



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

THALYTTE EVILLY CAVALCANTE SILVA

**REFINAMENTO ASSINTÓTICO EM MODELOS DE REGRESSÃO
LOG-BIRNBAUM-SAUNDERS GENERALIZADOS**

Recife

2021

THALYTТА EVILLY CAVALCANTE SILVA

**REFINAMENTO ASSINTÓTICO EM MODELOS DE REGRESSÃO
LOG-BIRNBAUM-SAUNDERS GENERALIZADOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Estatística.

Área de Concentração: Estatística Aplicada

Orientador (a): Profa. Dra. Audrey Helen Mariz de Aquino Cysneiros

Coorientador (a): Profa. Dra. Aline Barbosa Tsuyuguchi

Recife

2021

Catálogo na fonte
Bibliotecária Fernanda Bernardo Ferreira CRB4-2165

S586r Silva, Thalytta Evilly Cavalcante
Refinamento assintótico em modelos de regressão log-Birnbaum-Saunders generalizados/ Thalytta Evilly Cavalcante Silva – 2021.
145f., il., fig.

Orientadora: Audrey Helen Mariz de Aquino Cysneiros.
Coorientadora: Aline Barbosa Tsuyuguchi.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Estatística, Recife, 2021.
Inclui referências e apêndice.

1. Estatística Aplicada. 2. Estimador de máxima verossimilhança. 3. Estimação intervalar. 4. Modelo log-Birnbaum-Saunders Generalizado. I. Cysneiros, Audrey Helen Mariz de Aquino. (Orientadora) II. Tsuyuguchi, Aline Barbosa. (Coorientadora). III. Título.

310 CDD (22. ed.) UFPE-CCEN 2021-51

THALYTТА EVILLY CAVALCANTE SILVA

**REFINAMENTO ASSINTÓTICO EM MODELOS DE REGRESSÃO
LOG-BIRNBAUM-SAUNDERS GENERALIZADOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Estatística.

Aprovada em: 26 de fevereiro de 2021.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Aline Barbosa Tsuyuguchi
UFPE

Prof. Dr. Francisco Cribari Neto
UFPE

Profa. Dra. Michelli Karinne Barros da Silva
UFCG

Dedico à minha mãe Flávia, minha vó Maria e meus lindos afilhados Valeska e Valentim.

AGRADECIMENTOS

A Mãe Natureza por toda energia positiva emanada. Por me ensinar o caminho da liberdade, leveza e esperança. À minha mãe, Flávia, minha vó, Maria e irmãs, Tati e Zenis, que tanto lutaram pela minha educação e nunca me deixaram perder a fé. Obrigada pelo incentivo, pela confiança depositada, por serem inspiração pra mim, sem vocês muitos dos meus sonhos não se realizariam. À psicóloga Giselle, que me acompanhou durante essa jornada. Agradeço simplesmente por ter me escutado, meu muito obrigada. Aos meus compadres, Val e Romário, pela torcida e aos meus afilhados, Valeska e Valentim, meus dois tesouros, os amores da minha vida, que enchem meus dias de esperança, felicidade e doçura. À minha família pelo apoio e incentivo dado. Aos meus amigos maravilhosos, que de alguma forma estiveram e estão próximos de mim, fazendo esta vida valer cada vez mais a pena. Agradeço pela contribuição valiosa para a minha jornada acadêmica. Sou grata, especialmente, à Cristine e Dieguito, por toda ajuda dada durante o processo de desenvolvimento da minha dissertação e por todos os momentos compartilhados. Aos meus colegas de turma, pelos construtivos diálogos durante as disciplinas. À minha orientadora Audrey Cysneiros e coorientadora Aline Barbosa, pelas contribuições e ideias dadas ao meu trabalho. À professora Michelli Barros e ao professor Francisco Cribari-Neto, pelos ensinamentos, por terem aceito fazer parte da banca examinadora e pelas observações e contribuições dadas ao trabalho. Aos docentes do Programa de Pós-Graduação em Estatística da UFPE. Obrigada pela incansável dedicação e partilha de conhecimentos. Aos funcionários por sempre estarem tão solícitos. Vocês são profissionais extraordinários, parabéns pela dedicação e competência. À UFPE por me proporcionar a oportunidade de possuir um ensino superior e oferecer profissionais incríveis. À Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE) pelo apoio financeiro. À todos que passaram por mim e me acrescentaram algo, o meu sincero OBRIGADA!

RESUMO

Nesta dissertação, desenvolvemos ajustes para a função de verossimilhança perfilada baseados nas propostas de Barndorff-Nielsen (1983) e Cox e Reid (1987) em modelos de regressão log-Birnbaum-Saunders generalizados na presença, ou não, de censura tipo II. Consideramos dois casos particulares dessa classe de modelos, a saber: o modelo log-Birnbaum-Saunders e o modelo log-Birnbaum-Saunders- t . Obtivemos os estimadores de máxima verossimilhança perfilado e perfilados modificados, calculamos os intervalos de confiança do tipo assintótico e *bootstrap* percentil e os testes baseados nas estatísticas da razão de verossimilhanças perfilada e perfiladas modificadas. Através de simulações de Monte Carlo, avaliamos numericamente os comportamentos dos estimadores pontuais e intervalares sob diferentes cenários, assim como, os desempenhos dos testes da razão de verossimilhanças baseados nas verossimilhanças perfilada e perfiladas modificadas, em termos de tamanho e poder. Os resultados evidenciam que tanto os testes quanto os estimadores baseados nas versões modificadas da verossimilhança perfilada, que foram desenvolvidas neste trabalho, possuem desempenho superior em pequenas amostras quando comparados com sua contrapartida não modificada. Por fim, três aplicações a dados reais são apresentadas.

Palavras-chaves: Estimador de máxima verossimilhança. Estimação intervalar. Modelo log-Birnbaum-Saunders Generalizado. Teste da razão de verossimilhanças. Verossimilhança perfilada.

ABSTRACT

In this dissertation, we obtain adjustments to the profile likelihood function proposed by Barndorff-Nielsen (1983) and Cox e Reid (1987) in generalized log-Birnbaum-Saunders regression models in the presence, or not, of type II censored data. We consider two particular cases of this class of models, namely: the log-Birnbaum-Saunders and log-Birnbaum-Saunders- t models. We obtain profile and modified profile maximum likelihood estimators, calculate asymptotic and percentile *bootstrap* confidence intervals, and present profile and modified profile likelihood ratio tests. We also perform Monte Carlo simulation studies to evaluate the performance of the estimators and tests we propose. The numerical results show that both the tests and estimators based on the modified versions of the profile likelihood, which were developed in this work, present superior finite-sample behavior. Finally, we present and discuss three empirical applications.

Keywords: Generalized log-Birnbaum-Saunders model. Interval estimation. Likelihood ratio test. Maximum likelihood estimator. Profiled likelihood.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Função densidade de probabilidade da distribuição BS.	22
Figura 2 – Função de sobrevivência da distribuição BS.	23
Figura 3 – Função de risco da distribuição BS.	24
Figura 4 – Função densidade de probabilidade da distribuição senh-normal.	26
Figura 5 – Gráfico de discrepância relativas de quantis, $\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$, $H_0 : \alpha = 0,5$, dados completos, $n = 20$	61
Figura 6 – Gráfico de discrepância relativas de quantis, $\alpha = 0,1$ e $\gamma_s = 1 \ \forall s$, com $\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$, $n = 20$ e 10% de censura.	71
Figura 7 – Gráfico de discrepância relativas de quantis, $\alpha = 0,1$ e $\gamma_s = 1 \ \forall s$, com $\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$, $n = 20$ e 30% de censura.	72
Figura 8 – Gráfico de discrepância relativas de quantis, $\alpha = 0,1$ e $\gamma_s = 1 \ \forall s$, com $\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$, $n = 20$ e 50% de censura.	72

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Medidas descritivas de diferentes estimadores de α , modelo log-BS, dados completos, $\alpha = 0,1$ e $\gamma_s = 1 \forall s$	55
Tabela 2 – Medidas descritivas de diferentes estimadores de α , modelo log-BS, dados completos, $\alpha = 0,25$ e $\gamma_s = 1 \forall s$	55
Tabela 3 – Medidas descritivas de diferentes estimadores de α , modelo log-BS, dados completos, $\alpha = 0,5$ e $\gamma_s = 1 \forall s$	56
Tabela 4 – Medidas descritivas de diferentes estimadores de α , modelo log-BS, dados completos, $\alpha = 1$ e $\gamma_s = 1 \forall s$	56
Tabela 5 – Medidas descritivas de diferentes estimadores de α , modelo log-BS, dados completos, $\alpha = 1$ e $\gamma_s = 1 \forall s$, com $p = 2, 3, 4, 5$ e 6 e $n = 30$	57
Tabela 6 – Cobertura dos intervalos de confiança para diferentes valores de α , modelo log-BS, dados completos, $\gamma_s = 1 \forall s$	58
Tabela 7 – Taxas de rejeição nulas, inferência sobre α , modelo log-BS, dados completos, $\gamma_s = 1 \forall s$	59
Tabela 8 – Taxas de rejeição nulas, inferência sobre α , modelo log-BS, dados completos, $\alpha = 1$, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 30$	60
Tabela 9 – Médias e variâncias da variável χ_1^2 e das estatísticas de teste, modelo log-BS, dados completos, $\gamma_s = 1 \forall s$, $\alpha = 0,5$ e $n = 20$	61
Tabela 10 – Taxas de rejeição não nulas, inferência sobre α , modelo log-BS, dados completos, $\alpha = 0,1$, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$	62
Tabela 11 – Medidas descritivas de diferentes estimadores de α , modelo log-BS, dados censurados tipo II, $\alpha = 0,1$ e $\gamma_s = 1 \forall s$	65
Tabela 12 – Medidas descritivas de diferentes estimadores de α , modelo log-BS, dados censurados tipo II, $\alpha = 0,25$ e $\gamma_s = 1 \forall s$	66
Tabela 13 – Medidas descritivas de diferentes estimadores de α , modelo log-BS, dados censurados tipo II, $\alpha = 0,5$ e $\gamma_s = 1 \forall s$	67
Tabela 14 – Medidas descritivas de diferentes estimadores de α , modelo log-BS, dados censurados tipo II, $\alpha = 1,0$ e $\gamma_s = 1 \forall s$	68
Tabela 15 – Cobertura dos intervalos de confiança (90%) para diferentes valores de α , modelo log-BS, dados censurados tipo II, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$	69

Tabela 16 – Cobertura dos intervalos de confiança (95%) para diferentes valores de α , modelo log-BS, dados censurados tipo II, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$	69
Tabela 17 – Cobertura dos intervalos de confiança (99%) para diferentes valores de α , modelo log-BS, dados censurados tipo II, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$	69
Tabela 18 – Taxas de rejeição nulas, inferência sobre α , modelo log-BS, dados censurados tipo II, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$	70
Tabela 19 – Médias e variâncias da variável χ_1^2 e das estatísticas de teste, modelo log-BS, dados censurados tipo II, $\gamma_s = 1 \forall s$, $\alpha = 0, 1$ e $n = 20$	71
Tabela 20 – Taxas de rejeição não nulas, inferência sobre α , modelo log-BS, dados censurados tipo II, $\alpha = 0, 1$, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$	73
Tabela 21 – Medidas descritivas de diferentes estimadores de α , modelo log-BS- t , dados completos, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$	88
Tabela 22 – Cobertura dos intervalos de confiança (90%) para diferentes valores de α , modelo log-BS- t , dados completos, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$	89
Tabela 23 – Cobertura dos intervalos de confiança (95%) para diferentes valores de α , modelo log-BS- t , dados completos, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$	89
Tabela 24 – Cobertura dos intervalos de confiança (99%) para diferentes valores de α , modelo log-BS- t , dados completos, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$	90
Tabela 25 – Taxas de rejeição nulas, inferência sobre α , modelo log-BS- t , dados completos, $\alpha = 0, 1$, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$	91
Tabela 26 – Taxas de rejeição nulas, inferência sobre α , modelo log-BS- t , dados completos, $\alpha = 0, 5$, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$	92
Tabela 27 – Taxas de rejeição não nulas, inferência sobre α , modelo log-BS- t , dados completos, $\alpha = 0, 1$, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$	93
Tabela 28 – Taxas de rejeição não nulas, inferência sobre α , modelo log-BS- t , dados completos, $\alpha = 0, 1$, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$	94
Tabela 29 – Taxas de rejeição não nulas, inferência sobre α , modelo log-BS- t , dados completos, $\alpha = 0, 1$, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$	95
Tabela 30 – Medidas descritivas de diferentes estimadores de α , modelo log-BS- t , dados censurados tipo II, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$	99
Tabela 31 – Cobertura dos intervalos de confiança (95%) para diferentes valores de α , modelo log-BS- t , dados censurados tipo II, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$	100

Tabela 32 – Taxas de rejeição nulas, inferência sobre α , modelo log-BS- t , dados censurados tipo II, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$	101
Tabela 33 – Taxas de rejeição não nulas, inferência sobre α , modelo log-BS- t , dados censurados tipo II, $\alpha = 0, 1$, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$	102
Tabela 34 – Estimativas dos parâmetros, erros padrão, estatísticas z e p -valores dos modelos log-BS e log-BS- t com $\nu = 4, 8$ e 50 para os dados de fadiga biaxial.	103
Tabela 35 – Comparação dos modelos log-BS e log-BS- t com $\nu = 4, 8$ e 50 para os dados de fadiga biaxial.	104
Tabela 36 – Estimativas intervalares para α	105
Tabela 37 – Comparação dos modelos log-BS e log-BS- t com diferentes valores para ν e censura nos dados de fadiga biaxial.	106
Tabela 38 – Estimativas dos parâmetros, erros padrão, estatísticas z e p -valores do modelo log-BS com censura nos dados de fadiga biaxial.	106
Tabela 39 – Estimativas de máxima verossimilhança perfilada e perfilada ajustada do parâmetro α	107
Tabela 40 – p -valores dos testes sob H_0	108
Tabela 41 – Estimativas intervalares para α , dados censurados tipo II.	108
Tabela 42 – Estimativas dos parâmetros, erros padrão, estatísticas z e p -valores dos modelos log-BS e log-BS- t para os dados de fadiga no processo de extrusão do metal.	109
Tabela 43 – Estimativas dos parâmetros, erros padrão, estatísticas z e p -valores.	110
Tabela 44 – Comparação dos modelos log-BS e log-BS- t com $\nu = 4, 8$ e 50 para os dados de fadiga no processo de extrusão do metal.	111
Tabela 45 – Estimativas intervalares para α	111
Tabela 46 – Estimativas dos parâmetros, erros padrão, estatísticas z e p -valores dos modelos log-BS e log-BS- t para os dados tempo de vida de uma mola.	113
Tabela 47 – Comparação dos modelos log-BS e log-BS- t com $\nu = 4, 8$ e 50 para os dados tempo de vida de uma mola	113
Tabela 48 – Estimativas intervalares para α	114

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	14
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	18
1.3	SUPORTE COMPUTACIONAL	19
2	MODELO DE REGRESSÃO LOG-BIRNBAUM-SAUNDERS GE- NERALIZADO COM NÚCLEOS NORMAL E t DE STUDENT . . .	20
2.1	DISTRIBUIÇÃO BIRNBAUM-SAUNDERS	20
2.2	DISTRIBUIÇÃO LOG-BIRNBAUM-SAUNDERS	24
2.3	DISTRIBUIÇÃO BIRNBAUM-SAUNDERS GENERALIZADA	28
2.4	DISTRIBUIÇÃO LOG-BIRNBAUM-SAUNDERS GENERALIZADA COM NÚ- CLEO t DE STUDENT	30
2.5	MODELO DE REGRESSÃO LOG-BIRNBAUM-SAUNDERS	31
2.5.1	Estimação Pontual e Intervalar	32
2.5.1.1	<i>Dados completos</i>	32
2.5.1.2	<i>Dados censurados</i>	35
2.6	MODELO DE REGRESSÃO LOG-BIRNBAUM-SAUNDERS GENERALI- ZADO COM NÚCLEO t DE STUDENT	37
2.6.1	Estimação Pontual e Intervalar	37
2.6.1.1	<i>Dados completos</i>	37
2.6.1.2	<i>Dados censurados</i>	39
3	REFINAMENTO ASSINTÓTICO PARA O MODELO LOG-BIRNBAUM- SAUNDERS	42
3.1	DADOS COMPLETOS	42
3.2	DADOS CENSURADOS	46
3.3	AVALIAÇÃO NUMÉRICA	50
3.3.1	Dados completos	51
3.3.2	Dados censurados	62
4	REFINAMENTO ASSINTÓTICO PARA O MODELO LOG-BIRNBAUM- SAUNDERS GENERALIZADO COM NÚCLEO t DE STUDENT . .	74
4.1	DADOS COMPLETOS	74

4.2	DADOS CENSURADOS	79
4.3	AVALIAÇÃO NUMÉRICA	84
4.3.1	Dados completos	85
4.3.2	Dados censurados	96
5	APLICAÇÕES	103
5.1	PRIMEIRA APLICAÇÃO	103
5.2	SEGUNDA APLICAÇÃO	108
5.3	TERCEIRA APLICAÇÃO	112
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	115
	REFERÊNCIAS	116
	APÊNDICE A – ALGUMAS EXPRESSÕES	121
	APÊNDICE B – CÁLCULOS UTILIZANDO O NÚCLEO DA NOR- MAL	122
	APÊNDICE C – CÁLCULOS UTILIZANDO O NÚCLEO DA t DE STUDENT	134

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A distribuição normal (ou gaussiana) é uma das mais importantes distribuições contínuas e é amplamente utilizada em estatística e em outros campos da ciência, para mais detalhe ver Ahsanullah, Kibria e Shakil (2014). No entanto, as distribuições de tempo de vida apresentam, em geral, algumas características comuns entre si, como: assimetria positiva, unimodalidade e suporte nos reais positivo. Portanto, a distribuição normal pode ser inadequada para modelar o tempo de vida útil de materiais ou indivíduos expostos a algum dano cumulativo. Para mais detalhes ver Leiva (2015). Dentre as distribuições de probabilidade apropriadas para modelar esse tempo de vida, podemos citar as distribuições exponencial, Weibull, logística, log-normal, gama, log-gama, log-logística, dentre outras, ver por exemplo Colosimo e Giolo (2006). Em geral, estas distribuições apresentam um bom ajuste na região central da distribuição, mas, normalmente não se adequam bem nos percentis mais baixos ou mais altos. A distribuição derivada por Birnbaum e Saunders (1969a), conhecida como distribuição Birnbaum-Saunders (BS), é um modelo probabilístico que vem ganhando destaque por se adequar bem à região central e ajustar melhor os percentis mais baixos e altos, ver por exemplo Birnbaum e Saunders (1969a).

O modelo de regressão log-Birnbaum-Saunders (log-BS) desenvolvido por Rieck e Nedelman (1991) tem se mostrado muito apropriado para modelar problemas de tempo de vida que consideram a transformação logarítmica de uma variável resposta que segue distribuição BS. Podemos mencionar alguns artigos que trabalham com o modelo log-BS, algumas extensões e generalizações do mesmo, tais como: Tsionas (2001), Galea, Leiva-Sánchez e Paula (2004), Xie e Wei (2007), Leiva et al. (2007), Barros, Paula e Leiva (2008), Lemonte e Cordeiro (2009), Farias e Lemonte (2011), Lemonte (2012), Vilca, Romeiro e Balakrishnan (2016), Marchant, Leiva e Cysneiros (2016) e Cribari-Neto e Fonseca (2019).

Tsionas (2001) utilizou métodos bayesianos para a estimação dos parâmetros do modelo log-BS. Galea, Leiva-Sánchez e Paula (2004) e Xie e Wei (2007) desenvolveram métodos de diagnóstico para o modelo log-BS considerando dados não censurados. Posteriormente, Leiva et al. (2007) propuseram métodos de diagnóstico para o modelo log-BS considerando dados censurados.

Barros, Paula e Leiva (2008) apresentaram alguns resultados inferenciais e desenvolveram

métodos de diagnóstico no modelo de regressão log-BS- t , caso particular da classe de modelos de regressão log-Birnbaum-Saunders generalizados (log-BSG) desenvolvida por Barros (2007). Lemonte e Cordeiro (2009) propuseram uma nova classe de modelos de regressão não lineares BS, generalizando o modelo de regressão introduzido por Rieck e Nedelman (1991) e obtiveram o viés de segunda ordem dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo. Farias e Lemonte (2011) desenvolveram uma análise bayesiana para o modelo introduzido por Lemonte e Cordeiro (2009). Lemonte (2012) introduziu um modelo de regressão log-BS *skew-normal* baseado na distribuição *senh-skew-normal* proposta por Leiva et al. (2010), além disso, algumas técnicas de diagnóstico são apresentadas, tais como, influência local e alavancagem generalizada. Recentemente, Vilca, Romeiro e Balakrishnan (2016) propuseram um modelo de regressão BS bivariado por meio da distribuição *senh-normal* bivariada. Adicionalmente, os autores utilizaram o método dos momentos e o de máxima verossimilhança para estimar os parâmetros do modelo, bem como, realizaram testes de hipóteses baseado na normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança. Marchant, Leiva e Cysneiros (2016) propuseram o modelo de regressão log-linear BSG multivariado e utilizaram o método da máxima verossimilhança e o algoritmo EM para estimar os parâmetros do modelo. Cribari-Neto e Fonseca (2019) desenvolveram um modelo de regressão log-linear BS bimodal, além de discutirem sobre as estimações pontuais e intervalares, testes de hipóteses e métodos de diagnósticos.

Muitas vezes, queremos fazer inferências no modelo envolvendo apenas uma parte do vetor de parâmetros. Desta forma, chamaremos os parâmetros sobre os quais a inferência será realizada de parâmetros de interesse e os demais de parâmetros de perturbação. Uma maneira usual de fazer inferência quando o modelo que estamos trabalhando envolve parâmetros de perturbação, é através da verossimilhança perfilada. A ideia consiste em eliminar os parâmetros de perturbação substituindo-os na função de verossimilhança por seus respectivos estimadores de máxima verossimilhança dado valores fixados dos parâmetros de interesse, para maiores informações ver Severini (2001, Capítulo 9). Uma propriedade interessante da função de verossimilhança perfilada é que o estimador de máxima verossimilhança e o estimador de máxima verossimilhança perfilado do parâmetro de interesse são iguais. Lamentavelmente, a função de verossimilhança perfilada não usufrui de todas as propriedades de uma função de verossimilhança original. Em geral, a função *escore* perfilada não apresenta esperança matemática nula e como consequência a igualdade da informação de Fisher pode não ser obedecida.

Diante disso, diversos pesquisadores propuseram ajustes para a verossimilhança perfilada

com a finalidade de reduzir os problemas acarretados pelo fato desta função não ser uma função de verossimilhança genuína, dentre eles: Barndorff-Nielsen (1983), Cox e Reid (1987), McCullagh e Tibshirani (1990), Cox e Reid (1993), Diccio e Stern (1994) e Stern (1997). Assim como no artigo de Barreto, Cysneiros e Cribari-Neto (2013), nesta dissertação, daremos ênfase aos ajustes desenvolvidos por Barndorff-Nielsen (1983) e Cox e Reid (1987).

A função proposta por Barndorff-Nielsen (1983) pode ser tratada como uma aproximação para as funções de verossimilhança marginal ou condicional para os parâmetros de interesse, se uma dessas funções existir. Em ambos os casos, usa-se uma aproximação para a função densidade do estimador de máxima verossimilhança condicionado a uma estatística ancilar. Esta aproximação tem erro relativo de ordem $O(n^{-3/2})$ ¹, quando comparada com a função de verossimilhança marginal exata, caso exista. Os vieses da função escore e da informação de Fisher são de ordem $O(n^{-1})$, ver Diccio e Stern (1994). A expressão da função proposta por Barndorff-Nielsen contém uma parcela cujo cálculo utiliza a derivada com respeito ao espaço amostral e necessita de uma estatística ancilar que na maioria das vezes é difícil ou até mesmo impossível de se obter. Neste contexto, algumas aproximações foram sugeridas para a verossimilhança perfilada modificada proposta pelo autor, com o intuito de facilitar o cálculo dessa parcela. Destacamos, as aproximações sugeridas por Severini (1999) e Fraser e Reid (1995).

Severini (1999) derivou uma aproximação que não depende de uma estatística ancilar, com erro de aproximação de ordem $O(n^{-1/2})$. Esta aproximação é baseada em covariâncias empíricas e é adequada para situações em que há dificuldade no cálculo da esperança do produto de derivadas do logaritmo da verossimilhança, pois é fácil de ser obtida numericamente. Uma outra aproximação foi apresentada por Fraser e Reid (1995) e baseia-se em uma estatística aproximadamente ancilar, isto é, a distribuição assintótica dessa estatística não depende dos parâmetros, ver Young e Smith (2005).

A verossimilhança perfilada modificada proposta por Cox e Reid (1987) necessita da ortogonalidade entre os parâmetros de interesse e os parâmetros de perturbação. Esta versão modificada é baseada na função densidade condicional, dado o estimador de máxima verossimilhança dos parâmetros ortogonais. A função escore apresenta erro relativo de ordem $O(n^{-1})$,

¹ Se $\{a_n\}_{n \geq 1}$ e $\{b_n\}_{n \geq 1}$ são duas sequências reais, dizemos que a_n é de ordem menor que b_n e escrevemos $a_n = o(b_n)$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 0$. Dizemos que a_n é de ordem no máximo igual a b_n , denotado por $a_n = O(b_n)$, se existir um número real M tal que $|a_n/b_n| \leq M$, isto é, a razão $|a_n/b_n|$ é limitada. Observamos que se $a_n = o(b_n)$, então $a_n = O(b_n)$ e que quando $b_n \rightarrow 0$ a ordem fornece noção da taxa de convergência de a_n para zero.

mas, em geral, o viés da informação de Fisher não possui tal erro, para mais detalhes ver por exemplo DiCiccio et al. (1996). Uma consequência dessa ortogonalidade é a independência assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros.

Podemos citar alguns trabalhos que utilizaram algumas técnicas de refinamentos, a saber: Ferrari, Silva e Cribari-Neto (2005), Ferrari, Silva e Cribari-Neto (2007), Cysneiros, Cribari-Neto e Araújo-Júnior (2008), Melo, Ferrari e Cribari-Neto (2009), Barreto, Cysneiros e Cribari-Neto (2013), Pires, Cysneiros e Cribari-Neto (2018) e Araújo, Cysneiros e Montenegro (2020).

Ferrari, Silva e Cribari-Neto (2005) propuseram diferentes ajustes para a verossimilhança perfilada em distribuições que pertencem a família exponencial biparamétrica. Os autores consideraram alguns casos particulares dessa família de distribuições, como: normal, beta e gaussiana inversa. Também consideraram os testes da razão de verossimilhanças baseados nessas funções.

Ferrari, Silva e Cribari-Neto (2007) obtiveram versões modificadas da função de verossimilhança perfilada para o parâmetro de forma da distribuição Weibull. Ademais, consideraram estimação pontual e teste de hipóteses.

Cysneiros, Cribari-Neto e Araújo-Júnior (2008) desenvolveram ajustes para a função de verossimilhança perfilada na distribuição BS. Obtiveram os estimadores de máxima verossimilhança para o parâmetro de interesse baseados nas funções de verossimilhanças perfilada e suas versões ajustadas. Adicionalmente, apresentaram testes da razão de verossimilhanças perfilado e perfilados modificados.

Melo, Ferrari e Cribari-Neto (2009) desenvolveram versões modificadas do teste da razão de verossimilhanças para inferência sob efeitos fixos em modelos lineares mistos. Em particular, derivaram uma correção de Bartlett para este teste e também para um teste obtido de uma função de verossimilhança perfilada modificada.

Barreto, Cysneiros e Cribari-Neto (2013) forneceram versões ajustadas para a função de verossimilhança perfilada na distribuição BS sob censura do tipo II. Obtiveram os estimadores de máxima verossimilhança perfilado e perfilados ajustados para o parâmetro de forma da distribuição, além de, testes da razão de verossimilhanças baseado nessas funções e também via *bootstrap*. Os autores também consideraram vários intervalos de confiança via *bootstrap*.

Pires, Cysneiros e Cribari-Neto (2018) derivaram ajustes para a função de verossimilhança perfilada na distribuição Pareto generalizada baseados nas propostas de Barndorff-Nielsen (1983), Cox e Reid (1993), Severini (1999), Fraser e Reid (1995) e Fraser, Reid e Wu (1999). Os autores forneceram os estimadores de máxima verossimilhança e testes de hipóteses base-

ados nesses ajustes para o parâmetro de forma da distribuição. Adicionalmente, consideraram o teste da razão de verossimilhanças *bootstrap*.

Araújo, Cysneiros e Montenegro (2020) obtiveram um fator de correção de Bartlett para as estatísticas da razão de verossimilhanças e razão de verossimilhanças perfilada modificada baseada na aproximação de Cox e Reid (1987) para testar o parâmetro de dispersão na classe dos modelos não lineares simétricos heterocedásticos. Adicionalmente, apresentaram os testes da razão de verossimilhanças *bootstrap* e razão de verossimilhanças Bartlett *bootstrap*.

Neste sentido, propomos ajustes para a função de verossimilhança perfilada baseados nas propostas de Barndorff-Nielsen (1983) e Cox e Reid (1987) em modelos de regressão log-BSG na presença, ou não, de censura tipo II. Dois núcleos foram utilizados, a saber: normal e t de Student.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

A presente dissertação encontra-se estruturada da seguinte maneira. No Capítulo 2 apresentamos uma revisão das distribuições BS, log-BS e generalizações destas. Em seguida, discutimos sobre os modelos de regressão log-BS e log-BS- t . Além disso, mostramos a relação existente entre as distribuições BS e seno hiperbólico normal. Nossa contribuição para esta dissertação é apresentada nos Capítulos 3 e 4. O objetivo destes capítulos é estender os resultados apresentados em Barreto (2013), entretanto, consideramos o caso em que o comportamento de uma variável com distribuição Birnbaum-Saunders generalizada (BSG) é explicada através de uma estrutura com covariáveis e parâmetros desconhecidos, isto é, consideramos o modelo de regressão log-linear com resposta BSG. Sendo assim, nos Capítulos 3 e 4 apresentamos as aproximações propostas por Severini (1999) e Fraser e Reid (1995) para a função de verossimilhança modificada de Barndorff-Nielsen (1983) e posteriormente a função de verossimilhança perfilada modificada de Cox e Reid (1987) nos modelos de regressão log-BS e log-BS- t , respectivamente, considerando dados na presença, ou não, de censura tipo II. Obtivemos os estimadores de máxima verossimilhança perfilado e perfilados modificados, calculamos os intervalos de confiança do tipo assintótico e *bootstrap* percentil e os testes baseados nas estatísticas da razão de verossimilhanças perfilada e perfiladas ajustadas. Além disso, avaliamos numericamente através de simulações de Monte Carlo os desempenhos dos estimadores pontuais e intervalares, como também, dos testes da razão de verossimilhanças baseados em tais funções sob diferentes cenários. Destacamos que os Capítulos 3 e 4 são independentes,

e, portanto, podem ser lidos separadamente, sendo assim, algumas expressões e notações são apresentadas mais de uma vez. No Capítulo 5, aplicamos a teoria estudada a dados reais. Por fim, no Capítulo 6, conclusões são apresentadas.

1.3 SUPORTE COMPUTACIONAL

Nesta dissertação, as simulações foram realizadas utilizando a linguagem de programação Ox, versão 8.02, que se encontra disponível de forma gratuita no site <https://www.doornik.com>, para o sistema operacional Windows. Maiores detalhes sobre esta linguagem de programação podem ser encontrados em Cribari-Neto e Zarkos (2003), Doornik e Ooms (2006) e em Doornik (2009). Os gráficos apresentados foram produzidos no *software* R, versão 3.6.3 para Windows. O *software* R encontra-se disponível gratuitamente no site <https://www.r-project.org>. A dissertação foi digitada utilizando o sistema de tipografia $\text{\LaTeX}$, executado no sistema operacional Windows.

2 MODELO DE REGRESSÃO LOG-BIRNBAUM-SAUNDERS GENERALIZADO COM NÚCLEOS NORMAL E t DE STUDENT

2.1 DISTRIBUIÇÃO BIRNBAUM-SAUNDERS

Motivados pela fadiga¹ dos materiais presentes em aeronaves comerciais, Birnbaum e Saunders (1968) desenvolveram um modelo probabilístico que descreve a vida útil de materiais expostos a situações que levam à fadiga. Mais tarde, Birnbaum e Saunders (1969a), Birnbaum e Saunders (1969b), formalizaram a distribuição BS e propuseram um método para estimar os parâmetros dessa distribuição. Algumas suposições sobre o processo de fadiga foram feitas pelos autores, a saber:

1. O material é submetido a um padrão cíclico de estresse e tensão;
2. A sequência de estresse e tensão a qual o material é submetido é igual de ciclo para ciclo;
3. O crescimento e propagação de uma rachadura dominante dentro do material provoca a falha deste material. A falha acontece quando o tamanho da rachadura ultrapassa um certo nível de resistência, denotado por ω ;
4. A extensão incremental da rachadura, denotada por X_i , após a aplicação da i -ésima oscilação de carga é uma variável aleatória com uma distribuição que só depende da extensão da rachadura atual causada pela tensão neste ciclo;
5. A extensão da rachadura durante o $(j + 1)$ -ésimo ciclo é

$$Y_{j+1} = X_{jm+1} + X_{jm+2} + \cdots + X_{jm+m}, \quad j = 0, 1, \dots$$

em que X_{jm+i} é a extensão da rachadura (possivelmente microscópica) após a i -ésima oscilação de carga do $(j + 1)$ -ésimo ciclo.

6. (Segue da suposição 4) As extensões das rachaduras em diferentes ciclos são independentes;
7. (Segue da suposição 5) A extensão total Y_j da rachadura devido ao j -ésimo ciclo é uma variável aleatória com média μ e variância σ^2 , $\forall j = 1, 2, \dots$.

¹ Fadiga: dano estrutural de um certo tipo de material ou equipamento que ocorre devido ao uso contínuo e ou a exposição à estresse e tensão.

Portanto, a extensão total da rachadura após n ciclos é dada pela variável aleatória

$$W_n = \sum_{j=1}^n Y_j.$$

A função de distribuição acumulada (fda) de W_n é dada da seguinte forma

$$H_n(\omega) = P(W_n \leq \omega), \quad n = 1, 2, \dots$$

Seja N uma variável aleatória que representa o número necessário de ciclos até que se observe a falha, se $N \leq n$ então a extensão total para ocorrer a falha é maior que ω . Portanto, a fda de N é dada por

$$P(N \leq n) = P(W_n > \omega) = 1 - H_n(\omega).$$

Supondo que Y_j são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) $\forall j = 1, \dots, n$, utilizando o teorema central do limite, segue que

$$\begin{aligned} P(N \leq n) &= 1 - P\left(\sum_{j=1}^n \frac{Y_j - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{\omega - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &\cong 1 - \Phi\left(\frac{\omega - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= \Phi\left(-\frac{\omega - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\mu\sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\omega}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= \Phi\left[\frac{\sqrt{\omega\mu}}{\sigma} \left(\sqrt{\frac{n}{\omega/\mu}} - \sqrt{\frac{\omega/\mu}{n}}\right)\right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

em que Φ é a fda da normal padrão.

Através da Equação (2.1) Birnbaum e Saunders (1969a) definiram um novo modelo contínuo. Segundo os autores, se substituirmos n por uma variável aleatória real não negativa t , então a variável aleatória T é a extensão contínua da variável aleatória discreta N . Sendo assim, T representa o tempo total até que ocorra a falha, além disso, temos

$$\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{\omega\mu}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\omega}{\mu}. \quad (2.2)$$

Através da reparametrização expressa em (2.2) podemos definir a função de distribuição acumulada e posteriormente a função densidade de probabilidade. Portanto, dizemos que uma variável aleatória T segue uma distribuição BS com parâmetros α e β , se sua fda é expressa por

$$F_T(t) = \Phi\left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}}\right)\right], \quad t > 0,$$

em que $\alpha > 0$ é o parâmetro de forma, $\beta > 0$ é o parâmetro de escala e $\Phi(\cdot)$ é a fda da normal padrão. Denotaremos uma variável aleatória com distribuição BS por $T \sim BS(\alpha, \beta)$.

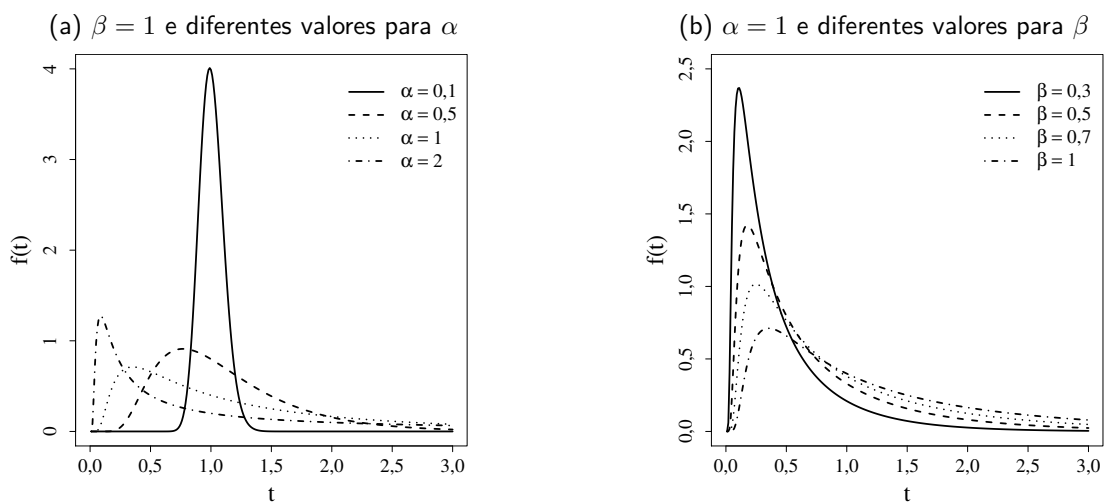
A função densidade de probabilidade (fdp) de T é dada por

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{d}{dt} F_T(t) \\ &= \phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right] \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right]^2 \right\} \frac{t^{-3/2}(t + \beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}}, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

sendo $\phi(\cdot)$ a fdp da normal padrão.

Apresentamos na Figura 1 as curvas de densidade da distribuição BS considerando diferentes valores para os parâmetros α e β . Na Figura 1(a), observamos que quando atribuímos valores próximos de zero para α , a distribuição começa a assumir forma simétrica em torno da mediana (β) e sua variabilidade diminui, no entanto, quando atribuímos valores maiores para α a distribuição torna-se assimétrica. Notamos na Figura 1(b) que quando β tende a zero, as curvas apresentam caudas mais pesadas. No geral, podemos dizer que a distribuição BS é contínua, unimodal e possui assimetria à direita.

Figura 1 – Função densidade de probabilidade da distribuição BS.



Fonte: Autoria própria (2021)

A seguir, listamos algumas propriedades interessantes da distribuição BS:

Propriedade 2.1.1 O parâmetro β é a mediana da distribuição $BS(\alpha, \beta)$.

Propriedade 2.1.2 A esperança e variância de $T \sim BS(\alpha, \beta)$ são dadas, respectivamente, por

$$\mathbb{E}(T) = \beta \left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2 \right) \quad \text{e} \quad \text{Var}(T) = \beta^2 \alpha^2 \left(1 + \frac{5}{4}\alpha^2 \right).$$

Propriedade 2.1.3 Se $T \sim BS(\alpha, \beta)$, então, $V = cT \sim BS(\alpha, c\beta)$, $c > 0$ (proporcionalidade).

Propriedade 2.1.4 Se $T \sim BS(\alpha, \beta)$, então, $V = T^{-1} \sim BS(\alpha, \beta^{-1})$, (reciprocidade).

Propriedade 2.1.5 A relação entre $T \sim BS(\alpha, \beta)$ e $Z \sim N(0, 1)$ é dada por

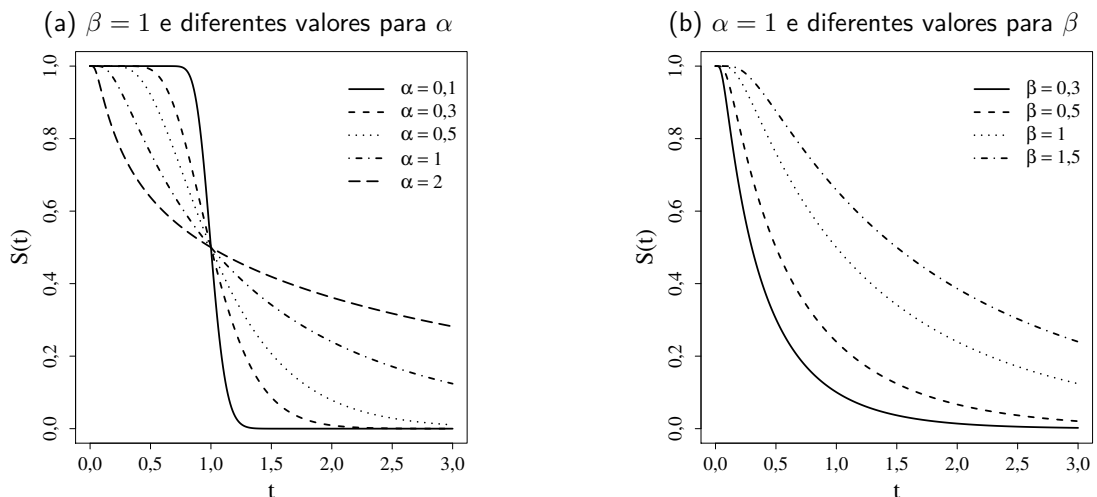
$$T = \beta \left[\frac{\alpha Z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha Z}{2} \right)^2 + 1} \right]^2. \quad (2.4)$$

Propriedade 2.1.6 A função de sobrevivência de $T \sim BS(\alpha, \beta)$ é dada por

$$S_T(t) = 1 - F_T(t) = 1 - \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right] = \Phi \left[-\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right], \quad 0 < S_T(t) < 1.$$

Apresentamos na Figura 2 as curvas de sobrevivência da distribuição BS considerando diferentes valores para os parâmetros α e β . É possível observar na Figura 2(a) que quando α assume valores próximos de zero, a função de sobrevivência assume maiores valores até a mediana (β). Entretanto, após a mediana, a função de sobrevivência assume maiores valores quando α aumenta. Na Figura 2(b) notamos que, quanto maior for o valor assumido pelo parâmetro β , maiores são os valores da função de sobrevivência.

