



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

José Alan Farias dos Santos

Um estudo geométrico da dinâmica do dumb-bell

Recife

2020

José Alan Farias dos Santos

Um estudo geométrico da dinâmica do dumb-bell

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientador: Hildeberto Eulálio Cabral

Recife

2020

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

S237e Santos, José Alan Farias dos
Um estudo geométrico da dinâmica do dumb-bell / José Alan Farias dos Santos. – 2020.
61 f.: il., fig.

Orientador: Hildeberto Eulálio Cabral.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2020.
Inclui referências e apêndices.

1. Análise. 2. Métrica cinética. I. Cabral, Hildeberto Eulálio (orientador). II. Título.

515 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2021 - 41

JOSÉ ALAN FARIAS DOS SANTOS

UM ESTUDO GEOMÉTRICO DA DINÂMICA DO DUMB-BELL

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 30/10/2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Hildeberto Eulalio Cabral (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Eduardo Shirlippe Goes Leandro (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Henrique de Barros Correia Vitório (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Dr. Marcelo Pedro dos Santos (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

À mainha, à Gabi, à Toddy, Tobias, Branca e June.

AGRADECIMENTOS

As minhas, que fizeram esta experiência menos dolorosa (amo matemática, difícil foi lidar com o fantasma diário do prazo de uma tese), me refiro a minha mãe (Dona Rosinha), a minha companheira (Gabi), a minha arca de noé (Toddy, Tobias, Branca, June), esta vitória não é só minha. Ao meu avô (Seu Zezinho) que é minha referência de pessoa, caráter e por sua capacidade imaginativa, apesar de não ter tido a oportunidade de frequentar a escola. Não poderia deixar de mencionar a Dra Ludmilla, que sempre me ajudou a trilhar e a sair de vários labirintos, tarefas que sozinho eu teria muito mais dificuldades. Aos meus amigos, que sempre acreditaram em mim e me deram apoio, cada um a sua maneira. Ao meu orientador, o professor Hildeberto (segundo Gabi, o meu vovô preferido), pela imensa paciência, disponibilidade e por me proporcionar sempre a tranquilidade para acreditar nos frutos de dedicação ao trabalho. Aos membros da banca, os professores Eduardo Leandro, Henrique Vitória, Thiago Dias e Marcelo Pedro, pelas ótimas sugestões e por me darem a oportunidade de discutir sobre este trabalho. Ao meu amigo Luiz da Silva, pelos conselhos e conversas sobre fazer ciência, por ter lido este trabalho e sugerir algumas correções relevantes. Aos meus colegas do DM-UFRPE, pelo suporte e paciência, que me permitiram dedicar-me a conclusão do meu doutorado. E a todos que de alguma forma me ajudaram na concretização deste sonho.

"Triunfar na vida não é ganhar. É levantar e recomeçar cada vez que se cai."(PEPE MUJICA, 2020)

RESUMO

Neste trabalho fizemos uma abordagem geométrica no estudo da dinâmica do dumb-bell em duas situações. Na primeira situação, o dumb-bell é submetido ao campo gravitacional uniforme e consideramos dois casos. Em um, a sua haste é inextensível, em outro, sua haste tem comprimento variável e se estende como um oscilador harmônico simples. Na segunda situação, a haste do dumb-bell é inextensível, e se move sob a ação de um campo central Newtoniano devido a uma massa muito grande fixa em um ponto do espaço. Em todas as situações abordadas introduzimos coordenadas convenientes no espaço de configurações Q , o que nos permite obter uma expressão simples para a métrica cinética K do sistema mecânico simples (Q, K, V) associado, onde V é a função potencial. A expressão para o Lagrangeano nestas coordenadas é simples e permite que resolvamos completamente o sistema das equações de Euler-Lagrange na primeira situação e provamos a existência de dois tipos de soluções para o movimento do dumb-bell no caso do campo de força Newtoniano. Um aspecto importante de nossa abordagem é que não fazemos a restrição encontrada usualmente na literatura, de que o centro de massa do dumb-bell move-se ao longo de uma órbita Kepleriana fixa. Ademais, apresentamos uma breve justificativa de que tal restrição de fato não pode ser feita.

Palavras-chaves: Dumb-bell. Espaço de configurações. Métrica cinética. Potencial uniforme. Potencial atrator. Euler-Lagrange.

ABSTRACT

In this work we did a geometric approach in the study of dumb-bell dynamics in two situations. In the first situation, the dumb-bell is submitted to the uniform gravitational field and we consider two cases. In one, its stem is inextensible, in the another, its stem has variable length and extends like a simple harmonic oscillator. In the second situation, the dumb-bell rod is inextensible, and moves under the action of a Newtonian central field due to a very large mass fixed at one point of space. In all the situations addressed we introduce convenient coordinates into the space configurations space Q which allows us to obtain a simple expression for the kinetic metric K of the associated simple mechanical system (Q, K, V) , here V is the potential function. The expression for Lagrangeano in these coordinates is simple and allows us to completely solve the system of Euler-Lagrange equations in the first situation and prove the existence of two types of solutions for dumb-bell movement in the case of the Newtonian force field. An important aspect of our approach is that we do not make the restriction usually found in the literature that the dumb-bell center of mass moves along a fixed Keplerian orbit. In addition, we provide a brief justification that such a restriction in fact cannot be made.

Keywords: Dumb-bell. Configuration Space. Kinetic Metric. Uniform Potential. Attractor Potential. Euler-Lagrange.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ilustração do dumb-bell sob a ação do potencial gravitacional terrestre (vertical e uniforme).	15
Figura 2 – Ilustração do vetor centro de massa, \mathbf{r}_c , e do vetor diretor do dumb-bell, \mathbf{e}	16
Figura 3 – Ilustração das relações entre os vetores posição $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ das massas e os vetores diretores do centro de massa, \mathbf{r}_c , e do dumb-bell, \mathbf{e}	17
Figura 4 – Parábola que representa o centro de massa do dumb-bell.	19
Figura 5 – Coordenadas esféricas θ, ϕ do vetor diretor e do dumb-bell.	19
Figura 6 – Ilustração da parametrização do espaço de configurações do dumb-bell no campo vertical uniforme.	20
Figura 7 – Exemplos de soluções no caso I)	25
Figura 8 – Exemplos de soluções no caso II)	25
Figura 9 – Exemplos de soluções no caso III)	26
Figura 10 – Dumb-bell com a haste harmônica.	27
Figura 11 – Coordenadas esféricas θ, ϕ do vetor diretor e do dumb-bell com a haste harmônica	29
Figura 12 – Potencial atrator central.	37
Figura 13 – A força resultante no centro de massa do dumb-bell não é uma força central.	39
Figura 14 – Órbita como uma sucessão de elipses Keplerianas instantâneas.	40
Figura 15 – Evolução de uma órbita partindo de um mesmo ponto e com mesma velocidade inicial de uma órbita Kepleriana fixada.	41
Figura 16 – Longitude θ e Latitude ϕ do vetor diretor do dumb-bell, \mathbf{e} , relativas ao referencial móvel C_2	42
Figura 17 – Vetores $\mathbf{r}(\nu)$, \mathbf{u} , \mathbf{r}_c , \mathbf{e}	43
Figura 18 – Órbita do centro de massa do dumb-bell em vermelho, representada em três instantes distintos $\nu_0 = \nu(0)$, $\nu_1 = \nu(t_1)$, $\nu_2 = \nu(t_2)$	48
Figura 19 – Exemplo de um dumb-bell no campo atrator com o vetor diretor e o vetor do centro de massa perpendiculares.	51
Figura 20 – Exemplo de um dumb-bell no campo atrator com o vetor diretor perpendicular ao plano da elipse fixada.	51

Figura 21 – Exemplo de um dumb-bell no campo atrator contido no plano da elipse fixada, com o vetor diretor e o centro de massa não alinhados.	53
Figura 22 – Exemplo de um dumb-bell no campo atrator contido no plano da elipse e com o vetor diretor alinhado com o vetor do centro de massa.	54
Figura 23 – Elementos orbitais	59
Figura 24 – Referencial orbital	60

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	O DUMB-BELL NO CAMPO GRAVITACIONAL UNIFORME	15
2.1	O DUMB-BELL EM UM CAMPO UNIFORME E COM A HASTE INEXTENSÍVEL	16
2.1.1	Espaço de configurações	16
2.1.2	Movimento do centro de massa do dumb-bell	17
2.1.3	Coordenadas generalizadas e parametrização local de Q	19
2.1.4	A métrica cinética em coordenadas locais	20
2.1.5	Potencial e energia cinética em coordenadas locais	21
2.1.6	As equações de Euler-Lagrange	22
2.1.7	Solução das equações da latitude e da longitude	22
2.1.8	Coleção das soluções	24
2.1.9	Algumas considerações finais e perspectivas futuras	26
2.2	O DUMB-BELL EM UM CAMPO UNIFORME E COM A HASTE HARMÔNICA	27
2.2.1	Espaço de configurações	27
2.2.2	Parametrização (coordenadas generalizadas) local	28
2.2.3	A métrica cinética em coordenadas locais	29
2.2.4	Potencial e energia cinética em coordenadas locais	30
2.2.5	As equações de Euler-Lagrange	30
2.2.6	Soluções das equações de Euler-Lagrange	31
2.2.7	Coleção das soluções	35
3	O DUMB-BELL NO CAMPO GRAVITACIONAL CENTRAL	37
3.1	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	37
3.2	MOVIMENTO DO CENTRO DE MASSA DO DUMB-BELL	38
3.3	A ÓRBITA ELÍPTICA FIXADA PARA A ANÁLISE	40
3.4	COORDENADAS GENERALIZADAS E PARAMETRIZAÇÃO LOCAL DE Q	42
3.5	MÉTRICA CINÉTICA EM COORDENADAS LOCAIS	44
3.6	POTENCIAL E ENERGIA CINÉTICA EM COORDENADAS LOCAIS	45
3.7	EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE EM COORDENADAS LOCAIS	46

3.8	SOLUÇÕES PARTICULARES DO PROBLEMA DO DUMB-BELL	48
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS	55
	REFERÊNCIAS	56
	APÊNDICE A – PROBLEMA DE KEPLER	57
	APÊNDICE B – ELEMENTOS ORBITAIS	58
	APÊNDICE C – REFERENCIAL ORBITAL	60

1 INTRODUÇÃO

Um dumb-bell (haltere em inglês) é um corpo rígido constituído por duas massas conectadas por uma haste. O problema do dumb-bell é, usualmente, considerado como o estudo deste corpo rígido sob a ação gravitacional de um centro atrator Newtoniano, isto é, um corpo de massa muito grande comparada com a do dumb-bell e a uma distância muito grande quando comparada às dimensões deste.

Neste trabalho estendemos esta aceção ao contexto em que o dumb-bell move-se no campo da gravidade uniforme na superfície da Terra.

O dumb-bell é bastante usado para representar uma nave espacial ou um asteróide com uma distribuição em massas bimodais, ver (MCCLAMROCH N.H., 2004). Com respeito a existência de asteróides com formato aproximado de um dumb-bell citamos no roda-pé um pequeno texto da referência (H., 2002)¹.

O estudo da dinâmica do dumbbell é comumente feito admitindo que o seu centro de massa descreve uma órbita Kepleriana, como em Celletti (V., 2008) e outros autores citados em (SIMPSON L., 2013). Mas, a rigor, esta restrição não pode ser feita, ver o comentário "In many cases, e.g., for some double asteroids, such approximation is not well justified" no artigo (SIMPSON L., 2013).

Em nossa abordagem não fazemos esta restrição e no Capítulo 3 justificamos esta decisão.

Estudamos o problema como um sistema mecânico simples (Q, K, V) como definido em Smale (S., 1970), onde Q é uma variedade diferenciável que representa o espaço de configurações, K uma métrica Riemanniana sobre Q e V uma função potencial sobre Q .

Abordamos o problema em duas situações. Na primeira, o dumb-bell move-se acima da superfície da Terra sob o potencial do campo da gravidade, vertical e uniforme, desta. Consideramos dois casos, um em que a haste é inextensível e o outro, num contexto ainda mais estendido, em que a haste é uma mola, cujo comprimento varia segundo um oscilador harmônico simples.

Na segunda situação, a haste é inextensível e o dumb-bell move-se no campo gravitacional Newtoniano de uma grande massa fixa em um ponto do espaço muito distante do dumb-bell.

¹ Only the largest of the asteroids have enough gravitational force to mold their shape into nearly spherical form. Recently with radar and speckel interferometry it has been able to determine the shapes of asteroids accurately. Nearly all have been shown to have somewhat of a dumbbell shape. Those of which are binary are probably dumbbells which were stretched into teardrops and then separated.

No Capítulo 2, abordamos a primeira situação. Usando um Teorema da Mecânica (S.W., 1963) provamos que o centro de massa do dumb-bell move-se ao longo de uma parábola e introduzindo três coordenadas que refletem este contexto completamos estas com as coordenadas esféricas do vetor diretor do dumb-bell para obter coordenadas generalizadas na variedade Q . Estas coordenadas simplificaram bastante a expressão da métrica cinética e por consequência o Lagrangeano, o que nos permitiu integrar completamente as equações de Euler-Lagrange, tanto no caso da haste inextensível, quanto no caso da haste harmônica.

No Capítulo 3, abordamos a segunda situação. Fixamos uma órbita elíptica de um problema de Kepler puro definida pelas condições iniciais do centro de massa do dumb-bell. Isto permite introduzir três coordenadas cartesianas do centro de massa do dumb-bell relativamente a um sistema orbital de coordenadas associado à órbita elíptica fixada e, completando estas com as coordenadas esféricas do vetor diretor do dumb-bell obtemos coordenadas generalizadas na variedade Q nas quais a expressão da métrica cinética no espaço de configurações, e por consequência do Lagrangeano, é bastante simples. Escrevemos as equações de Euler-Lagrange em cada sistema de coordenadas assim definido e na seção final do Capítulo obtemos, em dois contextos, soluções particulares destas equações que descrevem o movimento do dumb-bell no espaço.

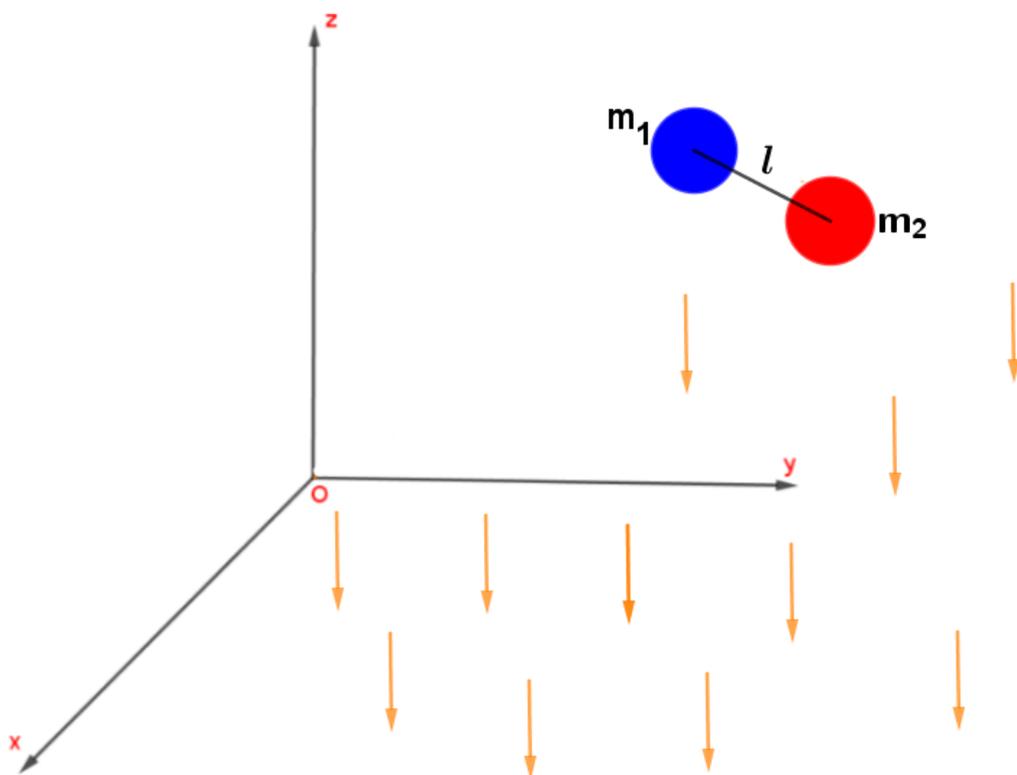
No Capítulo 4 fazemos as considerações finais e falamos sobre perspectivas futuras. Abriremos algumas possibilidades de estudos, tendo como perspectiva o que conseguimos nesta tese avançar no caso do campo gravitacional central e o que podemos aprofundar no estudo da dinâmica do dumb-bell como parte do projeto mais amplo do professor Hideberto Cabral intitulado "Abordagem geométrica da dinâmica de satélites" do qual fazemos parte da equipe junto com o professor Gleidson Gomes.

Por último, temos o Apêndice, onde fazemos uma apresentação breve do fundamental do Problema de Kepler usado aqui neste trabalho.

2 O DUMB-BELL NO CAMPO GRAVITACIONAL UNIFORME

Segundo (V., 2008), um **satélite dumb-bell** é uma estrutura simples consistindo de duas massas conectadas por uma haste de massa desprezível. Neste Capítulo iremos considerar o dumb-bell sob a ação do potencial gravitacional terrestre (vertical e uniforme), como ilustra a figura 1.1. O Capítulo está dividido em duas partes. Na primeira, o dumb-bell é constituído por uma haste inextensível. Na segunda, o dumb-bell é constituído por uma mola que se distensiona apenas longitudinalmente como um oscilador harmônico simples.

Figura 1 – Ilustração do dumb-bell sob a ação do potencial gravitacional terrestre (vertical e uniforme).



2.1 O DUMB-BELL EM UM CAMPO UNIFORME E COM A HASTE INEXTENSÍVEL

Veremos como as coordenadas dadas a partir das parábolas do centro de massa do dumb-bell nos permite simplificar bastante a métrica do espaço de configurações do problema, e por consequência simplifica as equações de Euler-Lagrange. Isto permitirá que façamos uma integração completa, e assim poderemos explicitar as soluções das trajetórias.

2.1.1 Espaço de configurações

O espaço de configurações do dumb-bell com a haste inextensível é o conjunto

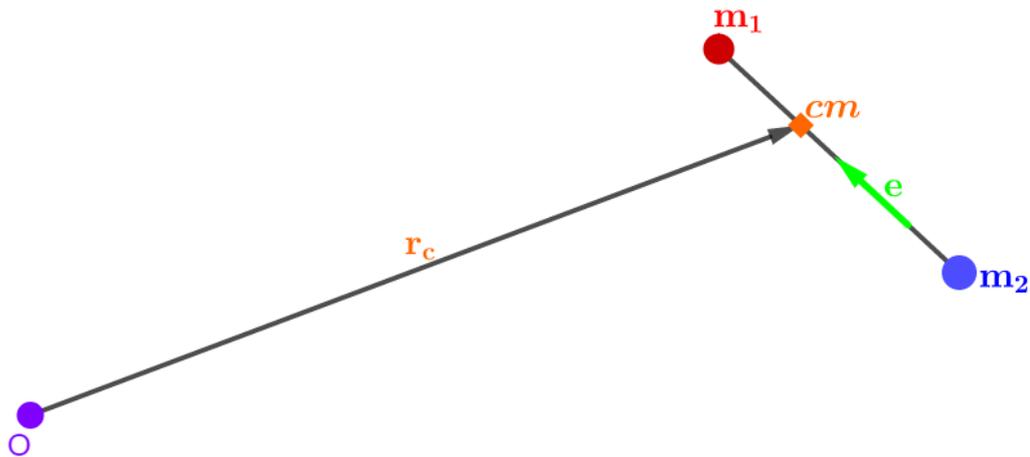
$$Q = \{\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in R^3 \times R^3 ; \|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\| = l\} . \quad (2.1)$$

Fixamos um sistema de coordenadas ortonormal no R^3 , $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Relativamente a este sistema de coordenadas, denotamos por $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ os vetores posição das massas m_1, m_2 e consideramos o vetor diretor do dumb-bell, \mathbf{e} , e o vetor do centro de massa do dumb-bell, \mathbf{r}_c , definidos por:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{l} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_c = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}\mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{(m_1 + m_2)}\mathbf{r}_2 . \quad (2.2)$$

Ilustramos estes vetores na figura a seguir.

