



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

PEDRO MONTEIRO DE ALMEIDA JUNIOR

**PROCESSAMENTO DE IMAGENS SAR POR ESTRUTURAS APROXIMADAS
TIPO ARMA**

Recife

2021

PEDRO MONTEIRO DE ALMEIDA JUNIOR

**PROCESSAMENTO DE IMAGENS SAR POR ESTRUTURAS APROXIMADAS
TIPO ARMA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Estatística.

Área de Concentração: Estatística aplicada

Orientador: Dr. Abraão David Costa do Nascimento

Recife

2021

Catálogo na fonte
Bibliotecário Cristiano Cosme S. dos Anjos, CRB4-2290

A447p Almeida Junior, Pedro Monteiro de
Processamento de imagens SAR por estruturas aproximadas tipo ARMA /Pedro Monteiro de Almeida Junior. – 2021.
197 f.: il., fig., tab.

Orientador: Abraão David Costa do Nascimento.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Estatística, Recife, 2021.
Inclui referências e apêndices.

1. Estatística aplicada. 2. Filtros. 3. Processos ARMA. 4. Imagens SAR. I. Nascimento, Abraão David Costa do (orientador).
II. Título.

310

CDD (22. ed.)

UFPE-CCEN 2021-59

**PEDRO MONTEIRO DE ALMEIDA
JUNIOR**

**PROCESSAMENTO DE IMAGENS SAR POR ESTRUTURAS APROXIMADAS
TIPO ARMA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Estatística.

Aprovada em: 24 de fevereiro de 2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Abraão David Costa do Nascimento
UFPE

Prof. Alejandro C. Frery
UFAL

Prof. Francisco Cribari Neto
UFPE

Prof. Renato J. Cintra
UFPE

Prof.^a Fátima Sombra
UFC

Prof. Josimar Vasconcelos
UFRPE

Dedico aos meus pais, Lucinete e Pedro, por todo amor incondicional.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, o criador e sustentador da humanidade, pela fé concedida, força nos momentos difíceis e por tudo que me proporcionou na vida.

Ao meu orientador, Abraão Nascimento, por toda orientação, no qual nunca faltaram palavras de encorajamento e incentivo. Por toda paciência e dedicação na construção deste trabalho. Também pelos conselhos e direcionamentos recebidos durante este período, sempre muito solícito e disposto a ajudar até fora do escopo da academia. Além de ser um profissional exemplar e muito competente.

Aos meus pais, Lucinete e Pedro, pelo amor incondicional, pelos ensinamentos sobre a vida, incentivo e apoio nos momentos que foram precisos. Minha fortaleza durante essa árdua jornada

Ao meu falecido vovô João, por ser um dos maiores incentivadores à educação, com toda sua simplicidade deixou como legado a busca pelo conhecimento.

Aos meus queridos irmãos, Juliana e Felipe, pela amizade incondicional.

A minha Tia Amélia, por me acolher em sua casa durante a estadia em Recife, sendo uma segunda mãe para mim. Todo seu apoio foi importante nessa difícil caminhada.

A minha namorada Carol, por todo carinho, paciência, compreensão, companheirismo e incentivo nos momentos difíceis.

Aos Professores do Departamento de estatística da UFPB que contribuíram para minha formação de Bacharel em estatística, em especial aos professores: Eufrásio de Lima, Tatiene de Souza, Tarciana Liberal, Joab de Lima e Hemílio Coelho, por todo incentivo e ensinamentos compartilhados nas disciplinas e sob orientação.

A todos os Professores do DE-UPPE, pelos ensinamentos que contribuíram para minha formação acadêmica e científica, em especial aos professores: Abraão, Klauss, Getúlio, Francisco Cribari, Roberto, Raydonal, Patrícia e Audrey.

Aos membros da banca de qualificação, Dr. Renato Cintra e Dr. Francisco Cribari, por todas as contribuições e orientações dadas.

Aos grandes amigos: Vitor, Jodavid, Henrique, Helison, Bruno e Guilherme, por todos bons momentos e conselhos sobre vários aspectos da vida.

Aos meus primos: Mateus, Leandro e Neto, por toda amizade.

Aos amigos que fiz no Departamento de estatística da UFPB: Ramon, Jodavid, Wanessa, Camila, Alisson, Luana, Henrique, Marina e Saul, por todos momentos de descontração, união e companheirismo que foram construídos ao longo do curso.

Aos amigos do doutorado: Jonas, Bruna, Jodavid, Zé Carlos, César, Cristina, Anny, Adenice, Jairo, professor Luíz, Vinícios, Yuri e Jucelino, por todos momentos de descontração e também de dificuldades, todos vocês foram fundamentais.

À Valéria, sempre muito atenciosa e solicita para me orientar sobre as burocracias acadêmicas.

À CAPES, pelo apoio financeiro. E, finalmente, aos membros da banca examinadora pelas contribuições.