Figura 2 – Função de sobrevivência da distribuição BS.

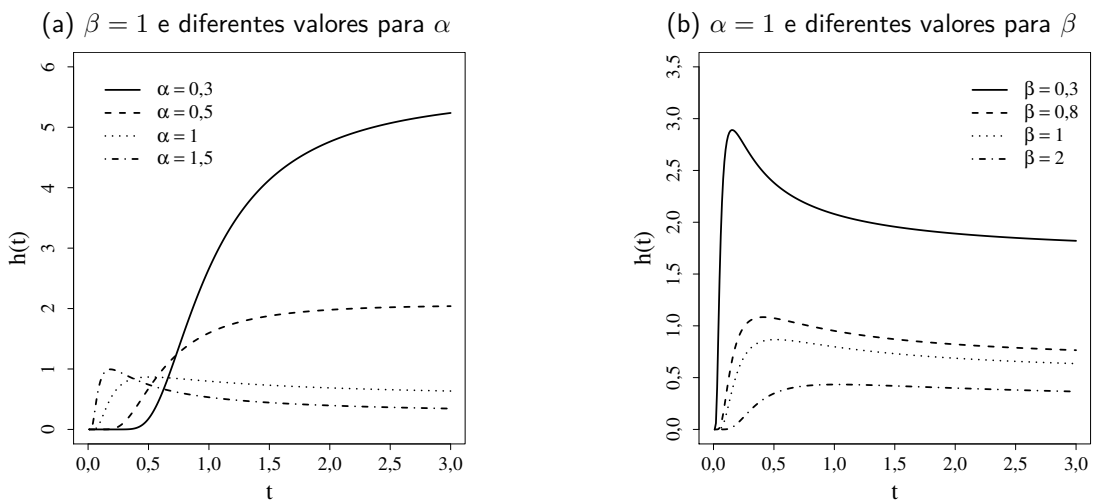


Propriedade 2.1.7 A função de risco de $T \sim BS(\alpha, \beta)$ é expressa por

$$h_T(t) = \frac{f_T(t)}{S_T(t)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right]^2 \right\} \frac{t^{-3/2}(t+\beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}}}{\Phi \left[-\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right]}.$$

Apresentamos na Figura 3 as curvas de risco da distribuição BS considerando diferentes valores para os parâmetros α e β . Notamos na Figura 3(a) que quando $t = 0$ a função de risco é zero, cresce até um valor máximo e decresce até se estabilizar em um certo valor positivo quando t tende a infinito. Este comentário, também é válido quando atribuímos diferentes valores para β e fixamos o α , as curvas de risco para este caso estão apresentadas na Figura 3(b). No geral, notamos que a função de risco é unimodal e não é constante. Para maiores detalhes sobre a função de risco ver Kundu, Kannan e Balakrishnan (2008).

Figura 3 – Função de risco da distribuição BS.



Fonte: Autoria própria (2021)

Para mais detalhes sobre a distribuição BS ver Leiva (2015).

2.2 DISTRIBUIÇÃO LOG-BIRNBAUM-SAUNDERS

A distribuição log-Birnbaum-Saunders (log-BS) é um caso particular da distribuição seno hiperbólico normal (ou simplesmente senh-normal) desenvolvida por Rieck e Nedelman (1991). A distribuição senh-normal é definida em termos da distribuição normal por meio da seguinte transformação

$$Y = \mu + \sigma \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\alpha Z}{2} \right), \quad (2.5)$$

em que $\alpha > 0$, $\sigma > 0$ e $\mu \in \mathbb{R}$ são parâmetros de forma, escala e posição, respectivamente, Z tem distribuição normal padrão e $\operatorname{arcsenh}(x)$ é a função arco seno hiperbólico de x , definida como $\operatorname{arcsenh} = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Denotaremos uma variável aleatória que segue a distribuição senh-normal por $Y \sim SN(\alpha, \mu, \sigma)$.

Uma variável aleatória Y tem uma distribuição senh-normal, se sua fda é dada por

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P\left(\mu + \sigma \operatorname{arcsenh}\left(\frac{\alpha Z}{2}\right) \leq y\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)\right) \\ &= F_z\left(\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)\right) \\ &= \Phi\left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)\right], \quad y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

em que $\Phi(\cdot)$ é a fda da normal padrão e $\sinh(x)$ é a função seno hiperbólico de x , definida como $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

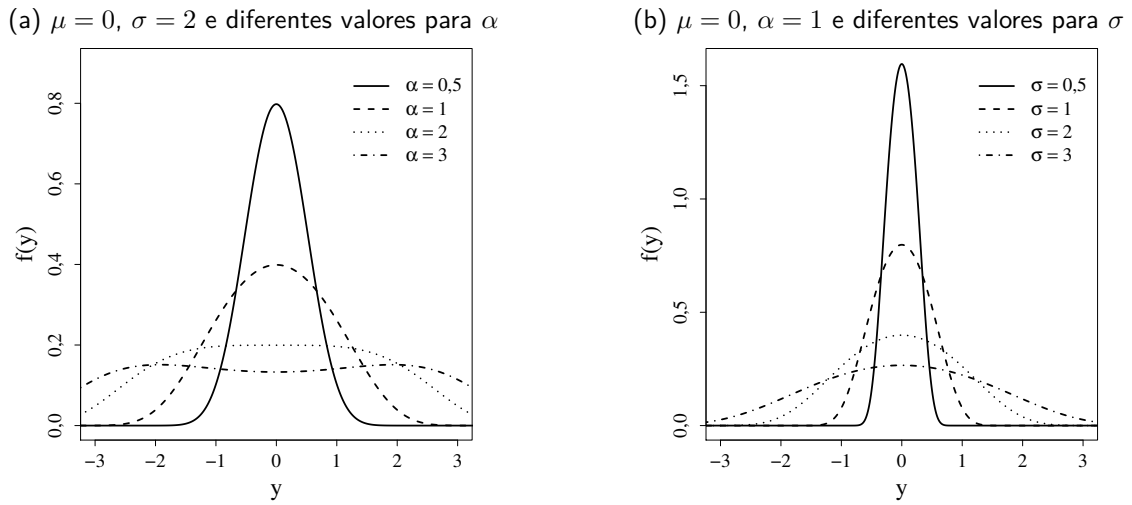
A fdp de Y é expressa da seguinte maneira

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) \\ &= \phi\left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)\right] \frac{d}{dy} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)\right]^2\right\} \frac{2}{\alpha\sigma} \cosh\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \left(\frac{2}{\alpha\sigma\sqrt{2\pi}}\right) \cosh\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)\right]^2\right\}, \quad y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

em que $\phi(\cdot)$ é a fdp da normal padrão e $\cosh(x)$ é a função cosseno hiperbólico de x , definida como $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Apresentamos na Figura 4 as curvas de densidade da distribuição senh-normal para diferentes valores de α e σ , considerando $\mu = 0$. Notamos na Figura 4(a) que a distribuição é simétrica em torno de μ , unimodal para $\alpha \leq 2$ e bimodal para $\alpha > 2$. A Figura 4(b) mostra que a variabilidade da distribuição aumenta à medida que atribuímos valores maiores para σ .

Figura 4 – Função densidade de probabilidade da distribuição senh-normal.



Fonte: Autoria própria (2021)

A seguir, listamos algumas propriedades interessantes da distribuição senh-normal:

Propriedade 2.2.1 A esperança e variância de $Y \sim SN(\alpha, \mu, \sigma)$ são dadas, respectivamente, por

$$\mathbb{E}(Y) = \mu \quad \text{e} \quad \text{Var}(Y) = \sigma^2 \omega(\alpha),$$

em que $\omega(\alpha)$ é uma função baseada na função de Bessel modificada do terceiro tipo e depende apenas de α , ver Villegas, Paula e Leiva (2011). Aproximações assintóticas para valores pequenos e grandes de α foram fornecidas por Rieck (1989 apud RIECK; NEDELMAN, 1991).

Propriedade 2.2.2 A função de sobrevivência de $Y \sim SN(\alpha, \mu, \sigma)$ é dada por

$$S_Y(y) = 1 - F_Y(y) = 1 - \Phi \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right] = \Phi \left[-\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right], \quad 0 < S_Y(y) < 1.$$

Propriedade 2.2.3 A função de risco de $Y \sim SN(\alpha, \mu, \sigma)$ é dada por

$$h_Y(y) = \frac{f_Y(y)}{S_Y(y)} = \frac{\left(\frac{2}{\alpha \sigma \sqrt{2\pi}} \right) \cosh \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right]^2 \right\}}{\Phi \left[-\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right]}.$$

Propriedade 2.2.4 Uma variável aleatória T segue uma distribuição Birnbaum-Saunders com parâmetros de forma α e escala β se, e somente se, a variável aleatória $Y = \log(T)$ segue distribuição senh-normal com parâmetros α , $\mu = \log(\beta)$ e $\sigma = 2$, isto é,

$$T \sim BS(\alpha, \beta) \Leftrightarrow Y = \log(T) \sim SN(\alpha, \mu = \log(\beta), \sigma = 2).$$

Demonstração.

Inicialmente suponhamos que $T \sim BS(\alpha, \beta)$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(\log(T) \leq y) \\ &= P(T \leq e^y) \\ &= \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{e^y}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{e^y}} \right) \right] \\ &= \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(e^{y/2} \beta^{-1/2} - e^{-y/2} \beta^{1/2} \right) \right] \\ &= \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\exp \left\{ \frac{y - \log(\beta)}{2} \right\} - \exp \left\{ -\frac{y - \log(\beta)}{2} \right\} \right) \right] \\ &= \Phi \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \log(\beta)}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

ou seja, $Y = \log(T) \sim SN(\alpha, \mu = \log(\beta), \sigma = 2)$.

Agora, suponhamos que $Y = \log(T) \sim SN(\alpha, \mu = \log(\beta), \sigma = 2)$. Então,

$$\begin{aligned} P(T \leq t) &= P(\log(T) \leq \log(t)) \\ &= P(Y \leq \log(t)) \\ &= \Phi \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{\log(t) - \log(\beta)}{2} \right) \right] \\ &= \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\exp \left\{ \frac{\log(t) - \log(\beta)}{2} \right\} - \exp \left\{ -\frac{\log(t) - \log(\beta)}{2} \right\} \right) \right] \\ &= \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(t^{1/2} \beta^{-1/2} - t^{-1/2} \beta^{1/2} \right) \right] \\ &= \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right], \end{aligned}$$

ou seja, $T \sim BS(\alpha, \beta)$.

Portanto, Rieck e Nedelman (1991) mostraram que se Y tem distribuição senh-normal com parâmetros α , $\mu = \log(\beta)$ e $\sigma = 2$, então também podemos dizer que Y segue uma distribuição log-BS com parâmetros α e $\mu = \log(\beta)$. Denotaremos uma variável aleatória que segue distribuição log-BS por $Y \sim \text{log-BS}(\alpha, \mu = \log(\beta))$. Para mais detalhes sobre as propriedades da distribuição senh-normal, veja também Silva (2013) e Villegas, Paula e Leiva (2011).

2.3 DISTRIBUIÇÃO BIRNBAUM-SAUNDERS GENERALIZADA

A classe de distribuições multivariadas cujos contornos de densidade têm a mesma forma elíptica que a da distribuição normal e incluem distribuições de caudas mais leves e mais pesadas do que a da distribuição normal é conhecida como distribuições de contornos elípticos ou distribuições elípticas, veja, por exemplo, McGraw e Wagner (1968), Kelker (1970), Cambanis, Huang e Simons (1981), Anderson e Fang (1990), Fang, Kotz e Ng (1990), Díaz-García, Leiva-Sánchez e Galea (2002) e Fang (2014). Para o caso de uma variável aleatória unidimensional, as distribuições elípticas correspondem a todas as distribuições simétricas em $\mathbb{R}$. Nesse sentido, dizemos que uma variável aleatória X tem distribuição elíptica se sua fdp é expressa da seguinte forma

$$f_X(x) = cg \left[\left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right], \quad (2.6)$$

em que μ e $x \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $g(\cdot)$ é o núcleo da densidade de X e c é a constante normalizadora de modo que $f_X(x)$ é uma densidade, denotaremos uma variável aleatória que segue uma distribuição elíptica por $X \sim EC(\mu, \sigma^2; g)$. Os parâmetros μ e σ^2 são parâmetros de posição e de escala, respectivamente.

Díaz-García e Leiva-Sánchez (2005) apresentam de forma explícita o núcleo e a constante normalizadora de algumas densidades pertencentes a essa classe de distribuições, a saber: Pearson tipo VII, tipo Kotz, Bessel, Caso Especial, Logística, normal, t de Student, entre outras.

Díaz-García e Leiva-Sánchez (2005), Díaz-García e Leiva-Sánchez (2007) apresentam uma generalização da distribuição BS que foi definida em termos de distribuições simétricas padrão ou distribuições univariadas com contornos elípticos. Essa generalização foi obtida a partir de (2.4) relaxando a suposição de que $Z \sim N(0, 1)$, isto é

$$T = \beta \left[\frac{\alpha U}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha U}{2} \right)^2 + 1} \right]^2,$$

em que $U \sim EC(0, 1; g)$, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Desta forma, T segue uma distribuição Birnbaum-Saunders generalizada (BSG) e é denotada por $T \sim BSG(\alpha, \beta; g)$. Similar à distribuição Birnbaum-Saunders, os parâmetros α e β correspondem, respectivamente, aos parâmetros de forma e escala e g é dada em (2.6).

Portanto, se T segue uma distribuição BSG sua fdp é dada por

$$f_T(t) = \frac{c}{2\alpha\beta^{1/2}} t^{-3/2}(t+\beta) g \left[\left(\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right)^2 \right], \quad t > 0, \quad (2.7)$$

em que c e g são dadas em (2.6). Podemos reescrever (2.7) como

$$f_T(t) = f_U(a_t(\alpha, \beta)) \frac{d}{dt} a_t(\alpha, \beta),$$

em que f_U é a fdp da variável aleatória U , $a_t(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right)$ e $\frac{d}{dt} a_t(\alpha, \beta) = \frac{t^{-3/2}(t+\beta)}{2\alpha\beta^{1/2}}$.

A fda da BSG pode ser expressa da seguinte maneira

$$F_T(t) = F_U(a_t(\alpha, \beta)),$$

em que $F_T(t)$ é a fda da BSG que é obtida em termos da fda da distribuição que a gera.

A função de sobrevivência e função de risco são dadas, respectivamente, por

$$S_T(t) = 1 - F_U(a_t(\alpha, \beta)), \quad 0 < F_U(\cdot) < 1$$

e

$$h_T(t) = \frac{f_T(t)}{S_T(t)} = \left[\frac{f_U(a_t(\alpha, \beta))}{1 - F_U(a_t(\alpha, \beta))} \right] \frac{d}{dt} a_t(\alpha, \beta).$$

Apresentaremos a seguir duas distribuições na classe BSG: Cauchy e t de Student, respectivamente.

$$f_T(t) = \frac{1}{\pi} \left\{ 1 + \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right]^2 \right\}^{-1} \frac{t^{-3/2}(t+\beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}}$$

e

$$f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left\{ 1 + \frac{1}{\nu} \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right]^2 \right\}^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \frac{t^{-3/2}(t+\beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}}.$$

Sendo assim, a distribuição BS dada em (2.3) é uma caso particular da distribuição BSG. Assim como no caso da distribuição BS, temos que se $T \sim BSG(\alpha, \beta; g)$, então cT , com $c > 0$, também segue distribuição BSG com parâmetros α e $c\beta$. Além disso, T^{-1} , também segue distribuição BSG com parâmetros α e β^{-1} indicando que a distribuição BSG também pertence à família de variáveis aleatórias fechada sob reciprocidade, veja Saunders (1974) e Díaz-García e Leiva-Sánchez (2005).

2.4 DISTRIBUIÇÃO LOG-BIRNBAUM-SAUNDERS GENERALIZADA COM NÚCLEO t DE STUDENT

Díaz-García e Domínguez-Molina (2006) propuseram a generalização univariada e multivariada da distribuição senh-normal, denominada por distribuição seno hiperbólica esférica ou, simplesmente, senh-esférica. Portanto, se Y segue distribuição senh-esférica (caso unidimensional) sua fda é dada por

$$F_Y(y) = F_U \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right], \quad (2.8)$$

sendo $\alpha > 0$, $\sigma > 0$, $\mu = \log(\beta) \in \mathbb{R}$ e F_U é a fda da variável aleatória $U \sim EC(0, 1; g)$.

Derivando (2.8) em relação a y , obtemos a fdp de Y , que é dada por

$$f_Y(y) = \frac{c}{\sigma} \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right] g \left[\left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right)^2 \right], \quad y \in \mathbb{R},$$

em que c e g são dadas em (2.6). Denotaremos uma variável aleatória que segue distribuição senh-esférica por $Y \sim SE(\alpha, \mu, \sigma; g)$. Além da distribuição senh-normal como caso particular da distribuição senh-esférica, consideramos também a distribuição senh- t .

De forma análoga à distribuição senh-normal, definiu-se a distribuição senh- t . Sendo assim, se Y tem distribuição senh- t , denotada por $Y \sim St(\alpha, \mu, \sigma, \nu)$, sua fda é expressa por

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Phi_t \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + I_{\frac{\xi_{i2}^2}{\nu + \xi_{i2}^2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu \right) \right], \end{aligned}$$

em que $\alpha > 0$, $\sigma > 0$ e $\mu = \log(\beta) \in \mathbb{R}$ são parâmetros de forma, escala e posição, respectivamente, Φ_t é a fda da t de Student, $\nu > 0$ é o número de graus de liberdade, $\xi_{i2} = \frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right)$ e $I_x(a, b)$ é a função beta incompleta regularizada, ver Johnson, Kotz e Balakrishnan (1995, p. 364), definida por

$$I_x(a, b) = \frac{\int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt}{\int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt}.$$

Portanto, a fdp de Y é dada por

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \phi_t \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right] \frac{d}{dy} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right] \\ &= \frac{\Gamma \left(\frac{\nu+1}{2} \right)}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right)} \left\{ 1 + \frac{1}{\nu} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right]^2 \right\}^{-\left(\frac{\nu+1}{2} \right)} \frac{1}{\sigma} \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right], \quad y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

sendo ϕ_t a fdp t de Student e Γ a função gama.

Segue então que a função de sobrevivência e a função de risco são dadas, respectivamente, por

$$S_Y(y) = 1 - \Phi_t \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right] = \Phi_t \left[-\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right]$$

e

$$h_Y(y) = \frac{f_Y(y)}{S_Y(y)} = \frac{\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \left\{ 1 + \frac{1}{\nu} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right]^2 \right\}^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \frac{1}{\sigma} \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right]}{\Phi_t \left[-\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right]},$$

em que Φ_t é a fda t de Student.

Se Y tem distribuição $\sinh$ - t com parâmetros α , $\mu = \log(\beta)$, $\sigma = 2$ e ν , então também podemos dizer que Y segue uma distribuição log-Birnbaum-Saunders- t (log-BS- t) com parâmetros α , $\mu = \log(\beta)$ e ν . A fdp, neste caso, é dada por

$$f_Y(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left\{ 1 + \frac{1}{\nu} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{2} \right) \right]^2 \right\}^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \frac{1}{\alpha} \cosh \left(\frac{y - \mu}{2} \right), \quad y \in \mathbb{R}.$$

2.5 MODELO DE REGRESSÃO LOG-BIRNBAUM-SAUNDERS

Com base na distribuição $\sinh$ -normal, Rieck e Nedelman (1991) desenvolveram um modelo de regressão log-linear para a distribuição BS, esse modelo é denominado de regressão linear log-BS e será apresentado a seguir.

Sejam $t_1, t_2, \dots, t_n$ variáveis aleatórias independentes, tais que $t_i \sim \text{BS}(\alpha_i, \beta_i)$ para $i = 1, \dots, n$. Suponhamos que a distribuição de cada variável aleatória t_i dependa de um vetor com $(p-1)$ variáveis explicativas, $\mathbf{x}_i^\top = (1, x_{i2}, \dots, x_{ip})$, tal que

- (i) $\beta_i = \exp \left\{ \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma} \right\}$ para $i = 1, \dots, n$, sendo $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)^\top$ um vetor de parâmetros desconhecidos.
- (ii) O parâmetro de forma α é independente do vetor de variáveis explicativas $\mathbf{x}_i^\top$, ou seja, $\alpha_i = \alpha$ para $i = 1, \dots, n$.

Desta forma, considerando que $\delta_i \sim \text{BS}(\alpha, 1)$, segue das suposições citadas acima combinadas com a Propriedade 2.1.3 que

$$t_i = \exp \left\{ \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma} \right\} \delta_i \sim \text{BS} \left(\alpha, \exp \left\{ \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma} \right\} \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

Linearizando o modelo expresso em (2.9), obtemos

$$\log(t_i) = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma} + \log(\delta_i), \quad i = 1, \dots, n$$

que equivale a

$$y_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma} + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

em que y_i é o logaritmo do tempo de falha para a i -ésima unidade experimental e ϵ_i são variáveis aleatórias iid tais que $\epsilon_i \sim \log\text{-}BS(\alpha, 0)$.

2.5.1 Estimação Pontual e Intervalar

Nesta seção, apresentaremos o modelo de regressão log-BS com presença, ou não, de censura tipo II. Utilizaremos o método da máxima verossimilhança para estimar os parâmetros do modelo, além de, apresentarmos os intervalos do tipo assintótico e *bootstrap* percentil.

2.5.1.1 Dados completos

Sejam $y_1, \dots, y_n$ variáveis aleatórias independentes, tais que $y_i \sim \log\text{-}BS(\alpha, \mu_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma})$ para $i = 1, \dots, n$ e $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\gamma}^\top, \alpha)^\top$ um vetor de dimensão $(p+1) \times 1$ de parâmetros desconhecidos, a serem estimados. O logaritmo da função de verossimilhança de $\boldsymbol{\theta}$ baseado em n observações independentes é dado por

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = c + \sum_{i=1}^n \left[\log(\xi_{i1}) - \frac{1}{2} \xi_{i2}^2 \right], \quad (2.10)$$

em que $c = -\frac{n}{2} \log(8\pi)$, $\xi_{i1} = \frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mu_i}{2}\right)$, $\xi_{i2} = \frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mu_i}{2}\right)$ e $\mu_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}$, para $i = 1, \dots, n$.

As primeiras derivadas do logaritmo da função de verossimilhança dado em (2.10) com relação a α e ao s -ésimo componente de $\boldsymbol{\gamma}$ são dadas, respectivamente, por

$$\ell_{\boldsymbol{\gamma}}^{(s)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_{is} \left(\xi_{i2} \xi_{i1} - \frac{\xi_{i2}}{\xi_{i1}} \right), \quad s = 1, \dots, p, \quad (2.11)$$

e

$$\ell_{\alpha} = -\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \xi_{i2}^2. \quad (2.12)$$

O vetor escore total de $\boldsymbol{\theta}$, $l(\boldsymbol{\theta})$, tem a forma

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \ell_{\boldsymbol{\gamma}}^{\top} & \ell_{\alpha} \end{bmatrix}^{\top},$$

em que $\ell_{\boldsymbol{\gamma}}$ é um vetor de dimensão $p \times 1$ e cada elemento desse vetor é obtido pela expressão (2.11) e ℓ_{α} é um escalar obtido pela expressão (2.12). Para mais detalhes sobre os cálculos do vetor escore total ver o APÊNDICE B.

Os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros de regressão e do parâmetro de forma são soluções das equações $\ell_{\alpha} = 0$ e $\ell_{\boldsymbol{\gamma}}^{(s)} = 0$ ($s = 1, \dots, p$). Rieck e Nedelman (1991) mostraram uma expressão para o estimador de máxima verossimilhança (EMV) de α^2 em função do EMV do vetor $\boldsymbol{\gamma}$. A expressão é escrita da seguinte forma

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \sinh^2 \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right),$$

ou seja,

$$\hat{\alpha} = \sqrt{\frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \sinh^2 \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right)},$$

em que $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ é o EMV do vetor $\boldsymbol{\gamma}$.

Entretanto, as equações $\ell_{\boldsymbol{\gamma}}^{(s)} = 0$, $s = 1, \dots, p$, não apresentam soluções em forma fechada, sendo necessário o uso de métodos iterativos para resolver problemas de otimização não-linear. Utilizamos o algoritmo quase-Newton mais popular, o método numérico BFGS, cuja nomeação é em homenagem a seus criadores Broyden, Fletcher, Goldfarb e Shanno, ver Nocedal e Wright (1999, p. 193–201). A matriz de informação total observada para $\boldsymbol{\theta}$ é dada por

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} j_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}} & j_{\boldsymbol{\gamma}\alpha} \\ j_{\alpha\boldsymbol{\gamma}}^{\top} & j_{\alpha\alpha} \end{bmatrix},$$

sendo

$$j_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}}^{(s,t)} = -\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_s \partial \gamma_t} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_{is} x_{it} \left(2 \xi_{i2}^2 + \frac{4}{\alpha^2} - 1 + \frac{\xi_{i2}^2}{\xi_{i2}^2 + \frac{4}{\alpha^2}} \right), \quad s, t = 1, \dots, p, \quad (2.13)$$

$$j_{\boldsymbol{\gamma}\alpha}^{(s)} = j_{\alpha\boldsymbol{\gamma}}^{(s)} = -\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_s \partial \alpha} = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n x_{is} \xi_{i2} \xi_{i1}, \quad s = 1, \dots, p, \quad (2.14)$$

e

$$j_{\alpha\alpha} = -\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha^2} = -\frac{n}{\alpha^2} + \frac{3}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \xi_{i2}^2, \quad (2.15)$$

em que $j_{\gamma\gamma}$ tem dimensão $p \times p$ e cada elemento dessa matriz é obtido pela expressão (2.13), $j_{\gamma\alpha}$ é um vetor com dimensão $p \times 1$ e cada elemento desse vetor é obtido pela expressão (2.14) e $j_{\alpha\alpha}$ é um escalar, obtido pela expressão (2.15). Para mais detalhes sobre os cálculos das segundas derivadas do logaritmo da função de verossimilhança dado em (2.10) ver o APÊNDICE B.

A distribuição assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança é

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma} \\ \hat{\alpha} \end{pmatrix} \overset{a}{\sim} N_{(p+1)} \left(\begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \end{pmatrix}, \Sigma \right), \quad (2.16)$$

em que Σ é a inversa da matriz de informação esperada com dimensão $(p+1) \times (p+1)$ e pode ser aproximada pela inversa da matriz de informação observada.

Com base no resultado da Equação (2.16), podemos construir um intervalo de confiança aproximado com nível $(1 - \rho) \times 100\%$ para cada parâmetro individualmente. O intervalo de confiança para θ_k é dado por

$$\left[\hat{\theta}_k \pm z_{\rho/2} \sqrt{\Sigma(\hat{\theta}_k)} \right], \quad (2.17)$$

em que $\Sigma(\hat{\theta}_k)$ é o k -ésimo elemento da diagonal da inversa da matriz esperada avaliados nos estimadores de máxima verossimilhança e podem ser aproximados pela inversa da informação observada e $z_{\rho/2}$ é o quantil $\rho/2$ da normal padrão, para $\rho \in (0, 1/2)$. O intervalo de confiança assintótico é baseado em aproximações de grandes amostras. Denotaremos o intervalo em (2.17) por ICA.

Se utilizarmos o método *bootstrap* introduzido por Efron (1979) para obter a distribuição empírica de $\hat{\theta}_k$, podemos construir o denominado intervalo de confiança *bootstrap* percentil (ICP) com cobertura nominal $(1 - \rho) \times 100\%$. Para isto, geramos B amostras *bootstrap* de tamanho n e para cada amostra *bootstrap* e calculamos $\hat{\theta}_k^{*b}$ ($b = 1, \dots, B$). Os limites inferior e superior do intervalo são os percentis empíricos $\rho/2$ e $1 - \rho/2$ dos valores de $\hat{\theta}_k^{*b}$. Desta forma, o intervalo de confiança *bootstrap* percentil para cada parâmetro individualmente (θ_k) é dado por

$$\left[\hat{\theta}_k^{*(\rho/2)}, \hat{\theta}_k^{*(1-\rho/2)} \right].$$

A teoria descrita anteriormente sobre os intervalos de confiança do tipo assintótico e *bootstrap* percentil é válida também para o caso em que os dados possuem censura, veja por exemplo Cordeiro, Ortega e Silva (2011).

2.5.1.2 Dados censurados

Segundo Cordeiro, Ortega e Silva (2011), dados de sobrevivência são dados cuja variável resposta é o tempo até a ocorrência de um evento específico de interesse, em que esse tempo é denominado de tempo de sobrevivência ou tempo de falha. Uma das características de dados de sobrevivência é a presença de observações censuradas, que é a observação incompleta ou parcial da resposta. Dados censurados surgem com uma certa periodicidade, pois nem sempre é possível esperar que o evento de interesse ocorra para todos os elementos em estudo.

O tipo de censura de cada elemento no estudo pode ser: à direita, quando ela ocorre após o início do estudo; à esquerda, quando ela ocorre antes do início do estudo, ou intervalar, quando não se conhece o tempo exato da censura, apenas o intervalo no qual ela ocorreu. Colosimo e Giolo (2006) apresentam os três conhecidos mecanismos de censura à direita: censura tipo I, é aquela em que o estudo finaliza após um período pré-estabelecido de tempo, censura tipo II, é aquela em que o estudo finaliza após ter ocorrido a falha em um número pré-estabelecido de indivíduos sob teste, e censura aleatória, é aquela que acontece quando o elemento deixa o estudo sem que o evento de interesse tenha ocorrido. Neste trabalho de dissertação, consideramos apenas censura à direita tipo II, pois o uso da mesma reduz o tempo do estudo, além de ser mais vantajoso, já que se tem conhecimento antecipado do número de observações com falhas.

Mesmo sendo incompletas as observações censuradas, as mesmas nos fornecem informações sobre os tempos de falha. Portanto, o descarte desses dados pode levar à inferências viesadas, ver, por exemplo, Bolfarine e Sandoval (2001) e Casella e Berger (2002). As técnicas estatísticas utilizadas para dados de sobrevivência são conhecidas como análise de sobrevivência ou sobrevida, em geral, o termo é usado na área médica, ou análise de confiabilidade, na pesquisa industrial. Diante disso, o método de máxima verossimilhança surge com uma opção adequada para esse tipo de dados.

Sejam $y_1, \dots, y_n$ variáveis aleatórias independentes, tais que $y_i \sim \text{log-BS}(\alpha, \mu_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma})$ para $i = 1, \dots, n$, $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\gamma}^\top, \alpha)^\top$ um vetor de dimensão $(p+1) \times 1$ de parâmetros desconhecidos, a serem estimados, $\bar{C}$ é o conjunto das unidades em que y_i é o logaritmo do tempo de falha e C é o conjunto das unidades em que y_i é o logaritmo do tempo de censura. A função de verossimilhança considerando dados com censura tipo II é expressa por

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i \in \bar{C}} f(y_i; \boldsymbol{\theta}) \prod_{i \in C} S(y_i; \boldsymbol{\theta}).$$

Observe que a contribuição de cada observação não censurada é a sua função de densidade e que cada observação censurada contribui com a função de sobrevivência. Deste modo, o logaritmo da função de verossimilhança de θ considerando dados com censura tipo II é igual à

$$\ell(\theta) = c + \sum_{i \in \bar{C}} \left[\log(\xi_{i1}) - \frac{1}{2} \xi_{i2}^2 \right] + \sum_{i \in C} \log(1 - \Phi(\xi_{i2})), \quad (2.18)$$

em que Φ é a fda da normal padrão, $c = -\frac{r}{2} \log(8\pi)$ sendo r o número de falhas, $\xi_{i1} = \frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mu_i}{2}\right)$, $\xi_{i2} = \frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mu_i}{2}\right)$ e $\mu_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}$, para $i = 1, \dots, n$.

As primeiras derivadas do logaritmo da função de verossimilhança dado em (2.18) com relação ao s -ésimo componente de $\boldsymbol{\gamma}$ e a α são dadas, respectivamente, por

$$\ell_{\boldsymbol{\gamma}}^{(s)} = \frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} \left(\xi_{i2} \xi_{i1} - \frac{\xi_{i2}}{\xi_{i1}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \in C} x_{is} \xi_{i1} h(\xi_{i2}), \quad s = 1, \dots, p, \quad (2.19)$$

e

$$\ell_{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \left[\sum_{i \in \bar{C}} (\xi_{i2}^2 - 1) + \sum_{i \in C} \xi_{i2} h(\xi_{i2}) \right], \quad (2.20)$$

em que $h(\xi_{i2}) = \frac{\phi(\xi_{i2})}{1 - \Phi(\xi_{i2})}$ com $\phi(\cdot)$ e $\Phi(\cdot)$ sendo a fdp e a fda da normal padrão, respectivamente.

O vetor escore total de θ , $l(\theta)$, tem a forma

$$l(\theta) = \begin{bmatrix} \ell_{\boldsymbol{\gamma}}^\top & \ell_{\alpha} \end{bmatrix}^\top,$$

em que $\ell_{\boldsymbol{\gamma}}$ é um vetor de dimensão $p \times 1$ e cada elemento desse vetor é obtido pela expressão (2.19) e ℓ_{α} é um escalar obtido pela expressão (2.20). Para mais detalhes sobre os cálculos do vetor escore total ver o APÊNDICE B.

A matriz de informação total observada para θ é dada por

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} j_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}} & j_{\boldsymbol{\gamma}\alpha} \\ j_{\alpha\boldsymbol{\gamma}}^\top & j_{\alpha\alpha} \end{bmatrix},$$

sendo

$$\begin{aligned} j_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}}^{(s,t)} &= -\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \gamma_s \partial \gamma_t} = \frac{1}{4} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} x_{it} \left[2 \xi_{i2}^2 + \frac{4}{\alpha^2} - 1 + \frac{\xi_{i2}^2}{\xi_{i2}^2 + \frac{4}{\alpha^2}} \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{i \in C} x_{is} x_{it} \left[\xi_{i2} h(\xi_{i2}) + \left(\frac{4}{\alpha^2} + \xi_{i2}^2 \right) h'(\xi_{i2}) \right], \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$j_{\boldsymbol{\gamma}\alpha}^{(s)} = j_{\alpha\boldsymbol{\gamma}}^{(s)} = -\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \gamma_s \partial \alpha} = \frac{1}{\alpha} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} \xi_{i2} \xi_{i1} + \frac{1}{2\alpha} \sum_{i \in C} x_{is} \xi_{i1} [h(\xi_{i2}) + \xi_{i2} h'(\xi_{i2})] \quad (2.22)$$

e

$$j_{\alpha\alpha} = -\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha \partial \alpha} = -\frac{r}{\alpha^2} + \frac{3}{\alpha^2} \sum_{i \in \bar{C}} \xi_{i2}^2 + \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i \in C} \left[2 \xi_{i2} h(\xi_{i2}) + \xi_{i2}^2 h'(\xi_{i2}) \right], \quad (2.23)$$

em que $j_{\gamma\gamma}$ tem dimensão $p \times p$ e cada elemento dessa matriz é obtido pela expressão (2.21), $j_{\gamma\alpha}$ é um vetor com dimensão $p \times 1$ e cada elemento desse vetor é obtido pela expressão (2.22), $j_{\alpha\alpha}$ é um escalar, obtido pela expressão (2.23), $h'(\xi_{i2}) = \frac{\phi'(\xi_{i2})}{1-\Phi(\xi_{i2})} + \left[\frac{\phi(\xi_{i2})}{1-\Phi(\xi_{i2})} \right]^2$ e $\phi'(\xi_{i2}) = \phi(\xi_{i2})(-\xi_{i2})$. Para mais detalhes sobre os cálculos das segundas derivadas do logaritmo da função de verossimilhança dado em (2.18) ver o APÊNDICE B.

2.6 MODELO DE REGRESSÃO LOG-BIRNBAUM-SAUNDERS GENERALIZADO COM NÚCLEO t DE STUDENT

Barros (2007) estendeu o modelo proposto por Rieck e Nedelman (1991), denominado por modelo de regressão log-Birnbaum-Saunders generalizado (log-BSG). Barros, Paula e Leiva (2008) consideraram um caso particular dessa classe de modelo, isto é, consideraram o modelo de regressão log-BS- t , sendo assim, o modelo é definido da seguinte forma

$$y_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma} + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

em que y_i é o logaritmo do tempo de falha ou censura para a i -ésima unidade experimental, $\mathbf{x}_i^\top = (1, x_{i2}, \dots, x_{ip})$ é um vetor com $(p-1)$ variáveis explicativas, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)^\top$ é o vetor de parâmetros desconhecidos e ϵ_i são variáveis aleatórias iid tais que $\epsilon_i \sim \text{log-BS-}t(\alpha, 0, \nu)$.

2.6.1 Estimação Pontual e Intervalar

Nesta seção, apresentaremos o modelo de regressão log-BS- t com presença, ou não, de censura tipo II. Utilizaremos o método da máxima verossimilhança para estimar os parâmetros do modelo, além de, apresentarmos os intervalos do tipo assintótico e *bootstrap* percentil.

2.6.1.1 Dados completos

Sejam $y_1, \dots, y_n$ variáveis aleatórias independentes, tais que $y_i \sim \text{log-BS-}t(\alpha, \mu_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}, \nu)$ para $i = 1, \dots, n$ e $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\gamma}^\top, \alpha)^\top$ um vetor de dimensão $(p+1) \times 1$ de parâmetros desconhecidos, a serem estimados e ν parâmetro fixo. O logaritmo da função de verossimilhança de $\boldsymbol{\theta}$

baseado em n observações independentes é dado por

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = c + \sum_{i=1}^n \left[\log(\xi_{i1}) - \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \log(\nu + \xi_{i2}^2) \right], \quad (2.24)$$

em que $c = n \left[\log \left(\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{2\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \right) + \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \log(\nu) \right]$, $\xi_{i1} = \frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mu_i}{2}\right)$, $\xi_{i2} = \frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mu_i}{2}\right)$ e $\mu_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}$, para $i = 1, \dots, n$.

As primeiras derivadas do logaritmo da função de verossimilhança dado em (2.24) com relação ao s -ésimo componente de $\boldsymbol{\gamma}$ e a α são dadas, respectivamente, por

$$\ell_{\boldsymbol{\gamma}}^{(s)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_{is} \left[\xi_{i2} \xi_{i1} w(\xi_{i2}^2) - \frac{\xi_{i2}}{\xi_{i1}} \right], \quad s = 1, \dots, p, \quad (2.25)$$

e

$$\ell_{\alpha} = -\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \xi_{i2}^2 w(\xi_{i2}^2), \quad (2.26)$$

sendo $w(\xi_{i2}^2) = \frac{\nu+1}{\nu+\xi_{i2}^2}$. Observamos que quando $\nu \rightarrow +\infty$ a quantidade $w(\xi_{i2}^2) \rightarrow 1$, $\forall i$ ($i = 1, \dots, n$), isto é, o vetor escore total do modelo de regressão log-BS- t se reduz ao vetor escore total do modelo de regressão log-BS. Portanto, $w(\xi_{i2}^2)$ é considerado como sendo um peso que é inversamente proporcional à quantidade ξ_{i2}^2 , ou melhor, quanto maior a quantidade ξ_{i2}^2 menores serão os pesos. Barros (2007) mostra que as estimativas de máxima verossimilhança são menos sensíveis a observações atípicas, visto que são atribuídos pesos menores a essas observações no processo de estimação.

O vetor escore total de $\boldsymbol{\theta}$, $l(\boldsymbol{\theta})$, tem a forma

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \left[\ell_{\boldsymbol{\gamma}}^\top, \ell_{\alpha} \right]^\top,$$

em que $\ell_{\boldsymbol{\gamma}}$ é um vetor de dimensão $p \times 1$ e cada elemento desse vetor é calculado pela expressão (2.25) e ℓ_{α} é um escalar obtido pela expressão (2.26). Para mais detalhes sobre os cálculos do vetor escore total ver o APÊNDICE C.

Os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros de regressão e do parâmetro de forma são soluções das equações $\ell_{\boldsymbol{\gamma}}^{(s)} = 0$ ($s = 1, \dots, p$) e $\ell_{\alpha} = 0$. Como essas equações não possuem formas fechadas, recorreremos ao uso de técnicas de maximização para obter as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros desconhecidos. Utilizamos o método numérico BFGS.