Figura 2 – Ilustração do vetor centro de massa, \mathbf{r}_c , e do vetor diretor do dumb-bell, \mathbf{e} .



Se d_1 e d_2 são as distâncias do centro de massa às massas m_1 e m_2 do dumbbell, temos que:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_c + d_1\mathbf{e} , \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_c - d_2\mathbf{e} . \quad (2.3)$$

Com:

$$d_1 + d_2 = l , \quad m_1d_1 - m_2d_2 = 0 . \quad (2.4)$$

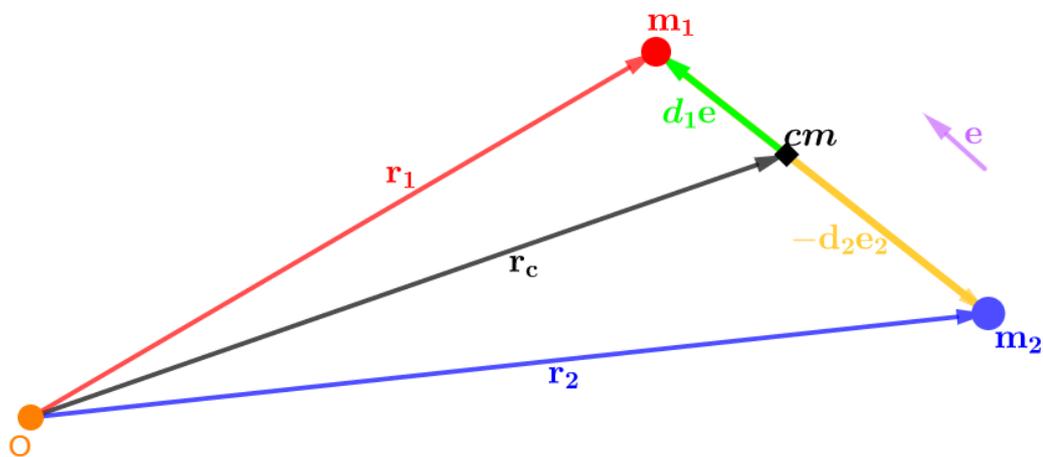
Note que a segunda condição da equação (2.4) acima equivale ao fato do módulo das forças resultantes nas extremidades do dumb-bell serem inversamente proporcionais às distâncias correspondentes de suas linhas de ação até o centro de gravidade, o que na Física é traduzido por **torque-nulo** ou movimento de **alavanca nulo**.

Observe que:

$$d_1 = \frac{m_2 \cdot l}{(m_1 + m_2)}, \quad d_2 = \frac{m_1 \cdot l}{(m_1 + m_2)}. \quad (2.5)$$

Ilustramos na figura a seguir as relações dadas pelas equações (2.3).

Figura 3 – Ilustração das relações entre os vetores posição $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ das massas e os vetores diretores do centro de massa, \mathbf{r}_c , e do dumb-bell, \mathbf{e} .



O conjunto Q é uma variedade suave de dimensão 5, pois $Q = f^{-1}(l)$ e l é um valor regular da função diferenciável $f(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|$. Mais ainda, podemos olhar Q como sendo $S^2 \times R^3$ via a aplicação:

$$\begin{aligned} F : Q &\longrightarrow S^2 \times R^3 \\ (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &\longmapsto (\mathbf{e}, \mathbf{r}_c), \end{aligned} \quad (2.6)$$

que é um difeomorfismo, pois é diferenciável e tem uma inversa diferenciável, a saber

$$F^{-1}(\mathbf{e}, \mathbf{r}_c) = (\mathbf{r}_c + d_1\mathbf{e}, \mathbf{r}_c - d_2\mathbf{e}).$$

2.1.2 Movimento do centro de massa do dumb-bell

A seguinte equação rege o movimento do centro de massa de um sistema de n -partículas de massas m_1, \dots, m_n que se movem no espaço sujeitas às forças externas $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$ atuando sobre elas:

$$\left(\sum_{k=1}^n m_k \right) \ddot{\mathbf{r}}_c = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k. \quad (2.7)$$

Isto é uma consequência direta da 2ª Lei de Newton. Isto pode ver visto no primeiro Capítulo do livro de McCuskey (S.W., 1963).

No caso do potencial uniforme, a força externa sobre cada uma das partículas do dumb-bell é dada por:

$$\mathbf{F}_j = -gm_j\mathbf{k}, \quad j = 1, 2. \quad (2.8)$$

onde g é a aceleração da gravidade na superfície da Terra. Pela lei da gravitação Newtoniana g é dada pela expressão $g = \frac{GM}{R^2}$, onde G é a constante da gravitação universal, M é a massa da terra e R o seu raio. Da equação (2.7) segue que:

$$(m_1 + m_2)\ddot{\mathbf{r}}_c = -g(m_1 + m_2)\mathbf{k},$$

donde por integração obtemos o movimento do centro de massa do dumb-bell

$$\mathbf{r}_c(t) = -\left(\frac{g}{2}t^2\right)\mathbf{k} + t(\alpha, \beta, \gamma) + (c_1, c_2, c_3), \quad (2.9)$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, c_1, c_2, c_3$ são constantes de integração. Reescrevendo esta equação na forma

$$\mathbf{r}_c(t) = \left(-\frac{g}{2}t^2 + \gamma t + c_3\right)\mathbf{k} + t(\alpha, \beta, 0) + (c_1, c_2, 0),$$

vemos que o centro de massa do dumb-bell move-se ao longo de uma parábola, $z = -\frac{1}{2}gt^2 + \gamma t + c_3$, contida no plano vertical cuja interseção com o plano XY é a reta $(x, y, 0) = t(\alpha, \beta, 0) + (c_1, c_2, 0)$.

Algumas considerações:

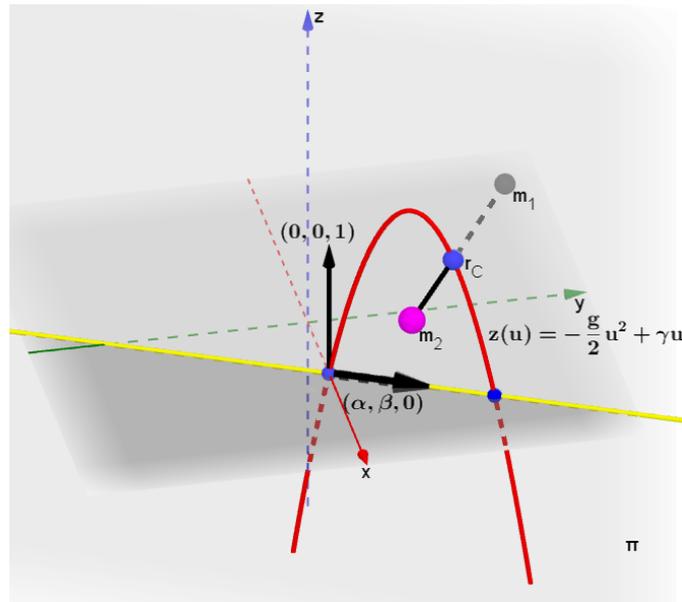
1. Note que a posição de lançamento é $\mathbf{r}_c(0) = (c_1, c_2, c_3)$ com velocidade inicial $\dot{\mathbf{r}}_c(0) = (\alpha, \beta, \gamma)$.
2. A componente horizontal da velocidade inicial, $(\alpha, \beta, 0)$, é que faz a órbita do centro de massa do dumb-bell ser uma parábola. Se esta componente for nula, isto é, se o impulso inicial no centro de massa for vertical, este se moverá ao longo de uma reta vertical.

Por fim, se o lançamento for de um ponto $(x_0, 0, 0)$ do eixo dos x e denotarmos por u o tempo decorrido desde o lançamento, então de (2.9) temos

$$\mathbf{r}_c^{x_0, u}(\alpha, \beta, \gamma) = \left(x_0 + \alpha u, \beta u, \gamma u - \frac{g}{2}u^2\right). \quad (2.10)$$

Podemos então considerar α, β, γ como coordenadas para, através de (2.10), localizar os pontos do espaço onde o centro de massa do dumb-bell, lançado a partir do ponto $(x_0, 0, 0)$, estará no tempo u .

Figura 4 – Parábola que representa o centro de massa do dumb-bell.

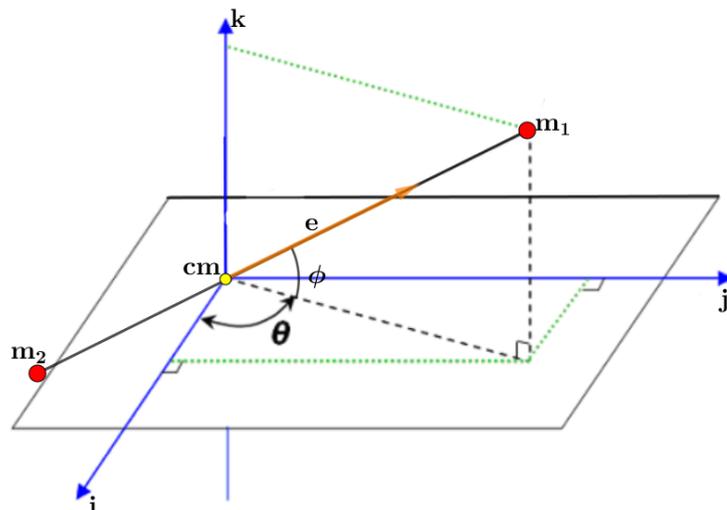


2.1.3 Coordenadas generalizadas e parametrização local de Q

Consideremos as coordenadas esféricas θ, ϕ da massa m_1 com relação ao centro de massa r_c , sendo θ a longitude, isto é, o ângulo entre o vetor $\vec{r}_c \vec{r}_1$ e o eixo OX e ϕ a latitude, isto é, o ângulo entre o vetor $\vec{r}_c \vec{r}_1$ e o plano XY . Então o vetor diretor do dumb-bell, $e = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_C}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_C\|}$ é dado em termos de θ e ϕ por

$$\mathbf{e} = (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, \sin\phi) ; \theta \in (0, 2\pi) , \phi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) . \quad (2.11)$$

Figura 5 – Coordenadas esféricas θ, ϕ do vetor diretor e do dumb-bell.



Temos então as coordenadas generalizadas $(\alpha, \beta, \gamma, \theta, \phi)$ em uma vizinhança coordenada de Q . Para cada x_0, u fixado, usando as relações da equação (2.3), temos as cartas locais em Q definidas por

$$\Psi^{x_0, u}(\alpha, \beta, \gamma, \theta, \phi) = (\mathbf{r}_1(\alpha, \beta, \gamma, \theta, \phi), \mathbf{r}_2(\alpha, \beta, \gamma, \theta, \phi)) , \quad (2.12)$$

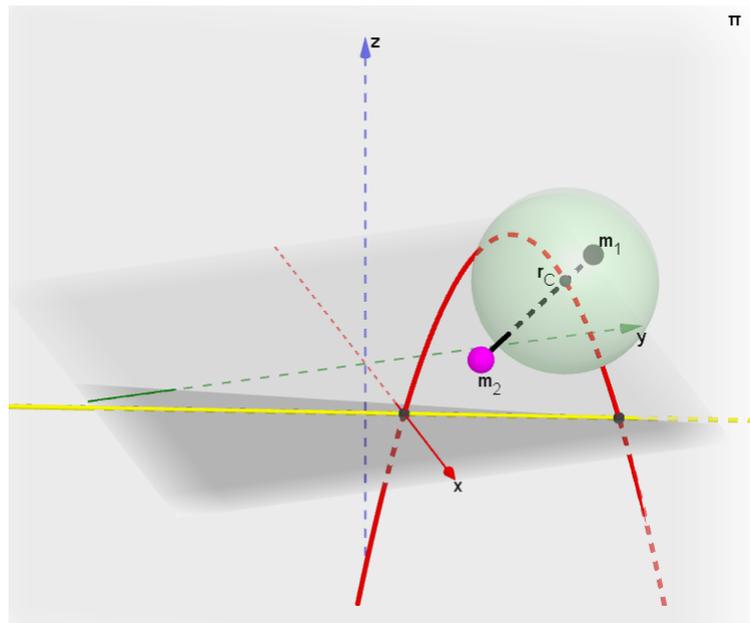
onde

$$\mathbf{r}_1 = \left(x_0 + \alpha u + d_1 \cos \theta \cos \phi, \beta u + d_1 \sin \theta \cos \phi, \gamma u - \frac{g}{2} u^2 + d_1 \sin \phi \right) , \quad (2.13)$$

$$\mathbf{r}_2 = \left(x_0 + \alpha u - d_2 \cos \theta \cos \phi, \beta u - d_2 \sin \theta \cos \phi, \gamma u - \frac{g}{2} u^2 - d_2 \sin \phi \right) . \quad (2.14)$$

Visualizamos esta parametrização na figura 1.4 .

Figura 6 – Ilustração da parametrização do espaço de configurações do dumb-bell no campo vertical uniforme.



2.1.4 A métrica cinética em coordenadas locais

A métrica que vamos usar na variedade Q é aquela cuja forma quadrática é (o dobro) da energia cinética do sistema, isto é, vamos considerar a *métrica cinética* definida por

$$K((\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)) = m_1 \langle \xi_1, \xi_2 \rangle + m_2 \langle \eta_1, \eta_2 \rangle . \quad (2.15)$$

Onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno Euclidiano.

Denotemos por x_1, \dots, x_5 as coordenadas locais $\alpha, \beta, \gamma, \theta, \phi$ de um ponto $\mathbf{q} \in Q$, e seja $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_5)$. Calculamos os elementos da métrica na parametrização (2.12), isto é, $K_{\mathbf{q}}(\partial_i, \partial_j)$, onde

$$\partial_k = \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial x_k}, \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial x_k} \right). \quad (2.16)$$

Com alguns cálculos, obtemos a matriz da métrica nesta parametrização

$$K_{\mathbf{q}} = (m_1 + m_2) \operatorname{diag} \left(u^2, u^2, u^2, \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} l^2 \cos^2 \phi, \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} l^2 \right). \quad (2.17)$$

2.1.5 Potencial e energia cinética em coordenadas locais

Consideremos o *potencial uniforme* sobre Q :

$$\begin{aligned} V : Q &\longrightarrow R \\ (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &\longmapsto V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = gm_1 \pi_3(\mathbf{r}_1) + gm_2 \pi_3(\mathbf{r}_2), \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde π_3 é a projeção na 3ª coordenada.

A expressão do potencial nas coordenadas generalizadas $(\alpha, \beta, \gamma, \theta, \phi)$ fica:

$$\begin{aligned} V &= g \left[m_1 \left(\gamma u - \frac{g}{2} u^2 + d_1 \operatorname{sen} \phi \right) + m_2 \left(\gamma u - \frac{g}{2} u^2 - d_2 \operatorname{sen} \phi \right) \right] \\ &= g(m_1 + m_2) \left(\gamma u - \frac{g}{2} u^2 \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

A *energia cinética* $T : TQ \longrightarrow R$ é definida por

$$T(\mathbf{q}, \mathbf{v}) := \frac{1}{2} K_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}). \quad (2.20)$$

Sua expressão nas coordenadas $(\alpha, \beta, \gamma, \theta, \phi, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ do fibrado tangente TQ é:

$$T = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + \frac{m_1 m_2 l^2}{2(m_1 + m_2)} (\cos^2 \phi v_4^2 + v_5^2). \quad (2.21)$$

Agora, consideramos o *Lagrangeano* do sistema

$$\begin{aligned} L : TQ &\longrightarrow R \\ (\mathbf{q}, \mathbf{v}) &\longmapsto T(\mathbf{q}, \mathbf{v}) - V(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

cuja expressão nas coordenadas do fibrado tangente é a seguinte

$$L = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + \frac{m_1 m_2 l^2}{2(m_1 + m_2)} (\cos^2 \phi v_4^2 + v_5^2) - g(m_1 + m_2) \left(\gamma u - \frac{g}{2} u^2 \right). \quad (2.23)$$

2.1.6 As equações de Euler-Lagrange

Vamos considerar as equações de *Euler-Lagrange* do dumb-bell, no caso da haste inextensível, dada nas coordenadas generalizadas x_1, \dots, x_5 :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_k} . \quad (2.24)$$

Nosso objetivo a seguir é descrever o movimento do dumb-bell resolvendo estas equações, dadas as condições iniciais

$$x_k(0) = x_k^0, \quad \dot{x}_k(0) = v_k^0, \quad k = 1, \dots, 5 .$$

As equações (2.24) para $k = 1, 2, 3$ são dadas respectivamente por

$$\ddot{\alpha}(t) = 0, \quad \ddot{\beta}(t) = 0, \quad \ddot{\gamma}(t) = -\frac{g}{u},$$

que podemos resolver imediatamente obtendo as soluções

$$\alpha(t) = a_1 t + b_1, \quad \beta(t) = a_2 t + b_2, \quad \gamma(t) = -\frac{g}{2u} t^2 + a_3 t + b_3,$$

onde a_i e b_i são constantes ($i = 1, 2, 3$).

Estas funções evidentemente descrevem o movimento do centro de massa ao longo de uma parábola, ou de uma reta vertical, se $a_1 = a_2 = 0$.

Resta, portanto, analisar as equações para $k = 4$ e $k = 5$ que se reduzem ao seguinte sistema de segunda ordem

$$\cos^2 \phi(t) \dot{\theta}(t) = a, \quad \text{com } a \text{ constante}, \quad \ddot{\phi}(t) = -\text{sen} \phi(t) \cos \phi(t) \dot{\theta}(t)^2. \quad (2.25)$$

2.1.7 Solução das equações da latitude e da longitude

Nesta seção vamos resolver o sistema (2.25), dando uma interpretação para o movimento do dumb-bell em cada caso. Vamos falar em deslocamento ao longo da parábola em vez de deslocamento do centro de massa do dumb-bell ao longo da parábola e, também, não vamos fazer referência à segunda possibilidade de um deslocamento ao longo de uma reta vertical.

Uma solução óbvia do sistema (2.25) é a seguinte

$$\theta(t) = at + \theta_0, \quad \phi(t) \equiv 0,$$

na qual o dumb-bell se desloca horizontalmente ao longo da parábola mantendo uma posição fixa se $a = 0$ ou girando em torno do centro de massa com velocidade angular constante $a \neq 0$.

Para prosseguir suponhamos primeiro que $a = 0$. Sob esta condição o ângulo ϕ é um múltiplo inteiro de $\frac{\pi}{2}$ ou então $\theta \equiv \theta_0$ e $\phi = \dot{\phi}_0 t + \phi_0$. No primeiro caso vemos por (2.11) que o dumb-bell move-se ao longo da parábola mantendo sempre uma posição vertical. No segundo caso o dumb-bell move-se ao longo da parábola mantendo uma posição fixa, se $\dot{\phi}_0 = 0$, com longitude θ_0 e latitude ϕ_0 ou gira em torno de seu centro de massa com velocidade angular constante $\dot{\phi}_0 \neq 0$, mantendo sempre a mesma longitude.