RESUMO

Sistemas de radar de abertura sintética (SAR) têm sido sugeridos como ferramentas promissoras para resolver problemas de sensoriamento remoto. As imagens SAR são contudo afetadas por um ruído chamado *speckle*, que dificulta o processamento delas. Particularmente, determinar filtros eficientes é uma etapa de pós-processamento crucial ao analisar dados SAR. Alguns atributos (tais como intensidades e amplitudes dos retornos SAR complexos) impõem comportamentos probabilísticos não Gaussianos para distribuições não condicionais marginais a serem empregadas, além de estruturas de dependência na relação entre seus pixels. Em geral, os campos aleatórios de Markov (CAMs) são os modelos mais alinhados para descrever dependência espacial em imagens SAR. Contudo há grandes desafios tanto de incorporar modelos ligados a física de formação de imagens SAR como de fazer inferência para os parâmetros destes modelos. Uma alternativa aos CAMs é utilizar aproximações de processos 2D por modelos de séries temporais 1D ligados à física de formação de imagens SAR. Nesta tese, propõem-se dois processos tipo ARMA com distribuições marginais $\mathcal{G}_I^0$ e K-Bessel (KB) para descrever séries temporais de intensidades tanto obtidas em imagens distintas como a partir de vizinhanças espaciais de uma única imagem. Esses processos são denominados como $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA e KB-ARMA. Primeiramente, baseando-se no modelo Γ -ARMA (caso particular de ambos ARMA- $\mathcal{G}_I^0$ e ARMA-KB), propõem-se um novo filtro para o *speckle* e um estimador para o número de *looks* equivalente (*equivalente number of looks*-ENL) desenvolvido a partir dos resíduos de *Pearson* decorrentes do processo Γ -ARMA. Resultados mostram que (i) o filtro proposto teve desempenho melhor quando comparado com outros seis filtros da literatura (*boxcar*, *median*, *Enhanced Lee*, *Kuan*, Γ -MAP e G-ARMA) e (ii) o novo estimador para o ENL teve melhor desempenho quando comparado com outros três (CoV, FBM e Γ -MV). Em segundo lugar, os processos $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA e KB-ARMA são introduzidos e algumas de suas propriedades matemáticas são derivadas: tais como expressões em forma fechada para a função *score* e matriz de informação de Fisher. Suas previsões e medidas de diagnósticos são também introduzidas e discutidas. Procedimentos para obtenção das estimativas de máxima verossimilhança são propostos. O desempenho das estimativas para vários cenários é quantificada através de experimentos Monte Carlo. Aplicações para dados SAR reais são também realizadas. Resultados indicam que os novos modelos apresentam avanços em relação ao processo Γ -ARMA que pode ser entendido como um tipo de *benchmark* para dados SAR.

Palavras-chave: Filtros. Processos ARMA. Imagens SAR. Séries temporais.

ABSTRACT

Synthetic Aperture Radar (SAR) systems have been suggested as promising tools for solving remote sensing issues. But, SAR images are affected by a noise called *speckle*, which makes their processing hard. Particularly, determining efficient filters is a crucial post-processing stage when analyzing speckled data. Some features (e.g., intensities and amplitudes due to complex returns) impose non-Gaussian laws for non-conditional marginal distributions to be employed and also dependence structures. In general, Markov random fields (MRFs) represent a modeling which is more aligned to describe spatial dependence in SAR images. However, there are great challenges in the use of MRFs on both to derive marginal models close to SAR imagery physical formation and to make inference on the associated parameters. An alternative to MRFs is to approximate bi-dimensional processes by time series models with marginal laws in the multiplicative modeling. In this thesis, two ARMA processes having marginals $\mathcal{G}_I^0$ and K-Bessel (KB) to describe intensity time series are proposed. These processes are denoted as $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA and KB-ARMA. First, considering Γ -ARMA (particular case of both ARMA- $\mathcal{G}_I^0$ and ARMA-KB), novel Γ -ARMA filter for the speckle and estimator for ENL (*equivalente number of looks*-ENL) from Γ -ARMA *Pearson* residuals are developed. Results show that (i) the proposed filter may outperform six ones of literature (*boxcar*, *median*, *Enhanced Lee*, *Kuan*, Γ -MAP e G-ARMA) and (ii) the new estimator can represent the ENL better than other three ones (CoV, FBM e Γ -MV). Second the $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA and KB-ARMA processes are pioneered and some of their mathematical properties are derived: such like closed-form expressions for score function and Fisher information matrix. Their prediction equations and diagnostic measures are derived and discussed as well. Maximum likelihood estimation procedures for new processes are made. The performance of the associated estimates is quantified for various scenarios through Monte Carlo experiments. Several applications to real images are made. Results point out new processes may outperform the Γ -ARMA process which can be understood as a kind of benchmark.

Keywords: Filters. ARMA processes. SAR imagery. Time Series.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Efeito do <i>speckle</i> quando a imagem SAR é capturada no município de Tapajós (Pará, Brazil).	21
Figura 2 – Geometria de obtenção da imagem SAR	30
Figura 3 – Ilustração do processo multilook.	31
Figura 4 – Imagens sintéticas e densidades geradas a partir da distribuição KB para diferentes valores de (α, λ)	33
Figura 5 – Imagem SAR sintética e densidades geradas da distribuição $\mathcal{G}_I^0$ para diferentes valores de (α, γ)	35
Figura 6 – Ilustração das representações físicas do parâmetro α em valor absoluto para as distribuições $\mathcal{G}_I^0$ e KB	35
Figura 7 – Relação entre vizinhanças do <i>pixel</i> da imagem	37
Figura 8 – Ilustração dos tipos de rastreamento usados para uma janela de tamanho 5×5	49
Figura 9 – Diagrama do algoritmo para filtro Γ -ARMA	51
Figura 10 – Imagens filtradas de 01 ($L = 1$)	56
Figura 11 – Imagens filtradas de 01 ($L = 4$)	57
Figura 12 – Imagens filtradas de 05 ($L = 1$)	58
Figura 13 – Imagens filtradas de 05 ($L = 4$)	59
Figura 14 – Imagens razão de 05 ($L = 4$)	60
Figura 15 – Imagens razão de 01 ($L = 4$)	61
Figura 16 – Variância a priori do sinal $X(i, j)$ para Γ -MAP	63
Figura 17 – Imagens SAR filtradas e reais para São Francisco	65
Figura 18 – Imagens SAR filtradas e reais para Foulum	66
Figura 19 – Imagens SAR filtradas e reais para Munique	67
Figura 20 – Imagens razão para Sao Francisco	68
Figura 21 – Imagens razão para Foulum	69
Figura 22 – Imagens razão para Munique	70
Figura 23 – Sinais suavizados para imagem de São Francisco	71
Figura 24 – Sinais suavizados para imagem de Foulum	72
Figura 25 – Sinais suavizados para imagem de Munique	73

