orientações. Marta e Eduardo, meus colegas de profissão, disciplina e de materiais para análise. Almir Serpa e Kate Leão pelas ideias e textos que foram imprescindíveis para as discussões aqui presentes. Mathilde Boisselier: Merci professeur! Enzo: ¡Gracias! Marcos Barros, pela oportunidade de reinvenção docente nessa trajetória acadêmica e despertar pesquisar tantas outras coisas que certamente sairão da cabeça para tomar forma em laudas. Neide Shinohara pelas palavras de incentivo em todas as ocasiões que teve oportunidade, sem que eu mesmo esperasse, você é uma referência de conhecimento e humildade que quero levar sempre comigo. Thamyrys e Emanuele (Manu) pelas partilhas, revisões e discussões, pelos momentos de descontração acadêmica e permitir que essa aspiração do mundo acadêmico fosse ainda mais presente na minha trajetória.

Reservei esta seção agradecer aos meus amigos que acreditaram tanto em mim. E como acreditaram! Alguns me apoiando mesmo quando estão morrendo de saudades de minhas brincadeiras e momentos de descontração total mesmo no ambiente de trabalho: No IFPE aquele abraço para Adriana Félix, Ana Paula, Anderson Clayton, André Ferreira, Felipe Lima, Luciene, Mari, José Nunes, Rita Leite, Rita Rovai, Sandra Pereira, Sibele Dunke, Vilene, Wanessa, Williany. Em Ipojuca obrigado Adriana, Alzenir, Catiane, Ênia, Júnior, Gilles, Sr. Léo Davi, Leônidas, Marcilene, Maria e Mariana.

Todos os meus professores e colegas no PPGECEM, um abraço muito querido, mas há quatro que serão inesquecíveis nessa trajetória: Manuelle (Manu), Fredson e Gênesis (eternos rocamboles) pelas companhias semanais, pelas paradas para o café na ida e lanche da volta, por me escutarem bastante. Leonardo e Roberto, pelo compartilhamento de atividades, textos e angústias nessa reta final. Gente, obrigado mais uma vez.

Enfim, há muitas outras pessoas que compartilharam de minhas alegrias, conquistas, angústias e sempre torceram bastante por mim. Fosse no Recife (minha família, meus amigos e colegas), Rio de Janeiro (família que eu amo), Limoeiro, Ipojuca (IFPE e Aderbal Jurema), Cabo de Santo Agostinho (IFPE e amigos), Caruaru, Sobrado, São Paulo (Francisco ‘Neno’, obrigado por sempre acreditar), Belém, Natal: Minha eterna gratidão!

É tanta gente para agradecer, mas não poderia esquecer daqueles que duvidaram ou tentaram prejudicar esse momento: Vocês não imaginam como é maravilhoso ver vocês ‘quebrando a cara’ novamente.

RESUMO

Este trabalho analisou a abordagem dos conteúdos volume e capacidade em duas coleções de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental II, que tinham em comum um autor e um espaço temporal de duas décadas de publicações entre eles. A análise dos dados objetivou esclarecer quais as contribuições que documentos como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e o Programa Nacional do Livro e Material Didático (PNLD), por exemplo, exerceram para a melhoria do material e, por conseguinte, do ensino da Matemática nestes temas. A fundamentação teórica apoia-se em quatro conceitos, algumas definições e discussões envolvendo: os PCN, o PNLD, o livro didático e, volume e capacidade. O entrelaçamento desses itens é analisado sob o ponto de vista da praxeologia da Teoria Antropológica do Didático (TAD), utilizando uma metodologia qualitativa de pesquisa documental e bibliográfica. São analisadas duas coleções de livros didáticos que têm um autor em comum em duas publicações distintas: uma versão de 1994 (última aprovada antes dos PCNs) e outra de 2015 (última aprovada antes da vigência da Base Nacional Curricular Comum (BNCC)). As atividades dessas duas coleções foram identificadas, organizadas e classificadas a partir de seus tipos de tarefas e técnicas, ressaltando o bloco teórico (tecnologia e teoria) envolvido, sempre que possível. A partir dessas análises prévias foram estabelecidas a tipificação das tarefas relacionadas a volume e capacidade, procedendo a comparação entre as coleções a partir do modelo proposto por Almouloud (2015). Como principais resultados temos a identificação de diferentes estruturas de tarefas e ênfases no ensino de volumes e capacidade; a reestruturação da Organização Matemática entre as coleções, diferentes não apenas pelo número de atividades, mas também pelos tipos de tarefas utilizadas na coleção mais recente. Também foi observada a vigilância epistemológica de documentos que orientam o ensino na sociedade e as escolhas dos autores em seus materiais, como os PCNs e o PNLD. Dessa forma, o livro didático provou ser um facilitador para que proposições da noosfera estejam acessíveis ao professor e aos alunos mais rapidamente. Tais resultados incitam uma reflexão sobre o impacto de uma política de reestruturação curricular como os PCNs para que se observem pontos positivos e negativos que devam guiar o trabalho de implantação, de fato, da BNCC, como atual legislação que atende os currículos das escolas de ensino fundamental, médio e, inclusive, as diretrizes de cursos de licenciatura no Brasil.

Palavras-chave: Volume e capacidade. Grandezas e medidas. Livro didático. praxeologia. Parâmetros Curriculares Nacionais. Programa Nacional do Livro Didático.

ABSTRACT

This work analyzed the approach of the contents volume and capacity in two collections of textbooks from the final years of Elementary School II, which had in common an author and a space of two decades of publications between them. The analysis of the data aimed to clarify the contributions that documents such as the Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) and the Programa Nacional do Livro e Material Didático (PNLD), for example, exerted for the improvement of the material and, therefore, of the teaching of Mathematics on these themes. The theoretical foundation is based on four concepts, some definitions and discussions involving: the PCN, the PNLD, the textbook, volume and capacity. The intertwining of these items is analyzed from the point of view of the praxeology of the Teoria Antropológica do Didático (TAD), using a qualitative methodology of documentary and bibliographic research. Two collections of textbooks that have a common author in two different publications were analyzed: a 1994 version (the last one approved before the PCN) and the 2015 one (the last one approved before the Base Nacional Comum Curricular - BNCC was in force). The activities of these two collections were identified, organized and classified based on their types of tasks and techniques, emphasizing the theoretical block (technology and theory) involved, whenever possible. From these previous analyzes, the typification of tasks related to volume and capacity were established, proceeding the comparison between the collections using the model proposed by Almouloud (2015). As main results are the identification of different task structures and emphases in the teaching of volumes and capacity; the restructuring of Mathematics Organization of collections, different not only by the number of activities, but also by the types of tasks used in the latest collection. It was also observed the epistemological surveillance of documents that guide teaching in society and the choices of authors in their materials, such as PCN and PNLD. Thus, the textbook has proven to be a facilitator for the noosphere propositions are available to the teacher and students more quickly. These results encourage a reflection on the impact of a curriculum restructuring policy such as the NCPs so that there are positive and negative points that should guide the work of implementing, in fact, the BNCC, as current legislation that meets the curricula of elementary, high school and even the guidelines of undergraduate courses in Brazil.

Keywords: Volume and capacity. Quantities and measures. Textbook. Praxeology. National Curriculum Parameters. National Textbook Program.

RESUMEN

Este trabajo analizó el enfoque del volumen y la capacidad de los contenidos en dos colecciones de libros de texto de los últimos años de la Escuela Primaria II, que tenían en común un autor y un espacio de dos décadas entre ellos. El análisis de los datos tuvo como objetivo aclarar las contribuciones que documentos como los Parámetros Curriculares Nacionales (PCN) y el Programa Nacional de Libros y Material Didáctico (PNLD), por ejemplo, ejercieron para la mejora del material y, por lo tanto, de la enseñanza de las Matemáticas. Sobre estos temas la base teórica se basa en cuatro conceptos, algunas definiciones y debates que involucran: el PCN, el PNLD, el libro de texto y el volumen y la capacidad. El entrelazado de estos ítems se analiza desde el punto de vista de la praxeología de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), utilizando una metodología cualitativa de investigación documental y bibliográfica. Se analizan dos colecciones de libros de texto que tienen un autor común en dos publicaciones diferentes: una versión de 1994 (la última aprobada antes del PCN) y la de 2015 (la última aprobada antes de que la Base Curricular Nacional Común (BNCC) estuviera en vigor). Las actividades de estas dos colecciones fueron identificadas, organizadas y clasificadas en función de sus tipos de tareas y técnicas, destacando el bloque teórico (tecnología y teoría) involucrado. A partir de estos análisis anteriores, se estableció la tipificación de tareas relacionadas con el volumen y la capacidad, procediendo a la comparación entre las colecciones utilizando el modelo propuesto por Almouloud (2015). Los resultados principales son la identificación de diferentes estructuras de tareas y énfasis en la enseñanza de volúmenes y capacidad; La reestructuración de la Organización Matemática entre las colecciones, diferente no solo por el número de actividades, sino también por los tipos de tareas utilizadas en la colección más reciente. También se observó la vigilancia epistemológica de documentos que guían la enseñanza en la sociedad y las elecciones de los autores en sus materiales, como PCN y PNLD. De esta manera, el libro de texto demostró ser un facilitador para que las propuestas de la noosfera sean accesibles para el maestro y los estudiantes más rápidamente. Tales resultados provocan una reflexión sobre el impacto de una política de reestructuración curricular como el PCN, de modo que haya puntos positivos y negativos que deberían guiar el trabajo de implementar, de hecho, el BNCC, como legislación actual que cumple con los planes de estudio de las escuelas de enseñanza primaria, media e incluso las pautas de los cursos de pregrado en Brasil.

Palabras clave: Volumen y capacidad. Cantidades y medidas. Libro de texto. Praxeología. Parámetros Curriculares Nacionales. Programa del Libro de Texto.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 –	Interpretações equivocadas de concepções pedagógicas	30
Gráfico 1 –	Número de trabalhos no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES a partir dos descritores	49
Figura 2 –	Número de publicações em periódicos Qualis A1 a B2, em plataforma digital, a partir dos descritores	50
Figura 3 –	Representação da trajetória do saber na transposição didática (externa e internamente)	63
Organograma 1 –	Conceitos fundamentais da TAD e suas classificações	64
Organograma 2 –	Organização praxeológica e conceitos básicos da TAD	68
Quadro 1 –	Organização praxeológica e conceitos básicos da TAD.	69
Figura 4 –	Momentos didáticos indicados pela TAD	71
Figura 5 –	Níveis de codeterminação didática proposto por Chevallard	73
Figura 6 –	Níveis de codeterminação didática na Organização Matemática para a pesquisa	74
Figura 7 –	Anos de realização do PNLD para os anos finais do Ensino Fundamental	77
Quadro 2 –	Autores com maior número de aprovações no PNLD, com ano de aprovação	77
Figura 8 –	Livros da coleção “Matemática na medida certa” (1994)	78
Figura 9 –	Livros da coleção “Matemática nos dias de hoje - na medida certa” (2015)	78
Figura 10 –	Questões norteadoras para o livro didático após a identificação dos elementos praxeológicos	80
Organograma 3 –	Representação das situações que Morais utilizou para o conceito de volume	81
Figura 11 –	Mapa conceitual da tipificação de tarefas	83
Quadro 3 –	Identificação dos tipos e ‘subtipos’ de tarefa presente nas coleções analisadas	85
Quadro 4 –	Volume e capacidade no “Planejamento do curso” da coleção de 1994	88
Gráfico 2 –	Linha do tempo de volume e capacidade na coleção de 1994, por série	88

Figura 12 –	Atividade que usa a contagem de cubos anterior à definição de volume e capacidade	89
Figura 13 –	Uso de situação de comparação para a formatação do bloco unitário referência no estudo de volume	90
Figura 14 –	Uso de situação de comparação para a formatação do bloco unitário referência no estudo de volume	90
Figura 15 –	Uso de situação de comparação para a formatação do bloco unitário referência no estudo de volume	91
Figura 16 –	Fórmula para o cálculo da medida do volume do paralelepípedo retangular	91
Figura 17 –	“Unidades do sistema métrico” para volumes apresentado no livro da 5ª série	92
Figura 18 –	Equivalência entre unidades de volume com base na fundamental apresentada no livro da 5ª série	93
Figura 19 –	Transformação de uma unidade de medida maior para uma menor	93
Figura 20 –	Transformação de uma unidade de medida menor para uma maior	94
Figura 21 –	Lista de unidades de capacidade	94
Figura 22 –	Equivalência entre unidades de medida	95
Figura 23 –	Técnica aplicada à conversão entre unidades de medida	95
Quadro 5 –	Tipificação e quantificação das tarefas do livro da 5ª série	97
Quadro 6 –	Uso das unidades de medida nos livros da 6ª série, por subcapítulo e atividade	98
Quadro 7 –	Uso das unidades de medida nos livros da 7ª série, por subcapítulo e atividade	99
Figura 24 –	Atividade que faz uso da unidade de medida litro no livro da 7ª série	99
Quadro 8 –	Uso das unidades de medida nos livros da 8ª série, por subcapítulo e atividade	99
Quadro 9 –	Estrutura dos livros da coleção “Matemática nos dias atuais - na medida certa” de 2015	102

Quadro 10 –	Volume e capacidade no “Planejamento do curso” da coleção de 2015	103
Gráfico 3 –	Linha do tempo de volume/capacidade na coleção de 2015, por ano	104
Quadro 11 –	Uso das unidades de medida nos livros do 6 ^a ano, por subcapítulo e atividade	105
Figura 25 –	Diferença entre as definições de volume nas duas coleções	106
Figura 26 –	Diferença entre as definições de capacidade nas duas coleções	106
Quadro 12 –	Tipificação e quantificação das tarefas do livro do 6 ^o ano	107
Figura 27 –	Exercício do primeiro capítulo do livro do 7 ^o ano	109
Figura 28 –	Exercício do segundo capítulo do livro do 7 ^o ano	109
Figura 29 –	Exercício do capítulo 4 do livro do 7 ^o ano	110
Quadro 13 –	Uso das unidades de medida nos livros do 7 ^a ano, por subcapítulo e atividade	110
Figura 30 –	Exemplo de transformação entre unidades de volume	111
Quadro 14 –	Tipificação e quantificação das tarefas do livro do 7 ^o ano	112
Figura 31 –	Apresentação da grandeza vazão no livro do 8 ^o ano	114
Figura 32 –	Apresentação da grandeza densidade no livro do 8 ^o ano	115
Quadro 15 –	Tipificação e quantificação das tarefas do livro do 8 ^o ano	116
Quadro 16 –	Uso das unidades de medida nos livros do 8 ^a ano, por subcapítulo e atividade	117
Figura 33 –	Cálculo da unidade de volume ou aresta a partir do volume no livro do 8 ^o ano	118
Quadro 17 –	Uso das unidades de medida nos livros do 9 ^a ano, por subcapítulo e atividade	119
Figura 34 –	Definição da medida do volume do prisma reto de base retangular	120
Figura 35 –	Definição da medida do volume do prisma reto (em geral)	120
Figura 36 –	Definição da medida do volume do prisma reto de base circular ..	121
Figura 37 –	Exercício do livro do 9 ^o com sobreposição de discos	121
Figura 38 –	Exercício do livro do 9 ^o utilizando contagem de blocos não unitários	122

Figura 39 –	Exercício do livro do 9º tornando algébrica uma questão de volume	123
Quadro 18 –	Tipificação e quantificação das tarefas do livro do 9º ano	123
Quadro 19 –	Comparativo entre o número de tipos de tarefas encontrados nas duas coleções	125

LISTA DE SIGLAS

ANA	Avaliação Nacional de Alfabetização
ANPEd	Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CGPM	Conferência Geral de Pesos e Medidas
COLTED	Comissão do Livro Técnico e do Livro Didático
CNLD	Comissão Nacional do Livro Didático
FAE	Fundação de Assistência ao Estudante
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
FUNAME	Fundação Nacional do Material Escolar
INL	Instituto Nacional do Livro
INMETRO	Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial
LD	Livro Didático
MEC	Ministério da Educação e Cultura
NCSM	Conselho Nacional de Supervisores de Matemática (EUA)
OCDE	Organização de Cooperação e Desenvolvimento Econômico
OD	Organização Didática
OL	Organização praxeológica local
OM	Organização Matemática
OP	Organização Praxeológica
OR	Organização praxeológica regional
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCN-Mat	Parâmetros Curriculares de Matemática
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PLIDEF	Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental
PNLD	Programa Nacional do Livro e do Material Didático
PNLEM	Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SI	Sistema Internacional de Unidades
TAD	Teoria Antropológica do Didático
TD	Transposição Didática

UF	Unidade Federada
UNESCO	Organização das Nações Unidas para Educação, Ciência e Cultura
USAID	Agência dos Estados Unidos para o Desenvolvimento Internacional

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS	25
2.1	UM BREVE HISTÓRICO SOBRE OS PCN	26
2.2	OS PARÂMETROS CURRICULARES DE MATEMÁTICA	28
2.2.1	Conteúdos, conceitos, procedimentos e atitudes para o Ensino Fundamental	31
2.2.2	A síntese dos princípios norteadores	32
2.2.3	As grandezas volume e capacidade para o 3º ciclo	33
2.2.4	As grandezas volume e capacidade para o 4º ciclo	35
2.2.5	Orientações didáticas	36
3	O LIVRO DIDÁTICO	38
3.1	O LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA	41
3.2	O PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO E DO MATERIAL DIDÁTICO (PNLD)	43
4	VOLUME E CAPACIDADE: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES	47
4.1	DAS PESQUISAS SOBRE VOLUME E CAPACIDADE	48
4.1.1	Primeira fase: A plataforma Capes	48
4.1.2	Segunda fase: Periódicos Qualis A1 a B2	50
4.2	ALGUMAS DEFINIÇÕES DE VOLUME E CAPACIDADE	51
4.2.1	Breve histórico das unidades de medida	51
4.2.2	Retomando a discussão sobre as grandezas	53
4.3	VOLUME E CAPACIDADE NOS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS	58
4.4	VOLUME E CAPACIDADE NOS LIVROS DIDÁTICOS	59
5	APORTE TEÓRICO-METODOLÓGICO	61
5.1	A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO	62
5.1.1	A noção de transposição didática	62
5.1.2	A percepção antropológica no trato do saber e seus conceitos fundamentais	63
5.1.3	A organização praxeológica e seus elementos básicos	67
5.1.4	Organização praxeológica pontual, local e regional	70

5.1.5	Os momentos didáticos	70
5.1.6	Os níveis de codeterminação	72
5.1.7	A praxeologia como um recurso para análise de livros didáticos	74
5.2	AS PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS METODOLÓGICAS DA PESQUISA	75
5.3	A ESCOLHA DAS COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS	76
5.4	O MÉTODO DE ANÁLISE	78
5.4.1	A tipologia das tarefas	81
5.4.2	A tipificação das tarefas das coleções analisadas	82
6	PRODUÇÃO E ANÁLISE DE DADOS	86
6.1	A ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA DA COLEÇÃO DE 1994	86
6.1.1	O manual do professor	87
6.1.2	O livro da 5ª série	89
6.1.3	O livro da 6ª série	98
6.1.4	O livro da 7ª série	98
6.1.5	O livro da 8ª série	99
6.2	A ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA DA COLEÇÃO DE 2015	100
6.2.1	O manual do professor: Assessoria pedagógica	100
6.2.2	O livro do 6º ano	104
6.2.3	O livro do 7º ano	108
6.2.4	O livro do 8º ano	113
6.2.5	O livro do 9º ano	118
6.3	E ENTÃO, O QUE FOI PERCEBIDO?	125
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	130
	REFERÊNCIAS	138

1 INTRODUÇÃO

Em tempos de encaminhamentos para mudanças estruturais densas na educação brasileira, em que se coloca em xeque a qualidade da educação ofertada, especialmente em escolas da rede pública de ensino, cada vez mais se discute sobre os fundamentos e orientações de uma praxe que reflete um modelo condenado ao insucesso como demonstram algumas avaliações externas como PISA¹ e SAEB². E, por isso, um cuidado a mais deve se tomar, pois até mesmo as concepções, estruturas e apontamentos dessas avaliações estão, também, *sub judice*³.

Mesmo com a indicação de uma base curricular nacional através da Lei de Bases e Diretrizes da Educação (BRASIL, 1996), apenas 21 anos depois ela se torna realidade⁴, inclusive como referência para a organização para as diretrizes curriculares de todas as licenciaturas no Brasil, como ratificou o Conselho Nacional de Educação (BRASIL, 2019). Enquanto isso, as principais referências sobre conteúdos e disciplinas, no sistema brasileiro, foram ditadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, em vigor já a partir de 1998.

Para os PCN, o conhecimento não é algo situado fora do indivíduo, tampouco algo que ele constrói independentemente da realidade exterior. “É, antes de mais nada, uma construção histórica e social, na qual interferem fatores de ordem antropológica, cultural e psicológica, entre outros” (BRASIL, 1998.b, p. 71). Eles discutem aspectos relacionados ao saber escolar, que posteriormente chamaremos de saber ensinado, indicando caminhos a serem trilhados e ações a serem efetivadas para que se garanta o aprendizado aos alunos, o que vai além da “alocação” desses conteúdos em séries.

Sobre este período de protagonismo dos PCN como referência curricular para o ensino brasileiro levantamos algumas questões: Puderam ser notados avanços para a educação brasileira e melhorias nos instrumentos didáticos que estavam à disposição dos alunos e professores durante esse período? Há algum modo de investigar possíveis interferências ou

¹ PISA é o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, coordenado pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) aplicada para alunos na faixa etária dos 15 anos, aqui no Brasil em média o 7º ano do Ensino Fundamental, conforme Portal do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

² SAEB é o Sistema de Avaliação da Educação Básica, aplicada nos 5º e 9º ano Ensino Fundamental e o 3º ano do Ensino Médio.

³ De acordo com o dicionário Priberam, *sub judice* é a expressão que se emprega “para dizer que a questão não está resolvida, geralmente em relação a um assunto controverso”. Disponível em <https://dicionario.priberam.org/sub%20judice>. Acesso em 23 de abril de 2019.

⁴ Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Fundamental é um documento implantado em 2017 que tem como objetivo, parametrizar o conhecimento mínimo que deve ser desenvolvido pelos professores em cada ano/série, organizados por disciplinas e bimestres letivos.

impactos dos Parâmetros no processo educacional? Os PCN tiveram relação com a evolução de critérios e escolhas do livro didático através do PNLD?

Fora eleita então, a investigação dos desdobramentos do PCN no livro didático como foco dessa pesquisa e, para tanto, algumas delimitações neste objeto necessitaram ser realizadas, dada a infinidade e complexidade de caminhos que podiam ser pesquisados. Para estreitar nosso campo de pesquisa, tratou-se observar alguns recortes dessas pesquisas que levassem em consideração a significância do conteúdo para a educação básica, um tempo de execução possível que atendesse um calendário mais estreito, como temos a nível de mestrado, além de variáveis que encontraríamos durante a realização da pesquisa.

Uma das possibilidades pensadas para esta pesquisa foi a investigação de determinado conteúdo a partir de sua abordagem em livros didáticos, haja visto que são materiais acessíveis ao professor e ao aluno de todas as escolas públicas, graças ao Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) e, além disso, passam por avaliações que os “qualificam” à concorrência para fornecimento dos mesmos, em processo público pautado por vários editais do Ministério da Educação. Tem-se, também, que esse tipo de material imprime a perspectiva não apenas de um autor, mas de um conceito de ensino e aprendizagem, de um “resultado” escolar, de uma gama de processos e conteúdos, de uma visão sobre a sociedade.

Para delimitar o campo de pesquisa eram necessárias ainda 04 (quatro) escolhas: o tema/conteúdo a ser verificado; o nível de ensino em que ele é desenvolvido; a modalidade em que estaria sendo acompanhado e; a partir de qual ponto de vista seriam analisados (metodologia).

Entre os diversos temas que poderiam serem tratados na análise, levou-se em consideração características gerais ligadas à história do ensino da matemática no Brasil, em que é sabido que, durante a influência mais forte do Movimento Matemática Moderna – como veremos à frente – alguns autores apontam uma preferência pelo desenvolvimento dos conteúdos ligados à aritmética e álgebra.

Em um primeiro momento, a escolha pelo conteúdo *volume* (unicamente) ocorreu por duas razões: a priori, por ser um tema ligado ao ensino de Grandezas e Medidas, que nem sempre é explorado potencialmente em sala de aula e, historicamente, ser uma área preterida ao ensino algébrico e aritmético, assim como ocorre com a Geometria e Tratamento da Informação (Estatística). Em segundo lugar, por uma sensível diferença conceitual que existe em *volume* e *capacidade*, que nem sempre está clara nos livros e, em algumas situações, também não consolidada pelo professor. Por isso, com o decorrer da pesquisa, viu-se que seria necessário atentar à imbricação existente entre esses dois conceitos e como eles são abordados no livro

didático, com sensível diferença entre os dois. Além disso, o reduzido número de trabalhos acadêmicos produzidos no Brasil, como pode ser visto mais à frente na pesquisa sobre a produção acadêmica e na Metodologia, o que ressalta a necessidade de revisitação dos conteúdos.

No que se refere ao nível de ensino para a investigação, a opção pelos anos finais do Ensino Fundamental deve-se ao fato que são as primeiras séries em que as grandezas volume e capacidade são desenvolvidas de forma menos intuitiva permitindo tarefas que levem em consideração diferentes formas de problematização e desenvolvimento. Também foi levado em consideração que os Parâmetros deste nível são os mais antigos⁵ e tem um maior número de edições⁶ do PNLD, se comparados com o Ensino Médio. Por fim, sobre a modalidade de ensino, em uma análise prévia, fora percebido que os livros voltados à educação regular registram abordagens mais densas que aqueles voltados à Educação de Jovens e Adultos, fator determinante para a escolha realizada.

Mas como analisar os dados que forem coletados? Dentre as diversas possibilidades, optamos pela análise praxeológica proposta por Yves Chevallard em 1985 e demais estudiosos da Teoria Antropológica do Didático (TAD). Esta teoria permite a análise de qualquer atividade escolar como uma tarefa, através de parâmetros concisos e objetivos, construídos, de forma proposital, a partir de dois escopos: um prático (*práxis*) e outro teórico (*logos*), que corroboram com a formação de um conceito didático baseado na ação humana dentro do processo de ensino. Para isso, relaciona a influência de diversos fatores que são observados numa Organização Praxeológica (OP) ou, simplesmente, Praxeologia que significam e ressignificam instituições, teorias e práticas.

Outros fatores relevantes para a eleição da TAD como metodologia para a análise dos materiais escolhidos, também se deve ao fato de que, apesar de organizar as atividades pelos elementos nela contidos, não há o impeditivo de que outras teorias e visões da Didática da Matemática, a partir de outros autores, sejam aproveitadas e auxiliem a justificar a atividade como um todo. Além do que, por explorar a linguagem matemática para explanar seus fundamentos, mas sem restringir-se a ela, causam num leitor da matemática empatia pela leitura, um diferencial. No entanto, deixamos claro que não sendo esse o nosso único e

⁵ Os PCN de 1ª a 4ª séries datam de 1997, enquanto os de 5ª a 8ª séries são de 1998 e os do Ensino Médio no ano seguinte (1999).

⁶ PNLD para o Ensino Fundamental II teve 11 edições (até 2019), enquanto o programa voltado ao Ensino Médio (PNLEM) foi instituído em 2003 e teve 06 edições (até 2018) para o componente Matemática.

exclusivo público de leitura, procuramos utilizar uma linguagem menos técnica e mais próxima de qualquer pesquisador da área de ensino e educação.

Anteriormente, ao investigar as pesquisas sobre a abordagem da Teoria Antropológica do Didático desenvolvidas no Brasil, Silva (2019) observou que existem áreas de concentração em temas e/ou conteúdos associados à TAD, como visto em: Formação Inicial ou Continuada dos/para os professores (41 trabalhos); estudos em livros didáticos ou paradidáticos (37 trabalhos); estudos em Aritmética e Geometria Plana (22 trabalhos, cada) e; Álgebra ou Álgebra Linear (21 trabalhos). Percebe-se que há olhares que ainda não foram explorados sob a ótica da TAD dentro da própria matemática escolar, como, por exemplo, a abordagem do conteúdo ‘volumes ou capacidade de sólidos geométricos’ nos ‘livros didáticos’ tendo como marco histórico os PCN, revelando um pioneirismo desse trabalho nesta investigação.

A relevância no estudo desse tema ainda é importante para que se verifiquem acertos e/ou erros que possam ter sido cometidos pelos autores ao intentar atender os critérios do PNLD que receberam influência dos PCN.

Expostos tais fatos, apresenta-se como questão condutora: *Quais as contribuições dos Parâmetros Curriculares Nacionais sobre o ensino de volume e capacidade, a partir da comparação das praxeologias matemáticas de uma coleção de livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental, em diferentes edições?*

Visando desenvolver tal mote, fez-se necessário o estabelecimento de objetivos que pudessem reger o trabalho e, para tanto, fora proposto como objetivo geral: *Analisar as possíveis contribuições dos Parâmetros Curriculares Nacionais sobre o ensino de volume e capacidade nos anos finais do ensino fundamental, a partir da comparação das praxeologias matemáticas em diferentes edições de uma coleção de livros didáticos.*

Para alcançá-lo, definem-se como objetivos específicos:

- a) Identificar as organizações matemáticas referentes ao ensino de volume e capacidade em uma coleção de livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental de edição anterior à implementação dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática;
- b) Identificar as organizações matemáticas referentes ao ensino de volume e capacidade em uma coleção de livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino

Fundamental de edição posterior à implementação dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática;

- c) Comparar e analisar as organizações matemáticas identificadas nas análises da coleção em suas duas edições, validando relações entre as possíveis modificações da abordagem para o ensino de volume e capacidade.

Para alcançar tais objetivos, o presente trabalho foi organizado em 5 (cinco) capítulos a partir da delimitação dos três conceitos principais desta pesquisa: os Parâmetros Curriculares, o livro didático e, o estudo sobre volume e capacidade. Além disso há um capítulo que trata da organização teórico-metodológica a partir da Teoria Antropológica do Didático, que subsidia a produção e a análise dos resultados. Com isso, são emitidas, ao fim da pesquisa, as principais considerações sobre os mesmos.

O capítulo 2 é um levantamento histórico e conceitual para o nosso trabalho. Se por um lado apresentamos algumas visões gerais sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais e, na sequência, também sobre os Parâmetros Curriculares de Matemática no contexto histórico, por outro procuramos já identificar a relação das grandezas volume e capacidade dentro deles, para que sirva de referência para quando da análise dos livros didáticos escolhidos.

E é justamente esse o ponto que trata o segundo capítulo da pesquisa. Buscou-se aqui localizar o livro didático a partir de seu conceito, proposta e história junto à educação brasileira, subsidiando a ampliação do conhecimento sobre os livros de matemática ao longo do último século. Em seguida, o levantamento de informações ligadas ao Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) a partir dos meados da década de 1980, e seu aperfeiçoamento ao longo dos anos 1990 e 2000, permitem que se enxergue o livro como uma política pública que obedece a critérios cada vez mais fortes para uma oferta de boa qualidade no ensino.

Essa visão sobre o livro, que mais à frente é retomada como uma instituição, carrega em si diversas informações e orientações de outras instâncias como o Estado, o autor, o professor, o mercado e, portanto, também leva um saber ‘moldado’ a atender estes entes.

Na sequência, o quarto capítulo apresenta volume e capacidade enquanto grandezas. É o ponto chave de discussão neste trabalho, pois pautou praticamente todas as escolhas feitas para esta pesquisa. Pretende-se situar o leitor nas definições mais gerais que são associadas a estas grandezas, atentar para sutilezas de discursos e definições que não favorecem o pleno entendimento sobre elas a partir de pesquisas e obras já publicadas, além de elucidar contradições dentro da própria coleção passados os anos. Seu primeiro subcapítulo destrincha uma pesquisa do tipo estado da arte sobre as grandezas volume e capacidade nos trabalhos em

nível de pós-graduação *strictu sensu* bem como em periódicos com classificação A1 a B2, nas plataformas digitais no Brasil. O segundo procura abordar as definições destas grandezas e diversos referenciais para chegarmos a uma definição para, em seguida, verificar as abordagens delas nos PCN, no PNLD e no livro didático, justamente os terceiro e quarto subcapítulos.

O quinto capítulo, denominado aporte teórico-metodológico, está baseado na Teoria Antropológica do Didático (TAD) como suporte para a análise das coleções de livros escolhidos, através dos conceitos ligados à praxeologia sugerida por Chevallard. Para isso, num primeiro momento são apresentados alguns conceitos básicos da teoria e, em seguida, expostos as contribuições da TAD para a análise dos materiais didáticos, seguidos da escolha das coleções analisadas e, enfim, os métodos de organização e análise dos materiais coletados.

O sexto capítulo é o momento de produção e análise dos dados. Nele, as tarefas envolvendo volume e capacidade são organizadas, quantificadas, tipificadas e analisadas, separadas por livro (série/ano) identificando suas Organizações Matemáticas (OM), a partir de uma análise própria, elaborando as Organizações Praxeológicas (OP) dos livros enquanto instituições, pelos termos da TAD.

Por fim, nas Considerações Finais são realizadas as análises factíveis, a partir dos dados organizados e desenvolvidos nos capítulos anteriores, especialmente o último, marcando convergências e divergências entre as organizações matemáticas encontradas, além daquelas existentes entre as organizações e os PCN. Faz-se um apanhado dos principais resultados encontrados, assim como apontamentos para os fatos mais relevantes desta pesquisa, expressando a conclusão sobre a pergunta condutora sugerida e organizando as ideias que validam os resultados dos objetivos, assim como esperado.

2 OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

Neste capítulo temos alguns apontamentos sobre dois documentos que servirão de referência para as análises e considerações, servindo ainda de marco histórico para nossa pesquisa, visto que a escolha de materiais didáticos, entre eles o livro didático, por duas décadas serviu para a elaboração pelos autores e análise pelas universidades, para que eles atendessem padrões mínimos de qualidade: os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) – que contém orientações mais gerais ao ensino – bem como sobre os Parâmetros Curriculares de Matemática (PCN-Mat⁷) – com orientações mais específicas.

A consolidação da Base Nacional Comum Curricular, a BNCC, proporcionou a organização do ensino e das principais disciplinas do sistema brasileiro de educação de acordo com séries e unidades, propondo diversas outras orientações para a melhoria da atividade docente e a garantia de materiais, objetos e objetivos comuns a todos os alunos, em nível nacional. A precisão deste documento sobressai por si só, às orientações mais gerais, mas não menos importantes, dos PCN.

Mas é mister deste estudo, promover seu resgate para reforçar as contribuições que foram alcançadas pela discussão exaustiva e a tentativa de colocar um documento desafiador como ele o é, em prática, inspirando e balizando os trabalhos e discussões que tornaram possível os primeiros desenhos da BNCC. Foi sobre as inviabilidades retratadas e sobre os acertos e consensos das expectativas e orientações dos PCN que foi consolidado um modelo comum de estrutura curricular para o Brasil inteiro.

Foi necessário apropriar-se das recomendações dos PCN para que o Ministério da Educação pudesse criar parâmetros bem definidos para eleger uma coleção de livros didáticos como aprovada (com ou sem ressalvas) nos Guias do Livro Didático. Ainda foi preciso obedecer a estas orientações para que as Unidades Federativas pudessem organizar suas Diretrizes Curriculares. Foram os parâmetros, por duas décadas, a referência principal para a organização das avaliações externas como o SAEB, a ANA⁸, a Provinha Brasil, por exemplo.

Olhar os PCN e observar suas influências, contribuições e suas falhas ou brechas é passo decisivo para que novos erros não sejam cometidos com a BNCC e que a educação brasileira possa estar em processo de melhoria contínuo.

⁷ Como os Parâmetros por componente curricular não possuem sigla própria que divirja do documento geral (PCN), será adotada, neste trabalho, uma abreviatura diferenciada para os Parâmetros do componente Matemática, aqui PCN-Mat.

⁸ ANA é a Avaliação Nacional de Alfabetização, aplicada no 1º ano do Ensino Fundamental em todo o Brasil.

Portanto, esse capítulo é dividido em duas etapas: na primeira há um resgate de fatos da educação no Brasil e os caminhos que possibilitaram a elaboração e promulgação dos PCN. Na outra, um mergulho nos Parâmetros Curriculares de Matemática dá os primeiros indícios que são propostos na matemática de forma a embasar as especificidades dos conteúdos volume e capacidade no próximo capítulo.

2.1 UM BREVE HISTÓRICO SOBRE OS PCN

A abertura do país a um contexto globalizado e a reorganização política e financeira vivenciada nas décadas de 1980 e 1990 provocou mudanças e impactos em diversas áreas de gestão do governo. Entre as exigências dos órgãos financiadores mundiais, por exemplo, há metas ligadas à qualidade da educação como é o caso da redução das taxas de analfabetismo, escolaridade e abandono escolar. Percebe-se aí uma disposição maior para a superação dessas dificuldades e se consolida a necessidade de reorganização escolar, que culmina na promulgação de uma nova Lei de Bases e Diretrizes da Educação (BRASIL, 1996).

Tal organização provocou, subsequentemente, a adoção de outras ações pelo Estado, tais quais a universalização do Programa do Livro Didático (1997), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Fundamental Anos Iniciais (1997) e Finais (1998) e, posteriormente, para o Ensino Médio (2003).

Dessa forma, entre os marcos históricos acima elencados, entre eles, observamos de forma especial a promulgação dos PCN dos Anos Finais do Ensino Fundamental, em 1998, e que foi o documento com maior referência sobre os conteúdos abordados na escola brasileira por 20 anos, até a ascensão da Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Fundamental, no fim de 2017.

O artigo 210 da Constituição Federal Brasileira (BRASIL, 1988) garantiu a fixação de “conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais” mas, como apontado por Cury (1996), parece que a opção por os organizar em parâmetros, em meados de 1990, pareceu uma escolha mais sensata para aquele momento, levando em consideração a pluralidade de pessoas que estariam subordinadas aos novos currículos, apesar de amplos e densos debates

que surgiram, como pode ser visto no “Parecer da ANPED⁹ sobre os PCN” (ANPED, 1996) um ano antes da divulgação de sua primeira versão.

Em sua apresentação, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Fundamental: Anos Finais (BRASIL, 1998.b), são definidos como uma fonte de fomento à reflexão, através de proposições que tem como objetivo estabelecer referenciais no processo de construção da cidadania. Para tanto, o documento não se coloca como um modelo curricular hegemônico e impositivo diante da diversidade política e cultural das regiões, estados e municípios do país, concedendo, desse modo, autonomia pedagógica para professores e equipes pedagógicas escolares.

O termo “parâmetros” visa o estabelecimento de “pontos comuns” na educação brasileira que respeitam e realçam as diversidades regionais, culturais e políticas existentes no país. Já o termo “curriculares” – de “currículo” – elege, dentre os vários significados possíveis nos contextos pedagógicos, a expressão de princípios e metas, que devem ser flexíveis para promover discussões e reelaborações quando realizado em sala de aula pelo professor (BRASIL, 1998.b).

Os documentos apontam que desde a década de 1920 as propostas de reorientação curricular não conseguiram mudar efetivamente a prática docente dos professores e eliminar o caráter elitista do ensino da Matemática e melhorar sua qualidade (BRASIL, 1998.a).

Quiçá, por essa razão, já em seus primeiros parágrafos de apresentação ao professor, os Parâmetros Curriculares exprimem a intencionalidade da ampliação e aprofundamento de um debate pelos vários atores da educação escolar (escolas, pais, governos e sociedade) a fim de provocar uma “transformação positiva” no sistema educativo brasileiro.

O documento também aponta características que devem ser observadas para que tenhamos uma escola reconhecidamente “adequada” para enfrentar os novos desafios que a globalização e a interdependência lançam. Desafios estes marcados pelos desequilíbrios que ficam realçados como a “inclusão” e a “exclusão” contrapostas socialmente. Por isso, fica também registrado que as políticas educacionais devem ser suficientemente diversificadas e concebidas para que também a educação não seja “um fator suplementar da exclusão social”. (BRASIL, 1998.b, p. 17).

Para que essa educação seja efetiva, apontam os PCN, é necessário que ela esteja fundamentada em quatro pilares: aprender a conhecer; aprender a fazer; aprender a viver com

⁹ ANPED é a sigla da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, que há 40 anos congrega os programas de pós-graduação em educação, professores e alunos destes programas, além dos demais pesquisadores da área.

os outros, e; aprender a ser, todos propostos por Delors¹⁰ *et al* (2010). Entre estes, os dois primeiros merecem ser enfatizados para a discussão presente neste trabalho. A princípio o saber selecionar, acessar e integrar os elementos de uma cultura geral, com espírito investigativo e visão crítica, ou seja, *aprender a conhecer*, a aprender por toda a vida. O outro é o *aprender a conviver com os outros* por observar o relacionamento em grupo, a resolução de problemas e a qualificação profissional.

Nos PCN os conteúdos são definidos como “meios para que os alunos desenvolvam as capacidades que lhes permitam produzir bens culturais, sociais e econômicos e deles usufruir” (BRASIL, 1998.b, p. 74). A tamanha importância nesse papel, entende o documento que a organização e tratamento deles devem ser precedidos de ampla discussão na equipe escolar.