Agora, vamos supor que $a = \dot{\theta}_0 \cos^2 \phi_0 \neq 0$. Substituindo $\dot{\theta}$ na segunda equação obtemos

$$\ddot{\phi} = -\frac{a^2 \sin \phi}{\cos^3 \phi} = \frac{d}{d\phi} \left(-\frac{a^2}{2 \cos^2 \phi} \right).$$

Multiplicando esta equação por $\dot{\phi}$ e integrando obtemos

$$\dot{\phi}^2 = -\frac{a^2}{\cos^2 \phi} + C,$$

onde tomando $\phi(0) = 0$ a constante de integração C é dada por $C = \dot{\phi}_0^2 + a^2$, logo

$$\dot{\phi}^2 = \frac{\dot{\phi}_0^2 - (\dot{\phi}_0^2 + a^2) \sin^2 \phi}{\cos^2 \phi}. \quad (2.26)$$

O numerador na equação (2.26) não pode ser negativo e supondo-o positivo esta equação pode ser re-escrita como

$$\left[\frac{\dot{\phi} \cos \phi}{\sqrt{\dot{\phi}_0^2 - (\dot{\phi}_0^2 + a^2) \sin^2 \phi}} \right]^2 = 1.$$

Por continuidade o quociente entre os colchetes tem que ser igual a 1 ou a -1 . Fazendo $b = \frac{|\dot{\phi}_0|}{\sqrt{\dot{\phi}_0^2 + a^2}}$ e procedendo à integração de

$$\int_0^\phi \frac{\cos \alpha}{\sqrt{b^2 - \sin^2 \alpha}} d\alpha = \pm \sqrt{\dot{\phi}_0^2 + a^2} t,$$

obtemos

$$\sin \phi(t) = \pm b \sin \left(\sqrt{\dot{\phi}_0^2 + a^2} t \right). \quad (2.27)$$

Uma vez obtida a função $\phi(t)$ integramos a primeira equação em (2.25) para encontrar a longitude

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{a}{\cos^2 \phi(s)} ds. \quad (2.28)$$

A medida que o centro de massa do dumb-bell move-se ao longo da parábola, ou verticalmente dependendo de se foi lançado com um impulso inicial inclinado ou vertical, as duas massas giram em torno de seu centro de massa num movimento mais complicado descrito pela longitude $\theta(t)$ e latitude $\phi(t)$.

2.1.8 Coleção das soluções

Apresentamos aqui um resumo do que obtivemos das soluções e a compreensão da dinâmica do problema do dumb-bell com a haste inextensível, este submetido exclusivamente a ação do campo gravitacional vertical uniforme.

Resumindo, temos o seguinte resultado: Sejam $(\alpha, \beta, \gamma, \theta, \phi)$ as coordenadas generalizadas locais do dumb-bell submetido ao campo gravitacional uniforme vertical, definidas em (2.12). Então, as suas possíveis trajetórias nestas coordenadas são dadas pelos itens a seguir:

- **I)** $\alpha(t) = a_1 t + b_1$, $\beta(t) = a_2 t + b_2$, $\gamma(t) = -\frac{g}{2u} t^2 + a_3 t + b_3$, $\theta(t)$ qualquer, $\phi(t) \equiv 90^\circ$.
- **II)** $\alpha(t) = a_1 t + b_1$, $\beta(t) = a_2 t + b_2$, $\gamma(t) = -\frac{g}{2u} t^2 + a_3 t + b_3$, $\theta(t) \equiv \theta_0$ constante, $\phi(t) = \dot{\phi}_0 t + \phi_0$.
- **III)** $\alpha(t) = a_1 t + b_1$, $\beta(t) = a_2 t + b_2$, $\gamma(t) = -\frac{g}{2u} t^2 + a_3 t + b_3$ e $\theta(t)$, $\phi(t)$ obedecem as equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi'(t)^2 = a^2 \ln \left| \frac{\cos \phi(t)}{1 + \sin \phi(t)} \right| + b^2, \\ \theta(t) = \int_0^t \frac{a}{\cos^2 \phi(s)} ds , \end{array} \right.$$

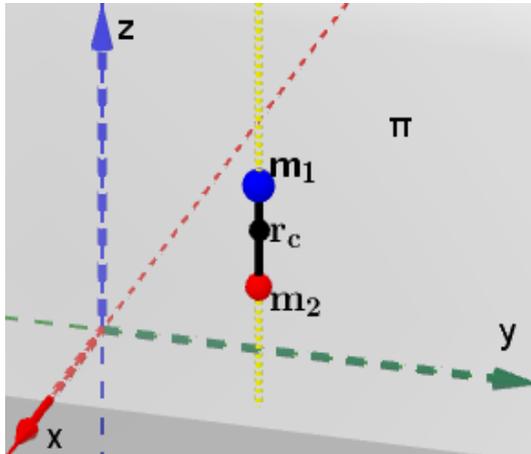
com a_i , b_i ($i = 1, 2, 3$) , $a \neq 0$, b constantes.

Como consequência direta deste teorema temos a seguinte lista de exemplos. (*Exemplos*). São trajetórias particulares do dumb-bell quando submetido ao campo gravitacional uniforme vertical:

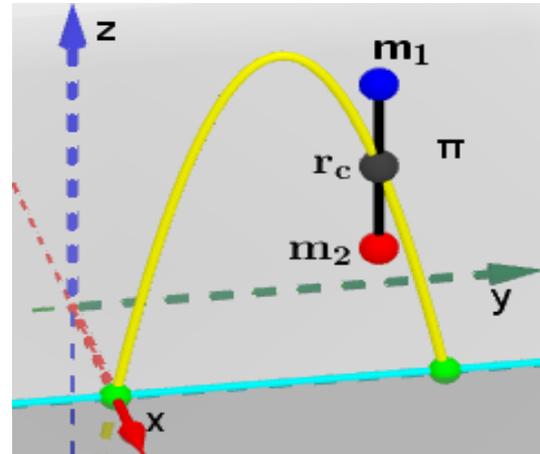
- **I.1)** $\alpha(t) = b_1$, $\beta(t) = b_2$, $\gamma(t) = -\frac{g}{2u} t^2 + b_3$, $\theta(t) = \dot{\theta}_0 t + \theta_0$, $\phi(t) \equiv 90^\circ$.
- **I.2)** $\alpha(t) = a_1 t + b_1$, $\beta(t) = a_2 t + b_2$, $\gamma(t) = -\frac{g}{2u} t^2 + a_3 t + b_3$, $\theta(t) = \dot{\theta}_0 t + \theta_0$, $\phi(t) \equiv 90^\circ$.
- **II.1)** $\alpha(t) = b_1$, $\beta(t) = b_2$, $\gamma(t) = -\frac{g}{2u} t^2 + b_3$, $\theta(t) \equiv 90^\circ$, $\phi(t) = \dot{\phi}_0 t + \phi_0$.
- **II.2)** $\alpha(t) = a_1 t + b_1$, $\beta(t) = a_2 t + b_2$, $\gamma(t) = -\frac{g}{2u} t^2 + a_3 t + b_3$, $\theta(t) \equiv 90^\circ$, $\phi(t) = \dot{\phi}_0 t + \phi_0$.
- **III.1)** $\alpha(t) = b_1$, $\beta(t) = b_2$, $\gamma(t) = -\frac{g}{2u} t^2 + b_3$, $\theta(t) = at$, $\phi(t) \equiv 0$.
- **III.2)** $\alpha(t) = a_1 t + b_1$, $\beta(t) = a_2 t + b_2$, $\gamma(t) = -\frac{g}{2u} t^2 + a_3 t + b_3$, $\theta(t) = at$, $\phi(t) \equiv 0$.

Ilustramos estes exemplos com as figuras a seguir.

Figura 7 – Exemplos de soluções no caso I)

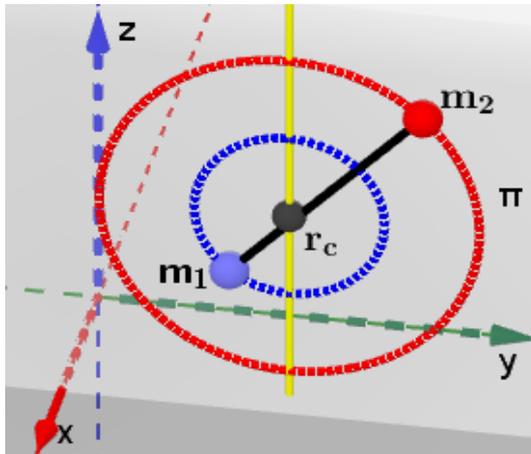


(a) **I.1)** Dumb-bell contido em um segmento de reta vertical e rodopiando em torno de si.

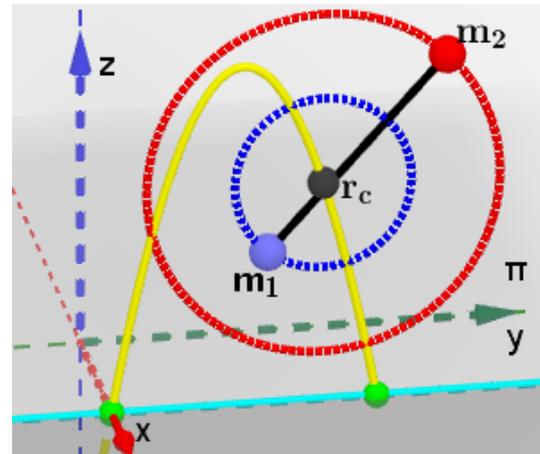


(b) **I.2)** Dumb-bell com o centro de massa sob uma parábola vertical, rodopiando em torno de si.

Figura 8 – Exemplos de soluções no caso II)

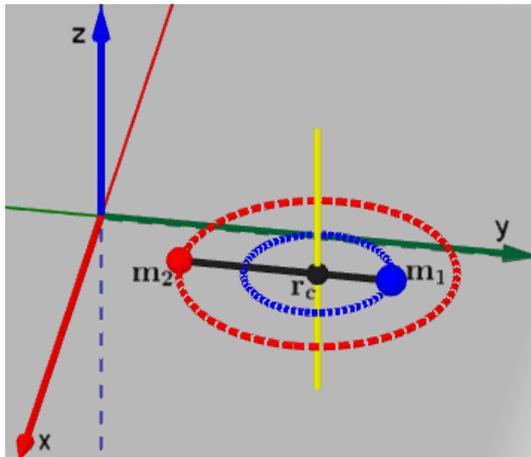


(a) **II.1)** Dumb-bell com o centro de massa sob um segmento de reta vertical, girando em torno do centro de massa e mantendo-se em um plano vertical.

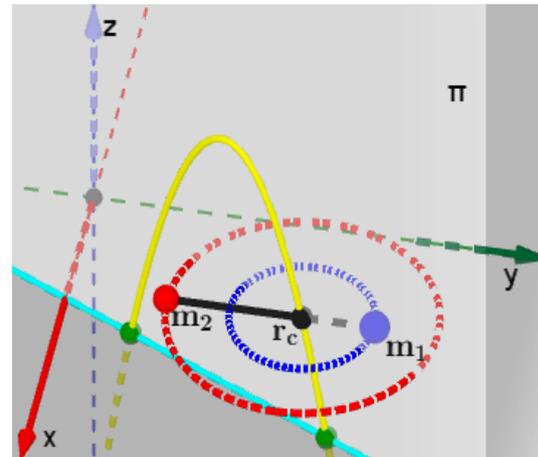


(b) **II.2)** Dumb-bell com o centro de massa sob uma parábola vertical, girando em torno do centro de massa e mantendo-se em um plano vertical.

Figura 9 – Exemplos de soluções no caso III)



(a) III.1) Dumb-bell com o centro de massa sob um segmento d e reta vertical, girando em torno do centro de massa e mantendo-se horizontal.



(b) III.2) Dumb-bell com o centro de massa sob uma parábola vertical, girando em torno do centro de massa e mantendo-se horizontal.

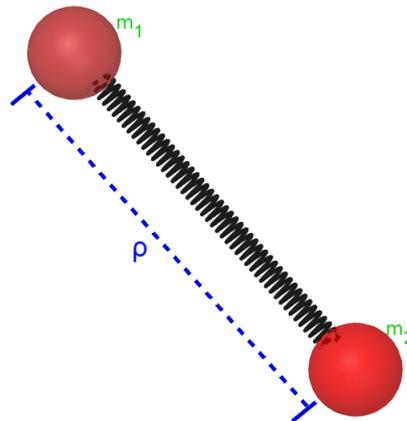
2.1.9 Algumas considerações finais e perspectivas futuras

Finalizamos fazendo a observação de que os movimentos estáticos, em que o dumb-bell move-se ao longo da parábola mantendo uma posição fixa são de fato soluções de equilíbrio em um sistema móvel de coordenadas com origem no centro de massa e eixos paralelos aos do sistema inercial. Estes movimentos são "estáveis", pelo Teorema de dependencia contínua nas condições iniciais. Mas podemos imaginar um campo uniforme sem a limitação da superfície da Terra de modo que a parábola estivesse definida para todo o tempo. Neste caso, sim, podemos perguntar se estes movimentos estáticos (equilíbrios) são de fato estáveis. Esta questão merece ser investigada.

2.2 O DUMB-BELL EM UM CAMPO UNIFORME E COM A HASTE HARMÔNICA

Iremos agora considerar o caso em que a haste é uma mola que se distensiona apenas longitudinalmente segundo um oscilador harmônico simples e que também é submetida ao campo gravitacional terrestre (vertical e uniforme). Veremos como as coordenadas dadas a partir das parábolas do centro de massa do dumb-bell nos permite simplificar bastante a métrica do espaço de configurações do problema, e por consequência simplifica as equações de Euler-Lagrange. E neste caso, por conta da distensão da mola, o número de graus de liberdade do problema aumentará em uma unidade, tendo nosso problema neste caso dimensão 6. E da mesma forma que no caso inextensível, esta abordagem geométrica permitirá que façamos uma integração completa das equações e exibir as soluções explicitamente.

Figura 10 – Dumb-bell com a haste harmônica.



2.2.1 Espaço de configurações

Neste caso, o espaço de configurações do dumb-bell é o conjunto

$$\bar{Q} = \{ \mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in R^3 \times R^3 ; \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| = \rho(s) = l + \psi(s) \} , \quad (2.29)$$

com

$$\psi''(s) = -\omega^2 \psi(s) , \text{ com } \omega > 0 \text{ constante} , \quad (2.30)$$

cuja solução geral é dada por

$$\psi(s) = c_1 \cdot \cos(\omega s) + c_2 \cdot \sin(\omega s) , \text{ com } c_1, c_2 \text{ constantes} . \quad (2.31)$$

Como na seção anterior já abordamos o caso inextensível, iremos assumir que $\psi(s)$ não é identicamente nula. Assim, a solução geral da equação (2.30) pode ser reescrita da forma

$$\psi(s) = c \cdot \text{sen}(\varphi_0 + \omega s) , \quad (2.32)$$

com $c = \sqrt{\psi(0)^2 + \frac{\psi'(0)^2}{\omega^2}}$ (**amplitude**), $\text{sen}\varphi_0 = \frac{1}{c}\psi(0)$, $\text{cos}\varphi_0 = \frac{1}{c}\frac{\psi'(0)}{\omega}$, (φ_0 : **ângulo de fase**) .

Usamos aqui e repetiremos ao longo da nossa abordagem a notação de "linha" ' para indicar a derivada com relação a s . Isto para não causar confusão com a notação de ponto $\dot{}$, a qual estamos usando para denotar a derivada com relação a t . Ou seja

$$' = \frac{d}{ds} , \quad \dot{} = \frac{d}{dt} . \quad (2.33)$$

Da mesma forma que fizemos na seção anterior, o caso da haste inextensível, fixamos um sistema de coordenadas ortonormal no R^3 e iremos considerar o vetor diretor do dumb-bell e e o vetor do centro de massa do dumb-bell, definidos pelas equações de (2.2). Consideramos também as relações dos vetores posição de cada massa com estes vetores, dados pelas equações em (2.3), onde iremos trocar o d_1, d_2 por $d_1(s), d_2(s)$ dados a seguir

$$d_1(s) = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)}\rho(s), \quad d_2(s) = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}\rho(s) . \quad (2.34)$$

O conjunto \overline{Q} é uma variedade suave de dimensão 6. Para verificarmos isto, consideramos a aplicação:

$$\begin{aligned} F : \overline{Q} &\longrightarrow S^2 \times R^3 \times [-c + l, c + l] \\ (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &\longmapsto \left(\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}, \mathbf{r}_c, \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| \right) . \end{aligned} \quad (2.35)$$

F é um difeomorfismo local, pois é diferenciável, com inversa local diferenciável, a saber

$$F^{-1}(x, y, z) = \left(y + \frac{m_2 z}{(m_1 + m_2)} x, y - \frac{m_1 z}{(m_1 + m_2)} x \right) . \quad (2.36)$$

2.2.2 Parametrização (coordenadas generalizadas) local

Na seção anterior, a partir do McCuskey (S.W., 1963) concluímos que no potencial vertical e uniforme o centro de massa do dumb-bell descreve uma parábola com a concavidade voltada para baixo. Na verificação disto, nenhuma hipótese adicional foi feita, podendo o argumento ser aplicado também ao contexto presente, em que a haste é uma mola.

Assim, neste caso também podemos considerar α, β, γ como coordenadas para localizar os pontos do espaço onde o centro de massa do dumb-bell, lançado a partir do ponto $(x_0, 0, 0)$, estará no tempo u , da seguinte forma

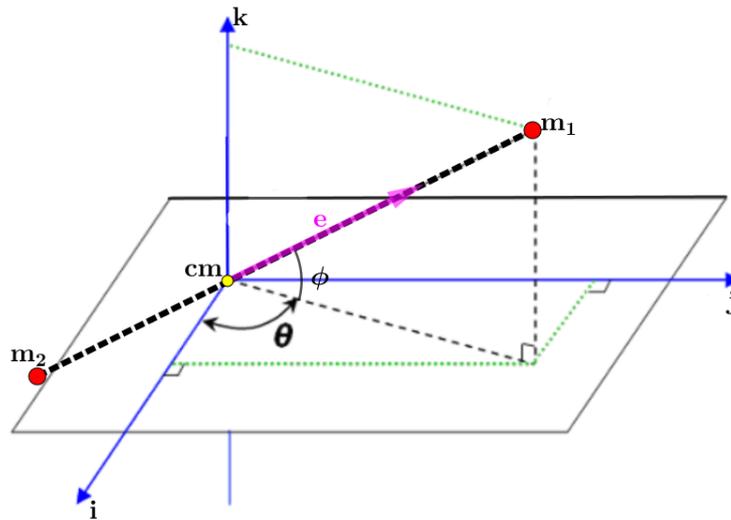
$$\mathbf{r}_c^{x_0, u}(\alpha, \beta, \gamma) = \left(x_0 + \alpha u, \beta u, \gamma u - \frac{g}{2} u^2 \right) . \quad (2.37)$$

Considerando as coordenadas esféricas θ, ϕ da massa m_1 com relação a r_C . Sendo θ a longitude, isto é, o ângulo entre o vetor $\overrightarrow{r_C r_1}$ e o eixo OX e ϕ a latitude, isto é, o ângulo entre o vetor $\overrightarrow{r_C r_1}$ e o plano XY . Então o vetor diretor do dumb-bell, $\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_C}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_C\|}$, é dado em termos de θ e ϕ por

$$\mathbf{e} = (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, \sin\phi) . \quad (2.38)$$

Ilustramos θ e ϕ na figura a seguir.