Figura 26 – Imagens ópticas e SAR com as regiões selecionadas	82
Figura 27 – ENL predito da imagem São Francisco	85
Figura 28 – Imagem óptica obtida pelo Google earth	96
Figura 29 – Imagem SAR de São Francisco (usando o canal HH como nível de cinza) com regiões selecionadas	97
Figura 30 – Correlação pixel a pixel.	99
Figura 31 – Ajustes dos modelos de regressão usados.	99
Figura 32 – Análise de diagnóstico em dados do oceano	100
Figura 33 – Análise de diagnóstico em dados do floresta	100
Figura 34 – Análise de diagnóstico em dados do urbano	101
Figura 35 – Imagem de São Francisco e as regiões consideradas.	117
Figura 36 – Séries observadas, ACF e PACF	119
Figura 37 – Sinais preditos (Região I)	120
Figura 38 – Sinais preditos (Região II)	122
Figura 39 – Sinais preditos (Região III)	123
Figura 40 – ACF e PACF dos resíduos (Região I)	124
Figura 41 – ACF e PACF dos resíduos (Região II)	125
Figura 42 – ACF e PACF dos resíduos (Região III)	126
Figura 43 – Mapas para as estimativas $\hat{\alpha}$, $\hat{\delta}$, $\hat{\phi}$ e $\hat{\theta}$	127
Figura 44 – Mapas para os valores preditos ($\hat{\mu}$).	128
Figura 45 – Imagem SAR de Munique e região selecionada	144
Figura 46 – Série temporal observada–Trecho da imagem de Munique (linha 140 e colunas 150–300)	145
Figura 47 – Sinais previstos da linha 140 e colunas 150–300	146
Figura 48 – ACF e PACF dos resíduos do modelo Γ -ARMA	147
Figura 49 – ACF e PACF dos resíduos do modelo $\mathcal{G}_0^I$ -ARMA	148
Figura 50 – Ilustração da extração de séries temporais para cubos de dados.	151
Figura 51 – Interface da ferramenta Web SATVeg.	152
Figura 52 – Regiões selecionadas da Floresta Nacional do Jamanxim, localizada no mu- nicipio Novo Progresso-PA.	153
Figura 53 – Funções ACF e PACF das séries observadas.	154
Figura 54 – Predição do NDVI usando processos Γ -ARMA, KB -ARMA e $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA.	155
Figura 55 – Texturas simuladas a partir de processos Γ -, KB - e $\mathcal{G}_I^0$ -AR(1)	193

Figura 56 – Texturas simuladas a partir de processos I^- , KB^- e $\mathcal{G}_I^0$ -AR(2)	194
Figura 57 – Texturas simuladas a partir de processos I^- , KB^- e $\mathcal{G}_I^0$ -MA(1)	195
Figura 58 – Texturas simuladas a partir de processos I^- , KB^- e $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA(1,1)	196
Figura 59 – Região de estabilidade para processos autoregressivos de segunda ordem	197

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Frequências de bandas e comprimento de ondas.	28
Tabela 2 – Sistemas aerotransportados PolSAR.	28
Tabela 3 – Algumas informações de sensores capturados em conjuntos de dados reais utilizados	29
Tabela 4 – Medidas de qualidade dos filtros para as imagens 01 e 05 (Janela 5×5) .	55
Tabela 5 – Medidas de qualidade dos filtros para as imagens Munique, Foulum e São Francisco (Janela 5×5)	64
Tabela 6 – Tempo de execução para diferentes técnicas de despeckling	75
Tabela 7 – Medidas de avaliação dos estimadores de ENL ,	84
Tabela 8 – Valores para critérios de avaliação dos parâmetros KBR na cena: $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0, 2$ e variável explanatória $X \sim \mathcal{U}(-1, 1)$	94
Tabela 9 – Valores para critérios de avaliação dos parâmetros KBR na cena: $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0, 2$ e variável explanatória $X \sim \mathcal{K}(\alpha, \lambda = 2, L)$	95
Tabela 10 – Valores p do teste de <i>Kolmogorov-Smirnov</i> para normalidade dos resíduos do modelo de regressão	98
Tabela 11 – Ajuste KBR para três regiões diferentes: oceano, floresta e urbana	98
Tabela 12 – Média e MSE das estimativas dos parâmetros do processo KB -AR(1) com $\alpha = 3$ e $L = 4, 8$	110
Tabela 13 – Média e MSE das estimativas dos parâmetros do processo KB -MA(1) com $\alpha = 3$ e $L = 4, 8$	111
Tabela 14 – Média e MSE das estimativas dos parâmetros do processo KB -ARMA(1,1) com $\alpha = 3$ e $L = 4, 8$	112
Tabela 15 – Medidas de acurácia para o processo AR(1) com $\alpha = 3$ e $L = 4, 8$	114
Tabela 16 – Medidas de acurácia para o processo MA(1) com $\alpha = 3$ e $L = 4, 8$,	115
Tabela 17 – Medidas de acurácia para o processo ARMA(1,1) com $\alpha = 3$ e $L = 4, 8$,	116
Tabela 18 – Medidas de acurácia e teste Ljung-Box (lag = 20) para os modelos Γ - ARMA e KB -ARMA	121
Tabela 19 – Estimativas dos parâmetros do modelo KB -ARMA	121
Tabela 20 – As médias e MSE das estimativas dos parâmetros para o processo $\mathcal{G}_I^0$ -AR(1) com $\alpha = -3$ e $L = 4, 8$	137