A matriz de informação total observada para $\boldsymbol{\theta}$ é dada por

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \dot{j}_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}} & \dot{j}_{\boldsymbol{\gamma}\alpha} \\ \dot{j}_{\alpha\boldsymbol{\gamma}}^\top & \dot{j}_{\alpha\alpha} \end{bmatrix},$$

sendo

$$j_{\gamma\gamma}^{(s,t)} = -\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_s \partial \gamma_t} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_{is} x_{it} \left\{ \left[-\frac{4/\alpha^2}{\xi_{i1}^2} \right] + (\xi_{i1}^2 + \xi_{i2}^2) w(\xi_{i2}^2) + 2 \xi_{i1}^2 \xi_{i2}^2 w'(\xi_{i2}^2) \right\}, \quad s, t = 1, \dots, p \quad (2.27)$$

$$j_{\gamma\alpha}^{(s)} = j_{\alpha\gamma}^{(s)} = -\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_s \partial \alpha} = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n x_{is} \xi_{i2} \xi_{i1} \left[w(\xi_{i2}^2) + \xi_{i2}^2 w'(\xi_{i2}^2) \right], \quad s = 1, \dots, p \quad (2.28)$$

e

$$j_{\alpha\alpha} = -\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha^2} = -\frac{n}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left[3 \xi_{i2}^2 w(\xi_{i2}^2) + 2 \xi_{i2}^4 w'(\xi_{i2}^2) \right], \quad (2.29)$$

em que $w'(\xi_{i2}^2) = -\frac{w(\xi_{i2}^2)}{(\nu + \xi_{i2}^2)}$. O bloco $j_{\gamma\gamma}$ tem dimensão $p \times p$ e cada elemento dessa matriz é obtido pela expressão (2.27), $j_{\gamma\alpha}$ é um vetor com dimensão $p \times 1$ e cada elemento desse vetor é obtido pela expressão (2.28) e $j_{\alpha\alpha}$ é um escalar, calculado pela expressão (2.29).

Podemos utilizar aqui os intervalos de confiança do tipo assintótico e *bootstrap* percentil descritos na Seção 2.5.1. Esses intervalos são válidos também para o caso em que temos dados censurados.

2.6.1.2 Dados censurados

Sejam $y_1, \dots, y_n$ variáveis aleatórias independentes, tais que $y_i \sim \text{log-BS-}t(\alpha, \mu_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}, \nu)$ para $i = 1, \dots, n$, $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\gamma}^\top, \alpha)^\top$ um vetor de dimensão $(p+1) \times 1$ de parâmetros desconhecidos, a serem estimados, $\overline{C}$ o conjunto das unidades em que y_i é o logaritmo do tempo de falha e C o conjunto das unidades em que y_i é o logaritmo do tempo de censura. Portanto, o logaritmo da função de verossimilhança é dado por

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = c + \sum_{i \in \overline{C}} \left[\log(\xi_{i1}) - \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \log(\nu + \xi_{i2}^2) \right] + \sum_{i \in C} \log(1 - \Phi_t(\xi_{i2})), \quad (2.30)$$

em que $c = r \left[\log \left(\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{2\sqrt{\nu\pi} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \right) + \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \log(\nu) \right]$ sendo r o número de falhas, Φ_t é a fda da t de Student com ν graus de liberdade, $\xi_{i1} = \frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mu_i}{2} \right)$ e $\xi_{i2} = \frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mu_i}{2} \right)$, $\mu_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}$, para $i = 1, \dots, n$.

As primeiras derivadas do logaritmo da função de verossimilhança dado em (2.30) com relação ao s -ésimo componente de $\boldsymbol{\gamma}$ e a α são dadas, respectivamente, por

$$\ell_{\gamma}^{(s)} = \frac{1}{2} \sum_{i \in \overline{C}} x_{is} \left[\xi_{i2} \xi_{i1} w(\xi_{i2}^2) - \frac{\xi_{i2}}{\xi_{i1}} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i \in C} x_{is} \xi_{i1} h(\xi_{i2}), \quad s = 1, \dots, p \quad (2.31)$$

e

$$\ell_\alpha = \frac{1}{\alpha} \sum_{i \in \overline{C}} [\xi_{i2}^2 w(\xi_{i2}^2) - 1] + \frac{1}{\alpha} \sum_{i \in C} \xi_{i2} h(\xi_{i2}), \quad (2.32)$$

sendo $w(\xi_{i2}^2) = \frac{\nu+1}{\nu+\xi_{i2}^2}$ e $h(\xi_{i2}) = \frac{\phi_t(\xi_{i2})}{1-\Phi_t(\xi_{i2})}$, em que $\phi_t(\cdot)$ e $\Phi_t(\cdot)$ é a fdp e a fda da t -Student com ν graus de liberdade, respectivamente.

O vetor escore total de $\boldsymbol{\theta}$, $l(\boldsymbol{\theta})$, tem a forma

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \ell_\gamma^\top, \ell_\alpha \end{bmatrix}^\top,$$

em que ℓ_γ é um vetor de dimensão $p \times 1$ e cada elemento desse vetor é obtido pela expressão (2.31) e ℓ_α é um escalar obtido pela expressão (2.32). Para mais detalhes sobre os cálculos do vetor escore total ver APÊNDICE C.

Os estimadores de máxima verossimilhança dos coeficientes de regressão e do parâmetro de forma são soluções das equações $\ell_\gamma^{(s)} = 0$ ($s = 1, \dots, p$) e $\ell_\alpha = 0$. Como essas equações não possuem solução em forma fechada, precisamos recorrer ao uso de técnicas de maximização para obter as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros desconhecidos. Utilizamos aqui também o método numérico BFGS.

A matriz de informação total observada para $\boldsymbol{\theta}$ é dada por

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} j_{\gamma\gamma} & j_{\gamma\alpha} \\ j_{\alpha\gamma}^\top & j_{\alpha\alpha} \end{bmatrix},$$

sendo

$$j_{\gamma\gamma}^{(s,t)} = -\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_s \partial \gamma_t} = \frac{1}{4} \sum_{i \in \overline{C}} x_{is} x_{it} \left\{ \left[-\frac{4/\alpha^2}{\xi_{i1}^2} \right] + (\xi_{i1}^2 + \xi_{i2}^2) w(\xi_{i2}^2) + 2 \xi_{i1}^2 \xi_{i2}^2 w'(\xi_{i2}^2) \right\} \\ + \frac{1}{4} \sum_{i \in C} x_{is} x_{it} \left[\xi_{i2} h(\xi_{i2}) + \left(\frac{4}{\alpha^2} + \xi_{i2}^2 \right) h'(\xi_{i2}) \right], \quad s, t = 1, \dots, p, \quad (2.33)$$

$$j_{\gamma\alpha}^{(s)} = j_{\alpha\gamma}^{(s)} = -\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_s \partial \alpha} = \frac{1}{\alpha} \sum_{i \in \overline{C}} x_{is} \xi_{i2} \xi_{i1} [w(\xi_{i2}^2) + \xi_{i2}^2 w'(\xi_{i2}^2)] \\ + \frac{1}{2\alpha} \sum_{i \in C} x_{is} \xi_{i1} [h(\xi_{i2}) + \xi_{i2} h'(\xi_{i2})], \quad s = 1, \dots, p \quad (2.34)$$

e

$$j_{\alpha\alpha} = -\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha^2} = -\frac{r}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i \in \overline{C}} \left\{ 3\xi_{i2}^2 w(\xi_{i2}^2) + 2\xi_{i2}^4 w'(\xi_{i2}^2) \right\} \\ + \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i \in C} \left[2 \xi_{i2} h(\xi_{i2}) + \xi_{i2}^2 h'(\xi_{i2}) \right], \quad (2.35)$$

em que $w'(\xi_{i2}^2) = -\frac{w(\xi_{i2}^2)}{(\nu + \xi_{i2}^2)}$, $h'(\xi_{i2}) = \frac{\phi'_t(\xi_{i2})}{1 - \Phi_t(\xi_{i2})} + \left[\frac{\phi_t(\xi_{i2})}{1 - \Phi_t(\xi_{i2})} \right]^2$ e $\phi'_t(\xi_{i2}) = \phi_t(\xi_{i2})(-\xi_{i2})w(\xi_{i2}^2)$. O bloco $j_{\gamma\gamma}$ tem dimensão $p \times p$ e cada elemento dessa matriz é obtido pela expressão (2.33), $j_{\gamma\alpha}$ é um vetor com dimensão $p \times 1$ e cada elemento desse vetor é obtido pela expressão (2.34) e $j_{\alpha\alpha}$ é um escalar, obtido pela expressão (2.35).

3 REFINAMENTO ASSINTÓTICO PARA O MODELO LOG-BIRNBAUM-SAUNDERS

Neste capítulo, apresentaremos inferências melhoradas para o modelo log-BS na presença, ou não, de censura tipo II. Essas inferências serão realizadas sobre o parâmetro α através das funções de verossimilhança perfilada e perfiladas modificadas baseadas nas aproximações propostas por Cox e Reid (1987), Fraser e Reid (1995) e Severini (1999). Adicionalmente, apresentaremos os estimadores de máxima verossimilhança perfilado e perfilados modificados, além dos testes da razão de verossimilhanças baseados nestas funções.

3.1 DADOS COMPLETOS

Sejam $y_1, \dots, y_n$ variáveis aleatórias independentes, tais que $y_i \sim \text{log-BS}(\alpha, \mu_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma})$ para $i = 1, \dots, n$, sendo α o parâmetro de interesse e $\boldsymbol{\gamma}$ o vetor de parâmetros de perturbação. A função de verossimilhança perfilada para α considerando n observações independentes não censuradas é dada por

$$L_p(\alpha) = L(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\alpha \sqrt{2\pi}} \right) \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right\},$$

em que $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha$ é o vetor que contém as estimativas de máxima verossimilhança dos coeficientes de regressão para um dado valor de α .

Logo, o logaritmo da função de verossimilhança perfilada para o parâmetro α é expresso por

$$\ell_p(\alpha) = c + \sum_{i=1}^n \left\{ \log \left(\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right\},$$

em que $c = -\frac{n}{2} \log(8\pi)$.

O estimador de máxima verossimilhança perfilado de α é obtido maximizando o logaritmo da função de verossimilhança dado em (2.10) sujeito às restrições $\ell_{\boldsymbol{\gamma}}^{(s)} = 0$, $s = 1, \dots, p$. Denotaremos o estimador de máxima verossimilhança perfilado por $\hat{\alpha}_p$.

O logaritmo da função de verossimilhança perfilada modificada proposta por Barndorff-Nielsen (1983) é dado por

$$\ell_{BN}(\alpha) = \ell_p(\alpha) + \frac{1}{2} \log |j_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha; \hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}, a)| - \log |\ell_{\boldsymbol{\gamma}; \hat{\boldsymbol{\gamma}}}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha; \hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}, a)|, \quad (3.1)$$

em que a é uma estatística ancilar, $\hat{\alpha}$ e $\hat{\gamma}$ são os estimadores de máxima verossimilhança de α e γ , respectivamente, $j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}, a)$ é a matriz de informação observada para o vetor γ avaliada em $(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ e $\ell_{\gamma;\hat{\gamma}}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}, a)$ é uma matriz com elemento (s, t) dado por

$$\ell_{\gamma;\hat{\gamma}}^{(s,t)}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}, a) = \frac{\partial^2 \ell(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}, a)}{\partial \gamma_s \partial \gamma_t}, \quad s, t = 1, \dots, p,$$

em que $\ell(\cdot)$ é o logaritmo da função de verossimilhança. Ambas matrizes têm dimensão $p \times p$. O estimador de máxima verossimilhança perfilado modificado denotado por $\hat{\alpha}_{BN}$ não tem forma fechada e pode ser obtido numericamente maximizando a correspondente função de log-verossimilhança, para maiores detalhes ver Nocedal e Wright (1999).

Severini (1999) derivou uma aproximação para a quantidade $\ell_{\gamma;\hat{\gamma}}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}, a)$ que não depende de uma estatística ancilar. Sendo assim, a aproximação para o logaritmo da função proposta por Barndorff-Nielsen expressa em (3.1) é dada por

$$\check{\ell}_{BN}(\alpha) = \ell_p(\alpha) + \frac{1}{2} \log |j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)| - \log |\check{I}_\gamma(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma})|,$$

em que $j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ é a matriz de informação observada para o vetor γ avaliada em $(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ e $\check{I}_\gamma(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma})$ é uma matriz com elemento (s, t) dado por

$$\check{I}_\gamma^{(s,t)}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}) = \sum_{i=1}^n \ell_\gamma^{(s,i)}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha) \ell_\gamma^{(t,i)}(\hat{\alpha}, \hat{\gamma})^\top,$$

sendo $\ell_\gamma^{(s,i)}$ o s -ésimo componente do vetor escore de γ baseado na i -ésima observação e avaliado em $(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ e $(\hat{\alpha}, \hat{\gamma})$, respectivamente. As matrizes $j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ e $\check{I}_\gamma(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma})$ têm dimensão $p \times p$. O estimador de máxima verossimilhança perfilado modificado $\hat{\alpha}_{BN}$ não tem forma fechada e pode ser obtido numericamente maximizando a correspondente função de log-verossimilhança.

Para o modelo log-BS, os elementos das matrizes $j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ e $\check{I}_\gamma(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma})$ são apresentados, respectivamente, a seguir

$$j_{\gamma\gamma}^{(s,t)}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_{is} x_{it} \left\{ 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 + \frac{4}{\alpha^2} - 1 + \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2}{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 + \frac{4}{\alpha^2}} \right\}$$

e

$$\check{I}_\gamma^{(s,t)}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ x_{is} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right] - \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]} \right\} \right\}$$

$$\times x_{it} \left\{ \left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right] - \frac{\left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right]}{\left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right]} \right\},$$

com $s, t = 1, \dots, p$.

Matricialmente, temos

$$j_{\boldsymbol{\gamma}}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha) = \frac{1}{4} \mathbf{X}^\top \mathbf{B} \mathbf{X},$$

em que $\mathbf{B} = \text{diag}(b_1(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha), \dots, b_n(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha))$, ou seja, $\mathbf{B}$ é uma matriz quadrada de dimensão $n \times n$ com elemento (i, j) dado por

$$\mathbf{B}^{(i,j)} = b_i(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha) \quad \text{se } i = j \quad \text{e} \quad \mathbf{B}^{(i,j)} = 0 \quad \text{se } i \neq j,$$

sendo

$$b_i(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha) = 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 + \frac{4}{\alpha^2} - 1 + \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2}{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 + \frac{4}{\alpha^2}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Além disso, temos que

$$\check{L}_{\boldsymbol{\gamma}}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}) = \frac{1}{2} \mathbf{X}^\top \mathbf{C} \mathbf{X},$$

em que $\mathbf{C} = \text{diag}(c_1(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}), \dots, c_n(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}))$, ou seja, $\mathbf{C}$ é uma matriz quadrada de dimensão $n \times n$ com elemento (i, j) dado por

$$\mathbf{C}^{(i,j)} = c_i(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}) \quad \text{se } i = j \quad \text{e} \quad \mathbf{C}^{(i,j)} = 0 \quad \text{se } i \neq j,$$

sendo

$$c_i(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}) = \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right] - \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]} \right\} \\ \times \left\{ \left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right] - \frac{\left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right]}{\left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right]} \right\},$$

com $i = 1, \dots, n$.

Uma outra aproximação foi apresentada por Fraser e Reid (1995), Fraser, Reid e Wu (1999) e Fraser e Reid (2001). Sendo assim, a correspondente aproximação para o logaritmo da função proposta por Barndorff-Nielsen (1983) é dada por

$$\tilde{\ell}_{BN}(\alpha) = \ell_p(\alpha) + \frac{1}{2} \log |j_{\boldsymbol{\gamma}}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha)| - \log |\ell_{\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{y}}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha) \hat{V}_{\boldsymbol{\gamma}}|,$$

em que $\ell_{\gamma;\mathbf{y}}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ é obtida derivando os componentes $\ell_{\gamma}^{(s)}$ do vetor escore de γ ($s = 1, \dots, p$) com relação ao vetor de observações $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$ e a matriz $\hat{V}_\gamma$ é dada por

$$\hat{V}_\gamma = [\hat{V}_{\gamma_1} \hat{V}_{\gamma_2} \dots \hat{V}_{\gamma_p}], \quad \text{sendo} \quad \hat{V}_{\gamma_s} = \left(-\frac{\left(\frac{\partial F(y_1; \hat{\theta})}{\partial \gamma_s} \right)}{f(y_1; \hat{\theta})}, \dots, -\frac{\left(\frac{\partial F(y_n; \hat{\theta})}{\partial \gamma_s} \right)}{f(y_n; \hat{\theta})} \right)^\top, \quad s = 1, \dots, p,$$

sendo $F(y_i; \hat{\theta})$ a fda e $f(y_i; \hat{\theta})$ a fdp da variável aleatória y_i , $i = 1, \dots, n$. A matriz $\ell_{\gamma;\mathbf{y}}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ tem dimensão $p \times n$ e $\hat{V}_\gamma$ é uma matriz de dimensão $n \times p$. O estimador de máxima verossimilhança perfilado modificado $\hat{\alpha}_{BN}$ não tem forma fechada e pode ser obtido numericamente maximizando a correspondente função de log-verossimilhança.

Para o modelo log-BS, os elementos das matrizes $\ell_{\gamma;\mathbf{y}}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ e $\hat{V}_\gamma$ são apresentados, respectivamente, a seguir

$$\ell_{\gamma;\mathbf{y}}^{(s,i)}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha) = \frac{1}{4} x_{is} \left\{ 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 + \frac{4}{\alpha^2} - 1 + \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2}{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 + \frac{4}{\alpha^2}} \right\}$$

e

$$\hat{V}_{\gamma_s} = (x_{1s}, x_{2s}, \dots, x_{ns})^\top,$$

com $s = 1, \dots, p$ e $i = 1, \dots, n$.

Matricialmente, temos

$$\ell_{\gamma;\mathbf{y}}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha) = \frac{1}{4} \mathbf{X}^\top \mathbf{B}$$

e

$$\hat{V}_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} = \mathbf{X}.$$

Os cálculos das entradas das matrizes $\ell_{\gamma;\mathbf{y}}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ e $\hat{V}_\gamma$ encontram-se detalhadamente no APÊNDICE B.

Dizemos que os componentes de $\boldsymbol{\theta} = (\gamma^\top, \alpha)^\top$ são ortogonais se $\mathbb{E}(j_{\gamma\alpha}) = \mathbb{E}(j_{\alpha\gamma}^\top) = \mathbf{0}$, $\forall \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$, ver Silveira (1992, p. 30–31). Rieck e Nedelman (1991) mostraram que os parâmetros

γ e α são ortogonais. Portanto, o logaritmo da função de verossimilhança perfilada modificada proposta por Cox e Reid (1987) é dado por

$$\ell_{CR}(\alpha) = \ell_p(\alpha) - \frac{1}{2} \log |j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)|. \quad (3.2)$$

O estimador de máxima verossimilhança perfilado modificado $\hat{\alpha}_{CR}$ não tem forma fechada e ele pode ser obtido numericamente maximizando a correspondente função de log-verossimilhança. A expressão (3.2) é dada matricialmente por

$$j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha) = \frac{1}{4} \mathbf{X}^\top \mathbf{B} \mathbf{X}.$$

Neste caso, o produto das matrizes $\ell_{\gamma;y}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha) \hat{V}_\gamma$ é igual a matriz $j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ e, portanto, a aproximação proposta por Fraser e Reid (1995) coincide com a função de verossimilhança perfilada modificada proposta por Cox e Reid (1987).

As estatísticas da razão de verossimilhanças baseadas nas funções de verossimilhanças perfilada e perfiladas modificadas para testar $H_0 : \alpha = \alpha_0$ versus $H_1 : \alpha \neq \alpha_0$ são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} RV_p &= 2 [\ell_p(\hat{\alpha}_p) - \ell_p(\alpha_0)], \\ RV_{BN_1} &= 2 [\check{\ell}_{BN}(\hat{\alpha}_{BN}) - \check{\ell}_{BN}(\alpha_0)], \\ RV_{BN_2} &= 2 [\tilde{\ell}_{BN}(\hat{\alpha}_{BN}) - \tilde{\ell}_{BN}(\alpha_0)] \end{aligned}$$

e

$$RV_{CR} = 2 [\ell_{CR}(\hat{\alpha}_{CR}) - \ell_{CR}(\alpha_0)].$$

Assim como o teste da razão de verossimilhanças usual, os testes baseados nas verossimilhanças perfilada e perfiladas modificadas possuem, assintoticamente, distribuição χ_q^2 sob hipótese nula, sendo q o número de restrições impostas pela hipótese nula. Rejeitamos H_0 se $RV > \chi_{(q; 1-\rho)}^2$, sendo $1 - \rho$ o quantil da distribuição χ^2 e ρ é o nível de significância adotado para o teste. Mesmo com a modificação, a aproximação pela distribuição χ_q^2 tem erro de ordem $O(n^{-1})$, para maiores detalhes ver Simonoff e Tsai (1994).

3.2 DADOS CENSURADOS

O procedimento realizado aqui será análogo ao tópico anterior, entretanto, consideramos dados com censura tipo II. Dadas n observações independentes y_i , tais que $y_i \sim \text{log-BS}(\alpha, \mu_i =$

$\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}$) para $i = 1, \dots, n$, sejam $\overline{C}$ o conjunto das unidades em que y_i é o logaritmo do tempo de falha e C o conjunto das unidades em que y_i é o logaritmo do tempo de censura. Portanto, o logaritmo da função de verossimilhança perfilada para o parâmetro α é dado por

$$\begin{aligned} \ell_p(\alpha) = c + \sum_{i \in \overline{C}} \left\{ \log \left(\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right\} \\ + \sum_{i \in C} \log \left(1 - \Phi \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right] \right), \end{aligned}$$

em que $c = -\frac{r}{2} \log(8\pi)$ sendo r é o número de falhas.

O estimador de máxima verossimilhança perfilado de α é obtido maximizando o logaritmo da função de verossimilhança dado em (2.18) sujeito às restrições $\ell_\gamma^{(s)} = 0$, $s = 1, \dots, p$. Denotaremos o estimador de máxima verossimilhança perfilado por $\hat{\alpha}_p$.

A aproximação proposta por Severini (1999) para o logaritmo da função de verossimilhança perfilada modificada derivada por Barndorff-Nielsen (1983) é dada por

$$\check{\ell}_{BN}(\alpha) = \ell_p(\alpha) + \frac{1}{2} \log |j_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha)| - \log |\check{I}_\gamma(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\boldsymbol{\gamma}})|,$$

em que $j_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha)$ é a matriz de informação observada para o vetor $\boldsymbol{\gamma}$ avaliada em $(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha)$ e $\check{I}_\gamma(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\boldsymbol{\gamma}})$ é uma matriz com elemento (s, t) dado por

$$\check{I}_\gamma^{(s,t)}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}) = \sum_{i \in \overline{C}} \ell_\gamma^{(s,i)}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha) \ell_\gamma^{(t,i)}(\hat{\alpha}, \hat{\boldsymbol{\gamma}})^\top + \sum_{i \in C} \ell_\gamma^{(s,i)}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha) \ell_\gamma^{(t,i)}(\hat{\alpha}, \hat{\boldsymbol{\gamma}})^\top,$$

sendo $\ell_\gamma^{(s,i)}$ o s -ésimo componente do vetor escore de $\boldsymbol{\gamma}$ baseado na i -ésima observação e avaliado em $(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha)$ e $(\hat{\alpha}, \hat{\boldsymbol{\gamma}})$, respectivamente. Ambas matrizes têm dimensão $p \times p$. O estimador de máxima verossimilhança perfilado modificado $\hat{\alpha}_{BN}$ não tem forma fechada e ele pode ser obtido numericamente maximizando a correspondente função de log-verossimilhança.

Para o modelo log-BS considerando censura tipo II, os elementos das matrizes $j_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha)$ e $\check{I}_\gamma(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\boldsymbol{\gamma}})$ são apresentados, respectivamente, a seguir

$$\begin{aligned} j_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}}^{(s,t)}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha) = \frac{1}{4} \sum_{i \in \overline{C}} x_{is} x_{it} \left\{ 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 + \frac{4}{\alpha^2} - 1 + \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2}{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 + \frac{4}{\alpha^2}} \right\} \\ + \frac{1}{4} \sum_{i \in C} x_{is} x_{it} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right] h \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right] \right. \\ \left. + \left(\frac{4}{\alpha^2} + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right) h' \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right] \right\}, \quad s, t = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\check{I}_{\boldsymbol{\gamma}}^{(s,t)}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}; \hat{\alpha}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}) &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \overline{C}} \left\{ x_{is} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}}{2} \right) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}}{2} \right) \right]}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}}{2} \right) \right]} \right\} \right. \\
&\quad \times x_{it} \left\{ \left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right]}{\left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right]} \right\} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i \in C} \left\{ x_{is} h \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}}{2} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. \times x_{it} h \left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right] \right\}, \quad s, t = 1, \dots, p, \quad (3.3)
\end{aligned}$$

sendo $h(x) = \frac{\phi(x)}{1-\Phi(x)}$, $h'(x) = \frac{\phi'(x)}{1-\Phi(x)} + \left[\frac{\phi(x)}{1-\Phi(x)} \right]^2$ e $\phi'(x) = \phi(x)(-x^2)$, com ϕ e Φ sendo a fdp e a fda da normal padrão, respectivamente.

De forma matricial, temos

$$j_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}) = \frac{1}{4} \mathbf{X}^{\top} \mathbf{G} \mathbf{X},$$

em que $\mathbf{G} = \text{diag}(g_1(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}), \dots, g_n(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}))$, ou seja, $\mathbf{G}$ é uma matriz quadrada de dimensão $n \times n$ com elemento (i, j) dado por

$$\mathbf{G}^{(i,j)} = g_i(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}) \quad \text{se } i = j \quad \text{e} \quad \mathbf{G}^{(i,j)} = 0 \quad \text{se } i \neq j,$$

sendo

$$g_i(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}) = \begin{cases} 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}}{2} \right) \right]^2 + \frac{4}{\alpha^2} - 1 + \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}}{2} \right) \right]^2}{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}}{2} \right) \right]^2 + \frac{4}{\alpha^2}}, & \text{se } i \in \overline{C}, \\ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}}{2} \right) \right] h \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}}{2} \right) \right] \\ + \left(\frac{4}{\alpha^2} + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}}{2} \right) \right]^2 \right) h' \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}}{2} \right) \right], & \text{se } i \in C. \end{cases}$$

Além disso, temos que

$$\check{I}_{\boldsymbol{\gamma}}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}; \hat{\alpha}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}) = \frac{1}{2} \mathbf{X}^{\top} \mathbf{K} \mathbf{X},$$

em que $\mathbf{K} = \text{diag}(k_1(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}), \dots, k_n(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}))$, ou seja, $\mathbf{K}$ é uma matriz quadrada de dimensão $n \times n$ com elemento (i, j) dado por

$$\mathbf{K}^{(i,j)} = k_i(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}) \quad \text{se } i = j \quad \text{e} \quad \mathbf{K}^{(i,j)} = 0 \quad \text{se } i \neq j,$$

sendo

$$k_i(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}) = \begin{cases} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right] - \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right] \right\} \\ \times \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}}{2} \right) \right] - \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}}{2} \right) \right] \right\}, \quad \text{se } i \in \bar{C}, \\ h \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right] \\ \times h \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}}{2} \right) \right], \quad \text{se } i \in C. \end{cases}$$

Uma outra aproximação, foi apresentada por Fraser e Reid (1995), Fraser, Reid e Wu (1999) e Fraser e Reid (2001). A correspondente aproximação é dada por

$$\tilde{\ell}_{BN}(\alpha) = \ell_p(\alpha) + \frac{1}{2} \log |j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)| - \log |\ell_{\gamma;\mathbf{y}}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha) \hat{V}_\gamma|,$$

em que $\ell_{\gamma;\mathbf{y}}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ é obtida derivando os componentes $\ell_\gamma^{(s)}$ do vetor escore de γ ($s = 1, \dots, p$) com relação ao vetor de observações $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$ e a matriz $\hat{V}_\gamma$ é dada por

$$\hat{V}_\gamma = [\hat{V}_{\gamma_1} \hat{V}_{\gamma_2} \dots \hat{V}_{\gamma_p}], \quad \text{sendo} \quad \hat{V}_{\gamma_s} = \left(-\frac{\left(\frac{\partial F(y_1; \hat{\theta})}{\partial \hat{\gamma}_s} \right)}{f(y_1; \hat{\theta})}, \dots, -\frac{\left(\frac{\partial F(y_n; \hat{\theta})}{\partial \hat{\gamma}_s} \right)}{f(y_n; \hat{\theta})} \right)^\top, \quad s = 1, \dots, p,$$

sendo $F(y_i; \hat{\theta})$ a fda e $f(y_i; \hat{\theta})$ a fdp da variável aleatória y_i , $i = 1, \dots, n$. A matriz $\ell_{\gamma;\mathbf{y}}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ tem dimensão $p \times n$ com elemento (s, i) e $\hat{V}_\gamma$ é uma matriz de dimensão $n \times p$.

Para o modelo log-BS considerando censura tipo II, os elementos das matrizes $\ell_{\gamma;\mathbf{y}}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ e $\hat{V}_\gamma$ são apresentados, respectivamente, a seguir

$$\ell_{\gamma;\mathbf{y}}^{(s,i)}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{4} x_{is} \left\{ 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 + \frac{4}{\alpha^2} - 1 + \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2}{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 + \frac{4}{\alpha^2}} \right\}, \quad \text{se } i \in \bar{C}, \\ \frac{1}{4} x_{is} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right] h \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right] \right. \\ \left. + \left(\frac{4}{\alpha^2} + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right) h' \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right] \right\}, \quad \text{se } i \in C \end{cases}$$

e

$$\hat{V}_{\gamma_s} = \left(-\frac{\left(\frac{\partial F(y_1, \hat{\theta} | \mathbf{x}_i^\top)}{\partial \hat{\gamma}_s} \right)}{f(y_1, \hat{\theta} | \mathbf{x}_i^\top)}, \dots, -\frac{\left(\frac{\partial F(y_n, \hat{\theta} | \mathbf{x}_i^\top)}{\partial \hat{\gamma}_s} \right)}{f(y_n, \hat{\theta} | \mathbf{x}_i^\top)} \right)^\top = (m_1, m_2, \dots, m_n)^\top.$$

Segundo Rieck e Nedelman (1991), a quantidade ξ_{i2} segue distribuição normal padrão, sendo assim, a distribuição que modela o tempo de censura não depende de γ . Portanto,

$$i \in \overline{C} \Rightarrow m_i = x_{is} \quad \text{e} \quad i \in C \Rightarrow m_i = 0.$$

Matricialmente,

$$\ell_{\gamma; y}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha) = \frac{1}{4} \mathbf{X}^\top \mathbf{G}.$$

O logaritmo da função de verossimilhança perfilada modificada proposta por Cox e Reid (1987) é dado por

$$\ell_{CR}(\alpha) = \ell_p(\alpha) - \frac{1}{2} \log |j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)|.$$

Matricialmente, temos

$$j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha) = \frac{1}{4} \mathbf{X}^\top \mathbf{G} \mathbf{X}.$$

O estimador de máxima verossimilhança perfilado modificado $\hat{\alpha}_{CR}$ não tem forma fechada e pode ser obtido numericamente maximizando a correspondente função de log-verossimilhança.

Como já mencionado, o ajuste de Cox e Reid exige a ortogonalidade entre os parâmetros de interesse e perturbação, entretanto, quando trabalhamos com dados censurados tipo II, a matriz de informação de Fisher não possui solução analítica, dessa forma, não se tem certeza sobre a ortogonalidade dos parâmetros. Para utilizar essa proposta de ajuste, precisamos recorrer a resultados numéricos via simulação de Monte Carlo. Os resultados mostram inferências confiáveis.

3.3 AVALIAÇÃO NUMÉRICA

Esta seção tem a finalidade de avaliar numericamente a qualidade das inferências feitas sobre o parâmetro de interesse α no modelo log-BS na presença, ou não, de censura tipo II, em amostras de tamanho finito e sob diferentes cenários. Os objetivos específicos podem ser resumidos como segue:

- Avaliar o comportamento dos estimadores de máxima verossimilhança perfilado e perfilados modificados, utilizando as seguintes medidas: média, variância, viés, erro quadrático médio (EQM), viés relativo (VR, definido como $100 \times (\text{viés} / \text{valor verdadeiro do parâmetro})\%$), assimetria e curtose.

- Comparar as precisões das diferentes estimativas intervalares, em termos das coberturas empíricas (%) dos intervalos assintótico (ICA) e *bootstrap* percentil (ICP) aos níveis nominais 90%, 95% e 99% para o parâmetro α .
- Comparar os desempenhos dos testes da razão de verossimilhanças perfilada e perfiladas modificadas, através de seus tamanhos (e poderes) apresentando as taxas de rejeição nulas (e não nulas) aos níveis nominais 10%, 5% e 1%. Estes desempenhos são avaliados em função da proximidade das probabilidades de rejeição da hipótese nula, sendo esta verdadeira (probabilidade do erro tipo I), aos respectivos níveis nominais dos testes.
- Avaliar a aproximação assintótica das estatísticas de teste em relação à distribuição qui-quadrado (χ_q^2).

3.3.1 Dados completos

A geração dos números pseudo-aleatórios da distribuição log-BS foi realizada a partir da expressão dada em (2.5). Geramos 10.000 réplicas de Monte Carlo levando em consideração os seguintes tamanhos amostrais: $n = 20, 30, 40$ e 50 . Os valores assumidos para o parâmetro de interesse foram $\alpha = 0, 1; 0, 25; 0, 5$ e 1 , já para os parâmetros de incômodo, sem perda de generalidade, fixamos valores iguais a um, isto é, $\gamma_s = 1 \forall s$. As covariáveis são realizações independentes de uma variável aleatória uniforme com valores no intervalo $(0, 1)$. Para as taxas intervalares, utilizamos 10.000 réplicas de Monte Carlo, 1.000 réplicas *bootstrap* e $n = 20$ e 30 . A reamostragem *bootstrap* foi realizada parametricamente, isto é, a partir da amostra original estima-se α e com esta estimativa gera-se B amostras *bootstrap*, cada amostra com tamanho n e finalmente para cada amostra calcula-se a estimativa de interesse $\hat{\alpha}^{*b}$ ($b = 1, \dots, B$).

Para maximizar as funções, utilizamos o pacote *maximize* e as funções **MaxBFGS** e **MaxSQP** do 0x. Nesta situação, quando utilizamos o método numérico SQP (NOCEDAL; WRIGHT, 1999, Capítulo 18), impomos a restrição de que $\ell_{\gamma}^{(s)} = 0$ para encontrarmos as estimativas restritas do vetor $\hat{\gamma}_{\alpha}$. Para obter os valores iniciais usamos o método dos mínimos quadrados para os coeficientes do modelo de regressão, isto é, $\tilde{\gamma} = (X^T X)^{-1} X y$ e $\tilde{\alpha}$ para o parâmetro α , sendo

$$\tilde{\alpha} = \sqrt{\frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \sinh^2 \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^T \tilde{\gamma}}{2} \right)}.$$

Nas Tabelas 1 a 4 apresentamos medidas descritivas de diferentes estimadores de α na presença de dois parâmetros de perturbação ($p = 2$). Analisando as Tabelas 1 a 4, temos que as estimativas das médias dos estimadores $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$ possuem valores mais próximos aos fixados para α em cada simulação, inclusive em alguns cenários possuem as mesmas estimativas. Por exemplo, para $\alpha = 0,1$ e $n = 20$, as estimativas das médias dos estimadores $\hat{\alpha}_p$, $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$ são 0,0953, 0,0986 e 0,0986, respectivamente. No entanto, as estimativas das variâncias desses estimadores são ligeiramente maiores quando comparadas as estimativas de $\hat{\alpha}_p$. Como esperado, os vieses relativos diminuem à medida que aumentamos o tamanho da amostra. Por exemplo, para $\alpha = 1$ e $n = 20$, os correspondentes valores para os vieses relativos são 7,2910%, 0,9457% e 1,2612%, respectivamente, agora, considerando $n = 50$ temos 2,8311%, 0,4159% e 0,4726%, respectivamente. Como em todos os cenários os vieses são negativos, concluímos que os estimadores subestimam os verdadeiros valores do parâmetro α . Percebemos que em alguns cenários o estimador $\hat{\alpha}_{CR}$ apresenta EQM menor que os estimadores $\hat{\alpha}_p$ e $\hat{\alpha}_{BN}$, apesar de que na maioria dos cenários os estimadores $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$ apresentam resultados similares. Por exemplo, para $\alpha = 1$ e $n = 20$, as estimativas dos erros quadráticos médios dos estimadores $\hat{\alpha}_p$, $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$ são iguais a 0,0296, 0,0292 e 0,0285, respectivamente.

Na Tabela 5, aumentamos gradativamente o número de parâmetros de perturbação, isto é, $p = 2, 3, 4, 5$ e 6 , para $n = 30$. A finalidade é avaliar o impacto que esse aumento tem sobre as estimativas pontuais do parâmetro α . Observe que quando aumentamos a quantidade de parâmetros de perturbação os estimadores $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$ apresentam menores estimativas para o viés relativo quando comparadas com a do estimador $\hat{\alpha}_p$. Por exemplo, para $p = 2$, as estimativas dos vieses relativos dos estimadores $\hat{\alpha}_p$, $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$ são iguais a 4,8288%, 0,7160% e 0,8615%, respectivamente, já para $p = 6$ temos 13,0367%, 0,8830% e 0,1801%, respectivamente. Entretanto, com relação aos valores do EQM, o estimador $\hat{\alpha}_{CR}$ possui melhor desempenho, isto é, as estimativas são menores para todos os cenários.

Com respeito às taxas de coberturas empíricas dos intervalos ICA e ICP para o parâmetro de interesse α , a cobertura do ICA apresenta melhor desempenho do que a cobertura do ICP, podemos observar isso na Tabela 6. Por exemplo, considerando $\alpha = 0,25$, nível nominal igual a 95% e $n = 30$, temos que as coberturas correspondentes a esses intervalos são, respectivamente, 89,20% e 85,33%. Também observamos que quando aumentamos o tamanho da amostra a taxa de cobertura aumenta, assim como, quando aumentamos o nível nominal, como era esperado.

As Tabelas 7 e 8 apresentam as taxas de rejeição nulas dos testes baseadas nas estatísticas

da razão de verossimilhanças perfilada (RV_p) e perfiladas modificadas (RV_{CR} e RV_{BN_1}) com níveis nominais de 10%, 5% e 1%. Para a Tabela 7, consideramos o seguinte cenário: dois parâmetros de perturbação ($p = 2$) e $n \in \{20, 30, 40, 50\}$. Consideramos quatro hipóteses nulas distintas, a saber: $H_0 : \alpha = 0, 1$, $H_0 : \alpha = 0, 25$, $H_0 : \alpha = 0, 5$ e $H_0 : \alpha = 1, 0$, a serem testadas contra uma hipótese alternativa bilateral. Observamos na Tabela 7 que, para todos os cenários considerados, as taxas de rejeição nulas do teste RV_p excedem notavelmente os níveis nominais pré-estabelecidos, sendo assim, o teste RV_p é dito ser liberal. Por exemplo, para $\alpha = 0, 1$, $n = 20$ e nível nominal igual a 10%, a taxa de rejeição nula é igual a 14,05%. Além disso, à medida que aumentamos o valor de α , mais liberal este teste se torna. Por outro lado, os testes RV_{BN_1} e RV_{CR} são conservativos, portanto, considerando o mesmo cenário descrito anteriormente para o teste RV_p , as taxas de rejeição nulas são 9,91% e 9,91%, respectivamente. É notório o comportamento similar dos testes RV_{BN_1} e RV_{CR} , especialmente quando α assume valores pequenos.

Na Tabela 8, aumentamos gradativamente o número de parâmetros de perturbação ($p = 2, 3, 4, 5$ e 6) com o intuito de avaliarmos o impacto deste incremento nos desempenhos dos testes, considerando o parâmetro $\alpha = 1$ e um tamanho amostral de $n = 30$. De forma semelhante, podemos tirar algumas conclusões sobre os resultados expostos na Tabela 8. Notamos que o teste RV_p continua sendo liberal, porém, de forma mais acentuada, e os testes RV_{BN_1} e RV_{CR} apresentam valores mais próximos dos níveis nominais correspondentes.

Dispomos na Tabela 9 as médias e variâncias da variável χ_1^2 e das estatísticas RV_p , RV_{BN_1} e RV_{CR} , respectivamente. O seguinte cenário foi considerado: $\alpha = 0, 5$ e $n = 20$. A ideia é analisar se de fato as distribuições empíricas destas estatísticas se aproximam da distribuição esperada, isto é, uma qui-quadrado com um grau de liberdade (χ_1^2). Notamos na Tabela 9 que a média e variância da estatística RV_{CR} são, respectivamente, dadas por 1,0118 e 2,0543, estão mais próximas da média e variância assintótica (1,0000 e 2,0000, respectivamente). Estas aproximações são melhores avaliadas através das discrepâncias relativas entre os quantis empíricos e quantis assintóticos das estatísticas de teste. Em geral, denominamos de discrepância a diferença entre um certo valor medido e um valor de referência, dito isto, chamaremos aqui de discrepância relativa a diferença entre o quantil empírico de ordem $1 - \rho$ do conjunto de dados simulados da estatística de teste e o quantil da distribuição χ_1^2 , sendo esta diferença dividida pelo quantil da distribuição χ_1^2 . As curvas de discrepância estão apresentadas na Figura 5. Em síntese, quanto mais próxima da ordenada zero estiver a curva, mais satisfatória será a aproximação da distribuição nula da estatística de teste pela distribuição χ^2 . As curvas

relacionadas às estatísticas RV_{BN_1} e RV_{CR} encontram-se mais próximas da ordenada zero, enquanto que a curva relacionada à estatística RV_p está entre as ordenadas 0,20 e 0,30, confirmando a análise feita anteriormente de que o teste baseado na estatística RV_p é liberal enquanto que o teste baseado nas estatísticas RV_{BN_1} e RV_{CR} são conservativos.