Nesse ponto, os Parâmetros propõem um rompimento com um modelo de organização de conteúdos marcado pela linearidade e segmentação dos assuntos, para a ascensão de um modelo que viabilize uma “rede de significados”. Nessa rede, a organização curricular abandona uma presunção de conhecimento acumulado e busca um desenho curricular que assemelhasse a uma pluralidade de pontos que se alinhavam formando uma teia que, ainda, possibilita uma outra diversidade de ramificações.

Nessa construção é importante que não seja observada apenas a natureza conceitual dos conteúdos – que referenciam a construção ativa das capacidades intelectuais para operar signos, ideias, imagens que permitem representar a realidade, e predominam o ensino – mas também as naturezas procedimental e atitudinal. A primeira expressa o saber fazer, a tomada de decisões e a realização de ações para atingir uma meta, enquanto a outra observa as normas, valores e atitudes que permeiam todo o conhecimento escolar.

2.2 OS PARÂMETROS CURRICULARES DE MATEMÁTICA

O segundo documento explorado neste capítulo são os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN-Mat) que tratam as possíveis conexões entre os blocos de conteúdo da Matemática, e entre estes e outras áreas do conhecimento, o cotidiano e os Temas Transversais¹¹. Nele se percebe uma discussão geral sobre o ensino da Matemática nos anos

¹⁰ Jacques Delors et al (2010) no Relatório para UNESCO da Comissão Internacional sobre Educação para o século XXI: Educação para um tesouro a descobrir.

¹¹ Os Parâmetros Curriculares Nacionais definem como Temas Transversais os conjuntos de temas que permeiam a concepção, os objetivos, os conteúdos e as orientações didáticas de áreas diversas, pressupondo um tratamento integrado entre elas afim de que haja uma coerência entre os valores experimentados na vivência que a escola propicia desses valores aos estudantes. São eles Ética, Pluralidade Cultural, Meio Ambiente, Saúde, Orientação Sexual e, Temas locais (BRASIL, 1998.b).

finais do Ensino Fundamental e recomendações específicas para o terceiro (6º e 7º anos) e o quarto (8º e 9º anos) ciclos de aprendizagem.

Eles têm por finalidade o fornecimento de elementos para ampliar o debate nacional sobre o ensino na área do conhecimento, socializando informações e resultados de pesquisa que, por decorrência, poderiam nortear a formação inicial e continuada de professores, bem como também servir de orientação para a produção de livros e de outros materiais didáticos, configurando uma política voltada à melhoria do ensino fundamental (BRASIL, 1998,a).

Tão logo é apresentado, ao remontar a trajetória das reformas curriculares no Brasil, os PCN destacam o fato de que as ideias ricas e inovadoras dessas propostas não chegam aos professores, ou são incorporadas superficialmente, ou ainda recebem interpretações inadequadas, o que faz que as mudanças desejadas não sejam efetivadas.

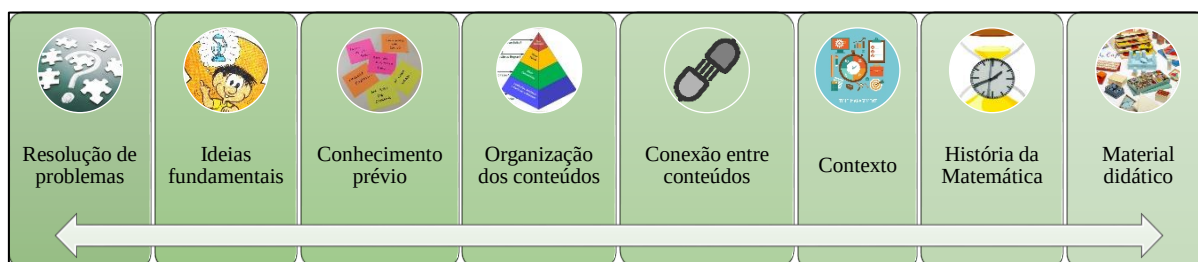
Em suas primeiras páginas, o documento aponta um cenário do ensino da Matemática no Brasil marcada pela falta de qualificação na formação profissional, a ausência de políticas públicas, restrições ligadas às condições de trabalho e as interpretações erradas de concepções pedagógicas por parte dos professores.

Em contrapartida, reconhece o esforço em várias instâncias para a modificação desse cenário: enquanto uma parte dos docentes, individualmente ou em pequenos grupos, estavam buscando novos conhecimentos, muitas escolas se esforçavam para elaborar projetos educativos que contemplassem os interesses e necessidades da comunidade. Nesse mesmo movimento as universidades, secretarias de educação e outras instituições, estavam preocupadas em produzir material de apoio para a prática docente. Essas iniciativas, mesmo tão importantes, foram incipientes e poucas contribuições efetivamente foram percebidas, como descrito em:

A formação dos professores, por exemplo, tanto a inicial quanto a continuada, pouco tem contribuído para qualificá-los para o exercício da docência. Não tendo oportunidade e condições para aprimorar sua formação e não dispondo de outros recursos para desenvolver as práticas em sala de aula, os professores apoiam-se quase exclusivamente nos **livros didáticos, que, muitas vezes, são de péssima qualidade** (BRASIL, 1998.a, p. 21-22, grifo nosso)

Outros empecilhos também são pontuados no documento, o que revela também um despreparo para a lida da docência em Matemática, especialmente na educação básica, com usos recorrentes de interpretações equivocadas de diversas concepções pedagógicas, o que acarreta em diversas distorções para que ideias inovadoras sejam postas em prática. São as principais:

Figura 1 – Interpretações equivocadas de concepções pedagógicas.



Fonte: BRASIL, 1998.b

De acordo com os PCN, as interpretações equivocadas e o modo de empreender os recursos disponibilizados foram responsáveis pelas “distorções na implementação das ideias inovadoras que aparecem em diferentes propostas” (BRASIL 1998.a, p. 22).

São alguns dos alertas apontados no documento e que precisam ser tratados tanto na prática docente, como também nos materiais que vão ser disponibilizados aos professores, especialmente:

1. A redução da resolução de problemas à lista de exercícios após vistas ao conteúdo e que dependem basicamente das técnicas que foram memorizadas;
2. A prevalência de fórmulas e técnicas sobre a compreensão de ideias fundamentais (como na proporcionalidade);
3. A recusa à consideração do conhecimento prévio do aluno; a organização hierarquizada de conteúdos mais importantes que outros, vistos numa cadeia retilínea que ignora muitas vezes a conexão que existe entre os conteúdos;
4. A supressão ou mesmo o exagero na contextualização do conhecimento matemático (situações opostas que são igualmente danosas no processo de aprendizado);
5. O sub uso da História da Matemática como um tópico extra ou mais uma cobrança didática, quando serviria de base para ampliação de conceitos; e,
6. A falta de clareza sobre o uso e adequações de diversos materiais didáticos (inclusive o livro didático), gerando expectativas indevidas,

Na estruturação do currículo e, conseqüentemente, das sequências dos conteúdos que devem ser trabalhados durante tal fase é ampliada passando a ter um caráter não rígido, possibilitando várias conexões aos alunos a partir de suas vivências. Dessa forma, a compreensão sobre o ensino é superior à ideia de conteúdos estabelecidos como pré-requisitos para o ensino e aprendizagem de outros (BRASIL, 1998.a).

O documento também ressalta a importância da resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem, visto que

A prática mais frequente consiste em ensinar um conceito, procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a grande maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com os números do enunciado ou aplicar algo que aprenderam nas aulas. Desse modo, o que o professor explora na atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, definições, técnicas e demonstrações (BRASIL, 1998.a, p. 40).

A natureza do conhecimento matemático, em suas características e métodos, é definida como um fator importante para se dimensionar a Matemática no currículo do ensino fundamental. É necessário olhar para a ela como uma ciência viva, não apenas no cotidiano dos cidadãos, mas também nas universidades e centros de pesquisa, útil na solução de problemas científicos, mas sem perder de vista os caracteres especulativos, estéticos e não pragmáticos, priorizando sua essência.

2.2.1 Conteúdos, conceitos, procedimentos e atitudes para o Ensino Fundamental

Os PCN abordam em um de seus capítulos, a escolha dos conteúdos que devem ser desenvolvidos por área. Apesar de que, já naquela época, havia um consenso que os currículos de Matemática deveriam contemplar o estudo de números e das operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da Geometria) e o estudo das grandezas e das medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra, e da Geometria e dos outros campos de conhecimento) que permitisse ao cidadão ser capaz de “tratar” as informações que recebe cotidianamente.

Havia, no entanto, o desafio de identificar quais os conceitos, procedimentos e atitudes seriam relevantes dentro de cada campo. Portanto, não eram os conteúdos percebidos tão somente como um conjunto de explicações, de formas de raciocínio e de linguagens, mas como portadores de valores, de sentimentos, de interesses e condutas que perpassam tudo que através deles é trabalhado, desenvolvido.

Os conteúdos e temas estão organizados nos PCN-Mat em 04 (quatro) blocos: (1) Números e Operações, (2) Espaço e Forma, (3) Tratamento da Informação e, (4) Grandezas e Medidas. O último destes é justamente aquele que abrange os temas que são foco de nosso estudo.

Durante a organização desses blocos, diversos pontos e informações relevantes foram levantados e serviram de base para que eles alcançassem uma melhor organização do processo do ensino da matemática como é visto neste recorte:

- a variedade de conexões que podem ser estabelecidas entre os diferentes blocos, [...] articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, [...] possibilitar a compreensão mais ampla que o aluno possa atingir a respeito dos princípios e métodos básicos do corpo de conhecimentos matemáticos (proporcionalidade, equivalência, indução, dedução etc.); [...] estabelecer ligações entre a Matemática, as situações cotidianas dos alunos e as outras áreas do conhecimento;
- as possibilidades de sequenciar os conteúdos são múltiplas e decorrem mais das conexões que se estabelecem e dos conhecimentos já construídos pelos alunos do que da ideia de pré-requisito ou de uma sucessão de tópicos estabelecida *a priori*. Embora existam conhecimentos que precedam outros, a hierarquização entre eles não é rígida como tradicionalmente é apresentada;
- os conteúdos organizados em função de uma conexão não precisam ser esgotados necessariamente de uma única vez, [...]. Alguns desses conteúdos serão aprofundados, posteriormente em outras conexões, ampliando dessa forma a compreensão dos conceitos e procedimentos envolvidos;
- os níveis de aprofundamento dos conteúdos em função das possibilidades de compreensão dos alunos, isto é, levando em conta que um mesmo tema será explorado em diferentes momentos da aprendizagem e que sua consolidação se dará pelo número cada vez maior de relações estabelecidas;
- a ênfase maior ou menor que deve ser dada a cada item, ou seja, ,que pontos merecem mais atenção e que pontos não são tão essenciais; assim, por exemplo, o estudo da representação decimal dos números racionais é fundamental devido à disseminação das calculadoras e de outros instrumentos que a utilizam (BRASIL, 1998.a, pp. 53-54).

Ademais, alerta o documento que essa organização deve ser articulada e integrada ao projeto de cada escola, respeitando suas reinterpretações regionais e locais, ou seja, as características próprias de cada estado e município. Avançando ainda nesta discussão, este documento apresenta ainda um importante trecho que serve de referência para nossas análises: a síntese dos princípios que orientam a organização do ensino de matemática no ensino fundamental.

2.2.2 A síntese dos princípios norteadores

Neste capítulo dos PCN-Mat são explicitados os princípios norteadores do desenvolvimento da matemática a partir de uma síntese de estudos, pesquisas, práticas e debates desenvolvidos nos últimos anos, para que o trabalho escolar possa ser adequado a uma nova realidade, regida pela presença dessa área em tantos outros campos do conhecimento, entre os quais são destacados:

- a atividade matemática escolar não é “olhar para coisas prontas e definitivas”, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade;
- o ensino de Matemática deve garantir o desenvolvimento de capacidades como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa;
- o ensino-aprendizagem de Matemática tem como ponto de partida a resolução de problemas;
- no ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras, escritas numéricas); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a “falar” e a “escrever” sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados;
- a aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à atribuição e apreensão de significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe identificar suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos;
- a seleção e organização de conteúdos deve levar em conta sua relevância social e sua contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno e não ter como critério apenas a lógica interna da Matemática;
- recursos didáticos como livros, vídeos, televisão, rádio, calculadoras, computadores, jogos e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão (BRASIL, 1998.a, pp. 56-57).

Como pode ser visto neste último ponto, o livro didático – também representante desse grupo de itens que orienta o processo educativo – é também convocado a analisar, refletir e adequar-se às novas propostas do ensino. Por isso, nos conteúdos propostos para cada ciclo de aprendizagem na segunda parte dos PCN, são exigidas algumas apropriações de forma mais incisiva.

2.2.3 As grandezas volume e capacidade para o 3º ciclo

Os objetivos da Matemática para o terceiro ciclo visam o desenvolvimento de todas as áreas que o documento aponta. Dentro do bloco Grandezas e Medidas são levantadas às

questões relativas a *competência métrica*, sinalizando situações de aprendizagem que levem o aluno a:

- ampliar e construir noções de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns dos problemas históricos que motivaram sua construção;
- resolver problemas que envolvam diferentes grandezas, selecionando unidades de medida e instrumentos adequados à precisão requerida (BRASIL, 1998.a, p. 65).

Dessa forma, nesse bloco são propostas experiências que permitam ampliar sua compreensão sobre o processo de medição e perceber que as medidas são úteis para descrever e comparar fenômenos, haja visto que sua utilização no contexto social e de problemas históricos despertam o interesse dos alunos.

A exploração de **medidas relativas** a comprimento, massa, **capacidade**, superfície, tempo, temperatura, iniciada nos ciclos anteriores, é ampliada, incorporando-se **o estudo das medidas** de ângulo, **de volume** e de algumas unidades da informática como quilobytes, megabytes, que se estão tomando usuais em determinados contextos (BRASIL, 1998.a, p. 69, grifo nosso).

Tudo isso centrado na análise de situações práticas que permitam aos alunos o aprimoramento do sentido real. Por isso valorizam-se associações a contextos práticos que envolvam arquitetura, artes, esportes, culinária, atividades comerciais e leituras de mapas, plantas e croquis, usando unidades padronizadas e sistemas comuns de medida, além de encontrar estimativas plausíveis associadas ao uso de instrumentos e unidades de medidas adequadas à situação desejada, visto que é um bloco que possibilita férteis articulações com os outros da Geometria e com os diferentes tipos de números.

Neste ciclo, os PCN-Mat recomendam privilegiar atividades de resolução de problemas e práticas de estimativas no lugar da memorização sem compreensão de fórmulas e de conversões entre diferentes unidades de medidas.

Para tanto, estão estabelecidos como conceitos e procedimentos neste ciclo, no bloco Números e Operações a “compreensão da raiz quadrada e cúbica de um número, a partir de problemas como a determinação do lado de um quadrado de área conhecida ou da aresta de um cubo de **volume dado**” (BRASIL, 1998.a, p. 72, grifo nosso), além de que, no bloco Grandezas e Medidas:

- **Reconhecimento de grandezas como** comprimento, massa, capacidade, superfície, **volume**, ângulo tempo, temperatura, velocidade, e identificação **e unidades adequadas (padronizadas ou não) para medi-las**, fazendo uso de terminologia própria.
- **Indicar o volume de um recipiente em forma de paralelepípedo retângulo pela contagem de cubos utilizados para preencher seu interior.**
- Estabelecimento de **conversões entre algumas unidades de medida mais usuais** (para comprimento, massa, **capacidade**, tempo) em resolução de situações-problema (BRASIL, 1998.a, pp. 73-74, grifo nosso).

Essas informações mostram, entre os conceitos e procedimentos, que há uma atenção especial para o reconhecimento entre as grandezas e suas unidades. No que concerne a sua relação com a geometria e os números, infere-se o foco que há sobre o volume relacionado à contagem de cubos.

2.2.4 As grandezas volume e capacidade para o 4º ciclo

É comum que no quarto ciclo (equivalente aos dois últimos anos do Ensino Fundamental) haja uma valorização dos conteúdos algébricos aos demais blocos. Os PCN-Mat alertam justamente para que não haja uma sobreposição de conteúdos, mas a associação com aqueles vistos nos anos anteriores, o que permite uma maior clareza para as etapas de abstração que lhes serão imputadas. Traçam-se como objetivos para o componente Matemática para este ciclo, no bloco Grandezas e Medidas, às questões relativas a *competência métrica*, as situações de aprendizagem que levem o aluno “a obter fórmulas para cálculo da área de superfícies planas e para **cálculo de volumes¹² de sólidos geométricos (prismas retos e composições desses prismas)**” (BRASIL, 1998.a, p. 82, grifo nosso).

As experiências sugeridas estão baseadas na ampliação do conteúdo relacionado ao bloco de grandezas e medidas vistas no ciclo anterior e que também sejam razões de grandezas, a exemplo da densidade demográfica, da energia elétrica e outra que estejam relacionadas às outras áreas do conhecimento. Apesar de não estar nos PCN-Mat registra-se que a vazão (de um líquido) é um exemplo desse tipo de grandeza e que envolve medidas de capacidade ou volume.

Já os conceitos e procedimentos deste ciclo em Grandezas e Medidas visam:

¹² Aqui há uma colocação *ipsis litteris* do texto do documento, embora nossos estudos apontem para um uso apropriado da expressão “cálculo da medida do volume”. Essa colocação ainda se repete em mais algumas transcrições.

- **Resolução de situações-problema envolvendo grandezas (capacidade, tempo, massa, temperatura) e as respectivas unidades de medida,** fazendo conversões adequadas para efetuar cálculos e expressar resultados.
- **Cálculo do volume de alguns prismas retos e composições destes** (BRASIL, 1998.a, p. 89, grifo nosso).

Esses procedimentos, apesar de estarem em menor número que no terceiro ciclo, enfatizam a ampliação das relações entre as grandezas e unidades, em resolução de situações-problema, além do cálculo do volume de alguns prismas.

É importante salientar que surge, ainda, a preocupação com os temas transversais (ética, orientação sexual, meio ambiente, saúde, pluralidade cultural e, ainda, trabalho e consumo), de alguma forma sugerindo temas e abordagens que podem ser explorados no ensino. O conteúdo volume, por exemplo, é um conceito em que se pressupõe a plena compreensão pelo aluno, para discutir grandes questões voltadas ao Meio Ambiente.

2.2.5 Orientações didáticas

O último bloco dos PCN-Mat pretende contribuir para a reflexão a respeito de como ensinar, abordando aspectos ligados às condições em que se constituem os conhecimentos matemáticos, obviamente não se esgotando em si mesmo, mas colocando-as em evidência favorecendo a ampliação dessas discussões em outras pesquisas e leituras.

São vários os conceitos que o documento aponta como situações que envolvem o volume ou capacidade para subsidiar o trabalho correlacionado a outros conhecimentos e contextos como ocorre em Números e Operações. A multiplicação e a divisão, por exemplo, podem apoiar-se na medição e produto de medidas. A radiciação com a aresta de um cubo de volume dado.

O bloco Espaço e Forma é um dos que mais apresenta correlações com as grandezas e medidas e cujas conexões são mais variadas, como ocorre em semelhança e no caso da ampliação ou redução de uma figura e as relações entre as medidas de volume de uma figura ou outra. Esta última requer uma atenção especial, assim como ocorre a medição do comprimento do objeto, pois necessita de duas operações: uma geométrica (aplicação da unidade no comprimento a ser medido) e outra aritmética (contagem de quantas unidades couberam).

Também serão necessárias essas duas etapas para a obtenção de áreas e volumes, por isso é necessário explorar conceitos de medida retomando experiências. No entanto, deve-se

haver o cuidado pois nestas duas últimas pois a medida não é obtida através de uma comparação direta, mas de um produto de medidas lineares (lados, arestas etc.).

É necessário levar em consideração que o trabalho com esse tema dá oportunidade para abordar aspectos históricos da construção do conhecimento matemático, visto que diferentes povos tiveram diferentes formas de comparar grandezas de volume e capacidade.

Resgata-se, ainda uma relação entre a massa e o volume, quando se estabelece como padrão de 1 kg a quantidade de água pura contida em um cubo cuja aresta interna mede um decímetro, ou seja, de volume igual a um decímetro cúbico. Os alunos poderão verificar experimentalmente essa relação e a equivalência entre o decímetro cúbico e o litro ($1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$) e, desse modo, concluir que a densidade da água é de 1 kg/L.

Esses são alguns dos aspectos do tratamento dado pelos PCN para o ensino das grandezas volume e capacidade. Eles são a peça inicial que encaminhará as orientações de outros documentos como, por exemplo, os editais do PNLD e as diretrizes curriculares que, por consequência, exigirão adequações do livro didático para a abordagem dos conteúdos que são nosso objeto de pesquisa.

Assim, durante a construção de nossa pesquisa e, especialmente, nas análises, muitos itens são imprescindíveis para compreender prováveis mudanças de abordagens do tema.

3 O LIVRO DIDÁTICO

Neste capítulo, busca-se apresentar uma das principais ferramentas no processo de ensino e aprendizagem, tanto para o professor como para o aluno: o livro didático. Para tanto, discorreremos brevemente um apanhado histórico do livro didático no Brasil, seguindo para uma exploração específica sobre os livros de matemática, observando ainda as políticas de popularização do livro através do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), referência usada neste trabalho para a escolha das coleções de livros didáticos que é analisada nesta pesquisa.

O conhecimento que é desenvolvido (trabalhado, ensinado, aprendido, sistematizado, empreendido) em sala de aula pelo professor em sua concepção própria de educação carrega, ainda, as expectativas da comunidade escolar e da sociedade, através de suas organizações e políticas adotadas, que reverberam nessa prática e ainda visam a estruturação da cultura dos saberes necessários à manutenção e/ou modificação do meio social.

Encrustado nesse contexto como um dos pilares para a garantia dessas políticas e efetivação das expectativas sociais, está o livro didático, não por poucas vezes posto como protagonista da orientação didática que guia o trabalho docente e, por essa razão, garantindo que o espaço escolar vivenciasse os conteúdos mínimos entendidos como necessários por muitos anos. Por isso, o primeiro ponto que delimitou nossa pesquisa.

A eleição do livro didático foi a mais sensata para atender nossa intenção, visto a importância como é tratado em diversas pesquisas, por ser um “objeto” concreto que carrega valores e informações que, na maioria das vezes, não são meramente regionais. Além disso, considerados pelo valor que lhe é atribuído na prática pelo professor, coordenação pedagógica, pais e alunos, como um modelo a ser “respeitado” e seguido, um guia, mesmo que isso só ocorra pela decisão do professor no processo educativo, como cita Dante:

Mesmo que o livro didático de matemática tenha qualidades suficientes que o credenciem para o trabalho de sala de aula, o professor é quem conhece e se relaciona diariamente com seus alunos. Dessa forma, o livro didático deve ser um meio e não o fim em si mesmo. Com base no conhecimento do aluno e no contexto social em que está inserida a escola, o professor modifica, complementa, insere novos problemas, atividades e exercícios àqueles do livro didático. E como se ele fosse reescrevendo o livro didático com seus alunos. (DANTE, 1996, p. 89).

Nesta pesquisa, o livro didático (LD) é tratado como um portador de escolhas sobre: o saber a ser estudado; os métodos adotados para que os alunos consigam aprendê-lo mais

eficazmente; e, a organização curricular ao longo dos anos de escolaridade (CARVALHO e LIMA, 2010); visto que, apesar de não ser o único material disponível para o professor, é o principal deles e, nem sempre este detém uma qualidade satisfatória (BRASIL, 1998.a).

Sobre esse ponto de vista, Fernandes (2011) vai além ao afirmar que

A realidade apresentada traz como norteadores para a avaliação dos livros didáticos que seriam adotados pelas escolas públicas, entre outros critérios, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN. Portanto, ainda que os PCN não tenham recebido aceitação imediata dos professores, foram legitimados através dos livros didáticos aprovados pelo PNLD, que tiveram como referência a reforma curricular, posto que, tinham sido constatados erros conceituais, de preconceito e de atualização, o que desqualificou a escolha até então, feita com autonomia pelo/a professor/a, por incapacidade (FERNANDES, 2011, p. 11).

Pimentel e Vilela (2011), corroboram com este pensamento e, ainda, expõem que há outros instrumentos de avaliação que seguem mecanismos de controle da educação, como o PNLD, que ajudou a colocar em vigor as orientações dos PCN.

Analisar o livro então, abre tantas outras novas possibilidades de compreensão do processo educativo como cita Bittar (2017) ao dizer que “uma análise de LD descortina ao pesquisador diversas paisagens que podem ir desde o estado da cultura escolar em uma época à identificação de possíveis razões de dificuldades de aprendizagem e à elaboração de sequências didáticas (BITTAR, 2017, p. 366).

Assim, devido a flexibilidade na estruturação das sequências dos conteúdos a ser trabalhados, pelos PCN-Mat, encontram-se estruturas bem diversas entre os livros de Matemática mais recentes. Se forem comparados apenas aqueles que são aprovados pelos PNLDs, já se observa uma pluralidade na ordem de alguns conceitos, em séries ou mesmo momento em que se encontram. Essa diversidade deve ser observada com apreço, para que um mesmo conteúdo possa ser visto em diferentes momentos no livro, que ainda é o principal guia para a organização didática do professor.

A prova do destaque que tem o livro didático na educação é a tentativa, há quase um século, de garantia do acesso a este material através de ações nacionais para a popularizá-lo, atendendo a critérios preestabelecidos pela pasta da educação no Brasil. De fato, essa universalização do acesso para a Educação Básica só foi alcançada há cerca de duas décadas, quando o Plano Decenal de Educação para Todos (BRASIL, 1993) reconhece a ausência de uma *política consistente* para o livro didático, e enfatize o processo qualitativo de confecção,

impondo uma gestão eficiente no que se refere a pontos mais simples como prazo de entrega no início do ano letivo, dentre outros aspectos.

Destarte, propõe o documento a formulação de uma nova política que garanta padrões básicos de aprendizagem que devem ser alcançados na Educação Fundamental, donde se exigem desde aspectos físicos até à observância de seus conteúdos (fundamentação psicopedagógica, atualidade da informação, adequação ao destinatário, elementos ideológicos implícitos e explícitos).

Num processo paralelo, porém mais tardio, são também envidados esforços para a efetiva cultura do livro em que não há apenas a preocupação na propagação sistemática de conteúdos organizados por séries, mas, também, parâmetros que organizem o trabalho docente, atendendo anseios e perspectivas projetados pela sociedade em suas várias instâncias, incluindo pais e Estado.

Nesse contexto, sempre estiveram em foco as disciplinas ligadas à língua materna (Gramática, Comunicação e Expressão, Língua Portuguesa), bem como aquelas ligadas aos conteúdos matemáticos (anteriormente fragmentada em Aritmética, Geometria e Álgebra), o que projeta numa primeira análise, uma maior preocupação com o trato desses materiais e, talvez, um cuidado maior com suas abordagens e demonstração do conteúdo, por ter, ante outras disciplinas, uma maior trajetória temporal.

Embora Maldaner, Zanon e Auth (2007) tenham afirmado que a abordagem dos autores de livros didáticos tenha sofrido, historicamente, poucas mudanças, privilegiando uma visão tradicional, tem-se indícios que há avanços que superam a simples repetição de sequências lineares e fragmentadas de conteúdos, acrescidas de novas ilustrações.

O livro didático traz para o processo de ensino e aprendizagem um terceiro personagem, o seu autor, que passa a dialogar com o professor e com o aluno. Como cita Silva (2012), são os autores e editores que demonstraram ao longo da história da educação brasileira o ‘poder’ de adaptação do livro às mudanças de paradigmas, alterações de programas oficiais de ensino, renovação de currículos e inovações tecnológicas. Portanto, não ocupam um lugar destaque que não lhes caibam.

Sobre esses indícios se debruça esta pesquisa ao investigar que contribuições os Parâmetros Curriculares e, conseqüentemente, o Programa Nacional do Livro e do Material Didático provocaram na elaboração dos livros didáticos de matemática, particularmente sobre aqueles voltados aos anos finais do ensino fundamental.

3.1 O LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA

O modelo hegemônico de escola, como o que vivemos atualmente, surgiu com o nascimento do Estado-Nação na tentativa de criar uma cultura comum, uma “única língua”, uma única identidade. Assim, firmou-se o papel fundamental da escola, onde todos estariam submetidos ao mesmo sistema educativo (VILLORO, 1998).

Dessa forma, a cultura dos grupos dominantes da sociedade passou a ser a referência de aprendizado a ser aprendida por todos os cidadãos. Desse modo, os guias/manuais de estudo foram fundamentais para esta uniformização. O livro didático, como parte desses materiais, delimita, sob uma orientação, os conhecimentos a serem desenvolvidos a cada etapa do desenvolvimento do ser humano.

Os livros de Matemática não fugiram a tal condição. Historicamente, retratam as diferentes visões dos diversos grupos dominantes sobre aquilo que percebem como conhecimento básicos necessários à sociedade (PANIAGO, 2013).

Temos como exemplo da influência desses grupos, o fato de, até o fim da década de 1920, os manuais serem independentes em três áreas de ensino – Aritmética, Álgebra e Geometria – e, só após a Reforma Francisco Campos, em 1931, observar a compilação em uma única disciplina: a Matemática. Modelo, inclusive, consolidado na década de 1940 e que provocou durante a década de 1950 os anseios para uma mudança no ensino dela e uma renovação da escola primária e secundária, como nos aponta Pinto (2005).

Avançando no tempo, observamos a ênfase à educação tecnicista (décadas de 1960 e 1970) caracterizada principalmente pela conjuntura governamental do país, que favoreceu fortemente a difusão das perspectivas da Matemática Moderna¹³ no Brasil. Nisso, o livro didático teve papel fundamental para a consolidação de um modelo de ensino da disciplina que estivesse pautado numa nova “língua”, impregnada de simbolismos voltados à linguagem ligada aos axiomas, à Teoria dos Conjuntos, às noções de Estruturas Algébricas e de Grupos. Esse modelo impeliu professores e alunos a enfatizar o estudo na leitura, compreensão e utilização de uma matemática mais “técnica”, rebuscada.

Com isso, algumas áreas passaram a ter menor atenção no ensino, como nos indicam os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN-Mat):

¹³ O Movimento da Matemática Moderna foi, para Schoenfeld *apud* Pinto (2005), uma resposta dos americanos aos russos após o lançamento do Sputnik em 1957, que não atingiu apenas as finalidades do ensino, mas também os conteúdos tradicionais de Matemática, atribuindo uma ‘importância primordial’ aos axiomas, estruturas algébricas, lógica e conjuntos.

O ensino passou a ter preocupações excessivas com formalizações, distanciando-se das questões práticas. A linguagem da teoria dos conjuntos, por exemplo, enfatizava o ensino de símbolos e de uma terminologia complexa comprometendo o aprendizado do cálculo aritmético, da Geometria e das medidas (BRASIL, 1998.a, pp. 19-20).

A influência desta concepção de ensino reverberou – quiçá ainda reverbera – no ensino da Matemática, até a constatação da inadequação de alguns princípios básicos e das distorções dos exageros ocorridos.

Somente no início da década de 1990, com as primeiras discussões sobre a reformulação do ensino no país, as novas sugestões de estrutura dos livros matemáticos para a sala de aula começam a ser delineados, favorecendo uma diferente linguagem.

Assim, os Parâmetros Curriculares Nacionais impulsionam um novo olhar sobre os livros didáticos:

Dentre os diferentes recursos, o livro didático é um dos materiais de mais forte influência na prática de ensino brasileira. É preciso que os professores estejam atentos à qualidade, à coerência e a eventuais restrições que apresentem em relação aos objetivos educacionais propostos. Além disso, é importante considerar que o livro didático não deve ser o único material a ser utilizado, pois a variedade de fontes de informação é que contribuirá para o aluno ter uma visão ampla do conhecimento. (BRASIL, 1998.b, p. 96)

Nessa discussão, parece que há mais dúvidas que respostas geradas: As atividades presentes no material também sofreram mudanças em suas propostas? Há um entendimento diverso pelos autores, ao longo do processo de “aperfeiçoamento” do material? Se houve mudanças, podemos afirmar que elas de fato favoreceram a difusão do conhecimento matemático entre os estudantes?

Nessa perspectiva observamos alguns resultados de Melo (2018), ao tratar da ecologia do saber em documentos oficiais e livros didáticos da Educação Básica no caso da Análise Combinatória. O trabalho que observou, para esse conteúdo, relações diretas entre autores de livros didáticos e documentos oficiais a cada período/reforma vigente pode corroborar em nossa pesquisa ao tratarmos a relação específica entre os livros didáticos e os Parâmetros Curriculares Nacionais, nesse caso, para os conteúdos volume e capacidade. Em caso afirmativo, resolvemos mergulhar no fato de como se deu essa influência e quais as características desta que puderam ser observadas.

3.2 O PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO E DO MATERIAL DIDÁTICO (PNLD)

A preocupação com os materiais didáticos no Brasil, ganhou força quando da ascensão de Gustavo Capanema ao Ministério da Educação e Saúde em 1934, sendo acatada sua sugestão para a criação oficial do Instituto Nacional do Livro (INL) no fim da década de 1930 (BRASIL, 1937), no Governo de Getúlio Vargas, um projeto que já era discutido desde 1929. Para tanto, lhes foram atribuídas as competências: (a) a organização e publicação da Enciclopédia Brasileira e do Dicionário da Língua Nacional; (b) a edição de obras raras ou preciosas de interesse cultural; (c) a promoção de medidas para aumentar, melhorar e baratear a produção de livros no país, bem como a importação de livros estrangeiros e; (d) a organização e manutenção de bibliotecas públicas no país.

No final do ano seguinte os livros didáticos (LD) são definidos como os “compêndios e livros de leitura de classe”, sendo estas as obras usadas para leitura dos alunos em aula, e aqueles como os livros que expunham, total ou parcialmente, a matéria das disciplinas constantes dos programas escolares. Isso, a partir de uma legislação própria que ainda regulamentava e dava condições para a liberdade de sua elaboração e seu uso, observadas as recomendações dadas pela Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD) que é instituído no mesmo Decreto-Lei (BRASIL, 1938), formada por 07 (sete) membros designados pelo presidente da república.

Essa comissão tinha o perfil de controle por parte do Estado sobre o tratamento dos conteúdos que deveriam ser ministrados aos alunos, haja visto que esta deveria eleger quais livros estavam aptos para uso em sala de aula e, quando autorizado seu uso, passariam por revisão para constar em lista específica de obras autorizadas.

Já em dezembro de 1945, logo após a saída de Gustavo Capanema do Ministério da Educação e Saúde, um novo Decreto-Lei (BRASIL, 1945) ajusta as condições de produção, importação e utilização do livro didático, reforçando a competência do professor para adoção dos livros que julgar apropriados para serem adotados em sua sala de aula, com restrições para língua utilizada, orientação pedagógica e autorização concedida pela CNLD e mais outros detalhes que visavam a licitude da escolha dos mesmos.

Em 1966, no governo militar de Castelo Branco, o Ministério da Educação e Cultura (MEC) realizou uma parceria com a Agência Norte-Americana para o Desenvolvimento Internacional (USAID) que permitiu a criação da Comissão do Livro Técnico e Livro Didático (COLTED), regulamentada através do Decreto nº 59.355 (BRASIL, 1966), e financiada com recursos do Estado e de outros investimentos nacionais e até internacionais. Esse documento ao mesmo tempo que destaca ser “improducente” uma intervenção do Estado sobre a iniciativa

privada na criação de materiais didáticos, coloca a Comissão com responsável, dentre outras tarefas, pela vigilância e garantia da produção de livros dessa natureza a custos baixos e sua “pronta distribuição”. Essa ação garantiu recursos suficientes para que o MEC distribuisse gratuitamente, 51 milhões de livros em três anos.

Anos mais tarde, o MEC implantou o sistema de coedição de livros didáticos com editoras nacionais, utilizando recursos do Instituto Nacional do Livro (INL) através da Portaria nº 35, de 11 de março de 1970. Com isso, o próprio Instituto, no ano seguinte, passa a gerenciar os recursos da COLTED e ascende o Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (PLIDEF), estabelecendo o fim do convênio com a USAID, e passando a exigir como contrapartida a contribuição financeira para o Fundo do Livro Didático pelas Unidades Federadas (UF).

A Fundação Nacional do Material Escolar (FUNAME) torna-se responsável pela execução do programa do livro didático com a extinção do INL, em 1976 (BRASIL, 1976). Com isso, o governo federal torna-se principal financiador da compra dos livros, cabendo aos estados contrapartidas mínimas para sua plena execução, isso graças aos recursos provindos do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE). No entanto, haja visto a insuficiência de recursos para atendimento de boa parte dos alunos da rede pública, a grande maioria das escolas municipais não foram contempladas pelo programa.

Em mais uma tentativa de promoção de um gerenciamento adequado dos recursos educacionais voltados aos livros didáticos, em 1983, no governo de João Figueiredo, é criada a Fundação de Assistência ao Estudante (FAE) que incorporou o PLIDEF (Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental) do antigo INL. Só neste momento o grupo de trabalho encarregado da análise dos problemas relativos aos livros didáticos propôs que a escolha dos livros tivesse a participação docente, bem como houvesse a ampliação do programa para as demais séries do ensino fundamental.

Chegamos ao ano de 1985, marcado pelas intensas mudanças políticas e encaminhamentos para a democratização do país, que adota através do Programa Educação para Todos (MACIEL, 1985), em poucos meses, o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) (BRASIL, 1985.b), que traz como principais mudanças: (a) a distribuição de livros-escolares para alunos das escolas públicas de 1º grau (Ensino Fundamental); (b) a efetiva participação dos professores na indicação do livro e; (c) a criação do banco de livros didáticos para reaproveitamento desses materiais em anos futuros.

Este mesmo ano passa a ser um marco histórico, importante para nossa análise, haja visto o papel decisivo do professor na escolha do material que será utilizado em sala de aula,

através dos manuais da FAE para “indicação do livro didático”. Um processo novo que precisou ser refeito em um mês, com descrições e orientações enfáticas para garantir que o processo decisório fosse realizado exclusivamente pelo professor.

Entre 1985 e 1992 foram realizados 05 (cinco) processos de escolha do livro didático a esses moldes, com o aperfeiçoamento e ampliação de disciplinas e séries atendidas pelos Manual para Indicação do Livro Didático, até que, em 1993, numa parceria entre o MEC e a UNESCO (Organização das Nações Unidas para Educação, Ciência e Cultura), o Ministério define os critérios para avaliação do LD, mais ainda sem retomar a universalização de sua distribuição no 1º grau (Ensino Fundamental), graças às dificuldades políticas e econômicas pelas quais passava o país (LORENZONI, 2004).

Apesar de todos os esforços desses 67 anos relatados anteriormente, apenas com a extinção do FAE em 1997 e a transferência da responsabilidade de execução do PNLD integralmente para o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), o programa consegue efetivar o Guia de Livros Didáticos de 1ª a 4ª série lançado no ano anterior tornando a compra de livros (de diversas disciplinas) um processo contínuo e massivo, que atendesse todo o Ensino Fundamental (renomeação do 1º grau realizada pela recém promulgada Lei de Bases e Diretrizes da Educação (BRASIL, 1996)).

O Guia é um documento inspirado nos manuais, mas vai além da simples indicação de livros considerados aptos para a aquisição pelo governo, escolha pelo professor e distribuição nas escolas. Ele se propõe a orientar o processo de escolha, agora mais minucioso, com pareceres e orientações sobre pontos fortes e que inspiram cautela quando trabalhados em sala de aula. Com o passar dos anos vem sofrendo um processo de aperfeiçoamento, a fim de evitar a apresentação de erros conceituais, indução dos alunos e/ou professores a erros em sua consulta/manuseio, desatualização, preconceito ou discriminação de qualquer natureza.

O Programa tem sua abrangência ampliada de forma considerável, atendendo materiais que iam além do livro didático, como dicionários e paradidáticos, e alcançando também, em 2004, o Ensino Médio através do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM), cuja discussão não levaremos à frente por não ser, neste momento, o foco da nossa pesquisa.

Essa apresentação sobre o programa ilustra como se dá o processo de escolha do livro didático financiado por recursos públicos no país, passando por análises cada vez mais detalhadas e rigorosas, a fim de que não estejam disponíveis ao público geral algum material de qualidade pedagógica duvidosa. Por isso, serve em nosso trabalho como justificativa para a escolha da coleção que utilizaremos na análise de dados, por duas perspectivas: a primeira que chamaremos *qualitativa*, e a outra que ligada à questão *histórica*.

Sob o ponto de vista histórico, o PNLD nos indica qual(is) coleção(ões) de livro de matemática melhor se adequa(m) em nosso projeto, por ter alcançado mais aprovações durante a vigência dos PCN e, de preferência, que também tivesse aprovação anterior a ela. Já do ponto de vista de qualidade, eles são um parâmetro utilizado há várias décadas e seus critérios foram sendo aperfeiçoados sob a influência dos outros documentos norteadores da educação brasileira.

Percebe-se que a busca pelo amplo uso do livro de didático (BRASIL, 2017), com o tempo, também aperfeiçoou o método de análise dos materiais propostos, para que estes atendessem às normativas e orientações para a educação, conforme os encaminhamentos dados pelos governos que regeram o país, a cada período. Esse fator, portanto, lapidou o livro, os autores e, por conseguinte, os sistemas educativos, os professores e os alunos.