Tabela 21 – As médias e MSE das estimativas dos parâmetros para o processo $\mathcal{G}_I^0$ -MA(1) com $\alpha = -3$ e $L = 4, 8$	139
Tabela 22 – As médias e MSE das estimativas dos parâmetros para o processo $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA(1,1) com $\alpha = -3$ e $L = 4, 8$	140
Tabela 23 – Medidas de acurácia para o processo $\mathcal{G}_I^0$ -AR(1) com $\alpha = -3$ e $L = 4, 8$. .	141
Tabela 24 – Medidas de acurácia para o processo $\mathcal{G}_I^0$ -MA(1) com $\alpha = -3$ e $L = 4, 8$.	142
Tabela 25 – Medidas de acurácia para o processo $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA(1,1) com $\alpha = -3$ e $L = 4, 8$	143
Tabela 26 – Estimativas dos parâmetros para os modelos Γ -AR(2) e $\mathcal{G}_I^0$ -AR(2).	146
Tabela 27 – Medidas de acurácia e teste Ljung-Box(lag = 20) para os modelos Γ -ARMA e $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA	146
Tabela 28 – Medidas de acurácia	156
Tabela 29 – Estimativas dos parâmetros dos processos Γ -, KB - e $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA	156
Tabela 30 – Teste Ljung-Box(lag = 20)	156

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ARMA	Autoregressive Moving Average
CAMs	Campos Aleatórios de Markov
EMVs	Estimativas de Máxima Verossimilhança
ENL	Equivalent Number of Looks
EP	Erro padrão
ESA	European Space Agency
FE	Família Exponencial
KBR	Modelo de regressão da distribuição K -Bessel
LP DAAC	Land Processes Distributed Active Archive Center
MAE	Mean Absolute Error
MASE	Mean Absolute Scaled Error
MIF	Matriz de Informação de Fisher
MMs	Modelagens multiplicativas
MODIS	MODerate Resolution Imaging Spectroradiometer
MRFs	Markov random fields
MSE	Mean Square Error
NDVI	Normalized difference vegetation index
NIR	Bandas Infravermelho próximo
SAR	Synthetic Aperture Radar
SATVeg	Sistema de Análise Temporal da Vegetação
sMAPE	symmetric Mean Absolute Percentage Error
UMBRAE	Unscaled Mean Bounded Relative Absolute Error
VE	Bandas do Vermelho

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Números naturais ou inteiros positivos
$\mathbb{R}$	Números Reais
$\mathbb{R}_+$	Números reais positivos
$\mathbb{C}$	Número complexo
X	Variável aleatória
x	Realização de uma variável aleatória
$\mathbf{X}$	Vetor aleatório
$\boldsymbol{\nu}$	Vetor de parâmetros
ℓ	Log verossimilhança
$\Gamma(\cdot, \cdot)$	Distribuição Gama
$\Gamma^{-1}(\cdot, \cdot)$	Distribuição Gama Inversa
$K(\cdot, \cdot)$	Distribuição K -Bessel
$\mathcal{G}_I^0(\cdot, \cdot)$	Distribuição $\mathcal{G}_I^0$ completa
$\psi(\cdot)$	Função digamma
$M_Z(\cdot)$	Função geradora de momentos
$G_{p,q}^{m,n}(\cdot)$	Função G de Meijer
$W(\cdot)$	Função W de Lambert
$\{{}_pF_q(\cdot)$	Função hipergeométrica generalizada
$\psi^{(\nu)}(\cdot)$	Função poligamma
$\Gamma(\cdot, \cdot)$	Função gamma
$B(\cdot, \cdot)$	Função de beta

SUMÁRIO

1	PRELIMINARES	20
1.1	INTRODUÇÃO	20
1.2	CONTRIBUIÇÕES	22
1.3	SUPORTE COMPUTACIONAL	25
1.4	PESQUISAS REALIZADAS DA TESE	25
2	REFERENCIAL TEÓRICO	27
2.1	TEORIA SAR	27
2.1.1	Sistemas SAR	28
2.1.2	Retorno SAR para formulação do modelo ARMA 1D	29
2.2	ABORDAGEM MULTIPLICATIVA SAR	31
2.2.1	Distribuição KB não condicional	32
2.2.2	Distribuição $\mathcal{G}_I^0$ não condicional	34
2.3	SINTETIZAÇÃO DE TEXTURAS POR APROXIMAÇÃO DE CAMPO ALE- ATÓRIO 2D POR ESTRUTURAS ARMA SAZONAL	35
2.4	BASE DE SÉRIES TEMPORAIS COMUM EM TODAS AS PROPOSTAS DA TESE	38
2.4.1	Equações de predição em estruturas ARMA e SARMA 1D	38
2.4.2	Análise de resíduos e diagnóstico para processos ARMA	40
2.4.3	Medidas de acurácia	41
3	REMOÇÃO DE RUÍDO EM IMAGENS SAR POR MEIO DO PRO- CESSO Γ-ARMA	43
3.1	ESTADO DA ARTE E PROPOSTA	43
3.2	O PROCESSO Γ -ARMA COMO UM MODELO ESTOCÁSTICO PARA IMAGENS SAR	45
3.2.1	Formulação do modelo	45
3.2.2	Relação entre Γ-MAP e o processo Γ-ARMA	46
3.3	NOVA CLASSE DE FILTROS LOCAIS PARA DADOS SPECKLE	49
3.4	MEDIDAS DE AVALIAÇÃO DA QUALIDADE DA IMAGEM	51
3.5	DESEMPENHO DO FILTRO Γ -ARMA PARA DADOS SIMULADOS	53
3.6	APLICAÇÃO EM DADOS REAIS SAR	62