Os poderes dos testes RV_p , RV_{BN_1} e RV_{CR} também foram avaliados e estão apresentados na Tabela 10. Consideramos o teste $H_0 : \alpha = \alpha_0$ contra $H_1 : \alpha \neq \alpha_0$, em que pequenas variações nos valores de α_0 foram consideradas (0,12 a 0,28) com níveis nominais de 10%, 5% e 1%, $n = 20$ e dois parâmetros de perturbação ($p = 2$). A hipótese nula testada foi $H_0 : \alpha = 0,1$. Para que os testes tenham o mesmo tamanho, utilizamos os valores críticos exatos ao invés dos assintóticos. Nota-se que os testes RV_{BN_1} e RV_{CR} apresentam melhores desempenhos, isto é, rejeitam mais a hipótese nula quando a mesma não é verdadeira. Portanto, o teste RV_p é menos poderoso considerando todos os níveis nominais pré-determinados. Notamos aqui também o comportamento similar dos testes RV_{BN_1} e RV_{CR} , por exemplo, considerando $\alpha = 0,14$ e nível nominal de 10%, as taxas de rejeição não nulas assumem o valor 65,92%.

Desta forma, para estimar o parâmetro de interesse α recomendamos os estimadores $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$, pois, os mesmos mostram-se mais centrados quando comparados ao estimador $\hat{\alpha}_p$. Além disso em alguns cenários apresentam resultados similares ou bem próximos. E com respeito aos testes, temos que os testes RV_{BN_1} e RV_{CR} apresentam desempenho superiores em relação ao teste RV_p , principalmente quando os valores atribuídos para α são menores. Portanto, dentre os testes considerados neste capítulo, recomendamos os testes RV_{BN_1} e RV_{CR} por apresentarem desempenhos satisfatórios diante de todos os casos considerados. Sendo assim, o pesquisador fica livre para escolher entre os estimadores e as estatísticas de testes citadas anteriormente em pesquisas aplicadas.

Tabela 1 – Medidas descritivas de diferentes estimadores de α , modelo log-BS, dados completos, $\alpha = 0,1$ e $\gamma_s = 1 \forall s$.

$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$								
n	estimador	média	variância	viés	EQM	VR(%)	assimetria	curtose
20	$\hat{\alpha}_p$	0,0935	0,0002	-0,0065	0,0003	6,5057	0,1662	2,9971
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,0986	0,0003	-0,0014	0,0003	1,4338	0,1666	2,9974
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,0986	0,0003	-0,0014	0,0003	1,4339	0,1666	2,9974
30	$\hat{\alpha}_p$	0,0957	0,0002	-0,0043	0,0002	4,3168	0,1769	2,9594
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,0991	0,0002	-0,0009	0,0002	0,9493	0,1771	2,9595
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,0991	0,0002	-0,0009	0,0002	0,9493	0,1771	2,9595
40	$\hat{\alpha}_p$	0,0968	0,0001	-0,0032	0,0001	3,2356	0,1635	2,9860
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,0993	0,0001	-0,0007	0,0001	0,7152	0,1636	2,9861
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,0993	0,0001	-0,0007	0,0001	0,7152	0,1636	2,9861
50	$\hat{\alpha}_p$	0,0975	0,0001	-0,0025	0,0001	2,5142	0,1488	3,1338
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,0995	0,0001	-0,0005	0,0001	0,4990	0,1489	3,1336
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,0995	0,0001	-0,0005	0,0001	0,4990	0,1489	3,1336

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 2 – Medidas descritivas de diferentes estimadores de α , modelo log-BS, dados completos, $\alpha = 0,25$ e $\gamma_s = 1 \forall s$.

$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$								
n	estimador	média	variância	viés	EQM	VR(%)	assimetria	curtose
20	$\hat{\alpha}_p$	0,2336	0,0015	-0,0164	0,0018	6,5638	0,1663	2,9974
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,2464	0,0017	-0,0036	0,0017	1,4204	0,1688	2,9996
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,2464	0,0017	-0,0036	0,0017	1,4219	0,1687	2,9994
30	$\hat{\alpha}_p$	0,2391	0,0010	-0,0109	0,0011	4,3564	0,1766	2,9590
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,2476	0,0011	-0,0024	0,0011	0,9433	0,1778	2,9600
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,2476	0,0011	-0,0024	0,0011	0,9440	0,1778	2,9599
40	$\hat{\alpha}_p$	0,2418	0,0008	-0,0082	0,0008	3,2653	0,1634	2,9851
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,2482	0,0008	-0,0018	0,0008	0,7114	0,1642	2,9857
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,2482	0,0008	-0,0018	0,0008	0,7114	0,1642	2,9857
50	$\hat{\alpha}_p$	0,2437	0,0006	-0,0063	0,0007	2,5386	0,1490	3,1341
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,2488	0,0007	-0,0012	0,0007	0,4969	0,1497	3,1350
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,2488	0,0007	-0,0012	0,0007	0,4972	0,1497	3,1349

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 3 – Medidas descritivas de diferentes estimadores de α , modelo log-BS, dados completos, $\alpha = 0,5$ e $\gamma_s = 1 \forall s$.

$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$								
n	estimador	média	variância	viés	EQM	VR(%)	assimetria	curtose
20	$\hat{\alpha}_p$	0,4663	0,0061	-0,0337	0,0072	6,7495	0,1676	2,9995
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,4932	0,0069	-0,0068	0,0069	1,3567	0,1773	3,0084
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,4931	0,0069	-0,0069	0,0069	1,3801	0,1752	3,0055
30	$\hat{\alpha}_p$	0,4776	0,0041	-0,0224	0,0046	4,4831	0,1763	2,9587
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,4954	0,0044	-0,0046	0,0045	0,9145	0,1806	2,9618
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,4954	0,0044	-0,0046	0,0044	0,9255	0,1799	2,9613
40	$\hat{\alpha}_p$	0,4832	0,0031	-0,0168	0,0034	3,3610	0,1635	2,9830
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,4965	0,0033	-0,0035	0,0033	0,6942	0,1661	2,9850
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,4965	0,0033	-0,0035	0,0033	0,7006	0,1658	2,9848
50	$\hat{\alpha}_p$	0,4869	0,0025	-0,0131	0,0027	2,6176	0,1501	3,1367
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,4976	0,0026	-0,0024	0,0026	0,4870	0,1521	3,1385
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,4975	0,0026	-0,0025	0,0026	0,4912	0,1519	3,1382

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 4 – Medidas descritivas de diferentes estimadores de α , modelo log-BS, dados completos, $\alpha = 1$ e $\gamma_s = 1 \forall s$.

$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$								
n	estimador	média	variância	viés	EQM	VR(%)	assimetria	curtose
20	$\hat{\alpha}_p$	0,9271	0,0243	-0,0729	0,0296	7,2910	0,1726	3,0054
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,9905	0,0291	-0,0095	0,0292	0,9457	0,2102	3,0443
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,9874	0,0283	-0,0126	0,0285	1,2612	0,1871	3,0145
30	$\hat{\alpha}_p$	0,9517	0,0163	-0,0483	0,0187	4,8288	0,1774	2,9609
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,9928	0,0183	-0,0072	0,0183	0,7160	0,1908	2,9703
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,9914	0,0180	-0,0086	0,0181	0,8615	0,1836	2,9647
40	$\hat{\alpha}_p$	0,9638	0,0125	-0,0362	0,0138	3,6204	0,1648	2,9800
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,9942	0,0135	-0,0058	0,0135	0,5787	0,1711	2,9832
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,9934	0,0134	-0,0066	0,0135	0,6635	0,1681	2,9816
50	$\hat{\alpha}_p$	0,9717	0,0101	-0,0283	0,0109	2,8311	0,1531	3,1418
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,9958	0,0107	-0,0042	0,0108	0,4159	0,1581	3,1460
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,9953	0,0107	-0,0047	0,0107	0,4726	0,1556	3,1428

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 5 – Medidas descritivas de diferentes estimadores de α , modelo log-BS, dados completos, $\alpha = 1$ e $\gamma_s = 1 \forall s$, com $p = 2, 3, 4, 5$ e 6 e $n = 30$.

$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$							
estimador	média	variância	viés	EQM	VR(%)	assimetria	curtose
$\hat{\alpha}_p$	0,9517	0,0163	-0,0483	0,0187	4,8288	0,1774	2,9609
$\hat{\alpha}_{BN}$	0,9928	0,0183	-0,0072	0,0183	0,7160	0,1908	2,9703
$\hat{\alpha}_{CR}$	0,9914	0,0180	-0,0086	0,0181	0,8615	0,1836	2,9647
$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3$							
estimador	média	variância	viés	EQM	VR(%)	assimetria	curtose
$\hat{\alpha}_p$	0,9315	0,0164	-0,0685	0,0211	6,8530	0,1861	3,0083
$\hat{\alpha}_{BN}$	0,9949	0,0197	-0,0051	0,0197	0,5099	0,2144	3,0338
$\hat{\alpha}_{CR}$	0,9920	0,0192	-0,0080	0,0192	0,8007	0,1981	3,0156
$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4$							
estimador	média	variância	viés	EQM	VR(%)	assimetria	curtose
$\hat{\alpha}_p$	0,9107	0,0164	-0,0893	0,0243	8,9295	0,1854	3,0138
$\hat{\alpha}_{BN}$	0,9976	0,0212	-0,0024	0,0212	0,2356	0,2373	3,0694
$\hat{\alpha}_{CR}$	0,9929	0,0204	-0,0071	0,0204	0,7118	0,2065	3,0297
$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4 + \gamma_5 x_5$							
estimador	média	variância	viés	EQM	VR(%)	assimetria	curtose
$\hat{\alpha}_p$	0,8908	0,0161	-0,1092	0,0280	10,9223	0,1848	3,0242
$\hat{\alpha}_{BN}$	1,0029	0,0229	0,0029	0,0229	0,2946	0,2739	3,1328
$\hat{\alpha}_{CR}$	0,9956	0,0214	-0,0044	0,0214	0,4356	0,2197	3,0581
$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4 + \gamma_5 x_5 + \gamma_6 x_6$							
estimador	média	variância	viés	EQM	VR(%)	assimetria	curtose
$\hat{\alpha}_p$	0,8696	0,0158	-0,1304	0,0328	13,0367	0,1571	2,9341
$\hat{\alpha}_{BN}$	1,0088	0,0252	0,0088	0,0253	0,8830	0,2840	3,0603
$\hat{\alpha}_{CR}$	0,9982	0,0228	-0,0018	0,0228	0,1801	0,2096	2,9888

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 6 – Cobertura dos intervalos de confiança para diferentes valores de α , modelo log-BS, dados completos, $\gamma_s = 1 \ \forall s$.

		$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$											
n	IC	90%						95%					
		$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,25$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 1,0$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,25$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 1,0$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,25$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 1,0$
20	ICA	80,95	80,88	80,64	79,65	86,52	86,46	86,27	85,49	92,89	92,89	92,78	92,31
	ICP	73,90	73,67	73,12	71,36	80,93	80,70	80,17	78,68	90,16	90,07	89,78	89,01
n	IC	90%						95%					
		$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,25$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 1,0$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,25$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 1,0$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,25$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 1,0$
30	ICA	84,17	84,09	83,76	83,33	89,24	89,20	89,02	88,57	95,07	95,07	94,92	94,62
	ICP	78,90	78,82	78,44	77,32	85,39	85,33	84,85	83,86	93,05	93,00	92,79	92,26

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 7 – Taxas de rejeição nulas, inferência sobre α , modelo log-BS, dados completos, $\gamma_s = 1 \forall s$.

		$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$											
n	nível nominal	$\alpha = 0, 1$			$\alpha = 0, 25$			$\alpha = 0, 5$			$\alpha = 1, 0$		
		RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}
20	10%	14,05	9,91	9,91	14,07	9,88	9,88	14,24	9,81	9,82	14,71	9,79	9,56
	5%	7,43	4,89	4,89	7,44	4,88	4,88	7,49	4,89	4,89	8,02	4,97	4,91
	1%	1,98	1,13	1,13	1,98	1,14	1,14	1,99	1,13	1,13	2,08	1,15	1,11
30	10%	12,46	9,72	9,72	12,51	9,76	9,76	12,59	9,86	9,85	12,97	9,96	9,88
	5%	6,78	5,17	5,17	6,76	5,18	5,17	6,80	5,16	5,16	7,10	5,20	5,16
	1%	1,45	0,92	0,92	1,49	0,93	0,93	1,51	0,96	0,96	1,61	0,96	0,95
40	10%	11,70	9,49	9,49	11,71	9,48	9,48	11,82	9,42	9,42	12,10	9,58	9,53
	5%	6,08	4,92	4,92	6,10	4,93	4,93	6,15	4,93	4,94	6,44	4,87	4,91
	1%	1,39	1,03	1,03	1,40	1,04	1,04	1,42	1,04	1,04	1,46	1,01	1,00
50	10%	11,71	10,19	10,19	11,77	10,17	10,17	11,84	10,20	10,21	12,14	10,28	10,25
	5%	6,40	5,30	5,30	6,45	5,30	5,30	6,52	5,27	5,26	6,64	5,36	5,34
	1%	1,45	1,13	1,13	1,45	1,14	1,14	1,47	1,14	1,14	1,49	1,20	1,21

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 8 – Taxas de rejeição nulas, inferência sobre α , modelo log-BS, dados completos, $\alpha = 1$, $\gamma_s = 1 \ \forall s$ e $n = 30$.

nível nominal	p = 2			p = 3			p = 4			p = 5			p = 6		
	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}
10%	13,17	10,10	10,09	16,10	10,25	10,17	20,03	10,52	10,38	23,55	10,38	10,24	28,97	10,36	10,76
5%	7,19	5,28	5,26	9,33	5,13	5,10	12,08	5,18	5,08	15,18	5,21	4,94	19,19	5,01	4,55
1%	1,70	0,99	0,94	2,41	1,03	0,98	3,55	1,07	1,04	4,17	1,11	1,06	7,15	0,89	0,78

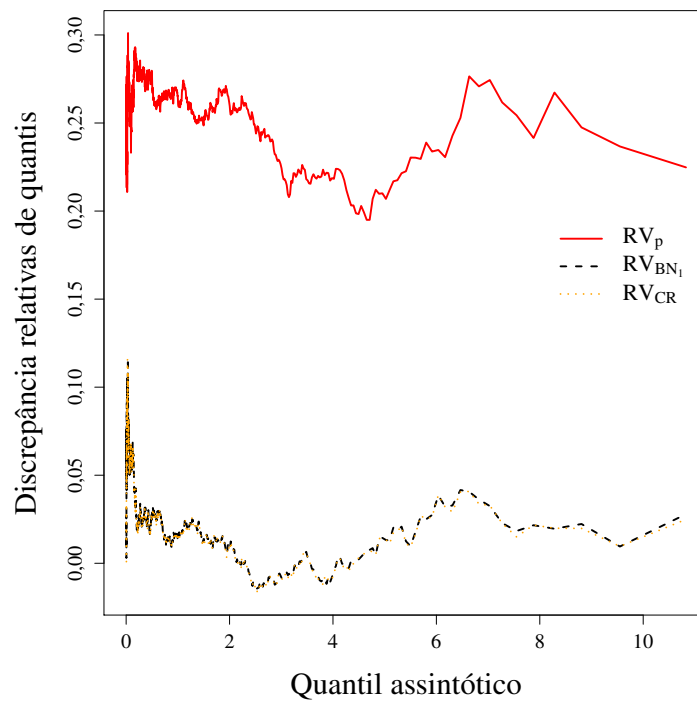
Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 9 – Médias e variâncias da variável χ_1^2 e das estatísticas de teste, modelo log-BS, dados completos, $\gamma_s = 1 \forall s$, $\alpha = 0,5$ e $n = 20$.

$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$				
momento	χ_1^2	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}
média	1,0000	1,2470	1,0124	1,0118
variância	2,0000	3,0470	2,0569	2,0543

Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 5 – Gráfico de discrepância relativas de quantis, $\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$, $H_0 : \alpha = 0,5$, dados completos, $n = 20$.



Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 10 – Taxas de rejeição não nulas, inferência sobre α , modelo log-BS, dados completos, $\alpha = 0, 1, \gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$.

α_0	$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$								
	nível nominal 10%			nível nominal 5%			nível nominal 1%		
	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}
0, 12	18, 76	30, 92	30, 92	11, 21	21, 63	21, 63	3, 07	7, 93	7, 93
0, 14	51, 47	65, 92	65, 92	40, 75	56, 65	56, 65	21, 21	35, 29	35, 29
0, 16	77, 54	86, 34	86, 34	69, 66	81, 00	81, 00	50, 68	64, 90	64, 90
0, 18	91, 84	95, 63	95, 63	88, 06	93, 41	93, 41	75, 14	85, 33	85, 33
0, 20	97, 32	98, 76	98, 76	95, 61	97, 99	97, 99	89, 20	94, 40	94, 40
0, 22	99, 11	99, 60	99, 60	98, 43	99, 31	99, 31	95, 48	97, 95	97, 95
0, 24	99, 68	99, 86	99, 86	99, 41	99, 76	99, 76	98, 26	99, 16	99, 16
0, 26	99, 91	99, 97	99, 97	99, 83	99, 92	99, 92	99, 24	99, 76	99, 76
0, 28	99, 94	99, 98	99, 98	99, 91	99, 96	99, 96	99, 72	99, 88	99, 88

Fonte: Autoria própria (2021)

3.3.2 Dados censurados

O presente estudo tem finalidade análoga à análise realizada para dados completos, como previamente visto, entretanto, consideramos a censura tipo II. Geramos 10.000 réplicas de Monte Carlo com tamanhos amostrais $n = 20$ e 30 e níveis de censura 10%, 30% e 50%. Os verdadeiros valores dos parâmetros de perturbação são todos iguais a um, ou seja, $\gamma_s = 1 \forall s$ e para o parâmetro de interesse consideramos, $\alpha = 0, 1; 0, 25; 0, 5$ e 1 . As covariáveis foram obtidas a partir de realizações independentes de uma variável aleatória uniforme no intervalo $(0, 1)$. Para maximizar as funções utilizamos o pacote *maximize* e as funções **MaxBFGS** e **MaxSQP** do Ox. No método SQP, impomos a restrição de que $\ell_{\gamma}^{(s)} = 0$, com a finalidade de encontrarmos as estimativas restritas do vetor $\hat{\gamma}_{\alpha}$. Como valores iniciais, usamos as estimativas de máxima verossimilhança obtidas no modelo de regressão log-BS para observações não censuradas.

Nas Tabelas 11 a 14 apresentamos as estimativas pontuais para o parâmetro α na presença de dois parâmetros de perturbação ($p = 2$) e $n = 20$ e 30 . Analisando as Tabelas 11 a 14, notamos que à medida que aumentamos o nível de censura, as estimativas das médias dos estimadores $\hat{\alpha}_p$, $\hat{\alpha}_{BN}$, $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$ se distanciam do verdadeiro valor de α . O estimador $\hat{\alpha}_p$ apresentou pior desempenho, entretanto, sua variabilidade é menor quando comparada com a

dos estimadores $\hat{\alpha}_{BN}$, $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$. Por exemplo, considerando $\alpha = 0,25$, $n = 20$ e 50% de censura, as estimativas das variâncias são 0,0032, 0,0036, 0,0040 e 0,0039, respectivamente. Quando $\alpha = 0,1$ e $n = 20$, fica difícil usar o EQM como critério para escolher o estimador mais adequado, mesmo aumentando os níveis de censura. Por exemplo, considerando 10% de censura, obtemos uma estimativa igual a 0,0003 para todos os estimadores. Porém, quando o verdadeiro valor de α aumenta, é possível visualizar um estimador com melhor desempenho, neste caso, o estimador $\hat{\alpha}_{BN}$. Por exemplo, considerando $\alpha = 1$, $n = 20$ e 10% de censura nas observações, temos os seguintes erros quadráticos médios: 0,0350, 0,0338, 0,0352 e 0,0343, respectivamente. Os vieses relativos dos estimadores corrigidos ($\hat{\alpha}_{BN}$, $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$) considerando todos os cenários apresentam desempenho melhor quando comparados com o viés relativo do estimador $\hat{\alpha}_p$. Observamos também que à medida que o nível de censura aumenta, esses vieses também aumentam. Para exemplificar melhor, consideramos o estimador $\hat{\alpha}_p$ com o seguinte cenário: $\alpha = 0,5$ e $n = 20$, notamos que, com 10%, 30% e 50% de censura, o viés relativo assume os valores 7,6411%, 9,6154% e 12,7627%, respectivamente. No geral, o estimador $\hat{\alpha}_{BN}$ apresenta melhores resultados em comparação com os outros estimadores.

Partindo para as coberturas empíricas (%) dos intervalos ICA e ICP, cujos resultados estão dispostos nas Tabelas 15, 16 e 17, fizemos uso de 10.000 réplicas de Monte Carlo e 1.000 réplicas *bootstrap* (reamostragem paramétrica), com níveis nominais de 90%, 95% e 99% e níveis de censura iguais a 10%, 30% e 50%. Observamos que o intervalo ICA apresenta melhores resultados, por exemplo, para $\alpha = 0,25$, nível de cobertura igual a 95% e 30% de censura nas observações, as taxas para os intervalos ICA e ICP são, respectivamente, 82,08% e 75,11%. Estes resultados são similares aos obtidos por Barreto (2013).

A Tabela 18 contém as taxas de rejeição nulas dos testes ($H_0 : \alpha = 0,1$) RV_p , RV_{BN_1} , RV_{BN_2} e RV_{CR} com níveis nominais iguais a 10%, 5% e 1%, níveis de censura iguais a 10%, 30% e 50% e $n = 20$. Notamos que o desempenho do teste RV_p deteriora-se bastante com a presença de censura, principalmente quando a porcentagem de censura aumenta. Por exemplo, para $\alpha = 1$, nível nominal de 10% e considerando todos os níveis de censura, as taxas de rejeição nulas são 15,29%, 17,67% e 26,17%, respectivamente. À medida que aumentamos o valor de α , os testes se tornam mais liberais, por exemplo, considerando $\alpha = 0,1$, nível de censura igual a 50% e nível nominal igual a 5%, temos 12,86%, 6,64%, 6,14% e 7,28%, respectivamente. Entretanto, para $\alpha = 1$, nível de censura igual a 50% e nível nominal igual a 5%, os tamanhos dos testes são, respectivamente, 17,30%, 11,73%, 7,97% e 8,44%.

Na Tabela 19, exibimos as médias e variâncias assintóticas e empíricas das estatísticas de

teste. O teste RV_{BN_2} apresentou melhor aproximação aos valores assintóticos, por exemplo, considerando 10% de censura e todas as estatísticas de teste (RV_p , RV_{BN_1} , RV_{BN_2} e RV_{CR}) os valores das (médias e variâncias) são, respectivamente, iguais a (1,2871 e 3,1724), (1,0507 e 2,1709), (1,0318 e 2,0945) e (1,0344 e 2,1053).

Nas Figuras 6, 7 e 8 apresentamos as curvas de discrepância relativa versus os correspondentes quantis assintóticos, considerando: $H_0 : \alpha = 0,1$, $n = 20$, $p = 2$ e níveis de censura iguais a 10%, 30% e 50%. Quando censuramos 10% das amostras, notamos que, melhor é a aproximação assintótica utilizada nos testes RV_{BN_2} e RV_{CR} , essas duas curvas estão mais próximas da ordenada zero. Entretanto, quando a porcentagem de censura nas amostras aumenta, observamos que a curva da estatística RV_{BN_2} apresenta melhor aproximação. Em todas os cenários, a curva baseada na estatística RV_p tem a pior aproximação, com posicionamento entre as ordenadas 0,2 e 0,4 (10%), 0,3 e 0,6 (30%), 0,4 e 0,8 (50%), o que confirma que este teste é liberal.

Na Tabela 20, apresentamos os poderes dos testes RV_p , RV_{BN_1} , RV_{BN_2} e RV_{CR} , com níveis nominais de 10%, 5% e 1%, níveis de censura iguais a 10%, 30% e 50% e $n = 20$. Consideramos o teste $H_0 : \alpha = \alpha_0$ contra $H_1 : \alpha \neq \alpha_0$, em que pequenas variações nos valores de α_0 foram consideradas (0,12 a 0,28) com o intuito de observar os impactos causados nas taxas do poder, sob hipótese nula consideramos $H_0 : \alpha = 0,1$. Para que os testes tenham o mesmo tamanho, utilizamos os valores críticos exatos ao invés dos assintóticos. Observamos que o teste baseado na estatística RV_p é o menos poderoso em relação aos demais. No geral, o teste RV_{BN_2} apresenta melhor desempenho, mesmo aumentando o nível de censura. Por exemplo, cenário 1: sob hipótese alternativa $\alpha = 0,14$, nível nominal igual a 10% e 10% de censura nos dados; cenário 2: sob hipótese alternativa $\alpha = 0,14$, nível nominal igual a 10% e 50% de censura, temos as seguintes taxas de rejeição não nulas, 44,48%, 59,65%, 61,38%, 61,35% e 23,43%, 41,36%, 43,85% e 37,75%, respectivamente.

Em suma, os resultados sugerem que o estimador $\hat{\alpha}_{BN}$ apresenta desempenho superior aos estimadores $\hat{\alpha}_p$, $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$ mesmo quando aumentamos a porcentagem de censura. Os resultados mostram também que a presença de observações censuradas causa um declínio no desempenho dos estimadores considerados. No geral, os testes RV_{BN_1} , RV_{BN_2} e RV_{CR} apresentam taxas de rejeição nulas mais próximas dos níveis nominais pré-estabelecidos quando a censura é igual a 10%. Entretanto, quando a porcentagem da censura aumenta, notamos que o teste RV_{BN_2} apresenta desempenho melhor quando comparado aos demais testes. Portanto, recomendamos o teste RV_{BN_2} .

Tabela 11 – Medidas descritivas de diferentes estimadores de α , modelo log-BS, dados censurados tipo II, $\alpha = 0,1$ e $\gamma_s = 1 \forall s$.

$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$								
$n = 20$								
censura (%)	estimador	média	variância	viés	EQM	VR(%)	assimetria	curtose
10	$\hat{\alpha}_p$	0,0927	0,0003	-0,0073	0,0003	7,3219	0,2042	2,9965
	$\hat{\tilde{\alpha}}_{BN}$	0,0977	0,0003	-0,0023	0,0003	2,2969	0,2054	2,9980
	$\hat{\hat{\alpha}}_{BN}$	0,0984	0,0003	-0,0016	0,0003	1,6384	0,2060	2,9980
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,0983	0,0003	-0,0017	0,0003	1,6616	0,2067	2,9984
30	$\hat{\alpha}_p$	0,0909	0,0003	-0,0091	0,0004	9,1090	0,2413	3,0332
	$\hat{\tilde{\alpha}}_{BN}$	0,0971	0,0004	-0,0029	0,0004	2,8547	0,2346	3,0304
	$\hat{\hat{\alpha}}_{BN}$	0,0982	0,0004	-0,0018	0,0004	1,7965	0,2412	3,0405
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,0969	0,0004	-0,0031	0,0004	3,0791	0,2621	3,0572
50	$\hat{\alpha}_p$	0,0870	0,0005	-0,0130	0,0006	12,9734	0,2487	2,9535
	$\hat{\tilde{\alpha}}_{BN}$	0,0961	0,0006	-0,0039	0,0006	3,8532	0,2271	2,9255
	$\hat{\hat{\alpha}}_{BN}$	0,0979	0,0006	-0,0021	0,0006	2,0514	0,2319	2,9325
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,0942	0,0005	-0,0058	0,0006	5,8236	0,2532	2,9792
$n = 30$								
censura (%)	estimador	média	variância	viés	EQM	VR(%)	assimetria	curtose
10	$\hat{\alpha}_p$	0,0951	0,0002	-0,0049	0,0002	4,8798	0,1634	2,9553
	$\hat{\tilde{\alpha}}_{BN}$	0,0985	0,0002	-0,0015	0,0002	1,4545	0,1637	2,9551
	$\hat{\hat{\alpha}}_{BN}$	0,0989	0,0002	-0,0011	0,0002	1,0915	0,1641	2,9551
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,0989	0,0002	-0,0011	0,0002	1,1097	0,1640	2,9549
30	$\hat{\alpha}_p$	0,0939	0,0002	-0,0061	0,0003	6,1035	0,1974	3,0211
	$\hat{\tilde{\alpha}}_{BN}$	0,0979	0,0003	-0,0021	0,0003	2,0930	0,1967	3,0227
	$\hat{\hat{\alpha}}_{BN}$	0,0987	0,0003	-0,0013	0,0003	1,3498	0,1983	3,0234
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,0982	0,0003	-0,0018	0,0003	1,8203	0,2027	3,0261
50	$\hat{\alpha}_p$	0,0921	0,0003	-0,0079	0,0004	7,8915	0,2548	2,9750
	$\hat{\tilde{\alpha}}_{BN}$	0,0979	0,0003	-0,0021	0,0003	2,1323	0,2457	2,9689
	$\hat{\hat{\alpha}}_{BN}$	0,0988	0,0004	-0,0012	0,0004	1,2093	0,2494	2,9717
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,0966	0,0003	-0,0034	0,0004	3,4381	0,2649	2,9861

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 12 – Medidas descritivas de diferentes estimadores de α , modelo log-BS, dados censurados tipo II, $\alpha = 0,25$ e $\gamma_s = 1 \forall s$.

$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$								
$n = 20$								
censura (%)	estimador	média	variância	viés	EQM	VR(%)	assimetria	curtose
10	$\hat{\alpha}_p$	0,2312	0,0018	-0,0188	0,0021	7,5097	0,2182	3,0219
	$\hat{\tilde{\alpha}}_{BN}$	0,2439	0,0020	-0,0061	0,0020	2,4332	0,2219	3,0264
	$\hat{\hat{\alpha}}_{BN}$	0,2459	0,0020	-0,0041	0,0020	1,6446	0,2224	3,0268
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,2460	0,0020	-0,0040	0,0020	1,6169	0,2217	3,0261
30	$\hat{\alpha}_p$	0,2262	0,0023	-0,0238	0,0029	9,5237	0,2538	2,9763
	$\hat{\tilde{\alpha}}_{BN}$	0,2402	0,0026	-0,0098	0,0027	3,9176	0,2594	2,9852
	$\hat{\hat{\alpha}}_{BN}$	0,2448	0,0027	-0,0052	0,0027	2,0654	0,2644	2,9858
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,2439	0,0027	-0,0061	0,0028	2,4262	0,2645	2,9834
50	$\hat{\alpha}_p$	0,2183	0,0032	-0,0317	0,0042	12,6918	0,3542	3,1469
	$\hat{\tilde{\alpha}}_{BN}$	0,2360	0,0036	-0,0140	0,0038	5,6125	0,3484	3,1403
	$\hat{\hat{\alpha}}_{BN}$	0,2431	0,0040	-0,0069	0,0040	2,7617	0,3676	3,1747
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,2374	0,0039	-0,0126	0,0041	5,0500	0,3821	3,1804
$n = 30$								
censura (%)	estimador	média	variância	viés	EQM	VR(%)	assimetria	curtose
10	$\hat{\alpha}_p$	0,2375	0,0012	-0,0125	0,0013	5,0068	0,1631	3,0045
	$\hat{\tilde{\alpha}}_{BN}$	0,2461	0,0013	-0,0039	0,0013	1,5582	0,1641	3,0053
	$\hat{\hat{\alpha}}_{BN}$	0,2472	0,0013	-0,0028	0,0013	1,1014	0,1649	3,0062
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,2473	0,0013	-0,0027	0,0013	1,0804	0,1645	3,0060
30	$\hat{\alpha}_p$	0,2341	0,0016	-0,0159	0,0018	6,3412	0,2309	3,0328
	$\hat{\tilde{\alpha}}_{BN}$	0,2438	0,0017	-0,0062	0,0018	2,4995	0,2326	3,0361
	$\hat{\hat{\alpha}}_{BN}$	0,2465	0,0018	-0,0035	0,0018	1,3935	0,2358	3,0372
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,2462	0,0018	-0,0038	0,0018	1,5291	0,2352	3,0368
50	$\hat{\alpha}_p$	0,2288	0,0022	-0,0212	0,0027	8,4931	0,3078	3,1169
	$\hat{\tilde{\alpha}}_{BN}$	0,2405	0,0024	-0,0095	0,0025	3,7843	0,3078	3,1170
	$\hat{\hat{\alpha}}_{BN}$	0,2445	0,0026	-0,0055	0,0026	2,2129	0,3153	3,1284
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,2417	0,0025	-0,0083	0,0026	3,3192	0,3191	3,1289

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 13 – Medidas descritivas de diferentes estimadores de α , modelo log-BS, dados censurados tipo II, $\alpha = 0,5$ e $\gamma_s = 1 \forall s$.

$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$								
$n = 20$								
censura (%)	estimador	média	variância	viés	EQM	VR(%)	assimetria	curtose
10	$\hat{\alpha}_p$	0,4618	0,0071	-0,0382	0,0086	7,6422	0,2172	3,0116
	$\hat{\tilde{\alpha}}_{BN}$	0,4883	0,0080	-0,0117	0,0082	2,3377	0,2251	3,0209
	$\hat{\hat{\alpha}}_{BN}$	0,4930	0,0082	-0,0070	0,0083	1,3946	0,2302	3,0249
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,4929	0,0082	-0,0071	0,0083	1,4256	0,2269	3,0213
30	$\hat{\alpha}_p$	0,4519	0,0095	-0,0481	0,0118	9,6152	0,2739	3,0455
	$\hat{\tilde{\alpha}}_{BN}$	0,4800	0,0108	-0,0200	0,0112	3,9917	0,2798	3,0456
	$\hat{\hat{\alpha}}_{BN}$	0,4933	0,0117	-0,0067	0,0117	1,3475	0,3016	3,0850
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,4920	0,0116	-0,0080	0,0116	1,5989	0,2899	3,0651
50	$\hat{\alpha}_p$	0,4362	0,0139	-0,0638	0,0180	12,7567	0,3838	3,1192
	$\hat{\tilde{\alpha}}_{BN}$	0,4680	0,0161	-0,0320	0,0171	6,3981	0,3960	3,1425
	$\hat{\hat{\alpha}}_{BN}$	0,4901	0,0182	-0,0099	0,0183	1,9872	0,4271	3,1991
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,4839	0,0177	-0,0161	0,0180	3,2123	0,4113	3,1625
$n = 30$								
censura (%)	estimador	média	variância	viés	EQM	VR(%)	assimetria	curtose
10	$\hat{\alpha}_p$	0,4748	0,0048	-0,0252	0,0054	5,0411	0,1790	3,0293
	$\hat{\tilde{\alpha}}_{BN}$	0,4927	0,0052	-0,0073	0,0053	1,4629	0,1814	3,0308
	$\hat{\hat{\alpha}}_{BN}$	0,4955	0,0053	-0,0045	0,0053	0,8994	0,1855	3,0347
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,4954	0,0053	-0,0046	0,0053	0,9158	0,1837	3,0331
30	$\hat{\alpha}_p$	0,4678	0,0065	-0,0322	0,0075	6,4403	0,2006	2,9888
	$\hat{\tilde{\alpha}}_{BN}$	0,4872	0,0071	-0,0128	0,0073	2,5584	0,2049	2,9944
	$\hat{\hat{\alpha}}_{BN}$	0,4950	0,0074	-0,0050	0,0074	0,9999	0,2118	2,9967
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,4944	0,0074	-0,0056	0,0074	1,1202	0,2066	2,9923
50	$\hat{\alpha}_p$	0,4578	0,0099	-0,0422	0,0117	8,4310	0,3406	3,1549
	$\hat{\tilde{\alpha}}_{BN}$	0,4799	0,0109	-0,0201	0,0113	4,0290	0,3473	3,1648
	$\hat{\hat{\alpha}}_{BN}$	0,4927	0,0117	-0,0073	0,0118	1,4648	0,3612	3,1863
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,4896	0,0116	-0,0104	0,0117	2,0795	0,3535	3,1727

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 14 – Medidas descritivas de diferentes estimadores de α , modelo log-BS, dados censurados tipo II, $\alpha = 1,0$ e $\gamma_s = 1 \forall s$.

$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$								
$n = 20$								
censura (%)	estimador	média	variância	viés	EQM	VR(%)	assimetria	curtose
10	$\hat{\alpha}_p$	0,9199	0,0285	-0,0801	0,0350	8,0115	0,2236	3,0319
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,9789	0,0334	-0,0211	0,0338	2,1143	0,2513	3,0657
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,9938	0,0351	-0,0062	0,0352	0,6221	0,2595	3,0681
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,9901	0,0342	-0,0099	0,0343	0,9892	0,2437	3,0473
30	$\hat{\alpha}_p$	0,8936	0,0386	-0,1064	0,0500	10,6433	0,2671	3,0110
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,9541	0,0456	-0,0459	0,0477	4,5923	0,3051	3,0748
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,9965	0,0529	-0,0035	0,0530	0,3508	0,3496	3,1276
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,9851	0,0492	-0,0149	0,0495	1,4890	0,2987	3,0417
50	$\hat{\alpha}_p$	0,8429	0,0573	-0,1571	0,0820	15,7093	0,4576	3,2997
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,9111	0,0710	-0,0889	0,0789	8,8873	0,5442	3,5351
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,9717	0,0842	-0,0283	0,0850	2,8341	0,5332	3,3767
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,9523	0,0776	-0,0477	0,0798	4,7674	0,5004	3,3531
$n = 30$								
censura (%)	estimador	média	variância	viés	EQM	VR(%)	assimetria	curtose
10	$\hat{\alpha}_p$	0,9472	0,0193	-0,0528	0,0221	5,2772	0,1755	3,0249
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,9862	0,0213	-0,0138	0,0215	1,3786	0,1840	3,0311
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,9955	0,0220	-0,0045	0,0220	0,4452	0,1916	3,0361
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,9934	0,0217	-0,0066	0,0217	0,6606	0,1845	3,0305
30	$\hat{\alpha}_p$	0,9332	0,0277	-0,0668	0,0322	6,6795	0,2309	3,0258
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,9746	0,0307	-0,0254	0,0314	2,5397	0,2420	3,0344
	$\hat{\alpha}_{BN}$	1,0000	0,0336	0,0000	0,0336	0,0025	0,2661	3,0595
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,9937	0,0323	-0,0063	0,0323	0,6278	0,2449	3,0362
50	$\hat{\alpha}_p$	0,9092	0,0448	-0,0908	0,0531	9,0765	0,4456	3,3024
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,9574	0,0513	-0,0426	0,0531	4,2619	0,4764	3,3644
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0,9939	0,0568	-0,0061	0,0568	0,6130	0,4862	3,3616
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0,9835	0,0543	-0,0165	0,0546	1,6529	0,4666	3,3286

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 15 – Cobertura dos intervalos de confiança (90%) para diferentes valores de α , modelo log-BS, dados censurados tipo II, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$.

$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$								
censura (%)	$\alpha = 0,1$		$\alpha = 0,25$		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 1,0$	
	ICA	ICP	ICA	ICP	ICA	ICP	ICA	ICP
10	79,55	71,27	79,76	71,53	79,63	71,14	78,96	70,24
30	77,56	69,00	76,66	67,75	77,53	67,96	76,91	67,61
50	72,68	61,20	73,87	63,22	73,77	63,52	72,74	62,86

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 16 – Cobertura dos intervalos de confiança (95%) para diferentes valores de α , modelo log-BS, dados censurados tipo II, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$.

$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$								
censura (%)	$\alpha = 0,1$		$\alpha = 0,25$		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 1,0$	
	ICA	ICP	ICA	ICP	ICA	ICP	ICA	ICP
10	85,13	78,86	85,12	79,11	85,22	78,74	84,80	77,70
30	83,44	76,31	82,08	75,11	82,75	75,91	82,22	75,57
50	78,89	69,19	79,14	71,44	78,99	71,67	77,98	70,61

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 17 – Cobertura dos intervalos de confiança (99%) para diferentes valores de α , modelo log-BS, dados censurados tipo II, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$.

$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$								
censura (%)	$\alpha = 0,1$		$\alpha = 0,25$		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 1,0$	
	ICA	ICP	ICA	ICP	ICA	ICP	ICA	ICP
10	91,65	88,50	92,00	88,78	91,99	88,65	91,49	88,14
30	90,28	86,79	89,57	85,66	90,04	86,52	89,64	85,73
50	86,23	81,33	86,52	82,06	86,69	82,51	85,52	81,98

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 18 – Taxas de rejeição nulas, inferência sobre α , modelo log-BS, dados censurados tipo II, $\gamma_s = 1 \ \forall s$ e $n = 20$.