A influência do PNLD sobre o sistema educativo, mostra-se, portanto, ainda mais incisiva sobre o conteúdo proposto, bem como a forma que cada livro o abordará. Começa-se a desenhar uma rede de influência que é imposta pela sociedade, que passa pelos PCN de forma mais ampla e pelo PNLD de forma mais restrita, o que pode justificar as contribuições

4 VOLUME E CAPACIDADE: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

O trato sobre o tema volume não é uma preocupação recente, como nos apontam Pires, Gomes e Koch (2015), o que pode ser percebido desde as civilizações egípcias que desenvolviam alguns processos para calcular a medida do volume de um sólido (corpos tridimensionais).

A ênfase da Matemática Moderna no Brasil, nas décadas de 60 e 70, aos conteúdos ligados à Aritmética e Álgebra e, por conseguinte, a falta de espaço para um desenvolvimento mais apropriado para outras áreas, como Grandezas e Medidas, causou um efeito em cadeia desde as formações de professores até o ensino básico. Não é incomum encontrar erros de conceito sobre volume em livros, *sites* e, especialmente, na fala de professores. As medidas se misturam às grandezas e o conceito de volume ao de capacidade, sendo abordados muitas vezes de forma tão imbricada, que parecem ser um só.

Como consequência desses fatos, é possível observar em diferentes países, o desempenho insatisfatório dos alunos nas questões de grandezas e medidas, nas avaliações que lhe são impostas, o que leva Lima e Baltar Bellemain (2010) a pensarem que “algumas dificuldades no ensino e na aprendizagem desse campo não dizem respeito apenas a fatores ligados ao contexto educacional, mas também à complexidade dos conceitos envolvidos” (LIMA e BALTAR BELLEMAIN, 2010, p. 171). É necessário conhecer o que vai ser ensinado para evitar o caminho mais fácil de não ensinar aquilo que não se sabe, como pontua Lorenzatto (2010). Pizarro e Zamorano-Vargas (2019) enfatizam que a complexidade para compreender o tema se deve também à subestimação de sua dificuldade não dimensionada nos livros didáticos ou mesmo durante a formação docente.

Por isso a pesquisa encaminhou-se para além da abordagem do volume de sólidos geométricos regulares, o que seria um tanto redundante, visto que no Ensino Fundamental o próprio conteúdo é restrito a estes, além de também enfatizar as unidades de medida referentes a estas grandezas. Nessa configuração, ganha espaço a discussão para a relação entre o volume e a capacidade como grandezas, bem como o uso de suas unidades de medida nos livros didáticos.

Para fomentar a discussão e encontrar subsídios para a análise dos materiais, nos debruçamos a priori com o estado da arte e uma breve revisão de literatura das produções acadêmicas a nível de mestrado e doutorado que tratam especificamente sobre as grandezas volume e/ou capacidade. A pesquisa ainda, numa segunda etapa, afim de promover um recorte temporal, observou também as publicações em revistas da área “Ensino” com Qualis A1, A2,

B1 e B2 que abordam o mesmo conteúdo dos últimos 10 anos, que é um período onde a maioria das revistas já estavam dispostas em meio eletrônico.

Em seguida, fora realizada a revisitação também dos Parâmetros Curriculares Nacionais, pontuando suas considerações sobre o ensino de Grandezas e Medidas – especialmente o de volumes e capacidade – antecede a de alguns tratos da literatura sobre pontuações da abordagem destes temas nos livros didáticos, de forma a subsidiar as discussões propostas.

4.1 DAS PESQUISAS SOBRE VOLUME E CAPACIDADE

Os estudos sobre a Educação Matemática têm progredido e cada vez mais é perceptível observar a evolução não apenas quantitativa, mas qualitativa nos eventos da área, nos repositórios acadêmicos e nas revistas das áreas voltadas ao Ensino e/ou Educação.

Face ao exposto, buscou-se observar a relevância do tema nas pesquisas realizadas no Brasil e que podem, hoje, ser consultadas nos repositórios eletrônicos das principais instituições de ensino deste país, especialmente, a nível de pós-graduação (mestrado e/ou doutorado). Essa observação apreciou desde o uso do tema nos títulos até no que se referiu ao trato nas abordagens teóricas e metodológicas desses trabalhos.

Para auxiliar nossa pesquisa e definir com maior precisão o nosso objeto de pesquisa, elaboramos um breve estudo sobre pesquisas anteriores, do tipo estado da arte, buscando identificar tendências e descrever o estado do conhecimento (FIORENTINI e LORENZATO, 2012) a partir dos estudos desenvolvidos cientificamente que tratam o ensino de Grandezas e Medidas, especialmente no que se refere a volume e capacidade.

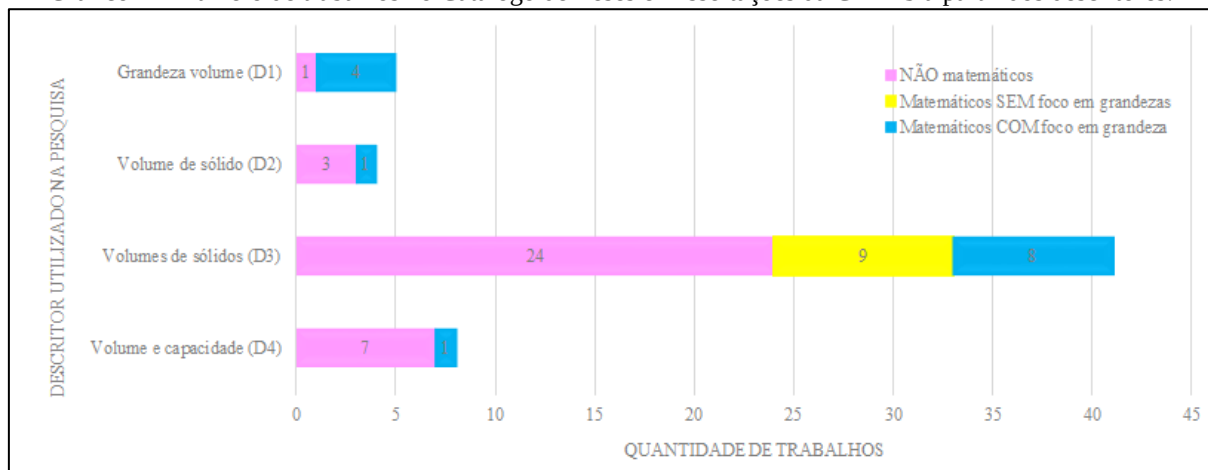
Por se tratar de um objeto de pesquisa vinculado ao programa de Mestrado em Ensino das Ciências e da Matemática, na linha de pesquisa Metodologias e Práticas de Ensino de Ciências e Matemática, optou-se pelo levantamento dos temas escolhidos, a partir de plataformas eletrônicas das principais bases brasileiras dividido em duas partes: a primeira envolvendo teses e dissertações produzidas no Brasil e, no segundo momento, entre periódicos com boa avaliação Qualis na área “Ensino”.

4.1.1 Primeira fase: A plataforma Capes

A primeira fase desta pesquisa utilizou a plataforma digital do Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), a

partir de 04 (quatro) descritores¹⁴: “grandeza volume” (D1), “volume de sólido” (D2), “volume de sólidos” (D3) e “volume e capacidade” (D4), resultando nos seguintes resultados:

Gráfico 1 – Número de trabalhos no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES a partir dos descritores.



Fonte: Banco de dados do pesquisador

Foram encontrados 58 (cinquenta e oito) trabalhos a partir dos descritores estabelecidos. Sobre estes exerceu-se a segunda etapa caracterizada pela lida dos resumos e, quando necessário, corpos de textos, afim de verificar se os descritores foram empregados apenas como citação ou demonstravam o uso apropriado deles. Assim, os trabalhos foram divididos em três categorias:

Grupo I – Não-matemáticos: aqueles cujo foco de trabalho não estava sobre a abordagem matemática do conceito de volumes.

Grupo II – Matemáticos SEM foco nas grandezas: aqueles que apesar de citarem ou mesmo abordarem as grandezas investigadas, não o faziam de forma efetiva sobre o tema ou nível de escolaridade ou abordagem que é foco desse trabalho.

Grupo III – Matemáticos COM foco nas grandezas: os trabalhos que contém discussões voltadas ao nosso objeto de pesquisa e cujos resultados constam de alguma forma neste trabalho.

Analisando o gráfico, vê-se que apenas D3 possuía trabalhos no Grupo II, além de que os descritores D2 e D4 possuíam 01 único trabalho que estivesse voltado ao nosso foco de estudo. Ainda assim, somados os trabalhos dos descritores D1 (4), D2 (1), D3 (8) e D4 (1), somou-se o total de 14 (quatorze) trabalhos, sendo apenas um deles – no descritor D3 – uma tese.

¹⁴ Foi também consultado um quinto descritor “grandeza capacidade”, mas o resultado foi nulo.

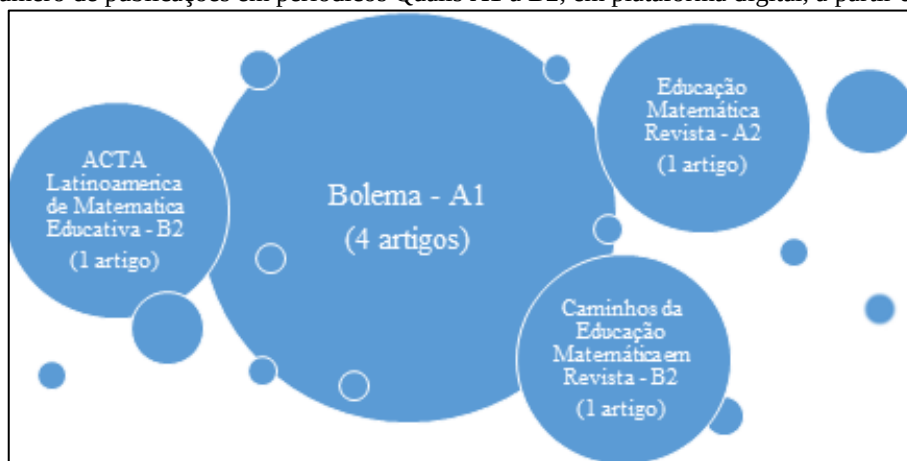
4.1.2 Segunda fase: Periódicos Qualis A1 a B2

Na segunda fase, foram observados os artigos publicados nas plataformas digitais das revistas com avaliação Qualis A1 a B2¹⁵ na área “Ensino”. Para a pesquisa foram utilizados os mesmos descritores da etapa anterior, em algumas situações também utilizadas suas traduções em língua espanhola, quando o periódico originalmente tinha essa língua por oficial. Ou seja, em algumas situações além de D1 a D4 foram utilizados “grandeza volumen” (D5), “volumen de sólido” (D6), “volumen de sólidos” (D7) e “volumen y capacidad” (D8).

Apesar de serem investigados 31 (trinta e um) periódicos apenas nas revistas Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, Educação Matemática em Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática de São Paulo, Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa do Comité Latinoamericano de Matemática Educativa e na revista Caminhos da Educação Matemática em Revista (do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Sergipe), foram encontrados artigos que tratassem o ensino de volume e capacidade, num total de 07 (sete) documentos.

A maior parte desses artigos foi encontrado em dois ou três dos descritores elencados e, considerando que não havia uma prevalência de um sobre o outro, não se tornou relevante a escolha de um apenas para representar a categoria, como fizemos com as dissertações e tese. Além disso, considerando o número pequeno de artigos, não houve separação em grupos por característica tão singular que não fosse a revista da publicação, como ocorreu com a revista Bolema que se destacou com 4 itens e os demais com um apenas.

Figura 2 – Número de publicações em periódicos Qualis A1 a B2, em plataforma digital, a partir dos descritores.



Fonte: Banco de dados do pesquisador

¹⁵ Referente ao quadriênio 2013-2016.

Com o material verificado, além de outras leituras já realizadas (como os PCN), foi estruturada uma revisão da literatura para fomentar o debate sobre as grandezas volume e capacidade que fazem parte do objeto de estudo desse trabalho nos subcapítulos que se seguem.

4.2 ALGUMAS DEFINIÇÕES DE VOLUME E CAPACIDADE

Para Lira (2007, p. 207), grandeza é um “atributo de um fenômeno, corpo ou substância que pode ser qualitativamente distinguido e quantitativamente determinado”. Na metrologia Albertazzi (2008) apresenta os três diferentes tipos de classificação que se utilizam para as grandezas: *de base* ou *fundamental* (como comprimento, massa, tempo), *suplementar* ou *derivada sem dimensão* (exclusivamente radiano e esterradiano¹⁶) e, *derivada* (como o volume).

Já Caraça (1991) nos auxilia no entendimento sobre o que é medida a partir da compreensão sobre o ato de construir uma medida de uma grandeza: o *medir*:

Medir uma grandeza é compará-la com outra da mesma espécie, tomada como unidade padrão. [...] Há, portanto, no problema da medida, três fases e três aspectos distintos:

1. Escolha de uma unidade
2. Comparação com a unidade
3. Expressão do resultado dessa comparação. (CARAÇA, 1991, p. 30).

Olhar para a metrologia e a discussão de unidades de medida, a priori, pode esclarecer os motivos para os impasses de uma conclusão mais séria sobre tal assunto. No próximo tópico delinearemos algumas informações sobre o histórico de unidades de medida no Brasil.

4.2.1 Breve histórico das unidades de medida

Na metrologia¹⁷ e nos documentos oficiais derivados do Sistema Internacional de Unidades (SI) não há uma separação entre as unidades de volume e capacidade. Rozenberg (2002) aponta a recorrência dos egípcios ao *cúbico* (cerca de 140 litros), além do “*hin*” e do “*khar*” para medição de volumes menores. Já em Portugal (2013) observa-se que com o passar do tempo, várias foram as unidades de capacidade e volume adotadas como padrão,

¹⁶ O esterradiano ou esferorradiano é uma unidade padrão do SI para quantificar ângulos sólidos, cuja área do cone formado pela área da esfera de valor unitário.

¹⁷ Metrologia é a ciência encarregada de realizar o estudo sobre grandezas e suas unidades de medida

apesar de alguns valores variarem de acordo com a região como é o caso do “*alqueire*” para medida de secos (milho, grãos, trigo, aveia, centeio, feijão, gramíneas, sementes etc.), a “*quarta*” e o “*moio*” tanto para sólidos como para líquidos, além de outros exclusivamente de líquidos como o “*almude*”, a “*canada*” e o “*quartilho*”.

Rozenberg (2002) ainda avança na discussão mostrando que mesmo a comissão francesa determinada pelo rei Luiz XVI, no fim do século XVIII, não cuidaram de estabelecer uma separação entre volume e capacidade ao determinar o “*estere*” como unidade de medida de lenhas e como um cubo de 1 metro de comprimento e o “*litro*” como a unidade de volume de líquidos como um cubo com aresta igual a um décimo de 1 metro de comprimento. Parece que a única preocupação era com o estado da matéria que estava sendo medida.

No Brasil, mesmo nas primeiras tratativas oficiais para a isso, apenas se dividiam as unidades em “capacidade para líquidos” (*canada*, *quartilho* e *almude*) e “capacidade para secos” (*alqueire*), até que o Sistema Internacional fosse promulgado.

O Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial (INMETRO) em sua publicação sobre o Sistema Internacional de Medidas (INMETRO, 2000), resgata historicamente considerações das reuniões da Conferência Geral de Pesos e Medidas (CGPM) no que se refere às considerações sobre o litro. Nele está presente a primeira declaração relativa à definição do litro que foi realizada na 3ª Conferência Geral de Pesos e Medidas (CGPM), em 1901:

1º) A unidade de volume, para determinações de alta precisão, é o volume ocupado pela massa de 1 quilograma de água pura em sua densidade máxima e sob pressão atmosférica normal; este volume é chamado de “litro”.

Essa definição perdurou por mais de meio século até que outros estudos apontaram diferenças entre unidades. Tal fato provocou, em 1960, a 11ª CGPM que veio a publicar nova Resolução, por número 13, que dispôs sobre as seguintes deliberações:

- que o decímetro cúbico e o litro não são iguais, existindo entre eles uma diferença da ordem de 18 milionésimos;
- que as determinações de grandezas físicas envolvendo medições de volume requerem uma exatidão cada vez mais apurada, o que agrava as consequências de uma possível confusão entre o decímetro cúbico e o litro;
- convida o Comitê Internacional de Pesos e Medidas a estudar este problema e apresentar suas conclusões à Décima Segunda Conferência Geral.

No ano seguinte, a Recomendação (PV, 29, 34) do Comitê Internacional de Pesos e Medidas tratava que os resultados das medições precisas de volume fossem expressos em

unidades do Sistema Internacional – neste caso o metro cúbico e seus múltiplos e submúltiplos – e não em litros.

Essa recomendação vigorou até o ano de 1964, quando na 12ª CGPM, a Resolução 6 (CR, 93) estabeleceu que:

considerando a Resolução 13 adotada pela Décima Primeira Conferência Geral, em 1960, e a Recomendação adotada pelo Comitê Internacional de Pesos e Medidas na sua sessão de 1961,
 1º) abole a definição do litro dada em 1901 pela Terceira Conferência Geral de Pesos e Medidas;
 2º) declara que a palavra *litro* pode ser utilizada como nome especial aplicado ao decímetro cúbico;
 3º) recomenda que o nome *litro* não seja utilizado para exprimir resultados de medidas de volume de alta precisão.

Como se percebe, apesar de haver uma aceitação da correlação entre o metro cúbico (m^3) e o litro (l ou L^{18}) como unidades comuns a uma mesma grandeza, o volume, há uma diferenciação por parte do SI para além de uma questão numérica observada sobre o espaço que o objeto ocupa e aquilo que ele comporta. É uma precisão que perpassa uma discussão sobre as grandezas volume e capacidade e sobre aquilo que elas representam, como é tratado a seguir.

4.2.2 Retomando a discussão sobre as grandezas

Dunbar (2019) aponta algumas das tantas dificuldades para o entendimento sobre a diferença entre volume e capacidade desde as séries iniciais. A priori volume é associado à intensidade de som produzido, por exemplo, por uma TV ou computador, ou mesmo pela numeração que os livros recebem numa coleção, o que gera uma série de desconstruções e construções para se chegar ao conceito matemático de volume, com atividades e exercícios em que se destaca a ideia daquilo que os objetos podem conter, ou seja, sua capacidade. A autora ressalta que tais abordagens tendem a bloquear o entendimento dos alunos sobre o que é o volume de um corpo qualquer. Os alunos têm a impressão que só pode se encontrar o volume em um corpo ou objeto não oco. É como se só houvesse volume se também não houvesse a ‘capacidade’, a possibilidade de colocar algo nele.

¹⁸ A escrita da unidade com letra maiúscula foi priorizada na 16ª CGPM, em 1979, ao perceberem que a escrita da letra “ele” minúscula tinha impressão muito próxima do numeral 1 o que dificultaria, por exemplo, a leitura de 1 litro = 1 l, o qual recebeu este nome em homenagem ao artesão francês Claude Emile Jean-Baptiste Litre (1716-1778) que se notabilizou pela produção de equipamentos de vidro utilizados em laboratórios de química, e por suas propostas de definição de uma unidade de medida de volume de líquidos.

Assim, o conceito de volume que por vezes soa naturalmente na prática docente quando se pensa em figuras tridimensionais, especialmente com sólidos regulares, não é tão simples quanto parece. Essa dificuldade em compreender o volume e a capacidade de um objeto é comum inclusive na prática docente e em textos (pedagógicos ou não) em vários níveis – *sites*, apostilas, livros e até publicações acadêmicas – o que se reverbera na deficiência e dificuldades para a compreensão maior sobre estas grandezas.

Em exercícios, se observa a exploração do volume como uma relação entre dimensões de uma figura regular (paralelepípedos, prismas, pirâmides ou esferas, por exemplo) ou mesmo uma imagem que pode ser decomposta em sólidos regulares, ao mesmo tempo que lhe é natural a sua relação com algumas unidades de medida como o metro cúbico, o decímetro cúbico e o litro, como se a transição entre essas medidas também fosse das mais triviais atividades.

Essa proximidade entre os conceitos chama a atenção e reverbera com certo impacto, sobre a ampliação do objeto de estudo para o trato das grandezas *volume* e *capacidade*, apontando convergências e distanciamentos entre os mesmos nos trabalhos e materiais avaliados. Por essa razão, debruça-se esta pesquisa na revisitação das definições e ideias ligadas a estas grandezas e, conseqüentemente, de suas medidas, para que se avance de forma coerente quando das análises dos materiais.

Se observarmos as ideias de Dunbar (2019) perceberemos que mais do que chegar a uma definição, a autora preocupasse com as ideias sobre volume e capacidade explorados, entre outros tantos exemplos, de forma mais intensa utilizando o pimentão. Basta esmagá-lo para que, mesmo preservando a massa, tenhamos o tanto de espaço que ele ocupa ser reduzido, ou seja, termos um novo volume, um volume específico para a ‘carne do pimentão’ que é diverso do ‘volume do pimentão’ como um todo. Ambos igualmente importantes. Se o problema envolve embalar este vegetal numa caixa, servirá de referência o primeiro valor. Caso a questão envolva a quantidade de material necessário ao preparo de uma sopa, o segundo valor passa a ser a referência mais adequada.

Há uma preocupação prioritária em haver a diferenciação entre grandezas e, com o exemplo de balões infláveis de festa, dado pela autora, vislumbramos de forma ainda mais incisiva. Enquanto há preocupação por parte de uma pessoa em encher com ar 20 balões para colocar num carro e preparar uma festa surpresa, o fabricante estará preocupado em quantos centímetros cúbicos do material emborrachado serão necessários para se fabricar os mesmos balões. Ou seja, o volume dependerá do foco.

Se o balão for inflado, haverá um limite para a quantidade de ar que pode ser colocado antes que o mesmo estoure: é a capacidade de ar que cabe no balão. É uma referência diversa

que pode ser comparada à quantidade máxima de pessoas num teatro, o máximo de água em um balde, o máximo de laranjas num caminhão, o máximo de cereal numa prateleira de supermercado, o máximo de ar dentro dos pulmões, enfim, é a capacidade de cada objeto referenciado.

Ou seja, para Dunbar (2019) volume é uma medida da quantidade de espaço que um objeto ou substância ocupa, enquanto capacidade é o volume que esse mesmo objeto comporta/suporta/cabe/aguenta com um diferencial, se o primeiro tem medidas relacionadas às dimensões e comprimentos perceptíveis em qualquer objeto tridimensional, o último tem diversas possibilidades de medição.

Lima (2011, p. 67) em um texto voltado ao estudo da geometria espacial exprime uma noção intuitiva de volume de um sólido como “a quantidade de espaço por ele ocupada”. Também diz que o principal interesse é medir a grandeza “volume” e para isso deverá compará-la com uma unidade. O resultado é um número: a medida do volume. Ademais, reforça que a ideia mais comum, para tanto, é usar o cubo unitário (volume igual a 1), que é o volume de um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento.

Outras maneiras de medição de volume também são apresentadas de forma mais intuitiva pelo autor. Por exemplo, para o cálculo do volume de um sólido de material e formato diversos, sugere a observação do “deslocamento” da altura da água num tanque em que esse objeto foi mergulhado. Ainda que tal técnica não sirva para objetos muito grandes ou muito pequenos.

Mais à frente, o autor se debruça sobre uma definição de volume de sólidos explorando a linguagem matemática com ideias que nos remetem ao cálculo de áreas utilizando limites. Ou seja, dado um sólido S , o número $\text{vol}(S)$ representa o seu volume, que indica a quantidade de vezes que um cubo unitário está contido em S . Para tanto, ele considera todos os poliedros retangulares P que estão contidos em S , bem como seus volumes $\text{vol}(P)$ que satisfazem à condição

$$\text{vol}(P) \leq \text{vol}(S) \text{ para todo poliedro retangular } P \text{ contido em } S$$

Sendo esses valores de $\text{vol}(P)$ aproximações por falta para o volume de S , a ideia é acrescentar mais blocos retangulares (com valor também já conhecido) a P , tendo o cuidado para permanecer dentro de S . Em seguida, passam a ser observados os poliedros Q que contêm o sólido S de modo que também satisfaçam à seguinte condição

$$\text{vol}(S) \leq \text{vol}(Q) \text{ para todo poliedro retangular } Q \text{ que contém } S$$

Neste caso os volumes $\text{vol}(Q)$ são aproximações por excesso para o volume de S , assim, quanto menor o bloco retangular Q , melhor será a aproximação do volume de Q para o de S .

Assim, Lima (2011) define o volume $V = \text{vol}(S)$ de um sólido S como sendo um número que goza da seguinte propriedade:

Quaisquer que sejam os poliedros retângulos P , contido em S , e Q , contendo S , tem-se

$$\text{vol}(P) \leq V \leq \text{vol}(Q)$$

Lima e Baltar Bellemain (2010) apresentam uma definição de volume e capacidade sob um novo ponto de vista, provavelmente pelo fato do texto estar direcionado aos professores e formadores da educação básica. Em seus primeiros ensaios, afirmam que o volume é um conceito que envolve um grande número de desafios didáticos, especialmente relacionados aos objetos físicos e matemáticos que são explorados neste nível de ensino.

Como os objetos do mundo físico ocupam uma parte do espaço, é possível associar a cada “pedaço do espaço” um modelo matemático, uma ‘figura geométrica’ ou um ‘sólido geométrico’ e, por sua vez, relacioná-lo a uma grandeza, neste caso o volume. Essa proximidade entre os objetos é forte, mas ao mesmo tempo delimita bem a função e a representação de cada uma delas nesta discussão, haja vista que “diferentes sólidos geométricos podem ter o mesmo volume, ou seja, podem ‘ocupar o mesmo tanto de espaço’” (LIMA E BALTAR BELLEMAIN, 2010, p. 192).

Os autores ainda adentram na definição do conceito de capacidade a partir de uma relação do objeto (matemático) que pode ser considerado “um recipiente – objeto com espaço interno disponível – [...] que nada mais é do que o volume da parte interna de tal objeto. Assim, volume e capacidade são a mesma grandeza, em contextos diferentes” (LIMA E BALTAR BELLEMAIN, 2010, p. 192). De um lado têm-se a propriedade de matérias em estado líquido ocuparem ‘o espaço disponível’, enquanto do outro há uma ‘quantidade de líquido contido’ neste recipiente e, por consequência, gera a ideia de capacidade dele. Apontam também que é necessário ter cautela nesta relação para formação do conceito matemático de capacidade, visto que não é necessário haver um líquido ou qualquer outro tipo de material para que a grandeza esteja estabelecida.

Outros autores, apesar de mais sucintos na definição de volume corroboram com determinados pontos de vista anteriores, como é o caso de Pires, Gomes e Koch (2015) que, para exemplificar um modo de observar o volume de um sólido, o relacionam com a elevação do nível de água num tanque e o definem como “a medida do espaço ocupado por um corpo tridimensional” (PIRES, GOMES e KOCH, 2015, p. 117). Definição análoga à de Grossnickle e Brueckner (1965, p. 438) e que Fernandes (2016, p. 128) também retoma, é a do volume como sendo a “quantidade de espaço que ele ocupa e tal como o quadrado é a unidade de medida de área de uma superfície, o cubo é a unidade de medida do volume de um sólido”.

Vergnaud (1983) entende ser importante garantir a conexão entre duas concepções distintas para que o aluno possa compreender o conceito de volume: se por um lado é preciso compreendê-lo como uma quantidade física unidimensional, físico-geométrica – passível de comparação, medição, estimação, transformação, soma e diferença – por outro, é necessário compreendê-lo como uma quantidade tridimensional que possui características físico-geométricas – em que é possível analisar de modo digital e dimensional no espaço.

O aspecto unidimensional é tratado mais cedo e está geralmente ligado à capacidade dos objetos. A partir dos seis, sete anos, a criança é apresentada a problemas que envolvem comparação de conteúdos de dois receptáculos para descobrir qual o maior, também a distribuição do conteúdo de um bule para servir cafés, por exemplo. Situações que não exigem o conhecimento de fórmulas.

Por outro lado, na transição para o aspecto tridimensional da grandeza é importante esclarecer aos alunos que o volume é um “produto de medições” (VERGNAUD, 1983, p. 22, tradução nossa) e que a proporcionalidade entre ele e suas quantidades são independentes uma da outra, como ocorre, por exemplo, no caso do paralelepípedo regular. Isso se estende, então, a dependência linear que há nos prismas e nas esferas. É, obviamente, essa abordagem tridimensional que permite dar um significado mais completo às fórmulas e analisar da maneira mais profunda os problemas colocados pela “aritmetização” do conceito de volume.

Morais (2015) explora a abordagem do volume como um componente do campo conceitual geométrico, a partir da Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Vergnaud. E mesmo sem apresentar uma definição, apresenta uma conceituação de capacidade como o volume interno de recipientes e, posteriormente, o volume de sólidos maciços. Esta, aliada a outros estudos, culmina, por analogia, na compreensão de volume como uma grandeza que ganha sentido a partir de três situações: medição, comparação e produção, conforme os estudos de Baltar Bellemain (1996) e Anwandter-Cuellar (2008).

Em um dos mais recentes estudos sobre o tema, Pizarro e Zamorano-Vargas (2019) levantam as dificuldades percebidas durante a implementação de uma intervenção onde trabalharam três formas distintas para o cálculo da medida do volume de um cilindro junto a alunos do oitavo ano do ensino primário chileno¹⁹, cujo currículo considera volume e capacidade como sinônimos. Essa afirmação gera um conflito com outros autores, como del Olmo Romero (1993, p. 88, tradução nossa), que preferem definir “capacidade como espaço criado (espaço vazio) e volume como espaço reclamado (espaço ocupado).

¹⁹ O 8º ano do ensino primário chileno equivalente ao 8º ano do ensino fundamental brasileiro.

4.3 VOLUME E CAPACIDADE NOS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

Nos Parâmetros do Ensino Fundamental – anos finais, há interessantes discussões sobre o ensino do *volume de sólidos geométricos regulares*, tema que, inclusive, está inserido no bloco *Grandezas e Medidas*. Nele, a exploração de medidas (comprimento, massa, capacidade, superfície, tempo, temperatura) iniciada nos dois primeiros ciclos, são ampliadas, incorporando-se o estudo das medidas dos ângulos, de volume e outras unidades de uso atual, como os da informática, por exemplo, que, inclusive, têm grande potencial para articulação com os demais blocos e para a contextualização prática.

Dessa forma, no que se refere ao ensino de Matemática no 3º ciclo de aprendizagem (6º e 7º anos do Ensino Fundamental), são postos como objetivos para o desenvolvimento da competência métrica:

- ampliar e construir noções de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns dos problemas históricos que motivaram sua construção;
- resolver problemas que envolvam diferentes grandezas, selecionando unidades de medida e instrumentos adequados à precisão requerida. (BRASIL, 1998.a, p. 65).

Quando da discussão dos conceitos e procedimentos, vê-se para o bloco *Grandezas e Medidas*, entre outros pontos:

- Reconhecimento de grandezas como comprimento, massa, capacidade, superfície, volume, ângulo, tempo, temperatura, velocidade e identificação de unidades adequadas (padronizadas ou não) para medi-las, fazendo uso de terminologia própria.
- Indicar o volume de um recipiente em forma de paralelepípedo retângulo pela contagem de cubos utilizados para preencher seu interior.
- Estabelecimento de conversões entre algumas unidades de medida mais usuais (para comprimento, massa, capacidade, tempo) em resolução de situações-problema (BRASIL, 1998.a, pp. 73-74).

Já para o 4º ciclo de aprendizagem (8º e 9º anos do Ensino Fundamental), são expressos como objetivos para o desenvolvimento da competência métrica:

- ampliar e construir noções de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, utilizando dígitos significativos para representar as

- medidas, efetuar cálculos e aproximar resultados de acordo com o grau de precisão desejável;
- obter e utilizar fórmulas para cálculo da área de superfícies planas e para cálculo de volumes de sólidos geométricos (prismas retos e composições desses prismas. (BRASIL, 1998.a, p. 82).

A discussão dos conceitos e procedimentos concernentes ao bloco *Grandezas e Medidas* para este ciclo detém, entre outros: o “cálculo do volume²⁰ de alguns prismas retos e composições destes” (BRASIL, 1998.a, pp. 89-90).

Deve-se, ainda, observar considerações como as de Pozebon e Lopes (2013) ao resgatar o surgimento histórico e a contextualização curricular sobre o ensino de Grandezas e Medidas, as quais expressam a limitação dos documentos oficiais, como os PCN, considerando que ainda há pouca exploração destes conteúdos. Há, portanto, necessidade que o professor reflita e vá além destes para que seus alunos também tenham a compreensão da criação humana do conhecimento matemático.

Essas informações servirão em nosso estudo para que possamos relacionar os blocos de atividade presentes nos livros didáticos com as propostas dos PCN e também observar o atendimento das orientações nos documentos. Uma dessas orientações, por exemplo é a diluição dos conteúdos relacionados a Geometria e a Grandezas e Medidas ao longo do ano letivo o que presume, pelo menos, uma reestruturação programática, o que, esperamos, não se resuma apenas a isso.

4.4 VOLUME E CAPACIDADE NOS LIVROS DIDÁTICOS

Carvalho e Lima (2010, p. 17) afirmam que o ensino de *grandezas e medidas*, ganhou mais relevância em virtude dos seus frequentes usos sociais.

Em 2011, Moraes e Baltar Bellemain realizaram uma análise da abordagem de volume em livros didáticos para os anos finais do Ensino Fundamental, mapeando e avaliando as situações que trabalhavam este conteúdo do ponto de vista do campo conceitual das grandezas geométricas e suas medidas (distinção e articulação entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas). Naquela época essa pesquisa constatou que o assunto seria pouco explorado nessas séries, sobressaindo o aspecto unidimensional de volume por meio da contagem de cubinhos.

²⁰ Mais uma vez transcrevemos o termo do texto, pontuando que não há exatidão para a expressão utilizada.

A passagem para o entendimento do volume como uma grandeza tridimensional não possuía conexão clara com os procedimentos previamente discutidos pela maioria das coleções por eles analisadas (MORAIS; BELLEMAIN, 2011).

Compreender, portanto, o conceito de volume é importante para a análise do livro didático que pode apresentar erros que comprometam a análise correta dos materiais que dispomos. A apresentação deste conteúdo no LD pode interferir, por exemplo, na classificação das tarefas presentes no(s) livro(s) escolhido(s). Por isso, procuraremos destrinchar, especialmente nas coleções mais recentes, situações em que as atividades não estejam exclusivamente alocadas nos capítulos voltados à abordagem da geometria ou de grandezas e medidas.

Como tratam Pizarro e Zamorano-Vargas (2019), é necessário ter conhecimento sobre o Ensino da Matemática, cujo domínio inclui o conhecimento dos recursos, materiais, formas de apresentar o conteúdo, o uso de exemplos adequados tanto ao conteúdo, como ao contexto e intenção.

Como se pode notar, após a leitura de tantos documentos, ainda não há uma convergência para uma classificação mais precisa sobre a semelhança ou real diferença entre as grandezas volume e capacidade.

É mister, no entanto, desenvolver uma compreensão sobre diferentes referências para o a grandeza volume e, subsequentemente, para a grandeza capacidade, de forma que haja nesta pesquisa, uma apropriação mais detalhada e precisa para suas abordagens.

A partir de todos os estudos apresentados, definimos:

- a) **capacidade** como o espaço (volume) do que (pode) estar contido num corpo ou objeto, caso este seja ou fosse oco (não-macizo). Uma grandeza unidimensional, cuja unidade de medida padrão é o litro (l ou L), aceita como uma unidade não-padrão no SI.
- b) **volume** como o espaço (volume) do tanto que se ocupa no espaço, independente se é ou não macizo. Neste caso, uma grandeza tridimensional com medida proporcional a cada uma das medidas de comprimentos que a constrói/formaliza, cuja unidade de medida padrão é o metro cúbico (m^3), aceita como a unidade padrão derivada do SI.

Cabe ainda salientar que mesmo havendo a diferença entre o metro cúbico e o litro apontada pela CGPM, como tratado anteriormente, para os fins da educação básica e até mesmo o próprio entendimento dado no SI as unidades de medida serão consideradas equivalentes nesta pesquisa.

5 APORTE TEÓRICO-METODOLÓGICO

Chevallard (2018, p. 35) define didática da matemática como “a ciência das condições e restrições da difusão social das praxeologias matemáticas”. Nesse campo de estudo localiza-se a Teoria Antropológica do Didático, elaborada pelo mesmo autor. Barbosa (2011) reforça que a TAD permite analisar o homem perante o saber matemático e, especificamente, sobre as situações matemáticas, ou seja, dentro de uma “antropologia da matemática” como um subcampo da “antropologia didática da matemática”, a qual situa a atividade matemática dentro do conjunto de atividades humanas e das instituições sociais, como aponta Almouloud (2015).

Uma teoria densa, com muitos elementos e referências que permite observar relações entre instituições, pessoas, objetos, saberes. Entre tantas possibilidades, por exemplo, tem-se a de analisar o saber matemático posto num livro didático que atende as demandas da sociedade, com as legislações próprias de cada país/estado/município, os projetos educativos regionais e individuais de cada escola, e até mesmo a prática do professor e cada sala de aula.

Em contrapartida, é possível fazer a análise do material a partir de parâmetros concisos e objetivos. Assim, cada uma das atividades é observada como uma tarefa que está construída – de forma proposital – por um escopo prático (*práxis*) e outro teórico (*logos*) que corroboram com a formação de um conceito didático baseado na ação humana no processo de ensino, relacionando, para tanto, a influência de diversos fatores que são destrinchados em sua ‘praxeologia’, e que significam e ressignificam instituições, teorias e práticas.

Quiçá, por esta razão, seus estudos foram sendo, ao longo de três décadas, mais explorados e ainda mais aperfeiçoados, passando a um contexto que possibilitou sua aplicação em análises nas mais variadas disciplinas e, especialmente, nos diversos campos da Matemática.

Este capítulo, portanto, foi organizado em 04 (quatro) subcapítulos onde se pretende, a priori, descrever os principais elementos da TAD que norteiam e suportam essa pesquisa. Essa delimitação é imprescindível, haja visto a densidade de materiais, ferramentas e análises possíveis de se realizar utilizando, por exemplo, a praxeologia que está presente na referida teoria.

Em seguida procurou-se situar o trabalho de acordo com a metodologia adotada para, então, elucidar como se deu o processo de escolha das coleções de livro utilizadas e, por fim, as etapas de organização, interpretação e análise dos materiais escolhidos.

5.1 A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Yves Chevallard desenvolveu a sistematização da Transposição Didática (TD) e a Teoria Antropológica do Didático (TAD) dentro do contexto de estudos e investigações da didática de influência francesa. Ambas estão inseridas no campo da Didática da Matemática, que “é a arte de conceber e conduzir condições que podem determinar a aprendizagem de um conhecimento matemático por parte de um sujeito” (D’AMORE, 2007, p. 183).

A divisão em subcapítulos aqui utilizada não tenta fragmentar a totalidade da teoria, mas visa explorar aspectos de algumas partes que se relacionam entre si.

5.1.1 A noção de transposição didática

A obra de Chevallard é inovadora, sendo um ponto de referência para a realização de investigações dessa natureza, pois engloba desde o saber científico até o saber efetivamente ensinado, levando em consideração a produção de livros didáticos, entre outros.

A Teoria da Transposição Didática (TD) foi elaborada por Chevallard em 1985 em seu livro *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*, na qual aborda como se dá o tratamento do saber desde sua concepção científica até sua ‘tradução’ no ambiente escolar.