3.7	TEMPO DE EXECUÇÃO	74
3.8	CONCLUSÃO	75
4	NOVO ESTIMADOR PARA O ENL BASEADO NO RESÍDUO DE PEARSON DO MODELO Γ-ARMA	76
4.1	ESTADO DA ARTE E PROPOSTA	76
4.2	ESTIMADORES PARA O ENL EM DADOS SAR	78
4.2.1	Coefficiente de variação (CoV)	78
4.2.2	Fractional Moment-Based (FBM)	78
4.2.3	Estimador Γ-MV	79
4.3	NOVO ESTIMADOR PARA O ENL BASEADO NOS RESÍDUOS DE PEARSON	79
4.3.1	Bootstrap paramétrico	81
4.4	APLICAÇÃO EM DADOS REAIS SAR	82
4.5	CONCLUSÃO	86
5	NOVO MODELO DE REGRESSÃO KB	87
5.1	ESTADO DA ARTE E PROPOSTA	87
5.2	NOVO MODELO DE REGRESSÃO E SUA CONEXÃO COM A FORMAÇÃO FÍSICA DE IMAGENS SAR	88
5.2.1	Definição	88
5.2.2	Versão log-linear	89
5.3	INFERÊNCIA ESTATÍSTICA E ANÁLISE RESIDUAL	89
5.3.1	Inferência	89
5.3.2	Análise de resíduos	92
5.4	RESULTADOS NUMÉRICOS	93
5.4.1	Estudo de Monte Carlo	93
5.4.2	Aplicação para dados reais SAR	96
5.5	CONCLUSÕES	102
6	NOVO MODELO KB-ARMA	103
6.1	ESTADO DA ARTE E PROPOSTA	103
6.2	O MODELO KB -ARMA	104
6.2.1	Inferência por verossimilhança condicional	105
6.3	ESTUDO NÚMÉRICO	108
6.4	APLICAÇÃO EM DADOS REAIS SAR	117

6.5	CONCLUSÃO	129
7	PROCESSO $\mathcal{G}_I^0$-ARMA PARA DADOS SPECKLE	130
7.1	ESTADO DA ARTE E PROPOSTA	130
7.2	MODELO $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA	131
7.2.1	Inferência baseada na verossimilhança condicional	132
7.3	ESTUDO DE VALIDAÇÃO NUMÉRICA	135
7.4	APLICAÇÃO PARA DADOS REAIS	144
7.5	CONCLUSÃO	149
8	ESTUDO DO COMPORTAMENTO DO ÍNDICE NDVI PARA RE- GIÃO DE FLORESTA NACIONAL	150
8.1	ESTADO DA ARTE E PROPOSTA	150
8.2	FERRAMENTA SATVEG PARA EXTRAÇÃO DE SÉRIES TEMPORAIS . .	152
8.3	APLICAÇÃO DOS MODELOS $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA E KB -ARMA PARA PREDI- ÇÃO DO NDVI	152
8.4	CONCLUSÃO	157
9	CONCLUSÕES	158
9.1	PESQUISAS FUTURAS	159
	REFERÊNCIAS	161
	APÊNDICE A – DERIVAÇÃO DA MATRIZ DE INFORMAÇÃO DE FISHER PARA O MODELO Γ-ARMA.	174
	APÊNDICE B – SUPORTE MATEMÁTICO PARA COMPUTAÇÃO U_α DOS MODELOS KBR E KB-ARMA	175
	APÊNDICE C – COMPONENTES DO VETOR ESCORE PARA KB-ARMA.	176
	APÊNDICE D – SUPORTE MATEMÁTICO PARA COMPUTAÇÃO DE $J_{\alpha\alpha}$ E $J_{\mu_t\alpha}$ DOS MODELOS KBR E KB-ARMA	179
	APÊNDICE E – CÁLCULOS DA SEGUNDA DERIVADA DE ℓ_t EM RELAÇÃO A μ_t PARA UM PROCESSO KB- ARMA	180
	APÊNDICE F – MATRIZ DE INFORMAÇÃO DE FISHER PARA O MODELO K-ARMA.	181
	APÊNDICE G – COMPONENTES DO VETOR ESCORE PARA $\mathcal{G}_I^0$-ARMA.	183

APÊNDICE H – DERIVAÇÃO DE VALORES ESPERADOS ÚTEIS PARA A DISTRIBUIÇÃO $\mathcal{G}_I^0$	186
APÊNDICE I – MATRIZ DE INFORMAÇÃO DE FISHER PARA A DISTRIBUIÇÃO $\mathcal{G}_I^0$	188
APÊNDICE J – TEXTURAS SIMULADAS POR PROCESSOS AR- MAS	192