Figura 11 – Coordenadas esféricas θ, ϕ do vetor diretor e do dumb-bell com a haste harmônica



Temos então as coordenadas generalizadas $(\alpha, \beta, \gamma, \theta, \phi, s)$ em uma vizinhança coordenada de \bar{Q} e, para cada x_0, u temos a carta local em \bar{Q} definida por

$$\Psi^{x_0, u}(\alpha, \beta, \gamma, \theta, \phi, s) = (\mathbf{r}_1(\alpha, \beta, \gamma, \theta, \phi, s), \mathbf{r}_2(\alpha, \beta, \gamma, \theta, \phi, s)) , \quad (2.39)$$

com:

$$\mathbf{r}_1 = \left(x_0 + \alpha u + d_1(s)\cos\theta\cos\phi, \beta u + d_1(s)\sin\theta\cos\phi, \gamma u - \frac{g}{2}u^2 + d_1(s)\sin\phi \right) , \quad (2.40)$$

$$\mathbf{r}_2 = \left(x_0 + \alpha u - d_2(s)\cos\theta\cos\phi, \beta u - d_2(s)\sin\theta\cos\phi, \gamma u - \frac{g}{2}u^2 - d_2(s)\sin\phi \right) . \quad (2.41)$$

2.2.3 A métrica cinética em coordenadas locais

A métrica que usaremos na variedade \bar{Q} será também a *métrica cinética*, definida por

$$K((\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)) = m_1 \langle \xi_1, \xi_2 \rangle + m_2 \langle \eta_1, \eta_2 \rangle . \quad (2.42)$$

Denotamos por $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ as coordenadas locais $\alpha, \beta, \gamma, \theta, \phi, s$ de um ponto $\mathbf{q} \in \overline{Q}$, e seja $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$. Calculamos os elementos da métrica na parametrização (2.39), isto é, $K_{\mathbf{q}}(\partial_i, \partial_j)$, onde

$$\partial_k = \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial x_k}, \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial x_k} \right). \quad (2.43)$$

Com alguns cálculos, obtemos a matriz da métrica nesta parametrização

$$K_{\mathbf{q}} = (m_1 + m_2) \operatorname{diag} \left(u^2, u^2, u^2, \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \rho(s)^2 \cos^2 \phi, \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \rho(s)^2, \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \rho'(s)^2 \right). \quad (2.44)$$

2.2.4 Potencial e energia cinética em coordenadas locais

O *potencial uniforme*, definido na equação (2.18), nas coordenadas $(\alpha, \beta, \gamma, \theta, \phi, s)$ fica

$$V = g(m_1 + m_2) \left(\gamma u - \frac{g}{2} u^2 \right). \quad (2.45)$$

A *energia cinética* $T : T\overline{Q} \rightarrow R$, definida pela equação 2.20, nas coordenadas $(\alpha, \beta, \gamma, \theta, \phi, s, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ do fibrado tangente $T\overline{Q}$ é

$$T = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \left\{ u^2 (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left[\rho(s)^2 (\cos^2 \phi v_4^2 + v_5^2) + \rho'(s)^2 v_6^2 \right] \right\}. \quad (2.46)$$

Assim, a expressão do *Lagrangiano*, definido pela equação (2.22), nas coordenadas do fibrado tangente é a seguinte

$$L = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \left\{ u^2 (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left[\rho(s)^2 (\cos^2 \phi v_4^2 + v_5^2) + \rho'(s)^2 v_6^2 \right] - 2g \left(\gamma u - \frac{g}{2} u^2 \right) \right\}. \quad (2.47)$$

2.2.5 As equações de Euler-Lagrange

Vamos considerar as equações de *Euler-Lagrange* do dumb-bell, no caso que a haste é uma mola, dadas nas coordenadas generalizadas x_1, \dots, x_6 :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_k}. \quad (2.48)$$

Nosso objetivo a seguir é descrever o movimento do dumb-bell resolvendo estas equações, dadas as condições iniciais

$$q_k(0) = q_k^0, \quad \dot{q}_k(0) = v_k^0, \quad k = 1, \dots, 6.$$

As equações (2.48) para $k = 1, 2, 3$ são dadas respectivamente por

$$\ddot{\alpha}(t) = 0, \quad \ddot{\beta}(t) = 0, \quad \ddot{\gamma}(t) = -\frac{g}{u},$$

que podemos resolver imediatamente, obtendo as soluções

$$\alpha(t) = a_1 t + b_1, \quad \beta(t) = a_2 t + b_2, \quad \gamma(t) = -\frac{g}{2u} t^2 + a_3 t + b_3,$$

onde a_i e b_i são constantes ($i = 1, 2, 3$).

Estas funções evidentemente descrevem o movimento do centro de massa ao longo de uma parábola, ou de uma reta vertical, se $a_1 = a_2 = 0$.

Resta, portanto, analisar as equações para $k = 4$, $k = 5$ e $k = 6$ que se reduzem ao seguinte sistema de segunda ordem

$$\mathbf{R}(t)^2 \cos^2 \phi(t) \dot{\theta}(t) = A, \quad \text{com } A \text{ constante},$$

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{R}(t)^2 \dot{\phi}(t)] = -\mathbf{R}(t)^2 \sin \phi(t) \cos \phi(t) \dot{\theta}(t)^2, \quad (2.49)$$

$$\ddot{\mathbf{R}}(t) = [\cos^2 \phi(t) \dot{\theta}(t)^2 + \dot{\phi}(t)^2] \mathbf{R}(t).$$

Com:

$$\mathbf{R}(t) = \rho(s(t)). \quad (2.50)$$

Observação: Nestas equações assumimos $\mathbf{R}(t)$ não constante, pois do contrário recairíamos no caso da haste inextensível.

2.2.6 Soluções das equações de Euler-Lagrange

Para resolvermos as equações (2.49), dividimos em dois casos

$$1) \mathbf{A} = 0, \quad 2) \mathbf{A} \neq 0.$$

Usando a primeira equação de (2.49), subdividimos o caso **1**) em outros dois **1.1**), **1.2**), a seguir:

$$1.1) \quad \mathbf{A} = 0, \quad \phi(t) = \frac{(2\mathbf{m} + 1)\pi}{2}, \quad \mathbf{m} \in \mathbf{Z}.$$

Devemos tomar as vizinhanças locais de modo que: $-\frac{\pi}{2} + \delta < \phi < \frac{\pi}{2} + \delta$, com $\delta > 0$.

A segunda equação de (2.49) é obedecida. Da terceira equação de (2.49) $\ddot{\mathbf{R}}(t) = 0$. Ou seja, da equação (2.32) $s(t)$ obedece:

$$\text{sen}(\varphi_0 + \omega s(t)) = Bt + C, \text{ com } B, C \text{ constantes.} \quad (2.51)$$

E $\theta(t)$ fica livre.

1.2) $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, $\theta(t) = \theta_0$ (constante)

A segunda equação de (2.49) fica:

$$\mathbf{R}(t)^2 \dot{\phi}(t) = D, \text{ com } D \text{ constante.} \quad (2.52)$$

A terceira equação de (2.49) fica:

$$\ddot{\mathbf{R}}(t) = \dot{\phi}(t)^2 \mathbf{R}(t). \quad (2.53)$$

Podemos ainda subdividir este caso em outros dois, **1.2.1)**, **1.2.2)**, se D é nulo ou não.

1.2.1) $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, $\theta(t) = \theta_0$ (constante), $\mathbf{D} = \mathbf{0}$

Da equação (2.52) ficamos com $\phi(t) = \phi_0$ constante. Da terceira equação de (2.49), segue $\ddot{\mathbf{R}}(t) = 0$. Ou seja, da equação (2.32), $s(t)$ obedece:

$$\text{sen}(\varphi_0 + \omega s(t)) = Bt + C, \text{ com } B, C \text{ constantes.} \quad (2.54)$$

1.2.2) $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, $\theta(t) = \theta_0$ (constante), $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$

Substituindo a equação (2.52) na equação (2.53), obtemos a seguinte equação para $\mathbf{R}(t)$:

$$\ddot{\mathbf{R}}(t) = \frac{D^2}{\mathbf{R}(t)^3}. \quad (2.55)$$

Cuja solução geral é:

$$\mathbf{R}(t) = \sqrt{E(t+F)^2 + \frac{D^2}{E}}, \text{ com } E, F \text{ constantes.} \quad (2.56)$$

Ou seja, da equação (2.32), $s(t)$ obedece:

$$l + c.\text{sen}(\varphi_0 + \omega s(t)) = \sqrt{E(t+F)^2 + \frac{D^2}{E}}. \quad (2.57)$$

E retornando a equação (2.52), após uma integração simples obtemos $\phi(t)$:

$$\phi(t) = \arctan\left(\frac{E(t+F)}{D}\right) + G, \quad \text{com } G \text{ constante.} \quad (2.58)$$

2) $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$

Substituindo a primeira equação na segunda equação de (2.49) obtemos a equação:

$$\left[\mathbf{R}(t)^2 \dot{\phi}(t)\right]^2 + A^2 \tan^2 \phi(t) = H^2, \quad \text{com } H \text{ constante.} \quad (2.59)$$

Dividimos este caso em outros dois **2.1)**, **2.2)** com relação a H , a seguir:

2.1) $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{H} = \mathbf{0}$

Da equação (2.59) concluímos que:

$$\phi(t) = m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2.60)$$

Temos que a segunda equação de (2.49) é obedecida. E as primeira e segunda equações de (2.49) ficam:

$$\mathbf{R}(t)^2 \dot{\theta}(t) = A, \quad \ddot{\mathbf{R}}(t) = \dot{\theta}(t)^2 \mathbf{R}(t). \quad (2.61)$$

Substituindo o $\dot{\theta}(t)$ desta primeira equação na segunda equação, obtemos novamente a EDO da equação (2.55):

$$\ddot{\mathbf{R}}(t) = \frac{A^2}{\mathbf{R}(t)^3}. \quad (2.62)$$

Resolvendo esta equação e após isto resolvendo $\theta(t)$ usando a primeira equação, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} l + c \cdot \text{sen}(\varphi_0 + \omega \cdot s(t)) = \mathbf{R}(t) = \sqrt{I(t+J)^2 + \frac{A^2}{I}}, \quad \text{com } I, J \text{ constantes,} \\ \theta(t) = \arctan\left(\frac{I(t+J)}{A}\right) + K, \quad \text{com } K \text{ constante.} \end{array} \right. \quad (2.63)$$

2.2) $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{H} \neq \mathbf{0}$

Substituindo a relação dada pela equação (2.59) e o $\dot{\theta}(t)$ da primeira equação de (2.49) na terceira equação de (2.49), obtemos pela terceira vez a EDO da equação (2.55):

$$\ddot{\mathbf{R}}(t) = \frac{(A^2 + H^2)}{\mathbf{R}(t)^3}. \quad (2.64)$$

Cuja solução geral é dada por

$$\mathbf{R}(t) = \sqrt{L(t+M)^2 + \frac{A^2 + H^2}{L}}, \text{ com } L, M \text{ constantes.} \quad (2.65)$$

Ou seja, da equação (2.32) $s(t)$ obedece

$$l + c.\text{sen}(\varphi_0 + \omega.s(t)) = \sqrt{L(t+M)^2 + \frac{A^2 + H^2}{L}}. \quad (2.66)$$

Substituindo este $\mathbf{R}(t)$ na equação (2.59), ficamos com a seguinte equação para $\phi(t)$

$$\left[L(t+M)^2 + \frac{A^2 + H^2}{L} \right]^2 \dot{\phi}(t)^2 = H^2 - A^2 \tan^2 \phi(t). \quad (2.67)$$

Antes de fazermos a integração desta equação, vejamos que não podemos ter $\phi(t)$ constante. De fato, caso contrário a segunda equação de (2.49) traria como consequência uma das seguintes possibilidades:

$$\text{I) } \phi(t) = \frac{(2\pi + 1)m}{2}, \quad m \in Z \quad \text{ou} \quad \text{II) } \phi(t) = \pi m, \quad m \in Z \quad \text{ou} \quad \text{III) } \theta(t) \text{ constante.} \quad (2.68)$$

O caso I) com a primeira equação de (2.49) implicaria em $A = 0$, o que contradiz a hipótese deste caso que estamos analisando.

O caso II) com a equação (2.67) implicaria em $H = 0$, o que contradiz a hipótese deste caso que estamos analisando.

O caso III) com a primeira equação de (2.49) em $A = 0$, o que contradiz este caso que estamos analisando.

Observação: Iremos considerar que $\dot{\phi}(t) > 0$, o caso $\dot{\phi}(t) < 0$ se faz de maneira idêntica, bastando trocar o sinal da solução $\phi(t)$.

A equação (2.67) pode ser escrita da forma:

$$\frac{\dot{\phi}(t)}{\sqrt{H^2 - A^2 \tan^2 \phi(t)}} = \frac{1}{L(t+M)^2 + \frac{A^2 + H^2}{L}}. \quad (2.69)$$

Usamos a integral a seguir para integrar o primeiro membro da equação (2.69).

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2 \tan^2(x)}} dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{\cos(x)}{|\cos(x)|} \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|b|} \text{sen}(x) \right) + \text{constante}. \quad (2.70)$$

Após integração da equação (2.69) obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 + H^2}} \frac{\cos(\phi)}{|\cos(\phi)|} \left(\frac{\sqrt{A^2 + H^2}}{|H|} \text{sen}(\phi) \right) = \frac{1}{\sqrt{A^2 + H^2}} \cdot \arctan \left(\frac{L(t+M)}{\sqrt{A^2 + H^2}} \right) + \text{cte}. \quad (2.71)$$

Observação: Consideramos os t de modo que $\cos\phi(t) > 0$. Os t que tem $\cos\phi(t) < 0$ são feitos de maneira idêntica, bastando mudar o sinal de $\phi(t)$ da solução.

Assim, obtemos a solução $\phi(t)$:

$$\text{sen}\phi(t) = \frac{|H|}{\sqrt{A^2 + H^2}} \text{sen} \left(\arctan \left(\frac{L(t+M)}{\sqrt{A^2 + H^2}} \right) + n \right), \text{ com } n \text{ constante.} \quad (2.72)$$

Usando a integral:

$$\frac{A(A^2+H^2)}{\left[L(x+M)^2 + \frac{A^2+H^2}{L} \right] \left[A^2+H^2 \cos^2 \left(\arctan \left(\frac{L(x+M)}{\sqrt{A^2+H^2}} \right) + n \right) \right]} dx = \arctan \left(\frac{A \tan \left(\arctan \left(\frac{L(x+M)}{\sqrt{A^2+H^2}} \right) + n \right)}{\sqrt{A^2+H^2}} \right) + \text{cte}$$

e a relação:

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan \left(\frac{a+b}{1-ab} \right), \quad (2.73)$$

obtemos a partir da equação primeira equação de (2.49) a expressão explícita para $\theta(t)$:

$$\theta(t) = \arctan \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + H^2}} \left(\frac{\frac{L(t+M)}{\sqrt{A^2+H^2}} + N}{1 - \frac{L(t+M)}{\sqrt{A^2+H^2}} \cdot N} \right) \right) + P, \quad (2.74)$$

com $N = \tan(n)$ e P constante.

2.2.7 Coleção das soluções

Apresentamos aqui um resumo do que obtivemos das soluções do problema do dumb-bell com a haste se distencionando e se comportando como um oscilador harmônico simples ("uma mola"), este submetido exclusivamente a ação do campo gravitacional vertical uniforme. Aqui não iremos fazer as interpretações da dinâmica, apenas apresentaremos as soluções em coordenadas do que obtivemos como "um exercício direto" seguindo a mesma abordagem que fizemos no caso da haste inextensível.

Em resumo, temos o seguinte resultado: Sejam $(\alpha, \beta, \gamma, \theta, \phi, s)$ as coordenadas generalizadas locais do dumb-bell definidas em (2.39), com a haste harmônica, submetido ao campo gravitacional uniforme vertical. Então, as suas possíveis trajetórias nestas coordenadas são dadas pelos itens a seguir:

- **I)** $\alpha(t) = a_1 t + b_1$, $\beta(t) = a_2 t + b_2$, $\gamma(t) = -\frac{g}{2u} t^2 + a_3 t + b_3$, $\theta(t)$ qualquer, $\phi(t) \equiv 90^\circ$, $\mathbf{R}(t) = l + c \cdot \text{sen}(\varphi_0 + \omega s(t)) = \rho(s(t)) = Q t + R$.
- **II)** $\alpha(t) = a_1 t + b_1$, $\beta(t) = a_2 t + b_2$, $\gamma(t) = -\frac{g}{2u} t^2 + a_3 t + b_3$, $\theta(t) \equiv \theta_0$ constante, $\phi(t) \equiv \phi_0$ constante, $\mathbf{R}(t) = l + c \cdot \text{sen}(\varphi_0 + \omega s(t)) = \rho(s(t)) = Q t + R$.
- **III)** $\alpha(t) = a_1 t + b_1$, $\beta(t) = a_2 t + b_2$, $\gamma(t) = -\frac{g}{2u} t^2 + a_3 t + b_3$, $\theta(t) \equiv \theta_0$ constante, $\phi(t) = \arctan \left(\frac{E(t+F)}{D} \right) + G$, $\mathbf{R}(t) = l + c \cdot \text{sen}(\varphi_0 + \omega s(t)) = \rho(s(t)) = \sqrt{E(t+F)^2 + \frac{D^2}{E}}$

▪ **IV)** $\alpha(t) = a_1t + b_1$, $\beta(t) = a_2t + b_2$, $\gamma(t) = -\frac{g}{2u}t^2 + a_3t + b_3$, $\theta(t) = \arctan\left(\frac{E(t+F)}{D}\right) + G$
, $\phi(t) \equiv 180^\circ$, $\mathbf{R}(t) = l + c.\text{sen}(\varphi_0 + \omega s(t)) = \rho(s(t)) = \sqrt{E(t+F)^2 + \frac{D^2}{E}}$.