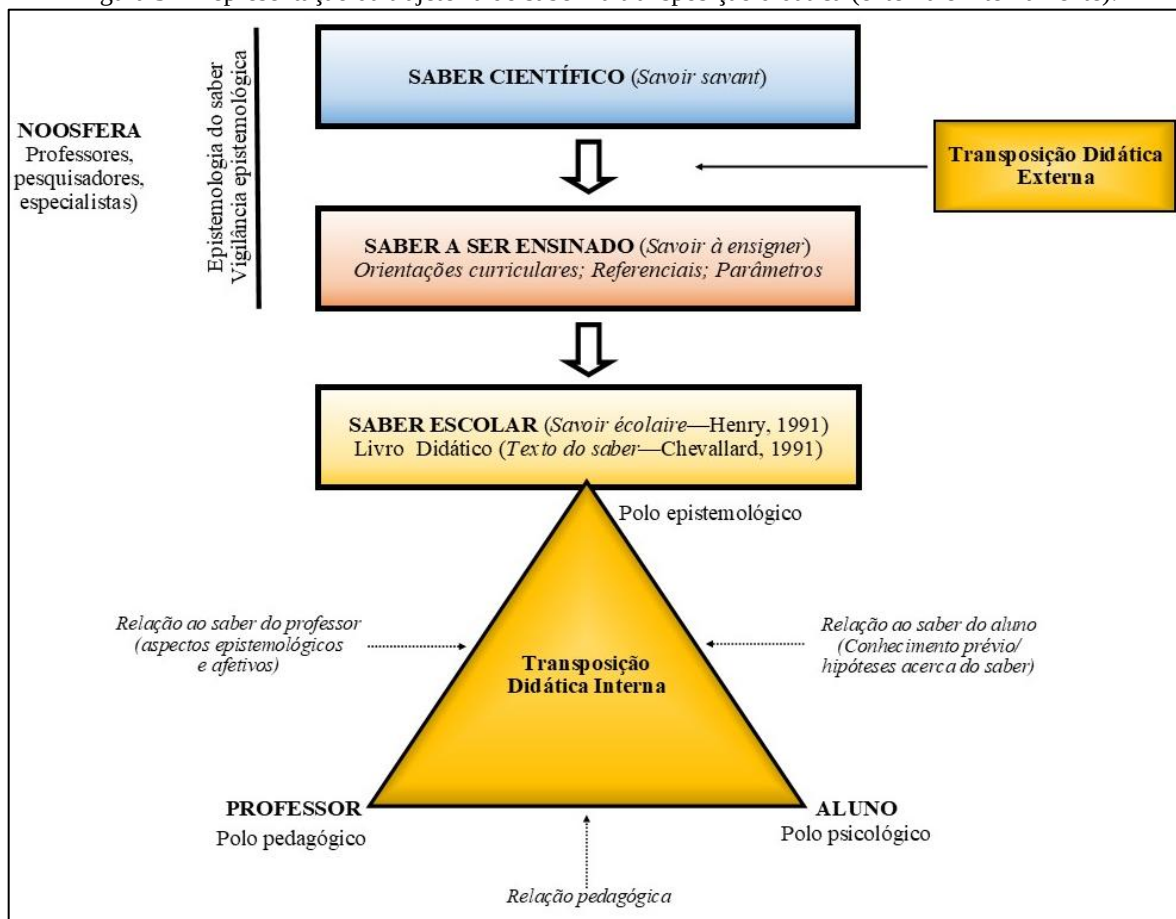
Na TD, quando um determinado conteúdo é classificado como um saber a ensinar, o mesmo passa por transformações adaptativas e deformações, para então ser apresentado como objeto de ensino, ou seja, é tornado um saber escolar, no sentido de Michel Henry²¹.

Observa-se na obra de Chevallard a diferenciação entre algumas apropriações do saber em diversos níveis. A priori ele ressalta o saber desenvolvido e sistematizado dentro da comunidade científica (*savoir savant* ou saber sábio) em que ocorre a descoberta científica, a produção e revisão de artigos científicos e posterior publicação do saber científico validado. Também se percebe a definição do saber transposto e eleito como saber a ensinar (ou *savoir à enseigner*), cuja transposição é realizada por professores, especialistas, pesquisadores, técnicos, entre outros, que estão ligados às universidades, redes de ensino, órgãos do governo, por exemplo, e que juntos formam a **noosfera** (conjunto de seres ‘pensantes’, responsável pela efetuação da transposição didática aqui denominada externa). Há, ainda, a existência sobre um terceiro saber (*savoir enseigné* ou saber ensinado), onde existe a efetivação do saber ensinado

²¹ Barbosa (2011) registra que o saber escolar (ou *savoir scolaire*) é aquele contido numa etapa intermediária entre o saber científico e aquele que deverá ser ensinado na escola. É um saber produzido quando da elaboração de programas de ensino que devem estar acessíveis ao professor.

dentro da sala de aula e que pode ser descrito através de um triângulo ilustrativo contendo três polos, a saber o polo epistemológico, o psicológico e o pedagógico, que leva em conta as relações ao saber do professor, ao saber do aluno e a chamada relação pedagógica (transposição didática aqui nomeada interna).

Figura 3 – Representação da trajetória do saber na transposição didática (externa e internamente).



Fonte: Barbosa (2011, p. 60) a partir dos estudos de Brito Menezes (2006, pp. 88 e 231)

Um dos grandes objetivos da TD é a excelência no ato da vigilância epistemológica, ou seja, nas intervenções que devem ser realizadas para que o saber ensinado não se torne tão diferente, após as transposições, que não tenha mais aquilo que foi e é fundamental no desenvolvimento do saber científico original, o que produziria, conforme Barbosa (2011), certos obstáculos à aprendizagem.

5.1.2 A percepção antropológica no trato do saber e seus conceitos fundamentais

Com a evolução da discussão sobre tal teoria e a percepção de outros aspectos que tornam a TD incompleta, Chevallard evolui sua discussão e apresenta à comunidade outros

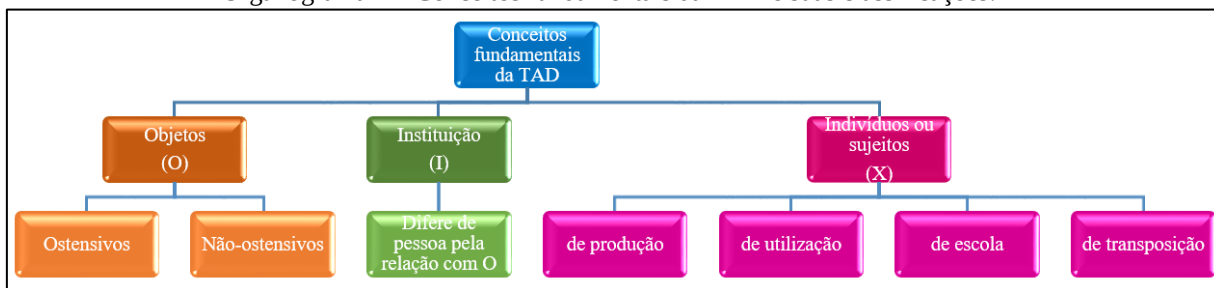
elementos teóricos que acrescem à mesma a ideia de *antropologia do conhecimento* ou *antropologia cognitiva*. Assim, a noção de instituição didática é conduzida a uma diferenciação: a *didática do conhecimento*, ou ainda *didática cognitiva*.

Sobre esta didática é lançada uma contribuição por Chevallard sobre a TD, de cunho antropológico, observando a ação do homem nesse processo de ensino da matemática, justamente o momento em que se organizam os elementos que dão forma à Teoria Antropológica do Didático, como descreve Bessa de Menezes (2004, p. 21):

Podemos dizer que a *Teoria Antropológica do Didático* (TAD) permite explicar o funcionamento das transformações realizadas nos saberes nas instituições de ensino. Nesse sentido, a teoria antropológica do didático seria uma ampliação do campo de análise decorrente da transposição didática, no momento em que permite analisar as transformações que são feitas nos objetos de saberes a ensinar no interior da sala de aula, ou de outra determinada instituição.

Visto isso, é necessário que haja o entendimento sobre três definições fundamentais no âmbito da TAD como apontam Bessa de Menezes (2004), Câmara dos Santos e Bessa de Menezes (2015) e Moura et al (2019): objeto (O), indivíduo ou sujeito (X) e instituição (I).

Organograma 1 – Conceitos fundamentais da TAD e suas classificações.



Fonte: Banco de dados da pesquisa

Objeto (O) é toda entidade material ou imaterial que existe para, pelo menos um indivíduo, ou seja, tudo é objeto: as pessoas, o livro, o professor, o aluno etc. Inclusive a pessoa e a instituição são objetos. Sobre isso, Chevallard (1999) apontou que:

Na prática, as primeiras análises propostas em *La transposition didactique* limitavam-se a distinguir objetos ‘matemáticos’, ‘paramatemáticos’ e ‘protomatemáticos’. O alargamento do quadro, levado a cabo por necessidades de análise, conduziu-me a propor uma teorização em que qualquer ‘objeto’ pudesse aparecer: a função logarítmica é, evidentemente, um objeto (‘matemático’), mas existe igualmente o objeto ‘escola’, o objeto ‘professor’, o objeto ‘aprender’, o objeto ‘saber’, o objeto ‘dor de dentes’, o objeto ‘fazer xixi’, etc. (CHEVALLARD, 1999, p. 127)

Estes ainda são classificados de acordo com sua natureza em dois tipos: **ostensivos** (do latim: *ostendere*, “mostrar”, apresentar com insistência”) quando são materiais ou possuem certa materialidade, como as escrituras, os grafismos, os sons, os gestos; e, **não-ostensivos**, quando não podem ser percebidos por si mesmos, como é o caso das ideias, dos conceitos, das crenças etc. Em suma, e através da manipulação dos primeiros que se pode “invocar” ou “evocar” os últimos.

Na TAD, **indivíduo** ou **sujeito (X)** é aquele que se relaciona com um objeto e é capaz de reconhecê-lo como tal, ou seja, tem com o ele (pelo menos) uma *relação pessoal*, representada por R (X, O). O conjunto dessas relações que o indivíduo tem com um objeto é denominado **pessoa**. Obviamente, quanto maior o contato entre o indivíduo e o objeto, mais relações são criadas e tantas outras são alteradas. Neste caso, a principal diferença entre estes conceitos está nessas relações: se por um lado o *indivíduo é invariável*, por outro *a pessoa sofre mudanças* com as relações.

Bem entendido, no curso do tempo, o sistema das relações pessoais de X (indivíduo) evolui: objetos que não existem para ele passam a existir; outros deixam de existir; para outros, enfim, a relação pessoal e X muda. Nesta evolução, o invariante é o indivíduo; o que muda é a pessoa (CHEVALLARD, 2003, p. 82).

Barbosa (2017) traduz a definição de Chevallard (2003) sobre **Instituição (I)** como “um dispositivo social total que, mesmo tendo uma extensão muito reduzida no espaço social, permite e impõe a seus sujeitos maneiras próprias de fazer e de pensar”, [...] “portanto, todo saber é saber de uma instituição” (BARBOSA, 2017, p. 43). Alinhamo-nos, então, a Bittar (2017), que compreende o livro didático como uma instituição para alunos e professores que o utilizam, visto que ele é uma das principais referências do *saber a ser ensinado* dentro da instituição sala de aula.

[...] toda instituição I está acompanhada de pelo menos um conjunto de objetos (O), denominado de conjunto dos objetos institucionais (para I), que é o conjunto dos objetos O que I reconhece, quer dizer, para os quais existe uma relação institucional $R_I(O)$ ” (CHEVALLARD, 1992, p. 144).

Esse reconhecimento dos saberes dentro da instituição I gera, segundo Chevallard (2003), uma subordinação do indivíduo X a esta mesma instituição que, por vezes, tendem a

lhe impor relações que, em curto prazo, entram em conflito com as suas próprias relações pessoais:

A pessoa emerge do abismo provocado por suas submissões passadas e presentes, sem nunca se reduzir a qualquer delas, mesmo se alguma delas aparece de forma dominante em um determinado tipo de situação. [...] outras subjugações, exógenas, anteriores, talvez serão vividas por ele como mais vitais, ou simplesmente com melhores garantias da integridade e do desenvolvimento de sua pessoa, enquanto as subjugações impostas pela formação escolar serão sentidas (pontual ou globalmente) como uma ameaça à sua integridade ,pessoa – coisa particularmente sensível em meio popular (CHEVALLARD, 2003, p. 89)

Barbosa (2011) classifica em quatro diferentes tipos as Instituições: (1) *de produção* (academias), (2) *de utilização*, (3) *de ensino* (escolas) e (4) *as transpositivas* (noosfera). Nesta pesquisa, três instituições são utilizadas como referências mais fortes para a discussão: os PCN e o PNLD como *instituições transpositivas*, que carregam em si as expectativas da sociedade que espera a formação de um cidadão de fato; e, por outro lado, o livro didático, como uma *instituição de utilização*, o qual é elaborado a partir de uma transposição do saber científico para um saber a ensinar e que leva em consideração normativas sociais, científicas e é uma referência para a organização didática pela escola e pelo professor.

Na TAD, os objetos matemáticos não existem em si mesmos, mas são elementos que emergem dos sistemas de práticas realizadas dentro de instituições. A teoria foi proposta por Chevallard a partir do estudo do homem diante do saber matemático, colocando a atividade e estudo da matemática dentro do conjunto de atividades humanas realizadas no interior de instituições sociais.

Como descrito por Almouloud (2007), essa teoria é uma importante contribuição para a didática da matemática, pois insere a atividade matemática e, conseqüentemente, seu estudo, dentro do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais, ou seja, no campo da antropologia centralizando, ainda, o estudo das organizações praxeológicas didáticas pensadas para o ensino e a aprendizagem de organizações matemáticas.

Este autor ainda ressalta que Chevallard desenvolveu esta teoria dentro de uma antropologia dos saberes, aqui a “antropologia didática da matemática” como um subcampo da “antropologia da matemática”, ou seja, como o estudo do homem diante das situações matemáticas, devidamente organizada como se percebe na fala de Almouloud (2007, pp. 113-114):

Para Chevallard, o saber matemático organiza uma forma particular de conhecimento, produto da ação humana em uma instituição caracterizada por qualquer coisa que se produza, se utiliza e se ensina, além de poder eventualmente transpor as instituições. Assim, o autor introduz a noção de hábitat de um objeto matemático como sendo o tipo de instituição onde se encontra o saber relacionado ao objeto de estudo, que por sua vez determinará a função desse saber, ou seja, determinará seu nicho. Lembremos que, em ecologia, o termo hábitat designa o lugar onde vive uma espécie, enquanto nicho ecológico é o papel que o organismo desempenha no ecossistema. O conhecimento de nicho ecológico permite responder às seguintes questões: como, onde e à custa de quem a espécie se alimenta, por quem é comida, como e onde descansa e se reproduz.

Inclusive, sobre essa *problemática ecológica* tem-se a ampliação do campo de análise, como nos sugere Almouloud (2007), visto que permite a abordagem dos problemas que se criam entre os diferentes objetos do saber a ensinar, onde os mesmos se inter-relacionam hierarquicamente, permitindo identificar e analisar as estruturas ecológicas dos objetos. Isso provoca em Araújo (2009) o entendimento de que a TAD “pode ser considerada como um prolongamento da teoria da transposição didática, a partir da problemática ecológica, para levar em consideração as exigências advindas das inter-relações entre os objetos de ensino” (ARAÚJO, 2009, p. 32).

Chevallard (2018) afirma que o estudo dessa *ecologia* didática visa a exploração das condições de possibilidade ou impossibilidade dos fatos econômicos observáveis ou imagináveis, enquanto estes são estudados pela *economia* didática que tem como objetivo explicar as decisões, gestos, julgamentos das instâncias pessoais ou institucionais envolvidas ou capaz de intervir nas possíveis situações didáticas.

Aqui será investigada a ecologia do saber volume e capacidade, delimitado ao nicho ensino fundamental – anos finais, regular, a partir da análise de livros didáticos de matemática indicados para essa modalidade e séries.

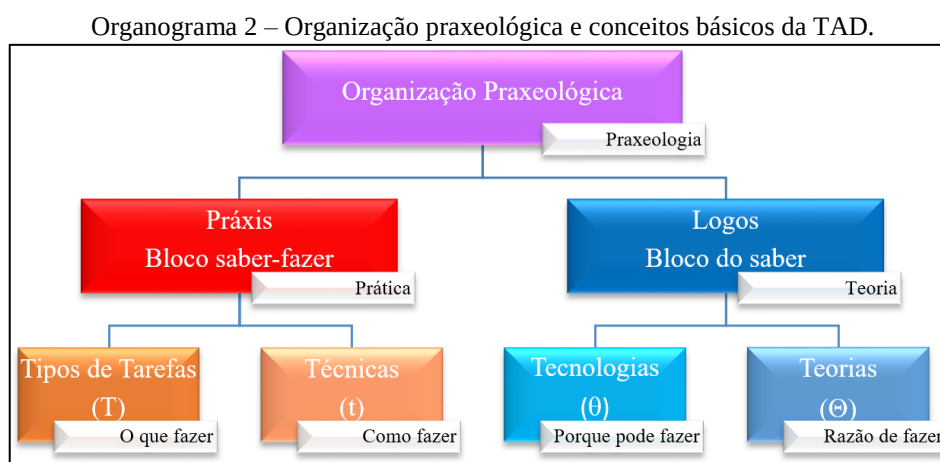
5.1.3 A organização praxeológica e seus elementos básicos

Aprender para Chevallard é a modificação que ocorre na relação entre o indivíduo e o objeto ($R(X, O)$) quando ele está sob a nova ação de relação sobre o objeto ($R(O)$), ou seja, define-se que a aprendizagem do indivíduo está ligada à compreensão das aprendizagens institucionais. Desse modo, na TAD fica claro que o saber matemático é resultado da ação humana institucional, pois é dentro de instituições que os saberes são produzidos, utilizados, ensinados e transpostos.

Esses objetos citados anteriormente se organizam, conforme Rosa dos Santos e Câmara dos Santos (2017), a partir de diversas ideias que Chevallard desenvolve sobre a TAD. Uma dessas, por exemplo, propõe que a teoria se baseia em quatro conceitos divididos em duas unidades de operacionalização:

[...] parte do princípio de que todo trabalho matemático aparece como resposta a um problema ou a um conjunto de problemas. As respostas desses problemas se materializam em um conjunto organizado de objetos ligados entre si por várias relações mútuas, ou seja, em uma organização matemática. Esta organização é o resultado final de uma atividade matemática que tem dois aspectos inseparáveis: a prática matemática, ou “práxis”, que consiste de tarefas (T) e técnicas (t), e é designada como o bloco do saber-fazer, e o discurso fundamentado, ou “logos” sobre essa prática que consiste em tecnologias (θ) e teorias (Θ), que correspondem ao bloco do saber (CHEVALLARD; BOSCH; GÁSCON, 2001, p. 275). Contudo não existe práxis sem logos, como também não há logos sem práxis. Dessa forma, ao unir as duas vertentes da atividade matemática obtém-se a noção de praxeologia (ROSA DOS SANTOS e CÂMARA DOS SANTOS, 2017, p. 58)

A formalização desses elementos e blocos forma a chamada **Praxeologia** ou **Organização Praxeológica**, em que as relações entre os saberes e seus elementos são observadas sob duas ações: uma de ordem prática, o *bloco saber-fazer* ou práxis, e outra teórica, o bloco do saber ou *logos*, cada um deles com dois elementos como se pode observar no esquema abaixo:



Fonte: adaptado de Chevallard, Bosch e Gascón (2001).

Romo-Vásquez (2014) definem de forma precisa e sucinta os quatro elementos, elencando ações, exemplos e observações referentes a cada um deles. A partir da leitura fora elaborado o quadro abaixo:

Quadro 1 – Organização praxeológica e conceitos básicos da TAD.

ELEMENTO	SIGLA	AÇÃO	EXEMPLO	OBSERVAÇÃO
Tipos de Tarefas	T	É o que se faz.	Calcular a medida do volume de um bloco retangular.	“Calcular” é o verbo de ação que pode caracterizar o “gênero de tarefas” correlatas.
Técnicas	t	É a maneira como se faz.	Multiplicar as medidas das três arestas com vértice em comum.	A técnica pode não servir para todas as tarefas correlatas a um mesmo tipo de tarefa.
Tecnologias	θ	É um discurso que produz, justifica e explica a técnica t.	O sólido pode ser “decomposto em várias ‘lâminas’ com medida de área igual à da face considerada base e que é multiplicada quantas vezes forem necessárias até atingir a altura máxima do sólido.	Em matemática, geralmente a justificação da técnica é realizada por meio de demonstração.
Teorias	Θ	É o que produz, justifica e explica a tecnologia.	Princípio de Cavalieri	Chevallard adverte que essa capacidade de justificar e de explicar da teoria é quase sempre obscurecida pela forma abstrata como os enunciados teóricos são apresentados.

Fonte: adaptação de Romo-Vásquez (2014)

Em linhas gerais, dizemos que para se efetuar uma determinada tarefa pertencente a um conjunto de tarefas do mesmo tipo, é necessário que haja o uso de uma determinada técnica (τ). Esta, por sua vez, está sustentada numa tecnologia (θ) que é embasada numa teoria (Θ).

A técnica é uma maneira de fazer uma determinada tarefa, ou seja, é o caminho de como realizá-la. Uma organização relativa a um tipo de tarefa precisa, de início, de uma técnica ou de várias técnicas reconhecidas na instituição que a problematizou. Segundo Almouloud (2007, p. 115) “para produzir técnicas é necessário que se tenha efetivamente problemática que estimula o desenvolvimento de pelo menos uma técnica para responder às questões colocadas pela tarefa”. (ROSA DOS SANTOS e CÂMARA DOS SANTOS, 2017, p. 59)

O par tarefa-técnica [t , τ] é entendido como saber-fazer, ou seja, está ligado à prática; o par tecnológico-teórico [θ , Θ] é entendido como saber, ou seja, está ligado à razão. Em sentido mais estrito, [t , τ] é justificada por θ , que por sua vez é baseada em Θ .

Em relação à tecnologia, ela tem o papel de justificar a técnica, ou seja, ela surge para esclarecê-la, explicar a legitimidade de seu fundamento. Para Chevallard, Bosch, Gáscon (2001, p. 275) “a tecnologia de uma técnica referente a certos tipos de questões e tarefas problemáticas é, em geral, um discurso matemático que, como tal, requer uma interpretação e uma justificativa”. Dessa forma, para uma técnica ser usada de maneira normatizada, deve aparecer como algo ao mesmo tempo correto, compreensível e justificado. Além disso, a tecnologia tem por função trazer dados para alterar a técnica e ampliar seu alcance. (ROSA DOS SANTOS e CÂMARA DOS SANTOS, p. 59)

As noções de praxeologia, devidamente organizadas, permitem o estudo e a investigação das práticas dos professores em sala de aula, levando-se em consideração todos os elementos que perpassam o sistema didático, ou seja, os próprios alunos, os saberes, os livros didáticos, entre outros.

5.1.4 Organização praxeológica pontual, local e regional

Cada um dos quatro elementos pode ser preponderante para uma dada organização praxeológica (OP) e, nisso, a praxeologia resultante corresponderá um determinado ‘nível’ de alcance e discussão.

Por exemplo, quando as técnicas, tecnologias e teorias estão centradas no atendimento de um determinado *tipo de tarefa* (T), a TAD permite que se diga haver uma **organização praxeológica pontual (OP)** ou **praxeologia pontual**. Isso difere do caso em que a centralidade da discussão está numa tecnologia que abrange várias técnicas de um mesmo tema, tem-se então a **organização praxeológica local (OL)** ou **praxeologia local**. E, por fim, quando a discussão é voltada para uma teoria que abrange diversas tecnologias, técnicas e tipos de tarefas, observa-se a **organização praxeológica regional (OR)** ou **praxeologia regional**.

Nesta pesquisa, especialmente por ser voltada ao Ensino Fundamental, espera-se um maior desenvolvimento sobre as organizações pontual e local.

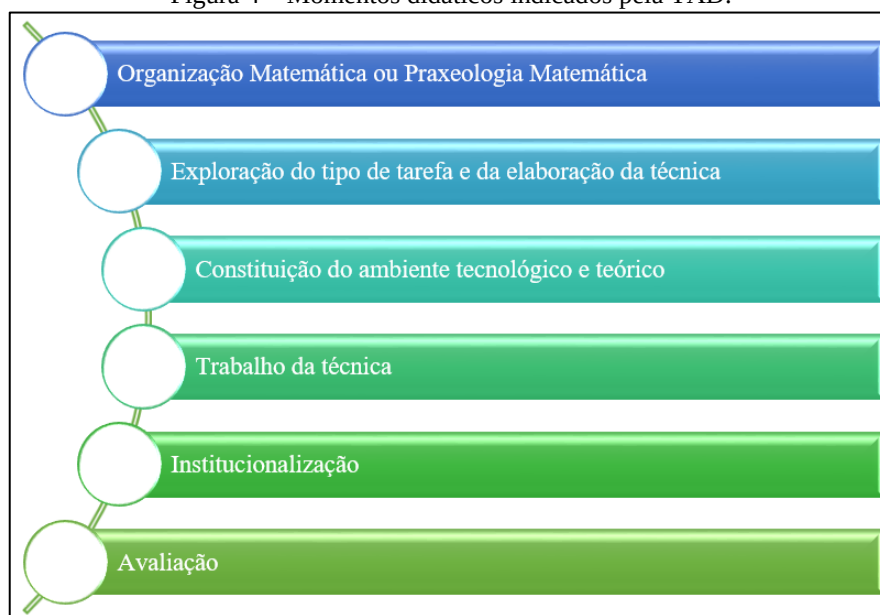
5.1.5 Os momentos didáticos

A ideia de momento didático é instituída por Chevallard e remete às ocasiões vivenciadas para que o aluno possa ter contato com o conhecimento para que ele também possa participar dele. Rosa dos Santos e Câmara dos Santos (2017) ressaltam como o ensino pode ser organizado em seis momentos, não sequenciados e que, justamente por essa razão, não necessariamente únicas.

Ou seja, além de não aparecer numa ordem pré-fixada, os momentos podem ser percebidos mais de uma vez numa mesma sequência didática, ou até mesmo não serem reconhecidas ou identificadas.

Com base nas informações de Rosa dos Santos e Câmara dos Santos (2017), organizou-se um organograma de ações possíveis que estão ligadas a um mesmo eixo:

Figura 4 – Momentos didáticos indicados pela TAD.



Fonte: adaptado de Rosa dos Santos e Câmara dos Santos (2017)

1) O primeiro deles, a **Organização matemática (OM)** ou **Praxeologia matemática** é definido por Câmara dos Santos e Bessa de Menezes (2015, p. 661) como “toda realidade matemática que está envolvida na resolução de um tipo de tarefa T que exigem técnicas t , amparadas por um conjunto teórico-tecnológico $[\theta, \Theta]$ ”. É um momento crucial na praxeologia, visto que nele são realizadas as análises e escolhas por parte dos professores (em geral, baseados nos documentos oficiais de programas, currículos, diretrizes, manuais e livros didáticos, entre outros), que elegem os saberes matemáticos a serem ensinados. Aqui ele define quais serão as técnicas, tecnologias e teorias utilizadas em sua prática.

Obviamente haverá uma referência preponderante – apesar de não única – para essa escolha: o livro didático, haja visto que é uma instituição acessível e que serve de referência básica para alunos, pais, coordenadores e demais responsáveis da escola. Para eles, algum tipo de tarefa ou técnica ou tecnologia ‘extra’ pode ser apresentada, mas de forma facultativa. Há um ‘seguir à risca’ o que esse material dispõe que valida a competência do docente para com o seu labor.

Quando há a compreensão dessa organização matemática o professor realiza suas ‘escolhas didáticas’, ou seja, ele empreende uma transposição da realidade matemática para a realidade didática, e assim constrói uma nova organização a partir da OM já verificada, determinando, então, uma **Organização Didática (OD)** que, para Chevallard (1999, p. 238) pode-se entender, a priori, como “o conjunto dos tipos de tarefas, de técnicas, de tecnologias

etc., mobilizadas para o estudo concreto em uma instituição concreta”, além disso é possível relacioná-la com outras instituições que serão determinantes para a eleição dele.

2) O *segundo* deles, é a **exploração do tipo de tarefa**²² e da **elaboração de uma técnica** que é considerada por Chevallard (1999) como motor da atividade matemática, uma vez que o estudo da resolução de um tipo de tarefa requer, mesmo de maneira elementar, a constituição de uma técnica.

3) O *terceiro* é a **constituição do ambiente tecnológico e teórico** relativo às técnicas exploradas anteriormente. Nesse momento serão apresentadas as justificativas das técnicas, que são as tecnologias.

Rosa dos Santos e Câmara dos Santos (2017) alertam que este pode ser o primeiro momento a depender da concepção do docente sobre a organização matemática, visto que é uma prática comum os professores apresentarem inicialmente as definições, as demonstrações, as fórmulas e os exemplos, ou seja, a exposição da teoria e da tecnologia para, em seguida, passarem à aplicação de exercícios.

4) O *quarto momento* é o chamado **trabalho da técnica**, cujo objetivo é torna-la mais eficaz e mais confiável. Além disso, esse momento facilita testar a abrangência da técnica na resolução de outros tipos de tarefas propostos.

5) O *penúltimo momento* recebe o nome de **institucionalização**, que tem como objetivo oficializar o que efetivamente fará parte da organização matemática em jogo.

6) Por fim, a **avaliação** da organização matemática que, por sua vez, se articula não só com institucionalização, mas também com os outros momentos de estudo. Nesse instante é possível analisar se houve um bom emprego dos tipos de tarefas, das técnicas e dos elementos tecnológico-teóricos. Inclusive Barbosa (2017) reforça a importância da avaliação do processo avaliativo na TAD pois é o momento no qual o professor toma por objeto de estudo as soluções produzidas por seus alunos, suas maneiras de fazer, suas soluções.

5.1.6 Os níveis de codeterminação

Chevallard percebeu que havia dois grandes condicionantes para que o desenvolvimento escolar do saber fosse pleno: o desenvolvimento das organizações praxeológicas (OP) ensinadas e o das organizações matemáticas (OM) que difundem a praxeologia para a vida. No entanto, não eram apenas as ferramentas, a peça chave para esse desenvolvimento. Há várias

²² Não se utiliza o conceito de tipo de tarefa matemática explorada por Ponte, Brocado & Almeida (2016) como um exercício ou problema a partir dos estudos de Pólya.

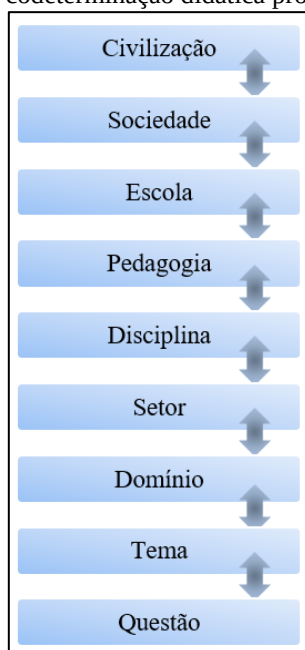
organizações “transmissoras” do saber, em vários níveis, que decidem aquilo que será transmitido. Em outros termos, a organização didática (OD).

Segue o autor que há um “isomorfismo²³” didático-matemático entre os vários “níveis” de alcance dessas OD e OM, de modo que o mesmo o estruturou através de uma escala denominada **níveis de codeterminação**.

Em 2001, Chevallard apresentou uma proposta da escala com 08 (oito) níveis de codeterminação que iam de *sociedade* a *questão*, no qual cada nível está associado a uma Organização Matemática (OM) que introduzem, uma a uma, novas restrições particulares sobre o que será didaticamente possível em sala de aula.

Em 2002 ele avança as discussões sobre o tema e detalha os níveis, explicando como se inter-relacionam, como sintetizado na figura abaixo:

Figura 5 – Níveis de codeterminação didática proposto por Chevallard.



Fonte: Chevallard (2002)

Apesar do relacionamento entre os níveis de codeterminação, assim como apontado por Chevallard (2002) há uma ‘imposição’ realizada pelos níveis mais altos que determinam a forma como cada assunto será abordado.

Carvalho (2012) avança na discussão sobre os níveis de codeterminação e reorganiza algumas ideias proposta por Chevallard para, então, construir uma correlação entre os elementos que compõem esses níveis e aqueles relacionados aos conceitos de área que o mesmo

²³ Isomorfismo é uma relação de bijeção entre duas estruturas matemáticas, de modo que há um mapeamento bijetivo entre elas.

investigava. Não tendo disponível uma organização referente aos conceitos de volume e capacidade, fora elaborada a identificação dos níveis de codeterminação didática na Organização Matemática para a nossa temática, conforme vemos na figura a seguir:

Figura 6 – Níveis de codeterminação didática na Organização Matemática para a pesquisa.



Fonte: Banco de dados da pesquisa

Na adaptação que fora realizada a partir do trabalho de Carvalho (2012), foram ajustados os níveis de escola, pedagogia, domínio, setor, tema e assunto (também chamado de questão). O livro didático, no entanto, mesmo classificado como uma instituição de utilização foi posicionado entre os níveis de sociedade e civilização, visto que ele carrega orientações e saberes aos quais muitas vezes o próprio professor ou escola estão sujeitos.

No Brasil, é comum ouvir dizer que alguns sistemas de ensino seguem à risca exatamente o programa curricular que está colocado no livro e esta posição lhe foi conferida baseado num critério nacional. Talvez em outros países ou até mesmo dentro do sistema de ensino de um determinado estado ou município este fosse realocado.

5.1.7 A praxeologia como um recurso para análise de livros didáticos

A obra de Chevallard é inovadora, sendo um ponto de referência para a realização de investigações dessa natureza, pois engloba desde o saber científico até o saber efetivamente ensinado, levando em consideração a produção de livros didáticos, entre outros.

Assim, como Bittar (2017) afirmou, não há pretensão em colocar a TAD como única ferramenta para analisar o livro didático, mas como uma alternativa que atende nossas

expectativas quanto ao objeto de pesquisa, haja vista que o foco dele está nas praxeologias propostas nele e, além disso, os estudos de práticas institucionais que existem em uma determinada instituição, em nosso caso o livro didático. Além disso, é mais uma vertente de investigação do grupo de pesquisas de Chevallard, que desenvolveu, ainda, os estudos sobre as Transposições Didáticas (transformações que um saber sofre a fim de ser ensinado) e sobre a Ecologia dos Saberes (condições de existência de um saber em uma determinada instituição).

A praxeologia, em sua organização, serve de metodologia para a pesquisa quando justifica a caracterização de cada uma das atividades propostas (exemplos, exercícios resolvidos, exercícios para resolução pelo aluno, desafios e outras demonstrações correlatas) como Tarefas que poderão ser analisadas a partir do bloco teórico-metodológico.

Cada uma destas Tarefas, portanto, passa a ser analisada a fim de identificar quais os Tipos de Tarefa, Técnica, Tecnologias e Teorias que podem lhe descrever e, assim, criar um ambiente de análise bem definido e de fácil manipulação que favoreça a organização e tratamento dos dados que venham a ser coletados.

Ademais, a ideia dos níveis de codeterminação são viáveis para explicar a influência que documentos como os PCN e o PNLD venham a ter para possíveis mudanças no tratamento de quaisquer temas ou conteúdos, sob o ponto de vista de qualquer disciplina.

Esses são alguns tópicos que servirão de base a análise dos materiais desta pesquisa. Mais à frente outras pontuações serão incorporadas à discussão quando necessárias, evitando que repetições e delongas à apresentação da Teoria para a análise dos livros didáticos, como descreve Chevallard (2018), não o interpretando-o de forma prévia como um objeto antididático ou de baixa didaticidade, mas visando *fazer conhecer* o que o trabalho pode revelar, suas possibilidades examinando seus limites atuais.

5.2 AS PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS METODOLÓGICAS DA PESQUISA

A partir das definições dadas por alguns teóricos no que concerne ao percurso metodológico, esta pesquisa pode ser classificada sob alguns aspectos descritos a seguir.

Do ponto de vista da natureza, classifica-se esta como uma **pesquisa básica**. Gil (1999, p. 42) diz que este tipo de pesquisa “procura desenvolver os conhecimentos científicos sem a preocupação direta com suas aplicações e consequências práticas”, ideia reforçada por definida posteriormente por Gerhardt e Engel (2009) quando citam a utilidade dessa geração de novos saberes para o avanço da Ciência.

Quanto ao ponto de vista da forma de abordagem, fica evidenciado que a nossa pesquisa tem caráter **qualitativo**, ou seja, buscamos analisar os “dados de forma indutiva” (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 50), englobando “a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões” (BICUDO, 2013, p. 116) tendo o significado de cada dado uma importância vital na nossa abordagem. Nisto, Oliveira (2016, p. 60) descreve a que a “pesquisa qualitativa pode ser caracterizada como sendo um estudo detalhado de um determinado fato, objeto, grupo de pessoas ou ator social e fenômenos da realidade... para se explicar em profundidade o significado e as características de cada contexto em que encontra o objeto de pesquisa”.

Quanto aos objetivos, observando a definição dada por Gil (2002, p. 42), classificaremos a pesquisa como **explicativa**, haja visto que este tipo tem por “preocupação central identificar os fatores que determinam ou que contribuem para a ocorrência dos fenômenos... porque explica a razão, o porquê das coisas”.

Do ponto de vista dos procedimentos técnicos, considerando que a construção da base teórica dessa pesquisa, bem como a coleta dos dados a serem tratados é realizada em livros de uso didático, optou-se por um trabalho com base nas pesquisas de tipo **documental** e **bibliográfica**. Observando as descrições de Oliveira (2016) e Sordi (2017), a primeira baseia-se na coleta e análise de fontes primárias, ou seja, aquelas não receberam nenhum tratamento científico, como a legislação aqui utilizada. A última, escolhida pelo uso de fontes secundárias, entre as quais, os guias e manuais, os livros e artigos que servirão para a análise do problema.

5.3 A ESCOLHA DAS COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS

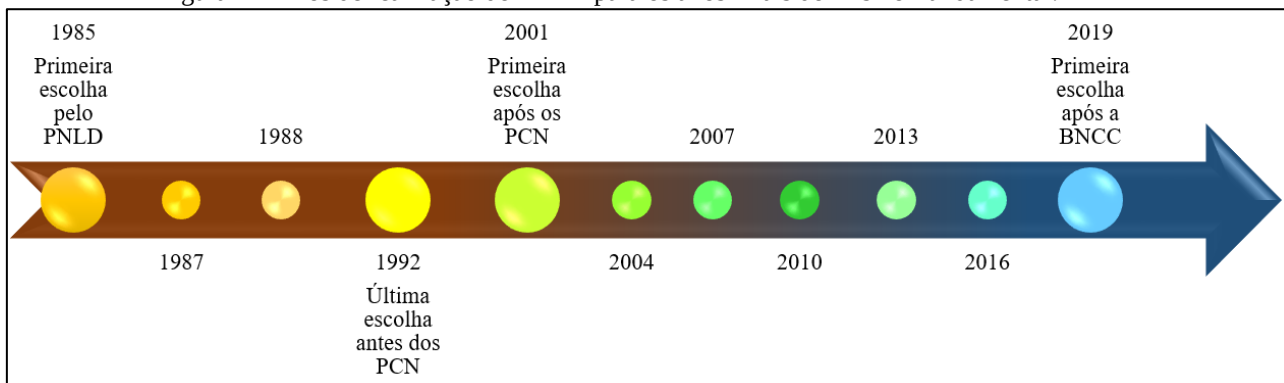
Köch (2015) reforça que, para que um processo de investigação seja encarado como ciência, é necessário descobrir a relação existente entre os aspectos que envolvem os fatos, situações, acontecimentos, fenômenos ou coisas, a partir da delimitação expressa de seu problema de pesquisa.

Analisar todo o material produzido após a implantação dos PCN, em 1997, seria inviável. Por essa razão, ocorreu, para esta pesquisa a opção pela observação de uma coleção que pudesse ao máximo, atender os critérios que são estabelecidos pelo PNLD, neste período.

A escolha das coleções que seriam analisadas foi realizada a partir da relação de livros e coleções aprovadas pelo Ministério da Educação nos manuais e guias do PNLD a partir de 1985 (ano de instituição do Programa), em todas as suas edições voltadas à escolha de livros de

Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental pelo professor. Foram então pesquisadas as edições dos seguintes anos²⁴:

Figura 7 – Anos de realização do PNLD para os anos finais do Ensino Fundamental.



Fonte: Banco de dados da pesquisa

Em seguida, foram registrados para cada edição, quais autores tiveram alguma obra aprovada no PNLD, valendo salientar que foram considerados separadamente aqueles que pertenciam a uma mesma obra por ter, em algumas edições, autores com mais de uma obra aprovada para o mesmo nível de ensino.

A escolha da coleção foi, então, estabelecida a partir de dois critérios obedecendo a ordem de prioridade assim descrita: em primeiro lugar o(s) autor(es) que tivessem mais publicações aprovadas pelo Guia do Livro Didático, ou seja, a partir do ano de 2002 e; como critério de desempate, aquele(s) que tivesse(m) mais registros nos manuais do livro didático, ou seja, até o ano de 1992.

Destarte, apenas 02 (dois) autores constavam em todas as edições a partir da implementação do PNLD: José JAKUBOVIC e Marília Ramos CENTURIÓN.

Quadro 2 – Autores com maior número de aprovações no PNLD, com ano de aprovação.

AUTOR(A)	1992	2001	2004	2007	2010	2013	2016
José JABUKOVIC	•	•	•	•	•	•	•
Marcelo Cestari Terra LELLIS	•	•	•	•			
Marília Ramos CENTURIÓN		•	•	•	•	•	•

Fonte: Manual do Livro Didático (1992) e Guias do Livro Didático (2002 – 2017)

²⁴ Anos de realização da escolha dos livros do PNLD pelo professor. Em geral, a escolha realizada no ano base servia de referência para a aquisição dos livros no ano seguinte, por isso, a edição do guia, a partir de 2001, tem a numeração do ano seguinte. Exemplo: 2016 é o ano de escolha da coleção dos livros no PNLD 2017. Reposições de livros danificados ou que serão necessários para novas matrículas que sobressaiam a demanda já distribuída terão como referência o último PNLD aprovado.

Jakubovic é o autor da coleção “Matemática na medida certa”, editora Scipione, em que assinava com até a edição de 1994 com Marcelo Cestari Terra LELLIS, apenas. Conforme figura abaixo:

Figura 8 – Livros da coleção “Matemática na medida certa” (1994).