1 PRELIMINARES

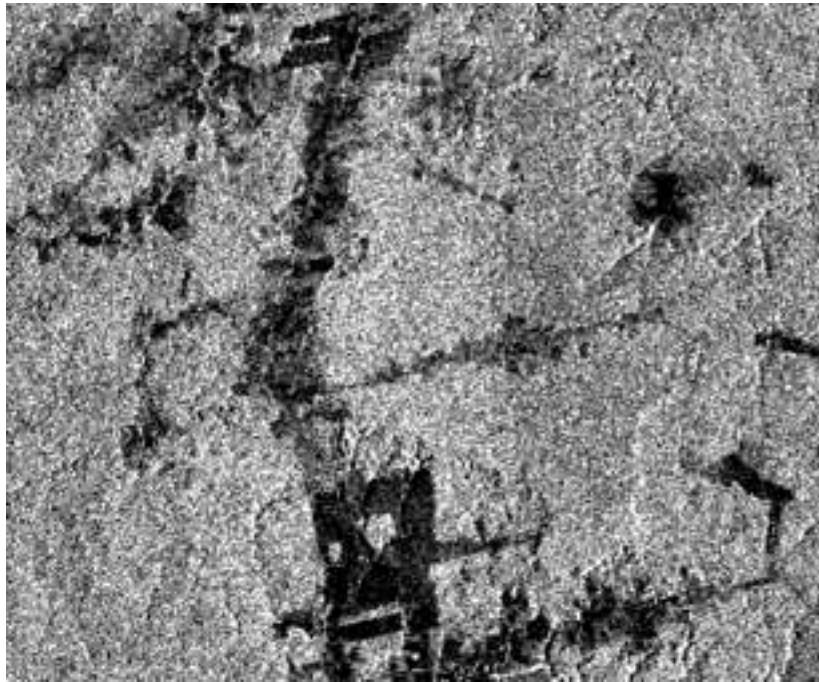
1.1 INTRODUÇÃO

Sistemas de radar de abertura sintética (*Synthetic Aperture Radar* - SAR) têm sido sugeridos como ferramentas promissoras para resolver problemas de sensoriamento remoto (LEE et al., 2006; LEE; POTTIER, 2009; GAO, 2019). Isso pode ser justificado pela habilidade de tais sistemas em (i) produzir imagens com alta resolução espacial e (ii) operar sob diversas condições temporais. As imagens SAR são contudo afetadas por um tipo particular de interferência chamada ruído *speckle*, que atrapalha a interpretação direta das imagens bem como impõe dificuldades ao uso de modelos aditivos e Gaussianos nos dados resultantes. Essa interferência é causada pela iluminação *coerente*¹ de ondas refletidas de muitos dispersores (*scatters*) elementares. O ruído *speckle* impõe uma variação pixel-a-pixel nos atributos das imagens (tais como nas intensidades e amplitudes dos seus retornos complexos) e a variação produz um padrão de ruído granular nas imagens SAR. Portanto, as imagens SAR carecem de processamentos especializados (Por exemplo, técnicas de filtragem). A Figura 1 mostra uma imagem SAR adquirida pelo sensor JERS-1 (banda L e polarização HH) em 26 de junho de 1993 sobre Tapajós, Pará, Brasil. Note que as propriedades perceptíveis do terreno são ocultadas pela ação do ruído *speckle*, impossibilitando a interpretação direta desta imagem.

Particularmente, determinar filtros eficientes (que suavizam a interferência de ruídos enquanto mantêm as propriedades tanto quanto possível) é um estágio de pós-processamento crucial ao analisar dados SAR. O filtro *I*-MAP tem sido usado para suavização de áreas florestadas e terras agrícolas em imagens SAR. Entretanto, algumas evidências apontam que ele pode afetar significativamente a qualidade das imagens SAR filtradas (KALAIYARASI; SARAVANAN; PERUMAL, 2016). Baseando-se em uma abordagem robusta para filtragem em imagens SAR, Bustos, Ojeda e Vallejos (2009) realizaram um trabalho de revisão sobre modelos ARMA espaciais. Contudo há grandes desafios tanto de incorporar modelos ligados à física de formação de imagens SAR como de fazer inferência para os parâmetros destes modelos

¹ “A formação de uma imagem SAR requer o processamento coerente do sinal de retorno recebido após a emissão dos pulsos. O processamento do sinal é, geralmente, dividido em duas etapas: o processamento em *range* e *azimuth*. O sinal recebido (complexo) de cada pulso emitido é demodulado em fase (*f*) e quadratura (*Q*), amostrado (dada uma função de referência) e convertido para o formato digital (para formar uma sequência de dados)” (FREITAS et al., 2007).

Figura 1 – Efeito do *speckle* quando a imagem SAR é capturada no município de Tapajós (Pará, Brazil).



Fonte: Autoria própria (2020)

devido à grande complexidade relacionada à etapa de estimação dos parâmetros desses processos (EDWARD; KASHYAP; MITCHEL, 1979; AYKROYD; ZIMERAS, 1999). Outra dificuldade no uso de campos aleatórios (embora esta seja uma modelagem mais alinhada para imagens (DUBES; JAIN, 1989)) é a alta complexidade computacional que surge quando a ordem do processo aumenta (KRISHNAMOORTHY; SEETHARAMAN, 2005; SARKAR; SHARMA; SONKA, 1997). Para suprir essas lacunas, algumas alternativas visam aproximar os campos aleatórios bidimensionais (2D). Autores têm buscado aproximar campos aleatórios 2D por estruturas unidimensionais (1D) ARMA sazonal (MCCORMICK; JAYARAMAMURTHY, 1974; DUTRA; MASCARENHAS, 1984; CHIN; JAU; WEINMAN, 1987; RANGAYYAN, 2004; ALMEIDA-JR, 2016). Nesta tese, dentro da abordagem de aproximação, o processo I -ARMA é adaptado à formação física de imagens SAR a fim de (i) tanto extrair estruturas de dependências como (ii) de formular um novo filtro para o *speckle* em imagens SAR. Essa proposta pode ser entendida como uma extensão do filtro I -MAP.

Outra proposta que também contribui para lidar com o impacto do *speckle* em dados SAR é a estimação do parâmetro ENL (*Equivalent number of look* - ENL). De fato, o ENL é

relacionado com a razão sinal-ruído ² e o ruído *speckle* é menos severo para altos valores do ENL. Nesta tese, propõe-se um estimador em forma fechada para o ENL baseado no resíduo de Pearson do processo I -ARMA.