▪ **V)** $\alpha(t) = a_1t + b_1$, $\beta(t) = a_2t + b_2$, $\gamma(t) = -\frac{g}{2u}t^2 + a_3t + b_3$,

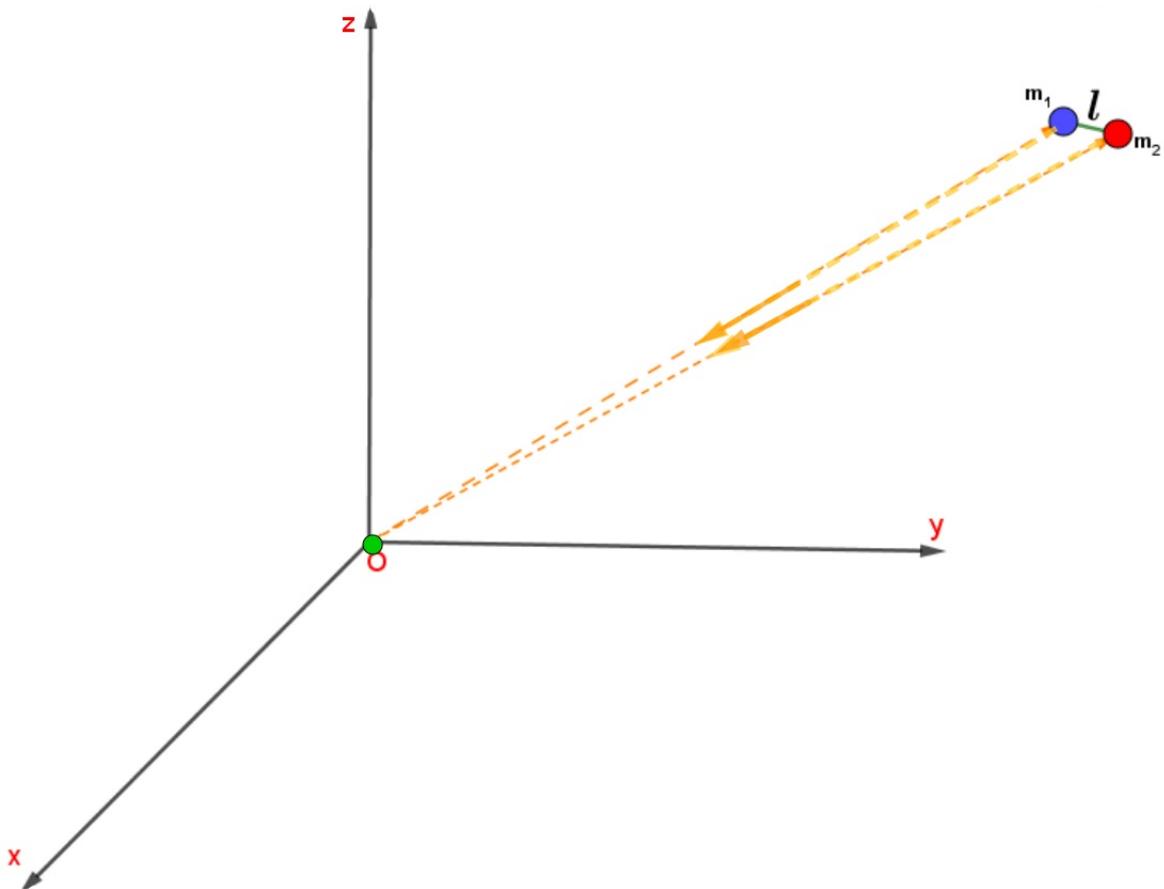
$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(t) = \arctan\left(\frac{D}{\sqrt{D^2 + H^2}} \left(\frac{\frac{L(t+M)}{\sqrt{D^2+H^2}} + N}{1 - \frac{L(t+M)}{\sqrt{D^2+H^2}}N}\right)\right) + P , \\ \phi(t) = \left(\frac{|H|}{\sqrt{D^2 + H^2}} \text{sen}\left(\arctan\left(\frac{L(t+M)}{\sqrt{D^2 + H^2}}\right) + \arctan(N)\right)\right) , \end{array} \right.$$

com a_i , b_i ($i = 1, 2, 3$) , E , D , F , G , H , L , M , N , P , Q , R constantes .

3 O DUMB-BELL NO CAMPO GRAVITACIONAL CENTRAL

Neste Capítulo vamos considerar o dumb-bell constituído por uma haste inextensível conectando duas massas pontuais m_1, m_2 e que ele é atraído por um corpo fixo de massa grande, M , que se encontra a uma grande distância do centro de massa do dumb-bell, quando comparada ao comprimento deste. Ilustramos esta configuração com a figura a seguir.

Figura 12 – Potencial atrator central.



3.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Fixemos um sistema de coordenadas ortonormal no R^3 , $C_0 = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, e consideremos uma massa M fixada na origem. O problema é estudar o movimento das massas m_1 e m_2 sujeitas à ação gravitacional da massa M , sob a restrição de que estão ligadas por uma haste inextensível de massa desprezível, cujo comprimento l é pequeno em relação a distância de seu centro de massa a M .

Sejam \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 os vetores-posição das massas m_1 e m_2 relativamente à origem deste sistema

inercial de coordenadas. Então, o espaço de configurações é a variedade

$$Q = \{(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \in R^3 \times R^3; \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| = l\}. \quad (3.1)$$

Nosso problema é estudar a dinâmica do sistema mecânico simples (Q, K, V) , onde K é a energia cinética definida pela métrica Riemanniana associada às massas m_1, m_2 , ver equação (3.24) e o potencial $V : Q \rightarrow R$ é aquele devido à atração de m_1 e m_2 pela massa central M ,

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\frac{GMm_1}{\|\mathbf{r}_1\|} - \frac{GMm_2}{\|\mathbf{r}_2\|}. \quad (3.2)$$

3.2 MOVIMENTO DO CENTRO DE MASSA DO DUMB-BELL

Seja $\mathbf{e} = \frac{1}{l}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ o vetor unitário que orienta o dumb-bell no espaço. Se d_1 e d_2 são as distâncias do centro de massa do dumb-bell, às massas m_1 e m_2 , respectivamente, então

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_c + d_1\mathbf{e}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_c - d_2\mathbf{e}, \quad (3.3)$$

onde

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}\mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{(m_1 + m_2)}\mathbf{r}_2. \quad (3.4)$$

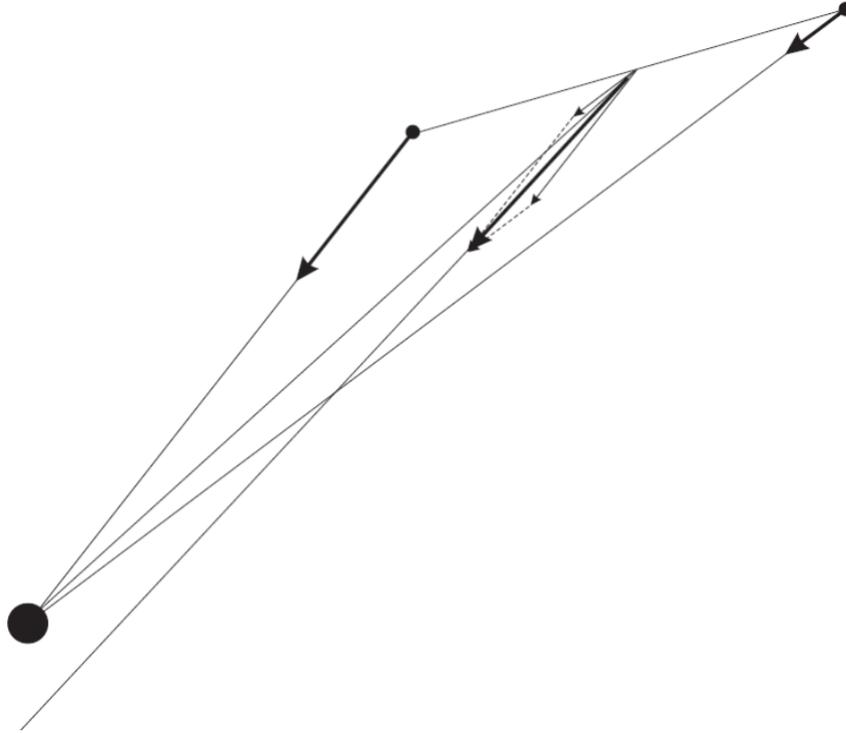
Como $d_1 + d_2 = l$, destas equações e de (3.4) temos que

$$m_1d_1 = m_2d_2. \quad (3.5)$$

Pela 2ª lei de Newton, vimos na equação (2.7) que o vetor-posição do centro de massa do dumb-bell, move-se sob a ação gravitacional da massa fixa M como um corpo de massa $m_1 + m_2$ submetido à resultante das forças externas atuando sobre cada uma destas duas massas. No Capítulo 1 vimos que o centro de massa do dumb-bell move-se sobre uma parábola que é a órbita natural dos corpos em queda livre na superfície da Terra. Ora, a órbita natural dos corpos em queda livre em torno do centro atrator Newtoniano é uma cônica, em particular uma elipse.

Portanto, a primeira ideia é que a órbita do centro de massa do dumb-bell, no caso do movimento no campo de força central Newtoniano fosse uma cônica, mas este não é o caso, necessariamente, por que a resultante das forças externas no dumb-bell não é uma força central, ver a figura a seguir

Figura 13 – A força resultante no centro de massa do dumb-bell não é uma força central.



De fato, vamos provar a seguinte proposição

O vetor-posição do dumb-bell é regido pela equação

$$\ddot{\mathbf{r}}_c(t) = -\frac{GM}{\|\mathbf{r}_c\|^3} \mathbf{r}_c(t) + \mathbf{P} . \quad (3.6)$$

onde $\|\mathbf{P}\| = O(d_1/\|\mathbf{r}_c\|)$. Pelo Teorema da Mecânica expresso na equação (2.7) temos que

$$(m_1 + m_2)\ddot{\mathbf{r}}_c = -\frac{GMm_1}{\|\mathbf{r}_1\|^3} \mathbf{r}_1 - \frac{GMm_2}{\|\mathbf{r}_2\|^3} \mathbf{r}_2 . \quad (3.7)$$

De (3.3) temos que $\|\mathbf{r}_1\|^2 = \|\mathbf{r}_c\|^2(1 + \xi_1)$ e $\|\mathbf{r}_2\|^2 = \|\mathbf{r}_c\|^2(1 + \xi_2)$, onde

$$\xi_1 = \frac{d_1^2 + 2d_1\langle \mathbf{r}_c, \mathbf{e} \rangle}{\|\mathbf{r}_c\|^2} \quad \text{e} \quad \xi_2 = \frac{d_2^2 - 2d_2\langle \mathbf{r}_c, \mathbf{e} \rangle}{\|\mathbf{r}_c\|^2} . \quad (3.8)$$

Assim, temos

$$\frac{1}{\|\mathbf{r}_1\|^3} = \frac{1}{\|\mathbf{r}_c\|^3} (1 + g(\xi_1)) \quad \text{e} \quad \frac{1}{\|\mathbf{r}_2\|^3} = \frac{1}{\|\mathbf{r}_c\|^3} (1 + g(\xi_2)) ,$$

onde o desenvolvimento em série de $g(\xi) = -1 + (1 + \xi)^{-\frac{3}{2}}$ começa em termos lineares.

Portanto, de (3.7) obtemos

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{\mathbf{r}}_c &= -\frac{GMm_1}{\|\mathbf{r}_c\|^3} (1 + g(\xi_1)) (\mathbf{r}_c + d_1\mathbf{e}) - \frac{GMm_2}{\|\mathbf{r}_c\|^3} (1 + g(\xi_2)) (\mathbf{r}_c - d_2\mathbf{e}) \\ &= -\frac{GM}{\|\mathbf{r}_c\|^3} \{ [m_1(1 + g(\xi_1)) + m_2(1 + g(\xi_2))] \mathbf{r}_c + [m_1d_1(1 + g(\xi_1)) - m_2d_2(1 + g(\xi_2))] \mathbf{e} \} \end{aligned}$$

$$= -(m_1 + m_2) \frac{GM}{\|\mathbf{r}_c\|^3} \mathbf{r}_c + (m_1 + m_2) \mathbf{P} ,$$

onde

$$\mathbf{P} = -\frac{GM}{\|\mathbf{r}_c\|^3} \frac{m_1 g(\xi_1) + m_2 g(\xi_2)}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_c - \frac{GM}{\|\mathbf{r}_c\|^3} \frac{m_1 d_1 g(\xi_1) - m_2 d_2 g(\xi_2)}{m_1 + m_2} \mathbf{e} . \quad (3.9)$$

Assim, finalmente temos

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = -\frac{GM}{\|\mathbf{r}_c\|^3} \mathbf{r}_c + \mathbf{P} ,$$

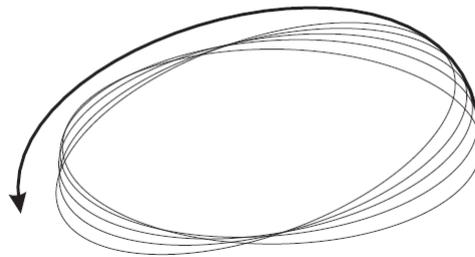
com $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$, onde

$$\text{a perturbação radial: } \mathbf{P}_1 = -\frac{GM}{\|\mathbf{r}_c\|^3} \frac{m_1 g(\xi_1) + m_2 g(\xi_2)}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_c ,$$

$$\text{e a perturbação transversal: } \mathbf{P}_2 = -\frac{GM}{\|\mathbf{r}_c\|^3} \frac{m_1 d_1 g(\xi_1) - m_2 d_2 g(\xi_2)}{m_1 + m_2} \mathbf{e} ,$$

são de ordem $O(d_1/\|\mathbf{r}_c\|)$, como se conclui de (3.8), (3.9) e do fato de que para um movimento elíptico do problema de Kepler $\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\kappa}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}$ tem-se $\frac{\kappa}{a^3} = \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2$, onde a é o semi-eixo maior e τ é o período da órbita. Lagrange considerou a órbita de um problema perturbado, tal como o descrito pela equação (3.6), como uma sucessão de elipses Keplerianas instantâneas, isto é, elipses que são órbitas do problema de Kepler associado e que em cada instante têm contato de ordem um com a órbita do problema perturbado, tendo portanto a mesma posição e velocidade que esta.

Figura 14 – Órbita como uma sucessão de elipses Keplerianas instantâneas.



Os elementos orbitais das órbitas Keplerianas são portanto dependentes do tempo e Lagrange determinou um conjunto de equações que dão as taxas de variação com o tempo de cada um destes elementos em termos da perturbação P . Estas equações são chamadas as equações de Lagrange para os elementos orbitais. Ver por exemplo, (J.L., 1853), (S.W., 1963), (J.N.A., 1962), (O.E., 1953).

3.3 A ÓRBITA ELÍPTICA FIXADA PARA A ANÁLISE

Normalmente na literatura, no artigo (V., 2008) da Celletti, por exemplo, o problema do dumb-bell é considerado como se o centro de massa do dumb-bell se movesse ao longo de uma órbita

elíptica e estuda-se então o movimento das massas m_1 e m_2 em torno de seu centro de massa. Em nossa abordagem não fazemos esta restrição, mas buscamos estudar a dinâmica do dumb-bell através do movimento de seu centro de massa e dos movimentos das massas m_1 e m_2 em torno deste.

Em nossos argumentos é importante fixarmos uma solução $\mathbf{r}(t)$ do problema de Kepler subjacente à equação (3.6) com as mesmas condições iniciais do centro de massa do dumb-bell, ou seja

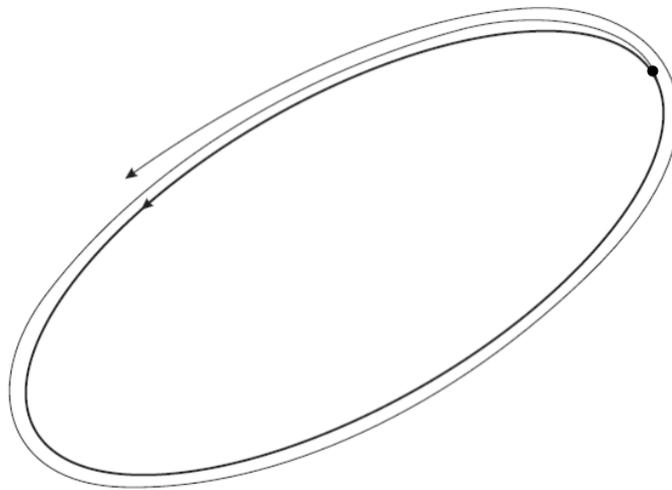
$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\frac{GM}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}(t), \quad (3.10)$$

com $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_c(0)$, $\dot{\mathbf{r}}(0) = \dot{\mathbf{r}}_c(0)$.

Pelo Teorema da dependência contínua das soluções nos dados da equação diferencial as soluções $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}_c(t)$ ficam próximas ao longo de todo o tempo em um intervalo compacto $[0, T]$. Ver (H.E., 1990), por exemplo.

Vamos considerar o caso em que o centro de massa do dumb-bell move-se ao longo de uma órbita limitada de modo que como $\mathbf{r}(t)$ fica próximo de $\mathbf{r}_c(t)$ por um longo tempo, a solução $\mathbf{r}(t)$ é elíptica, ou seja, $h = \frac{\|\dot{\mathbf{r}}(0)\|^2}{2} - \frac{GM}{\|\mathbf{r}(0)\|} < 0$. (Ver o Apêndice A)

Figura 15 – Evolução de uma órbita partindo de um mesmo ponto e com mesma velocidade inicial de uma órbita Kepleriana fixada.



Sejam a , Ω , ι , ϖ , ε seus elementos orbitais, os quais definimos no Apêndice B. Vamos Considerar a anomalia verdadeira, $\nu = \nu(t)$, da solução $\mathbf{r}(t)$, e recordar que da teoria do movimento elíptico do problema de Kepler temos

$$r = \|\mathbf{r}\| = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \nu} \quad \text{e} \quad r^2 \dot{\nu} = c, \quad (3.11)$$

onde $p = a(1 - \varepsilon^2)$ é o parâmetro da órbita e c é o módulo do momento angular $\mathbf{C} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$.

De (3.11) vemos que $\nu(t)$ é uma função invertível do tempo e portanto podemos considerar os vetores-posição como função de ν ,

$$\mathbf{r}_c(\nu) := \mathbf{r}_c(t(\nu)), \quad \mathbf{r}(\nu) := \mathbf{r}(t(\nu)), \quad (3.12)$$

onde $t = t(\nu)$ é a função inversa de $\nu = \nu(t)$.

3.4 COORDENADAS GENERALIZADAS E PARAMETRIZAÇÃO LOCAL DE Q

Iremos aqui construir as coordenadas (generalizadas) locais, na vizinhança de cada ponto $\mathbf{r}(\nu)$ da elipse descrita pela solução $\mathbf{r}(t)$ do problema de Kepler (3.10) com as condições iniciais coincidindo com as do centro de massa do dumb-bell.

Para cada ν fixado, consideremos o referencial orbital $C_2 = \{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$, onde $\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{r}(\nu)}{\|\mathbf{r}(\nu)\|}$ é o vetor na direção radial, o vetor \mathbf{E}_3 é definido pelo momento angular $\mathbf{C} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ e $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_3 \times \mathbf{E}_1$.

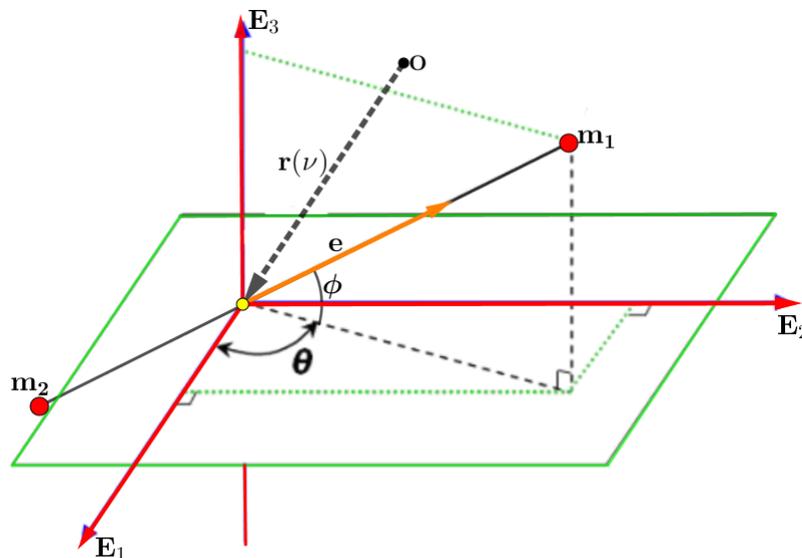
Expressando o vetor $\mathbf{e} = \frac{1}{l}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ nas coordenadas esféricas θ e ϕ relativas ao referencial C_2 , temos que este vetor depende dos parâmetros Ω, ι que determinam o plano da órbita da solução do problema de Kepler (3.10) considerada e também de θ e ϕ ,

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}(\Omega, \iota, \theta, \phi). \quad (3.13)$$

Se θ denota a longitude e ϕ a latitude de \mathbf{e} relativas ao referencial C_2 , então

$$\mathbf{e} = \cos\phi \cos\theta \mathbf{E}_1 + \cos\phi \sin\theta \mathbf{E}_2 + \sin\phi \mathbf{E}_3. \quad (3.14)$$

Figura 16 – Longitude θ e Latitude ϕ do vetor diretor do dumb-bell, \mathbf{e} , relativas ao referencial móvel C_2 .