Fonte: Editora Scipione

A partir de 2001, a obra também ganhou a assinatura de Centurión e assim permaneceu até a edição de 2007. A partir de 2010, Marília passou a assinar apenas com Jakubovic a coleção adaptada que ganhou o nome de “Matemática nos dias atuais: na medida certa”, pela editora Leya. Abaixo representada:

Figura 9 – Livros da coleção “Matemática nos dias de hoje: na medida certa” (2015).



Fonte: Editora Leya

Para a pesquisa foram tomados como referência a coleção de 1994 que havia sido antes da vigência dos PCN (em 1998) e a última coleção aprovada antes da promulgação da BNCC, datada de 2015. Conforme figuras abaixo:

5.4 O MÉTODO DE ANÁLISE

A análise de livros didáticos é, segundo Almouloud (2015), a principal entrada para o questionamento ecológico ou antropológico.

Por um lado, tem-se a convicção que o processo de melhoria da educação se dá pelo aperfeiçoamento da formação docente, da acessibilidade aos e habilidade para o manuseio de materiais mais sofisticados e precisos para compreensão do processo educativo. Por outro, compreende-se que todos os agentes, indivíduos e materiais participantes dessa empreitada estão expostos a fatores diversos que impulsionam o processo contínuo de adaptação que o ser humano e suas relações com o saber revelam.

Num momento anterior a uma base curricular (BNCC) válida dentro de um país com dimensões continentais, como é do Brasil, as orientações dos PCN vislumbravam aprendizagens, caminhos e expectativas, além de delimitar situações e conteúdos mínimos de direito de qualquer aluno no país: um misto de regras e possibilidades, de regimento e autonomia. Havia saberes sistematizados por ciclos, mas o livre arbítrio para saber qual o momento mais adequado para apresentá-los aos alunos. Havia uma escolha docente que, por vezes, também coincidia com a escolha do autor do livro adotado que, por sua vez, apresentaria a sua leitura da função, aplicabilidade e importância sobre o conhecimento matemático em cada uma das suas coleções. Ou seja, ali também era apresentada uma instituição.

A proposta de análise de materiais didáticos, por Almouloud (2015) condensa ideias de Chevallard (1999) e Chaachoua e Comiti (2010), e propõe a observação do livro não apenas através do contexto de sua produção e caracterização da relação institucional, mas também pelas tarefas/técnicas e tecnologias envolvidas nas organizações matemáticas propostas pelos autores desses materiais.

Estruturalmente, o livro é pensado por uma ideia, uma lógica na qual o(s) autor(es) entende(m) que haja uma facilitação para o desenvolvimento do processo de ensino e, conseqüentemente, ocorra também a aprendizagem. A localização dos exercícios, a presença ou não dos questões e exemplos, eventuais comentários tanto no livro em si como também no manual voltado ao professor, dão indícios dessa intencionalidade autoral.

Do ponto de vista ecológico, Almouloud ainda completa que é necessário refletir sobre algumas questões que permitem a identificação da *razão de ser* do livro: O objeto de saber faz parte das recomendações curriculares para a Educação Básica? Está presente nos livros didáticos? Como é apresentado e com qual finalidade? Esse objeto de saber é efetivamente trabalhado na escola? Se sim, em quais condições? Se não, quais são os motivos para ser deixado de lado?

Fato, é que deve haver uma atenção redobrada às praxeologias expressas e inferidas, aos objetos ostensivos e não ostensivos dos materiais analisados, para que as respostas para tais questionamentos possam ser evidenciadas de forma significativa e sistemática.

A partir da *identificação dos tipos de tarefa* é possível reunir as atividades (tarefas) de eixo comum em grupos que evidenciam realidades de modelagem próxima, das instituições em jogo e dos trabalhos que se desejam desenvolver. A *identificação das técnicas* permite realizar uma investigação das situações propostas, bem como os exercícios resolvidos. A *identificação de tecnologias* se dá, então, a partir da análise dos comentários dos autores, do curso, do livro do professor e até mesmo da matemática envolvida nas situações propostas.

Após as devidas identificações é necessário **avaliar**. Almouloud (2015) aponta alguns critérios para esta avaliação de acordo com Chevallard (1999), como visto abaixo:

Figura 10 – Questões norteadoras para o livro didático após a identificação dos elementos praxeológicos.

Avaliar os tipos de tarefa (T)	Avaliar as técnicas (t)	Avaliar o bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$
Os tipos de tarefa estão postos de forma clara e bem identificados?	As técnicas propostas são efetivamente elaboradas, ou somente esboçadas?	As formas de justificação utilizadas são próximas das justificativas matematicamente válidas?
As razões de ser dos tipos de tarefa estão explícitas ou os eles aparecem sem motivos válidos?	São fáceis de utilizar?	Elas são adaptadas ao problema colocado?
Os tipos de tarefa são representativos das situações matemáticas? Se sim, atendem as necessidades dos alunos?	Sua importância é satisfatória?	Os argumentos usados são cientificamente válidos?
	Sua confiabilidade é aceitável sendo dadas suas condições de emprego?	
	São suficientemente inteligíveis?	

Fonte: Adaptado de Almouloud (2015)

Com essas informações, busca-se averiguar os elementos praxeológicos acima, afim de formalizar as Organizações Matemática (OM) de cada uma das coleções escolhidas para a abordagem do conteúdo volume e capacidade.

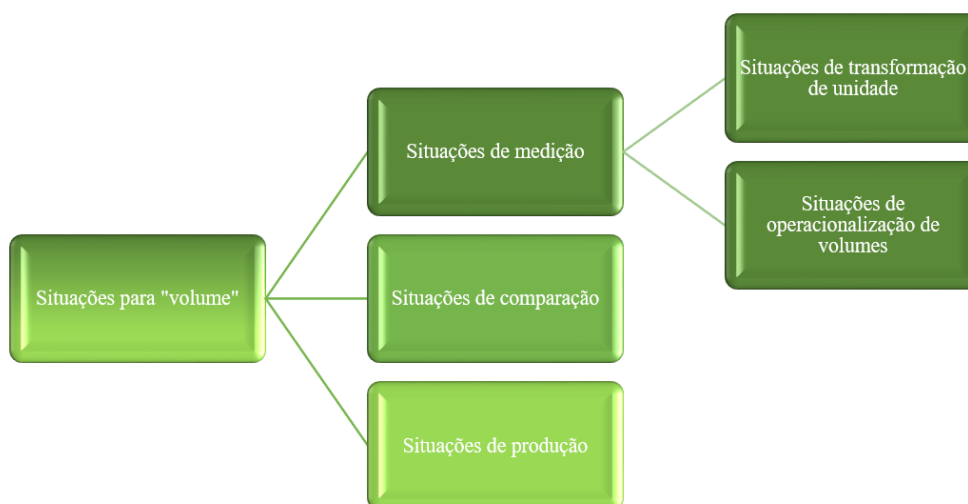
Para atender a demanda, as coleções foram estudadas individualmente, livro a livro, aos moldes do que fora realizado por Costa (2018), levando em consideração, ainda, a ‘tipologia de situações’ que Moraes (2011) elaborou para o conceito de “volume” a partir das classificações de Baltar (1996) para o conceito de área: de medição, comparação e produção.

5.4.1 A tipologia das tarefas

A proposta de tipologia de tarefas proposta para o trabalho é desenvolvida a partir dos estudos de Moraes (2011), que se baseia nas ideias de Vergnaud (1990) onde, por meio do enfrentamento de situações²⁵ problema, formalizam-se os conceitos matemáticos que adquirem significados para os alunos, a partir de invariantes²⁶ operatórios e representações simbólicas. Assim, os conhecimentos dispostos nos livros didáticos podem, ou não, motivar a mobilização de propriedades de grandeza como tais invariantes.

A ‘tipologia de situações’ para o “volume” que Moraes (2011) elaborou, utilizou as classificações de Baltar (1996) para os conceitos de **medição**²⁷, **comparação** e **produção**.

Organograma 3 – Representação das situações que Moraes utilizou para o conceito de volume.



Fonte: adaptado de Moraes (2011)

a) Situações de medição são aquelas que consistem em atribuir um número e uma unidade, ao volume de um sólido, seja pelo desenvolvimento de estratégias práticas ou pelo uso de medições teóricas. São exemplos: a contagem de unidades (sólidos unitários); o uso das fórmulas; o Princípio de Cavalieri; a imersão; o preenchimento; o transbordamento; e, as estimativas. São subdivididas em dois subtipos:

²⁵ O conceito de **situação** empregado por Vergnaud não é o de situação didática, mas sim o de tarefa, sendo que toda situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, para as quais é importante conhecer suas naturezas e dificuldades próprias.

²⁶ **Invariantes** são conhecimentos contidos nos esquemas que conduzem a realização da tarefa. Esquema “é a organização invariante do comportamento para uma determinada classe de situações” (VERGNAUD, 1990, p. 136). Nos **invariantes** destacam-se os **teoremas-em-ação** (proposição tida como verdadeira pelo sujeito, mesmo se for incorreta na matemática acadêmica) e os **conceitos-em-ação** (categoria dita pertinente pelo sujeito).

²⁷ Moraes (2011) troca o termo “medida”, original do trabalho de Baltar (1996), por “medição”, para diferenciar o número resultante do processo de medição que é tipo de situação que consiste em medir o volume.

(1) As **situações de transformação de unidades** consistem em passar de uma unidade de volume dada para outra. Há, aqui, dois enfoques diferentes: (1) atribuir valor de medida ao volume de um objeto usando unidades diferentes, expressando-o de duas maneiras distintas; (2) utilizar a relação entre unidades de medida volume para converter diretamente uma medida em outra, de diferente unidade, sem intervenção explícita do sólido.

(2) As **situações de operacionalização de volumes** consistem em efetuar uma operação matemática com as unidades de medida de volumes no quadro de grandezas. Intervém, aqui, estratégias de adição e subtração dessas medidas, além da multiplicação e divisão de delas por um número escalar. Para essa abordagem, frequentemente é ressaltado o aspecto algébrico, valorizando algoritmos que se condensam em fórmulas para o cálculo de medidas de volume.

b) As situações de comparação consistem em decidir qual sólido de um conjunto dado é maior ou menor que outro(s) ou, ainda, se eles possuem volumes iguais. São exemplos as estratégias de: percepção visual; inclusão, decomposição/recomposição; imersão; medição; comparação das medidas; comparação das massas; e, o Princípio de Cavalieri.

Algumas variações devem ser consideradas nestas situações como: a quantidade de sólidos, sua representação (figura, perspectiva, vistas planas, planificações, a presença da figura que permite gerar o sólido, presença de sólidos concretos) e sua natureza (sólido oco ou maciço). Esta especialmente percebida, por ser justamente o elo para a discussão sobre a diferenciação entre volume e capacidade, haja visto que volume é uma “característica” comum a sólidos maciços e ocos, no entanto, capacidade é tratado como volume interno, o que faz com que a associação seja realizada prioritariamente aos sólidos ocos.

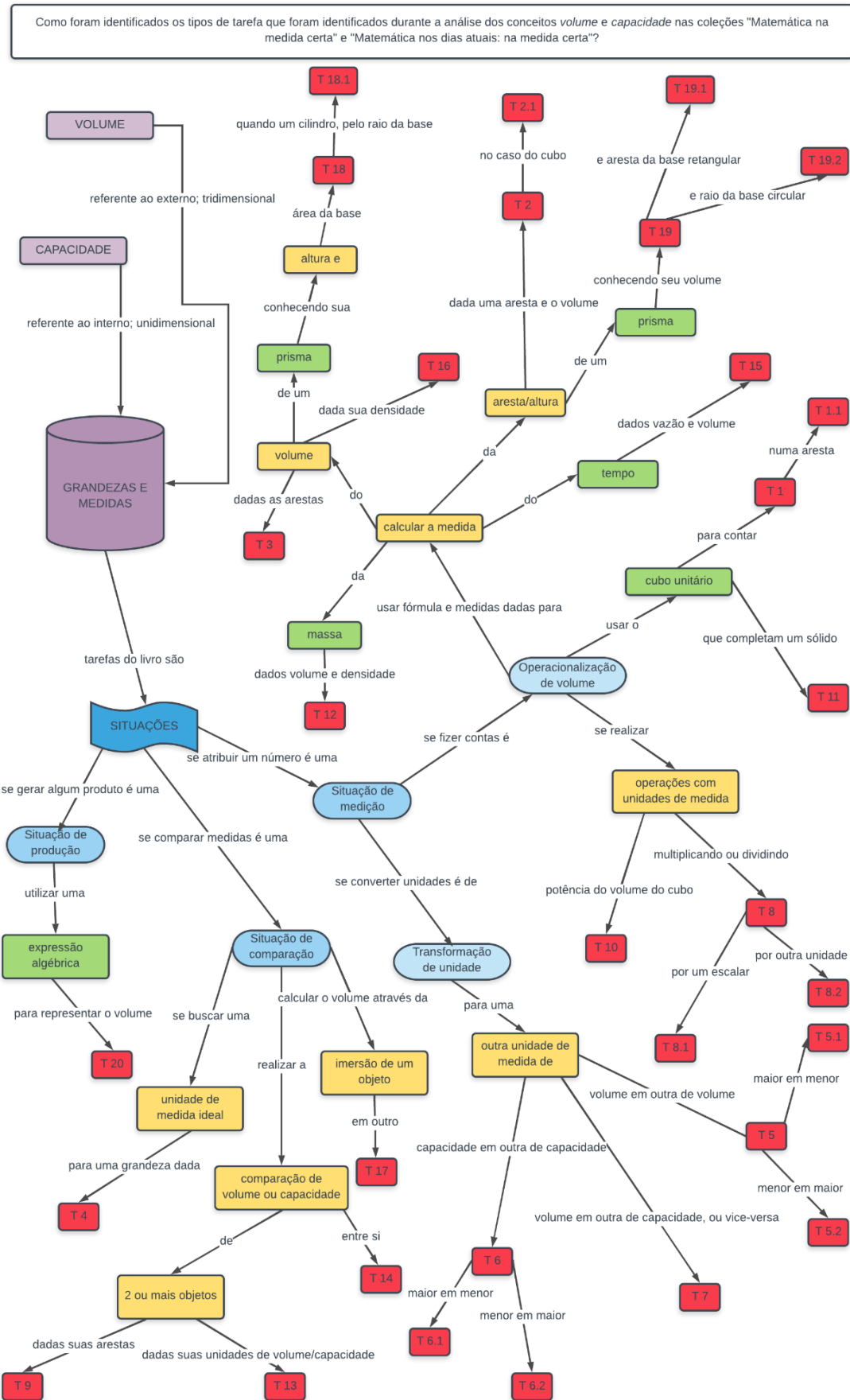
Fica aberta a comparação entre capacidade e volume de um sólido, implícita no teorema-em-ação “volumes e capacidades são grandezas de mesma natureza”, possível entre elas.

c) As situações de produção são caracterizadas pela produção de um sólido com volume maior, menor ou igual a um volume dado. São exemplos as seguintes estratégias: a composição; a decomposição/recomposição; e, o Princípio de Cavalieri.

5.4.2 A tipificação de tarefas das coleções analisadas

A partir dos conceitos e sistemas vistos, visando a construção da tipologia de tarefas para subsidiar a análise das tarefas das coleções escolhidas, foram elencados os principais tipos de tarefa encontrados em, pelo menos, uma das coleções. As mesmas foram dispostas no mapa conceitual construído, que visa a identificação visual, pelo leitor, de como cada uma das atividades foi classificada durante a pesquisa:

Figura 11 – Mapa conceitual da tipificação de tarefas



Fonte: Banco de dados da pesquisa

A figura 15 contém um mapa conceitual elaborado para esta pesquisa, apesar de não ter uma referência anterior, ilustra como se deu a identificação das tarefas a partir dos tipos de situações encontradas em pelo menos um livro de uma das coleções analisadas.

O mapa citado já possui um compêndio de todos os livros analisados nas duas coleções, sem que necessariamente todas os tipos de tarefa tenham sido identificados em cada coleção.

A vantagem desse tipo de representação é o apelo visual que favorece desde já análises sobre a relação entre os tipos de tarefa e as situações que o geraram.

Num primeiro momento, percebe-se que o tema principal, é amparado por duas definições: volume e capacidade, aqui já carregando características das definições que foram impostas para o uso dessas grandezas no trabalho.

Em seguida, as situações foram colocadas de forma que a forma como cada uma das tarefas pudesse estar relacionada.

Por vezes há situações secundárias que são destrinchadas para, então, localizar o tipo de tarefa adequado e, ainda, por vezes, um tipo de tarefa é subdividido de acordo com uma característica (aqui chamado conectivo) que melhor o define.

Essa técnica nos permitiu elucidar 20 (vinte) tipos de tarefa e outros 11 (onze) subtipos de tarefa, sob as siglas T_1 , T_2 , T_3 , ..., T_{20} , que constam, de forma melhor discriminada no quadro 3 (que segue este trabalho).

Quadro 3 – Identificação dos tipos e ‘subtipos’ de tarefa presente nas coleções analisadas

TIPO DE TAREFA	SUBTIPO
T ₁ : Calcular a medida do volume de um sólido utilizando a contagem de blocos unitários	T _{1.1} : Contar os blocos unitários que formam cada aresta do sólido para calcular a medida do volume de um sólido.
T ₂ : Calcular a medida do volume de um paralelepípedo retangular cujas medidas das arestas são dadas	T _{2.1} : Calcular a medida do volume de um cubo cuja medida do comprimento da aresta é conhecida
T ₃ : Calcular a medida do comprimento de uma das arestas de um sólido retangular com medidas do volume e de outras arestas dadas	
T ₄ : Associar uma unidade de grandeza adequada para a medição de uma determinada grandeza de volume ou capacidade	
T ₅ : Transformar uma unidade de medida padrão de volume em outra	T _{5.1} : Transformar uma unidade de medida padrão de volume maior em outra menor
	T _{5.2} : Transformar uma unidade de medida padrão de volume menor em outra maior
T ₆ : Transformar uma unidade de medida de capacidade em outra	T _{6.1} : Transformar uma unidade de medida de capacidade maior em outra menor
	T _{6.2} : Transformar uma unidade de medida de capacidade menor em outra maior
T ₇ : Transformar uma unidade de medida de volume em uma unidade de medida de capacidade, ou vice-versa	
T ₈ : Realizar a multiplicação ou divisão de uma medida de volume (ou capacidade).	T _{8.1} : Realizar a multiplicação ou divisão de uma medida de volume (ou capacidade) por um número escalar.
	T _{8.2} : Realizar a multiplicação ou divisão de uma medida de volume (ou capacidade) outra medida de volume (ou capacidade).
T ₉ : Comparar os volumes (ou capacidade) de dois sólidos, conhecidos os valores das medidas de suas arestas.	
T ₁₀ : Calcular o valor da potência correspondente à medida do volume de um cubo com valor da aresta conhecido.	
T ₁₁ : Calcular o número de blocos unitários necessários para completar um sólido retangular regular.	
T ₁₂ : Calcular o valor da massa de algum material que cabe em um sólido, a partir de seu volume e densidade.	
T ₁₃ : Comparar a capacidade de dois ou mais objetos/corpos.	
T ₁₄ : Comparar a capacidade e o volume de um objeto.	
T ₁₅ : Calcular o valor do tempo necessário para encher um (ou mais) objeto (s) informados seu volume e vazão com que é preenchido.	
T ₁₆ : Calcular a medida do volume de um objeto dada sua densidade.	
T ₁₇ : Determinar a medida do volume de um objeto a partir da imersão dele em outro.	
T ₁₈ : Calcular a medida do volume de um prisma reto a partir da área de sua base e sua altura	T _{18.1} : Calcular a medida do volume de um prisma reto de base circular, conhecido o raio da base e a altura
T ₁₉ : Calcular a medida do comprimento da uma aresta de um prisma dado o valor da unidade de medida de volume e outra aresta ou raio da base	T _{19.1} : Calcular a medida da altura de um prisma reto de base poligonal, conhecido o valor de uma aresta da base regular, ou vice-versa, e seu volume.
	T _{19.2} : Calcular a medida da altura de um prisma reto de base circular, conhecido o valor de seu raio, ou vice-versa, e seu volume.
T ₂₀ : Exprimir por meio de uma expressão algébrica o cálculo da medida de volume de um sólido dado	

Fonte: Banco de dados da pesquisa

6 PRODUÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

A análise nos livros didáticos do PNLD é considerada de importância, pois o material presente nos guias desse programa evidencia o terceiro personagem cujo papel é imprescindível para os bons encaminhamentos durante o processo de ensino e aprendizagem: o autor²⁸, o qual é responsável pelo diálogo que existe entre o saber a ser ensinado e o saber ensinado.

Nessa interface, o livro é portador de escolhas sobre: o saber a ser ensinado; os métodos adotados para que o aluno consiga aprendê-lo mais eficazmente; e a organização dos conteúdos ao longo dos anos de escolaridade. (BRASIL, 2014, p. 9).

Neste capítulo procura-se observar justamente as propostas dos autores para duas coleções de LD e suas relações com os documentos oficiais, especialmente as influências que possam ser percebidas na abordagem do conteúdo volume e capacidade neles após a adoção dos PCN, em 1998 e, conseqüentemente, o aprimoramento do processo de escolha do livro, tal qual é cautelado pelo PNLD, como pode ser visto a partir de agora.

A dinâmica de análise é regida pela observação das praxeologias a priori nos livros que compõem a coleção de 1994 e, posteriormente, à coleção de 2015, para que sejam analisadas e comparadas entre si, em momento oportuno.

Para tanto, foram verificadas todas as apresentações de conteúdo, quer fossem os exercícios e exemplos apresentados na parte “teórica” dos capítulos, bem como os exercícios (já resolvidos ou não) que continham ideias relacionadas às grandezas volume e/ou capacidade, bem como as unidades de medida correlatas.

A escolha pela análise também das unidades de medida se deve ao fato de que, nesses exemplos (tarefas) é possível construir ou reforçar os conceitos ligados às grandezas, como visto nas situações de medição anteriormente apontadas. Além disso, houve o cuidado em observar os capítulos que não tratavam exclusivamente de grandezas e/ou medidas para identificar atividades que continham tarefas que induziam ao uso dos conceitos relacionados às grandezas estudadas.

6.1 A ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA DA COLEÇÃO DE 1994

Assinado por José JAKUBOVIC (ou simplesmente JAKUBO) e Marcelo LELLIS, a coleção de 1994 tem uma estrutura comum aos livros de matemática até os dias atuais. A

²⁸ O uso do termo autor, caracteriza a(s) pessoa(s) envolvida(s) no processo de elaboração e revisão do material didático que é apresentado.

organização de seu conteúdo é feita por blocos (capítulos) de temas específicos bem delimitados, organizados em uma sequência que prima pelos assuntos do bloco Números e Operações (Aritmética e Álgebra) sobre os demais.

Nele, a Geometria (bloco Espaço e Formas) consta em todas as séries, mas sempre tem uma carga menor de conteúdos por série, além de geralmente não estarem na abertura de cada série. Mas a situação é ainda mais crítica quando se observa, na coleção, os blocos Grandezas e Medidas, que é evidenciado em apenas um capítulo no livro da 5ª série (último, por sinal) e o bloco do Tratamento da Informação que sequer é capitulado.

A partir de agora traçaremos mais especificamente as abordagens de volume e capacidade em cada uma das séries, além de visitar o manual do professor da coleção.

6.1.1 O manual do professor

Nesta coleção, o livro do professor é alocado já nas primeiras folhas e se encarrega de ‘apresentar’ a estrutura do LD. Chamam a atenção os fundamentos para as novas propostas de ensino em que há o entendimento da necessidade de tornar os alunos mais atuantes, o professor um facilitador que gera oportunidades de aprendizado e a valorização das atividades em grupo para fomentar a discussão e troca de ideias. Para isso, baseiam a formatação do livro a partir das ideias de que a “teoria é para os alunos lerem e discutirem” e “os exercícios [...] atraentes, incentivando a leitura, interpretação, iniciativa e inventividade dos alunos” (JAKUBOVIC e LELLIS, 1994, p. III).

O manual, nas palavras dos autores, “analisa com o professor, uma a uma, as **ações** presentes no livro do aluno. Aqui, serão comentados os objetivos e, principalmente, a forma de praticar essas **ações** em sala de aula, com sugestões de desdobramentos, variações complementos” e, “apresenta ainda as respostas dos **Exercícios para casa**, as resoluções dos exercícios do quadro ‘**Superlegal**’ e o ‘**Planejamento do curso**’ (ibidem, p. III).

Apesar do que é colocado no texto de apresentação do manual do professor, não há um acompanhamento de fato das “ações” que o professor deve realizar. A seção *Ação!* apresenta atividades abertas²⁹ sempre correspondentes com o conteúdo trabalhado em cada capítulo. Além disso, o restante do manual se dedica às respostas dos exercícios propostos, na maioria das situações com o algoritmo ou etapas da resolução também descritos.

²⁹ Por Câmara dos Santos (2002).

A última parte, *Planejamento do curso*, é tão somente a descrição dos conteúdos de cada capítulo e os respectivos objetivos deles. Ao observar toda a coleção, tem-se o quadro:

Quadro 4 – Volume e capacidade no “Planejamento do curso” da coleção de 1994.

LIVRO	CAPÍTULO	CONTEÚDO	OBJETIVOS
5ª série	5. Medidas	5. Volume	Conceituar o volume como medida de espaço. Identificar o centímetro cúbico como unidade de medida de volume. Calcular o volume de paralelepípedos retangulares.
		6. Unidades de volume e capacidade	Conhecer os múltiplos e submúltiplos do metro cúbico. Transformar unidades métricas de volume. Reconhecer o litro como unidade capacidade. Comparar o litro com o metro cúbico. Aplicar o cálculo de volumes em situações práticas.

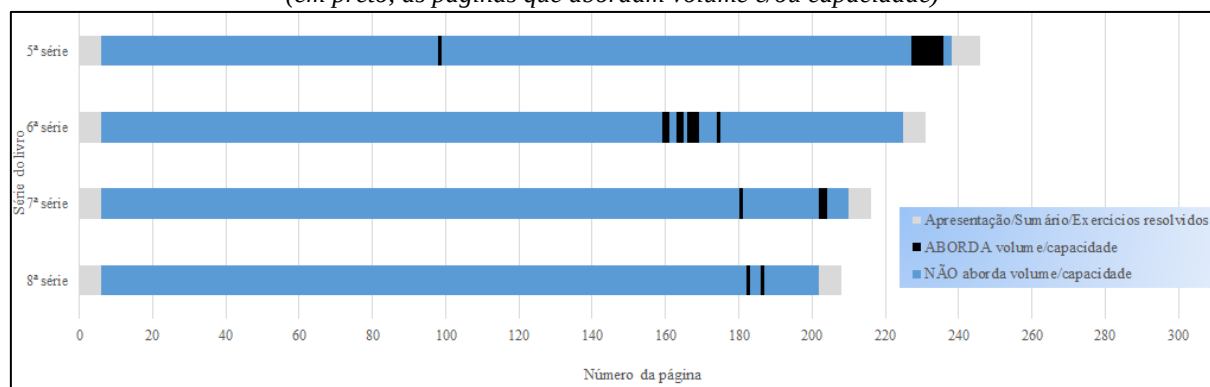
Fonte: Jakubovic e Lellis (1994.a), p. XXIII

Este é o único momento na coleção (5ª a 8ª séries), em que figuram objetivos voltados às grandezas de referências desse trabalho. Em tal repertório focaliza a proposta nas situações de medição e comparação, que serão destrinchadas a seguir.

A partir de agora serão caracterizadas as abordagens em cada um dos volumes da coleção de 1994, atentando para os tipos de tarefa encontrados tanto na apresentação do conteúdo com os exercícios propostos.

Com vistas às abordagens, fora construído o gráfico abaixo que mostra como ao longo do livro houve menções ou tratos das grandezas e/ou unidades de medida de volume/capacidade na coleção “Matemática na medida certa”, de 1994, em seus quatro livros (5ª a 8ª série). Denominamos de “linha do tempo do livro” este exercício, como visto abaixo:

Gráfico 2 – Linha do tempo de volume e capacidade na coleção de 1994, por série.
(em preto, as páginas que abordam volume e/ou capacidade)



Fonte: Jakubovic e Lellis (1994.a, 1994.b, 1994.c, 1994.d)

Cada barra horizontal do gráfico apresenta o número de páginas de cada um dos volumes da coleção. A cor cinza indica as páginas que se dedicam à apresentação, manual do professor

e respostas ou resolução dos exercícios propostos ao leitor. As áreas marcadas na cor azul expõem as páginas do livro que tratam os conteúdos, no entanto nenhuma tarefa ou descrição está relacionada com as grandezas volume e/ou capacidade, ou ainda suas unidades de medida. As páginas representadas pela cor preta são aquelas que contém atividade relacionada ao tema.

No gráfico desta coleção, na figura anterior, o número de atividades que utilizam volume/capacidade como grandezas ou mesmo suas unidades de medida é bem pequeno haja visto o total do livro ou mesmo das coleções, além do que esses usos estão ‘concentrados’ nos livros dos dois primeiros anos do ensino fundamental.

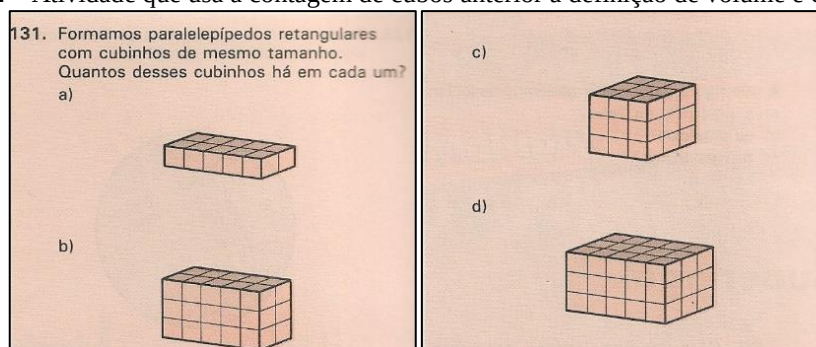
Sobre esses tratos esclarecemos em seguida, a partir da análise de cada um dos livros separadamente:

6.1.2 O livro da 5ª série

O livro da quinta série (JAKUBOVIC e LELLIS, 1994.a) é tímido no que concerne a abordagem do conteúdo volume e capacidade, como visto no gráfico anterior. Ainda assim, é o único da coleção que tem um capítulo exclusivamente para medidas e nele aborda os conteúdos de referência.

Antes mesmo que houvesse a definição das grandezas, no capítulo 2 – *Conjunto e Geometria* – é explorado num exercício (131, p. 99), a técnica de contagem de cubinhos que forma um determinado paralelepípedo retangular.

Figura 12 – Atividade que usa a contagem de cubos anterior à definição de volume e capacidade.



Fonte: Jakubovic e Lellis (1994.a), p. 99

Claramente, vê-se o uso “antecipado” do tipo de tarefa T_1 : *Calcular a medida do volume de um sólido utilizando a contagem de blocos unitários*, ainda que não houvesse enfoque sobre a definição de volume ou capacidade de um sólido, o que só seria feito posteriormente, no quinto e último capítulo do livro quando são abordadas as principais medidas (de unidade de

grandeza) a serem trabalhadas durante os outros três anos: comprimento, área, volume (e capacidade) e massa.

Para iniciar a discussão, o volume de um objeto é definido como “a medida do espaço que ele ocupa” que é por si só uma definição incorreta, visto que volume e capacidade são **grandezas**, e como tais, podem ser **medidas** por diferentes **unidades**. Esta sutil diferença de entendimento sobre as grandezas pode criar situações desaconselháveis para o tratamento das mesmas na definição das tarefas subsequentes nesta coleção.

Dando continuidade, os autores realizam a definição de centímetro cúbico o que, a partir de então, passa a subsidiar as tarefas propostas.

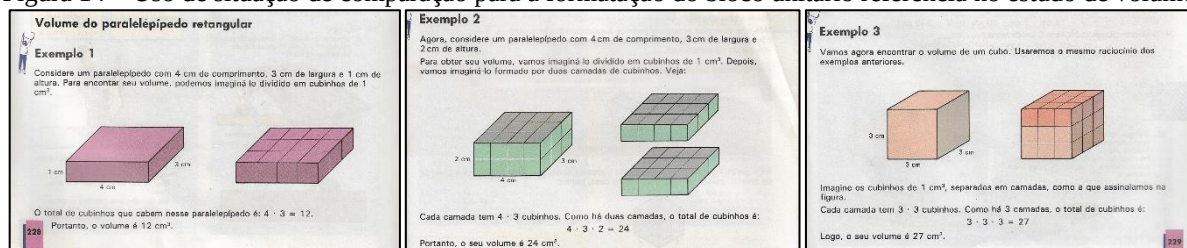
Figura 13 – Uso de situação de comparação para a formatação do bloco unitário referência no estudo de volume.



Fonte: Jakubovic e Lellis (1994.a), p. 228

O cubo unitário é referência para “encontrar o volume” dos sólidos propostos, utilizando uma mescla das situações de comparação (em alguns exemplos antecipam a decomposição do sólido dado em cubinhos unitários, com medida igual a 1 cm^3) e situações de medição (contagem de unidades).

Figura 14 – Uso de situação de comparação para a formatação do bloco unitário referência no estudo de volume.

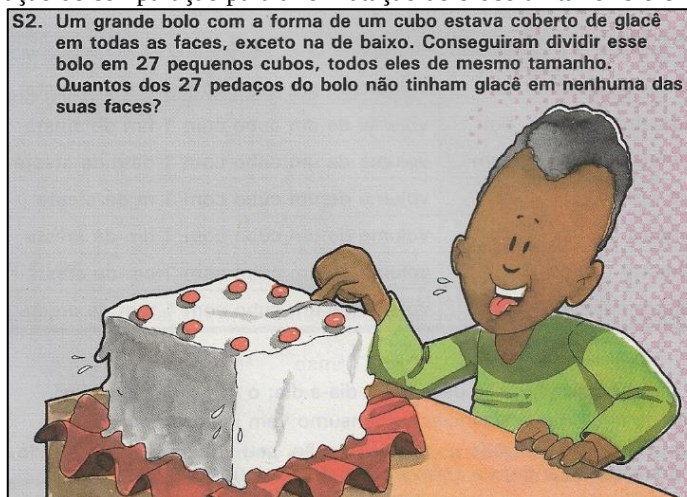


Fonte: Jakubovic e Lellis (1994.a), p. 228-229

Um subtipo de tarefa percebida no exemplo 03 é a contagem, a priori da quantidade de cubinhos que é necessário para formar cada aresta do sólido e, só depois dar prosseguimento ao cálculo da medida do volume do mesmo. Esse tipo será classificado nesta pesquisa como $T_{1.1}$:

Contar o número de blocos unitários que formam cada aresta do sólido para calcular a medida do volume de um sólido.

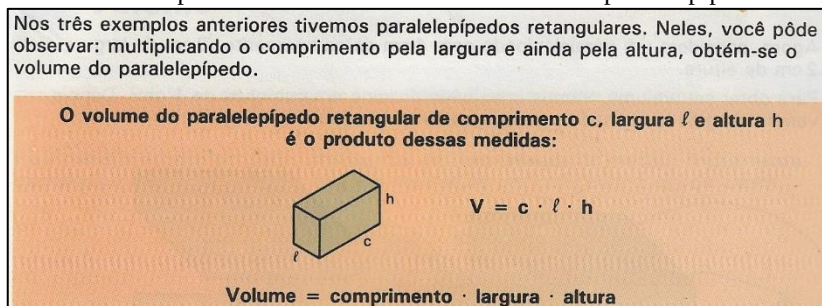
Figura 15 – Uso de situação de comparação para a formatação do bloco unitário referência no estudo de volume.



Fonte: Jakubovic e Lellis (1994.a), pp. 228-229

Outro tipo de tarefa explorada é (T₂) *cálculo da medida do volume de um paralelepípedo retangular cujas medidas das arestas são dadas*, utilizando, para tanto, aquilo que é definido pelos autores como volume:

Figura 16 – Fórmula para o cálculo da medida do volume do paralelepípedo retangular.



Fonte: Jakubovic e Lellis (1994.a), pp. 228-229

Multiplicar o valor do comprimento das três arestas comuns a um vértice (por não serem paralelas) é, certamente, a principal técnica para tarefas de volume neste livro, visto que resolvem a maioria das tarefas que envolvem situações de comparação e de produção que valorizam o aspecto algébrico, ainda que tentem se desvencilhar disso. Esta técnica é preconizada em outros exercícios dessa seção que não exploram a percepção visual.

Nessa ideia, o volume do cubo é tratado de forma particular, considerando $c = \ell = h = a$, no entanto, não se percebe aqui um novo tipo de tarefa, mas uma variante de T₂, que será

classificada como um subtipo de tarefa tal que $T_{2.1}$: *Calcular a medida do volume de um cubo cuja medida do comprimento da aresta é conhecida.*

Há também um tipo de tarefa muito próximo a T_2 , mas com diferença nas técnicas possíveis de serem utilizadas, que é T_3 : *Calcular a medida do comprimento de uma das arestas de um sólido retangular com medidas do volume e de outras arestas dadas.*

A seção 6 trata das unidades de medida de volume e capacidade, além de demonstrar como realizar a transformação entre os múltiplos das unidades. Sobre as unidades de volume, são apresentadas as principais: m^3 , cm^3 e o dm^3 , este último, inclusive com a observação de que “nós o usamos a toda hora, só que ele aparece com o nome de **litro**” (JAKUBOVIC e LELLIS, 1994.a, p. 232, grifo dos autores).

Apesar de parecer uma explicação despretensiosa, iremos definir mais um tipo de tarefa neste ponto: T_4 : *Associar uma unidade de grandeza adequada para a medição de uma determinada grandeza de volume ou capacidade.* Essa possibilidade atende à condição que caracteriza a situação de medição de grandezas e volumes através de uma *estimativa* e possui por técnica a previsão da unidade mais adequada para atender a grandeza trabalhada.

Seguindo a lógica dos cubinhos unitários, a unidade de medida de volume (metro cúbico) e seus múltiplos são apresentados com uma relação direta ao cubo que está associado, constante no recorte abaixo:

Figura 17 – “Unidades do sistema métrico” para volumes apresentado no livro da 5ª série.

unidade	símbolo	significado
quilômetro cúbico	km^3	volume de um cubo com 1 km de aresta
hectômetro cúbico	hm^3	volume de um cubo com 1 hm de aresta
decâmetro cúbico	dam^3	volume de um cubo com 1 dam de aresta
metro cúbico	m^3	volume de um cubo com 1 m de aresta
decímetro cúbico	dm^3	volume de um cubo com 1 dm de aresta
centímetro cúbico	cm^3	volume de um cubo com 1 cm de aresta
milímetro cúbico	mm^3	volume de um cubo com 1 mm de aresta

Fonte: Jakubovic e Lellis (1994.a, p. 232)

Para apresentar a transformação de unidades, é exposto um quadro contendo a unidade fundamental (m^3) seus múltiplos (km^3 , hm^3 , dam^3) e submúltiplos (dm^3 , cm^3 , mm^3).

A conversão, de fato, é estabelecida a partir do uso da razão 1000 entre as unidades menores e a seguintes (imediatamente) maiores. Para ilustrar a situação, ocorre a observação do cubo unitário de $1 dm^3$ que tem arestas iguais a $1 dm = 10 cm$ e, por conseguinte, o entendimento que o volume em centímetros cúbicos é de $1000 cm^3$, por transitividade. Essa é a tecnologia (θ) que ampara a técnica aqui utilizada.

É, então, disposto um ‘quadro de equivalência’ que tem por referência a unidade fundamental de volume, o metro cúbico (m^3).

Figura 18 – Equivalência entre unidades de volume com base na fundamental apresentada no livro da 5ª série.

Assim, nas unidades de volume, temos:

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
$1\,000\,000\,000\,m^3$	$1\,000\,000\,m^3$	$1\,000\,m^3$	$1\,m^3$	$0,001\,m^3$	$0,000\,001\,m^3$	$0,000\,000\,001\,m^3$

Sabendo disso, podemos transformar unidades.

Fonte: Jakubovic e Lellis (1994.a, p. 233)

Essa, no entanto, nos parece uma imagem que inspira muitos cuidados. O fator de multiplicação ($\cdot 1\,000$) pode induzir o leitor a acreditar que para ‘sair’ de uma unidade menor para outra maior ele deva multiplicar por mil ao invés de dividir.

Logo em seguida, em Exemplos, é caracterizado o terceiro tipo de tarefa relacionado a volume na coleção. T₅: *Transformar uma unidade de medida padrão de volume em outra*. Salientando que padrão se refere ao SI. No entanto, dependendo se a conversão for realizada de uma unidade menor para outra maior, ou vice-versa, há diferenças na técnica de resolução. Por isso, destrinchamos T₅ em dois subtipos:

Figura 19 – Transformação de uma unidade de medida maior para uma menor.

Exemplos

1. Vamos transformar $0,22\,m^3$ em centímetros cúbicos.

km^3 hm^3 dam^3 m^3 dm^3 cm^3 mm^3

1 2

A unidade desejada está duas posições à direita da unidade dada. Devemos multiplicar $0,22$ por $1\,000$ e, depois, por $1\,000$, ou seja, por $1\,000\,000$. A vírgula avançará 6 casas para a direita. Logo:

$0,22\,m^3 = 220\,000\,cm^3$

233

Fonte: Jakubovic e Lellis (1994.a, p. 233)

T_{5.1}: *Transformar uma unidade de medida padrão de volume maior em outra menor*. Neste caso, a técnica privilegiada é a da *multiplicação por 1000* a ‘cada transição’ para a unidade imediatamente inferior, deslocando para a *direita* a vírgula que separa o valor inteiro dos decimais.