$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$											
censura (%)	nível nominal	$\alpha = 0,1$						$\alpha = 0,25$			
		RV_p	RV_{BN_1}	RV_{BN_2}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{BN_2}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}
10	10%	14,75	10,56	10,29	10,36	14,90	10,93	10,45	10,46		
	5%	8,22	5,59	5,36	5,39	8,50	5,50	5,19	5,19		
	1%	2,36	1,23	1,14	1,17	2,32	1,22	1,10	1,10		
30	10%	16,78	11,53	11,24	11,76	17,55	12,74	11,75	11,96		
	5%	9,82	5,94	5,75	6,21	10,51	7,02	6,39	6,59		
	1%	2,89	1,18	1,14	1,30	3,22	1,57	1,46	1,51		
50	10%	20,25	12,38	11,70	13,40	23,00	16,17	14,71	15,80		
	5%	12,86	6,64	6,14	7,28	14,38	9,87	8,44	9,68		
	1%	4,09	1,46	1,30	1,72	5,64	2,87	2,41	2,76		

censura (%)	nível nominal	$\alpha = 0,5$						$\alpha = 1,0$			
		RV_p	RV_{BN_1}	RV_{BN_2}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{BN_2}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}
10	10%	14,90	10,95	10,42	10,41	15,29	11,09	10,53	10,53		
	5%	8,52	5,47	5,24	5,23	8,70	5,62	5,25	5,26		
	1%	2,21	1,19	1,02	1,01	2,32	1,18	1,11	1,15		
30	10%	17,01	12,37	11,29	11,45	17,67	12,90	11,21	11,23		
	5%	9,90	6,85	5,85	5,93	10,46	7,23	5,70	5,68		
	1%	2,99	1,71	1,36	1,47	3,24	1,81	1,34	1,35		
50	10%	22,43	17,31	14,69	15,26	26,17	19,74	14,44	15,25		
	5%	14,87	10,36	8,42	8,79	17,30	11,73	7,97	8,44		
	1%	5,34	2,98	2,19	2,33	6,24	4,14	2,33	2,68		

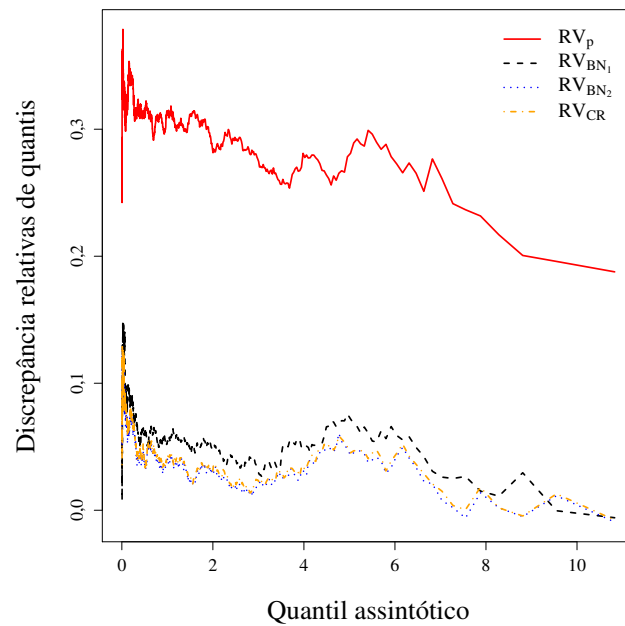
Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 19 – Médias e variâncias da variável χ_1^2 e das estatísticas de teste, modelo log-BS, dados censurados tipo II, $\gamma_s = 1 \forall s$, $\alpha = 0,1$ e $n = 20$.

$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$						
censura (%)	momento	χ_1^2	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{BN_2}	RV_{CR}
10	média	1,0000	1,2871	1,0507	1,0318	1,0344
	variância	2,0000	3,1724	2,1709	2,0945	2,1053
30	média	1,0000	1,4126	1,0870	1,0635	1,1077
	variância	2,0000	3,7219	2,3054	2,2137	2,3845
50	média	1,0000	1,6371	1,1419	1,1023	1,1939
	variância	2,0000	4,8069	2,5045	2,3448	2,6878

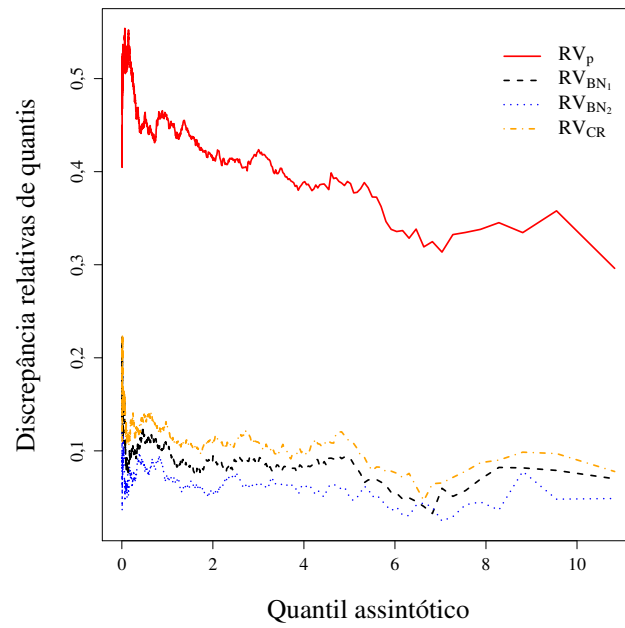
Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 6 – Gráfico de discrepância relativas de quantis, $\alpha = 0,1$ e $\gamma_s = 1 \forall s$, com $\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$, $n = 20$ e 10% de censura.



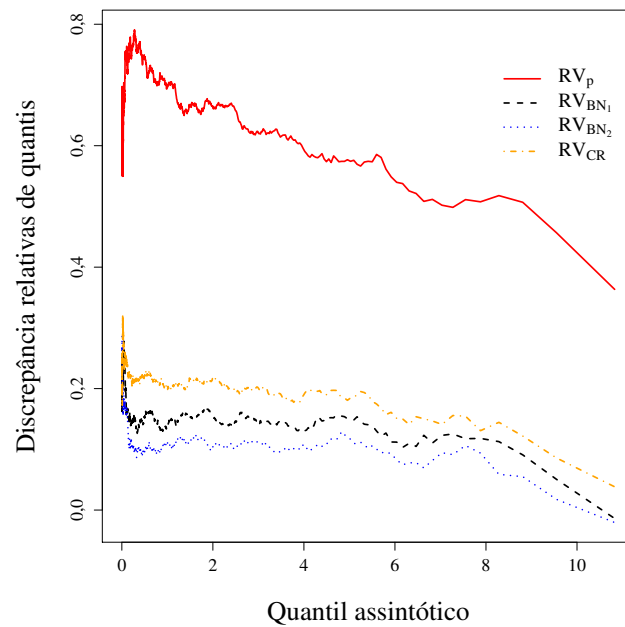
Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 7 – Gráfico de discrepância relativas de quantis, $\alpha = 0,1$ e $\gamma_s = 1 \ \forall s$, com $\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$, $n = 20$ e 30% de censura.



Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 8 – Gráfico de discrepância relativas de quantis, $\alpha = 0,1$ e $\gamma_s = 1 \ \forall s$, com $\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$, $n = 20$ e 50% de censura.



Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 20 – Taxas de rejeição não nulas, inferência sobre α , modelo log-BS, dados censurados tipo II, $\alpha = 0, 1$, $\gamma_s = 1 \ \forall s$ e $n = 20$.

		$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$											
censura (%)	α_0	nível nominal = 10%						nível nominal = 5%					
		RV_p	RV_{BN_1}	RV_{BN_2}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{BN_2}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{BN_2}	RV_{CR}
10	0,12	15,95	26,60	28,20	28,14	8,99	17,48	18,90	18,85	2,68	6,49	7,04	6,98
	0,14	44,48	59,65	61,38	61,35	34,26	48,51	50,54	50,47	17,49	29,54	31,28	31,04
	0,16	70,75	81,06	81,98	81,90	62,09	73,93	75,27	75,26	44,00	57,92	59,46	59,20
	0,18	87,90	93,23	93,55	93,54	82,52	89,67	90,46	90,44	68,42	79,60	80,69	80,57
	0,20	95,03	97,56	97,75	97,76	92,25	95,88	96,17	96,13	84,03	90,63	91,21	91,15
	0,22	98,05	99,17	99,23	99,22	96,81	98,44	98,64	98,65	92,59	96,01	96,29	96,22
	0,24	99,11	99,58	99,65	99,65	98,62	99,30	99,39	99,38	96,56	98,25	98,40	98,36
	0,26	99,67	99,83	99,84	99,84	99,47	99,76	99,77	99,77	98,44	99,30	99,37	99,36
30	0,28	99,90	99,95	99,95	99,95	99,79	99,93	99,93	99,93	99,40	99,73	99,77	99,75
	0,12	12,94	23,71	25,34	23,12	6,92	15,64	16,98	15,26	2,16	5,90	6,36	5,83
	0,14	35,34	51,24	53,65	50,52	25,55	41,41	43,60	40,98	12,67	24,97	26,32	24,85
	0,16	58,90	72,92	74,74	72,42	49,33	64,91	66,88	64,62	32,90	48,74	49,96	48,77
	0,18	77,82	87,21	88,12	87,11	70,61	82,01	83,14	81,90	54,70	70,11	71,20	70,13
	0,20	88,32	93,75	94,37	93,68	82,91	90,83	91,63	90,79	71,82	82,53	83,39	82,66
	0,22	93,90	96,98	97,33	96,95	90,92	95,40	95,84	95,39	83,07	90,64	91,19	90,86
	0,24	96,82	98,42	98,51	98,40	95,13	97,47	97,68	97,47	90,52	94,98	95,25	95,01
50	0,26	98,55	99,37	99,42	99,38	97,46	98,86	99,03	98,90	94,64	97,38	97,55	97,39
	0,28	99,29	99,70	99,74	99,72	98,71	99,50	99,59	99,48	97,15	98,67	98,75	98,72
	0,12	9,44	19,76	21,79	17,36	4,88	12,56	14,19	10,82	1,15	4,44	5,59	3,83
	0,14	23,43	41,36	43,85	37,75	16,21	32,00	34,46	28,78	6,96	17,90	20,09	16,19
	0,16	41,82	60,33	63,41	57,39	32,59	51,64	54,43	48,49	19,27	35,28	38,66	32,94
	0,18	60,54	75,54	77,57	73,53	51,53	69,09	71,19	66,69	35,90	54,24	57,37	51,88
	0,20	73,50	85,43	86,93	83,84	65,92	80,39	82,08	78,64	51,84	68,18	70,83	66,37
	0,22	82,57	90,70	91,71	89,62	77,00	87,27	88,45	86,03	64,85	78,66	80,51	77,24
50	0,24	88,71	94,22	94,99	93,52	84,68	91,82	92,56	91,13	75,82	85,84	87,33	84,94
	0,26	92,38	96,14	96,68	95,74	89,65	94,46	95,08	93,93	82,90	90,47	91,45	89,88
	0,28	94,95	97,67	97,98	97,51	92,87	96,67	97,14	96,36	87,79	93,39	94,23	93,04

Fonte: Autoria própria (2021)

4 REFINAMENTO ASSINTÓTICO PARA O MODELO LOG-BIRNBAUM-SAUNDERS GENERALIZADO COM NÚCLEO t DE STUDENT

Neste capítulo, apresentaremos inferências melhoradas para o modelo log-BS- t na presença, ou não, de censura tipo II. Essas inferências serão realizadas sobre o parâmetro α através das funções de verossimilhança perfilada e perfiladas modificadas baseadas nas aproximações propostas por Cox e Reid (1987), Fraser e Reid (1995) e Severini (1999). Adicionalmente, apresentaremos os estimadores de máxima verossimilhança perfilado e perfilados modificados, além dos testes da razão de verossimilhanças baseados nestas funções.

4.1 DADOS COMPLETOS

Sejam $y_1, \dots, y_n$ variáveis aleatórias independentes, tais que $y_i \sim \text{log-BS-}t(\alpha, \mu_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}, \nu)$ para $i = 1, \dots, n$, sendo α é o parâmetro de interesse e $\boldsymbol{\gamma}$ o vetor de parâmetros de perturbação. A função de verossimilhança perfilada para α considerando n observações independentes não censuradas é dada por

$$L_p(\alpha) = L(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha) = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{2\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left[\frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2}\right) \right] \left\{ 1 + \frac{1}{\nu} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2}\right) \right]^2 \right\}^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)},$$

em que $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha$ é o vetor que contém as estimativas de máxima verossimilhança dos coeficientes de regressão para um dado valor de α e ν é o número de graus de liberdade (fixo).

Logo, o logaritmo da função de verossimilhança perfilada para o parâmetro α é expresso por

$$\ell_p(\alpha) = c + \sum_{i=1}^n \left\{ \log \left(\frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2}\right) \right) - \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \log \left(\nu + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2}\right) \right]^2 \right) \right\},$$

$$\text{em que } c = n \left[\log \left(\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{2\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \right) + \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \log(\nu) \right].$$

O estimador de máxima verossimilhança perfilado de α pode ser obtido maximizando o logaritmo da função de verossimilhança dado em (2.24) sujeito às restrições $\ell_\gamma^{(s)} = 0$, $s = 1, \dots, p$. O estimador de máxima verossimilhança perfilado $\hat{\alpha}_p$ não tem forma fechada e pode ser obtido numericamente.

O logaritmo da função de verossimilhança perfilada modificada proposta por Barndorff-Nielsen (1983) é dado por

$$\ell_{BN}(\alpha) = \ell_p(\alpha) + \frac{1}{2} \log |j_{\boldsymbol{\gamma}}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}, a)| - \log |\ell_{\boldsymbol{\gamma}; \hat{\boldsymbol{\gamma}}}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}, a)|,$$

em que a é uma estatística ancilar, $\hat{\alpha}$ e $\hat{\gamma}$ são os estimadores de máxima verossimilhança de α e γ , respectivamente, $j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}, a)$ é a matriz de informação observada para o vetor γ avaliada em $(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ e $\ell_{\gamma;\hat{\gamma}}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}, a)$ é uma matriz com elemento (s, t) dado por

$$\ell_{\gamma;\hat{\gamma}}^{(s,t)}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}, a) = \frac{\partial^2 \ell(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}, a)}{\partial \gamma_s \partial \hat{\gamma}_t}, \quad s, t = 1, \dots, p,$$

em que $\ell(\cdot)$ é o logaritmo da função de verossimilhança. Ambas matrizes têm dimensão $p \times p$. O estimador de máxima verossimilhança modificado denotado por $\hat{\alpha}_{BN}$ não tem forma fechada e pode ser obtido numericamente maximizando a correspondente função de log-verossimilhança, para maiores detalhes ver Nocedal e Wright (1999).

Severini (1999) derivou uma aproximação para a quantidade $\ell_{\gamma;\hat{\gamma}}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}, a)$ que não depende de uma estatística ancilar. Portanto, o logaritmo da função correspondente à aproximação proposta por Severini (1999) é dado por

$$\check{\ell}_{BN}(\alpha) = \ell_p(\alpha) + \frac{1}{2} \log |j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)| - \log |\check{I}_\gamma(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma})|,$$

em que $j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ é a matriz de informação observada para o vetor γ avaliada em $(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ e $\check{I}_\gamma(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma})$ é uma matriz com elemento (s, t) dado por

$$\check{I}_\gamma^{(s,t)}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}) = \sum_{i=1}^n \ell_\gamma^{(s,i)}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha) \ell_\gamma^{(t,i)}(\hat{\alpha}, \hat{\gamma})^\top,$$

sendo $\ell_\gamma^{(s,i)}$ o s -ésimo componente do vetor escore de γ baseado na i -ésima observação e avaliado em $(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ e $(\hat{\alpha}, \hat{\gamma})$, respectivamente. As matrizes $j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ e $\check{I}_\gamma(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma})$ têm dimensão $p \times p$. O estimador de máxima verossimilhança perfilado modificado $\hat{\alpha}_{BN}$ não tem forma fechada e pode ser obtido numericamente maximizando a correspondente função de log-verossimilhança.

Para o modelo log-BS- t , os elementos das matrizes $j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ e $\check{I}_\gamma(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma})$ são apresentados, respectivamente, a seguir

$$j_{\gamma\gamma}^{(s,t)} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_{is} x_{it} \left\{ - \frac{4/\alpha^2}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2} + \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right\} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \times w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right) \\
& + 2 \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \\
& \times w' \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right) \Big\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\check{I}_{\boldsymbol{\gamma}}^{(s,t)}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ x_{is} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right] \right. \right. \\
& \times w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right) - \left. \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]} \right\} \\
& \times x_{it} \left\{ \left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right] \right. \\
& \times w \left(\left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right]^2 \right) - \left. \frac{\left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right]}{\left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right]} \right\} \Big\},
\end{aligned}$$

com $s, t = 1, \dots, p$.

Matricialmente, temos

$$j_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha) = \frac{1}{4} \mathbf{X}^\top \mathbf{O} \mathbf{X},$$

em que $\mathbf{O} = \text{diag}(o_1(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha), \dots, o_n(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha))$, ou seja, $\mathbf{O}$ é uma matriz quadrada de dimensão $n \times n$ com elemento (i, j) dado por

$$\mathbf{O}^{(i,j)} = o_i(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha) \quad \text{se } i = j \quad \text{e} \quad \mathbf{O}^{(i,j)} = 0 \quad \text{se } i \neq j,$$

sendo

$$\begin{aligned}
o_i(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha) &= - \frac{4/\alpha^2}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2} \\
&+ \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right\} \\
&\times w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right) \\
&+ 2 \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \\
&\times w' \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right), \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\check{I}_{\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_{\alpha}; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}) = \frac{1}{2} \mathbf{X}^{\top} \mathbf{P} \mathbf{X},$$

em que $\mathbf{P} = \text{diag}(p_1(\alpha, \hat{\gamma}_{\alpha}; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}), \dots, p_n(\alpha, \hat{\gamma}_{\alpha}; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}))$, ou seja, $\mathbf{P}$ é uma matriz quadrada de dimensão $n \times n$ com elemento (i, j) dado por

$$\mathbf{P}^{(i,j)} = p_i(\alpha, \hat{\gamma}_{\alpha}; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}) \quad \text{se } i = j \quad \text{e} \quad \mathbf{P}^{(i,j)} = 0 \quad \text{se } i \neq j,$$

sendo

$$\begin{aligned} p_i(\alpha, \hat{\gamma}_{\alpha}; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}) = & \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\gamma}_{\alpha}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\gamma}_{\alpha}}{2} \right) \right] \right. \\ & \times \left. - \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\gamma}_{\alpha}}{2} \right) \right]}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\gamma}_{\alpha}}{2} \right) \right]} \right\} \\ & \times \left\{ \left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\gamma}}{2} \right) \right] \right. \\ & \times \left. w \left(\left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) - \frac{\left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\gamma}}{2} \right) \right]}{\left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\gamma}}{2} \right) \right]} \right\}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Uma outra aproximação foi apresentada por Fraser e Reid (1995), Fraser, Reid e Wu (1999) e Fraser e Reid (2001). Sendo assim, a correspondente aproximação para o logaritmo da função proposta por Barndorff-Nielsen (1983) é dada por

$$\tilde{\ell}_{BN}(\alpha) = \ell_p(\alpha) + \frac{1}{2} \log |j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_{\alpha})| - \log |\ell_{\gamma;\mathbf{y}}(\alpha, \hat{\gamma}_{\alpha}) \hat{V}_{\gamma}|,$$

em que $\ell_{\gamma;\mathbf{y}}(\alpha, \hat{\gamma}_{\alpha})$ é obtida derivando os componentes $\ell_{\gamma}^{(s)}$ do vetor escore de γ ($s = 1, \dots, p$) com relação ao vetor de observações $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^{\top}$ e a matriz $\hat{V}_{\gamma}$ é dada por

$$\hat{V}_{\gamma} = [\hat{V}_{\gamma_1} \hat{V}_{\gamma_2} \dots \hat{V}_{\gamma_p}], \quad \text{sendo} \quad \hat{V}_{\gamma_s} = \left(-\frac{\left(\frac{\partial F(y_1; \hat{\theta})}{\partial \hat{\gamma}_s} \right)}{f(y_1; \hat{\theta})}, \dots, -\frac{\left(\frac{\partial F(y_n; \hat{\theta})}{\partial \hat{\gamma}_s} \right)}{f(y_n; \hat{\theta})} \right)^{\top}, \quad s = 1, \dots, p,$$

sendo $F(y_i; \hat{\theta})$ a fda e $f(y_i; \hat{\theta})$ a fdp da variável aleatória y_i , $i = 1, \dots, n$. A matriz $\ell_{\gamma;\mathbf{y}}(\alpha, \hat{\gamma}_{\alpha})$ tem dimensão $p \times n$ com elemento (s, i) e $\hat{V}_{\gamma}$ é uma matriz de dimensão $n \times p$. O estimador de máxima verossimilhança $\hat{\alpha}_{BN}$ não tem forma fechada e pode ser obtido numericamente maximizando a correspondente função de log-verossimilhança.

Para o modelo log-BS- t , os elementos das matrizes $\ell_{\gamma;\mathbf{y}}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ e $\hat{V}_\gamma$ são apresentados, respectivamente, a seguir

$$\begin{aligned} \ell_{\gamma;\mathbf{y}}^{(s,i)}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha) = & \frac{1}{4} x_{is} \left\{ -\frac{4/\alpha^2}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2} \right. \\ & + \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right\} \\ & \times w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right) \\ & + 2 \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \\ & \times w' \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right) \left. \right\} \end{aligned}$$

e

$$\hat{V}_{\gamma_s} = (x_{1s}, x_{2s}, \dots, x_{ns})^\top,$$

com $s = 1, \dots, p$ e $i = 1, \dots, n$.

Matricialmente, temos

$$\ell_{\gamma;\mathbf{y}}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha) = \frac{1}{4} \mathbf{X}^\top \mathbf{O}$$

e

$$\hat{V}_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} = \mathbf{X}.$$

Dizemos que os componentes de $\boldsymbol{\theta} = (\gamma^\top, \alpha)^\top$ são ortogonais se $\mathbb{E}(j_{\gamma_\alpha}) = \mathbb{E}(j_{\alpha\gamma}^\top) = \mathbf{0}$, $\forall \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$, ver Silveira (1992, p. 30–31). Portanto, o logaritmo da função de verossimilhança perfilada modificada proposta por Cox e Reid (1987) é dado por

$$\ell_{CR}(\alpha) = \ell_p(\alpha) - \frac{1}{2} \log |j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)|. \quad (4.1)$$

O estimador de máxima verossimilhança $\hat{\alpha}_{CR}$ não tem forma fechada e pode ser obtido numericamente maximizando a correspondente função de log-verossimilhança. A expressão

(4.1) é dada matricialmente por

$$j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha) = \frac{1}{4} \mathbf{X}^\top \mathbf{O} \mathbf{X}.$$

Como a matriz de informação de Fisher não possui solução analítica, não se tem certeza sobre a ortogonalidade dos parâmetros, portanto, recorreremos a resultados numéricos via simulação de Monte Carlo. Os resultados mostram inferências confiáveis.

Neste caso, o produto das matrizes $\ell_{\gamma;y}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha) \hat{V}_\gamma$ é igual à matriz $j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ e, portanto, a aproximação proposta por Fraser e Reid (1995) coincide com a função de verossimilhança perfilada modificada proposta por Cox e Reid (1987).

As estatísticas da razão de verossimilhanças baseadas nas funções de verossimilhanças perfilada e perfiladas modificadas para testar $H_0 : \alpha = \alpha_0$ versus $H_1 : \alpha \neq \alpha_0$ são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} RV_p &= 2 [\ell_p(\hat{\alpha}_p) - \ell_p(\alpha_0)], \\ RV_{BN_1} &= 2 [\check{\ell}_{BN}(\check{\alpha}_{BN}) - \check{\ell}_{BN}(\alpha_0)], \\ RV_{BN_2} &= 2 [\tilde{\ell}_{BN}(\tilde{\alpha}_{BN}) - \tilde{\ell}_{BN}(\alpha_0)] \end{aligned}$$

e

$$RV_{CR} = 2 [\ell_{CR}(\hat{\alpha}_{CR}) - \ell_{CR}(\alpha_0)].$$

Assim como o teste da razão de verossimilhanças usual, os testes baseados nas verossimilhanças perfilada e perfiladas modificadas possuem, assintoticamente, distribuição χ_q^2 sob hipótese nulas, sendo q o número de restrições impostas pela hipótese nulas. Rejeitamos H_0 se $RV > \chi_{(q; 1-\rho)}^2$, sendo $1 - \rho$ o quantil da distribuição χ^2 e ρ é o nível de significância adotado para o teste. Mesmo com a modificação, a aproximação pela distribuição χ_q^2 tem erro de ordem $O(n^{-1})$.

4.2 DADOS CENSURADOS

Dadas n observações independentes y_i , tais que $y_i \sim \text{log-BS}(\alpha, \mu_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}, \nu)$ para $i = 1, \dots, n$, sejam $\overline{C}$ o conjunto das unidades em que y_i é o logaritmo do tempo de falha e C o conjunto das unidades em que y_i é o logaritmo do tempo de censura. Portanto, o logaritmo

da função de verossimilhança perfilada para o parâmetro α é dado por

$$\ell_p(\alpha) = c + \sum_{i \in \bar{C}} \left\{ \log \left(\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right) - \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \log \left(\nu + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right) \right\} \\ + \sum_{i \in C} \log \left(1 - \Phi_t \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right] \right),$$

em que $c = r \left[\log \left(\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{2\sqrt{\nu\pi} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \right) + \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \log(\nu) \right]$, r é o número de falhas e Φ_t é a fda t -Student.

O estimador de máxima verossimilhança perfilado de α é obtido maximizando o logaritmo da função de verossimilhança dado em (2.30) sujeito às restrições $\ell_\gamma^{(s)} = 0$, $s = 1, \dots, p$. O estimador de máxima verossimilhança perfilado $\hat{\alpha}_p$ não tem forma fechada e pode ser obtido numericamente.

O logaritmo da função de verossimilhança perfilada modificada proposta por Severini (1999) é dado por

$$\check{\ell}_{BN}(\alpha) = \ell_p(\alpha) + \frac{1}{2} \log |j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)| - \log |\check{I}_\gamma(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma})|,$$

em que $j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ é a matriz de informação observada para o vetor γ avaliada em $(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ e $\check{I}_\gamma(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma})$ é uma matriz com elemento (s, t) dado por

$$\check{I}_\gamma^{(s,t)}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}) = \sum_{i \in \bar{C}} \ell_\gamma^{(s,i)}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha) \ell_\gamma^{(t,i)}(\hat{\alpha}, \hat{\gamma})^\top + \sum_{i \in C} \ell_\gamma^{(s,i)}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha) \ell_\gamma^{(t,i)}(\hat{\alpha}, \hat{\gamma})^\top,$$

sendo $\ell_\gamma^{(s,i)}$ o s -ésimo componente do vetor escore de γ baseado na i -ésima observação e avaliado em $(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ e $(\hat{\alpha}, \hat{\gamma})$, respectivamente. As matrizes $j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ e $\check{I}_\gamma(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma})$ têm dimensão $p \times p$. O estimador de máxima verossimilhança perfilado modificado $\hat{\alpha}_{BN}$ não tem forma fechada e pode ser obtido numericamente maximizando a correspondente função de log-verossimilhança.

Para o modelo log-BS- t considerando censura tipo II, os elementos das matrizes $j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ e $\check{I}_\gamma(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma})$ são apresentados, respectivamente, a seguir

$$j_{\gamma\gamma}^{(s,t)} = \frac{1}{4} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} x_{it} \left\{ - \frac{4/\alpha^2}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2} \right. \\ \left. + \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right\} w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 w' \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right) \Bigg\} \\
& + \frac{1}{4} \sum_{i \in C} x_{is} x_{it} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right] h \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right] \right. \\
& \left. + \left(\frac{4}{\alpha^2} + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right) h' \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\check{I}_{\boldsymbol{\gamma}}^{(s,t)}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}) &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} \left\{ x_{is} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right] \right. \right. \\
&\quad \times w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right) - \left. \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]} \right\} \\
&\quad \times x_{it} \left\{ \left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right] \right. \\
&\quad \times w \left(\left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right]^2 \right) - \left. \frac{\left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right]}{\left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right]} \right\} \Bigg\} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i \in C} \left\{ x_{is} h \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right] \right. \\
&\quad \times x_{it} h \left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\hat{\alpha}} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right] \Bigg\},
\end{aligned}$$

com $s, t = 1, \dots, p$.

Matricialmente,

$$j_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha) = \frac{1}{4} \mathbf{X}^\top \mathbf{Q} \mathbf{X},$$

em que $\mathbf{Q} = \text{diag}(q_1(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha), \dots, q_n(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha))$, ou seja, $\mathbf{Q}$ é uma matriz quadrada de dimensão $n \times n$ com elemento (i, j) definido por

$$\mathbf{Q}^{(i,j)} = q_i(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha) \quad \text{se } i = j \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}^{(i,j)} = 0 \quad \text{se } i \neq j,$$

sendo

$$q_i(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha) = \begin{cases} -\frac{4/\alpha^2}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2}\right)\right]^2} + \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2}\right)\right]^2 + \left[\frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2}\right)\right]^2 \right\} \\ \times w\left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2}\right)\right]^2\right) + 2 \left[\frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2}\right)\right]^2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2}\right)\right]^2 \\ \times w'\left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2}\right)\right]^2\right), \quad \text{se } i \in \bar{C}, \\ \\ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2}\right)\right] h\left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2}\right)\right] \\ + \left(\frac{4}{\alpha^2} + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2}\right)\right]^2\right) h'\left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2}\right)\right], \quad \text{se } i \in C. \end{cases}$$

Além disso, temos que

$$\check{I}_\gamma(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}) = \frac{1}{2} \mathbf{X}^\top \mathbf{S} \mathbf{X},$$

em que $\mathbf{S} = \text{diag}(s_1(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}), \dots, s_n(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}))$, ou seja, $\mathbf{S}$ é uma matriz quadrada de dimensão $n \times n$ com elemento (i, j) dado por

$$\mathbf{S}^{(i,j)} = s_i(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}) \quad \text{se } i = j \quad \text{e} \quad \mathbf{S}^{(i,j)} = 0 \quad \text{se } i \neq j,$$

sendo

$$s_i(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\gamma}) = \begin{cases} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2}\right)\right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2}\right)\right] \right. \\ \times w\left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2}\right)\right]^2\right) - \left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2}\right)\right] \\ \left. \times \left[\frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2}\right)\right] \right\} \\ \times \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}}{2}\right)\right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}}{2}\right)\right] \right. \\ \times w\left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}}{2}\right)\right]^2\right) - \left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}}{2}\right)\right] \\ \left. \times \left[\frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}}{2}\right)\right] \right\}, \quad \text{se } i \in \bar{C}, \\ \\ h\left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2}\right)\right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2}\right)\right] \\ \times h\left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}}{2}\right)\right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}}{2}\right)\right], \quad \text{se } i \in C. \end{cases}$$

O logaritmo da função de verossimilhança perfilada modificada proposta por Fraser e Reid (1995) é dado por

$$\tilde{\ell}_{BN}(\alpha) = \ell_p(\alpha) + \frac{1}{2} \log |j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)| - \log |\ell_{\gamma; \mathbf{y}}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha) \hat{V}_\gamma|,$$

em que $\ell_{\gamma;\mathbf{y}}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ é obtida derivando os componentes $\ell_{\gamma}^{(s)}$ do vetor escore de γ ($s = 1, \dots, p$) com relação ao vetor de observações $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$ e a matriz $\hat{V}_\gamma$ é dada por

$$\hat{V}_\gamma = [\hat{V}_{\gamma_1} \hat{V}_{\gamma_2} \dots \hat{V}_{\gamma_p}], \quad \text{sendo} \quad \hat{V}_{\gamma_s} = \left(-\frac{\left(\frac{\partial F(y_1; \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \gamma_s} \right)}{f(y_1; \hat{\boldsymbol{\theta}})}, \dots, -\frac{\left(\frac{\partial F(y_n; \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \gamma_s} \right)}{f(y_n; \hat{\boldsymbol{\theta}})} \right)^\top, \quad s = 1, \dots, p,$$

sendo $F(y_i; \hat{\boldsymbol{\theta}})$ a fda e $f(y_i; \hat{\boldsymbol{\theta}})$ a fdp da variável aleatória y_i , $i = 1, \dots, n$. A matriz $\ell_{\gamma;\mathbf{y}}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ tem dimensão $p \times n$ com elemento (s, i) e $\hat{V}_\gamma$ é uma matriz de dimensão $n \times p$.

Para o modelo log-BS- t considerando censura tipo II, os elementos das matrizes $\ell_{\gamma;\mathbf{y}}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ e $\hat{V}_\gamma$ são apresentados, respectivamente, a seguir

$$\ell_{\gamma;\mathbf{y}}^{(s,i)}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{4} x_{is} \left\{ -\frac{4/\alpha^2}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2} \right. \\ \quad + \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right\} \\ \quad \times w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right) \\ \quad + 2 \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \\ \quad \times w' \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right) \left. \right\}, \quad \text{se } i \in \bar{C}, \\ \\ \frac{1}{4} x_{is} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right] h \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right] \right. \\ \quad + \left(\frac{4}{\alpha^2} + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right) h' \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right] \left. \right\}, \quad \text{se } i \in C, \end{cases}$$

e

$$\hat{V}_{\gamma_s} = \left(-\frac{\left(\frac{\partial F(y_1; \hat{\boldsymbol{\theta}} | \mathbf{x}_1^\top)}{\partial \gamma_s} \right)}{f(y_1; \hat{\boldsymbol{\theta}} | \mathbf{x}_1^\top)}, \dots, -\frac{\left(\frac{\partial F(y_n; \hat{\boldsymbol{\theta}} | \mathbf{x}_n^\top)}{\partial \gamma_s} \right)}{f(y_n; \hat{\boldsymbol{\theta}} | \mathbf{x}_n^\top)} \right)^\top = (m_1, m_2, \dots, m_n)^\top.$$

Como a quantidade ξ_{i2} segue uma distribuição normal padrão, então, a distribuição que modela o tempo de censura não depende de γ . Portanto

$$i \in \bar{C} \Rightarrow m_i = x_{is} \quad \text{e} \quad i \in C \Rightarrow m_i = 0.$$

Matricialmente,

$$\ell_{\gamma;\mathbf{y}}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha) = \frac{1}{4} \mathbf{X}^\top \mathbf{Q}.$$

O logaritmo da função de verossimilhança perfilada modificada proposta por Cox e Reid (1987) é dado por

$$\ell_{CR}(\alpha) = \ell_p(\alpha) - \frac{1}{2} \log |j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)|.$$

Matricialmente,

$$j_{\gamma\gamma}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha) = \frac{1}{4} \mathbf{X}^\top \mathbf{Q} \mathbf{X}.$$

O estimador de máxima verossimilhança perfilado modificado $\hat{\alpha}_{CR}$ não tem forma fechada e pode ser obtido numericamente maximizando a correspondente função de log-verossimilhança.

Como já mencionado, o ajuste de Cox e Reid exige a ortogonalidade entre os parâmetros de interesse e perturbação, entretanto, quando trabalhamos com dados censurados tipo II, a matriz de informação de Fisher não possui solução analítica, dessa forma, não se tem certeza sobre a ortogonalidade dos parâmetros. Para utilizar essa proposta de ajuste, precisamos recorrer a resultados numéricos via simulação de Monte Carlo. Os resultados mostram inferências confiáveis.

4.3 AVALIAÇÃO NUMÉRICA

Esta seção tem a finalidade de avaliar numericamente a qualidade das inferências feitas sobre o parâmetro de interesse α no modelo log-BS- t na presença, ou não, de censura tipo II, em amostras de tamanho finito e sob diferentes cenários. Os objetivos específicos podem ser resumidos como segue:

- Avaliar o comportamento dos estimadores de máxima verossimilhança perfilado e perfilados modificados, utilizando as seguintes medidas: média, variância, viés, erro quadrático médio (EQM) e viés relativo (VR, definido como $100 \times (\text{viés} / \text{valor verdadeiro do parâmetro})\%$).
- Comparar as precisões das diferentes estimativas intervalares, descrevendo as coberturas empíricas (%) dos intervalos assintótico (ICA) e *bootstrap* percentil (ICP) aos níveis nominais 90%, 95% e 99% para o parâmetro α .
- Comparar os desempenhos dos testes da razão de verossimilhanças perfilada e perfiladas modificadas, através de seus tamanhos (e poderes) apresentando as taxas de rejeição

nulas (e não nulas) aos níveis nominais 10%, 5% e 1%. Estes desempenhos são avaliados em função da proximidade das probabilidades de rejeição da hipótese nula, sendo esta verdadeira (probabilidade do erro tipo I), aos respectivos níveis nominais dos testes.

4.3.1 Dados completos

A geração dos números pseudo-aleatórios da distribuição log-BS- t foi realizada a partir da expressão dada em (2.5), porém, $Z \sim t_\nu$. O procedimento utilizado para estimação dos parâmetros segue o esquema descrito em Leiva et al. (2008). Inicialmente geramos amostras da distribuição log-BSG com núcleo t_{ν_a} , sendo t_{ν_a} o "núcleo verdadeiro" e estimamos os parâmetros da distribuição assumindo que as amostras foram geradas utilizando a distribuição log-BSG com núcleo t_{ν_b} , sendo t_{ν_b} o "núcleo assumido", com $\nu_b = \nu_a$ ou $\nu_b \neq \nu_a$. A ideia é verificar o quanto o erro na especificação do núcleo interfere nas estimativas.

Geramos 10.000 réplicas de Monte Carlo com tamanho amostral $n = 20$. Para as taxas intervalares, utilizamos 10.000 réplicas de Monte Carlo e 1.000 réplicas *bootstrap*. A reamostragem *bootstrap* foi realizada parametricamente. Os valores assumidos para o parâmetro de interesse foram $\alpha = 0, 1$ e $0, 5$, já para os parâmetros de incômodo, sem perda de generalidade, fixamos valores iguais a um, isto é, $\gamma_s = 1 \forall s$, e as covariáveis são realizações independentes de uma variável aleatória uniforme com valores no intervalo $(0, 1)$.

Para maximizar as funções, utilizamos o pacote *maximize* e as funções **MaxBFGS** e **MaxSQP**. Nesta situação, quando utilizamos o método numérico SQP, impomos a restrição de que $\ell_{\hat{\gamma}}^{(s)} = 0$, para encontrarmos as estimativas restritas do vetor $\hat{\gamma}_\alpha$. Utilizamos como valores iniciais as estimativas de máxima verossimilhança do modelo log-BS sem censura.

Na Tabela 21, apresentamos as estimativas pontuais para o parâmetro α , considerando valores fixos para os graus de liberdade, isto é, $\nu_a, \nu_b = 4, 8$ e 50 (representando alta, média e baixa curtose, respectivamente) e dois parâmetros de perturbação ($p = 2$). Como esperado, notamos que quando o grau de liberdade verdadeiro é igual ao grau de liberdade assumido, isto é, $\nu_a = \nu_b$, as estimativas no geral apresentam melhores desempenhos quando comparadas com as estimativas dos cenários em que $\nu_a \neq \nu_b$. Por exemplo, quando $\alpha = 0, 1$ e $\nu_a = \nu_b = 50$, os módulos dos vieses relativos dos estimadores $\hat{\alpha}_p$, $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$ são, respectivamente, 6,3046%, 1,1387% e 1,2306%, entretanto, quando $\alpha = 0, 1$, $\nu_a = 50$ e $\nu_b = 4$, os vieses relativos dos estimadores $\hat{\alpha}_p$, $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$ são, em módulo, respectivamente, iguais a 21,4064%, 16,2266% e 17,0836%. Quando $\nu_a > \nu_b$ observamos que os estimadores $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$ corrigem melhor as

estimativas, focaremos mais uma vez nos vieses relativos. Por exemplo, considerando $\alpha = 0,5$, $\nu_a = 50$ e $\nu_b = 8$, os vieses relativos dos estimadores $\hat{\alpha}_p$, $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$ são, respectivamente, 14,1689%, 8,7566% e 9,3139%. Porém, quando $\nu_a < \nu_b$, os ajustes não melhoram as estimativas, isto é, o estimador baseado na função de verossimilhança perfilada ($\hat{\alpha}_p$) apresenta desempenho melhor quando comparado com os estimadores baseados nas funções de verossimilhanças perfiladas ajustadas ($\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$). Por exemplo, para $\alpha = 0,1$, $\nu_a = 4$ e $\nu_b = 50$, temos, respectivamente, os seguintes vieses relativos, 24,4013%, 31,2474% e 31,3379%.

Nas Tabelas 22, 23 e 24 apresentamos as taxas de coberturas dos intervalos de confiança do tipo assintótico e *bootstrap* percentil para o parâmetro α com níveis nominais de 90%, 95% e 99% e $n = 20$. Observamos que quando $\nu_a = \nu_b$ o intervalo ICA apresenta coberturas empíricas mais próximas dos verdadeiros níveis nominais pré-estabelecido, com exceção do cenário em que o nível nominal é igual a 99% e $\nu_a = \nu_b = 4$. Por exemplo, considerando o nível nominal igual a 99%, $\alpha = 0,5$ e $\nu_a = \nu_b = 4$, temos as seguintes coberturas empíricas: 93,67% e 94,58%, respectivamente. Quando $\nu_a > \nu_b$ o intervalo ICA apresenta cobertura maior que o intervalo ICP, porém, ambos intervalos apresentam coberturas mais distantes dos níveis nominais pré-estabelecidos. A exceção neste caso se aplica ao cenário em que o nível nominal igual a 99%, $\nu_a = \{8, 50\}$ e $\nu_b = 4$. Por exemplo, considerando o nível nominal igual a 99%, $\alpha = 0,1$, $\nu_a = 50$ e $\nu_b = 4$, temos as seguintes taxas de cobertura, respectivamente, 81,54% e 85,02%. Observamos que para todos os níveis nominais, quando $\nu_a < \nu_b$ e este grau de liberdade assumido é bem próximo ao grau de liberdade verdadeiro, os intervalos apresentam coberturas bem próximas aos níveis nominais pré-estabelecidos. Destacamos que neste caso, só existe apenas um cenário, isto é, quando $\nu_a = 4$ e $\nu_b = 8$. Por exemplo, quando o nível nominal é igual a 99%, $\alpha = 0,1$, $\nu_a = 4$ e $\nu_b = 8$, temos, as seguintes seguintes taxas de cobertura, 96,88% e 96,32%, respectivamente.