Nos últimos anos, alguns trabalhos têm avançado em propostas de processos alternativos ao GARMA (BENJAMIN; RIGBY; STASINOPOULOS, 2003), quando as distribuições marginais não pertencem a Família exponencial (FE). Rocha e Cribari-Neto (2009, 2017) propuseram o modelo β -ARMA que possui a distribuição Beta como marginal, comumente usado para descrever dados no intervalo $[0,1]$ (Ex: dados de proporções em Economia e Sociologia). Bayer, Cintra e Cribari-Neto (2018) estenderam o modelo β -ARMA para processos sazonais, denominado β -SARMA. Bayer, Bayer e Pumi (2017) foram pioneiros no modelo Kumaraswamy ARMA (KARMA), especialmente empregado em Hidrologia e campos relacionados. Baseado na distribuição Bernoulli, Milani et al. (2019) propuseram uma extensão do modelo GARMA para realizar previsões de ocorrências de chuvas. Outros trabalhos alternativos ao GARMA assumindo como distribuição marginal: Binomial negativa (FEBRITASARI; WARDHANI; SA'ADAH, 2019), Dirichlet (ZHENG; CHEN, 2017), Conway–Maxwell–Poisson (MELO; ALENCAR, 2020) e Birnbaum–Saunders (FONSECA; CRIBARI-NETO, 2018). Mais recentemente, Palm, Bayer e Cintra (2021) propuseram o processo autorregressivo de médias móveis com distribuição marginal Beta Binomial, diga-se BBARMA, para modelar dados de amplitude e dados de contagem limitados. No contexto de processamento de imagens SAR ou de satélite, propostas de novos modelos considerando tanto a natureza probabilística dos retornos SAR quanto estruturas de dependências são fundamentais. Nesta tese, propõem-se dois novos processos que estendem o I -ARMA, assumindo as distribuições marginais (i) K -Bessel, diga-se, KB -ARMA e (ii) $\mathcal{G}_I^0$, diga-se $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA. As estruturas de predição destes processos são estendidas para sua abordagem sazonal. Eles são aplicados tanto para descrever atributos espaciais inerentes às imagens SAR com atributos entre imagens de satélite obtidas em tempos distintos.

1.2 CONTRIBUIÇÕES

No que segue, apresentam-se as principais contribuições desta tese.

► Capítulo 3: A primeira contribuição desta tese consiste em um novo filtro para ima-

² A razão sinal-ruído é uma medida usada para caracterizar objetivamente a intensidade relativa da imagem real (sinal) e o ruído em uma imagem observada (ruidosa ou degradada) (RANGAYAN, 2004).

gens SAR que leve em consideração a correlação espacial entre *pixels* vizinhos. Para este fim, adaptou-se a proposta de Benjamin, Rigby e Stasinopoulos (2003), sugerindo sua equação de predição como uma alternativa espacial à vizinhança contígua de *Rook* na Figura 7. Algumas propriedades matemáticas do processo Γ -ARMA (necessárias para calcular o novo filtro) são discutidas. Combinamos quatro equações de predição do processo Γ -ARMA unidimensional (1D) em diferentes direções de rastreamento para propor um filtro espacial como alternativa aos processos de campos aleatórios bidimensional (2D). Procedimentos para obter as estimativas de máxima verossimilhança (EMVs) para os parâmetros do modelo Γ -ARMA e uma expressão compacta para a matriz de informação de Fisher (MIF) associada são fornecidos. Por fim, o desempenho do filtro proposto foi quantificado em imagens SAR simuladas e reais. Resultados favoreceram o novo filtro comparativamente a outros bem definidos na literatura.

► Capítulo 4: Como segunda contribuição desta tese, baseado nos modelos propostos por Benjamin, Rigby e Stasinopoulos (2003), um novo estimador para o ENL construído a partir do resíduo de *Pearson* relativo ao processo Γ -ARMA é proposto. Esta proposta leva em consideração um tipo de correlação espacial entre pixels vizinhos até então não explorada na literatura do melhor que conhecemos. Uma narrativa para lidar com a obtenção do erro-padrão para o estimador proposto via *bootstrap* paramétrico é fornecida. O desempenho do novo estimador é quantificado e comparado com outros três da literatura com base em uma cena da imagem SAR da baía de São Francisco-EUA.

► Capítulo 5: A terceira contribuição se configura em propor uma formulação para um modelo de regressão da distribuição K -Bessel (KBR) introduzida no trabalho de conclusão de curso de Borges-Junior (2016). Algumas das propriedades matemáticas deste modelo são propostas: função score, MIF e uma medida de resíduo quantílico. Um procedimento de estimação por máxima verossimilhança para os parâmetros da KBR é discutido e avaliado por meio de uma simulação Monte Carlo. Finalmente, a KBR é aplicada a dados reais SAR e os resultados fornecem evidências de que a KBR pode superar os modelos de regressão gama e normal linear.

► Capítulo 6: A quarta contribuição se trata de um novo processo ARMA com distribuição marginal KB , denominado modelo KB -ARMA. Sua proposta é associada à formação física de imagens SAR. Derivamos expressões para a função escore e a MIF. Um procedimento para obter EMVs é proposto e avaliado via experimentos Monte Carlo. Uma aplicação para dados reais é feita para imagem da baía de São Francisco (EUA). Resultados sugerem que o modelo proposto pode prover melhor ajuste do que o modelo Γ -ARMA.

► Capítulo 7: A quinta contribuição se refere a um novo processo ARMA com marginal $\mathcal{G}_I^0$, denominado modelo $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA. Expressões em forma fechada são derivadas para a função escore e a MIF. Propõe-se um procedimento para obter EMVs, que tem seu desempenho avaliado via experimentos Monte Carlo. Uma aplicação para dados reais é feita para uma cena geográfica de Weßling (Munique, Alemanha). Resultados indicam que o novo processo pode fornecer um desempenho melhor do que o processo Γ -ARMA, que foi usado como um suposto padrão no primeiro tópico desta tese.