Figura 20 – Transformação de uma unidade de medida menor para uma maior.

2. Vamos transformar 85 dm³ em metros cúbicos.

km³ hm³ dam³ m³ dm³ cm³ mm³

Devemos dividir o número dado por 1 000. A vírgula vai recuar 3 casas para a esquerda:

85 dm³ = 0,085 m³

Fonte: Jakubovic e Lellis (1994.a, p. 233)

T_{5.2}: Transformar uma unidade de medida padrão de volume menor em outra maior.

Neste caso, é utilizada como técnica a *divisão por 1000* a ‘cada transição’ para a unidade imediatamente superior, deslocando para a *esquerda* a vírgula que separa o valor inteiro dos decimais.

Na tipologia de tarefas que estamos trabalhando, percebe-se que estes tipos de tarefas fazem uso de situações de transformação de unidades, ao converter diretamente o volume expresso em outra unidade sem intervenção explícita do sólido.

Na sequência é apresentado o **litro** como a unidade padrão de capacidade, que por sua vez é definido como *o volume que um objeto pode conter*. A grandeza é associada apenas objetos ociosos como garrafas, copos, tambores. Também se faz a associação entre o litro e o decímetro cúbico tal que $1 \text{ L}^{30} = 1 \text{ dm}^3$.

Figura 21 – Lista de unidades de capacidade.

múltiplos			unidade fundamental	submúltiplos		
quilolitro kl 1 000 ℓ	hectolitro hl 100 ℓ	decalitro dal 10 ℓ	litro ℓ 1 ℓ	decilitro dl 0,1 ℓ	centilitro cl 0,01 ℓ	mililitro ml 0,001 ℓ

Fonte: Jakubovic e Lellis (1994.a, p. 234)

Existe também a ênfase no mililitro como unidade bastante utilizada no dia e, é proposta uma conversão direta entre o mililitro e o litro, bem como entre o mililitro e o centímetro cúbico ($1 \text{ mL} = 0,001 \text{ L}$), ou seja, entre unidades de mesma grandeza e entre unidades de grandezas distintas.

³⁰ A coleção adotada usa ℓ como símbolo de litro, no entanto, para atender uma única grafia neste trabalho, será utilizada a “autorização” dada pelo SI para uso do símbolo L.

Figura 22 – Equivalência entre unidades de medida

Na lista de unidades derivadas do litro, note que cada unidade contém 10 vezes a unidade seguinte. Por isso, as transformações de unidade são bem simples.

Por exemplo:

- $0,12 \ell = 120 \text{ ml}$
- $31 \ell = 0,31 \text{ hl}$

234

Fonte: Jakubovic e Lellis (1994.a, p. 234)

Assim, é estabelecido um novo tipo de tarefa, com dois subtipos, como ocorreu com volumes, desta vez para a grandeza capacidade, além de outro tipo, fruto da relação entre elas.

Fora estabelecido o tipo de tarefa T_6 : *Transformar uma unidade de medida de capacidade em outra* que, a partir da análise, fora dividido em dois subtipos, de acordo com a técnica privilegiada para resolvê-los:

$T_{6.1}$: *Transformar uma unidade de medida de capacidade maior em outra menor*. Neste caso, a técnica escolhida é a da *multiplicação por 10* a ‘cada transição’ para a unidade imediatamente inferior, deslocando para a *direita* a vírgula que separa o valor inteiro dos decimais.

$T_{6.2}$: *Transformar uma unidade de medida de capacidade menor em outra maior*. Para isso se faz uso da técnica de *divisão por 10* a ‘cada transição’ para a unidade imediatamente superior, deslocando para a *esquerda* a vírgula que separa o valor inteiro dos decimais.

O último tipo de tarefa observado nesse livro está ligado à transformação entre as unidades de volume e capacidade. T_7 : *Transformar uma unidade de medida de volume em uma unidade de medida de capacidade, ou vice-versa*. Ainda no grupo de situações de medição com subtipo situações de transformação de unidades a principal técnica utilizada é a conversão para a unidade de dm^3 ou cm^3 (para a unidade de volume) e L ou mL (para capacidade) lembrando da correspondência entre elas. Essa técnica fica explícita no manual do professor e no exercício resolvido 61:

Figura 23 – Técnica aplicada à conversão entre unidades de medida.

61. Transforme 142 hl em metros cúbicos.

Resolução

Inicialmente, vamos transformar 142 hl em litros:

$$142 \text{ hl} = 14\,200 \ell$$

Como $1\,4\,200 \ell = 14\,200 \text{ dm}^3$, agora fica fácil transformar em metros cúbicos:

$$14\,200 \text{ dm}^3 = 14,2 \text{ m}^3$$

Fonte: Jakubovic e Lellis (1994.a, p. 234)

A partir da observação dos exercícios, fora elaborado um quadro com os tipos de tarefas que foram associadas às atividades (exemplos, tarefas, exercícios, questões) dispostas no livro.

Inclusive outros tipos de tarefa foram percebidos, mas não estariam relacionados aos conteúdos destacados. É o caso da atividade 53 que implica em T₈: *Realizar a multiplicação ou divisão de uma medida de volume (ou capacidade)* que, por sua vez, pode estar relacionada com a operacionalização entre grandezas ou entre uma grandeza e um número escalar, por isso subdivida e neste exemplo representada por T_{8.1}: *Realizar a multiplicação ou divisão de uma medida de volume (ou capacidade) por um número escalar*, também previsto nas situações de operacionalização de volumes. Além disso, coloca-se também como tipo de tarefa presente nos exemplos analisados o tipo T₉: *Comparar os volumes de dois sólidos, conhecidos os valores de suas arestas*.

Essa observação nos revela uma razão de ser do livro, o posicionamento de seus autores sobre a “matemática” que deve estar ao alcance dos alunos, descreve uma parte da Organização Matemática da coleção e está disposta no quadro abaixo:

Quadro 5 – Tipificação e quantificação das tarefas do livro da 5ª série.

TIPO DE TAREFA	SUBTIPO	ATIVIDADES QUE O CONTEMPLAM	TOTAL
T ₁ : Calcular a medida do volume de um sólido utilizando a contagem de blocos unitários	T _{1.1} : Contar os blocos unitários que formam cada aresta do sólido para calcular a medida do volume de um sólido.	Exercício 131 ³¹ Exemplos 01, 02, 03 Exercícios 50 (a, b, c), 51 (a, b)	09
T ₂ : Calcular a medida do volume de um paralelepípedo retangular cujas medidas das arestas são dadas	T _{2.1} : Calcular a medida do volume de um cubo cuja medida do comprimento da aresta é conhecida	Exemplos 04, 05 (b) Exercícios 04 (a), 52, 53, 54, 60 (b), 67, 68 Superlegal 04	11
T ₃ : Calcular a medida do comprimento de uma das arestas de um sólido retangular com medidas do volume e de outras arestas dadas		Exercício 55	01
T ₄ : Associar uma unidade de grandeza adequada para a medição de uma determinada grandeza de volume ou capacidade		Exercícios: 57 (a), 57 (b, c, d)	04
T ₅ : Transformar uma unidade de medida padrão de volume em outra	T _{5.1} : Transformar uma unidade de medida padrão de volume maior em outra menor	Exercícios 58 (a, c), 59 (a, c), 64 (c, f)	06
	T _{5.2} : Transformar uma unidade de medida padrão de volume menor em outra maior	Exercícios 58 (b, d), 59 (b, d), 64 (d)	05
T ₆ : Transformar uma unidade de medida de capacidade em outra	T _{6.1} : Transformar uma unidade de medida de capacidade maior em outra menor	Atividade 01, 02 Exemplos 01, 02 Exercícios 63 (a, b), 66 (b, d, e)	09
	T _{6.2} : Transformar uma unidade de medida de capacidade menor em outra maior	Atividade 03 Exercícios 63 (c, d), 66 (f)	05
T ₇ : Transformar uma unidade de medida de volume em uma unidade de medida de capacidade, ou vice-versa		Exercícios 60 (a, c), 61, 62 (a, b, c, d, e, f), 65 (a, b, e), 65, 66 (a, b, c), 68	18
T ₈ : Realizar a multiplicação ou divisão de uma medida de volume (ou capacidade)	T ₈ : Realizar a multiplicação ou divisão de uma medida de volume (ou capacidade) por um número escalar	Exercícios 53, 69 Superlegal S2	03
	T ₈ : Realizar a multiplicação ou divisão de uma medida de volume (ou capacidade) por outra unidade de volume (ou capacidade)		
T ₉ : Comparar os volumes (ou capacidade) de dois sólidos, conhecidos os valores de suas arestas.		Exercícios 56 (a, b), 65 Superlegal S4	04
TOTAL			75

Fonte: Banco de dados da pesquisa

Como visto, nesta série prevalecem a transformação entre as unidades de medida, capacidade (especialmente utilizando m³, dm³, cm³, L e mL) e o cálculo do volume de um sólido utilizando ou a técnica da contagem de cubinhos ou a técnica do uso da ‘fórmula do volume’,

³¹ Exercício do capítulo 2.

o que corresponde ao foco nas situações de medição e transformação de unidades. Como visto, as situações de produção foram as menos exploradas.

6.1.3 O livro da 6ª série

O livro da sexta série (JAKUBOVIC e LELLIS, 1994.b) não discute especificamente grandezas ou medidas, sequer em um subcapítulo. No entanto, como é possível ver na figura 16, há um número considerável de páginas que fazem alguma menção sobre volume, capacidade ou suas medidas de unidade. São páginas do quarto capítulo, denominado “Razões, proporções e porcentagens” que utiliza as **unidades de medida** para compor uma “contextualização” às atividades colocadas ou mesmo observar se as grandezas são ou não proporcionais a outras.

O quadro a seguir indica as tarefas deste livro que abordam alguma unidade de medida:

Quadro 6 – Uso das unidades de medida nos livros da 6ª série, por subcapítulo e atividade.

CAPÍTULO	SUBCAPÍTULO	ATIVIDADE	UNIDADE UTILIZADA
04. Razões, proporções e porcentagem	5. Regra de três simples	43	L
		49	mL/L
		65	m ³
		70	L
	6. Regra de três composta	71	L
		Exemplo 2	L
		79	L
		81	L
	7. Divisão em partes proporcionais	82	L
		89	L
		98	L
		100	L

Fonte: Banco de dados da pesquisa

Não entendemos, portanto, que haja uma contribuição efetiva que justifique uma Organização Matemática para o livro da série, voltada ao trato de volume ou capacidade.

6.1.4 O livro da 7ª série

Tal qual ocorre com o livro do ano anterior, o livro da sétima série (JAKUBOVIC e LELLIS, 1994.c) não aborda questões relativas a volume ou capacidade e, em apenas 03 (três) momentos chega a utilizar as unidades de medida referentes a estas grandezas:

Quadro 7 – Uso das unidades de medida nos livros da 7ª série, por subcapítulo e atividade.

CAPÍTULO	SUBCAPÍTULO	ATIVIDADE	UNIDADE UTILIZADA
4. Frações algébricas	1. Fração algébrica	01	L
5. Equações, sistemas e inequações	4. Problemas	39	L
		42	L

Fonte: Banco de dados da pesquisa

No capítulo 4, denominado Funções algébricas, o primeiro exercício (página 175) utiliza a unidade litro para modelizar uma situação envolvendo combustível (gasolina) que permite a escrita de uma expressão (fração algébrica) como se observa em:

Figura 24 – Atividade que faz uso da unidade de medida litro no livro da 7ª série.

1. Responda com frações algébricas.
- a) Se um litro de gasolina custa x cruzeiros, quantos litros de gasolina posso comprar com 150 cruzeiros?
- b) E quantos litros posso comprar com y cruzeiros?

Fonte: Jakubovic e Lellis (1994.c, p. 175)

No capítulo 5 “Equações, sistemas e inequações”, também é usada a unidade litro em dois momentos: nos exercícios 39 (p. 203) e 42 (p. 204). Eles contextualizam questões cuja tarefa é resolver sistemas de equações de 1º grau. A grandeza utilizada poderia ser substituída por outra que, ainda assim, haveria condições para interpretar e resolver os problemas apresentados. Ou seja, não há um uso para as grandezas que, de fato, esteja envolvendo uma praxeologia no estudo de volume e/ou capacidade.

6.1.5 O livro da 8ª série

O livro da oitava série (JAKUBOVIC e LELLIS, 1994.d) também não tem um estudo específico para as grandezas aqui estudadas, e somente em três momentos faz uso da unidade de medida litro conforme quadro abaixo:

Quadro 8 – Uso das unidades de medida nos livros da 8ª série, por subcapítulo e atividade.

CAPÍTULO	SUBCAPÍTULO	ATIVIDADE	UNIDADE UTILIZADA
4. Funções	3. Utilizando frações	23	L
		25	L
	4. Função constante. Funções de 1º e 2º graus	30	L

Fonte: Banco de dados da pesquisa

As referências não justificam um estudo de organização matemática ou didática para o conteúdo volume e capacidade, não cabendo determo-nos sobre o livro para sejam acrescidas situações de análise para nossa pesquisa.

6.2 A ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA DA COLEÇÃO DE 2015

Marília Ramos CENTURIÓN deu continuidade à obra de José JAKUBOVIC e por alguns anos, dividiu essa tarefa com o professor Marcelo Cestari LELLIS, assim como consta no Quadro 2. A coleção “Matemática na medida certa” ganhou várias mudanças e procurou atender além de uma demanda de mercado, questões relativas a exigências oficiais e editoras, o que fez com que mudasse de editora e de nome. “Matemática nos dias atuais: na medida certa” é o nome recebido na última escolha dos livros didáticos para os anos finais do ensino fundamental antes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Já numa breve folheada pelo sumário, livro do professor e livro do aluno, percebe-se algumas alterações importantes para o suporte ao docente em sua atividade laborativa, bem como aos alunos que ganharam uma coleção mais atrativa.

Este subcapítulo é proposto para que a discussão sobre a praxeologia da coleção mais recente, aos moldes do que foi feito na coleção anterior.

6.2.1 O manual do professor: Assessoria pedagógica

Diferente da coleção anterior, o material de apoio ao professor denominado **Assessoria Pedagógica**, está situado nas últimas folhas e tem, em média, 54 folhas.

Em sua *apresentação* (comum nos livros do professor em todos os anos) são apresentados os princípios metodológicos utilizados, bem como diversas situações pensadas para auxiliar o professor a aproveitar os textos, atividades e outras situações que foram propostas dentro do livro do aluno, formatados a partir da experiência docente dos autores.

Justificando a estruturação do material a autora complementa que

As observações conclusões oriundas da prática foram complementadas pelas muitas pesquisas em Educação Matemática e pelas ideias expostas nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN), documento que já tem duas décadas, mas que ainda traz orientações relevantes para o ensino e a aprendizagem da Matemática. (Elementos das ideias de alguns educadores matemáticos e dos PCN são reproduzidos em muitos trechos dessa Assessoria Pedagógica). (CENTURIÓN e JAKUBOVIC, 2015.a, p. 283)

A assessoria pedagógica é dividida em 09 (nove) capítulos, sendo a apresentação e os 05 (cinco) primeiros, além da apresentação, exatamente iguais em todos os livros da coleção: Apresentação; Convite à reflexão; Características desta coleção; A atuação do professor nesta coleção; A avaliação; Bibliografia; Conteúdos e objetivos específicos do volume; Observações sobre os conteúdos e atividades; Comentários sobre a seção Ação; Resolução das atividades.

O convite à reflexão é um compêndio de citações de diversos autores da educação matemática. Busca imprimir textos e documentos que serviram de referência para a (re)construção do livro. Entre estes está o posicionamento do “National Council of Supervisors of Mathematics – NCSM”, que é uma associação americana de supervisores de matemática, que identifica doze áreas de competências a ser apresentadas pelos alunos, entre elas **medidas**:

A capacidade de medir é uma habilidade de base há muito tempo reconhecida pelos educadores, aparecendo na maioria dos currículos de matemática. O NCSM reforça essa tendência, ao afirmar que os estudantes deverão aprender os conceitos fundamentais de medidas e desenvolver suas capacidades em medir distância, superfície, massa, tempo, capacidade, temperatura e ângulos. Segundo a associação, os alunos deverão adquirir tais habilidades através de situações concretas. Tal recomendação é bastante pertinente, pois, em muitas escolas, os alunos aprendem as regras de transformação de múltiplos e submúltiplos das unidades de medida, mas não têm noção da unidade em si mesma (LORENZATO e VILA, 1993, p. 47)

Este tópico é finalizado com uma discussão sobre as novas tendências na área da educação matemática e são expressos os objetivos do ensino da matemática pelos PCN, os quais já tratamos anteriormente. Essas citações ocorrem ainda no terceiro tópico (*Características desta coleção*) da Assessoria, quando o enfatiza as recomendações dos PCN. Nesse trecho, a seleção, a natureza e os eixos dos conteúdos são formatados seguindo as recomendações dos parâmetros, como visto nos trechos:

A concepção desta coleção leva em conta as recomendações dos PCN e dos modernos estudos de educação matemática. [...]
Foi considerada a classificação dos conteúdos em **conceituais, procedimentais e atitudinais** conforme proposta dos PCN. [...]
Os PCN consideram quatro **eixos de conteúdos**: Números e operação (que inclui álgebra), Grandezas e medidas, Espaço e forma (dedicado à geometria) e Tratamento da informação (envolvendo estatística e probabilidade). **Todos os volumes da coleção contêm um ou mais capítulos dedicados a cada um dos eixos.** (CENTURIÓN e JAKUBOVIC, 2015, p. 293).

Ainda são apresentadas outras percepções e preocupações para a formatação do material, de modo que também houve o cuidado em apresentar a *visão interdisciplinar*, a

comunicação matemática, o desenvolvimento de atitudes que favorecem o aprendizado e o domínio técnico a se manipular o LD.

Esses cuidados impactaram diretamente na estrutura dos livros da coleção, de modo que cada um dos livros foi organizado em 8 capítulos assim estruturados:

Quadro 9 – Estrutura dos livros da coleção “Matemática nos dias atuais: na medida certa” de 2015.

Seções específicas dos capítulos	Seções básicas
• Abertura • Conexões (da Matemática com o dia a dia ou com as outras disciplinas) • Revedo conceitos e procedimentos (no final do capítulo, contendo exercícios e problemas de revisão abrangendo capítulos anteriores) • A matemática tem história (conexão com a história da matemática)	• Texto teórico • Pense e responda (exercícios e problemas) • Pensando em casa (exercícios e problemas) Sessões extraordinárias: • Ação • Desafios e surpresas • Você sabia que...

Fonte: Centurión e Jakubovic, 2015.a, p. 294

A seção **Texto teórico** corresponde à apresentação teórica do tema matemático do item, que será reforçado com os exercícios – e por vezes também problemas que exigem mais raciocínio ou ilustram aplicações do assunto – que estão presentes em **Pense e responda** (antes *Exercícios*). **Pensando em casa** (anterior *Exercícios para casa*) é uma continuidade das atividades que “treinam” o aluno para observar problemas que podem ser resolvidos com os conteúdos já trabalhados até então. **Ação** (que perdeu o sinal de exclamação) propõe um problema que pode ser resolvido em grupo. **Revedo conceitos** (antes *Superlegal*) envolve problemas e exercícios não restritos à última sessão, mas uma mescla deles.

As novas seções são: **Desafios e surpresas** que apresenta problemas cuja resolução dá oportunidade para o aprofundamento em algum tema ou leva à criação de estratégias originais de resolução; **Você sabia que...** contendo lembretes e curiosidades; **Conexões**, que apresenta situações que o saber é relacionado com outras áreas do conhecimento; e, **A matemática tem história** que traz abordagens históricas sobre o conceito ou procedimento trabalhado.

A terceira etapa foca na **atuação do professor nesta coleção**, para que possam aproveitar ao máximo o material como é o caso de recursos tecnológicos, do estímulo ao cálculo mental, do letramento digital, entre outros. Também faz um apanhado sobre os entendimentos mais recentes de **avaliação**, incluindo as recomendações os PCN-Mat (BRASIL, 1998.a, p. 59).

Finalizada essa etapa adentra-se em cada livro a uma produção personalizada que visa atender os conteúdos trabalhados em cada ano/série. A antiga seção *Planejamento de curso* passou a ser chamada **Conteúdos e objetivos específicos do volume**. Em vistas gerais desse

conteúdo chegou-se ao seguinte quadro (equivalente ao Quadro 3) que levanta os apontamentos sobre volume e/ou capacidade já na estrutura do sumário.

Quadro 10 – Volume e capacidade no “Planejamento do curso” da coleção de 2015.

LIVRO	CAPÍTULO	CONTEÚDO	OBJETIVOS
6º ano	8. Medidas	4. Volume	Relacionar volume à medida de espaço. Identificar o centímetro cúbico como unidade de medida de volume. Calcular a medida do volume de paralelepípedos retangulares.
		5. Capacidade	Reconhecer o litro como unidade de capacidade e comparar o litro com o decímetro cúbico. Aplicar o cálculo da medida do volume em situações práticas.
7º ano	8. Unidades de medida	1. Medidas no dia a dia	Revisar a ideia de medir, o uso de unidades informais e padronizadas.
		3. Unidades de medida de volume	Reconhecer as unidades de medida de volume do sistema métrico. Transformar unidades resolver problemas envolvendo essas unidades.
8º ano	5. Grandezas e medidas	1. A necessidade de medir	Ampliar e construir a noção de medida a partir do reconhecimento de seu uso no contexto social e das grandezas físicas. Reconhecer as unidades de base do Sistema Internacional de Unidades, bem como os múltiplos e submúltiplos dessas unidades. Reconhecer unidades de medida que não fazem parte do SI, usualmente utilizadas no contexto social e empregadas em consonância com as do SI. Resolver problemas que envolvam grandezas e medidas, usando conhecimentos de proporcionalidade, leitura e interpretação de gráficos e tabelas. Analisar as variações do perímetro e da área de um quadrado em relação à variação da medida do lado.
		2. Medidas expressas por razões	Reconhecer grandezas determinadas pela razão entre outras duas grandezas. Reconhecer medidas determinadas pela razão entre outras duas medidas. Resolver problemas que envolvam grandezas e medidas determinadas pela razão entre outras duas.
9º ano	6. Geometria e medida: áreas e volumes	5. Volume: uma revisão	Conceituar volume. Reapresentar a fórmula de volume para paralelepípedos retângulos. Calcular volumes usando o conceito e a fórmula.
		6. Volume de prismas e cilindros retos	Conceituar prismas e cilindros retos e oblíquos. Reconhecer que, se a área não muda, o volume de prismas e cilindros é proporcional à altura. Calcular volumes de prismas e cilindros utilizando usando a fórmula.

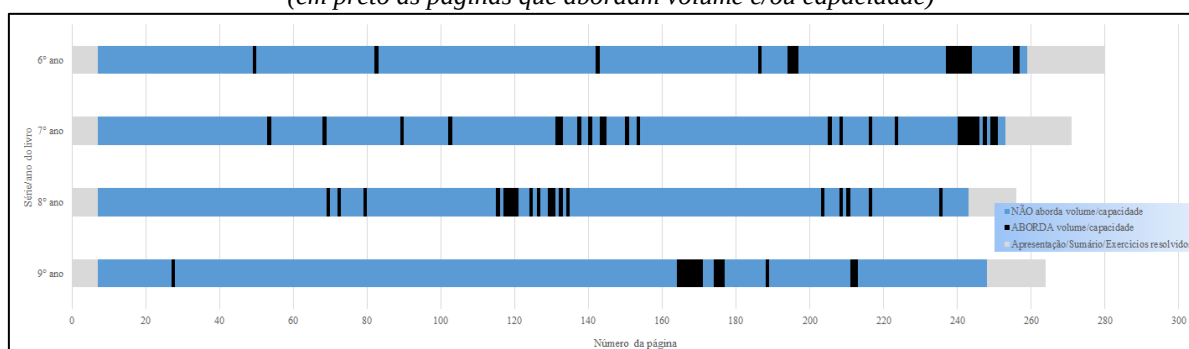
Fonte: Centurión e Jakubovic (2015.a, p. 309), (2015.b, p. 300), (2015.c, p. 283) e (2015.d, p. 291)

Nesse quadro já se percebe uma grande mudança sobre a abordagem de volume e capacidade, comparados aos resultados da coleção anterior, listados no Quadro 4. A ampliação da discussão sobre o Bloco Grandezas e Medidas, e a distribuição dos conteúdos relativos ao mesmo ao longo dos quatro anos, realizando um aprofundamento gradativo e contínuo, impõe ao professor e ao aluno uma maior familiaridade e aguçamento ao tema.

Outra novidade no livro do professor é que antes das **Resoluções de atividades** (anteriormente *Respostas dos exercícios para casa*) foi acrescida a sessão **Observações sobre conteúdos e atividades** que, de fato, caracteriza uma ‘assessoria’ ao professor. Nela são discutidas as ideias e sugestões que o professor pode observar quando ministrar o conteúdo aos alunos, relacionando com documentos oficiais (como os PCN e PCN-Mat) e outras leituras. Assim, as citações dessa seção serão utilizadas dentro das análises dos livros didáticos, inclusive para justificar, na Organização Matemática dos livros, as referências ao conteúdo.

Aos moldes do que fora realizado na coleção de 1994, foram anotadas as páginas de cada livro da coleção “Matemática nos dias atuais: na medida certa”, de 2015, em que, de alguma forma, foram observados usos das grandezas volume ou capacidade, ou mesmo suas unidades de medida (padrão ou não) nos quatro anos (6º ao 9º), rendendo o gráfico seguinte:

Gráfico 3 – Linha do tempo de volume/capacidade na coleção de 2015, por ano.
(em preto as páginas que abordam volume e/ou capacidade)



Fonte: Centurión e Jakubovic (2015.a, 2015.b, 2015.c, 2015.d)

No gráfico 3 estão dispostas na cor preta as páginas que, de algum modo, abordam o conteúdo volume e/ou capacidade, seja através das grandezas, ou mesmo pelo simples uso das unidades de medida associadas a algum outro conteúdo. Vê-se, então, que as estruturas das duas coleções são bastante distintas. Se na coleção anterior havia uma concentração em um único livro, nesta o conteúdo é verificado em todos os anos.

Nos próximos subcapítulos passamos a analisar os livros do aluno, comparando com os comentários e recomendações específicos e que constam no livro do professor.

6.2.2 O livro do 6º ano

Iniciamos nossas observações pelo manual do professor. Nele, é proposta a realização de medições em situações práticas como empilhamentos, preferencialmente, de cubos de 1 cm^3 , a exemplo do material dourado. Para a capacidade é sugerida a comparação entre o volume

(geralmente em decímetros cúbicos) e o tanto de líquido (em litros ou mililitros) que cabe dentro de um objeto a se construir com cartolina e fita adesiva, assim como outros recursos às páginas 241 a 243 do livro do aluno, que por sua vez, possui uma abordagem equivalente à realizada no livro da 5ª série (1994.a) da coleção anterior, todavia, com maior rigor no trato do conteúdo, típicos de processos de revisão e adaptação do material com a leitura de pesquisas e documentos oficiais.

Os sete primeiros capítulos utilizam as unidades de medida, dessa vez não de forma aleatória, mas com amparo nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para os anos iniciais (BRASIL, 1997), que recomendam o contato do aluno com medições e comparações de grandezas, entre elas o litro (capacidade), como ocorre nos seguintes exemplos e atividades:

Quadro 11 – Uso das unidades de medida nos livros do 6º ano, por subcapítulo e atividade.

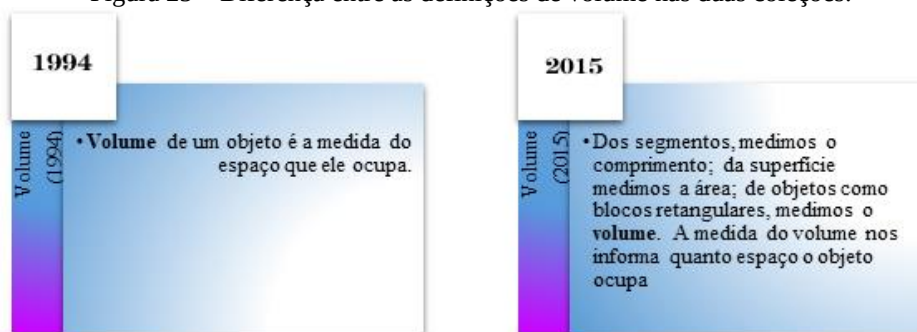
CAPÍTULO	SUBCAPÍTULO	ATIVIDADE	UNIDADE UTILIZADA
1. Números naturais, operações e resolução de problemas	Pensando em casa	33	L
5. Frações e decimais	1. As Frações	Exemplo	L
6. Operações com números racionais	3. Divisões de fração	6 (a)	L
		6 (b)	L
		4	L
	5. Multiplicação de decimais	6	L
		13 (a)	L
		13 (b)	L

Fonte: Banco de dados da pesquisa

Também, como ocorre no livro de 1994, há uma abordagem prévia do cálculo da medida do volume de um bloco retangular utilizando – como referência – a contagem de cubinhos unitários justapostos. O exercício 6 da página 83 do novo livro é o mesmo indicado na Figura 18, cujo tipo de tarefa T_1 é o mesmo utilizado para resolução.

Enfim o capítulo 8 do livro é voltado às **Medidas**, dentre as quais são exploradas as de comprimento, área, **volume**, **capacidade**, massa e tempo. Assemelha-se bastante ao da coleção anterior, com a descrição em separado do volume (subitem 4) e da capacidade (subitem 5). Observe os recortes abaixo, a fim de compará-los:

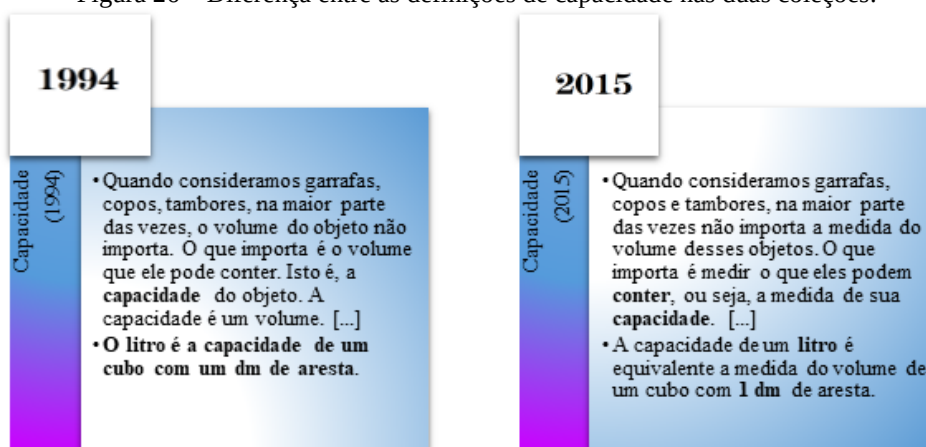
Figura 25 – Diferença entre as definições de volume nas duas coleções.



Fontes: adaptado de Jakubovic e Lellis (1994); Centurión e Jakubovic (2015.a)

O texto anterior foi atualizado de forma que a relação direta entre volume e medida que anteriormente havia sido dada, fora transformada para uma relação indireta, em que a medida do volume é uma propriedade numérica para uma a grandeza volume, que por sua vez não recebeu uma definição pronta. Por mais sutil que possa parecer, há uma substancialidade na correção do teorema-ação, que facilita o entendimento do conteúdo pelo aluno, e mais clareza para o professor tratá-lo em sala. O mesmo ocorre com a grandeza capacidade:

Figura 26 – Diferença entre as definições de capacidade nas duas coleções.



Fontes: adaptado de Jakubovic e Lellis (1994); Centurión e Jakubovic (2015.a)

Assim como no caso de volume, a diferenciação entre a grandeza e a unidade de medida mais uma vez ocorreu na nova coleção. A comparação entre o litro e o volume do cubo de aresta igual a 1 dm é apontada embora não seja estabelecida uma diferença mais direta entre elas.

Até o fim do livro não se observam novos *tipos de tarefa* ou mesmo a supressão de algum dos tipos já identificados na 5ª série. O que ocorre, de fato, é a mudança na elaboração da tarefa, um aprimoramento no texto que o compõem e o estabelecimento de outras relações, como pode ser visto no quadro abaixo:

Quadro 12 – Tipificação e quantificação das tarefas do livro do 6º ano.

TIPO DE TAREFA	SUBTIPO	ATIVIDADES QUE O CONTEMPLAM	TOTAL
T ₁ : Calcular a medida do volume de um sólido utilizando a contagem de blocos unitários	T _{1.1} : Contar os blocos unitários que formam cada aresta do sólido para calcular a medida do volume de um sólido.	Exemplos 01, 02, 03 Pense e responda 01, 02 (a, b), 03 (a, b)	08
T ₂ : Calcular a medida do volume de um paralelepípedo retangular cujas medidas das arestas são dadas	T _{2.1} : Calcular a medida do volume de um cubo cuja medida do comprimento da aresta é conhecida	Exemplos 04 (a, b) Exercícios 04 Pensando em casa 26	04
T ₃ : Calcular a medida do comprimento de uma das arestas de um sólido retangular com medidas do volume e de outras arestas dadas		Pense e responda 02 (a, b, c) Pensando em casa 27	04
T ₄ : Associar uma unidade de grandeza adequada para a medição de uma determinada grandeza de volume ou capacidade		Pense e responda 01 (a, b, c)	03
T ₅ : Transformar uma unidade de medida padrão de volume em outra	T _{5.1} : Transformar uma unidade de medida padrão de volume maior em outra menor	Pense e responda 03 (a) Pensando em casa 29, 30, 31, 32 (a)	05
	T _{5.2} : Transformar uma unidade de medida padrão de volume menor em outra maior		
T ₆ : Transformar uma unidade de medida de capacidade em outra	T _{6.1} : Transformar uma unidade de medida de capacidade maior em outra menor	Pense e responda 03 (b, d)	02
	T _{6.2} : Transformar uma unidade de medida de capacidade menor em outra maior		
T ₇ : Transformar uma unidade de medida de volume em uma unidade de medida de capacidade, ou vice-versa		Pense e responda 02 (a, b, c), 03 (a, c), 04 Pensando em casa 29, 30	08
T ₈ : Realizar a multiplicação ou divisão de uma medida de volume (ou capacidade)	T _{8.1} : Realizar a multiplicação ou divisão de uma medida de volume (ou capacidade) por um número escalar	Pense e responda 06 (a, b) Desafios 01, 03 Pensando em casa 31, 32 (a, b)	07
	T _{8.2} : Realizar a multiplicação ou divisão de uma medida de volume (ou capacidade) outra medida de volume (ou capacidade)		
T ₉ : Comparar os volumes (ou capacidade) de dois sólidos, conhecidos os valores das medidas de suas arestas.		Desafios 02 Pensando em casa 28 (a, b)	03
TOTAL			44

Fonte: Banco de dados da pesquisa

A redução em 41% (quarenta e um por cento) do número de tarefas é um fator que deve ser ressaltado. Olhando para essas atividades e exemplos (parte delas em ambas as coleções) pode-se perceber uma evolução de um sistema baseado na resolução de um número maior de atividades (mas tecnicista), para outro que valoriza a problematização e a busca por contatos

diferentes com o conteúdo sem abrir mão do conhecimento matemático em jogo. É nova razão de ser do livro. Até mesmo há tipos de tarefa que passaram a ser menos enfatizadas.

Esses números também chamam a atenção para outro aspecto: o fato de haver 44 tipos de tarefa nesse livro, não significa que haja a mesma quantia de atividades³². Assim, afirmamos que alguns exercícios suprimiram ou simplesmente deixaram de desenvolver a *técnica* para dispor de contextos que focassem mais as *tecnologias*, os porquês de se fazer aquilo, contendo, por vezes, mais de um *tipo de tarefa* para a mesma questão.

6.2.3 O livro do 7º ano

Ao dar prosseguimento na análise da coleção, dessa vez com livro do 7º ano, percebe-se a recorrência a conceitos vistos anteriormente que, em seguida, são aprimorados, proposta pelos autores no livro do professor. Da mesma forma, intenta-se um aprofundamento gradativo nas ideias que envolvem a abertura para as grandezas de volume e capacidade bem como suas unidades de medida, são atendidos sutilmente. Mais à frente veremos que as diversas citações e abordagens das unidades – especialmente o litro – enfatizam o uso da medida de unidade e não, propriamente, as grandezas.

Na Assessoria Pedagógica, os autores justificam pelos PCN a articulação entre os saberes ligados à medida e outros campos de conhecimento como geometria, números e álgebra. Aqui também se enfatiza a importância do uso do material dourado (ou material Montessori) para relacionar diversas unidades de medida, inclusive comparando medidas de massa para, então, comparar volume.

Logo no primeiro capítulo “Números inteiros” um dos exercícios tem por foco o uso da potenciação e teria por tipo de tarefa T₁₀: *Calcular o valor da potência correspondente à medida do volume de um cubo com valor da aresta conhecido*, havendo uma figura que remete à contagem de cubinhos, conforme figura abaixo:

³² Deve-se ressaltar que, como descrito anteriormente, cada exemplo ou atividade proposta no livro, ainda que disponha de solução, é considerada por nós como Tarefa, a qual é analisada sob o ponto de vista praxeológico. Uma mesma atividade (ou Tarefa) pode trazer diferentes Tipos de Tarefa, seja em diferentes alternativas (a, b, c, d), seja por perguntas ou proposições distintas em um mesmo período (do ponto de vista gramatical).

Figura 27 – Exercício do primeiro capítulo do livro do 7º ano

9 Potenciação e raiz quadrada

56. Observe que 8 cubos menores iguais formam o cubo grande.



Por isso, se pode dizer que 8 é um número cúbico. Além disso, a potência de 2^3 , que vale 8, é lida como “dois elevado ao cubo”, embora também seja correto dizer “dois elevado à terceira potência”.

Abaixo temos outro número cúbico. Qual é esse número e a qual potência está associado?

O número é 27, associado a 3^3 (3 ao cubo).



Fonte: Centurión e Jakubovic (2015.b, p. 54)

Nesta questão percebemos uma situação de medição que tem por técnica o cálculo do cubo do valor da aresta. E, mais à frente, no exercício 9 do terceiro capítulo, o qual trata do tema “Equações”, é retomado explicitamente o cálculo da unidade de medida do volume de um paralelepípedo, como pode ser visto:

Figura 28 – Exercício do segundo capítulo do livro do 7º ano.

9. Um aquário tem a forma de um paralelepípedo retangular. No 6º ano, você aprendeu que, para calcular a medida de seu volume V , multiplicamos a medida do comprimento c pela da largura ℓ e pela da altura a :



Volume = comprimento · largura · altura

$$V = c \cdot \ell \cdot a$$

Quando c , ℓ e a estão em decímetros, o volume é dado em decímetros cúbicos ou litros.

a) Um aquário desse tipo, com 7 dm de comprimento e 2 dm de largura, tem um volume de 28 litros.

Substituindo esses números em $V = c \cdot \ell \cdot a$, obtém-se uma equação na incógnita a . Escreva essa equação. $28 = 7 \cdot 2 \cdot a$ ou $14a = 28$

b) Qual é a altura do aquário? *2 dm*

Fonte: Centurión e Jakubovic (2015.b, p. 103)

A questão acima contempla dois tipos de tarefa: T_3 e T_7 . Essa questão é caracterizada pelo uso de uma situação de medição. Também surgem outras situações que, apesar de

primarem pelas operações aritméticas, envolvem tarefas ligadas às grandezas como é o caso do exemplo abaixo:

Figura 29 – Exercício do capítulo 4 do livro do 7º ano.

8. (Saresp) No rótulo de um produto de limpeza aparecem as seguintes instruções de uso:

Modo de usar	
1. Na lavagem de roupas	Misture 1 copo (200 mL) para cada 20 L de água
2. Para remoção de manchas mais difíceis	Misture 1 copo (200 mL) para cada 5 L de água
3. Para limpeza geral (pias, louças sanitárias etc.)	Misture 1 copo (200 mL) para cada 10 L de água
4. Uso em ralos	Misture 1 copo (200 mL) para cada litro de água

a) Em qual das situações o produto deve estar mais diluído? *Na situação 1.*

b) Em qual das situações o produto deve estar mais concentrado? *Na situação 4.*

Fonte: Centurión e Jakubovic (2015.b, p. 133)

Nesta atividade há uma comparação entre dois volumes em cada exemplo. Infere-se o uso das situações de comparação bem como de transformação e unidades para encontrar as razões, caracterizando o uso do tipo de tarefa T_6 (podendo ser $T_{6.1}$ ou $T_{6.2}$) além de uma nova ação que a partir de agora é caracterizada por T_{10} : *Calcular o valor da potência correspondente à medida do volume de um cubo com valor da aresta conhecido.*

Quadro 13 – Uso das unidades de medida nos livros do 7ª ano, por subcapítulo e atividade.