As Tabelas 25 e 26 apresentam as taxas de rejeição nulas dos testes RV_p , RV_{BN_1} e RV_{CR} , com níveis nominais de 10%, 5% e 1% e $n = 20$. Consideramos duas hipóteses nulas distintas, a saber: $H_0 : \alpha = 0,1$ e $H_0 : \alpha = 0,5$, a serem testadas contra uma alternativa bilateral. Na Tabela 25, notamos que, quando $\nu_a = \nu_b$, o teste RV_p é liberal, isto é, apresenta taxas de rejeição muito acima dos níveis nominais considerados. Por exemplo, para $\alpha = 0,1$, $\nu_a = \nu_b = 4$ e nível nominal igual a 10%, o tamanho dos testes RV_p , RV_{BN_1} e RV_{CR} são iguais a 13,17%, 10,82% e 10,54%, respectivamente. Quando $\nu_a \geq \nu_b$, os testes baseados nas aproximações apresentam melhores desempenhos, como, por exemplo, para $\alpha = 0,5$, $\nu_a = 8$, $\nu_b = 4$ e nível nominal igual a 5%, temos, respectivamente, 11,54%, 5,79% e 5,92%.

Observamos que quando $\nu_a = 50$ e $\nu_b = 4$ todos os testes são extremamente liberais. E quando $\nu_a < \nu_b$, todos os testes são liberais, entretanto, neste cenário os testes RV_{BN_1} e RV_{CR} apresentam taxas de rejeição maiores que o teste RV_p . Por exemplo, para $\alpha = 0,5$, $\nu_a = 4$, $\nu_b = 50$ e nível nominal igual a 10%, temos as respectivas taxas nulas, 39,37%, 44,84% e 44,84%.

As Tabelas 27, 28 e 29 apresentam as taxas de rejeição não nulas empíricas (poder) dos testes RV_p , RV_{BN_1} e RV_{CR} . As taxas de rejeição foram obtidas levando em consideração a hipótese alternativa $H_1 : \alpha \neq \alpha_0$, em que pequenas variações nos valores de α_0 foram consideradas (0,12 a 0,28) com níveis nominais de 10%, 5% e 1%, $n = 20$, dois parâmetros de perturbação ($p = 2$) e valores fixos para os graus de liberdade ($\nu_a, \nu_b = 4, 8$ e 50). Sob a hipótese nulas $\alpha = 0,1$. Para as simulações do poder, utilizamos valores exatos ao invés dos assintóticos, dessa maneira fazemos com que os testes tenham o mesmo tamanho. Inicialmente notamos que os testes baseados nas aproximações (RV_{BN_1} e RV_{CR}) são mais poderosos, fornecendo taxas de rejeição crescentes no sentido do distanciamento da hipótese nula. Por exemplo, considerando $\nu_a = \nu_b = 8$, sob hipótese alternativa $\alpha = 0,20$ e nível nominal igual a 10%, o poder dos testes RV_p , RV_{BN_1} e RV_{CR} são, respectivamente, 93,41%, 96,34% e 96,31%.

Os resultados numéricos mostraram que os estimadores e testes vinculados as funções de verossimilhanças perfiladas ajustadas apresentaram melhores desempenhos do que o estimador e teste baseado na função de verossimilhança perfilada original, apesar de que, em alguns cenários esses estimadores e testes não sobressaíram sua contrapartida. Portanto, pontuamos algumas observações. Quando $\nu_a = \nu_b = 4$, o estimador $\hat{\alpha}_{CR}$ apresenta melhor desempenho do que os estimadores $\hat{\alpha}_p$, $\hat{\alpha}_{BN}$. Entretanto, quando $\nu_a = \nu_b = 8$ e 50, o estimador $\hat{\alpha}_{BN}$ apresenta melhor desempenho do que os estimadores $\hat{\alpha}_p$ e $\hat{\alpha}_{CR}$. Em relação aos testes, quando $\nu_a = \nu_b = 4$, o teste RV_{CR} apresenta desempenho melhor do que os testes RV_p e RV_{BN_1} . E quando $\nu_a = \nu_b = 8$ e 50, o teste RV_{BN_1} apresenta desempenho melhor do que os testes RV_p e RV_{CR} . Nos cenários em que $\nu_a > \nu_b$, o estimador $\hat{\alpha}_{BN}$ e o teste RV_{BN_1} apresentam melhores desempenhos do que os demais estimadores e testes. Entretanto, quando $\nu_a < \nu_b$, o estimador $\hat{\alpha}_p$ e teste RV_p sobressai suas contrapartidas.

Tabela 21 – Medidas descritivas de diferentes estimadores de α , modelo log-BS- t , dados completos, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$.

$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$																			
núcleo verdadeiro																			
α	núcleo assumido	estimador	t_4				t_8				t_{50}								
			média	variância	viés	EQM	VR(%)	média	variância	viés	EQM	VR(%)	média	variância	viés	EQM	VR(%)		
t_4		$\hat{\alpha}_p$	0,0950	0,0004	-0,0050	0,0005	4,9620	0,0852	0,0003	-0,0148	0,0005	14,8230	0,0786	0,0002	-0,0214	0,0007	21,4064		
		$\hat{\alpha}_{BN}$	0,1013	0,0005	0,0013	0,0005	1,2668	0,0908	0,0003	-0,0092	0,0004	9,2412	0,0838	0,0002	-0,0162	0,0005	16,2266		
		$\hat{\alpha}_{CR}$	0,1010	0,0005	0,0010	0,0005	1,0081	0,0901	0,0003	-0,0099	0,0004	9,8575	0,0829	0,0002	-0,0171	0,0005	17,0836		
t_8		$\hat{\alpha}_p$	0,1075	0,0006	0,0075	0,0007	7,5430	0,0944	0,0003	-0,0056	0,0004	5,6032	0,0860	0,0002	-0,0140	0,0004	14,0496		
		$\hat{\alpha}_{BN}$	0,1139	0,0007	0,0139	0,0009	13,8902	0,1000	0,0004	-0,0000	0,0004	0,0053	0,0911	0,0003	-0,0089	0,0003	8,9226		
		$\hat{\alpha}_{CR}$	0,1141	0,0007	0,0141	0,0009	14,0731	0,0998	0,0004	-0,0002	0,0004	0,2399	0,0906	0,0002	-0,0094	0,0003	9,3784		
t_{50}		$\hat{\alpha}_p$	0,1244	0,0012	0,0244	0,0018	24,4013	0,1050	0,0005	0,0050	0,0005	5,0350	0,0937	0,0003	-0,0063	0,0003	6,3046		
		$\hat{\alpha}_{BN}$	0,1312	0,0013	0,0312	0,0023	31,2474	0,1108	0,0005	0,0108	0,0006	10,8196	0,0989	0,0003	-0,0011	0,0003	1,1387		
		$\hat{\alpha}_{CR}$	0,1313	0,0014	0,0313	0,0023	31,3379	0,1108	0,0005	0,0108	0,0006	10,7826	0,0988	0,0003	-0,0012	0,0003	1,2306		
t_4		$\hat{\alpha}_p$	0,4744	0,0111	-0,0256	0,0117	5,1100	0,4253	0,0071	-0,0747	0,0127	14,9479	0,3925	0,0052	-0,1075	0,0167	21,5026		
		$\hat{\alpha}_{BN}$	0,5071	0,0128	0,0071	0,0129	1,4115	0,4546	0,0083	-0,0454	0,0103	9,0841	0,4196	0,0060	-0,0804	0,0125	16,0768		
		$\hat{\alpha}_{CR}$	0,5052	0,0126	0,0052	0,0126	1,0477	0,4508	0,0079	-0,0492	0,0103	9,8344	0,4147	0,0056	-0,0853	0,0129	17,0550		
t_8		$\hat{\alpha}_p$	0,5367	0,0149	0,0367	0,0163	7,3301	0,4711	0,0083	-0,0289	0,0091	5,7782	0,4292	0,0056	-0,0708	0,0106	14,1689		
		$\hat{\alpha}_{BN}$	0,5703	0,0170	0,0703	0,0220	14,0599	0,5008	0,0095	0,0008	0,0095	0,1607	0,4562	0,0065	-0,0438	0,0084	8,7566		
		$\hat{\alpha}_{CR}$	0,5707	0,0174	0,0707	0,0224	14,1314	0,4990	0,0094	-0,0010	0,0094	0,1959	0,4534	0,0063	-0,0466	0,0084	9,3139		
t_{50}		$\hat{\alpha}_p$	0,6142	0,0258	0,1142	0,0388	22,8328	0,5226	0,0110	0,0226	0,0115	4,5208	0,4673	0,0064	-0,0327	0,0074	6,5338		
		$\hat{\alpha}_{BN}$	0,6517	0,0297	0,1517	0,0527	30,3462	0,5538	0,0125	0,0538	0,0154	10,7516	0,4948	0,0072	-0,0052	0,0073	1,0358		
		$\hat{\alpha}_{CR}$	0,6515	0,0300	0,1515	0,0529	30,3100	0,5532	0,0125	0,0532	0,0154	10,6437	0,4941	0,0072	-0,0059	0,0072	1,1759		

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 22 – Cobertura dos intervalos de confiança (90%) para diferentes valores de α , modelo log-BS- t , dados completos, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$.

α	núcleo assumido	$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$					
		núcleo verdadeiro					
		t_4		t_8		t_{50}	
		ICA	ICP	ICA	ICP	ICA	ICP
0,1	t_4	83,07	80,72	72,70	69,19	58,69	55,48
	t_8	85,49	84,22	83,07	78,70	72,70	66,58
	t_{50}	67,16	73,15	82,86	82,19	80,79	74,07
0,5	t_4	82,88	80,29	72,47	68,86	58,45	55,04
	t_8	85,21	83,96	82,78	78,32	72,42	65,99
	t_{50}	69,31	76,12	82,96	82,19	81,28	74,62

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 23 – Cobertura dos intervalos de confiança (95%) para diferentes valores de α , modelo log-BS- t , dados completos, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$.

α	núcleo assumido	$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$					
		núcleo verdadeiro					
		t_4		t_8		t_{50}	
		ICA	ICP	ICA	ICP	ICA	ICP
0,1	t_4	88,23	87,33	79,59	79,09	67,91	67,77
	t_8	91,55	90,38	88,20	85,99	79,81	76,42
	t_{50}	77,21	81,24	89,56	88,61	86,36	81,22
0,5	t_4	88,00	87,16	79,33	78,70	67,55	67,47
	t_8	91,37	90,28	88,00	85,70	79,49	76,06
	t_{50}	79,43	84,63	89,74	88,47	86,77	81,82

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 24 – Cobertura dos intervalos de confiança (99%) para diferentes valores de α , modelo log-BS- t , dados completos, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$.

		$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$					
		núcleo verdadeiro					
α	núcleo assumido	t_4		t_8		t_{50}	
		ICA	ICP	ICA	ICP	ICA	ICP
0,1	t_4	93,80	94,66	89,42	91,21	81,54	85,02
	t_8	96,88	96,32	93,99	93,79	88,84	88,78
	t_{50}	91,00	91,94	96,18	94,90	92,81	90,35
0,5	t_4	93,67	94,58	89,19	91,01	81,33	84,87
	t_8	96,76	96,31	93,91	93,55	88,55	88,52
	t_{50}	92,84	93,66	95,95	94,73	92,76	90,30

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 25 – Taxas de rejeição nulas, inferência sobre α , modelo log-BS- t , dados completos, $\alpha = 0, 1$, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$.

$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$									
núcleo verdadeiro									
núcleo assumido	nível nominal	t_4			t_8			t_{50}	
		RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}
t_4	10%	13,17	10,82	10,54	19,06	11,52	11,82	29,14	17,56
	5%	7,13	5,43	5,20	11,36	5,87	5,96	18,10	9,92
	1%	1,69	1,09	1,01	2,88	1,20	1,22	5,60	2,45
t_8	10%	18,29	20,52	20,82	13,22	10,22	10,30	18,77	11,18
	5%	11,42	13,57	13,71	7,05	4,91	4,92	11,33	5,87
	1%	3,87	5,20	5,23	1,55	1,02	1,01	3,11	1,31
t_{50}	10%	40,42	45,54	45,53	19,49	21,55	21,55	13,77	10,41
	5%	32,96	38,10	38,12	12,16	14,47	14,51	7,80	5,11
	1%	21,49	25,73	25,82	4,74	6,12	6,15	2,06	1,03

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 26 – Taxas de rejeição nulas, inferência sobre α , modelo log-BS- t , dados completos, $\alpha = 0, 5, \gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$.

$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$									
núcleo verdadeiro									
núcleo assumido	nível nominal	t_4			t_8			t_{50}	
		RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}
t_4	10%	13,17	10,85	10,64	19,22	11,49	11,72	29,52	17,33
	5%	7,20	5,46	5,21	11,54	5,79	5,92	18,28	9,85
	1%	1,78	1,09	1,03	2,95	1,19	1,21	5,64	2,41
t_8	10%	18,60	20,62	20,84	13,37	10,28	10,33	18,96	11,14
	5%	11,46	13,77	13,96	7,21	5,05	4,96	11,47	5,86
	1%	3,94	5,41	5,37	1,56	1,03	0,98	3,17	1,34
t_{50}	10%	39,37	44,84	44,84	19,05	21,38	21,29	14,02	10,37
	5%	31,86	37,45	37,34	11,83	14,23	14,23	7,91	5,07
	1%	20,37	24,79	24,86	4,43	5,88	5,86	2,11	1,02

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 27 – Taxas de rejeição não nulas, inferência sobre α , modelo log-BS- t , dados completos, $\alpha = 0, 1, \gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$.

		$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 t_2$									
		núcleo verdadeiro = t_4									
núcleo assumido	α_0	nível nominal = 10%					nível nominal = 5%				
		RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}	RV_p
t_4	0,12	13,54	21,71	21,04	7,62	13,94	13,83	1,82	4,47	4,43	
	0,14	32,55	45,44	44,68	22,56	34,59	34,39	8,63	16,83	16,91	
	0,16	56,12	68,53	67,97	44,90	58,28	58,06	23,28	36,79	37,30	
	0,18	74,96	83,62	83,62	65,29	76,30	76,45	43,53	57,32	58,03	
	0,20	87,66	92,32	92,32	81,03	88,16	88,32	62,42	74,28	75,11	
	0,22	93,45	95,07	95,18	89,45	92,75	92,95	75,66	83,96	84,82	
	0,24	96,73	95,89	95,90	94,34	94,58	94,76	85,25	89,19	89,70	
	0,26	98,44	95,48	95,53	97,13	94,82	94,90	91,57	91,64	92,04	
t_8	0,28	99,34	94,31	94,29	98,76	93,98	93,98	95,53	92,43	92,65	
	0,12	27,48	30,53	30,41	18,04	19,83	19,80	6,67	6,93	6,95	
	0,14	53,71	57,18	57,06	41,39	44,30	44,14	22,02	22,59	22,65	
	0,16	75,93	78,35	78,29	65,39	67,92	67,64	44,43	45,01	45,13	
	0,18	88,73	90,28	90,27	82,30	84,14	84,00	65,67	66,23	66,36	
	0,20	95,06	95,81	95,84	92,04	92,87	92,72	81,41	81,87	81,86	
	0,22	97,94	98,23	98,21	96,08	96,44	96,48	89,94	90,22	90,24	
	0,24	99,01	99,10	99,04	98,24	98,27	98,28	94,64	94,64	94,60	
t_{50}	0,26	99,60	99,30	99,31	99,18	98,89	98,90	97,40	97,11	97,18	
	0,28	99,90	99,28	99,30	99,73	99,11	99,13	98,91	98,29	98,28	
	0,12	27,30	27,37	27,29	16,11	16,14	16,11	3,95	3,94	3,92	
	0,14	51,27	51,35	51,16	35,54	35,74	35,42	11,90	11,96	11,76	
	0,16	72,37	72,48	72,30	57,88	58,05	57,80	26,29	26,38	26,04	
	0,18	86,82	86,94	86,75	76,40	76,58	76,30	45,62	45,85	45,19	
	0,20	94,08	94,16	94,03	87,87	87,98	87,80	63,19	63,45	62,82	
	0,22	97,23	97,25	97,22	94,04	94,09	93,99	76,52	76,75	76,21	
t_{50}	0,24	98,75	98,72	98,72	96,92	96,91	96,86	86,00	86,12	85,74	
	0,26	99,49	99,50	99,49	98,65	98,65	98,65	92,26	92,40	92,06	
	0,28	99,85	99,84	99,84	99,46	99,47	99,44	95,44	95,51	95,36	

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 28 – Taxas de rejeição não nulas, inferência sobre α , modelo log-BS- t , dados completos, $\alpha = 0, 1, \gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$.

núcleo assumido	α_0	$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$									
		núcleo verdadeiro = t_s									
		nível nominal = 10%					nível nominal = 5%				
		RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}	nível nominal = 1%
t_4	0, 12	3, 81	9, 37	8, 36	1, 46	4, 52	3, 82	0, 18	0, 93	0, 63	
	0, 14	11, 94	27, 48	25, 60	6, 49	17, 96	16, 25	1, 37	6, 16	4, 79	
	0, 16	29, 87	51, 59	50, 07	19, 98	39, 32	37, 50	6, 85	19, 39	17, 11	
	0, 18	53, 61	73, 21	72, 12	41, 73	62, 82	61, 40	19, 60	40, 79	37, 75	
	0, 20	72, 11	85, 99	85, 49	60, 95	78, 99	78, 14	37, 69	59, 65	57, 20	
	0, 22	84, 35	92, 86	92, 75	76, 55	88, 23	87, 83	56, 76	74, 98	73, 78	
	0, 24	91, 75	95, 01	95, 09	87, 08	92, 55	92, 44	71, 78	84, 65	83, 79	
	0, 26	95, 81	96, 19	96, 12	92, 54	94, 86	94, 88	82, 05	89, 66	89, 20	
t_8	0, 28	97, 97	95, 21	95, 22	96, 20	94, 65	94, 64	89, 53	91, 81	91, 64	
	0, 12	15, 78	25, 83	25, 31	9, 12	17, 64	17, 15	2, 58	6, 18	5, 97	
	0, 14	40, 26	54, 21	53, 78	30, 14	43, 60	43, 38	13, 52	24, 66	24, 03	
	0, 16	66, 11	77, 50	77, 09	56, 18	69, 47	68, 94	33, 90	49, 41	48, 96	
	0, 18	84, 04	90, 84	90, 72	77, 36	85, 99	85, 92	58, 74	72, 36	71, 80	
	0, 20	93, 41	96, 34	96, 31	89, 46	94, 38	94, 32	76, 80	86, 08	85, 96	
	0, 22	97, 44	98, 63	98, 62	95, 37	97, 77	97, 78	88, 01	93, 60	93, 53	
	0, 24	98, 69	99, 29	99, 31	97, 90	98, 89	98, 84	93, 98	97, 16	97, 28	
t_{50}	0, 26	99, 55	99, 57	99, 60	99, 14	99, 43	99, 43	97, 14	98, 61	98, 62	
	0, 28	99, 79	99, 53	99, 52	99, 58	99, 46	99, 46	98, 68	99, 02	99, 00	
	0, 12	32, 38	36, 06	35, 98	21, 52	23, 83	23, 83	8, 54	9, 12	8, 95	
	0, 14	61, 35	65, 78	65, 58	49, 28	52, 40	52, 34	28, 15	29, 46	29, 05	
	0, 16	81, 96	84, 69	84, 59	73, 38	75, 87	75, 75	53, 51	55, 24	54, 61	
	0, 18	93, 15	94, 39	94, 37	88, 76	90, 01	89, 95	75, 69	76, 80	76, 38	
	0, 20	97, 45	97, 91	97, 87	95, 62	96, 21	96, 19	88, 55	89, 23	89, 01	
	0, 22	99, 11	99, 35	99, 35	98, 17	98, 47	98, 48	94, 82	95, 22	95, 09	
t_{50}	0, 24	99, 60	99, 75	99, 73	99, 14	99, 31	99, 31	97, 61	97, 77	97, 72	
	0, 26	99, 89	99, 91	99, 91	99, 71	99, 79	99, 78	99, 10	99, 20	99, 15	
	0, 28	99, 98	99, 97	99, 98	99, 91	99, 90	99, 92	99, 56	99, 60	99, 59	

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 29 – Taxas de rejeição não nulas, inferência sobre α , modelo log-BS- t , dados completos, $\alpha = 0, 1, \gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$.

núcleo assumido	α_0	$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$									
		núcleo verdadeiro = t_{50}									
		nível nominal = 10%					nível nominal = 5%				
		RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{CR}	RV_p
t_4	0,12	1,88	2,82	2,34	0,60	0,91	0,84	0,08	0,11	0,08	
	0,14	2,14	9,75	7,69	0,86	4,85	3,48	0,10	0,96	0,54	
	0,16	10,46	28,12	24,69	5,18	18,14	15,36	0,97	5,74	4,15	
	0,18	29,03	52,57	49,60	18,99	40,45	37,02	6,40	19,73	16,33	
	0,20	50,09	71,57	69,95	38,20	61,45	59,02	17,43	38,92	34,79	
	0,22	67,37	83,92	82,80	56,00	76,03	74,55	33,14	56,35	52,67	
	0,24	80,20	90,69	90,18	72,29	85,43	84,68	51,32	71,62	69,22	
	0,26	89,52	94,31	94,08	83,43	91,38	91,05	66,77	81,76	80,03	
t_8	0,28	94,50	94,97	94,89	90,58	93,40	93,34	78,04	87,35	86,67	
	0,12	3,89	10,70	9,74	1,44	5,12	4,57	0,16	0,81	0,64	
	0,14	16,68	35,09	33,44	9,65	24,08	22,93	2,12	8,79	7,82	
	0,16	41,96	63,84	62,56	29,87	52,26	50,80	12,29	28,14	26,74	
	0,18	67,40	83,42	82,65	56,59	75,55	74,80	33,14	55,09	53,52	
	0,20	83,75	92,73	92,30	76,64	88,40	88,16	56,22	74,96	74,33	
	0,22	92,31	97,13	97,01	87,95	94,88	94,69	73,42	86,81	86,54	
	0,24	96,48	98,71	98,72	94,15	97,53	97,61	84,93	93,52	93,32	
t_{50}	0,26	98,73	99,58	99,59	97,59	99,18	99,20	92,84	97,23	97,22	
	0,28	99,49	99,71	99,73	98,99	99,56	99,58	96,59	98,75	98,67	
	0,12	18,13	29,20	28,99	10,42	20,43	20,23	2,92	8,06	7,97	
	0,14	49,25	63,47	63,32	38,22	53,83	53,62	19,95	34,44	34,27	
	0,16	76,29	85,16	85,02	67,43	79,45	79,35	47,99	63,95	63,94	
	0,18	90,99	95,30	95,25	85,90	92,81	92,71	73,19	83,96	83,93	
	0,20	96,54	98,28	98,28	94,40	97,16	97,18	87,62	93,33	93,28	
	0,22	98,77	99,35	99,33	97,91	98,98	98,96	94,51	97,44	97,41	
t_{50}	0,24	99,66	99,88	99,88	99,16	99,72	99,72	97,71	98,95	98,95	
	0,26	99,87	99,93	99,93	99,77	99,89	99,89	99,20	99,72	99,71	
	0,28	99,93	99,97	99,97	99,89	99,94	99,94	99,77	99,88	99,88	

Fonte: Autoria própria (2021)

4.3.2 Dados censurados

Aqui, o estudo tem finalidade análoga à análise realizada para dados completos, entretanto, consideramos a censura tipo II. A geração dos números pseudo-aleatórios da distribuição log-BS- t foi obtida a partir da expressão dada em (2.5), porém, $Z \sim t_\nu$. Geramos 10.000 réplicas de Monte Carlo com tamanho amostral $n = 20$, níveis de censura 10%, 30% e 50% e $\nu = 4, 8$ e 50. Os verdadeiros valores dos parâmetros de regressão (parâmetros de perturbação) e para o parâmetro de interesse, foram tomados, respectivamente, como: $\gamma_s = 1 \forall s$ e $\alpha = 0, 1$ e $0, 5$. As covariáveis são realizações independentes de uma variável aleatória uniforme no intervalo $(0, 1)$.

Para maximizar as funções utilizamos o pacote *maximize* e as funções **MaxBFGS** e **MaxSQP**. No método SQP, impomos a restrição de que $\ell_\gamma^{(s)} = 0$ com a finalidade de encontrarmos as estimativas restritas do vetor $\hat{\gamma}_\alpha$. Utilizamos como valores iniciais as estimativas de máxima verossimilhança do modelo log-BS sem censura.

Na Tabela 30, apresentamos as estimativas pontuais para $\alpha = 0, 1$ e $0, 5$, considerando fixo os graus de liberdade, isto é, $\nu = \{4, 8, 50\}$ (representando alta, média e baixa curtose, respectivamente) e diferentes porcentagens de censura (10%, 30% e 50%). No geral, tanto para $\alpha = 0, 1$ como para $\alpha = 0, 5$, notamos que quando o valor de ν aumenta, os erros quadráticos médios diminuem. Por exemplo, quando $\alpha = 0, 1$, $\nu = 4$ e a porcentagem de censura é igual a 10%, temos, que o EQM dos estimadores $\hat{\alpha}_p$, $\hat{\alpha}_{BN}$, $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$ é igual a 0,0005, já para $\nu = 50$, o EQM correspondente aos estimadores é igual a 0,0003. Porém, à medida que o valor de ν aumenta, os vieses relativos desses estimadores também aumentam. Por exemplo, considerando o estimador $\hat{\alpha}_p$, $\nu = 50$ e porcentagens de censura iguais a 10% e 50%, temos, respectivamente, 7,0669% e 12,1017%. Observamos que os estimadores $\hat{\alpha}_{BN}$, $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$ apresentam melhores vieses relativos do que o estimador $\hat{\alpha}_p$. Por exemplo, quando $\alpha = 0, 5$, $\nu = 4$ e a porcentagem de censura é igual a 30%, os vieses relativos $\hat{\alpha}_p$, $\hat{\alpha}_{BN}$, $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$ são, respectivamente, 7,9147%, 1,1047%, 1,0892% e 1,5680%. Quando aumentamos a porcentagem da censura observamos que os vieses relativos dos estimadores aumentam também, entretanto, os estimadores $\hat{\alpha}_{BN}$, $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$ apresentam melhores desempenhos quando comparados com o estimador $\hat{\alpha}_p$. Por exemplo, quando $\alpha = 0, 1$, $\nu = 8$ e a porcentagem de censura é igual a 10%, os vieses relativos dos estimadores $\hat{\alpha}_p$, $\hat{\alpha}_{BN}$, $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$ são, respectivamente, 6,3495%, 0,7885%, 0,4033% e 0,2798%, quando aumentamos a porcentagem de censura para 50%, os vieses relativos desses estimadores são, respectivamente, 10,8987%,

0,8445%, 0,3489% e 3,7821%.

Na Tabela 31, apresentamos as coberturas empíricas dos intervalos ICA e ICP para o parâmetros α ao nível nominal igual a 95%, níveis de censura iguais a 10%, 30% e 50% e $\nu = 4, 8$ e 50. No geral, notamos que o intervalo ICA apresenta cobertura maior que o intervalo ICP. Por exemplo, considerando $\alpha = 0,1$, $\nu = 8$ e 50% de censura, temos as seguintes taxas, 81,04% e 77,54%, respectivamente. Observamos também que à medida que a porcentagem de censura aumenta, as taxas de cobertura dos intervalos diminuem. Por exemplo, para $\alpha = 0,5$, $\nu = 4$ e intervalo ICA, temos, as seguintes taxas de cobertura conforme aumentamos a porcentagem de censura, 88,97%, 85,46% e 81,89%, respectivamente. O mesmo acontece quando aumentamos o valor de ν . Para exemplificar, consideramos $\alpha = 0,5$, 10% de censura e o intervalo ICP, portanto, temos as seguintes taxas de cobertura conforme ν aumenta, 86,35%, 83,73% e 80,05%, respectivamente.

A Tabela 32 contém as taxas de rejeição dos testes sob as hipóteses nulas ($H_0 : \alpha = 0,1$ e $H_0 : \alpha = 0,5$) baseados nas estatísticas RV_p , RV_{BN_1} , RV_{BN_2} e RV_{CR} com níveis nominais iguais a 10%, 5% e 1% e graus de liberdades iguais a 4, 8 e 50. Observamos que o teste RV_p apresenta maiores taxas de rejeição nulas, considerando todos os cenários. Por exemplo, para $\nu = 4$, $\alpha = 0,1$, porcentagem de censura igual a 30% e nível nominal igual a 10%, temos as seguintes taxas de rejeição, 14,38%, 10,92%, 10,68 e 11,20% para os testes RV_p , RV_{BN_1} , RV_{BN_2} e RV_{CR} , respectivamente. À medida que aumentamos a porcentagem da censura, as taxas dos testes também aumentam, como, por exemplo, para $\nu = 8$, $\alpha = 0,5$ e nível nominal igual a 10%, temos as seguintes taxas de rejeição para o teste RV_p conforme aumentamos a porcentagem de censura, 13,95%, 15,89% e 20,86%, respectivamente. Entretanto, destacamos que, apesar desses aumentos nas taxas, os testes RV_{BN_1} , RV_{BN_2} e RV_{CR} apresentaram um desempenho razoavelmente melhor que o teste RV_p , por exemplo, considerando $\nu = 8$, $\alpha = 0,5$, porcentagem de censura igual a 50% e nível nominal igual a 10%, temos que as taxas de rejeição para os testes RV_p , RV_{BN_1} , RV_{BN_2} e RV_{CR} são, respectivamente, 20,86%, 16,41%, 14,03% e 14,26%.

Na Tabela 33, apresentamos o poder dos testes RV_p , RV_{BN_1} , RV_{BN_2} e RV_{CR} , com níveis nominais de 10% e 5%, níveis de censuras iguais a 10%, 30% e 50%, graus de liberdades iguais a 4, 8 e 50, e $n = 20$. Consideramos o teste $H_0 : \alpha = \alpha_0$ contra $H_0 : \alpha \neq \alpha_0$, sob a hipótese nula $\alpha = 0,1$ e sob a hipótese alternativa variamos α_0 de 0,12 a 0,28 com o intuito de observarmos os impactos causados nas taxas do poder. Para que os testes tenham o mesmo tamanho, utilizamos os valores críticos exatos ao invés dos assintóticos. Notamos

que, quando aumentamos o grau de liberdade, as taxas de rejeição também aumentam, por exemplo, considerando o teste RV_{BN_1} , $\alpha = 0,16$, porcentagem de censura igual a 10% e nível nominal igual a 10%, temos as seguintes taxas de rejeição conforme aumentamos os valores de ν , 64,54%, 72,22% e 80,16%, respectivamente. Por outro lado, quando aumentamos a censura, os testes são menos poderosos, por exemplo, para o teste RV_p , $\alpha = 0,14$, $\nu = 8$ e nível nominal igual a 5%, temos que as taxas conforme aumentamos a porcentagem de censura são, 26,23%, 18,82% e 12,05%, respectivamente.

Em síntese, notamos que os estimadores $\hat{\alpha}_{BN}$, $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$ apresentam desempenhos superiores ao estimador $\hat{\alpha}_p$, tanto nos cenários em que aumentamos os graus de liberdade, como, nos cenários que aumentamos a porcentagem de censura. Com relação aos testes, os testes da razão de verossimilhanças perfilados ajustados (RV_{BN_1} , RV_{BN_2} e RV_{CR}) apresentam desempenhos superiores ao teste RV_p .

Tabela 30 – Medidas descritivas de diferentes estimadores de α , modelo log-BS- t , dados censurados tipo II, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$.

		$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$															
		núcleo															
α	censura (%)	estimador	t_4				t_8				t_{50}						
			média	variância	viés	EQM	VR(%)	média	variância	viés	EQM	VR(%)	média	variância	viés	EQM	VR(%)
0,1	10	$\hat{\alpha}_p$	0,0941	0,0005	-0,0059	0,0005	5,9062	0,0937	0,0004	-0,0063	0,0004	6,3495	0,0929	0,0003	-0,0071	0,0003	7,0669
		$\hat{\alpha}_{BN}$	0,1003	0,0005	0,0003	0,0005	0,2856	0,0992	0,0004	-0,0008	0,0004	0,7885	0,0981	0,0003	-0,0019	0,0003	1,9449
		$\hat{\tilde{\alpha}}_{BN}$	0,1007	0,0005	0,0007	0,0005	0,6535	0,0996	0,0004	-0,0004	0,0004	0,4033	0,0986	0,0003	-0,0014	0,0003	1,3922
		$\hat{\alpha}_{CR}$	0,1008	0,0005	0,0008	0,0005	0,8475	0,0997	0,0004	-0,0003	0,0004	0,2798	0,0986	0,0003	-0,0014	0,0003	1,3876
0,1	30	$\hat{\alpha}_p$	0,0929	0,0006	-0,0071	0,0006	7,0630	0,0921	0,0005	-0,0079	0,0005	7,8552	0,0914	0,0004	-0,0086	0,0004	8,5848
		$\hat{\alpha}_{BN}$	0,1004	0,0007	0,0004	0,0007	0,4223	0,0990	0,0005	-0,0010	0,0005	0,9954	0,0978	0,0004	-0,0022	0,0004	2,1952
		$\hat{\tilde{\alpha}}_{BN}$	0,1006	0,0007	0,0006	0,0007	0,5856	0,0994	0,0005	-0,0006	0,0005	0,6103	0,0987	0,0004	-0,0013	0,0004	1,3294
		$\hat{\alpha}_{CR}$	0,1001	0,0007	0,0001	0,0007	0,0938	0,0985	0,0005	-0,0015	0,0005	1,4943	0,0975	0,0004	-0,0025	0,0004	2,5402
0,5	50	$\hat{\alpha}_p$	0,0900	0,0008	-0,0100	0,0009	10,0038	0,0891	0,0006	-0,0109	0,0008	10,8987	0,0879	0,0005	-0,0121	0,0006	12,1017
		$\hat{\alpha}_{BN}$	0,1007	0,0010	0,0007	0,0010	0,7047	0,0992	0,0008	-0,0008	0,0008	0,8445	0,0973	0,0006	-0,0027	0,0006	2,7473
		$\hat{\tilde{\alpha}}_{BN}$	0,1009	0,0010	0,0009	0,0010	0,9153	0,0997	0,0008	-0,0003	0,0008	0,3489	0,0987	0,0006	-0,0013	0,0006	1,2808
		$\hat{\alpha}_{CR}$	0,0978	0,0009	-0,0022	0,0009	2,2052	0,0962	0,0007	-0,0038	0,0007	3,7821	0,0950	0,0006	-0,0050	0,0006	5,0114
0,5	10	$\hat{\alpha}_p$	0,4711	0,0117	-0,0289	0,0125	5,7760	0,4672	0,0092	-0,0328	0,0102	6,5650	0,4633	0,0073	-0,0367	0,0086	7,3449
		$\hat{\alpha}_{BN}$	0,5043	0,0136	0,0043	0,0136	0,8667	0,4970	0,0105	-0,0030	0,0105	0,6094	0,4904	0,0082	-0,0096	0,0083	1,9229
		$\hat{\tilde{\alpha}}_{BN}$	0,5071	0,0138	0,0071	0,0138	1,4203	0,5000	0,0107	-0,0000	0,0107	0,0100	0,4945	0,0084	-0,0055	0,0084	1,0925
		$\hat{\alpha}_{CR}$	0,5046	0,0135	0,0046	0,0135	0,9236	0,4988	0,0105	-0,0012	0,0105	0,2434	0,4943	0,0084	-0,0057	0,0084	1,1414
0,5	30	$\hat{\alpha}_p$	0,4604	0,0150	-0,0396	0,0165	7,9147	0,4570	0,0122	-0,0430	0,0141	8,6047	0,4540	0,0099	-0,0460	0,0120	9,2009
		$\hat{\alpha}_{BN}$	0,4945	0,0174	-0,0055	0,0175	1,1047	0,4880	0,0141	-0,0120	0,0142	2,3933	0,4828	0,0113	-0,0172	0,0115	3,4447
		$\hat{\tilde{\alpha}}_{BN}$	0,5054	0,0189	0,0054	0,0190	1,0892	0,4984	0,0151	-0,0016	0,0151	0,3149	0,4951	0,0121	-0,0049	0,0121	0,9826
		$\hat{\alpha}_{CR}$	0,5078	0,0187	0,0078	0,0187	1,5680	0,4999	0,0150	-0,0001	0,0150	0,0292	0,4944	0,0120	-0,0056	0,0120	1,1207
0,5	50	$\hat{\alpha}_p$	0,4477	0,0223	-0,0523	0,0250	10,4670	0,4421	0,0180	-0,0579	0,0213	11,5856	0,4375	0,0144	-0,0625	0,0183	12,4921
		$\hat{\alpha}_{BN}$	0,4863	0,0265	-0,0137	0,0266	2,7327	0,4775	0,0211	-0,0225	0,0216	4,4974	0,4701	0,0167	-0,0299	0,0176	5,9799
		$\hat{\tilde{\alpha}}_{BN}$	0,4896	0,0281	-0,0104	0,0282	2,0753	0,4890	0,0229	-0,0110	0,0231	2,2020	0,4900	0,0188	-0,0100	0,0189	1,9960
		$\hat{\alpha}_{CR}$	0,5100	0,0307	0,0100	0,0308	1,9994	0,4953	0,0236	-0,0047	0,0236	0,9479	0,4858	0,0184	-0,0142	0,0186	2,8498

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 31 – Cobertura dos intervalos de confiança (95%) para diferentes valores de α , modelo log-BS- t , dados censurados tipo II, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$.

núcleo	censura (%)	$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$			
		$\alpha = 0,1$		$\alpha = 0,5$	
		ICA	ICP	ICA	ICP
t_4	10	88,03	86,11	88,97	86,35
	30	85,28	84,17	85,46	83,06
	50	81,95	80,92	81,89	79,64
t_8	10	87,12	84,14	87,29	83,73
	30	85,76	82,92	84,85	80,97
	50	81,04	77,54	81,41	77,54
t_{50}	10	85,60	80,30	86,06	80,05
	30	84,41	78,13	83,23	76,97
	50	78,86	70,87	79,07	72,52

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 32 – Taxas de rejeição nulas, inferência sobre α , modelo log-BS- t , dados censurados tipo II, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$.

		$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$							
		t_4							
censura (%)	nível nominal	$\alpha = 0,1$				$\alpha = 0,5$			
		RV_p	RV_{BN_1}	RV_{BN_2}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{BN_2}	RV_{CR}
10	10%	13,58	10,74	10,68	10,56	13,62	10,91	10,56	10,42
	5%	7,18	5,58	5,23	5,16	7,49	5,56	5,40	5,25
	1%	1,64	1,06	1,02	0,99	1,92	1,28	1,07	1,09
30	10%	14,38	10,92	10,42	11,20	14,53	11,34	10,89	10,75
	5%	8,25	5,34	4,92	5,58	8,23	6,02	5,65	5,49
	1%	2,01	1,14	0,98	1,10	2,26	1,49	1,27	1,21
50	10%	17,32	12,26	10,73	12,34	18,67	14,19	12,87	13,22
	5%	10,42	6,16	5,10	6,09	11,49	8,15	6,97	7,40
	1%	2,88	1,45	1,12	1,29	3,61	2,25	1,73	1,86
		t_8							
censura (%)	nível nominal	$\alpha = 0,1$				$\alpha = 0,5$			
		RV_p	RV_{BN_1}	RV_{BN_2}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{BN_2}	RV_{CR}
10	10%	13,95	10,38	10,27	10,27	13,95	10,88	10,41	10,32
	5%	7,31	5,12	5,11	5,09	7,57	5,38	5,18	5,04
	1%	1,77	1,00	0,95	0,98	1,76	1,05	0,92	0,92
30	10%	15,36	11,05	10,84	11,49	15,89	12,07	11,25	11,23
	5%	8,60	5,80	5,60	6,02	8,85	6,37	5,84	5,82
	1%	2,34	1,16	1,09	1,20	2,54	1,33	1,17	1,18
50	10%	19,30	12,17	11,62	13,03	20,86	16,41	14,03	14,26
	5%	11,44	6,57	6,09	7,02	13,12	9,20	7,71	8,06
	1%	3,37	1,53	1,39	1,53	4,34	2,54	1,79	1,94
		t_{50}							
censura (%)	nível nominal	$\alpha = 0,1$				$\alpha = 0,5$			
		RV_p	RV_{BN_1}	RV_{BN_2}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{BN_2}	RV_{CR}
10	10%	13,99	10,81	10,55	10,61	14,37	10,62	10,33	10,31
	5%	8,07	5,37	5,18	5,19	7,96	5,15	4,95	4,93
	1%	1,98	1,28	1,27	1,28	2,07	1,20	1,08	1,08
30	10%	16,19	11,47	10,96	11,79	16,77	12,43	11,34	11,33
	5%	9,42	6,14	5,84	6,28	9,92	6,72	5,93	5,96
	1%	2,63	1,29	1,18	1,37	2,91	1,48	1,25	1,26
50	10%	19,19	12,51	11,76	13,16	22,36	17,33	14,21	14,83
	5%	12,04	6,95	6,62	7,31	14,68	9,93	8,13	8,46
	1%	4,08	1,75	1,61	1,88	4,89	2,86	2,21	2,25

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 33 – Taxas de rejeição não nulas, inferência sobre α , modelo log-BS- t , dados censurados tipo II, $\alpha = 0, 1$, $\gamma_s = 1 \forall s$ e $n = 20$.