Seja B uma vizinhança da origem do R^3 . Dado $(x_1, x_2, x_3) \in B$, consideremos o vetor de R^3

$$\mathbf{u} = x_1 \mathbf{E}_1 + x_2 \mathbf{E}_2 + x_3 \mathbf{E}_3 . \quad (3.15)$$

Tomemos $x_4 = \theta$, $x_5 = \phi$ e consideremos o vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de R^5 . Agora, para cada \mathbf{x} tomemos as massas m_1 e m_2 localizadas pelos vetores-posição

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(\nu) + \mathbf{u} + d_1 \mathbf{e} , \quad e \quad \mathbf{r}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(\nu) + \mathbf{u} - d_2 \mathbf{e} . \quad (3.16)$$

Como $\|\mathbf{r}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{r}_2(\mathbf{x})\| = l$, a aplicação

$$\Phi_\nu(\mathbf{x}) = (\mathbf{r}_1(\mathbf{x}), \mathbf{r}_2(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in B \times (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.17)$$

define uma carta local na variedade Q , espaço de configuração do dumb-bell,

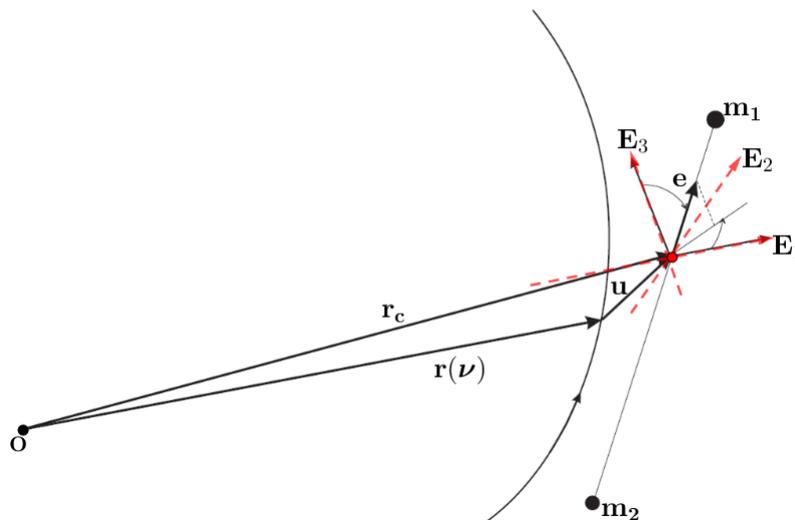
$$Q = \left\{ (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \in R^3 \times R^3; \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| = l \right\} ,$$

nas coordenadas locais dadas por x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 .

Note que em virtude de (3.5), temos

$$\mathbf{r}(\nu) + \mathbf{u} = \mathbf{r}_c . \quad (3.18)$$

Figura 17 – Vetores $\mathbf{r}(\nu)$, \mathbf{u} , \mathbf{r}_c , \mathbf{e}



Na próxima seção vamos calcular a matriz da métrica cinética na vizinhança coordenada de uma parametrização Φ_ν para futuramente calcular a energia cinética em termos das coordenadas nesta vizinhança.

3.5 MÉTRICA CINÉTICA EM COORDENADAS LOCAIS

Vamos considerar um referencial ortonormal fixo $C_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ conveniente para expressar $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\nu)$. Aqui \mathbf{e}_1 é o vetor unitário ao longo da linha dos nodos, ON , que é a intersecção do plano da órbita $\mathbf{r}(t)$ do problema de Kepler (3.10) com o plano XY do sistema inercial. O vetor \mathbf{e}_1 está dirigido no sentido do nodo ascendente. O vetor $\mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_3$ é a direção do momento angular $\mathbf{C} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ e $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$. Estes vetores são expressos em termos do nodo ascendente Ω e da inclinação ι do plano da órbita e são dados, na base fixa $C_0 = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ do sistema inercial como segue:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= (\cos \Omega, \sin \Omega, 0) , \\ \mathbf{e}_2 &= (-\sin \Omega \cos \iota, \cos \Omega \cos \iota, \sin \iota) , \\ \mathbf{e}_3 &= (\sin \Omega \sin \iota, -\cos \Omega \sin \iota, \cos \iota) .\end{aligned}\tag{3.19}$$

Os referenciais C_1 e C_2 são relacionados pelas equações a seguir; ver dedução no Apêndice C.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= \cos(\varpi + \nu)\mathbf{e}_1 + \sin(\varpi + \nu)\mathbf{e}_2 , \\ \mathbf{E}_2 &= -\sin(\varpi + \nu)\mathbf{e}_1 + \cos(\varpi + \nu)\mathbf{e}_2 , \\ \mathbf{E}_3 &= \mathbf{e}_3 .\end{aligned}\tag{3.20}$$

Segue-se que o vetor \mathbf{e} em (3.14) é dado na base fixa C_1 pela expressão

$$\mathbf{e} = \cos\phi\cos\psi\mathbf{e}_1 + \cos\phi\sin\psi\mathbf{e}_2 + \sin\phi\mathbf{e}_3, \quad \text{onde } \psi = \theta + \varpi + \nu .\tag{3.21}$$

Agora, vamos obter as expressões dos vetores que serão usados para a determinação dos elementos da métrica K . Sejam $\psi_0 = \varpi + \nu = \psi|_{\theta=0}$,

$$\mathbf{v} = \cos\psi_0\mathbf{e}_1 + \sin\psi_0\mathbf{e}_2 .\tag{3.22}$$

Então, os vetores \mathbf{r} e \mathbf{u} são expressos na base fixa C_1 como

$$\mathbf{r} = r\mathbf{v} \quad \text{e} \quad \mathbf{u} = (x_1\cos\psi_0 - x_2\sin\psi_0)\mathbf{e}_1 + (x_1\sin\psi_0 + x_2\cos\psi_0)\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 ,\tag{3.23}$$

onde r é dado pela primeira equação em (3.11).

Rapidamente calculamos as derivadas

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{1x_1} &= \mathbf{v} , & \mathbf{r}_{1x_2} &= \mathbf{e}_3 \times \mathbf{v} , & \mathbf{r}_{1x_3} &= \mathbf{e}_3 , \\ \mathbf{r}_{2x_1} &= \mathbf{v} , & \mathbf{r}_{2x_2} &= \mathbf{e}_3 \times \mathbf{v} , & \mathbf{r}_{2x_3} &= \mathbf{e}_3 ,\end{aligned}$$

$\mathbf{r}_{1x_4} = d_1 \cos\phi (-\sin\psi \mathbf{e}_1 + \cos\psi \mathbf{e}_2)$, $\mathbf{r}_{2x_4} = -d_2 \cos\phi (-\sin\psi \mathbf{e}_1 + \cos\psi \mathbf{e}_2)$,
 $\mathbf{r}_{1x_5} = -d_1 \sin\phi (\cos\psi \mathbf{e}_1 + \sin\psi \mathbf{e}_2) + d_1 \cos\phi \mathbf{e}_3$, $\mathbf{r}_{2x_5} = d_2 \sin\phi (\cos\psi \mathbf{e}_1 + \sin\psi \mathbf{e}_2) - d_2 \cos\phi \mathbf{e}_3$,
 e obtemos as expressões de $\Phi_{x_i} = (\mathbf{r}_{1x_i}, \mathbf{r}_{2x_i})$.

Com as derivadas acima calculamos sem grandes esforços os elementos da *métrica cinética* na parametrização (3.17), isto é, $K_{\mathbf{q}}(\partial_i, \partial_j)$ (onde $\partial_k = \Phi_{x_k}$), definida por

$$K_{\mathbf{q}}(X, Y) = m_1 \langle \xi_1, \eta_1 \rangle + m_2 \langle \xi_2, \eta_2 \rangle , \quad (3.24)$$

com $X = (\xi_1, \xi_2)$, $Y = (\eta_1, \eta_2)$. Ou seja, a matriz de K nesta parametrização é:

$$K_{\mathbf{q}} = (m_1 + m_2) \text{diag} \left(1, 1, 1, d^2 \cos^2 \phi, d^2 \right) . \quad (3.25)$$

Onde $d^2 = \mu_1 d_1^2 + \mu_2 d_2^2$, sendo μ_1 e μ_2 as massas adimensionalizadas

$$\mu_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} , \quad \mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} .$$

Observemos que usando $d_1 + d_2 = l$ e a igualdade (3.5), podemos expressar $d^2 = d_1 d_2$.

3.6 POTENCIAL E ENERGIA CINÉTICA EM COORDENADAS LOCAIS

Para achar a expressão do potencial definido na equação (3.2) com a restrição (3.1) em termos das coordenadas generalizadas x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Observemos que das equações (3.16) temos

$$\|\mathbf{r}_1\|^2 = \|\mathbf{r} + \mathbf{u}\|^2 + 2d_1 \langle \mathbf{r} + \mathbf{u}, \mathbf{e} \rangle + d_1^2 , \quad \|\mathbf{r}_2\|^2 = \|\mathbf{r} + \mathbf{u}\|^2 - 2d_2 \langle \mathbf{r} + \mathbf{u}, \mathbf{e} \rangle + d_2^2 , \quad (3.26)$$

E usando as equações (3.22), (3.23) obtemos:

$$\|\mathbf{r}_1\|^2 = (r + x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2d_1 \cos\phi [(r + x_1)\cos\theta + x_2 \sin\theta] + (d_1)^2 + 2d_1 x_3 \sin\phi , \quad (3.27)$$

$$\|\mathbf{r}_2\|^2 = (r + x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2d_2 \cos\phi [(r + x_1)\cos\theta + x_2 \sin\theta] + (d_2)^2 - 2d_2 x_3 \sin\phi .$$

A restrição (3.1) já está contemplada nas equações (3.16) de modo que o potencial V nas coordenadas generalizadas é obtido simplesmente substituindo as normas $\|\mathbf{r}_1\|$ e $\|\mathbf{r}_2\|$ provindo de (3.27) na expressão de V dada em (3.2).

Para a expressão da *energia cinética*

$$\begin{aligned} T : TQ &\longrightarrow R \\ (\mathbf{q}, \mathbf{v}) &\longmapsto T_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}) := \frac{1}{2}K_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) , \end{aligned} \quad (3.28)$$

nas coordenadas $(x_1, x_2, x_3, \theta, \phi; v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ do fibrado tangente TQ , usando a matriz da métrica (3.25) obtemos

$$T = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + d_1 d_2 \cos^2 \phi v_4^2 + d_1 d_2 v_5^2 \right) . \quad (3.29)$$

Agora, consideramos o *Lagrangiano* do sistema

$$\begin{aligned} L : TQ &\longrightarrow R \\ (\mathbf{q}, \mathbf{v}) &\longmapsto T_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}) := T(\mathbf{q}, \mathbf{v}) - V(\mathbf{q}) , \end{aligned} \quad (3.30)$$

cuja expressão nas coordenadas do fibrado tangente é obtida das expressões de V e K encontradas acima.

Vemos que a energia cinética (3.29) não depende do parâmetro ν mas por (3.27) vemos que o potencial (3.2) depende de ν através do raio vetor r , cuja expressão é dada em (3.11).

Por conseguinte, a expressão local do Lagrangeano na parametrização Φ_ν depende do tempo, através de $\nu = \nu(t)$,

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t, \mu) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mu) - V(\mathbf{q}, t, \mu) , \quad (3.31)$$

onde tomamos $\mu = \mu_1$ e portanto $\mu_2 = 1 - \mu$.

3.7 EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE EM COORDENADAS LOCAIS

Para escrever as equações de Euler-Lagrange em coordenadas locais precisamos calcular as derivadas parciais do potencial V , as quais são dadas por

$$V_{x_i} = GM \left(\frac{m_1}{\|r_1\|^2} \|r_1\|_{x_i} + \frac{m_2}{\|r_2\|^2} \|r_2\|_{x_i} \right), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (3.32)$$

Usando as expressões (3.27) calculamos as derivadas parciais das normas $\|\mathbf{r}_1\|$ e $\|\mathbf{r}_2\|$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{r}_1\| \|\mathbf{r}_1\|_{x_1} &= r + x_1 + d_1 \cos\theta \cos\phi, \\
\|\mathbf{r}_2\| \|\mathbf{r}_2\|_{x_1} &= r + x_1 - d_2 \cos\theta \cos\phi, \\
\|\mathbf{r}_1\| \|\mathbf{r}_1\|_{x_2} &= x_2 + d_1 \sin\theta \cos\phi, \\
\|\mathbf{r}_2\| \|\mathbf{r}_2\|_{x_2} &= x_2 - d_2 \sin\theta \cos\phi, \\
\|\mathbf{r}_1\| \|\mathbf{r}_1\|_{x_3} &= x_3 + d_1 \sin\phi, \\
\|\mathbf{r}_2\| \|\mathbf{r}_2\|_{x_3} &= x_3 - d_2 \sin\phi, \\
\|\mathbf{r}_1\| \|\mathbf{r}_1\|_{x_4} &= d_1 \cos\phi [-(r + x_1) \sin\theta + x_2 \cos\theta], \\
\|\mathbf{r}_2\| \|\mathbf{r}_2\|_{x_4} &= -d_2 \cos\phi [-(r + x_1) \sin\theta + x_2 \cos\theta], \\
\|\mathbf{r}_1\| \|\mathbf{r}_1\|_{x_5} &= -d_1 \sin\phi [(r + x_1) \cos\theta + x_2 \sin\theta] + d_1 x_3 \cos\phi, \\
\|\mathbf{r}_2\| \|\mathbf{r}_2\|_{x_5} &= d_2 \sin\phi [(r + x_1) \cos\theta + x_2 \sin\theta] - d_2 x_3 \cos\phi.
\end{aligned}$$

Substituindo estas expressões em (3.32), encontramos as seguintes expressões para as derivadas parciais de V :

$$\begin{aligned}
V_{x_1} &= V_1(r + x_1) + V_2 \cos x_4 \cos x_5, \\
V_{x_2} &= V_1 x_2 + V_2 \sin x_4 \cos x_5, \\
V_{x_3} &= V_1 x_3 + V_2 \sin x_5, \\
V_{x_4} &= V_2 \cos x_5 [-(r + x_1) \sin x_4 + x_2 \cos x_4], \\
V_{x_5} &= -V_2 \{[(r + x_1) \cos x_4 + x_2 \sin x_4] \sin x_5 - x_3 \cos x_5\},
\end{aligned} \tag{3.33}$$

com as funções V_1 e V_2 definidas por

$$V_1 = GM \left(\frac{m_1}{\|\mathbf{r}_1\|^3} + \frac{m_2}{\|\mathbf{r}_2\|^3} \right), \quad V_2 = GM \left(\frac{m_1 d_1}{\|\mathbf{r}_1\|^3} - \frac{m_2 d_2}{\|\mathbf{r}_2\|^3} \right). \tag{3.34}$$

Note que $V_j = V_j(q, t, \mu, \epsilon)$, $j = 1, 2$.

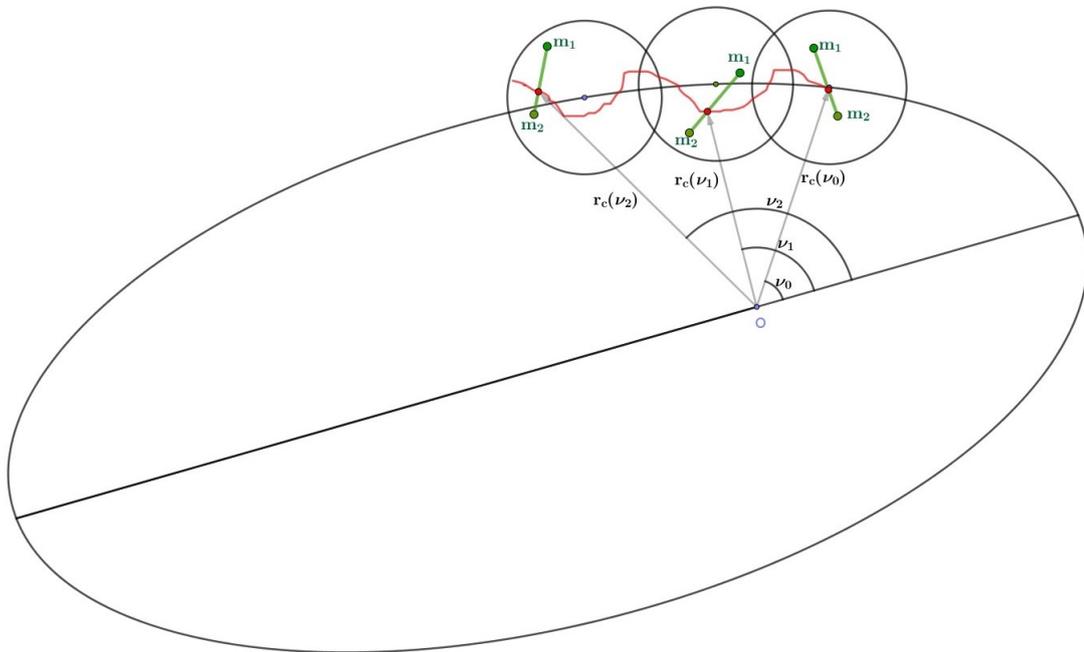
Com as expressões (3.33) das derivadas de V e a expressão (3.29) da energia cinética podemos escrever as cinco equações diferenciais de segunda ordem correspondentes às equações de Euler-Lagrange do dumb-bell, no caso gravitacional Newtoniano,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} (q(t), \dot{q}(t), t) \right) = \frac{\partial L}{\partial x_k} (q(t), \dot{q}(t), t), \quad k = 1, \dots, 5. \tag{3.35}$$

expressas nas coordenadas generalizadas x_1, \dots, x_5 , a saber

$$\begin{aligned}
 (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 &= -V_1 (r + x_1) - V_2 \cos x_4 \cos x_5, \\
 (m_1 + m_2)\ddot{x}_2 &= -V_1 x_2 - V_2 \operatorname{sen} x_4 \cos x_5, \\
 (m_1 + m_2)\ddot{x}_3 &= -V_1 x_3 - V_2 \operatorname{sen} x_5, \\
 (m_1 + m_2)d_1 d_2 \frac{d}{dt} (\dot{x}_4 \cos^2 x_5) &= -V_2 \cos x_5 [-(r + x_1) \operatorname{sen} x_4 + x_2 \cos x_4], \\
 (m_1 + m_2)d_1 d_2 \ddot{x}_5 &= V_2 \{[(r + x_1) \cos x_4 + x_2 \operatorname{sen} x_4] \operatorname{sen} x_5 - x_3 \cos x_5\} \\
 &\quad - (m_1 + m_2)d_1 d_2 \operatorname{sen} x_5 \cos x_5 (\dot{x}_4)^2.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Figura 18 – Órbita do centro de massa do dumb-bell em vermelho, representada em três instantes distintos $\nu_0 = \nu(0)$, $\nu_1 = \nu(t_1)$, $\nu_2 = \nu(t_2)$.