CAPÍTULO	SUBCAPÍTULO	ATIVIDADE	UNIDADE UTILIZADA
1. Números inteiros	9. Potenciação e raiz quadrada	56	Cubo unitário
2. Números racionais	2. Resolvendo problemas	18	L
	3. Das frações para os decimais: revendo ideias	7	L
3. Equações	2. Uso das equações	9	L e dm
4. Razões e proporções	3. Proporções	Exemplo	L
		8	L
	6. Regra de três composta	Exemplo 2	L e mL
		Conexões	L
	Pensando em casa	16	L e mL
		35	L
		36	L
6. Porcentagem	3. Situações variadas	4	L
	Revendo conceitos	6	L
7. Análise, interpretação e construção de gráficos	1. Gráficos de segmentos e gráficos de barras	6 (b)	L
	2. Gráficos de setores	8	L

Fonte: Banco de dados da pesquisa

O livro do 7º ano tem em seu último capítulo um trato reservado às “Unidades de medida”. Há uma preocupação em se estabelecer uma conexão entre a grandeza unidade e a definição de que é a representação do espaço que um determinado objeto ocupa. Para tanto, coloca o material dourado em foco e traz exemplos de objetos que tenham um formato de um bloco retangular. Essa atividade reforça o uso de situações de medição baseadas na contagem de unidades (sólidos unitários).

A transição para a equivalência entre a igualdade $1 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$ parece mais fluida por conta de outros conteúdos já vistos no livro como é o caso da potenciação. E a forma como tal transição é feita reforça outra situação de medição: a de transformação de unidade, visto que o uso da fórmula é novamente enfatizado. Também é fecunda a associação entre o decímetro cúbico e o litro. Mais uma vez é reforçado o exemplo de um objeto em formato de um cubo com arestas internas medindo 1 dm, ou seja, 10 cm.

Para a transformação das unidades de volume é utilizada a mesma técnica vista na 5ª série (figura 20), bem como alguns dos exemplos dispostos, como pode ser visto a seguir:

Figura 30 – Exemplo de transformação entre unidades de volume.

Exemplo

Vamos transformar $0,22 \text{ m}^3$ em centímetros cúbicos.

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
---------------	---------------	----------------	--------------	---------------	---------------	---------------

A unidade desejada está duas posições à direita da unidade dada. Devemos multiplicar $0,22$ por $1\,000$ e, depois, por $1\,000$, ou seja, por $1\,000\,000$.

Logo:

$0,22 \text{ m}^3 = 220\,000 \text{ cm}^3$

Fonte: Centurión e Jakubovic, 2015.b, p. 243

Assim como ocorrera na coleção anterior, a mesma técnica para este tipo de tarefa utiliza a ‘posição da vírgula ante um valor dado que pode ser interpretada de forma diferente na mesma tabela.

Os exemplos, exercícios e outras atividades neste oitavo capítulo somam um total de 38 tarefas distribuídos por 11 dos 12 tipos de tarefa identificados até o presente momento.

Quadro 14 – Tipificação e quantificação das tarefas do livro do 7º ano.

TIPO DE TAREFA	SUBTIPO	ATIVIDADES QUE O CONTEMPLAM	TOTAL
T ₁ : Calcular a medida do volume de um sólido utilizando a contagem de blocos unitários	T _{1.1} : Contar os blocos unitários que formam cada aresta do sólido para calcular a medida do volume de um sólido.	Pense e responda 07 (a, b)	02
T ₂ : Calcular a medida do volume de um paralelepípedo retangular cujas medidas das arestas são dadas	T _{2.1} : Calcular a medida do volume de um cubo cuja medida do comprimento da aresta é conhecida	Exemplo 01 Ação 01 Pensando em casa 18, 19 (a, b), 20, 21 (c)	07
T ₃ : Calcular a medida do comprimento de uma das arestas de um sólido retangular com medidas do volume e de outras arestas dadas		Pense e responda 05	01
T ₄ : Associar uma unidade de grandeza adequada para a medição de uma determinada grandeza de volume ou capacidade		Exemplo 02	01
T ₅ : Transformar uma unidade de medida padrão de volume em outra	T _{5.1} : Transformar uma unidade de medida padrão de volume maior em outra menor	Exemplo 03, 04 Pense e responda 07 (a, b)	07
	T _{5.2} : Transformar uma unidade de medida padrão de volume menor em outra maior	Ação 01 Pensando em casa 21, 23	
T ₆ : Transformar uma unidade de medida de capacidade em outra	T _{6.1} : Transformar uma unidade de medida de capacidade maior em outra menor	Pense e responda 02 (a, b, c, d, e, f)	06
	T _{6.2} : Transformar uma unidade de medida de capacidade menor em outra maior		
T ₇ : Transformar uma unidade de medida de volume em uma unidade de medida de capacidade, ou vice-versa		Pensando em casa 20, 23	02
T ₈ : Realizar a multiplicação ou divisão de uma medida de volume (ou capacidade).	T _{8.1} : Realizar a multiplicação ou divisão de uma medida de volume (ou capacidade) por um número escalar.	Pense e responda 04 Pensando em casa 17, 21 (b), 24	07
	T _{8.2} : Realizar a multiplicação ou divisão de uma medida de volume (ou capacidade) outra medida de volume (ou capacidade).	Pense e responda 01 Pensando em casa 19 (c), 22	
T ₉ : Comparar os volumes (ou capacidade) de dois sólidos, conhecidos os valores das medidas de suas arestas.		Pensando em casa 21 (c)	01
T ₁₀ : Calcular o valor da potência correspondente à medida do volume de um cubo com valor da aresta conhecido.		-	-
T ₁₁ : Calcular o número de blocos unitários necessários para completar um sólido retangular regular.		Pense e responda 04, 07 (a, b)	03
T ₁₂ : Calcular o valor da massa de algum material que cabe em um sólido, a partir de seu volume e densidade.		Ação 01	01
TOTAL			38

Fonte: Banco de dados da pesquisa

Há um exercício do bloco que chama a atenção: “3. O que você acha que ocupa um volume maior: um quilograma de chumbo ou um quilograma de algodão? ”. O livro do professor traz como resposta *1 kg de algodão*. No entanto, outras variáveis para o caso do algodão, por exemplo, e que devem ser levadas em conta: o formato dessa matéria, se é ou não oco, se está molhado ou não etc. Enfim, esta não foi contabilizada.

O exercício 04, porém, nos ofertou um novo tipo de tarefa que apesar de estar associada a mais simples das situações de operacionalização de unidades de medida de volumes (adição e subtração) ainda não tinha sido abordada. Definimos esta como o tipo de tarefa T₁₁: *Calcular o número de blocos unitários necessários para completar um sólido retangular regular*.

A seção Ação traz uma abordagem um tanto diferente do que já foi visto. Há uma associação entre a massa de ar e o volume que ela ocupa, ou seja, sua densidade. A ação 01 intenta a investigação sobre esta relação para que se encontre a massa de ar contida na sala de aula a partir do conhecimento das medidas dela e a densidade do ar e, por isso, é estabelecida como tarefa T₁₂: *Calcular o valor da massa de algum material que cabe em um sólido, a partir de seu volume e densidade*

6.2.4 O livro do 8º ano

Para o material do 8º ano a análise é estabelecida numa ordem diferente. Serão realizados os apontamentos do capítulo principal “Grandezas e Medidas” (que pela primeira vez recebe também “grandezas” em seu título) que está no “meio do livro”, para só então destrincharmos os demais, visto que há resultados interessantes.

Na “Assessoria Pedagógica” são apontados outros caminhos que o professor pode aproveitar para sua prática, provocando novas experiências. Também se enfatiza os novos conteúdos voltados às grandezas secundárias, entre elas a vazão e a densidade. Assim, o capítulo é iniciado com uma explanação sobre a noção de **grandeza**:

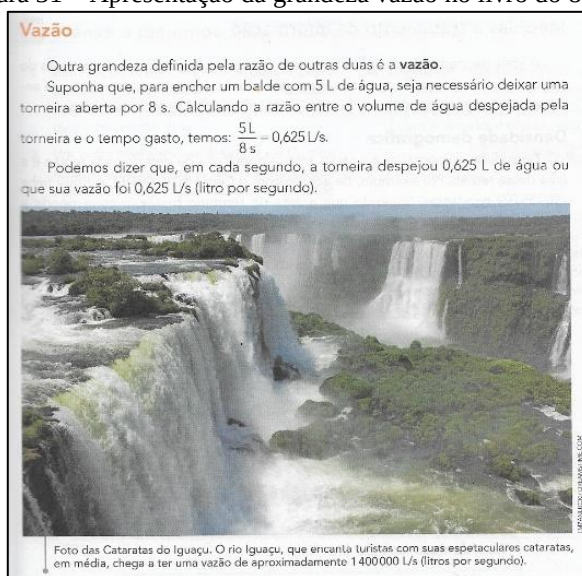
Quando se fala em medidas, está implícita a noção de **grandeza**. Isso porque medimos as grandezas e não os objetos. Grandezas são propriedades físicas dos objetos como: *comprimento, massa, volume* etc.
[...] A medida resulta da comparação entre a grandeza que se quer medir e outra, geralmente da mesma espécie, escolhida para estabelecer a comparação. Dessa maneira, para medir uma capacidade, comparamos essa capacidade com outra, tomada como padrão de comparação; para medir uma massa, comparamos essa massa com outra etc. (CENTURIÓN e JAKUBOVIC, 2015.c, p. 116).

Então são apontados alguns exemplos que, para tipificação de tarefas, são classificados como situações de comparação. Segue que, ao voltar a falar sobre as unidades de medida é levado em consideração outros modos de medição não formais, como ocorrera nos anos anteriores, e até mesmo um pouco de história da matemática é utilizada para justificar a necessidade em estabelecer uma padronização das medidas e a criação de um sistema de medidas universal, que é justamente o Sistema Internacional de Unidades (SI).

A seção “Conexões” utiliza das unidades de volume (o quilômetro cúbico) e de capacidade (mililitro) relacionando-as. Já na sessão “Pense e responda” dos três exemplos postos, há um que, de fato, está ligado ao cálculo da medida do volume de um sólido. Esse volume tem um grande diferencial. Aqui, pela primeira vez são abordadas duas grandezas secundárias: **vazão** – que a razão entre capacidade ou volume e o tempo, no corpo da parte teórica; e **densidade**, que é explorada em meio a um exercício.

O teor das duas apresentações é bem próximo como pode ser visto nas figuras abaixo:

Figura 31 – Apresentação da grandeza vazão no livro do 8º ano.

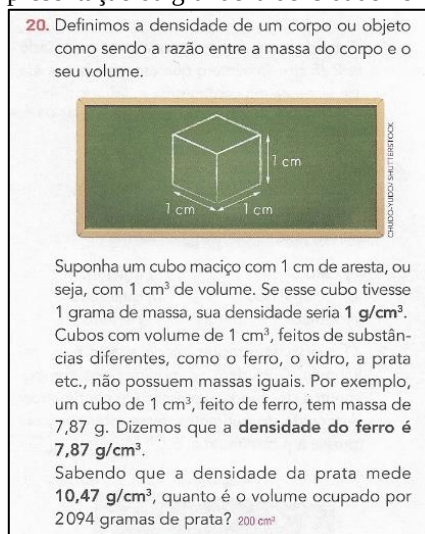


Fonte: Centurión e Jakubovic, 2015.c, p. 125

É utilizado o senso comum em nomear o “volume de água” em litros, o que caracterizaria um erro pois não há uma explicação breve para o uso de tal comparação entre estas unidades de medida.

Assim, se observarmos o exemplo abaixo, percebemos que há uma preocupação para com as figuras no LD para ajudar a conforme há uma nova discussão para tais trabalhos e demais envolvidos.

Figura 32 – Apresentação da grandeza densidade no livro do 8º ano.



Fonte: Centurión e Jakubovic, 2015.c, p. 133

O contexto criado para desenvolver o problema é interessante, mas tem um ponto muito delicado que é tratado superficialmente no início do exercício, assim como apontado em outro exercício, esse tipo de comparação seria realizado em um objeto maciço e compacto.

A sessão “Pensando em casa” contém 06 atividades que utilizam unidades de medida relativos a capacidade (litros e mililitros) e volume (decímetro cúbico e centímetro cúbico), em geral também aproveitando o desenvolvimento das grandezas e não só de suas unidades.

Com estas variáveis, fora construído o quadro abaixo para demonstrar a quantidade de vezes que cada item foi “acessado/utilizado” no LD bem como cada um dos tipos de tarefa T que foram colocados não apenas nos exercícios, mas também em questões mais simples durante o capítulo 5:

Quadro 15 – Tipificação e quantificação das tarefas do livro do 8º ano.

TIPO DE TAREFA	SUBTIPO	ATIVIDADES QUE O CONTEMPLAM	TOTAL
T ₂ : Calcular a medida do volume de um paralelepípedo retangular cujas medidas das arestas são dadas	T _{2.1} : Calcular a medida do volume de um cubo cuja medida do comprimento da aresta é conhecida	Pense e responda 03 Revendo conceitos 09	02
T ₆ : Transformar uma unidade de medida de capacidade em outra	T _{6.1} : Transformar uma unidade de medida de capacidade maior em outra menor	Pensando em casa 10	01
	T _{6.2} : Transformar uma unidade de medida de capacidade menor em outra maior		
T ₇ : Transformar uma unidade de medida de volume em uma unidade de medida de capacidade, ou vice-versa		Pensando em casa 08 (a), 09	02
T ₈ : Realizar a multiplicação ou divisão de uma medida de volume (ou capacidade).	T _{8.1} : Realizar a multiplicação ou divisão de uma medida de volume (ou capacidade) por um número escalar.	Pensando em casa 08 (a)	02
	T _{8.2} : Realizar a multiplicação ou divisão de uma medida de volume (ou capacidade) outra medida de volume (ou capacidade).	Pensando em casa 21	
T ₁₃ : Comparar a capacidade de dois ou mais objetos/corpos.		Exemplo 01, 02, 03 Pensando em casa 01 (c)	04
T ₁₄ : Comparar a capacidade e o volume de um objeto.		Conexões 01	01
T ₁₅ : Calcular o valor do tempo necessário para encher um (ou mais) objeto (s) informado(s) seu volume e vazão com que é preenchido.		Pense e responda 03 Desafios e surpresas 02 Pensando em casa 15	03
T ₁₆ : Calcular a medida do volume de um objeto dada sua densidade.		Pensando em casa 20, 21	02
T ₁₇ : Determinar a medida do volume de um objeto a partir da imersão dele em outro.		Revendo conceitos 09	01
TOTAL			17

Fonte: Banco de dados da pesquisa

Como pode se notar, muitos dos *tipos de tarefa* T já conhecidos até o 7º ano já não são mais abordados e o número deles também já não é tão expressivo. No entanto, chama a atenção que 5 novos tipos foram determinados neste volume.

No tipo T₁₃: *Comparar a capacidade de dois ou mais objetos/corpos* são explorados objetos com diferentes dimensões que, em geral, o menor deles possa servir de unidade de medida para o maior sem que haja, necessariamente, o estabelecimento de uma unidade padrão. Já as atividades caracterizadas pelo tipo de tarefa T₁₄: *Comparar a capacidade e o volume de um objeto*, na maioria das vezes explora a equivalência entre unidades de medida e capacidade sem que seja necessário, de fato, realizar uma operação de conversão, por exemplo. Nesses dois casos pode-se dizer que a situação observada é de comparação.

O tipo de tarefa T₁₅: *Calcular o valor do tempo necessário para encher um (ou mais) objeto (s) informados seu volume e vazão com que é preenchido*, é fruto direto da definição de vazão, enquanto o surgimento da discussão sobre a grandeza secundária densidade rendeu o tipo de tarefa T₁₆: *Calcular a medida do volume de um objeto dada sua densidade*.

Na situação acima, ambos os tipos de tarefa podem ser classificados como situações de produção.

A partir de uma situação de comparação, usando a imersão chega-se ao tipo de tarefa T₁₇: *Determinar a medida do volume de um objeto a partir da imersão dele em outro*.

Apesar de tantas evoluções no trato dessas grandezas, há ainda atividades que utilizam o litro tão somente para ilustrar o conteúdo dado, não evidenciando um tipo de tarefa T que seja de interesse para nossa pesquisa no momento. Esse é o caso dos exercícios 02 e 03 da seção “Pense e responda”.

Com tais análises temos condições para avançar numa discussão mais abrangente do livro, observando a abordagem também em exercícios ao longo dos outros capítulos dispostos no quadro abaixo:

Quadro 16 – Uso das unidades de medida nos livros do 8^a ano, por subcapítulo e atividade.

CAPÍTULO	SUBCAPÍTULO	ATIVIDADE	UNIDADE UTILIZADA
3. Álgebra: usando variáveis	3. Adição e subtração de monômios	05	cm ³
	4. Multiplicação, divisão e potenciação de monômios	06	cm ³
		07	cm ³
	Pensando em casa	15 (a, b)	cm ³
7. Construções geométricas	Pensando em casa	01 (a)	cm ³ e L
		23	cm ³
	Revendo conceitos	03	m ³ e L/s ³³ (litro por segundo)
8. Produtos notáveis e fatoração	1. Da aritmética à álgebra: multiplicação de polinômios	08	m ³
	6. Algumas aplicações da fatoração de polinômios	01	L

Fonte: Banco de dados da pesquisa

Apesar do quadro evidenciar tão somente as unidades de medidas utilizadas, apenas o último dos capítulos não é específico do bloco grandezas e medidas. No entanto as grandezas são fortemente priorizadas em alguns exemplos como:

³³ L/s é o símbolo para litro por segundo, uma unidade padrão de vazão

Figura 39 –Cálculo da unidade de volume ou aresta a partir do volume no livro do 8º ano.

6. O produto $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$ pode ser abreviado para $(\sqrt{5})^3$; isso você já sabe. Mas por que usamos a expressão “ao cubo”?

Se considerarmos um cubo cuja aresta mede $\sqrt{5}$ cm, o volume dele medirá:

$$V = (\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}) \text{ cm}^3 \text{ ou } V = (\sqrt{5})^3 \text{ cm}^3$$

De modo geral, dá-se o nome de cubo de um número a um produto de três fatores iguais a esse número.

Calcule o cubo de $2a^2$, ou seja, a medida do volume de um cubo cuja aresta mede $(2a^2)$ cm.

$V = 8a^6 \text{ cm}^3$

7. O volume de um cubo mede $27a^9 \text{ cm}^3$. A aresta desse cubo mede: *Alternativa d*

a) $9a^6 \text{ cm}$
 b) $3a^6 \text{ cm}$
 c) $3a^9 \text{ cm}$
 d) $3a^3 \text{ cm}$

Fonte: Centurión e Jakubovic, 2015.c, p. 73

Como se vê neste exemplo, são percebidas situações de transformação de unidades. Isso já caracteriza uma evolução forte do material em comparação com o anterior. A mudança na Organização Matemática deste livro reforça a concepção dos autores sobre o conteúdo e a adequação às recomendações dos PCN.

6.2.5 O livro do 9º ano

O último livro de nossa análise é o mais modesto na abordagem sobre as grandezas que estamos estudando, no entanto, isso não significa que não haja uma contribuição positiva para a aprendizagem sobre tal conteúdo.

O capítulo dedicado ao estudo das grandezas está imbricado ao de geometria. Após uma revisão sobre volumes, o livro segue para o cálculo de sólidos específicos como prismas e cilindros retos. Na Assessoria Pedagógica, os autores recomendam realçar a “ideia de volume proporcional à altura [...] porque justifica as fórmulas de volume apresentadas” (CENTURIÓN e JAKUBOVIC, 2015.c, p. 304). Há também uma atenção para o Princípio de Cavalieri que já

emoldura uma questão neste capítulo, embora seja um conteúdo comumente abordado no Ensino Médio.

O número de tarefas fora do capítulo 6 é, assim como no livro do 8º ano, pequeno (quatro questões), como se vê no quadro:

Quadro 17 – Uso das unidades de medida nos livros do 9ª ano, por subcapítulo e atividade.

CAPÍTULO	SUBCAPÍTULO	ATIVIDADE	UNIDADE UTILIZADA
1. Geometria: ampliações e reduções	Pensando em casa	06	L e mL
7. Funções	2. Função constante e funções de 1º e 2º graus	02	L
	Pensando em casa	05 (a, b, c)	L
		08 (a, b, c, d, e)	L

Fonte: Banco de dados da pesquisa

Em nenhum deles há uma abordagem voltada exclusivamente ao estudo das grandezas. Apenas se utilizam das unidades de volume para que ilustrar tipos de tarefa voltados ao estudo de proporcionalidade e funções de primeiro grau.

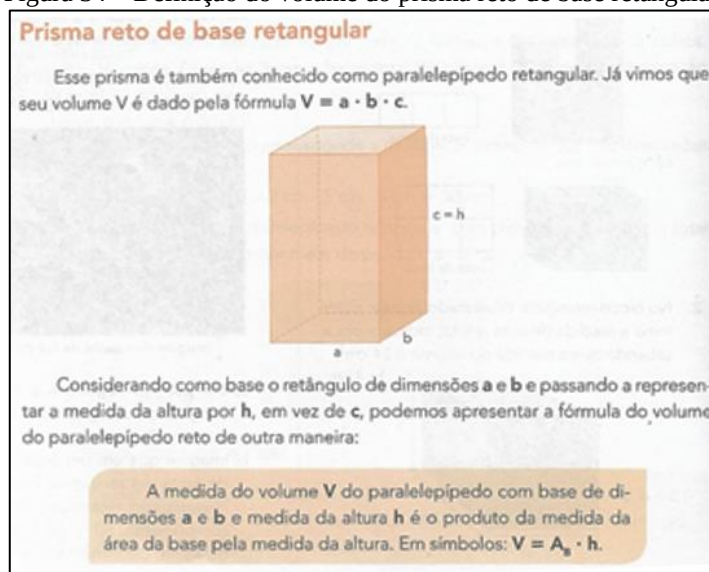
Mas, voltando ao nosso capítulo principal, vemos alguns avanços interessantes como os relatados no bloco anterior. Outras perspectivas são despertadas para o conteúdo ainda no ensino fundamental e que não eram vistos na coleção de 1994. Assuntos que envolvem, por exemplo, o volume de prismas retos e a ideia do Princípio de Cavalieri com figuras que já dão ideia de como calcular a medida do volume dos prismas oblíquos.

A ideia da revisão sobre volumes mais uma vez perpassa sobre a de contagem de cubos unitários e a utilização da fórmula que multiplica o valor das medidas das arestas ou do volume do cubo (potência). Também é marcante a presença da equivalência entre grandezas, tal qual ocorre com o decímetro cúbico e o litro ($\text{dm}^3 = \text{L}$) e agora, também destacado o centímetro cúbico e o mililitro ($\text{cm}^3 = \text{mL}$).

Até que, no capítulo 6 “Volume de prismas e cilindros retos”, ocorre a caracterização de um prisma, suas classificações (reto e oblíquo) e propriedades. O uso da fórmula para o cálculo de volumes $V = a \cdot b \cdot c$, continua sendo uma das principais técnicas utilizadas para resolver algumas questões de ordem algébrica que também fazem uso da modelagem matemática.

Com isso são apresentadas “novas” fórmulas, voltadas ao cálculo das unidades de medidas dos prismas retos, com diversas bases: retangular, circular e geral; como pode ser visto nas figuras abaixo:

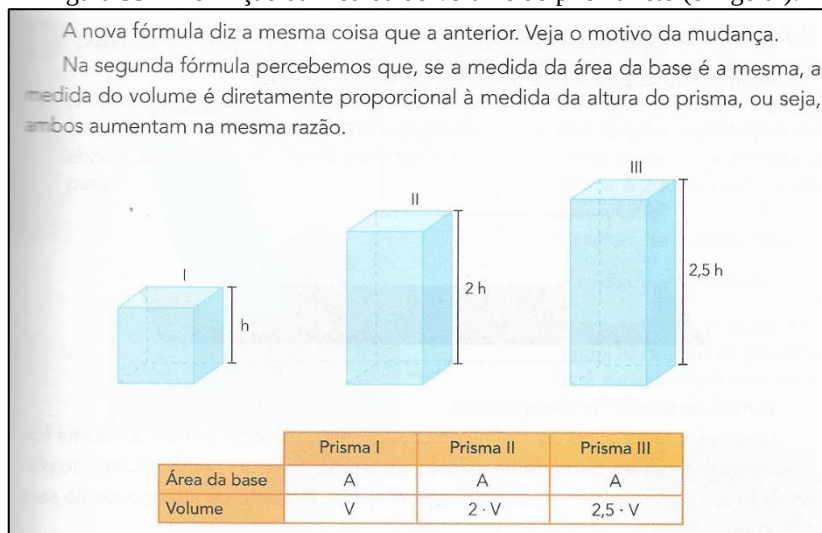
Figura 34 – Definição do volume do prisma reto de base retangular.



Fonte: Centurión e Jakubovic, 2015.d, p. 168

Faz-se questão de organizar o volume de um sólido a partir das dimensões de sua base e o estabelecimento da altura, o que é plausível quando pensamos na abstração que será requerida no trato do tema no ensino médio, mas que deve ser tratada com cautela.

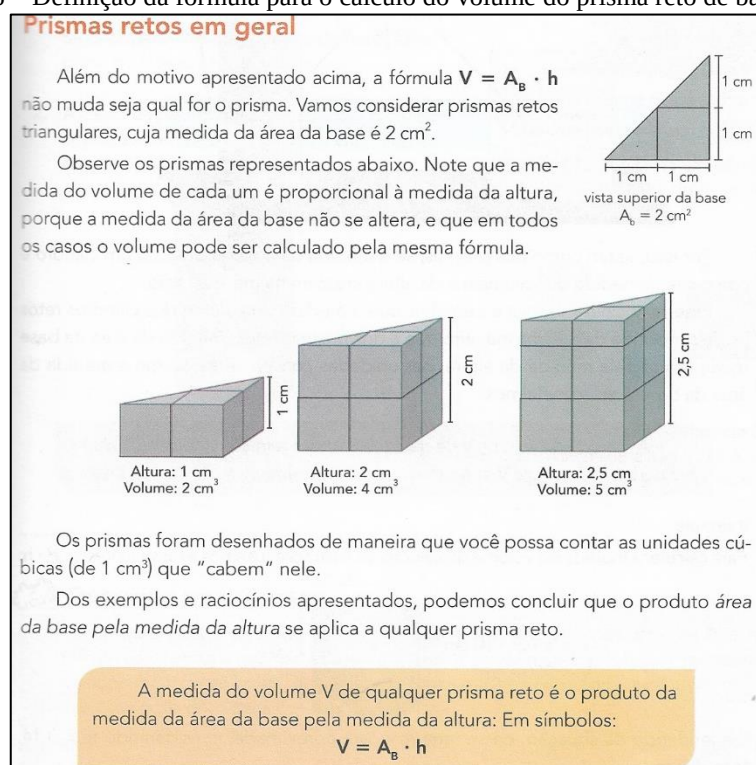
Figura 35 – Definição da medida do volume do prisma reto (em geral).



Fonte: Centurión e Jakubovic, 2015.d, p. 169

Daí, percebemos a generalização da fórmula, que abre a prerrogativa não apenas para o cálculo do volume de prismas retos com base retangular ou mesmo circular. Abre precedente para que qualquer prisma reto, independente da regularidade de sua base, possa ter seu a unidade de medida de seu volume aferido. Como pode ser visto ainda no próximo exemplo:

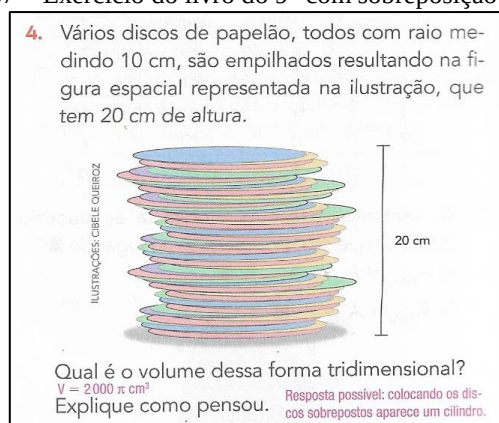
Figura 36 – Definição da fórmula para o cálculo do volume do prisma reto de base circular.



Fonte: Centurión e Jakubovic, 2015.d, p. 169

O principal ganho que acreditamos ter havido nessa coleção, na verdade, está em um dos exercícios do Pense e responda:

Figura 37 – Exercício do livro do 9º com sobreposição de discos.



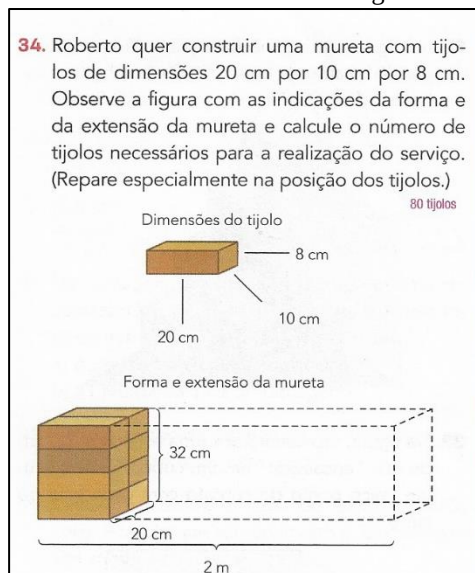
Fonte: Centurión e Jakubovic, 2015.d, p. 171

Nessa questão, especificamente, instiga-se o aluno a “organizar os discos”, formando um prisma reto com base circular, já que todos os discos têm exatamente o mesmo raio e mesma altura. Essa técnica é justificada pelo Princípio de Cavalieri, ou seja, esta é a *tecnologia* adotada.

Para essas novas discussões levantam-se outros *tipos de tarefa* das quais podem ser destacadas T₁₈: *Calcular a medida do volume de um prisma reto a partir da área de sua base*

e sua altura, que gera ainda um caso particular para as bases circulares tal que $T_{18.1}$: *Calcular a medida do volume de um prisma reto de base circular, conhecido o raio da base e a altura.*

Figura 38 – Exercício do livro do 9º utilizando contagem de blocos não unitários.



Fonte: Centurión e Jakubovic, 2015.d, p. 176

Há um tipo de tarefa que deriva dessa questão: Se é conhecida a unidade de volume em um prisma reto, e outra medida como o raio (numa base circular) ou aresta (numa base poligonal), é possível encontrar a altura do prisma, ou vice-versa. Chamamos esse tipo T_{19} : *Calcular a medida de um lado ou raio de um prisma, conhecendo também seu volume e* subdividimo-la em $T_{19.1}$: *Calcular a medida da altura de um prisma reto de base poligonal, conhecido o valor de uma aresta da base regular, ou vice-versa, e seu volume* e $T_{19.2}$: *Calcular a medida da altura de um prisma reto de base circular, conhecido o valor de seu raio, ou vice-versa, e seu volume.*

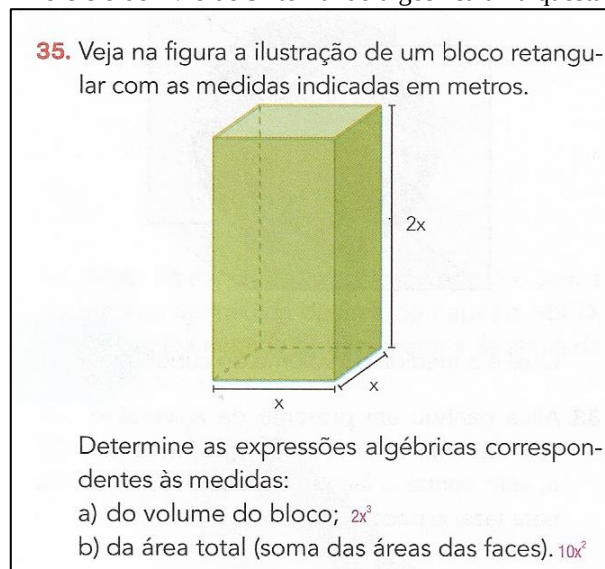
O exercício do “Pense em casa” (acima) tem uma atividade construída sob o tipo de tarefa T_{11} mas com uma variação, no lugar de bloco unitários, são utilizados blocos retangulares com dimensões já determinadas. A esta atividade criamos um novo subtipo de tarefa $T_{11.1}$: *Calcular o número de blocos retangulares necessários para completar um sólido retangular regular.*

Outro ramo da matemática que ganha força a partir da ênfase no ensino de volumes é a relação desse objeto com a álgebra nela contida. Ocorre que a fórmula para o cálculo da medida de volumes também acaba passando por esse processo de algebrização³⁴ o que acaba levando à

³⁴ Não estamos discutindo o processo de algebrização ao nível do que é desenvolvido por Munzón, Bosch e Gascón (2015) *apud* Silva, Gaita e Almouloud (2018) o fazem. É tomado como referência a redução de um problema numérico à forma algébrica.

criação de um novo tipo de tarefa T_{20} : *Expressar por meio de uma expressão algébrica o cálculo da medida de volume de um sólido dado*, também explorado nas atividades.

Figura 39 – Exercício do livro do 9º tornando algébrica uma questão de volume.



Fonte: Centurión e Jakubovic, 2015.d, p. 176

Sobre os últimos tipos de tarefa apresentados há uma prevalência entre situações de produção, mas também são percebidas, em menor número, situações de comparação e mesmo medição. Como que estas últimas contemplassem um grau menor de complexidade. Próprias para os anos anteriores, como pode ser visto no quadro:

Quadro 18 – Tipificação e quantificação das tarefas do livro do 9º ano.

TIPO DE TAREFA	SUBTIPO	ATIVIDADES QUE O CONTEMPLAM	TOTAL
T_1 : Calcular a medida do volume de um sólido utilizando a contagem de blocos unitários	$T_{1.1}$: Contar os blocos unitários que formam cada aresta do sólido para calcular a medida do volume de um sólido.	Exemplo 02, 03, 04, 07 Pense e responda 01 (a, b) Pensando em casa 31	07
T_2 : Calcular a medida do volume de um paralelepípedo retangular cujas medidas das arestas são dadas	$T_{2.1}$: Calcular a medida do volume de um cubo cuja medida do comprimento da aresta é conhecida	Exemplo 05, 07 Pense e responda 04 (a), 05 Pensando em casa 32, 33	06
T_3 : Calcular a medida do comprimento de uma das arestas de um sólido retangular com medidas do volume e de outras arestas dadas		Pense e responda 02, 03, 4 (b) Pensando em casa 39	04
T_5 : Transformar uma unidade de medida padrão de volume em outra	$T_{5.1}$: Transformar uma unidade de medida padrão de volume maior em outra menor	Pensando em casa 33	01
	$T_{5.2}$: Transformar uma unidade de medida padrão de volume menor em outra maior		

T ₆ : Transformar uma unidade de medida de capacidade em outra	T _{6.1} : Transformar uma unidade de medida de capacidade maior em outra menor	Pense e responda 4 (a)	01
	T _{6.2} : Transformar uma unidade de medida de capacidade menor em outra maior		
T ₇ : Transformar uma unidade de medida de volume em uma unidade de medida de capacidade, ou vice-versa		Pense e responda 4 (a)	01
T ₉ : Comparar os volumes (ou capacidade) de dois sólidos, conhecidos os valores das medidas de suas arestas.		Reverendo conceitos 04, 05	02
T ₁₁ : Calcular o número de blocos unitários necessários para completar um sólido retangular regular.	T _{11.1} : Calcular o número de blocos retangulares necessários para completar um sólido retangular regular	Pensando em casa 34	01
T ₁₂ : Calcular a medida da massa de algum material que cabe em um sólido, a partir de seu volume e densidade.		Pensando em casa 40	01
T ₁₃ : Comparar a capacidade de dois ou mais objetos/corpos.		Pensando em casa 30	01
T ₁₄ : Comparar a capacidade e o volume de um objeto.		Exemplo 01	01
T ₁₈ : Calcular a medida do volume de um prisma reto a partir da área de sua base e sua altura	T _{18.1} : Calcular a medida do volume de um prisma reto de base circular, conhecido o raio da base e a altura	Exemplo 10 (a, b, c), 12 Pense e responda 02 (b), 04 Pensando em casa 36, 37, 38	09
T ₁₉ : Calcular a medida do comprimento da uma aresta de um prisma dado o valor da unidade de medida de volume e outra aresta ou raio da base	T _{19.1} : Calcular a medida da altura de um prisma reto de base poligonal, conhecido o valor de uma aresta da base regular, ou vice-versa, e seu volume.	Pense e responda 03	01
	T _{19.2} : Calcular a medida da altura de um prisma reto de base circular, conhecido o valor de seu raio, ou vice-versa, e seu volume.		
T ₂₀ : Expressar por meio de uma expressão algébrica o cálculo da m de volume de um sólido dado		Exemplo 06, 08, 09 (a, b, c), 11 Pensando em casa 35 (a, b)	07
TOTAL			43

Fonte: Banco de dados da pesquisa

Enfim, esta coleção apresenta uma organização com mais pontos de diferença que de convergência com relação à anterior de 1994. O registro sobre orientações dos PCN em vários momentos no caderno do professor (Assessoria Pedagógica) demonstra o esmero e preocupação dos autores para uma revisão sistemática que atendessem não apenas a apresentação do material para um fim comercial, necessária à existência das editoras e, por conseguinte, do PNLD, mas observasse diversas recomendações PCN, permitindo que estivesse disponível ao professor e ao aluno questões discutidas *noosfericamente*.

6.3 E ENTÃO, O QUE FOI PERCEBIDO?

Como quadro resumo, reescrevemos o quadro 3 que continha todos os tipos de tarefa e, quantitativamente, fizemos um comparativo entre o número de atividades entre as duas coleções:

Quadro 19 – Comparativo entre o número de tipos de tarefas encontrados nas duas coleções

TIPO DE TAREFA	SUBTIPO	1994	2015
T ₁ : Calcular a medida do volume de um sólido utilizando a contagem de blocos unitários	T _{1.1} : Contar os blocos unitários que formam cada aresta do sólido para calcular a medida do volume de um sólido.	09	17
T ₂ : Calcular a medida do volume de um paralelepípedo retangular cujas medidas das arestas são dadas	T _{2.1} : Calcular a medida do volume de um cubo cuja medida do comprimento da aresta é conhecida	11	19
T ₃ : Calcular a medida do comprimento de uma das arestas de um sólido retangular com medidas do volume e de outras arestas dadas		01	09
T ₄ : Associar uma unidade de grandeza adequada para a medição de uma determinada grandeza de volume ou capacidade		04	04
T ₅ : Transformar uma unidade de medida padrão de volume em outra	T _{5.1} : Transformar uma unidade de medida padrão de volume maior em outra menor	11	13
	T _{5.2} : Transformar uma unidade de medida padrão de volume menor em outra maior		
T ₆ : Transformar uma unidade de medida de capacidade em outra	T _{6.1} : Transformar uma unidade de medida de capacidade maior em outra menor	14	10
	T _{6.2} : Transformar uma unidade de medida de capacidade menor em outra maior		
T ₇ : Transformar uma unidade de medida de volume em uma unidade de medida de capacidade, ou vice-versa		18	13
T ₈ : Realizar a multiplicação ou divisão de uma medida de volume (ou capacidade).	T _{8.1} : Realizar a multiplicação ou divisão de uma medida de volume (ou capacidade) por um número escalar.	03	18
	T _{8.2} : Realizar a multiplicação ou divisão de uma medida de volume (ou capacidade) outra medida de volume (ou capacidade).		
T ₉ : Comparar os volumes (ou capacidade) de dois sólidos, conhecidos os valores das medidas de suas arestas.		04	06
T ₁₀ : Calcular o valor da potência correspondente à medida do volume de um cubo com valor da aresta conhecido.		-	01
T ₁₁ : Calcular o número de blocos unitários necessários para completar um sólido retangular regular.		-	04
T ₁₂ : Calcular o valor da massa de algum material que cabe em um sólido, a partir de seu volume e densidade.		-	02
T ₁₃ : Comparar a capacidade de dois ou mais objetos/corpos.		-	05
T ₁₄ : Comparar a capacidade e o volume de um objeto.		-	02

T ₁₅ : Calcular o valor do tempo necessário para encher um (ou mais) objeto (s) informados seu volume e vazão com que é preenchido.		-	03
T ₁₆ : Calcular a medida do volume de um objeto dada sua densidade.		-	02
T ₁₇ : Determinar a medida do volume de um objeto a partir da imersão dele em outro.		-	03
T ₁₈ : Calcular a medida do volume de um prisma reto a partir da área de sua base e sua altura	T _{18.1} : Calcular a medida do volume de um prisma reto de base circular, conhecido o raio da base e a altura	-	09
T ₁₉ : Calcular a medida do comprimento da uma aresta de um prisma dado o valor da unidade de medida de volume e outra aresta ou raio da base	T _{19.1} : Calcular a medida da altura de um prisma reto de base poligonal, conhecido o valor de uma aresta da base regular, ou vice-versa, e seu volume.	-	02
	T _{19.2} : Calcular a medida da altura de um prisma reto de base circular, conhecido o valor de seu raio, ou vice-versa, e seu volume.		
T ₂₀ : Expressar por meio de uma expressão algébrica o cálculo da medida de volume de um sólido dado		-	07
TOTAL		76	145

Fonte: Banco de dados da pesquisa

A partir daí, retomamos a figura 10 e as perguntas baseadas na proposta de análise de livros didáticos por Almouloud (2015) para verificarmos se, de fato, as possíveis influências dos PCN e até mesmo do PNLD sobre o livro didático contribuíram para a melhoria da abordagem de volume e capacidade.