		$\mu = \gamma_1 + \gamma_2 x_2$											
		núcleo											
		t_s											
		t_4											
censura (%)	α_0	nível nominal = 10%						nível nominal = 5%					
		RV_p	RV_{BN_1}	RV_{BN_2}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{BN_2}	RV_{CR}	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{BN_2}	RV_{CR}
10	0,12	12,51	20,47	20,42	20,45	6,68	12,35	12,52	12,75	14,09	22,88	23,51	23,59
	0,14	29,04	42,29	42,80	42,88	20,13	31,05	31,35	31,59	35,85	49,38	50,26	50,44
	0,16	51,62	64,54	64,91	65,06	40,19	53,56	54,38	54,76	60,15	72,22	72,91	73,03
	0,18	70,23	79,81	80,52	80,59	60,32	71,59	72,30	72,55	79,68	87,41	87,84	87,94
	0,20	84,33	90,04	90,27	90,43	76,61	84,95	85,64	85,77	90,09	94,42	94,72	94,75
	0,22	91,05	93,71	93,93	94,01	85,89	90,81	91,05	91,26	95,30	97,54	97,63	97,65
	0,24	95,05	95,08	95,10	95,21	91,77	93,09	93,36	93,48	97,79	98,84	98,91	98,90
	0,26	97,43	94,97	94,90	95,09	95,63	93,83	93,87	94,13	98,99	99,34	99,36	99,37
30	0,28	98,90	94,07	94,01	94,17	97,89	93,61	93,52	93,69	99,51	99,46	99,47	99,46
	0,12	10,64	17,63	17,29	17,14	5,22	10,91	10,68	10,54	11,75	19,99	20,57	19,40
	0,14	23,06	35,92	35,26	35,24	14,30	26,45	26,14	25,86	27,85	42,42	43,19	41,46
	0,16	41,27	55,32	54,98	55,06	29,63	45,32	44,85	45,00	48,04	63,44	64,33	62,77
	0,18	59,26	70,87	70,41	70,87	47,18	62,68	62,50	62,80	67,18	79,16	80,05	79,15
	0,20	73,20	82,74	81,34	82,69	62,70	75,94	75,03	76,16	80,50	89,18	89,56	88,98
	0,22	82,12	88,04	86,23	88,21	73,72	83,14	81,33	83,45	88,67	93,77	94,03	93,77
	0,24	88,88	91,95	89,26	92,26	82,58	88,38	86,07	88,82	93,98	96,64	96,63	96,70
50	0,26	92,63	93,08	89,42	93,36	88,74	90,86	87,42	91,25	96,24	98,02	97,85	98,06
	0,28	95,90	93,99	89,61	94,22	92,90	92,67	88,38	92,99	98,23	98,77	98,21	98,78
	0,12	8,40	16,28	14,94	13,78	4,35	9,56	8,80	8,27	9,30	18,38	18,15	15,25
	0,14	16,06	28,87	26,62	25,57	9,52	20,40	18,32	17,98	18,78	35,57	35,42	31,11
	0,16	27,44	44,42	39,86	40,58	18,59	34,49	30,20	31,17	33,38	51,47	51,32	47,00
	0,18	41,48	58,14	51,38	54,77	31,36	48,40	41,40	45,40	49,48	67,05	66,95	63,38
	0,20	55,11	68,92	59,20	66,40	44,19	60,29	50,25	57,97	63,44	78,05	77,72	75,58
	0,22	65,13	75,98	63,34	74,51	55,45	68,88	55,89	67,14	74,55	85,83	84,10	83,94
	0,24	73,58	81,35	64,93	80,07	64,55	74,87	58,67	73,90	82,33	90,37	87,11	89,30
	0,26	80,47	84,07	65,32	83,02	72,88	78,86	60,67	78,44	87,15	92,34	87,42	91,56
	0,28	86,04	86,21	64,19	85,73	79,60	82,33	60,62	82,07	91,25	94,52	88,03	94,06

Fonte: Autoria própria (2021)

5 APLICAÇÕES

Neste capítulo apresentaremos aplicações utilizando bancos de dados reais que são descritos em cada seção na qual se é utilizado. O objetivo é ilustrar a metodologia desenvolvida nos Capítulos 3 e 4.

5.1 PRIMEIRA APLICAÇÃO

Consideramos o conjunto de dados de fadiga biaxial de Brown e Miller analisado por Rieck e Nedelman (1991). Esses dados se referem aos tempos de falhas de 46 peças de metais sujeitas à compressões cíclicas até falharem. Seja t (variável resposta) o tempo de falha da peça de metal em ciclos e x_2 (variável explicativa) o trabalho por ciclo (MJ/m^3). Consideramos o seguinte modelo de regressão

$$y_i = \log(t_i) = \gamma_1 + \gamma_2 \log(x_{i2}) + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, 46, \quad (5.1)$$

em que y_i é o logaritmo do tempo de falha da i -ésima peça de metal, γ_1 e γ_2 são os coeficientes de regressão e $\epsilon_i \sim \log\text{-BSG}(\alpha, 0; g)$ para $i = 1, \dots, 46$.

As estimativas de máxima verossimilhança, os erros padrão, as estatísticas z e os p -valores para o teste de hipóteses da significância dos parâmetros ($H_0 : \gamma_2 = 0$), estão apresentados na Tabela 34. Observamos que todos os parâmetros são significativos aos níveis de significância usuais.

Tabela 34 – Estimativas dos parâmetros, erros padrão, estatísticas z e p -valores dos modelos log-BS e log-BS- t com $\nu = 4, 8$ e 50 para os dados de fadiga biaxial.

Modelo	Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	Est z	Valor p
log-BS	γ_1	12,280	0,389	31,535	< 0,001
	γ_2	-1,671	0,108	-15,407	< 0,001
	α	0,410	0,043	9,592	< 0,001
log-BS- t_4	γ_1	12,383	0,469	26,405	< 0,001
	γ_2	-1,694	0,129	-13,136	< 0,001
	α	0,362	0,047	7,775	< 0,001
log-BS- t_8	γ_1	12,329	0,432	28,561	< 0,001
	γ_2	-1,681	0,119	-14,095	< 0,001
	α	0,383	0,045	8,525	< 0,001
log-BS- t_{50}	γ_1	12,287	0,397	30,975	< 0,001
	γ_2	-1,672	0,110	-15,160	< 0,001
	α	0,406	0,043	9,390	< 0,001

Fonte: Autoria própria (2021)

Na Tabela 35 apresentamos as estimativas de $\ell(\theta)$ e os critérios de seleção de modelos AIC - Critério de informação de Akaike (AKAIKE, 1974) e SIC - Critério de Informação de Schwarz (SCHWARZ, 1978). Comparamos os modelos log-BS e log-BS- t com diferentes valores fixados para ν através dos valores AIC e SIC em que $\ell(\hat{\theta})$ é o logaritmo da função de verossimilhança de θ avaliado em $\hat{\theta}$. De acordo com os critérios, selecionamos o modelo que apresenta os menores valores AIC e SIC. De acordo com a Tabela 35, o modelo selecionado é o modelo de regressão log-BS (RIECK; NEDELMAN, 1991) pois apresentou menor AIC e SIC em relação aos demais modelos.

Tabela 35 – Comparação dos modelos log-BS e log-BS- t com $\nu = 4, 8$ e 50 para os dados de fadiga biaxial.

Modelo	$\ell(\hat{\theta})$	AIC	SIC
log-BS	-23,370	52,741	58,227
log-BS- t_4	-26,039	58,079	63,565
log-BS- t_8	-24,640	55,279	60,765
log-BS- t_{50}	-23,561	53,123	58,609

Fonte: Autoria própria (2021)

A partir dos resultados apresentados, o modelo de regressão log-BS ajustou-se satisfatoriamente aos dados de fadiga biaxial. Desse modo, todas as análises seguintes são baseadas neste modelo de regressão, que é expresso da seguinte forma

$$y_i = \log(t_i) = \gamma_1 + \gamma_2 \log(x_{i2}) + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, 46,$$

em que y_i é o logaritmo do tempo de falha da i -ésima peça de metal, γ_1 e γ_2 são os coeficientes de regressão e $\epsilon_i \sim \text{log-BS}(\alpha, 0)$.

O nosso interesse é realizar inferências sobre o parâmetro α , considerando os coeficientes de regressão do modelo expresso em (5.1) como parâmetros de perturbação. As estimativas de máxima verossimilhança para α foram obtidas maximizando as funções de verossimilhança perfilada e suas versões ajustadas. As correspondentes estimativas são $\hat{\alpha}_p = 0,410$ e $\hat{\alpha}_{BN} = \hat{\alpha}_{BN} = \hat{\alpha}_{CR} = 0,420$. Nosso interesse é testar $H_0 : \alpha = 0,34$ versus $H_1 : \alpha \neq 0,34$, lembrando que o espaço paramétrico do parâmetro α é estritamente positivo. Para este teste, temos $RV_p = 3,7038$, $RV_{BN_1} = 4,530$ e $RV_{BN_2} = RV_{CR} = 4,528$ que conduzem aos respectivos níveis descritivos 0,054, 0,033 e 0,033. Consequentemente, a hipótese nula é rejeitada ao nível nominal de 5% quando a inferência é baseada nos testes RV_{BN_1} , RV_{BN_2} e

RV_{CR} , entretanto, o teste baseado na estatística RV_p não rejeita a hipótese nula. Lembrando que, com base nos estudos de simulação descritos na Seção 3.3.1 o teste baseado na estatística RV_p é liberal, principalmente para pequenas amostras, sugerindo que a inferência fornecida por esse teste não é confiável.

Na Tabela 36, apresentamos dois intervalos de confiança (IC) para α com taxa de cobertura de 95%, em que LI e LS representam os limites inferior e superior do intervalo e Δ é o comprimento. Observamos que o intervalo de confiança *bootstrap* percentil (ICP) apresenta maior amplitude comparado ao intervalo de confiança assintótico (ICA), tendo amplitude igual a 0,1692 enquanto que a amplitude do ICA é 0,1677.

Tabela 36 – Estimativas intervalares para α .

IC	LI	LS	Δ
ICA	0,3265	0,4942	0,1677
ICP	0,3189	0,4881	0,1692

Fonte: Autoria própria (2021)

Afim de ilustrar o uso da censura tipo II, censuramos (10%, 30% e 50%) os dados analisado anteriormente. Portanto, vamos considerar o modelo de regressão log-BSG para dados censurados proposto por Barros (2007), isto é,

$$y_i = \log(t_i) = \gamma_1 + \gamma_2 \log(x_{i2}) + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, 46,$$

em que y_i é o logaritmo do tempo de falha ou censura da i -ésima peça de metal, γ_1 e γ_2 são os coeficientes de regressão e $\epsilon_i \sim \text{log-BSG}(\alpha, 0; g)$.

Omitimos os resultados das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros, os correspondentes erros padrão, as estatísticas z e p -valores (utilizado na verificação da significância da covariável) segundo os modelos (log-BS, log-BS- t_4 , log-BS- t_8 e log-BS- t_{50}) e os diferentes níveis de censura (10%, 30% e 50%), devido à tabela ser demasiadamente extensa. Entretanto, destacamos que a covariável x_2 , independente do modelo e da porcentagem de censura, é significativa, usando o nível de significância de 1%. Apresentamos na Tabela 37 os valores AIC e SIC dos modelos de regressão log-BS e log-BS- t com dados censurados e diferentes valores para ν . Pelos valores expostos na Tabela 37, temos que o modelo de regressão log-BS apresenta os menores valores das medidas AIC e SIC, entre todos os modelos ajustados considerando diferentes níveis de censura, sendo assim, o modelo log-BS é escolhido como o mais adequado para analisar os dados. Portanto, na Tabela 38 apresentamos as estimativas

de máxima verossimilhança apenas para os parâmetros do modelo de regressão selecionado juntamente com os seus erros padrão, as estatísticas z e os p -valores.

Tabela 37 – Comparação dos modelos log-BS e log-BS- t com diferentes valores para ν e censura nos dados de fadiga biaxial.

Censura (%)	Modelo	$\ell(\hat{\theta})$	AIC	SIC
10	log-BS	-23,456	52,911	58,397
	log-BS- t_4	-25,653	57,653	63,139
	log-BS- t_8	-24,589	55,179	60,665
	log-BS- t_{50}	-23,627	53,255	58,741
30	log-BS	-21,845	49,690	55,176
	log-BS- t_4	-23,850	53,700	59,186
	log-BS- t_8	-22,803	51,607	57,093
	log-BS- t_{50}	-21,990	49,979	55,465
50	log-BS	-15,375	36,750	42,236
	log-BS- t_4	-17,035	40,071	45,557
	log-BS- t_8	-16,152	38,304	43,790
	log-BS- t_{50}	-15,489	36,978	42,464

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 38 – Estimativas dos parâmetros, erros padrão, estatísticas z e p -valores do modelo log-BS com censura nos dados de fadiga biaxial.

Censura (%)	Estimador	Estimativa	Erro padrão	Est z	Valor p
10	γ_0	12,139	0,420	28,914	< 0,001
	γ_1	-1,634	0,115	-14,153	< 0,001
	α	0,401	0,045	8,976	< 0,001
30	γ_0	11,820	0,518	22,830	< 0,001
	γ_1	-1,552	0,138	-11,225	< 0,001
	α	0,396	0,051	7,819	< 0,001
50	γ_0	11,640	0,754	15,442	< 0,001
	γ_1	-1,511	0,192	-7,866	< 0,001
	α	0,376	0,057	6,588	< 0,001

Fonte: Autoria própria (2021)

Sendo assim, as próximas análises são baseadas no modelo de regressão log-BS para dados censurados. O modelo é definido por

$$y_i = \log(t_i) = \gamma_1 + \gamma_2 \log(x_{i2}) + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, 46,$$

em que y_i é o logaritmo do tempo de falha ou censura da i -ésima peça de metal, γ_1 e γ_2 são os coeficientes de regressão e $\epsilon_i \sim \text{log-BS}(\alpha, 0)$.

As estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros obtidas maximizando as funções de verossimilhança perfilada e suas versões ajustadas considerando diferentes porcentagens de censura se encontram na Tabela 39. Observamos que para cada porcentagem de censura considerada as estimativas estão próximas uma das outras, sendo que, as estimativas das funções ajustadas são maiores quando comparadas a estimativa referente a função perfilada. Por exemplo, para 30% de censura nos dados, temos que, $\hat{\alpha}_p = 0,3963$, $\hat{\alpha}_{BN} = 0,4082$, $\hat{\alpha}_{BN} = 0,4102$ e $\hat{\alpha}_{CR} = 0,4083$. Além disso, o aumento da censura implica diminuição das estimativas, por exemplo, para 10% de censura nos dados, as estimativas são iguais a 0,4014, 0,4110, 0,4122 e 0,4118, respectivamente, e para 50% de censura nos dados, respectivamente, temos: 0,3762 0,3915, 0,3944 e 0,3882.

Tabela 39 – Estimativas de máxima verossimilhança perfilada e perfilada ajustada do parâmetro α .

Censura (%)	$\hat{\alpha}_p$	$\hat{\alpha}_{BN}$	$\hat{\alpha}_{BN}$	$\hat{\alpha}_{CR}$
10	0,4014	0,4110	0,4122	0,4118
30	0,3963	0,4082	0,4102	0,4083
50	0,3762	0,3915	0,3944	0,3882

Fonte: Autoria própria (2021)

Na Tabela 40 apresentamos os p -valores das estatísticas de teste, levando em consideração diferentes porcentagens de censura. Observamos que à medida que aumentamos a porcentagem de censura nos dados os testes leva a não rejeição da hipótese nula. Por exemplo, para 30% de censura, os p -valores são, respectivamente, 0,1893, 0,1242, 0,1160 e 0,1236, enquanto que os p -valores para 50% de censura são, respectivamente, 0,4398, 0,2922, 0,2722, 0,3207. Destacamos que o teste que usa a estatística RV_p apresenta evidências mais fortes para não rejeitar a hipóteses nula quando comparado com as estatísticas baseadas nas funções ajustadas.

Tabela 40 – p -valores dos testes sob H_0 .

Censura (%)	RV_p	RV_{BN_1}	RV_{BN_2}	RV_{CR}
10	0,1117	0,0733	0,0700	0,0711
30	0,1893	0,1242	0,1160	0,1236
50	0,4398	0,2922	0,2722	0,3207

Fonte: Autoria própria (2021)

A Tabela 41 mostra o comportamento das estimativas intervalares para o parâmetro α de acordo com diferentes porcentagens de censura e nível nominal de 95%. No geral, o intervalo de confiança *bootstrap* percentil apresenta comprimento menor que o intervalo assintótico. Por exemplo, considerando 30% de censura, temos as seguintes amplitudes, 0,19864 e 0,19719, para os intervalos tipo assintótico e *bootstrap* percentil, respectivamente.

Tabela 41 – Estimativas intervalares para α , dados censurados tipo II.

Censura (%)	IC	LI	LS	Δ
10	ICA	0,3138	0,4891	0,1753
	ICP	0,3051	0,4802	0,1751
30	ICA	0,2969	0,4956	0,1987
	ICP	0,2821	0,4792	0,1971
50	ICA	0,2643	0,4881	0,2238
	ICP	0,2498	0,4691	0,2193

Fonte: Autoria própria (2021)

5.2 SEGUNDA APLICAÇÃO

O banco de dados apresentado em Lepadatu et al. (2005) sobre o tempo de vida da matriz no processo de extrusão do metal, é composto por quatro variáveis respostas e três variáveis explicativas, sendo elas, respectivamente, y_1 : tensão de Von Misses, y_2 : deformação máxima, y_3 : força na fabricação, y_4 : vida útil da matriz (em número de ciclos), x_2 : coeficiente de fricção, x_3 : ângulo da matriz ($^\circ$) e x_4 : temperatura de trabalho ($^\circ\text{C}$), com tamanho amostral $n = 15$. Normalmente, na análise de dados industriais existem múltiplas variáveis respostas que estão sob investigação ao mesmo tempo. Aqui, consideramos apenas uma variável resposta, pois, os modelos de regressão em estudo, compreende apenas o caso univariado. Consideramos

o seguinte modelo de regressão

$$y_i = \log(t_i) = \gamma_1 + \gamma_2 x_{i2} + \gamma_3 x_{i3} + \gamma_4 x_{i4} + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, 15,$$

em que y_i é o logaritmo do tempo de vida útil da i -ésima da matriz, γ_1 , γ_2 , γ_3 e γ_4 são os coeficientes de regressão e $\epsilon_i \sim \text{log-BSG}(\alpha, 0; g)$ para $i = 1, \dots, 15$.

As estimativas de máxima verossimilhança, erros padrão das estimativas, juntamente com as estatísticas z e seus respectivos p -valores para o teste de hipóteses da significância dos parâmetros, estão apresentados na Tabela 42. Independente do modelo notamos que a variável temperatura de trabalho (x_4) é significativa aos níveis de significância usuais. Na Tabela 43 apresentamos as estimativas, erros padrão, estatísticas z e p -valores do intercepto e da variável significativa no modelo.

Tabela 42 – Estimativas dos parâmetros, erros padrão, estatísticas z e p -valores dos modelos log-BS e log-BS- t para os dados de fadiga no processo de extrusão do metal.

Modelo	Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	Est z	Valor p
log-BS	γ_1	5,9011	0,4870	12,1167	$< 0,0001$
	γ_2	0,7917	1,7848	0,4436	0,6573
	γ_3	0,0098	0,0120	0,8144	0,4154
	γ_4	0,0052	0,0004	11,6036	$< 0,0001$
	α	0,1982	0,0362	5,4772	$< 0,0001$
log-BS- t_4	γ_1	6,5553	0,5231	12,5307	$< 0,0001$
	γ_2	0,0684	1,5959	0,0429	0,9658
	γ_3	0,0033	0,0090	0,3659	0,7145
	γ_4	0,0046	0,0005	9,2311	$< 0,0001$
	α	0,1419	0,0416	3,4103	0,0006
log-BS- t_8	γ_1	6,1963	0,5544	11,1759	$< 0,0001$
	γ_2	0,4620	1,7835	0,2590	0,7956
	γ_3	0,0061	0,0111	0,5441	0,5864
	γ_4	0,0050	0,0005	10,0090	$< 0,0001$
	α	0,1744	0,0388	4,4977	$< 0,0001$
log-BS- t_{50}	γ_1	5,9410	0,5003	11,8740	$< 0,0001$
	γ_2	0,7455	1,7931	0,4157	0,6776
	γ_3	0,0092	0,0119	0,7722	0,4400
	γ_4	0,0052	0,0005	11,3394	$< 0,0001$
	α	0,1949	0,0366	5,3307	$< 0,0001$

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 43 – Estimativas dos parâmetros, erros padrão, estatísticas z e p -valores.

Modelo	Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	Est z	Valor p
log-BS	γ_1	6,2453	0,3251	19,2108	$< 0,0001$
	γ_2	0,0052	0,0005	11,2998	$< 0,0001$
	α	0,2039	0,0372	5,4772	$< 0,0001$
log-BS- t_4	γ_1	6,6577	0,3450	19,3000	$< 0,0001$
	γ_2	0,0046	0,0005	9,7032	$< 0,0001$
	α	0,1419	0,0407	3,4878	0,0005
log-BS- t_8	γ_1	6,4347	0,3521	18,2772	$< 0,0001$
	γ_2	0,0049	0,0005	10,0626	$< 0,0001$
	α	0,1741	0,0392	4,4456	$< 0,0001$
log-BS- t_{50}	γ_1	6,2728	0,3306	18,9732	$< 0,0001$
	γ_2	0,0052	0,0005	11,0767	$< 0,0001$
	α	0,1992	0,0376	5,2992	$< 0,0001$

Fonte: Autoria própria (2021)

Portanto, o modelo de regressão considerado apenas com as variáveis significativas é dado por

$$y_i = \log(t_i) = \gamma_1 + \gamma_2 x_{i2} + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, 15, \quad (5.2)$$

em que y_i é o logaritmo do tempo de falha da i -ésima matriz, γ_1 γ_2 são os coeficientes de regressão e $\epsilon_i \sim \text{log-BSG}(\alpha, 0; g)$ para $i = 1, \dots, 15$.

Na Tabela 44 apresentamos as estimativas de $\ell(\theta)$ e os critérios de seleção de modelos AIC - Critério de informação de Akaike (AKAIKE, 1974) e SIC - Critério de Informação de Schwarz (SCHWARZ, 1978). Comparamos os modelos log-BS e log-BS- t com diferentes valores fixados para ν através dos valores AIC e SIC em que $\ell(\hat{\theta})$ é o logaritmo da função de verossimilhança de θ avaliado em $\hat{\theta}$. De acordo com a Tabela 44, o modelo selecionado é o modelo de regressão log-BS- t_8 pois apresentou menor AIC e SIC em relação aos demais modelos ajustados.

Tabela 44 – Comparação dos modelos log-BS e log-BS- t com $\nu = 4, 8$ e 50 para os dados de fadiga no processo de extrusão do metal.

Modelo	$\ell(\hat{\theta})$	AIC	SIC
log-BS	2,6449	0,7102	2,8344
log-BS- t_4	-0,2719	1,8522	3,1360
log-BS- t_8	2,8289	0,3421	2,4663
log-BS- t_{50}	2,6684	0,6632	2,7873

Fonte: Autoria própria (2021)

Todas as análises seguintes são baseadas no modelo de regressão log-BS- t_8 , pois o mesmo ajustou-se satisfatoriamente aos dados de fadiga no processo de extrusão do metal. O nosso interesse é realizar inferências sobre o parâmetro α , considerando os coeficientes de regressão do modelo expresso em (5.2) como parâmetros de perturbação. As estimativas de máxima verossimilhança para α foram obtidas maximizando as funções de verossimilhanças perfilada e suas versões ajustadas. As correspondentes estimativas são: $\hat{\alpha}_p = 0,1741$, $\hat{\alpha}_{BN} = 0,1884$ e $\hat{\alpha}_{BN} = \hat{\alpha}_{CR} = 0,1874$. Em particular, queremos testar se o verdadeiro valor de α é igual a $0,13$, ou seja, o interesse está em testar $H_0 : \alpha = 0,13$ versus $H_1 : \alpha \neq 0,13$. As estatísticas de teste RV_p , RV_{BN_1} , RV_{BN_2} e RV_{CR} são, respectivamente, $1,9141$ (valor $p = 0,1665$), $2,8768$ (valor $p = 0,0899$), $2,7859$ (valor $p = 0,0951$) e $2,7859$ (valor $p = 0,0951$). Segue então que a hipótese nula é rejeitada ao nível nominal de 10% quando a inferência é baseada nas estatísticas RV_{BN_1} , RV_{BN_2} e RV_{CR} , no entanto, o teste baseado na estatística RV_p não rejeita a hipótese nula.

Na Tabela 45, apresentamos dois intervalos de confiança (IC) para α com taxa de cobertura de 95% , em que LI e LS representam os limites inferior e superior do intervalo e Δ é o comprimento. Observamos que o intervalo de confiança assintótico (ICA) apresenta maior amplitude comparado ao intervalo de confiança *bootstrap* percentil (ICP), tendo amplitude igual a $0,1535$ enquanto que a amplitude do ICP é $0,1420$.

Tabela 45 – Estimativas intervalares para α .

IC	LI	LS	Δ
ICA	0,0973	0,2508	0,1535
ICP	0,1041	0,2461	0,1420

Fonte: Autoria própria (2021)

5.3 TERCEIRA APLICAÇÃO

Nessa aplicação, utilizaremos o banco de dados analisado por Castro-Kuriss (2011), conduzido pelo Dr. William Meeker em 1999 e fornecido para o autor pelo Dr. Luis A. Escobar. O estudo consistiu em um experimento fatorial para comparar os tempos de vida de 36 molas, em função da temperatura de processamento e do deslocamento no teste de mola, sendo 3 (três) observações censuradas. Seja t (variável resposta) o tempo de falha da mola em ciclos e x_2 (variável explicativa) o método, que assume os valores 0 ou 1, indicando se o método é velho ou novo, respectivamente. Assim, o modelo de regressão considerado é especificado como sendo

$$y_i = \log(t_i) = \gamma_1 + \gamma_2 x_{i2} + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, 36,$$

em que y_i é o logaritmo do tempo de falha ou censura da i -ésima mola, γ_1 e γ_2 são os coeficientes de regressão e $\epsilon_i \sim \text{log-BSG}(\alpha, 0; g)$ para $i = 1, \dots, 36$.

As estimativas de máxima verossimilhança, erros padrão das estimativas dos modelos log-BS e log-BS- t com $\nu = 4, 8$ e 50 , estatísticas z e p -valores para o teste de hipóteses da significância dos parâmetros ($H_0 : \gamma_2 = 0$), estão apresentados na Tabela 46. Observamos que a variável x_2 é significativa aos níveis de significância usuais, isto é, 1%, 5% e 10%. Para identificar qual desses modelos é mais apropriada para modelar o tempo de sobrevivência desse conjunto de dados, aplicamos os critérios de seleção de modelos AIC e SIC. A Tabela 47 apresenta os resultados referentes a esses critérios. Observamos que o modelo que apresenta menor AIC e SIC é o modelo log-BS, isto é, o modelo log-BS apresenta um melhor ajuste quando comparado aos outros modelos ajustados.

Tabela 46 – Estimativas dos parâmetros, erros padrão, estatísticas z e p -valores dos modelos log-BS e log-BS- t para os dados tempo de vida de uma mola.

Modelo	Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	Est z	Valor p
log-BS	γ_1	7,1183	0,1687	42,1855	$< 0,0001$
	γ_2	0,9146	0,3092	2,9584	0,0031
	α	0,9251	0,1159	7,9799	$< 0,0001$
log-BS- t_4	γ_1	7,1875	0,1991	36,1046	$< 0,0001$
	γ_2	0,8859	0,3030	2,9243	0,0035
	α	0,7656	0,1249	6,1300	$< 0,0001$
log-BS- t_8	γ_1	7,1595	0,1860	38,4965	$< 0,0001$
	γ_2	0,8931	0,3066	2,9132	0,0036
	α	0,8370	0,1216	6,8860	$< 0,0001$
log-BS- t_{50}	γ_1	7,1257	0,1720	41,4407	$< 0,0001$
	γ_2	0,9099	0,3089	2,9455	0,0032
	α	0,9099	0,1170	7,7755	$< 0,0001$

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 47 – Comparação dos modelos log-BS e log-BS- t com $\nu = 4, 8$ e 50 para os dados tempo de vida de uma mola

Modelo	$\ell(\hat{\theta})$	AIC	SIC
log-BS	-44,8852	95,7703	100,5209
log-BS- t_4	-45,4086	96,8172	101,5677
log-BS- t_8	-45,0741	96,1482	100,8988
log-BS- t_{50}	-44,9059	95,8119	100,5624

Fonte: Autoria própria (2021)

Portanto, o modelo de regressão é dado por

$$y_i = \log(t_i) = \gamma_1 + \gamma_2 x_{i2} + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, 36, \quad (5.3)$$

em que y_i é o logaritmo do tempo de falha ou censura da i -ésima mola, γ_1 e γ_2 são os coeficientes de regressão e $\epsilon_i \sim \text{log-BS}(\alpha, 0)$ para $i = 1, \dots, 36$.

Todas as análises seguintes são baseadas no modelo de regressão log-BS para dados com censura tipo II. O nosso interesse é realizar inferências sobre o parâmetro α , considerando os coeficientes de regressão do modelo expresso em (5.3) como parâmetros de perturbação. As estimativas de máxima verossimilhança para α foram obtidas maximizando as funções de

verossimilhanças perfilada e suas versões ajustadas. As correspondentes estimativas são $\hat{\alpha}_p = 0,9251$, $\hat{\alpha}_{BN} = 0,9534$, $\hat{\alpha}_{BN} = 0,9621$ e $\hat{\alpha}_{CR} = 0,9607$. Em particular, queremos testar se o verdadeiro valor de α é igual a 0,75, ou seja, o interesse está em testar $H_0 : \alpha = 0,75$ versus $H_1 : \alpha \neq 0,75$. As estatísticas de teste RV_p , RV_{BN_1} , RV_{BN_2} e RV_{CR} são, respectivamente, 3,2584 (valor $p = 0,0711$), 4,1041 (valor $p = 0,0428$), 4,3154 (valor $p = 0,0378$) e 4,2854 (valor $p = 0,0384$). Segue então que a hipótese nula é rejeitada ao nível nominal de 5% quando a inferência é baseada nas estatísticas RV_{BN_1} , RV_{BN_2} e RV_{CR} , no entanto, o teste baseado na estatística RV_p não rejeita a hipótese nula.

Na Tabela 48, apresentamos dois intervalos de confiança (IC) para α com taxa de cobertura de 95%, em que LI e LS representam os limites inferior e superior do intervalo e Δ é o comprimento. Observamos que o intervalo de confiança assintótico (ICA) apresenta maior amplitude comparado ao intervalo de confiança *bootstrap* percentil (ICP), tendo amplitude igual a 0,4544 enquanto que a amplitude do ICP é 0,4375.

Tabela 48 – Estimativas intervalares para α .

IC	LI	LS	Δ
ICA	0,6979	1,1523	0,4544
ICP	0,7523	1,1898	0,4375

Fonte: Autoria própria (2021)

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho obtivemos os ajustes de Barndorff-Nielsen (1983) e Cox e Reid (1987) para a função de verossimilhança perfilada no contexto do modelo de regressão log-BSG, considerando os núcleos das distribuições normal e t de Student na presença, ou não, de censura tipo II. Além disso, obtivemos os estimadores de máxima verossimilhança perfilado e perfilados modificados, assim como os intervalos assintótico e *bootstrap* percentil e os testes baseados nas estatísticas da razão de verossimilhanças perfilada e perfiladas modificadas sobre o parâmetro de forma do modelo. Apresentamos e discutimos os resultados das simulações de Monte Carlo e, em geral, os resultados numéricos sugerem que os estimadores e testes baseados nas funções de verossimilhanças perfiladas ajustadas supera os resultados baseados na função de verossimilhança perfilada original, tanto na estimação, por apresentarem menores vieses, quanto nos testes, por apresentarem taxas de rejeição mais próximas aos níveis nominais. Portanto, recomendamos o uso das inferências baseadas nas funções de verossimilhanças perfiladas modificadas, propostas no presente trabalho, em aplicações.

REFERÊNCIAS

- AHSANULLAH, M.; KIBRIA, B. M. G.; SHAKIL, M. *Normal and Student's t Distributions and Their Applications*. Amsterdam: Atlantis Press, 2014.
- AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. *IEEE transactions on automatic control*, v. 19, n. 6, p. 716–723, 1974.
- ANDERSON, T. W.; FANG, K.-T. *Theory and applications of elliptically contoured and related distributions*. California, 1990.
- ARAÚJO, M. C.; CYSNEIROS, A. H. M. A.; MONTENEGRO, L. C. Improved heteroskedasticity likelihood ratio tests in symmetric nonlinear regression models. *Statistical Papers*, Springer, v. 61, n. 1, p. 167–188, 2020.
- BARNDORFF-NIELSEN, O. On a formula for the distribution of the maximum likelihood estimator. *Biometrika*, v. 70, n. 2, p. 343–365, 1983.
- BARRETO, L. S. *Refinamento de inferências na distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleos normal e t de Student sob censura tipo II*. Tese (Doutorado) — Departamento de Matemática Computacional, Universidade Federal de Pernambuco, 2013.
- BARRETO, L. S.; CYSNEIROS, A. H. M. A.; CRIBARI-NETO, F. Improved birnbaum-saunders inference under type ii censoring. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 57, n. 1, p. 68–81, 2013.
- BARROS, M. *Modelos de regressão Birnbaum-Saunders generalizados*. Tese (Doutorado) — Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 2007.
- BARROS, M.; PAULA, G. A.; LEIVA, V. A new class of survival regression models with heavy-tailed errors: robustness and diagnostics. *Lifetime data analysis*, v. 14, n. 3, p. 316–332, 2008.
- BIRNBAUM, Z. W.; SAUNDERS, S. C. A probabilistic interpretation of miner's rule. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 16, n. 3, p. 637–652, 1968.
- BIRNBAUM, Z. W.; SAUNDERS, S. C. A new family of life distribution. *Journal of Applied Probability*, v. 6, n. 2, p. 319–327, 1969a.
- BIRNBAUM, Z. W.; SAUNDERS, S. C. Estimation for a family of life distributions with applications to fatigue. *Journal of Applied Probability*, v. 6, n. 2, p. 328–347, 1969b.
- BOLFARINE, H.; SANDOVAL, M. C. *Introdução à inferência estatística*. Rio de Janeiro: SBM, 2001.
- CAMBANIS, S.; HUANG, S.; SIMONS, G. On the theory of elliptically contoured distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, v. 11, n. 3, p. 368–385, 1981.
- CASELLA, G.; BERGER, R. L. *Statistical Inference*. 2. ed. Stamford: Cengage Learning, 2002.
- CASTRO-KURISS, C. On a goodness-of-fit test for censored data from a location-scale distribution with applications. *Chilean Journal of Statistics*, v. 2, n. 1, p. 115–136, 2011.

- COLOSIMO, E. A.; GIOLO, S. R. *Análise de sobrevivência aplicada*. São Paulo: Blucher, 2006.
- CORDEIRO, G. M.; ORTEGA, E. M. M.; SILVA, G. O. *Modelos de regressão de sobrevivência estendidos em Análise de Sobrevivência*. Fortaleza: UFC/DEMA/ABE, 2011.
- COX, D. R.; REID, N. Parameter orthogonality and approximate conditional inference. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, v. 49, n. 1, p. 1–39, 1987.
- COX, D. R.; REID, N. A note on the calculation of adjusted profile likelihood. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, v. 55, n. 2, p. 467–471, 1993.
- CRIBARI-NETO, F.; FONSECA, R. V. a. A new log-linear bimodal birnbaum–saunders regression model with application to survival data. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, v. 33, n. 2, p. 329–355, 2019.
- CRIBARI-NETO, F.; ZARKOS, S. G. Econometric and statistical computing using ox. *Computational Economics*, v. 21, n. 3, p. 277–295, 2003.
- CYSNEIROS, A. H. M. A.; CRIBARI-NETO, F.; ARAÚJO-JÚNIOR, C. A. G. On birnbaum–saunders inference. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 52, n. 11, p. 4939–4950, 2008.
- DÍAZ-GARCÍA, J. A.; DOMÍNGUEZ-MOLINA, J. R. Some generalisations of birnbaum–saunders and sinh-normal distributions. *International Mathematical Forum*, v. 1, n. 35, p. 1709–1727, 2006.
- DÍAZ-GARCÍA, J. A.; LEIVA-SÁNCHEZ, V. A new family of life distributions based on the elliptically contoured distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, v. 128, n. 2, p. 445–457, 2005.
- DÍAZ-GARCÍA, J. A.; LEIVA-SÁNCHEZ, V. Erratum to "a new family of life distributions based on the elliptically contoured distributions". *Journal of Statistical Planning and Inference*, v. 137, n. 4, p. 1512–1513, 2007.
- DÍAZ-GARCÍA, J. A.; LEIVA-SÁNCHEZ, V.; GALEA, M. Singular elliptical distribution: density and applications. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, v. 31, n. 5, p. 665–681, 2002.
- DICICCIO, T. J.; MARTIN, M. A.; STERN, S. E.; YOUNG, G. A. Information bias and adjusted profile likelihoods. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, v. 58, n. 1, p. 189–203, 1996.
- DICICCIO, T. J.; STERN, S. E. Frequentist and bayesian bartlett correction of test statistics based on adjusted profile likelihoods. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, v. 56, n. 2, p. 397–408, 1994.
- DOORNIK, J. A. *An Object-Oriented Matrix Language Ox 6*. 1. ed. London: Timberlake Consultants Press, 2009.
- DOORNIK, J. A.; OOMS, M. *Introduction to Ox*. 2006.
- EFRON, B. Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *Annals of Statistics*, Institute of Mathematical Statistics, v. 7, n. 1, p. 1–26, 1979.

FANG, K.; KOTZ, S.; NG, K. *Symmetric Multivariate and Related Distributions*. 1. ed. London: Chapman and Hall, 1990.

FANG, K.-T. Elliptically contoured distributions. *Wiley StatsRef: Statistics Reference Online*, 2014.

FARIAS, R. B. A.; LEMONTE, A. J. Bayesian inference for the birnbaum–saunders nonlinear regression model. *Statistical Methods & Applications*, v. 20, n. 4, p. 423–438, 2011.

FERRARI, S. L. P.; SILVA, M. F. D.; CRIBARI-NETO, F. Adjusted profile likelihood for two-parameter exponential family models. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, v. 34, n. 2, p. 257–276, 2005.

FERRARI, S. L. P.; SILVA, M. F. D.; CRIBARI-NETO, F. Adjusted profile likelihoods for the weibull shape parameter. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 77, n. 7, p. 531–548, 2007.

FRASER, D. A. S.; REID, N. Ancillaries and third order significance. *Utilitas Mathematica*, v. 47, p. 33–53, 1995.

FRASER, D. A. S.; REID, N. Ancillary information for statistical inference. In: *Empirical Bayes and Likelihood Inference*. New York: Springer, 2001. p. 185–209.

FRASER, D. A. S.; REID, N.; WU, J. A simple general formula for tail probabilities for frequentist and bayesian inference. *Biometrika*, v. 86, n. 2, p. 249–264, 1999.

GALEA, M.; LEIVA-SÁNCHEZ, V.; PAULA, G. Influence diagnostics in log-birnbaum-saunders regression models. *Journal of Applied Statistics*, v. 31, n. 9, p. 1049–1064, 2004.

JOHNSON, N.; KOTZ, S.; BALAKRISHNAN, N. *Continuous univariate distributions*. Hoboken: John Wiley & Sons, 1995. v. 2.

KELKER, D. Distribution theory of spherical distributions and a location-scale parameter generalization. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A*, v. 32, n. 4, p. 419–430, 1970.

KUNDU, D.; KANNAN, N.; BALAKRISHNAN, N. On the hazard function of birnbaum–saunders distribution and associated inference. *Computational Statistics & Data Analysis*, Elsevier, v. 52, n. 5, p. 2692–2702, 2008.

LEIVA, V. *The Birnbaum-Saunders Distribution*. Amsterdam: Academic Press, 2015.

LEIVA, V.; BARROS, M.; PAULA, G. A.; GALEA, M. Influence diagnostics in log-birnbaum–saunders regression models with censored data. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 51, n. 12, p. 5694–5707, 2007.

LEIVA, V.; RIQUELME, M.; BALAKRISHNAN, N.; SANHUEZA, A. Lifetime analysis based on the generalized birnbaum–saunders distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, Elsevier, v. 52, n. 4, p. 2079–2097, 2008.

LEIVA, V.; VILCA, F.; BALAKRISHNAN, N.; SANHUEZA, A. A skewed sinh-normal distribution and its properties and application to air pollution. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, v. 39, n. 3, p. 426–443, 2010.

- LEMONTE, A. J. A log-birnbaum-saunders regression model with asymmetric errors. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 82, n. 12, p. 1775–1787, 2012.
- LEMONTE, A. J.; CORDEIRO, G. M. Birnbaum-saunders nonlinear regression models. *Computational statistics & data analysis*, v. 53, n. 12, p. 4441–4452, 2009.
- LEPADATU, D.; KOBI, A.; HAMBLI, R.; BARREAU, A. Lifetime multiple response optimization of metal extrusion die. *Annual Reliability and Maintainability Symposium. Proceedings.*, p. 37–42, 2005.
- MARCHANT, C.; LEIVA, V.; CYSNEIROS, F. J. A. A multivariate log-linear model for birnbaum-saunders distributions. *IEEE Transactions on Reliability*, v. 65, n. 2, p. 816–827, 2016.
- MCCULLAGH, P.; TIBSHIRANI, R. A simple method for the adjustment of profile likelihoods. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, v. 52, n. 2, p. 325–344, 1990.
- MCGRAW, D.; WAGNER, J. Elliptically symmetric distributions. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 14, n. 1, p. 110–120, 1968.
- MELO, T. F. N.; FERRARI, S. L. P.; CRIBARI-NETO, F. Improved testing inference in mixed linear models. *Computational Statistics & Data Analysis*, Elsevier, v. 53, n. 7, p. 2573–2582, 2009.
- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. *Numerical optimization*. 1. ed. New York: Springer, 1999.
- PIRES, J. F.; CYSNEIROS, A. H. M. A.; CRIBARI-NETO, F. Improved inference for the generalized pareto distribution. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, Brazilian Statistical Association, v. 32, n. 1, p. 69–85, 2018.
- RIECK, J. R. *Statistical Analysis for the Birnbaum-Saunders Fatigue Life Distribution*. Tese (Doutorado) — Department of Mathematical Sciences, Clemson University, 1989.
- RIECK, J. R.; NEDELMAN, J. R. A log-linear model for the birnbaum-saunders distribution. *Technometrics*, v. 33, n. 1, p. 51–60, 1991.
- SAUNDERS, S. C. A family of random variables closed under reciprocation. *Journal of the American Statistical Association*, v. 69, n. 346, p. 533–539, 1974.
- SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*, v. 6, n. 2, p. 461–464, 1978.
- SEVERINI, T. A. An empirical adjustment to the likelihood ratio statistic. *Biometrika*, v. 86, n. 2, p. 235–247, 1999.
- SEVERINI, T. A. *Likelihood Methods in Statistics*. 1. ed. Oxford: Oxford University Press, 2001.
- SILVA, D. K. X. *Análise de diagnóstico para o modelo de regressão Log-Birnbaum-Saunders generalizado*. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Matemática, Universidade Federal de Campina Grande, 2013.
- SILVEIRA, G. B. d. *Estimação de densidades e de funções de regressão*. Rio de Janeiro: UFRJ, 1992.