3.8 SOLUÇÕES PARTICULARES DO PROBLEMA DO DUMB-BELL

Nesta seção vamos considerar algumas soluções do problema do dumb-bell.

(I) Uma hipótese natural é que ambas as massas mantenham-se equidistantes do corpo atrator, ou seja,

$$\|\mathbf{r}_1(t)\| = \|\mathbf{r}_2(t)\|, \quad \text{para todo } t. \tag{3.37}$$

De (3.5) e (3.34) vemos que neste caso $V_2 = 0$, qualquer que seja a parametrização Φ_ν .

Tomemos inicialmente valores de ν num intervalo aberto que inclua $\nu(0) = \nu_0$. Então, usando as correspondentes parametrizações podemos tomar as condições iniciais, ver (3.10) e (3.18),

$$u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = 0, \quad \text{ou seja,} \quad x_1^0 = 0, \quad x_2^0 = 0, \quad x_3^0 = 0; \quad \dot{x}_1^0 = 0, \quad \dot{x}_2^0 = 0, \quad \dot{x}_3^0 = 0.$$

Como $V_2 = 0$, as equações (3.36), nas coordenadas da carta local Φ_{ν_0} , se reduzem às seguintes, na vizinhança coordenada W_0 correspondente:

$$\begin{aligned}
 (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 &= -V_1 (r + x_1) , \\
 (m_1 + m_2)\ddot{x}_2 &= -V_1 x_2 , \\
 (m_1 + m_2)\ddot{x}_3 &= -V_1 x_3 , \\
 (m_1 + m_2)d_1d_2\frac{d}{dt}(\dot{x}_4\cos^2x_5) &= 0 , \\
 (m_1 + m_2)d_1d_2\ddot{x}_5 &= -(m_1 + m_2)d_1d_2\text{sen}x_5\cos x_5(\dot{x}_4)^2 .
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Como $x_3^0 = 0$ e $\dot{x}_3^0 = 0$, pela terceira equação temos que $x_3(t) \equiv 0$. Do mesmo modo, como $x_2^0 = 0$ e $\dot{x}_2^0 = 0$, pela segunda equação temos que $x_2(t) \equiv 0$.

Como $x_2(t) \equiv 0$, $x_3(t) \equiv 0$, vemos de (3.27) que $\|\mathbf{r}_1\| = \|\mathbf{r}_2\|$ implica na igualdade

$$\cos x_5(r + x_1)\cos x_4 = \frac{d_2 - d_1}{2} . \tag{3.39}$$

Assim, $\|\mathbf{r}_1\|$ e $\|\mathbf{r}_2\|$ dependem somente de x_1 e $r(t)$. Por conseguinte, a primeira equação pode ser integrada usando-se a condição inicial $x_1^0 = 0$ e $\dot{x}_1^0 = 0$, obtendo-se a função $x_1(t)$.

A quarta e quinta equações em (3.38) dão o seguinte sistema no plano x_4, x_5 (recordemos que $x_4 = \theta$ e $x_5 = \phi$):

$$\dot{\theta}\cos^2\phi = a , \quad \ddot{\phi} = -\text{sen}\phi\cos\phi\dot{\theta}^2 , \tag{3.40}$$

onde a é uma constante de integração. Notemos que estas equações são as mesmas obtidas na Seção 2.1.6 do Capítulo 1, para o movimento do dumb-bell no campo de gravidade uniforme.

Dadas as condições iniciais $\theta_0, \phi_0, \dot{\theta}_0, \dot{\phi}_0$, calculamos a e integramos o sistema (3.40), obtendo as funções $x_4(t), x_5(t)$. Estas, juntamente com $x_1(t), x_2(t) \equiv 0$ e $x_3(t) \equiv 0$ descrevem o movimento do dumb-bell no espaço, enquanto a solução estiver na vizinhança coordenada utilizada.

A análise detalha foi feita na seção 2.1.7 do Capítulo 1. Mas nem todo movimento obtido lá é admissível aqui, em virtude da relação (3.39). Por exemplo, se $m_1 \neq m_2$, então por (3.39) $\cos\phi \neq 0$, logo neste caso não existe um movimento do dumb-bell em que este mantenha-se perpendicular ao plano da órbita elíptica $\mathbf{r}(t)$. Este movimento corresponderia, no caso do campo de gravidade constante, àquele em que o dumb-bell mantém uma posição vertical ao longo da parábola.

Será que os movimentos gerais expressos pela longitude (2.28) e a latitude (2.27) são possíveis neste caso? Em caso afirmativo, quando isto é possível? Estas equações deverão ser investigadas futuramente.

Com a solução do sistema (3.38) obtida usando as parametrizações que incluem Φ_{ν_0} com $\nu_0 = \nu(0)$ obtemos os vetores (3.16) para $\nu = \nu(t)$ com t pertencente a um intervalo $[0, t_1]$ de forma que $x_1(t)$ fique próximo de zero. Esta solução dá o movimento do dumb-bell na vizinhança coordenada W_0 .

Agora tomemos valores de ν num intervalo aberto contendo $\nu_1 = \nu(t_1)$ e consideremos as correspondentes parametrizações Φ_ν . Observamos que, em virtude da condição (3.37) o movimento do dumb-bell na vizinhança coordenada W_1 é descrito também pelas mesmas equações (3.38). Resolvendo este sistema para as condições iniciais

$$x_1(t_1), \quad x_2(t_1) = 0, \quad x_3(t_1) = 0, \quad x_4(t_1) = \theta(t_1), \quad x_5(t_1) = \phi(t_1).$$

$$\dot{x}_1(t_1), \quad \dot{x}_2(t_1) = 0, \quad \dot{x}_3(t_1) = 0, \quad \dot{x}_4(t_1) = \dot{\theta}(t_1), \quad \dot{x}_5(t_1) = \dot{\phi}(t_1).$$

obtemos o movimento do dumb-bell em W_1 . Pelo Teorema de unicidade das soluções, a solução obtida anteriormente em W_0 e esta agora em W_1 coincidem na interseção $W_0 \cap W_1$. Portanto, esta última é uma continuação da primeira.

Tomamos um tempo $t_2 > t_1$ tal que a solução em W_1 , definida no intervalo $[t_1, t_2]$ tenha $x_1(t)$ próximo de zero, para todo t neste intervalo. Repetimos o procedimento com parametrizações Φ_ν que incluam $\nu_2 = \nu(t_2)$ e assim continuamos a solução ao aberto $W_0 \cup W_1 \cup W_2$.

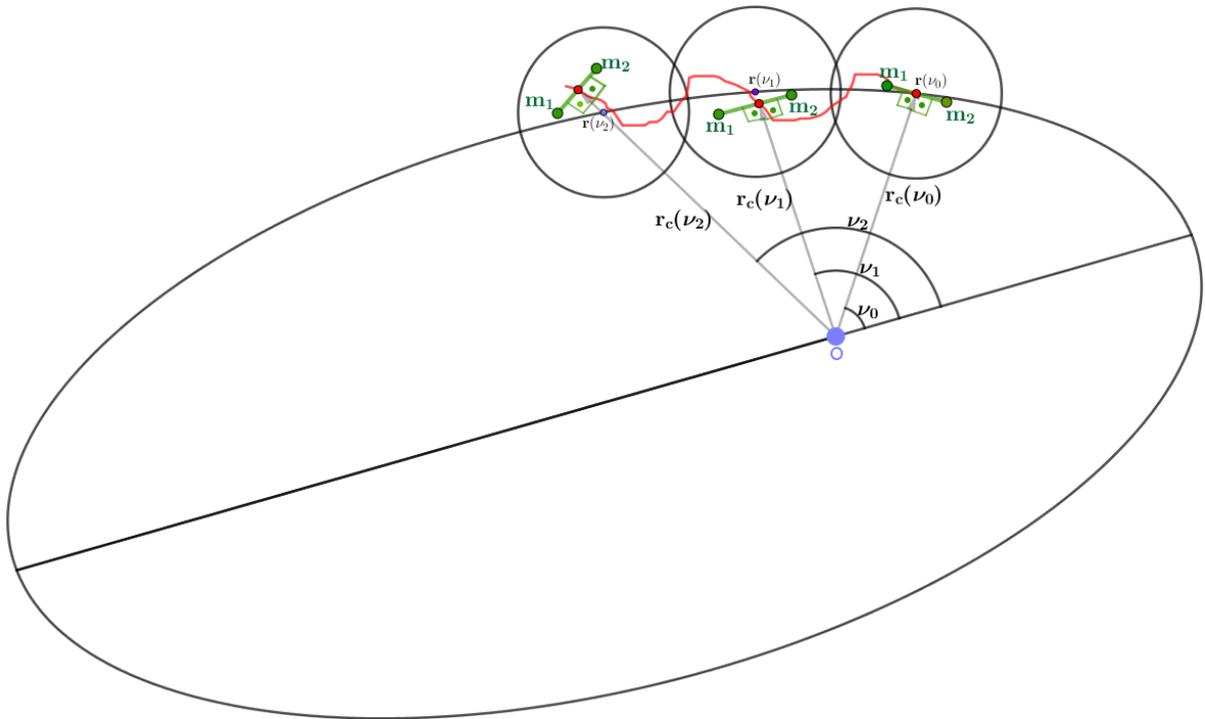
Prosseguindo desta maneira, como o intervalo $[0, T]$ é compacto, obtemos uma solução para o problema do dumb-bell em que o centro de massa fica próximo da elipse $r(t)$ fixada para a análise e, na verdade dá várias voltas em torno dela, em número tanto maior quanto maior for T .

Notemos que nesta solução o centro de massa do dumb-bell está alinhado com o raio-vetor $r(\nu)$ e que o giro do dumb-bell em torno do centro de massa mantém uma longitude constante e evolui sincronizadamente com o avanço do ponto $r(\nu)$ na elipse de tal forma a manter a igualdade (3.37) sempre satisfeita.

Consideramos alguns exemplos mais explícitos.

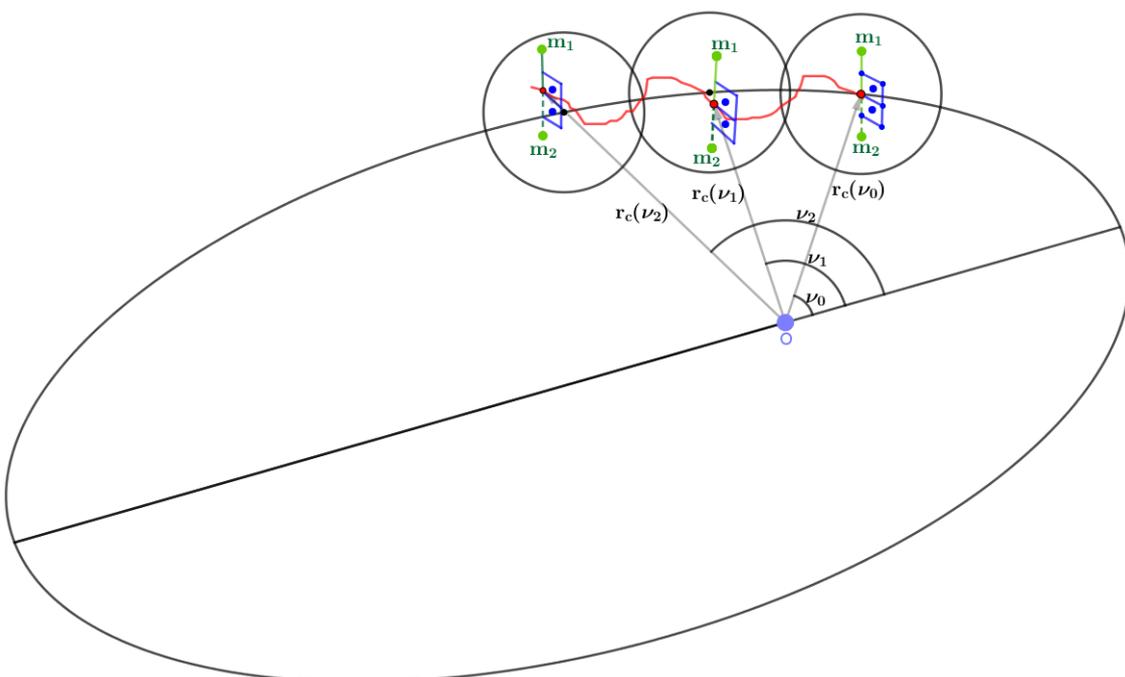
I.1) O raio vetor e no plano da elipse ($\mathbf{x}_5 = \mathbf{0}^0$). O vetor do centro de massa \mathbf{r}_c , contido no plano da elipse ($\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$), paralelo ao raio da elipse \mathbf{r} ($\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$) e perpendicular ao raio vetor ($\mathbf{x}_4 = \mathbf{90}^\circ$). Ilustramos isto na figura a seguir.

Figura 19 – Exemplo de um dumb-bell no campo atrator com o vetor diretor e o vetor do centro de massa perpendiculares.



1.2) O raio vetor é perpendicular ao plano da elipse ($x_5 = 90^\circ$). O vetor do centro de massa r_c , contido no plano da elipse ($x_3 = 0$), paralelo ao raio da elipse r ($x_2 = 0$) e x_4 livre. Ilustramos isto na figura a seguir.

Figura 20 – Exemplo de um dumb-bell no campo atrator com o vetor diretor perpendicular ao plano da elipse fixada.



Podemos considerar um exemplo que "combina" os dois exemplos **I.1)**, **I.2)**.

I.3) O raio vetor e perpendicular ao vetor do centro de massa \mathbf{r}_c ($\mathbf{x}_4 = \mathbf{90}^\circ$). O vetor do centro de massa \mathbf{r}_c , contido no plano da elipse ($\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$), paralelo ao raio da elipse \mathbf{r} ($\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$) e $\mathbf{x}_5 = \dot{\mathbf{x}}_5^0 t + \dot{\mathbf{x}}_5$ (linear), ou seja, o dumb-bell gira em torno do centro de massa.

(II) Vamos agora investigar se existe um movimento do dumb-bell em que este fique sempre no plano da elipse $r(t)$ sem que o vetor do centro de massa esteja alinhado com o raio vetor da elipse fixada.

Em um tal movimento a longitude é nula, de modo que fazendo $\phi = 0$ nas equações (3.27) e (3.36) obtemos o seguinte sistema nas variáveis x_1, x_2, x_3, x_4 , qualquer que seja a parametrização Φ_ν utilizada:

$$\begin{aligned}
 (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 &= -V_1 (r + x_1) - V_2 \cos x_4 , \\
 (m_1 + m_2)\ddot{x}_2 &= -V_1 x_2 - V_2 \text{sen} x_4 , \\
 (m_1 + m_2)\ddot{x}_3 &= -V_1 x_3 , \\
 (m_1 + m_2)d_1 d_2 \ddot{x}_4 &= -V_2 [-(r + x_1)\text{sen} x_4 + x_2 \cos x_4] , \\
 0 &= -V_2 x_3 .
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Estas equações analisadas para parametrizações com ν num intervalo contendo $\nu_0 = \nu(0)$ onde podemos tomar as condições iniciais $x_i(0) = 0$, $\dot{x}_i(0) = 0$, nos darão $x_3(t) \equiv 0$ numa vizinhança coordenada W_0 . Por conseguinte nesta vizinhança W_0 as outras três equações em (3.41) dão um sistema nas variáveis x_1, x_2, x_4 pois as equações (3.16), quando $x_3 = 0$ e $\phi = 0$ se reduzem às seguintes:

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{r}_1\|^2 &= (r + x_1)^2 + x_2^2 + 2d_1 [(r + x_1)\cos\theta + x_2\text{sen}\theta] + d_1^2 , \\
 \|\mathbf{r}_2\|^2 &= (r + x_1)^2 + x_2^2 - 2d_2 [(r + x_1)\cos\theta + x_2\text{sen}\theta] + d_2^2 .
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Pelo Teorema de existência e unicidade de soluções, dadas as condições iniciais

$$x_1(0) , x_2(0) , x_4(0) , \dot{x}_1(0) , \dot{x}_2(0) , \dot{x}_4(0) ,$$

existe uma única solução deste sistema em W_0 , a qual está definida em um intervalo máximo. Quando a esta solução $x_1(t), x_2(t), x_4(t)$ acrescentamos $x_3(t) \equiv 0$, obtemos uma solução do sistema (3.41) que dá o movimento planar do dumb-bell em W_0 .

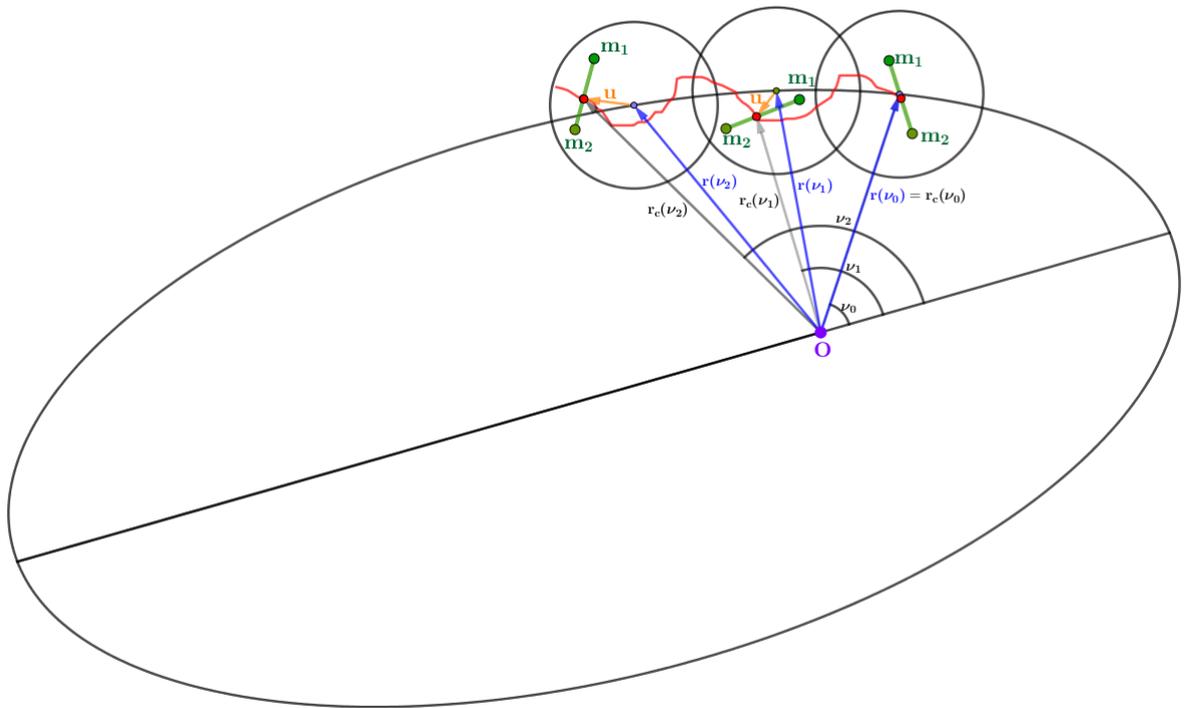
O procedimento daqui em diante é como antes. Tomamos um tempo $t_1 > t_0 = 0$ tal que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ fiquem próximos de zero no intervalo $[t_0, t_1]$. Repetimos o raciocínio para uma vizinhança coordenada W_1 onde estejam definidas as parametrizações Φ_ν com ν em um intervalo aberto contendo $\nu_1 = \nu(t_1)$. Consideramos a solução em W_1 definida pela condição inicial

$$x_1(t_1), x_2(t_1), x_3(t_1) = 0, x_4(t_1), \dot{x}_1(t_1), \dot{x}_2(t_1), \dot{x}_3(t_1) = 0, \dot{x}_4(t_1).$$

Por unicidade das soluções, a solução em W_1 é uma continuação daquela em W_0 . Por compacidade, obtemos uma solução do dumb-bell definida no intervalo $[0, T]$.