Entre as possíveis formas de apresentação dessa análise optamos por discorrer os comentários e comparações por blocos de perguntas à avaliação dos *tipos de tarefa*, das *técnicas* e do *bloco tecnológico-teórico*.

1) Avaliar os tipos de tarefa (T):

a) Os tipos de tarefa são postos de forma clara e bem identificados?

Em ambas as coleções, os tipos de tarefa estão claros na maior parte dos exemplos e exercícios. É fato que a elaboração dos enunciados é distinta. Enquanto o livro de 1994 apresenta muitas questões prontas com o tipo de tarefa explícito, a coleção de 2015 tem enunciados mais rebuscados e, por vezes, contextualizados, em que o tipo de tarefa precisa ser interpretado sem que haja comprometimento na inferência desse dado.

b) As razões de ser dos tipos de tarefas estão explícitas ou eles aparecem sem motivos válidos?

Em ambas as coleções a razão de ser da grandeza volume está presente, mas não a da capacidade, presente apenas em 2015. A proximidade entre as grandezas e medidas não

fica tão nítida na coleção anterior quanto à nova. No entanto, a importância no trato de ambas e a relação existente entre elas é um fator muito forte nas duas coleções.

- c) *Os tipos de tarefas são representativos das situações matemáticas? Se sim, atende as necessidades dos alunos?*

Sim. Em ambas as coleções as atividades retratam situações matemáticas, no entanto, a coleção mais nova também se vale também da conexão com outros conhecimentos e áreas tal qual orientam os PCN e regulamentam o PNLD.

Quanto ao atendimento aos alunos é preciso fazer duas análises distintas, pois são espaços temporais sob a regência de diferentes entendimentos do processo de ensino da matemática. Se em 1994 aspirava-se inovar no ensino da matemática e começavam a florescer as primeiras ideias de uma reorganização curricular, em 2015 havia um sistema de informações de quase duas décadas já consolidado. Se lá não havia sequer a possibilidade de uso de uma calculadora eletrônica, aqui os softwares e aplicativos dividem espaço com quadro e o livro na sala de aula.

Sob esse ponto de vista seria mais adequado responder: *provavelmente não*.

2) Avaliar as técnicas (t):

- a) *As técnicas propostas são efetivamente elaboradas, ou somente esboçadas?*

Não há uma diferença substancial entre as coleções que justifique o destaque de uma sobre a outra. Em ambas, a técnica é, geralmente, apresentada e quando possui menor complexidade também dispõem de uma maior elaboração. No entanto, pelo fato de ter mais material distribuído em 4 livros, a coleção de 2015 consegue levar uma leve vantagem neste quesito, também.

- b) *São fáceis de utilizar?*

Em geral, sim, em ambas as coleções.

- c) *Sua importância é satisfatória?*

Para aquilo que cada coleção se propõe e entende sobre o conteúdo volume, sim. Do ponto de vista acadêmico, não. A exemplo do cálculo da unidade de medida de volumes de blocos retangulares, a centralidade na técnica da contagem de cubos unitários e do uso da fórmula de multiplicação de medidas dos vértices ($V = a \cdot b \cdot c$) empobrece a discussão. Nesse aspecto ainda é mais grave a recorrência dessa priorização por 4 anos na coleção de 2015, em contrapartida, há utilização das ideias do Princípio de Cavalieri e da equivalência de áreas em planos paralelos ao da base para comprovar a igualdade

de volumes por exemplo, situação não presente na primeira coleção, mas de extrema importância para auxiliar a percepção do aluno a outras visões sobre o conteúdo.

d) Sua confiabilidade é aceitável sendo dadas suas condições de emprego?

Na primeira coleção há conceitos frágeis que não são bem definidos ou são definidos com erros, isso compromete a discussão de algumas técnicas e, por conseguinte, sua confiabilidade. O uso da equivalência entre as unidades de medida de volume e capacidade é uma prova disso. A coleção de 2015 repara as definições incorretas da anterior, mas insiste no uso das mesmas técnicas (salvo algumas exceções nos livros do 8º e 9º ano), porém tornam-se mais confiáveis e com mais condições de emprego. Um exemplo negativo em ambos é o uso da tabela de equivalência dentro da mesma unidade de medida (como na figura 23), que ao nosso ver, favorece interpretações diferentes ao leitor. Em sala, evitaríamos utilizar ao modo como está expresso.

e) São suficientemente inteligíveis?

Sim. As técnicas propostas em ambas as coleções são passíveis de interpretação correta e de condições para resolução dos problemas que foram apontados. Até mesmo as atividades do 8º e 9º que apresentam um pouco mais de rebuscamento também são positivas.

3) Avaliar o bloco tecnológico-teórico [θ, Θ]:

Este é o bloco mais delicado por ser o menos evidente/presente em ambas as coleções. Essa ausência já é justificada por Chevallard, Bosch e Gascón (2001) em livros dos primeiros anos do ensino regular, justamente por utilizar menores níveis de abstração e demonstrações. Por isso a tecnologia se mistura à técnica e a teoria raramente é apresentada. Ainda assim, apontamos alguns comentários sobre ele.

a) As formas de justificação utilizadas são próximas das justificativas matematicamente válidas?

Para a coleção antiga, não. Na coleção nova, essa justificação só começa a ganhar um formato mais próximo dos conceitos matemáticos a partir do 9º ano. Ideias ligadas ao Princípio de Cavalieri, por exemplo, são expostas, sem que haja a necessidade de falar explicitamente dele, por exemplo.

b) Elas são adaptadas ao problema colocado?

Quando essas tecnologias existem, sim. Os livros de 2015 têm problemas acessíveis e bem estruturados, fato que deixa a desejar na coleção de 1994, mas que não causa maiores transtornos.

c) Os argumentos usados são cientificamente válidos?

A partes, sim. Não que estejam justificados dentro das coleções, em si, mas passíveis de investigação e comprovação em estudos mais avançados.

Com o auxílio dessa análise, conseguimos ainda mais argumentos para apontar avanços em diversos aspectos praxeológicos da coleção de 1994 para a de 2015. Essa melhora não se revela apenas numa questão gráfica. É um avanço em tipos de tarefa abordados, em técnicas utilizadas, em apresentação de tecnologias que podem promover a discussão de teorias futuramente.

Com isso vamos avançar as discussões para as considerações finais em que consolidaremos estas e outras conclusões de nossa pesquisa.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No início da pesquisa estávamos motivados a descobrir quais as contribuições que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) haviam gerado no ensino brasileiro após duas décadas sendo o principal documento para a construção dos currículos e suas diretrizes do país.

O primeiro desafio a ser enfrentado era, justamente, debater sobre um documento cujas pesquisas não mais convergiam para suas propostas, discussões, inspirações, mudanças de olhares e perspectivas, comportamentos e atitudes, organizações e avaliações, situações estas que durante duas décadas fundamentaram parte das mudanças do sistema educativo brasileiro.

Com os sucessos e insucessos percebidos durante a trajetória dos PCN, ele serviu de referência inicial para que se discutisse um currículo comum a todo o território brasileiro e, assim, viesse ser promulgada, em 2017, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com desafios e novidades e motivando pesquisas e discussões aos moldes do que ocorrera no fim da década de 1990, obviamente em grau ainda mais forte visto que o último passa a ser referência até para as diretrizes dos cursos de licenciatura do país.

Olhar para as influências e impactos que foram promovidos pelos PCN sobre o sistema brasileiro de educação, é realizar um exercício de observação cautelosa e desprovida de rumores do tipo “*o que poderá ser? o que será?*”, para dar vez e voz ao “*o que foi possível perceber? o que foi possível fazer? onde avançamos? onde retrocedemos? onde ainda somos os mesmos?*”. É dotar-se de condições para compreender o processo pelo qual ora passamos e minimizemos, ao máximo, as dificuldades de implantação de uma mudança curricular e tornemos mais frequentes os momentos de apropriação das demandas ora elencadas.

Essas respostas impactariam certamente na condução do processo de inovações pelas quais novamente passamos com a BNCC: Onde não se pode mais errar? Onde há oportunidades para se avançar ainda mais? O que pode ser feito para transformar aquilo que não mudou?

Alguns recortes foram feitos para que a escolha pudesse ser realizada. Num processo análogo ao que apontamos nos níveis de codeterminação, havia uma estratégia para essa análise: o Brasil, através do Ministério da Educação coloca à disposição diversas legislações para garantir padrões mínimos de qualidade ao sistema brasileiro que é universal e gratuito. Sobre a escola, em seus vários níveis de ensino, destacam-se os anos fundamentais e, sob esses, diversas disciplinas como, por exemplo, a Matemática. O livro didático tem um processo de participação multinível e multitarefas pois recebe influência de várias das camadas da construção educacional, ao mesmo tempo que também os influencia.

Nisso, o recorte de Barbosa (2011), adaptado por nós localiza a centralidade da *instituição livro* para com o estudo. Assim os níveis mais baixos foram consequentemente sendo traçados. A escolha por estudar volume destrinchou diversas observações durante o percurso da pesquisa: desde a sua localização nas discussões do bloco de Grandezas e Medidas até mesmo suas definições e outras variáveis, o que possibilitou o enriquecimento dos resultados.

Outro fator determinante é a escolha por analisar esses livros em dois períodos tão diferentes: se num período a coleção ainda não tinha noção das competências que seriam exigidos pelos PCN, no outro momento, além de uma vasta experiência e contato com o mesmo para a elaboração, já havia as primeiras discussões para uma futura base curricular comum a todo território nacional, mas que sequer lhes passava à cabeça quais seriam, de fato, tais exigências. Além do mais, o PNLD já possuía uma robustez considerável para que os livros fossem analisados.

E como analisar essas diferenças? A praxeologia da Teoria Antropológica do Didático (TAD), apesar de tão densa e complexa, nos ofertou elementos e condições para uma análise técnica do material escolhido. Observar as Organizações Matemática (OM) de cada uma das coleções, observando suas localizações temporais, recursos disponíveis e comprometimento com o processo escolar, nos auxiliou para que fossem traçados os objetivos geral e específicos que orientaram esse trabalho.

Para nossa análise fundamentamos a pesquisa sobre três pilares, os dois primeiros foram os Parâmetros Curriculares Nacionais e o Livro Didático. A justificativa para essa análise em conjunto se dá pelo fato de que a efetividade dos Parâmetros fica associada às características que as coleções de livros analisadas possuem, ou seja, suas organizações matemáticas. Mas o destrinchar da pesquisa nos mostrou que tão importante quanto os PCN era o PNLD, que regulamentava essa adequação desse material às aspirações da noosfera.

Por 20 anos, os Parâmetros foram a principal referência curricular no país. Ele regia as competências de qualquer escola brasileira, especialmente para as do ensino público (federal, estadual ou municipal), que deveriam formular ou revisar suas diretrizes curriculares.

Num breve histórico sobre as diversas tentativas de organização de um currículo a partir de conteúdos mínimos, já na década de 1920 foi possível observar que eles esbarravam na invariabilidade da prática docente e no caráter elitista que a disciplina trazia. Talvez justamente por essas duas características tivesse sido tão forte o Movimento Matemática Moderna no Brasil. A disciplina orientada por militares, a forte influência americana no país assegurada pela comercialização de material didático para distribuição entre alunos da rede pública com

financiamento compartilhado inclusive entre estados, era uma força-tarefa de várias frentes para convencer sobre aquilo que era entendido como a melhor forma de promover educação.

O livro (didático) foi, certamente, o fruto mais forte de todo esse processo. Um compêndio de exercícios que exigiam do aluno a reprodução contínua de resolução de exercícios, em geral, com um modo de operacionalização já conhecido anteriormente. Outro aspecto muito forte dos livros desse período é a primazia pela linguagem matemática, em seu rigor. A presença de demonstrações e teoremas tornavam claros qual a referência devia ser seguida pelos autores.

Os parâmetros de 1997 e 1998 foram, para o sistema brasileiro um dos marcos principais para a provocação de uma “transformação positiva” que levaria em consideração a integralidade do saber (não o blocando em conteúdos isolados), as características regionais, a participação do professor desde a escolha do livro didático até mesmo sua organização em sala de aula, por turmas, respeitando blocos de saber em mesmo grau de relevância.

Não a toa os próprios Parâmetros colocaram em xeque a qualidade dos livros (1998.a), as interpretações equivocadas advindas das últimas discussões, a falta de definição de atitudes e procedimentos que iam além do mero conteúdo a ser visto em sala de aula. Por isso não abria mão de que esse processo de mudança também ocorresse junto aos livros didáticos.

A regular aquisição do livro didático e o processo de participação direta do professor para a escolha do material que ele desejaria trabalhar em sua escola, impulsionaram os autores e editoras, conforme Silva (2012), a prover obras que se comunicassem com eles e os alunos de forma mais direta, mas também estivessem assegurados em qualidade que seria julgada agora por pesquisadores das principais universidades públicas do país.

As coleções que foram escolhidas para a pesquisa permitem observar a influência dos PCN e do PNLD para sua revisão. O manual do professor na coleção de 2015 (denominado *Assessoria Pedagógica*) é rigoroso nas justificativas de escolhas e apresentações de elementos da coleção a partir de indicações dos PCN, prioritariamente, além de outras pesquisas desenvolvidas em todo Brasil, além de referências internacionais.

Satisfatoriamente a coleção de 2015 consegue avançar muito nas orientações dos PCN e, ousar desenvolver um capítulo voltado aos estudos das Grandezas em Medidas ao longo dos quatro anos/volumes, sendo este o principal diferencial. Ademais, as recomendações sobre quais conteúdos ver em cada um dos ciclos também foram devidamente atendidas. Até mesmo a priorização de técnicas de contagem de cubos unitários e conversões entre unidades, por mais que acreditemos como pesquisadores, ser “pobre”, dada uma diversidade de técnicas possíveis, foram colocados pelos parâmetros quando da discussão sobre este bloco do saber matemático.

Outros usos para as medidas, de forma conexa aos demais blocos também foi respeitado, apesar que entre as medidas de volume e capacidade, foram priorizados o uso do litro e do mililitro (unidades de capacidade) ainda que a grandeza mais trabalhada tenha sido o volume (que tem por medida padrão pelo SI o metro cúbico).

Expostos tais fatos, a partir da comparação entre as duas coleções (1994 e 2015) sob o ponto de vista da influência dos PCN na organização do livro didático, consideramos produtivas e positivas as relações geradas entre eles. Os Parâmetros provocaram a abertura do livro para o uso de mais conexões de saberes, uma atenção maior para o conteúdo grandezas e medidas, e o entendimento de que o ensino é uma construção coletiva.

O terceiro pilar dessa pesquisa era o conteúdo que a ser analisado no livro didático. Optou-se por um tema que não é visto com tamanha frequência como volume. Muitas vezes é confundido como um elemento do bloco Geometria, por não ter uma definição fácil de ser encontrada, por ser uma concepção de grandeza fortemente imbricada a de unidade de medida. A grandeza capacidade e a unidade de medida litro tem conceitos tão entrelaçados que a ingerência no trato adequado entre elas é fadada ao fracasso desde a formação docente.

Essas foram algumas razões que mais se destacavam para que chancelássemos a escolha do tema a ser investigado no livro didático, tanto na coleção anterior aos PCN, como também numa posterior.

Não que os dois primeiros blocos tenham sido fáceis ou demandaram menos tempos de leitura e cuidado para a escrita dessa pesquisa, mas este pilar foi o que mais desencadeou dúvidas durante o processo e fez com o até mesmo o objeto de estudo fosse “remodelado” várias vezes durante a escrita.

O que é um livro didático? Fácil resposta.

O que é são os Parâmetros Curriculares Nacionais? Fácil resposta.

Mas o que é volume? Não foi nada fácil, assim.

As leituras (entre dissertações, teses e periódicos, conforme pesquisa do tipo estado da arte realizada, além de alguns outros livros) convergiam para *noções de volume* bem como a definição de sua unidade de medida. Paralelo a isso, em boa parte das leituras, a mera *noção de capacidade* era ainda mais delicada: ou ela não era realizada, ou ela era confusa demais para superar a definição mais simples de que “capacidade é o volume interno de um sólido oco”.

Muitos olhares e leituras foram feitas, até mesmo nos estudos das medidas, a *metrologia*, para que conseguíssemos razoáveis definições de *volume* bem como de *capacidade*, que envolviam diversas características da matemática, mas que por mais completa que possa ser

perante as demais encontradas, ainda não é definição completa, absoluta, mas serve para as discussões que demandamos nesta.

Diferenciar volume e capacidade com tamanha propriedade nos dava segurança para discutir os seus usos enquanto grandezas dentro do livro didático e, até mesmo, perceber fragilidades dentro dos PCN que esperamos não perceber na BNCC em estudos futuros.

Havia ainda mais. “O volume em litros...” é uma expressão tão simples e comum de se ouvir que, naturalmente, nos levam a pensar que são a mesma coisa. Aí reside outro fator que procuramos observar durante a análise do livro. O simples uso do litro (L) em uma questão, por exemplo, não caracteriza, praxeologicamente falando, um tipo de tarefa (T) de volume (ou capacidade) mas atende ao pedido dos PCN para que estas medidas sejam utilizadas nas conexões.

Aqui foi necessário modificar, mais uma vez, o objeto de pesquisa: apesar de continuar tratando sobre as grandezas volume e capacidade, seria necessário identificar situações em que as unidades de medidas dessas grandezas fossem utilizadas para quantificá-las e percebêssemos quais destas seriam as mais frequentes.

Com os três pilares desta pesquisa devidamente caracterizados e justificados, passamos a observar a estruturação metodológica que regeu essa dissertação.

A escolha pela Teoria Antropológica do Didático (TAD) não foi realizada a esmo. Apesar de densa e complexa, ela possui subsídios objetivos e concisos para sejam investigadas, no processo de ensino, diversas formas de interação com o saber, entre elas, o livro didático.

Um desses subsídios é a noção de transposição didática, atividade que também é inerente ao livro didático, mesmo sendo este uma *instituição de utilização*. Ocorre que um livro, como o que escolhemos, passa por critérios de seleção. Estes, em contrapartida, estão pautados em documentos que pesquisas que elegem não apenas os conteúdos, mas também atitudes e procedimentos específicos, como é o caso dos PCN e do PNLD.

Além disso, o livro não está ligado apenas ao processo de transposição didática externa em que o saber científico é adaptado para o saber a ser ensinado. Ele também auxilia para que o saber chegue à outra ponta do processo educativo sendo transposto a um saber escolar através da transposição didática interna. Sob este aspecto rege a vigilância epistemológica, que é o cuidado para que nessas intervenções o saber não se aparte daquilo que a sociedade produziria (BARBOSA, 2011), o que justifica a busca pela produção de um conceito de volume.

Todo o material das coleções fora analisado pela Praxeologia proposta por Chevallard (1999) e reforçada por Bessa de Menezes e Câmara dos Santos (2015), Moura (2019). Pelo fato de estarmos analisando coleções de livro de ensino fundamental foi muito forte a presença do

bloco prático formado pelos tipos de tarefas – inclusive buscando tipificar aqueles encontrados nas análises – e técnicas. Para análise do bloco teórico tivemos caminhos mais sutis e curtos visto que as teorias não são tratadas com mais propriedade e, assim como Chevallard, Bosch e Gascón (2001) já alertavam, muitas vezes a tecnologia é justificada pela sua técnica, o que ocorreu em certos momentos da nossa análise.

Um outro ponto da TAD que procuramos explorar foram alguns dos momentos didáticos que Bessa de Menezes e Câmara dos Santos (2015) e, Rosa dos Santos e Câmara dos Santos (2017) utilizaram para classificar aqueles propostos por Chevallard. Foi possível reconhecer os seis momentos na coleção: a organização matemática na estrutura do conteúdo; a exploração de determinados tipos de tarefa que eram privilegiados nas coleções a partir de orientações curriculares; a constituição do ambiente tecnológico e teórico pela justificativa dessas técnicas, embora fosse um momento muitas vezes marcado pelo uso como uma própria técnica, como ocorreu com os cubinhos; o trabalho da técnica de forma bem modesta; a institucionalização especialmente na última coleção que, na distribuição do conteúdo ao longo dos anos, favorecia uma retomada do conteúdo; e até mesmo a avaliação, incentivada através das sessões Pensando em Casa e Revendo Conceitos presentes no livro.

Sobre os níveis de codeterminação, um dos frutos de nossa pesquisa foi conseguir localizar o livro didático analisado dentro da escala, tal qual fez Carvalho (2012), para o nosso conteúdo básico: volume e capacidade e, assim, poder analisá-lo com mais cautela. Foram levados em consideração, para isso, a praxeologia e outras orientações para análise de livros dadas por Bittar (2017) e Almouloud (2015) que condessara as ideias de Chevallard (1999) e Chaachoua e Comiti (2010) nos permitindo organizar uma tipologia de tarefas, aos moldes do que fez Moraes (2011).

Moraes organizou suas proposições de tipos de tarefas a partir das ideias de Vergnaud (1990) que Baltar utilizara para o conteúdo áreas. A ideias de situações de medição (subdivida em situações de transformação e unidade e de operacionalização de volumes), de comparação e de produção que, inclusive, resultou no mapa conceitual já apresentado.

Enfim, ao adentrarmos nas coleções, percebemos que seria necessário, para fins de organização dividir as análises por ano e por série/ano.

A primeira grande diferença entre as edições é a composição do livro do professor. Enquanto em 1994 tem-se apenas a explicação sobre cada bloco do livro e os objetivos de cada um dos conteúdos trabalhados como planejamento do curso, em 2015 há um compêndio de explicações, orientações e resultados de pesquisa, além de diversos trechos dos PCN que justificam a ‘nova roupagem’ na estrutura dos seus livros. É uma sessão que se consolida como

um documento que está acessível e deve ser visitado muitas vezes pelo professor durante o ano letivo.

No comparativo ano a ano as discrepâncias são ainda maiores. As figuras 16 e 30 marcam as páginas dos livros em que há alguma tarefa relacionada a volume ou capacidade. Existe uma melhor distribuição na coleção de 2015, não apenas em itens relacionados ao uso da unidade de medida de volume (m^3 , dm^3 , cm^3) ou (L ou mL) mas com o desenvolvimento do conteúdo grandezas e medidas.

Os tipos de tarefas que encontramos em ambos também é outro ponto forte para a discussão desse trabalho: Na coleção de 1994 foram encontrados 09 (nove) tipos e 08 (oito) subtipos de tarefa, como descrito no quadro 19, todos exclusivamente no livro da 5ª série, visto que nos demais, basicamente só é realizado o uso das unidades de medida, que utilizavam situações de medição e comparação.

Em 2015, a partir do 7º ano são observados outros 11 (onze) tipos e 03 (três) subtipos de tarefa, totalizando 20 (vinte) tipos de tarefas e 11 (onze) subtipos dela.

O número de tarefas é bem próximo, caracterizado por muitos exercícios que a coleção antiga dispunha, e que nos retrata um ensino pautado na repetição de técnicas para resolver atividades semelhantes, típicos dos movimentos pedagógicos mais tradicionais como o da Matemática Moderna, sendo o livro, aqui, uma instituição mais “conservadora”, distante das proposições que seriam realizadas três anos mais tarde nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

A coleção de 2015 é uma revisitação (bem) ampliada da versão de 1994 no que se refere ao conteúdo volume e capacidade. O salto qualitativo de ideias ligadas ao volume é comprovado não apenas nos números de tarefas distribuídas entre os quatro anos, conforme quadro 19 ou mesmo o número de tipos de tarefa T que puderam ser identificados. São práticas e abordagens diferenciadas que exigem uma visão mais ampla sobre os conteúdos e, especialmente, a possibilidade de compreensão da conexão que existe entre os diferentes blocos do saber matemático.

As ideias trazidas pelos PCN foram, na medida do possível, acolhidas pelos autores não apenas nos registros da *Assessoria Pedagógica*, mas na estruturação do curso da matemática ao longo do ensino fundamental.

Deixamos, dessa forma, as boas impressões sobre os impactos que os documentos oficiais de regulação da Educação, como os PCN e o PNLD podem causar no sistema educativo de um país com dimensões continentais como o Brasil. É um ato de reconhecimento que tantas discussões e formações reverberaram de forma positiva sobre o processo de ensino. Cria-se então a perspectiva de que a BNCC também trará tantas outras boas contribuições,

principalmente se conseguir a adesão de todos os professores e sistemas de ensino, ação que os PCN não completaram, mas não por falta de qualidade de pesquisas e falas.

Entende-se que essa limitação dos PCN decorre de vários outros aspectos, ações e personagens. Compreender bem onde houve as falhas e os acertos é o primeiro passo para que esses avanços ocorram com a maior brevidade possível.

Isso poderá contribuir com estudos vindouros que atentem para reverberações da BNCC nos materiais didáticos e, mais especificamente nos livros. Por todas essas razões, propomos a desenvolvê-lo para que o mesmo contribua, efetivamente, com novas percepções sobre a TAD, o livro didático e, porque não dizer, também sobre os PCN, a BNCC e o PNLD.

Esperamos ter contribuído para essa discussão deixando tantas outras perguntas a serem respondidas: É possível ver esses avanços em outras coleções desse mesmo período? Essas contribuições dos PCN limitaram-se ao ensino de volume e capacidade ou outras também foram agraciadas com essa reforma? As mudanças na Organização Matemática também facilitaram outras nas Organizações Didáticas? Ao longo do período da prevalência dos PCN houve coleções que não conseguiram avançar tanto? O fato da ampliação do conteúdo para os quatro anos, nesta coleção, prejudicou algum outro conteúdo como álgebra ou aritmética, que anteriormente eram mais enfocados? Com a BNCC vigente, será que já é possível observar melhorias conforme essas novas orientações também nos livros didáticos já aprovados no PNLD 2020, neste ano, ou deverá haver um tempo mínimo para melhor observar o trato dos diversos conteúdos e estruturas curriculares que o novo documento dispõe?

REFERÊNCIAS

- ALBERTAZZI GONÇALVES JR., Armando; SOUSA, André R. de. *Fundamentos de metrologia científica e industrial*. Barueri: Manole, 2008.
- ALMOULOUD, Saddo Ag. *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba: UFPR, 2007.
- _____. Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos. In: *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, N. 42, 2015, pp. 09-34.
- ANPED. Parecer da ANPEd sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais. *Revista Brasileira de Educação*. v 2, Mai/Jun/Jul/Ago. Rio de Janeiro, 1996.
- ANWANDTER-CUELLAR, Nathalie. *Etude de conceptions d'élèves à propos du concept de volume* (Mémoire de master - 2 HPDS, Histoire Philosophie et Didactique des Sciences). Université Montpellier 2, 2008.
- ARAÚJO, Abraão Juvêncio de. *O ensino de álgebra no Brasil e na França: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático*. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2009.
- BALTAR BELLEMAIN, Paula Moreira. *Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège* (Tese de Doutorado). Université Joseph Fourier, Grenoble, 1996.
- BARBOSA, Edelweis José Tavares. *Equação do primeiro grau em livros didáticos sob a ótica da teoria antropológica do didático*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande, 2011.
- _____. *Praxeologia do professor: uma análise comparativa com os documentos oficiais e do livro didático no ensino de equações polinomiais do primeiro grau*. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências). Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, 2017.
- BESSA DE MENEZES, Marcus. *Investigando o processo de transposição didática interna*. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2004.
- BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola (Org.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. 5ª ed. Belo Horizonte: Autêntic Editora, 2013.
- BITTAR, Marilena. A Teoria Antropológica do Didática como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. *Revista Zetetiké*, vol. 25, n. 3. 2017, pp. 364-387.
- BOGDAN, Robert C.; BIKLEIN, Sari Knopp. *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.
- BRASIL. Decreto-Lei nº 93, de 21 de dezembro de 1937. *Cria o Instituto Nacional do Livro*.

_____. Decreto-Lei nº 1.006, de 30 de dezembro de 1938. *Estabelece as condições de produção, importação e utilização do livro didático.*

_____. Decreto-Lei nº 8.460, de 26 de dezembro de 1945. *Consolida a legislação sobre as condições de produção, importação e utilização do livro didático.*

_____. Decreto nº 59.355, de 04 de outubro de 1966. *Institui a Comissão do Livro Técnico e do Livro Didático (COLTED).*

_____. Decreto nº 77.107, de 04 de fevereiro de 1976. *Criação da Fundação Nacional do Material Escolar (FUNAME).*

_____. Decreto nº 91.542, de 19 de agosto de 1985.a. *Institui o Programa Nacional do Livro Didático.*

_____. *A nova escolha do livro didático: Programa Nacional do Livro Didático.* FAE/MEC, Rio de Janeiro, 1985.b.

_____. Constituição (1988). *Constituição da República Federativa do Brasil de 1988.* Brasília, DF: Presidência da República, 2016. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Constituicao/Constituicao.htm. Acesso em: 15 out. 2019.

_____. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. *Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional.*

_____. Ministério da Educação e do Desporto. Conferência Nacional de Educação para Todos. Acordo Nacional. *Plano Decenal de Educação para Todos.* Brasília: MEC, 1993.

_____. Secretaria de Ensino Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (1º e 2º ciclos).* Brasília: MEC/SEF, 1997.

_____. Secretaria de Ensino Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (3º e 4º ciclos).* Brasília: MEC/SEF, 1998.a

_____. Secretaria de Ensino Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais.* Brasília: MEC/SEF, 1998.b.

_____. *Programas do livro: Histórico.* FNDE/MEC, Brasília, 2017. Disponível em <https://www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro/livro-didatico/historico>. Acesso em 23 nov. 2018.

_____. Conselho Nacional de Educação. *Resolução nº 02, de 7 de novembro de 2019.* Brasília: MEC/CNE, 2019.

BRITO MENEZES, Anna Paula de Avelar. *Contrato didático e Transposição didática: Inter-relações entre os fenômenos didáticos na iniciação à álgebra na 6ª série do ensino fundamental.* Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2006.

CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. Um exemplo de situação-problema: O problema do bilhar. *Revista professor de matemática*, vol. 50. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo; BESSA DE MENEZES, Marcus. A teoria antropológica do didático: uma releitura sobre a teoria. *Perspectivas da Educação Matemática*, vol. 8, n. 18. Cuiabá: UFMS, 2015.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Gradiva, 1991.

CARVALHO, Dierson Gonçalves de. *Uma análise da abordagem da área de figuras planas no guia de estudo do PROJOVEM Urbano sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica. Recife: UFPE, 2012.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; LIMA, Paulo Figueiredo. Escolha e uso do livro didático. In: PITOMBEIRA, João Bosco Pitombeira (Coord.) *Matemática: Ensino Fundamental. Coleção explorando o ensino; vol. 17*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010.

CENTURIÓN, Marília Ramos; JAKUBOVIC, José. *Matemática nos dias de hoje: na medida certa, 6º ano*. São Paulo: Leya, 2015.a.

_____. *Matemática nos dias de hoje: na medida certa, 7º ano*. São Paulo: Leya, 2015.b.

_____. *Matemática nos dias de hoje: na medida certa, 8º ano*. São Paulo: Leya, 2015.c.

_____. *Matemática nos dias de hoje: na medida certa, 9º ano*. São Paulo: Leya, 2015.d.

CHAACHOUA, Hamid; COMITI, Claude. *L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique*, II Congrès Internacional sur la TAD, Ûzer, 2010, p. 771-789. Disponível em: http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/Comunicaciones_TAD_II/9%20-%20Chaachoua-Comiti-congres_TAD_2.pdf. Acesso em 15 nov. 2019

CHEVALLARD Yves. *La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée sauvage. Grenoble, deuxième édition augmentée, 1985.

_____. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 1992, 73-112.

_____. L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthrologie Didactique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*. 19 (2), 1999 (pp. 221-266).

_____. Aspectos problemáticos de la formación docente. *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*. Huesca, 2001.

_____. Organiser l'étude 3: Ecologie & régulation. *Xie école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble, 2001.

_____. *Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques*. In MAURY, S. & CAILLOT, M. (Org.): *Rapport au savoir et didactiques*. Paris: Éditions Fabert, 2003 (pp. 221-266).

_____. Uma ruptura epistemológica em ato. In: *A Teoria Antropológica do Didático: princípios e fundamentos*. Almouloud, Sado Ag; FARIAS, Luiz Marcio Santos; HENRIQUES, Afonso (Org.) Curitiba: Editora CRV, 2018. pp. 21-30.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Mariana; GÁSCON, Josep. *Estudar matemáticas – o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. São Paulo: Artmed, 2001.

COSTA, Jéssica Serra Côrrea da. *O cálculo mental em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais*. Campo Grande: UFMS, 2018.

CURY, Carlos Roberto Jamil. Os Parâmetros Curriculares Nacionais e o ensino fundamental. *Revista Brasileira de Educação*. v 2, Mai/Jun/Jul/Ago. Rio de Janeiro, 1996.

D'AMORE, Bruno. *Didática da Matemática*. Tradução de Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

DANTE, Luiz Roberto. Livro didático de matemática: uso ou abuso? *Em Aberto*, v. 16, n. 69. Brasília, 1996.

DELORS, Jacques *et al.* *Educação um tesouro a descobrir: Relatório para a UNESCO da Comissão Internacional sobre Educação para o século XXI*. Brasília, 2010.

DUNBAR, Dev. *Volume and capacity: Misunderstandings about volume & capacity in the primary school*. Disponível em <https://mathsmattersresources.com/thinking-about-volume-capacity-in-the-primary-school/>. Acesso em: 02 out. 2019.

FERNANDES, Juliana Chiarini Balbino. A presença dos saberes geométricos no livro didático: o ensino da aritmética pela compreensão. *Caminhos da Educação Brasileira em Revista*, v. 5, n. 1, 2016, pp. 118-131.

FERNANDES, Magda Carvalho. *Vinte e cinco anos do PNLD: uma trajetória de negociações entre política educacional e econômica*. Anais do VI Congresso Brasileiro de História da Educação. Vitória: 2011.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. 3ª ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo (Org.). *Métodos de pesquisa*. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GIL, Antônio Carlos. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 4ª ed. São Paulo: Atlas, 2002.

_____. *Métodos e Técnicas de Pesquisa Social*. 5ª ed. São Paulo: Atlas, 1999.

GROSSNICKLE, F. R; BRUECKNER, L. J. *O ensino da aritmética pela compreensão*. Editora Fundo de Cultura. Brasil – Portugal, 1965.

INMETRO. *Sistema Internacional de Unidades - SI*. 6ª ed. Brasília: SENAI/DN, 2000.

JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo Cestari Terra. *Matemática na medida certa, 5ª série*. São Paulo: Scipione, 1994.a.

_____. *Matemática na medida certa, 6ª série*. São Paulo: Scipione, 1994.b.

_____. *Matemática na medida certa, 7ª série*. São Paulo: Scipione, 1994.c.

_____. *Matemática na medida certa, 8ª série*. São Paulo: Scipione, 1994.d.

KÖCHE, José Carlos. *Fundamentos de metodologia científica: teoria da ciência e iniciação à pesquisa*. 34ª ed. Petrópolis: Vozes, 2015.

LIMA, Elon Lages. *Medida e forma em Geometria*. 4ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

LIMA, Paulo Figueiredo & BALTAR BELLEMAIN, Paula Moreira. Grandezas e Medidas. In: PITOMBEIRA, João Bosco Pitombeira (Coord.) *Matemática: Ensino Fundamental. Coleção explorando o ensino; vol. 17*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010.

LIRA, Francisco Adval de. *Metrologia na Indústria*. 6ª ed. São Paulo: Editora Érica, 2007.

LORENZATTO, Sérgio. *Para aprender matemática*. 3ª ed. Campinas: Autores Associados, 2010.

LORENZATO, Sérgio; VILLA, Maria do Carmo. Século XXI: qual Matemática é recomendável? A posição do “The National Council of Supervisors of Mathematics”. *Revista Zetetiké*, Campinas, ano I, n. 1, pp. 41-49, 1993.

LORENZONI, Ionice. *Livro didático: 75 anos de história*. 2004. Disponível em <http://www.abrelivros.org.br/home/index.php/pnld/5164-livro-didatico--75-anos-de-historia>. Acesso em 28 nov. 2018.

MACIEL, Marco. Educação para todos – caminho para mudança. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*. Brasília, DF, n. 66, pp. 287-294, mai/ago. 1985.

MALDANER, Otavio Aloisio; ZANON, Lenir Basso; AUTH, Milton Antonio. Pesquisa sobre Educação em Ciências e Formação de Professores. In: SANTOS, Flávia Maria Teixeira dos Santos (Org.). *A pesquisa em ensino de ciências no Brasil e suas metodologias*. Injuí: Editora Injuí, 2007, pp. 49-88.

MELO, Marcos André Pereira de. *Ecologia do saber: o caso da análise combinatória em documentos oficiais e livros didáticos da Educação Básica*. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2018.

MORAIS, Leonardo Bernardo de; BALTAR BELLEMAIN, Paula Moreira. *Análise da abordagem de volume em Livros Didáticos de Matemática para o Ensino Médio*. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2011.

MORAIS, Leonardo Bernardo de. *A conceitualização de volume como grandeza à luz da teoria dos campos conceituais*. Conferência Interamericana de Educación Matemática. Chiapas, 2015.

MOURA, Almir Pereira de *et al.* Múltiplos e divisores no 6º ano do Ensino Fundamental: uma análise das praxeologias matemáticas. In: BARROS, Alexandre Luís de Souza *et al* (Orgs). *Múltiplos e divisores: diferentes olhares para uma aula de Matemática*. Curitiba: Apris, 2019.

OLIVEIRA, Maria Marly de. *Como fazer pesquisa qualitativa*. 7ª ed. Petrópolis: Vozes, 2016.

OLMO ROMERO, María Angeles del; GIL CUADRA, Francisco; MORENO CARRETERO, María Francisca. *Superficie e volumen: ¿algo más que el trabajo con fórmulas?* (Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Síntesis, 1993.

PANIAGO, Maria Lucia. “*Livro*” didático: a simplificação e a vulgarização do conhecimento. São Paulo: Ed. Instituto Lukács, 2013.

PIMENTEL, Guilherme Henrique; VILELA, Denise. *Contribuições para uma história do livro didático no Brasil: um estudo do PNL D*. Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife: 2011.

PINTO, Neuza Bertoni. Marcas históricas da matemática moderna no Brasil. *Revista Diálogo Educacional*, Curitiba, v. 05, n. 16, pp. 25-38, 2005.

PIRES, Magna Natália Marin; GOMES, Marilda Trecenti. KOCH, Nancy Terezinha Oldenburg. *Prática educativa do pensamento matemático*, vol. I. Curitiba: IESDE, 2015.

PIZARRO, Noemí; ZAMORANO-VARGAS, Alicia. Factores que inciden en la enseñanza del volumen: um estudio de la práctica docente. *Acta Latinoamericana de Matematica Educativa*, v. 32, n. 1, 2019, pp. 610-618.

PONTE, João Pedro da; BROCADO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. “*Investigações matemáticas na sala de aula*”. 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016.

PORTUGAL: *Apontamentos sobre as antigas medidas de peso, volume e comprimento*. Disponível em <http://www.aevouzela.net/site/clubes-e-projetos/8-museu-escolar>, 2013. Acesso em: 20 out. 2019.

POZEBON, Simone; LOPES, Anemari Roesler Luersen Vieira. *Grandezas e Medidas: Surgimento histórico e contextualização curricular*. Anais do VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática. Canoas: 2013.

ROMO-VÁSQUEZ, Avenilde. La modelización matemática en la formación de ingenieros. *Educación Matemática*. México: 2014, pp. 314-338.

ROSA DOS SANTOS, Marilene Rosa dos; CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo Câmara. A praxeologia matemática e didática da aula de Dona Rosa. In: LIMA, Anna Paula de Avelar

Brito et al (Org.). *Fenômenos didáticos em uma aula de introdução à álgebra: múltiplos olhares e perspectivas teóricas*. Recife: Editora UFPE, 2017, v. 2, pp. 53-74.

ROZENBERG, Izrael Mordka. *O Sistema Internacional de Unidades – SI*. 2. ed. São Paulo: Instituto Mauá de Tecnologia, 2002.

SILVA, Marco Antônio. A fetichização do livro didático no Brasil. *Revista Educação & Realidade*, vol. 37 n° 3. Porto Alegre: 2012, pp. 803-821.

SILVA, Maria Jose Ferreira da; GAITA, Cecilia; ALMOULOU, Saddo Ag. Uma articulação teórica entre competência algébrica, processo de algebrização e modelização. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, Florianópolis, v. 13, n. 1, pp. 1-30, nov. 2018. ISSN 1981-1322. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2018v13n1p1>>. Acesso em: 12 nov. 2019.

SILVA, Rafael José da. *O estado da arte da Teoria Antropológica do Didático no Brasil*. VI Congresso Nacional de Educação (CONEDU), 2019. Disponível em: https://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV127_MD1_SA13_ID1340_17082019035300.pdf. Acesso em 08 nov. 2019.

SORDI, José Osvaldo de. *Desenvolvimento de projeto de pesquisa*. São Paulo: Saraiva, 2017.

VERGNAUD, Gérard. Didactique et acquisition du concept de volume. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Paris, 1983.

VILLORO, Luis. *Estado plural, pluralidade de culturas*. México: Paidós, 1998.