- SIMONOFF, J. S.; TSAI, C.-L. Use of modified profile likelihood for improved tests of constancy of variance in regression. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, Wiley Online Library, v. 43, n. 2, p. 357–370, 1994.
- STERN, S. E. A second-order adjustment to the profile likelihood in the case of a multidimensional parameter of interest. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, v. 59, n. 3, p. 653–665, 1997.
- TSIONAS, E. G. Bayesian inference in birnbaum–saunders regression. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, v. 30, n. 1, p. 179–193, 2001.
- VILCA, F.; ROMEIRO, R. G.; BALAKRISHNAN, N. A bivariate birnbaum–saunders regression model. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 97, p. 169–183, 2016.
- VILLEGAS, C.; PAULA, G. A.; LEIVA, V. Birnbaum-saunders mixed models for censored reliability data analysis. *IEEE Transactions on Reliability*, v. 60, n. 4, p. 748–758, 2011.
- XIE, F.-C.; WEI, B.-C. Diagnostics analysis for log-birnbaum–saunders regression models. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 51, n. 9, p. 4692–4706, 2007.
- YOUNG, G. A.; SMITH, R. L. *Essentials of statistical inference*. New York: Cambridge University Press, 2005.

APÊNDICE A – ALGUMAS EXPRESSÕES

Neste apêndice, apresentamos os cálculos de algumas derivadas utilizadas nas Seções 3 e 4 para a obtenção das funções de log-verossimilhanças perfilada e perfiladas modificadas.

Considere as seguintes expressões:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \Rightarrow \cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x), \quad (\text{A.1})$$

$$\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x) \Rightarrow \cosh(x) \sinh(x) = \frac{\sinh(2x)}{2}, \quad (\text{A.2})$$

$$\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x), \quad (\text{A.3})$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} \quad (\text{A.4})$$

e

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}. \quad (\text{A.5})$$

Usaremos as seguintes notações:

$$\xi_{i1} = \frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right) \quad \text{e} \quad \xi_{i2} = \frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Utilizando os resultados (A.1) (A.2), (A.3), (A.4) e (A.5), respectivamente, obtemos

$$\xi_{i1}^2 = \frac{4}{\alpha^2} + \xi_{i2}^2,$$

$$\xi_{i1} \xi_{i2} = \frac{2}{\alpha^2} \sinh(y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}),$$

$$\xi_{i1}^2 + \xi_{i2}^2 = \frac{4}{\alpha^2} \cosh(y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}),$$

$$\operatorname{sech}\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right) = \frac{2/\alpha}{\xi_{i1}}$$

e

$$\tanh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right) = \frac{\xi_{i2}}{\xi_{i1}}.$$

APÊNDICE B – CÁLCULOS UTILIZANDO O NÚCLEO DA NORMAL

No Apêndice B, apresentamos os cálculos de algumas derivadas utilizando o núcleo da normal na presença, ou não, de censura.

Dados Completos

Sejam $y_1, \dots, y_n$ variáveis aleatórias independentes, tais que $y_i \sim \text{log-BS}(\alpha, \mu_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma})$ para $i = 1, \dots, n$, isto é

$$f(y_i; \boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{1}{\alpha \sqrt{2\pi}} \right) \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{\sigma} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right\}, \quad y_i \in \mathbb{R},$$

em que $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\gamma}^\top, \alpha)^\top$.

O logaritmo natural da função de verossimilhança de $\boldsymbol{\theta}$ é dado por

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^n \log \left(\left(\frac{1}{\alpha \sqrt{2\pi}} \right) \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right\} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ -\log(2\sqrt{2\pi}) + \log \left(\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ -\log(2\sqrt{2\pi}) + \log(\xi_{i1}) - \frac{1}{2} \xi_{i2}^2 \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ -\log(\sqrt{8\pi}) + \log(\xi_{i1}) - \frac{1}{2} \xi_{i2}^2 \right\} \\ &= -\frac{n}{2} \log(8\pi) + \sum_{i=1}^n \log(\xi_{i1}) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \xi_{i2}^2 \\ &= c + \sum_{i=1}^n \log(\xi_{i1}) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \xi_{i2}^2, \end{aligned} \tag{B.1}$$

em que $c = -\frac{n}{2} \log(8\pi)$, $\xi_{i1} = \frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right)$ e $\xi_{i2} = \frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right)$.

Sendo assim, a função escore total é definida por

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \left[\ell_{\boldsymbol{\gamma}}^\top, \ell_{\alpha} \right]^\top,$$

em que

$$\begin{aligned} \ell_{\boldsymbol{\gamma}}^{(s)} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{is}}{2} \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{is}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_{is} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_{is} \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_{is} \left(\xi_{i2} \xi_{i1} - \frac{\xi_{i2}}{\xi_{i1}} \right), \quad s = 1, \dots, p,
\end{aligned} \tag{B.2}$$

e

$$\begin{aligned}
\ell_\alpha &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]} \left[-\frac{2}{\alpha^2} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{2}{\alpha} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[-\frac{2}{\alpha^2} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
&= -\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \\
&= -\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \xi_{i2}^2.
\end{aligned}$$

As segundas derivadas do logaritmo da função de verossimilhança expresso em (B.1) são dadas por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_s \partial \gamma_t} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_{is} \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{it}}{2} \right) \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_{is} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{it}}{2} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_{is} \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{it}}{2} \right) \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_{is} \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{it}}{2} \right)}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2} \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_{is} x_{it} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right\} \\
&\quad - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_{is} x_{it} \left\{ \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]} - 1 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_{is} x_{it} \left\{ \frac{4}{\alpha^2} \left[1 + \sinh^2 \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right\} \\
&\quad - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_{is} x_{it} \left\{ \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2}{\frac{4}{\alpha^2} \left[1 + \sinh^2 \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]} - 1 \right\} \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_{is} x_{it} \left\{ \frac{4}{\alpha^2} + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right\} \\
&\quad - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_{is} x_{it} \left\{ \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2}{\frac{4}{\alpha^2} + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2} - 1 \right\} \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_{is} x_{it} \left\{ \frac{4}{\alpha^2} + 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right\} \\
&\quad - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_{is} x_{it} \left\{ \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2}{\frac{4}{\alpha^2} + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2} - 1 \right\} \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_{is} x_{it} \left\{ 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 + \frac{4}{\alpha^2} - 1 + \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2}{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 + \frac{4}{\alpha^2}} \right\} \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_{is} x_{it} \left\{ 2 \xi_{i2}^2 + \frac{4}{\alpha^2} - 1 + \frac{\xi_{i2}^2}{\xi_{i2}^2 + \frac{4}{\alpha^2}} \right\}, \quad s, t = 1, \dots, p,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha \partial \gamma_s} &= \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(\frac{-x_{is}}{2} \right) \\
&= -\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n x_{is} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
&= -\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n x_{is} \xi_{i2} \xi_{i1}, \quad s = 1, \dots, p,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha^2} &= \frac{n}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \\
&\quad + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[-\frac{2}{\alpha^2} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
&= \frac{n}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 + \frac{2}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
&\quad \times \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \xi_{i2}^2 - \frac{2}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \xi_{i2}^2 \\
&= \frac{n}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \xi_{i2}^2.
\end{aligned}$$

Derivando os componentes $\ell_{\boldsymbol{\gamma}}^{(s)}$ do vetor escore de $\boldsymbol{\gamma}$ ($s = 1, \dots, p$) expresso em (B.2) com relação ao vetor de observações $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$ avaliado em $(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha)$, obtemos a matriz $\ell_{\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{y}}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha)$ com dimensão $p \times n$ e elemento (s, i) expresso por

$$\begin{aligned}
\ell_{\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{y}}^{(s, i)}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha) &= \frac{1}{2} x_{is} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right] \left(\frac{1}{2} \right) \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right] \right. \\
&\quad + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right] \left(\frac{1}{2} \right) \\
&\quad - \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right] \left(\frac{1}{2} \right) \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2} \\
&\quad \left. + \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right] \left(\frac{1}{2} \right)}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2} \right\} \\
&= \frac{1}{2} x_{is} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \left(\frac{1}{2} \right) + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \left(\frac{1}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} + \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2} \left(\frac{1}{2} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{4} x_{is} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 - 1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2} \right\} \\
&= \frac{1}{4} x_{is} \left\{ \frac{4}{\alpha^2} + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2}{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 + \frac{4}{\alpha^2}} - 1 \right\}, \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Considere a seguinte matriz

$$\hat{\mathbf{V}}_{\boldsymbol{\gamma}} = [\hat{V}_{\gamma_1} \hat{V}_{\gamma_2} \cdots \hat{V}_{\gamma_p}]_{(n \times p)}$$

em que

$$\widehat{V}_{\gamma_s} = \left[-\frac{\left(\frac{\partial F(y_1; \widehat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \widehat{\gamma}_s} \right)}{f(y_1; \widehat{\boldsymbol{\theta}})}, \dots, -\frac{\left(\frac{\partial F(y_n; \widehat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \widehat{\gamma}_s} \right)}{f(y_n; \widehat{\boldsymbol{\theta}})} \right]_{(n \times 1)}^{\top}, \quad s = 1, \dots, p,$$

sendo

$$-\frac{\left(\frac{\partial F(y_i; \widehat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \widehat{\gamma}_s} \right)}{f(y_i; \widehat{\boldsymbol{\theta}})} = -\frac{\left(\frac{\partial F(y_i; \widehat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial y_i} \right) \left(\frac{\partial y_i}{\partial \widehat{\gamma}_s} \right)}{f(y_i; \widehat{\boldsymbol{\theta}})} = -\frac{f(y_i; \widehat{\boldsymbol{\theta}}) \left(\frac{\partial y_i}{\partial \widehat{\gamma}_s} \right)}{f(y_i; \widehat{\boldsymbol{\theta}})} = -\frac{\partial y_i}{\partial \widehat{\gamma}_s}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Agora, considere $\varsigma_{i2} = \left[\frac{2}{\widehat{\alpha}} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \widehat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right]$ e $\frac{\partial y_i}{\partial \widehat{\gamma}_s} = \frac{\left(\frac{\partial \varsigma_{i2}}{\partial \widehat{\gamma}_s} \right)}{\left(\frac{\partial \varsigma_{i2}}{\partial y_i} \right)}$, $i = 1, \dots, n$ e $s = 1, \dots, p$. Sendo assim

$$\frac{\partial \varsigma_{i2}}{\partial \widehat{\gamma}_s} = \left[\frac{2}{\widehat{\alpha}} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \widehat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{is}}{2} \right)$$

e

$$\frac{\partial \varsigma_{i2}}{\partial y_i} = \left[\frac{2}{\widehat{\alpha}} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \widehat{\boldsymbol{\gamma}}}{2} \right) \right] \left(\frac{1}{2} \right).$$

Portanto

$$-\frac{\left(\frac{\partial F(y_i; \widehat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \widehat{\gamma}_s} \right)}{f(y_i; \widehat{\boldsymbol{\theta}})} = x_{is}, \quad i = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad s = 1, \dots, p.$$

Dados Censurados

Sejam $y_1, \dots, y_n$ variáveis aleatórias independentes, tais que $y_i \sim \text{log-BS}(\alpha, \mu_i = \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\gamma})$ para $i = 1, \dots, n$, isto é,

$$f(y_i; \boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{1}{\alpha \sqrt{2\pi}} \right) \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\gamma}}{\sigma} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right\}$$

e

$$S(y_i; \boldsymbol{\theta}) = 1 - \Phi \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right],$$

em que $y_i \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\gamma}^{\top}, \alpha)^{\top}$ e Φ é a fda da normal padrão.

O logaritmo da função de verossimilhança para o modelo baseado em uma amostra com censura é denotado por

$$\begin{aligned}
\ell(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i \in \bar{C}} \log(f(y_i; \boldsymbol{\theta})) + \sum_{i \in C} \log(S(y_i; \boldsymbol{\theta})) \\
&= -\frac{r}{2} \log(8\pi) + \sum_{i \in \bar{C}} \log\left(\frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right)\right) - \frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right)\right]^2 \\
&\quad + \sum_{i \in C} \log\left(1 - \Phi\left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right)\right]\right) \\
&= c + \sum_{i \in \bar{C}} \log\left(\frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right)\right) - \frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right)\right]^2 \\
&\quad + \sum_{i \in C} \log\left(1 - \Phi\left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right)\right]\right) \\
&= c + \sum_{i \in \bar{C}} \log(\xi_{i1}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \xi_{i2}^2 + \sum_{i \in C} \log(1 - \Phi(\xi_{i2})), \tag{B.3}
\end{aligned}$$

em que $c = -\frac{r}{2} \log(8\pi)$, $\xi_{i1} = \frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right)$ e $\xi_{i2} = \frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right)$ com $i = 1, \dots, n$ e $s = 1, \dots, p$.

Portanto, o vetor escore é definido por

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \left[\ell_{\boldsymbol{\gamma}}^\top, \ell_{\alpha} \right]^\top,$$

em que

$$\begin{aligned}
\ell_{\boldsymbol{\gamma}}^{(s)} &= \sum_{i \in \bar{C}} \frac{1}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right)\right]} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right)\right] \left(-\frac{x_{is}}{2}\right) \\
&\quad - \sum_{i \in \bar{C}} \frac{1}{2} \frac{2}{\alpha} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right)\right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right)\right] \left(-\frac{x_{is}}{2}\right) \\
&\quad - \sum_{i \in C} \frac{\phi\left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right)\right]}{1 - \Phi\left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right)\right]} \left[\frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right)\right] \left(-\frac{x_{is}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right)\right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right)\right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right)\right]}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right)\right]} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i \in C} x_{is} \frac{\phi\left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right)\right]}{1 - \Phi\left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right)\right]} \left[\frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} \left(\xi_{i2} \xi_{i1} - \frac{\xi_{i2}}{\xi_{i1}}\right) + \frac{1}{2} \sum_{i \in C} x_{is} \xi_{i1} h(\xi_{i2}), \quad s = 1, \dots, p, \tag{B.4}
\end{aligned}$$

em que $h(\xi_{i2}) = \frac{\phi(\xi_{i2})}{1-\Phi(\xi_{i2})}$ com $i = 1, \dots, n$, ϕ e Φ sendo a fdp e a fda normal padrão, respectivamente.

Além disso,

$$\begin{aligned}
 \ell_\alpha &= \sum_{i \in \bar{C}} \frac{1}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]} \left[-\frac{2}{\alpha^2} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
 &\quad - \sum_{i \in \bar{C}} \frac{1}{2} \frac{2}{\alpha} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[-\frac{2}{\alpha^2} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
 &\quad - \sum_{i \in C} \frac{\phi \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]}{1 - \Phi \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]} \left[-\frac{2}{\alpha^2} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
 &= -\frac{r}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i \in \bar{C}} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{i \in C} \frac{\phi \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]}{1 - \Phi \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]} \\
 &\quad \times \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
 &= -\frac{r}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i \in \bar{C}} \xi_{i2}^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{i \in C} \xi_{i2} h(\xi_{i2}) \\
 &= \frac{1}{\alpha} \left[\sum_{i \in \bar{C}} (\xi_{i2}^2 - 1) + \sum_{i \in C} \xi_{i2} h(\xi_{i2}) \right].
 \end{aligned}$$

As segundas derivadas do logaritmo da função de verossimilhança dado em (B.3) são dadas por

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_s \partial \gamma_t} &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{it}}{2} \right) \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{it}}{2} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{it}}{2} \right) \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{it}}{2} \right)}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i \in C} x_{is} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{it}}{2} \right) h \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i \in C} x_{is} \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] h' \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
 &\quad \times \left(-\frac{x_{it}}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} x_{it} \left\{ 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 + \frac{4}{\alpha^2} - 1 + \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2}{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 + \frac{4}{\alpha^2}} \right\} \\
&\quad - \frac{1}{4} \sum_{i \in C} x_{is} x_{it} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] h \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \frac{4}{\alpha^2} + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right\} h' \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \right\} \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} x_{it} \left\{ 2 \xi_{i2}^2 + \frac{4}{\alpha^2} - 1 + \frac{\xi_{i2}^2}{\xi_{i2}^2 + \frac{4}{\alpha^2}} \right\} \\
&\quad - \frac{1}{4} \sum_{i \in C} x_{ij} x_{ik} \left\{ \xi_{i2} h(\xi_{i2}) + \left(\frac{4}{\alpha^2} + \xi_{i2}^2 \right) h'(\xi_{i2}) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha \partial \gamma_s} &= \frac{1}{\alpha} \sum_{i \in \bar{C}} 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(\frac{-x_{is}}{2} \right) \\
&\quad + \frac{1}{\alpha} \sum_{i \in C} \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(\frac{-x_{is}}{2} \right) h \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \\
&\quad + \frac{1}{\alpha} \sum_{i \in C} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] h' \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
&\quad \times \left(\frac{-x_{is}}{2} \right) \\
&= -\frac{1}{\alpha} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
&\quad - \frac{1}{2\alpha} \sum_{i \in C} x_{is} \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] h \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2\alpha} \sum_{i \in C} x_{is} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] h' \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \\
&\quad \times \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
&= -\frac{1}{\alpha} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} \xi_{i2} \xi_{i1} - \frac{1}{2\alpha} \sum_{i \in C} x_{is} \xi_{i1} [h(\xi_{i2}) + \xi_{i2} h'(\xi_{i2})], \quad s = 1, \dots, p,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha^2} &= \frac{r}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i \in \bar{C}} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \\
&\quad + \frac{1}{\alpha} \sum_{i \in \bar{C}} 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[-\frac{2}{\alpha^2} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
&\quad + \sum_{i \in C} \left\{ \left\{ -\frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] + \frac{1}{\alpha} \left[-\frac{2}{\alpha^2} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \right\} \right. \\
&\quad \left. \times h \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\alpha} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] h' \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \left[-\frac{2}{\alpha^2} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \Big\} \\
& = \frac{r}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i \in \bar{C}} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \\
& + \frac{1}{\alpha} \sum_{i \in \bar{C}} 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{1}{\alpha} \right) \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
& + \sum_{i \in C} \left\{ \left[-\frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] - \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \right\} \right. \\
& \times h \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \\
& + \frac{1}{\alpha} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] h' \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \left(-\frac{1}{\alpha} \right) \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \Big\} \\
& = \frac{r}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i \in \bar{C}} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \\
& - \frac{2}{\alpha^2} \sum_{i \in \bar{C}} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
& - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i \in C} \left\{ 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] h \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right. \\
& \times h' \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \Big\} \\
& = \frac{r}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i \in \bar{C}} \xi_{i2}^2 - \frac{2}{\alpha^2} \sum_{i \in \bar{C}} \xi_{i2}^2 - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i \in C} 2 \xi_{i2} h(\xi_{i2}) - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i \in C} \xi_{i2}^2 h'(\xi_{i2}) \\
& = \frac{r}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha^2} \sum_{i \in \bar{C}} \xi_{i2}^2 - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i \in C} [2 \xi_{i2} h(\xi_{i2}) + \xi_{i2}^2 h'(\xi_{i2})],
\end{aligned}$$

sendo $h'(\xi_{i2}) = \frac{\phi'(\xi_{i2})}{1-\Phi(\xi_{i2})} + \left[\frac{\phi(\xi_{i2})}{1-\Phi(\xi_{i2})} \right]^2$ e $\phi'(\xi_{i2}) = \phi(\xi_{i2}) (-\xi_{i2})$ com $i = 1, \dots, n$.

Derivando os componentes $\ell_{\boldsymbol{\gamma}}^{(s)}$ do vetor escore de $\boldsymbol{\gamma}$ ($s = 1, \dots, p$) expresso em (B.4) com relação ao vetor de observações $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$ avaliado em $(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha)$, obtemos a matriz $\ell_{\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{y}}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha)$ com dimensão $p \times n$ e elemento (s, i) expresso por

$$\ell_{\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{y}}^{(s,i)}(\alpha, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{4} x_{is} \left\{ 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 + \frac{4}{\alpha^2} - 1 \right. \\ \left. + \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2}{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 + \frac{4}{\alpha^2}} \right\}, & \text{se } i \in \overline{C}, \\ \\ \frac{1}{4} x_{is} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right] h \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right] \right. \\ \left. + \left(\frac{4}{\alpha^2} + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right) h' \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right] \right\}, & \text{se } i \in C. \end{cases}$$

APÊNDICE C – CÁLCULOS UTILIZANDO O NÚCLEO DA t DE STUDENT

No Apêndice C, apresentamos os cálculos de algumas derivadas utilizando o núcleo da t de Student na presença, ou não, de censura.

Dados Completos

Sejam $y_1, \dots, y_n$ variáveis aleatórias independentes, tais que $y_i \sim \text{log-BS-}t(\alpha, \mu_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}, \nu)$ para $i = 1, \dots, n$, isto é

$$f(y_i; \boldsymbol{\theta}) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{2\sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left[\frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right) \right] \left\{ 1 + \frac{1}{\nu} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right) \right]^2 \right\}^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)},$$

em que $y_i \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\gamma}^\top, \alpha)^\top$ e Γ é a função gama.

O logaritmo da função de verossimilhança para $\boldsymbol{\theta}$ é dado por

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^n \left\{ \log \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{2\sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right) + \log \left(\frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \log \left(1 + \frac{1}{\nu} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right) \right]^2 \right) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \log \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{2\sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right) + \log \left(\frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \log \left(\nu + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right) \right]^2 \right) + \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \log(\nu) \right\} \\ &= n \left[\log \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{2\sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right) + \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \log(\nu) \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left\{ \log \left(\frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right) \right) - \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \log \left(\nu + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right) \right]^2 \right) \right\} \\ &= c + \sum_{i=1}^n \left\{ \log(\xi_{i1}) - \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \log(\nu + \xi_{i2}^2) \right\}, \end{aligned} \tag{C.1}$$

em que $c = n \left[\log \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{2\sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right) + \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \log(\nu) \right]$, $\xi_{i1} = \frac{2}{\alpha} \cosh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right)$ e $\xi_{i2} = \frac{2}{\alpha} \sinh\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2}\right)$ com $i = 1, \dots, n$.

Sendo assim, a função escore total é definida por

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \left[\ell_{\boldsymbol{\gamma}}^\top, \ell_{\alpha} \right]^\top,$$

em que

$$\begin{aligned}
\ell_{\boldsymbol{\gamma}}^{(s)} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{is}}{2} \right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\nu + 1}{2} \right) \frac{2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{is}}{2} \right)}{\left[\nu + \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right)^2 \right]} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_{is} \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_{is} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \frac{\nu + 1}{\left[\nu + \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right)^2 \right]} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_{is} \left(\xi_{i2} \xi_{i1} w(\xi_{i2}^2) - \frac{\xi_{i2}}{\xi_{i1}} \right), \quad s = 1, \dots, p, \tag{C.2}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\ell_{\alpha} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]} \left[-\frac{2}{\alpha^2} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\nu + 1}{2} \right) \frac{2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[-\frac{2}{\alpha^2} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]}{\left[\nu + \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right)^2 \right]} \\
&= -\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]} + \left(\frac{\nu + 1}{\alpha} \right) \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2}{\left[\nu + \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right)^2 \right]} \right\} \\
&= -\frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right)^2}{\alpha} \right] \frac{\nu + 1}{\left[\nu + \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right)^2 \right]} \\
&= -\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \xi_{i2}^2 w(\xi_{i2}^2),
\end{aligned}$$

em que $w(\xi_{i2}^2) = \frac{\nu+1}{[\nu+\xi_{i2}^2]}$ com $i = 1, \dots, n$.

As segundas derivadas do logaritmo da função de verossimilhança dado em (C.1) são dadas por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_s \partial \gamma_t} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_{is} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{it}}{2} \right) \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \right. \\
&\quad + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{it}}{2} \right) \left. \right\} w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_{is} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \right. \\
&\quad \times w' \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
&\quad \left. \left(-\frac{x_{it}}{2} \right) \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_{is} \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{it}}{2} \right) \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_{is} \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{it}}{2} \right)}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} x_{is} x_{it} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right\} \\
&\quad \times w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_{is} x_{it} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right\} \\
&\quad \times w' \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} x_{is} x_{it} \left\{ 1 - \left[\frac{\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right)}{\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right)} \right]^2 \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} x_{is} x_{it} (\xi_{i1}^2 + \xi_{i2}^2) w(\xi_{i2}^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_{is} x_{it} \xi_{i1}^2 \xi_{i2}^2 w'(\xi_{i2}^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} x_{is} x_{it} \left[\frac{\xi_{i2}^2 - \xi_{i1}^2}{\xi_{i1}^2} \right] \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} x_{is} x_{it} (\xi_{i1}^2 + \xi_{i2}^2) w(\xi_{i2}^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_{is} x_{it} \xi_{i1}^2 \xi_{i2}^2 w'(\xi_{i2}^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} x_{is} x_{it} \left[\frac{4/\alpha^2}{\xi_{i1}^2} \right] \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_{is} x_{it} \left[\frac{4/\alpha^2}{\xi_{i1}^2} \right] - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_{is} x_{it} (\xi_{i1}^2 + \xi_{i2}^2) w(\xi_{i2}^2) - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_{is} x_{it} 2\xi_{i1}^2 \xi_{i2}^2 w'(\xi_{i2}^2) \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_{is} x_{it} \left\{ \left[-\frac{4/\alpha^2}{\xi_{i1}^2} \right] + (\xi_{i1}^2 + \xi_{i2}^2) w(\xi_{i2}^2) + 2\xi_{i1}^2 \xi_{i2}^2 w'(\xi_{i2}^2) \right\}, \quad s, t = 1, \dots, p,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha \partial \gamma_s} &= \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left\{ 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{is}}{2} \right) \right. \\
&\quad \times w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) \\
&\quad + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 w' \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
&\quad \times \left. \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{is}}{2} \right) \right\} \\
&= -\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n x_{is} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \right. \\
&\quad \times w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) \\
&\quad + \left. \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^3 \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] w' \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) \right\} \\
&= -\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n x_{is} \xi_{i2} \xi_{i1} (w(\xi_{i2}^2) + \xi_{i2}^2 w'(\xi_{i2}^2)), \quad s = 1, \dots, p,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha^2} &= \frac{n}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left\{ 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[-\frac{2}{\alpha^2} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \right. \\
&\quad \times w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) \\
&\quad + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 w' \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
&\quad \times \left. \left[-\frac{2}{\alpha^2} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \right\} \\
&= \frac{n}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) \right. \\
&\quad - \frac{2}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) \\
&\quad + \left. \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^4 w' \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) \right\} \\
&= \frac{n}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \xi_{i2}^2 w(\xi_{i2}^2) - \frac{2}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \xi_{i2}^4 w'(\xi_{i2}^2).
\end{aligned}$$

Derivando os componentes $\ell_{\gamma}^{(s)}$ do vetor escore de γ ($s = 1, \dots, p$) expresso em (C.2) com relação ao vetor de observações $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$ avaliado em $(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$, obtemos a matriz $\ell_{\gamma;\mathbf{y}}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha)$ com dimensão $p \times n$ e elemento (s, i) expresso por

$$\begin{aligned}
\ell_{\gamma;\mathbf{y}}^{(s,i)}(\alpha, \hat{\gamma}_\alpha) &= \frac{1}{2} x_{is} \left\{ \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right] \left(\frac{1}{2} \right) \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right] \right. \right. \\
&\quad + \left. \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right] \left(\frac{1}{2} \right) \right\} \\
&\quad \times w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right) \\
&\quad + \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right] w' \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right) \\
&\quad \times 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right] \left(\frac{1}{2} \right) \\
&\quad - \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right] \left(\frac{1}{2} \right) \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2} \\
&\quad + \left. \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right] \left(\frac{1}{2} \right)}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2} \right\} \\
&= \frac{1}{2} x_{is} \left\{ \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right\} \right. \\
&\quad \times w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right) \\
&\quad + \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \\
&\quad \times w' \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right) - \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2} \right\} \left. \right\} \\
&= \frac{1}{4} x_{is} \left\{ \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right\} \right. \\
&\quad \times w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right) \\
&\quad + 2 \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \\
&\quad \times w' \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\gamma}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right) \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 - \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2} \Bigg\} \\
& = \frac{1}{4} x_{is} \left\{ - \frac{4/\alpha^2}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2} \right. \\
& + \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right\} \\
& \times w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right) \\
& + 2 \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \\
& \times w' \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha}{2} \right) \right]^2 \right) \Bigg\},
\end{aligned}$$

com $i = 1, \dots, n$.

Dados Censurados

Sejam $y_1, \dots, y_n$ variáveis aleatórias independentes, tais que $y_i \sim \text{log-BS-}t(\alpha, \mu_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}, \nu)$ para $i = 1, \dots, n$, isto é

$$f(y_i; \boldsymbol{\theta}) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{2\sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left\{ 1 + \frac{1}{\nu} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right\}^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}$$

e

$$S(y_i; \boldsymbol{\theta}) = 1 - \Phi_t \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right),$$

em que $y_i \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\gamma}^\top, \alpha)^\top$, Γ é a função gama e Φ_t é a fda da t -Student.

O logaritmo natural da função de verossimilhança para o modelo baseado em uma amostra com censura é denotado por

$$\begin{aligned}
\ell(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i \in \bar{C}} \log(f(y_i; \boldsymbol{\theta})) + \sum_{i \in C} \log(S(y_i; \boldsymbol{\theta})) \\
&= \sum_{i \in \bar{C}} \left\{ \log \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{2\sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right) + \log \left(\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \log \left(1 + \frac{1}{\nu} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i \in C} \log \left(1 - \Phi_t \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \right) \\
& = \sum_{i \in \bar{C}} \left\{ \log \left(\frac{\Gamma \left(\frac{\nu+1}{2} \right)}{2\sqrt{\nu\pi} \Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right)} \right) + \log \left(\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \log \left(\nu + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) + \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \log(\nu) \right\} \\
& + \sum_{i \in C} \log \left(1 - \Phi_t \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \right) \\
& = r \left[\log \left(\frac{\Gamma \left(\frac{\nu+1}{2} \right)}{2\sqrt{\nu\pi} \Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right)} \right) + \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \log(\nu) \right] \\
& + \sum_{i \in \bar{C}} \left\{ \log \left(\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) - \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \log \left(\nu + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) \right\} \\
& + \sum_{i \in C} \log \left(1 - \Phi_t \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \right) \\
& = c + \sum_{i \in \bar{C}} \left\{ \log(\xi_{i1}) - \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \log(\nu + \xi_{i2}^2) \right\} + \sum_{i \in C} (1 - \Phi_t(\xi_{i2})), \tag{C.3}
\end{aligned}$$

em que $c = r \left[\log \left(\frac{\Gamma \left(\frac{\nu+1}{2} \right)}{2\sqrt{\nu\pi} \Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right)} \right) + \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \log(\nu) \right]$ sendo r é o número de falhas, Φ_t é a fda t -Student com $i = 1, \dots, n$, $\xi_{i1} = \frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right)$ e $\xi_{i2} = \frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right)$.

Sendo assim, o vetor escore total é dado por

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \left[\ell_{\boldsymbol{\gamma}}^\top, \ell_{\alpha} \right]^\top,$$

em que

$$\begin{aligned}
\ell_{\boldsymbol{\gamma}}^{(s)} & = \sum_{i \in \bar{C}} \frac{1}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{is}}{2} \right) \\
& \quad - \sum_{i \in \bar{C}} \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \frac{2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{is}}{2} \right)}{\left[\nu + \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right)^2 \right]} \\
& \quad - \sum_{i \in C} \frac{\phi_t \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]}{1 - \Phi_t \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]} \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{is}}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \frac{\nu + 1}{\left[\nu + \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right)^2 \right]} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i \in C} x_{is} \frac{\phi_t \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]}{1 - \Phi_t \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]} \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} \left(\xi_{i2} \xi_{i1} w(\xi_{i2}^2) - \frac{\xi_{i2}}{\xi_{i1}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \in C} x_{is} \xi_{i1} h(\xi_{i2}), \quad s = 1, \dots, p, \tag{C.4}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\ell_\alpha &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]} \left[-\frac{2}{\alpha^2} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
&- \sum_{i=1}^n \left(\frac{\nu + 1}{2} \right) \frac{2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[-\frac{2}{\alpha^2} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]}{\left[\nu + \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right)^2 \right]} \\
&- \sum_{i \in C} \frac{\phi_t \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]}{1 - \Phi_t \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]} \left[-\frac{2}{\alpha^2} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
&= -\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]} + \left(\frac{\nu + 1}{\alpha} \right) \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2}{\left[\nu + \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right)^2 \right]} \right\} \\
&+ \frac{1}{\alpha} \sum_{i \in C} \frac{\phi_t \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]}{1 - \Phi_t \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
&= -\frac{r}{\alpha} + \sum_{i \in \bar{C}} \left[\frac{\left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right)^2}{\alpha} \right] \frac{\nu + 1}{\left[\nu + \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right)^2 \right]} \\
&+ \frac{1}{\alpha} \sum_{i \in C} \frac{\phi_t \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]}{1 - \Phi_t \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
&= -\frac{r}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i \in \bar{C}} \xi_{i2}^2 w(\xi_{i2}^2) + \frac{1}{\alpha} \sum_{i \in C} \xi_{i2} h(\xi_{i2}) \\
&= -\frac{r}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \left\{ \sum_{i \in \bar{C}} \xi_{i2}^2 w(\xi_{i2}^2) + \sum_{i \in C} \xi_{i2} h(\xi_{i2}) \right\},
\end{aligned}$$

em que $w(\xi_{i2}^2) = \frac{\nu+1}{[\nu+\xi_{i2}^2]}$ e $h(\xi_{i2}) = \frac{\phi_t(\xi_{i2})}{1-\Phi_t(\xi_{i2})}$ com $i = 1, \dots, n$.

As segundas derivadas do logaritmo da função de verossimilhança dado em (C.3) são dadas por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_s \partial \gamma_t} &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{it}}{2} \right) \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \right. \\
&\quad + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{it}}{2} \right) \Big\} \\
&\quad \times w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \right. \\
&\quad \times w' \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
&\quad \times \left(-\frac{x_{it}}{2} \right) \Big\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{it}}{2} \right) \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} \frac{\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{it}}{2} \right)}{\left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i \in C} x_{is} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{it}}{2} \right) h \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i \in C} x_{is} \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] h' \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
&\quad \times \left(-\frac{x_{it}}{2} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} \frac{1}{2} x_{is} x_{it} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right\} \\
&\quad \times w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} x_{it} \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \\
&\quad \times w' \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} \frac{1}{2} x_{is} x_{it} \left\{ 1 - \left[\frac{\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right)}{\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right)} \right]^2 \right\} \\
& - \frac{1}{4} \sum_{i \in C} x_{is} x_{it} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] h \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \\
& - \frac{1}{4} \sum_{i \in C} x_{is} x_{it} \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 h' \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \\
& = -\frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} \frac{1}{2} x_{is} x_{it} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right\} \\
& \times w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} x_{it} \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \\
& \times w' \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} \frac{1}{2} x_{is} x_{it} \left\{ 1 - \left[\frac{\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right)}{\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right)} \right]^2 \right\} \\
& - \frac{1}{4} \sum_{i \in C} x_{is} x_{it} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] h \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \\
& - \frac{1}{4} \sum_{i \in C} x_{is} x_{it} \left\{ \frac{4}{\alpha^2} + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right\} h' \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \\
& = -\frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} \frac{1}{2} x_{is} x_{it} (\xi_{i1}^2 + \xi_{i2}^2) w(\xi_{i2}^2) - \frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} x_{it} \xi_{i1}^2 \xi_{i2}^2 w'(\xi_{i2}^2) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{C}} \frac{1}{2} x_{is} x_{it} \left[\frac{\xi_{i2}^2 - \xi_{i1}^2}{\xi_{i1}^2} \right] \\
& - \frac{1}{4} \sum_{i \in C} x_{ij} x_{ik} \left\{ \xi_{i2} h(\xi_{i2}) + \left(\frac{4}{\alpha^2} + \xi_{i2}^2 \right) h'(\xi_{i2}) \right\} \\
& = \frac{1}{4} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} x_{it} \left[\frac{4/\alpha^2}{\xi_{i1}^2} \right] - \frac{1}{4} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} x_{it} (\xi_{i1}^2 + \xi_{i2}^2) w(\xi_{i2}^2) - \frac{1}{4} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} x_{it} 2 \xi_{i1}^2 \xi_{i2}^2 w'(\xi_{i2}^2) \\
& - \frac{1}{4} \sum_{i \in C} x_{ij} x_{ik} \left\{ \xi_{i2} h(\xi_{i2}) + \left(\frac{4}{\alpha^2} + \xi_{i2}^2 \right) h'(\xi_{i2}) \right\}, \\
& = -\frac{1}{4} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} x_{it} \left\{ \left[-\frac{4/\alpha^2}{\xi_{i1}^2} \right] + (\xi_{i1}^2 + \xi_{i2}^2) w(\xi_{i2}^2) + 2 \xi_{i1}^2 \xi_{i2}^2 w'(\xi_{i2}^2) \right\} \\
& - \frac{1}{4} \sum_{i \in C} x_{ij} x_{ik} \left\{ \xi_{i2} h(\xi_{i2}) + \left(\frac{4}{\alpha^2} + \xi_{i2}^2 \right) h'(\xi_{i2}) \right\}, \quad s, t = 1, \dots, p,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha \partial \gamma_s} &= \frac{1}{\alpha} \sum_{i \in \bar{C}} \left\{ 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{is}}{2} \right) \right. \\
&\quad \times w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) \\
&\quad + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 w' \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
&\quad \left. \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{is}}{2} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{\alpha} \sum_{i \in C} \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left(-\frac{x_{is}}{2} \right) h \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \\
&\quad + \frac{1}{\alpha} \sum_{i \in C} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] h' \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
&\quad \times \left(-\frac{x_{is}}{2} \right) \\
&= -\frac{1}{\alpha} \sum_{i \in \bar{C}} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) \right. \\
&\quad + \left. \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^3 \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] w' \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2\alpha} \sum_{i \in C} x_{is} \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] h \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2\alpha} \sum_{i \in C} x_{is} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] h' \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) \\
&\quad \times \left[\frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
&= -\frac{1}{\alpha} \sum_{i \in \bar{C}} x_{is} \xi_{i2} \xi_{i1} (w(\xi_{i2}^2) + \xi_{i2}^2 w'(\xi_{i2}^2)) \\
&\quad - \frac{1}{2\alpha} \sum_{i \in C} x_{is} \xi_{i1} [h(\xi_{i2}) + \xi_{i2} h'(\xi_{i2})], \quad s = 1, \dots, p,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha^2} &= \frac{r}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i \in \bar{C}} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{\alpha} \sum_{i \in \bar{C}} \left\{ 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \left[-\frac{2}{\alpha^2} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \right. \\
&\quad \times w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 w' \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) 2 \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \\
& \times \left[-\frac{2}{\alpha^2} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \Bigg\} \\
& + \sum_{i \in C} \left\{ \left[-\frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] + \frac{1}{\alpha} \left[-\frac{2}{\alpha^2} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \right] \right\} \\
& \times h \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \\
& + \frac{1}{\alpha} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] h' \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \left[-\frac{2}{\alpha^2} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \Bigg\} \\
& = \frac{r}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i \in \bar{C}} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) \\
& - \frac{2}{\alpha^2} \sum_{i \in \bar{C}} \left\{ \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 w \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) \right. \\
& \left. + \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^4 w' \left(\left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right]^2 \right) \right\} \\
& + \sum_{i \in C} \left\{ \left[-\frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] - \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \right] \right\} \\
& \times h \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \\
& + \frac{1}{\alpha} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] h' \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right) \left(-\frac{1}{\alpha} \right) \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}}{2} \right) \right] \Bigg\} \\
& = \frac{r}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha^2} \sum_{i \in \bar{C}} \xi_{i2}^2 w(\xi_{i2}^2) - \frac{2}{\alpha^2} \sum_{i \in \bar{C}} \xi_{i2}^4 w'(\xi_{i2}^2) - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i \in C} \left[2 \xi_{i2} h(\xi_{i2}) + \xi_{i2}^2 h'(\xi_{i2}) \right],
\end{aligned}$$

sendo $h'(\xi_{i2}) = \frac{\phi'_t(\xi_{i2})}{1 - \Phi_t(\xi_{i2})} + \left[\frac{\phi_t(\xi_{i2})}{1 - \Phi_t(\xi_{i2})} \right]^2$ e $\phi'_t(\xi_{i2}) = \phi_t(\xi_{i2}) (-\xi_{i2}) w(\xi_{i2}^2)$ com $i = 1, \dots, n$.