Observe que nesta solução podemos ter o dumb-bell movendo-se dentro do plano da órbita de $r(t)$ sem que o seu centro de massa não esteja alinhado com $r(\nu)$. Ilustramos isto na figura a seguir.

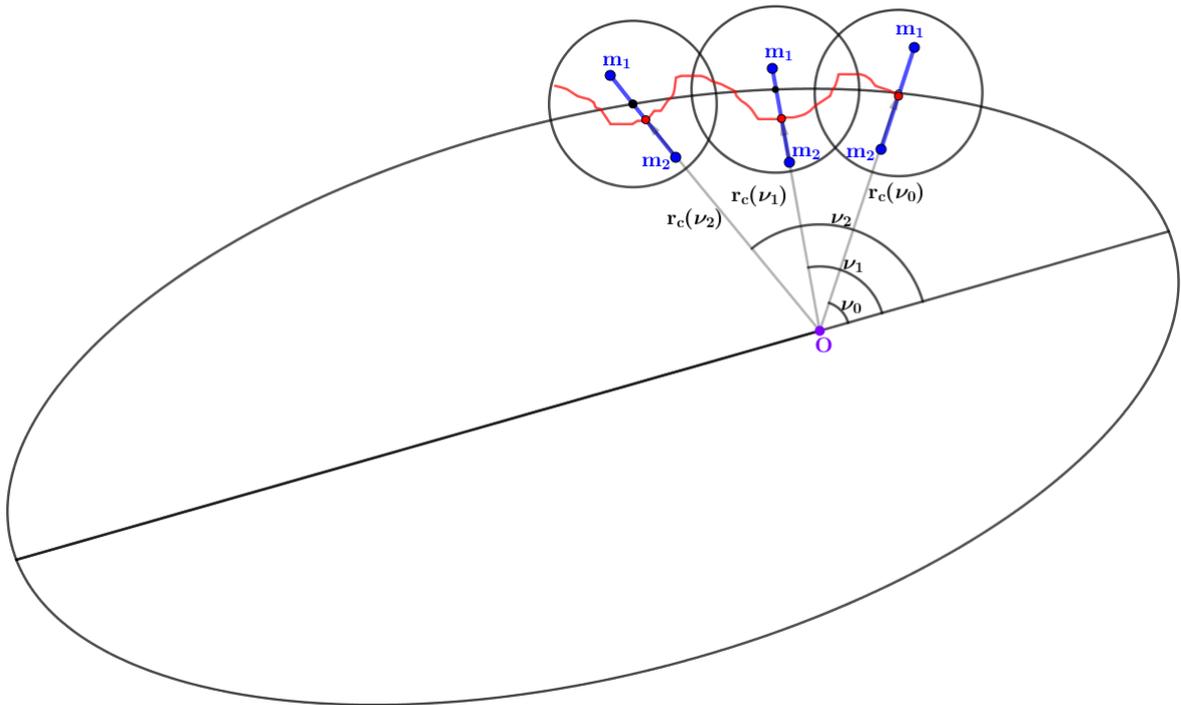
Figura 21 – Exemplo de um dumb-bell no campo atrator contido no plano da elipse fixada, com o vetor diretor e o centro de massa não alinhados.



Por outro lado, podemos considerar o exemplo:

II.1) O raio vetor e no plano da elipse ($x_5 = 0^\circ$). O vetor do centro de massa r_c , contido no plano da elipse ($x_3 = 0$), paralelo ao raio da elipse r ($x_2 = 0$) e paralelo ao raio vetor ($x_4 = 0^\circ$). Ilustramos isto na figura a seguir.

Figura 22 – Exemplo de um dumb-bell no campo atrator contido no plano da elipse e com o vetor diretor alinhado com o vetor do centro de massa.



4 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

Esta abordagem geométrica nos permitiu avançar bastante na compreensão da dinâmica do dumb-bell. Solucionamos explicitamente o problema no caso do campo uniforme e agora temos a possibilidade de mais avanços para a compreensão da dinâmica de um dumb-bell no caso do potencial atrator.

A dinâmica do dumbbell é feita geralmente supondo que o seu centro de massa move-se ao longo de uma órbita elíptica do problema de Kepler definido pela massa central. Isto é justificado pelo fato de que o centro de massa está muito afastado do centro atrator. Todavia isto não é rigorosamente exato e para um dumbbell de grandes dimensões, em tamanho e massa, movendo-se próximo da superfície da Terra, o fato de a força sobre o centro de massa não ser central é um fator que não poderá ser ignorado. Por isto preferimos fazer nosso estudo sem esta hipótese. Nisto difere essencialmente nossa abordagem dos trabalhos apresentados por outros autores.

No caso do potencial atrator, pretendemos num desenvolvimento futuro buscar novas soluções do dumb-bell, investigar se nas soluções apresentadas o centro de massa fica todo tempo numa vizinhança da órbita elíptica que tomamos por base, ou se ele se afasta dela com o tempo. No primeiro caso, pretendemos investigar se podemos tomar $T \rightarrow \infty$ e, se isto for possível, investigar a questão da estabilidade destas soluções.

Também pretendemos investigar se no caso da solução planar discutida, pode-se obter mais informações sobre a evolução do movimento, isto é, conhecer pelo menos aproximadamente as funções coordenadas $x_i(t)$. De fato temos que $x_i = x_i(t, \mu, \epsilon)$ e talvez só seja possível ter um conhecimento melhor destas coordenadas de forma aproximada, quando ϵ é pequeno. Para isto teremos que fazer primeiro a integração explícita do caso $\epsilon = 0$.

E pretendemos também considerar o grupo de simetria do problema do dumb-bell, $G = SO(3)$, como proposto pelo Smale em (S., 1970), e olharemos o dumb-bell como um sistema Mecânico com simetria (Q, K, V, G) . E assim teremos a possibilidade de fazer uma redução do problema, via a teoria de redução simplética, e obtermos outras soluções e uma compreensão da dinâmica do dumb-bell em outras situações.

REFERÊNCIAS

DER, M. J. V. *On the Geometry of Hamiltonian Systems*. 2th. ed. [S.l.]: Lectures Notes Seminar GISDA, Universidade del Bio Bio, 1987.

F.M.B., D. L. *O problema restrito elíptico dos três corpos com colisão*. Programa de Pós Graduação em Matemática, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal de Pernambuco, 2008. (Tese de Doutorado). ISBN 9788524400360. Available at: <<https://books.google.com.br/books?id=J3wDSAAACAAJ>>.

H., P. *Dumbbell Shaped Objects in the Solar System*. In: . [S.l.: s.n.], 2002. v. 37, p. A119.

H.E., C. *Notas de aula de um curso de EDO*. [S.l.]: Programa de Pós Graduação em Matemática, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal de Pernambuco, 1990.

J.E., A. R. M. *Foundations of Mechanics*. 2th. ed. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1987.

J.L., L. *MECANIQUE ANALYTIQUE*. [s.n.], 1853. Available at: <<https://books.google.fr/books?id=YPfuTVbno1wC>>.

J.N.A., D. *Fundamentals of Celestial Mechanics*. [S.l.]: New York: The Macmillan Company, 1962.

MCCLAMROCH N.H., A. S. . S. J. . *Dynamics and Control of an Elastic Dumbbell Spacecraft in a Central Gravitational Field*. In: . [S.l.]: Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, 2004. v. 3, p. 2798 – 2803 Vol.3. ISBN 0-7803-7924-1.

M.P., D. C. *Geometria Riemanniana*. 4th. ed. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008. (Projeto Euclides). ISBN 9788524400360. Available at: <<https://books.google.com.br/books?id=J3wDSAAACAAJ>>.

O.E., M. M. B. *Differential Equations*. 3th. ed. [S.l.]: New York: Prentice-Hall, Inc., 1953.

S., S. *Topology and Mechanics*. *Inventiones Mathematicae*, Publisher, v. 10, n. 27, p. 305–331, July 1970.

SIMPSON L., M. A. . P. M. . *Non-integrability of the dumbbell and point mass problem*. In: . [S.l.]: Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2013. p. 315 – 330 Vol.117.

S.W., M. *Introduction to celestial mechanics*. [S.l.]: Addison-Wesley Series in Aerospace Science, Addison-Wesley, 1963.

V., C. A. S. *Some properties of the dumbbell satellite attitude dynamics*. *Celest Mech Dyn Astr*, Publisher, v. 101, n. 22, p. 105–126, March 2008.

V.I., A. *Mathematical methods of classical mechanics equations*. 2th. ed. [S.l.]: Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1953.

APÊNDICE A – PROBLEMA DE KEPLER

O problema de Kepler é a descrição da interação entre dois corpos, onde um corpo é atraído pelo outro fixo, ou relativamente fixo, por meio de uma força central. Ou seja, é caracterizado pela equação:

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\frac{GM}{\|\mathbf{r}(t)\|^3}\mathbf{r}(t) . \quad (\text{A.1})$$

Temos que as órbitas deste problemas são cônicas. Cujo formato depende do valor de sua **Energia**:

$$h = \frac{\|\dot{\mathbf{r}}(0)\|^2}{2} - \frac{GM}{\|\mathbf{r}(0)\|} . \quad (\text{A.2})$$

Ou seja,

Se $h < 0$: a órbita é uma elipse .

Se $h = 0$: a órbita é uma parábola . (A.3)

Se $h > 0$: a órbita é um arco de hipérbole .

Para verificar isto e mais alguns detalhes, recomendamos o livro do McCuskey (s.w., 1963).

Da equação A.1:

$$\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) = \vec{\mathbf{C}} \text{ (Momento angular)} . \quad (\text{A.4})$$

E temos o **vetor de Laplace**, $\vec{\mathbf{e}}$, definido por

$$GM \left(\vec{\mathbf{e}} + \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \right) = \dot{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{C}} . \quad (\text{A.5})$$

E considerando seus elementos orbitais, definidos na seção a seguir, obtemos:

$$\mathbf{r}(t) = r (\cos\nu(t), \text{sen}\nu(t)) \left\{ \vec{\mathbf{E}} , \mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} \vec{\mathbf{E}} \right\} , \quad \text{com } r = \|\mathbf{r}(t)\| = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos\nu(t)} . \quad (\text{A.6})$$

Onde $\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}}$ é a rotação de $\frac{\pi}{2}$ no plano da órbita.

Temos que:

$$\|\mathbf{r}(t)\|^2 \dot{\nu}(t) = \|\vec{\mathbf{C}}\| . \quad (\text{A.7})$$

Daí, $\dot{\nu}(t) > 0, \forall t$. Assim, $\nu(t)$ é invertível e estritamente crescente, escrevemos a função inversa de $\nu = \nu(t)$ da forma:

$$t = t(\nu) . \quad (\text{A.8})$$

APÊNDICE B – ELEMENTOS ORBITAIS

São suficientes **cinco** quantidades independentes, chamadas de "elementos orbitais" para descrever completamente o **tamanho**, a **forma** e a **orientação** de uma órbita. Um **sexto** elemento é exigido para determinar a posição do satélite em um determinado instante. Para apresentar os elementos, fixemos um sistema de coordenadas ortonormal, com origem num ponto $O : C_o = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$,

Usaremos as seguintes notações:

- π_{orb} : Plano da órbita cônica
- π_{xOy} : Plano da eclíptica (Plano de referência)
- $n = \pi_{orb} \cap \pi_{xOy}$: linha dos nodos
- ON : Direção da linha dos nodos ascendente
- $\vec{\mathbf{E}}$: Vetor diretor do pericentro (Ponto mais próximo do foco da cônica)

Seja P um ponto da cônica, podemos então definir os elementos orbitais de uma órbita cônica:

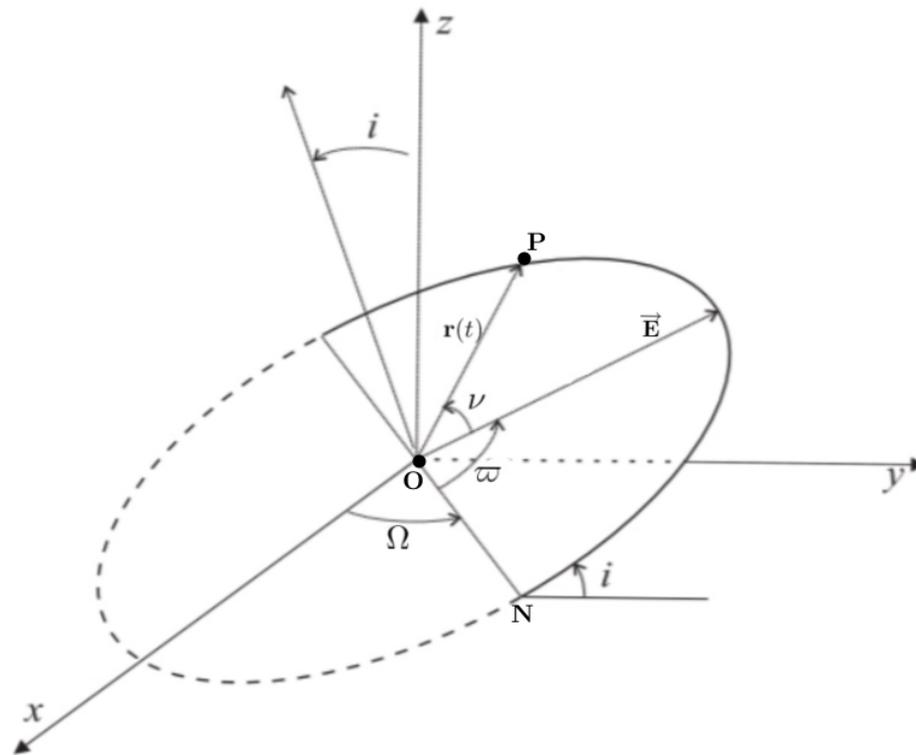
- a : **Semi-eixo maior**
- Ω : **Longitude do nodo ascendente**. Ângulo entre Ox e ON
- ι : **Inclinação**. Ângulo entre π_{xOy} e π_{orb}
- ϖ : **Argumento do pericentro**. Ângulo entre ON e $\vec{\mathbf{E}}$
- $\epsilon = \|\vec{\mathbf{e}}\|$: **Excentricidade**. Determina a forma da órbita
- T : **Um instante de passagem pelo pericentro**

E consideramos também:

- ν : **Anomalia verdadeira**. Ângulo entre $\vec{\mathbf{E}}$ e \vec{OP}

Representamos esses elementos na figura a seguir.

Figura 23 – Elementos orbitais

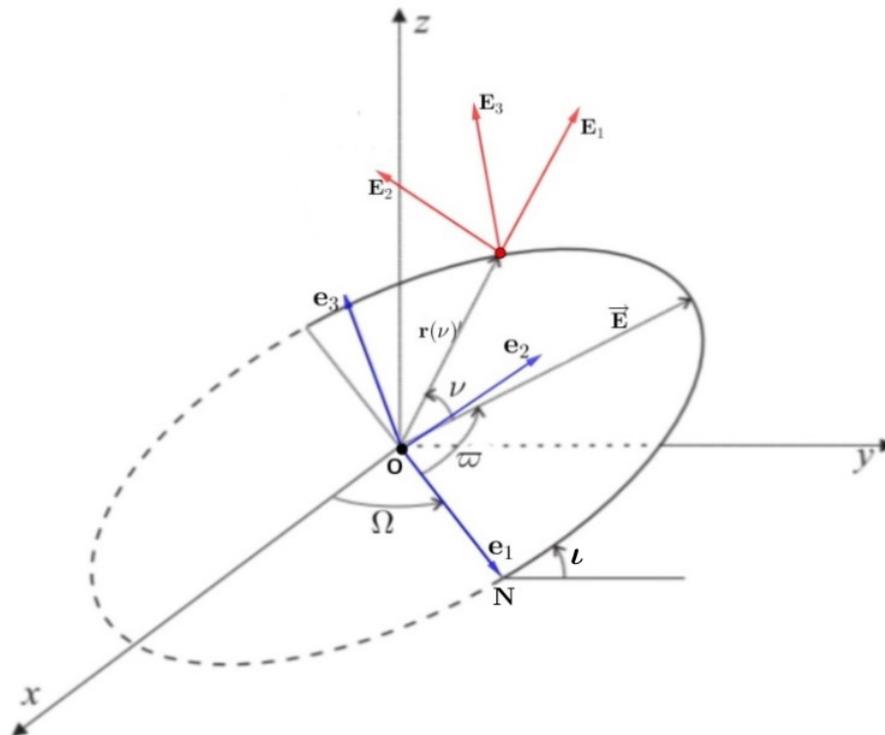


Para mais detalhes ver (S.W., 1963).

APÊNDICE C – REFERENCIAL ORBITAL

Consideramos um novo sistema de coordenadas de referência: $C_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$, obtido fazendo a partir do sistema de coordenadas C_0 por meio da rotação em torno do eixo z de um ângulo Ω , seguida da rotação de um ângulo ι em torno da linha dos nodos ON , como ilustrado na figura abaixo:

Figura 24 – Referencial orbital



As matrizes que representam estas operações são, respectivamente:

$$A_{\Omega}^z = \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{\iota}^x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \iota & \sin \iota \\ 0 & -\sin \iota & \cos \iota \end{bmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

Daí,

$$A_{\iota}^x \cdot A_{\Omega}^z = \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega \cos \iota & \cos \Omega \cos \iota & \sin \iota \\ \sin \Omega \sin \iota & -\cos \Omega \sin \iota & \cos \iota \end{bmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Portanto,

$$\mathbf{e}_1 = (\cos \Omega, \sin \Omega, 0) ,$$

$$\mathbf{e}_2 = (-\sin \Omega \cos \iota, \cos \Omega \cos \iota, \sin \iota) , \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbf{e}_3 = (\sin \Omega \sin \iota, -\cos \Omega \sin \iota, \cos \iota) .$$

Considerando ainda a figura acima, definamos o **referencial orbital**: $C_2 = \{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$. Que em cada instante, ν , é dado por:

$$\mathbf{E}_1(\nu) = \frac{\mathbf{r}(\nu)}{\|\mathbf{r}(\nu)\|} , \quad \mathbf{E}_3(\nu) = \frac{\mathbf{r}(\nu) \times \dot{\mathbf{r}}(\nu)}{\|\mathbf{r}(\nu) \times \dot{\mathbf{r}}(\nu)\|} , \quad \mathbf{E}_2(\nu) = \mathbf{E}_3(\nu) \times \mathbf{E}_1(\nu) . \quad (\text{C.4})$$

Temos que:

$$\mathbf{E}_1 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{E}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{E}_1 \rangle \mathbf{e}_2 . \quad (\text{C.5})$$

\mathbf{E}_3 e \mathbf{e}_3 são perpendiculares ao plano orbital, e as bases C_1 , C_2 têm a mesma orientação, logo são iguais. E como $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{E}_1) = \varpi + \nu$, concluímos que os referenciais C_1 e C_2 estão relacionados em cada instante ν por:

$$\mathbf{E}_1 = \cos(\varpi + \nu) \mathbf{e}_1 + \sin(\varpi + \nu) \mathbf{e}_2 ,$$

$$\mathbf{E}_2 = -\sin(\varpi + \nu) \mathbf{e}_1 + \cos(\varpi + \nu) \mathbf{e}_2 , \quad (\text{C.6})$$

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{e}_3 .$$