► Capítulo 8: A sexta contribuição se refere à aplicação dos modelos KB -ARMA e $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA no contexto de múltiplas imagens obtidas em tempos distintos. Para este fim, foi introduzido o conceito de cubos de imagens (conhecido como *Data cubes*), referenciando os principais repositórios de dados atualmente desenvolvidos no mundo. Foram extraídas séries temporais do índice vegetativo NDVI (*normalized difference vegetation index* - NVDI) capturadas pelo sensor óptico MODIS (*MODerate Resolution Imaging Spectroradiometer* - MODIS) da plataforma de satélite TERRA. Como recorte geográfico de ação, os novos modelos (comparativamente ao processo Γ -ARMA) são aplicados na Floresta Nacional do Jamanxim, localizada no município Novo Progresso do Estado do Pará. Resultados indicam que os novos processos podem fornecer desempenho melhor do que o Γ -ARMA para avaliar o comportamento temporal do índice NDVI.

1.3 SUPORTE COMPUTACIONAL

Como suporte computacional da tese, utilizamos a linguagem de programação R—<<https://www.R-project.org>>. Ela é (entre outras coisas) voltada para a resolução de problemas estatísticos e de representação gráfica de dados. O código base do R foi inicialmente criado no laboratório Bell/AT & T por John Chambers e colaboradores, tendo como primeira versão a linguagem S-PLUS. A partir daí, Ross Ihaka e Robert Gentleman criaram uma versão gratuita chamada R (R Development Core Team, 2021). A linguagem R é uma ferramenta de programação orientada a dados, com um fluxo de atualização contínua de pacotes e funções na área da estatística e outras afins. Esta tese também visa a longo prazo colaborar com a proposição de pacotes nesta plataforma para usuários das áreas de Séries Temporais e Processamento de Imagens. As imagens reais trabalhadas nesta tese foram obtidas através do programa PolSARpro (*Polarimetric SAR Data Processing and Educational* - PolSARpro) disponível no sítio da ESA (*European Space Agency* - ESA), <<https://earth.esa.int/web/polsarpro/home>>. Outra ferramenta utilizada para extração de séries temporais de múltiplas imagens foi o SATVeg (Sistema de Análise Temporal da Vegetação). O SATVeg é uma ferramenta web desenvolvida pela *Embrapa Informática Agropecuária* (EMPRAPA, 2021). O sistema objetiva facilitar o acesso e visualização de séries temporais dos índices vegetativos NDVI e EVI do sensor MODIS, a bordo dos satélites TERRA (INPE, 2021b) e AQUA (INPE, 2021a). Além disso, todos os resultados computacionais foram gerados a partir do sistema operacional UNIX/Linux, que também é de código aberto.

1.4 PESQUISAS REALIZADAS DA TESE

- ✓ Filtragem de Imagens SAR via Processos ARMA Gama - apresentado na **Escola de Séries Temporais e Econometria** - 2019;
- ✓ Classificação em Intensidade SAR Multidimensionais via Processo VARMA - apresentado na **Escola de Séries Temporais e Econometria** - 2019;
- ✓ SAR Image Denoising with the I -ARMA Process - **Submitted in International Journal of Digital Earth** - 2020;
- ✓ $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA Process for Speckled Data - **Submitted in Journal of Statistical Computation and Simulation** - 2020;

- ✓ *K*-Bessel Regression Model for Speckled Data - **Submitted in Journal of Applied Statistics.** - 2020;

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 TEORIA SAR

Em problemas de sensoriamento remoto, as imagens podem ser obtidas dentro de duas classes de sensores: (i) passivos e (ii) ativos. Os sensores ópticos em sua maioria são classificados como passivos, pois aproveitam a radiação eletromagnética emitida ou refletida naturalmente através do sol e captam essa energia em seus sistemas. Por outro lado, existem os sensores de radar, que operam com a transmissão e recepção de micro-ondas eletromagnéticas. Por serem ativos, os radares não dependem da energia solar e podem operar dia e noite. Nesta tese, vamos trabalhar com este último tipo de sensor.

Os radares podem operar em diferentes bandas, que se referem aos comprimentos de onda e as frequências das micro-ondas transmitidas/recebidas, conforme mostrado na Tabela 1. Cada banda tem características especiais de frequência para alvos com relação ao tamanho e características dos objetos imageados. Dessa forma, diferentes tipos de bandas podem ser mais adequadas que outras de acordo com o tipo da região imageada. Por exemplo, a banda C é adequada para regiões mais planas (monitoramento de plantações), a banda L para floresta (cobertura de terra, monitoramento de desastres, etc) e a banda P é adequada para extrair informações do solo (é capaz de penetrar densas florestas). A frequência mais baixa pode se propagar com baixa atenuação e penetrar mais profundamente o objeto imageado. A onda da banda P pode penetrar não apenas em florestas, mas também em solo seco, neve, gelo e a superfície do solo em vários centímetros. As frequências mais altas acima da banda X se espalham na superfície dos objetos e não os penetram. A natureza de espalhamento em frequências mais altas torna-se próxima a das ondas ópticas (YAMAGUCHI, 2020).

Os radares imageadores podem ser segmentados em duas classes: RAR (*real aperture radar*) e SAR. Ambos radares têm visada lateral e emitem um pulso de radiação ao longo da linha de voo, registrando a energia espalhada pelos objetos e que retorna ao radar. Essa energia captada no retorno ao radar é denominada retroespalhamento (eco ou sinal retorno) (PONZONI; SHIMABUKURO; KUPLICH, 2019). Os primeiros radares foram do tipo RAR, porém apresentavam limitações na resolução espacial das imagens geradas. Esta desvantagem foi superada com os radares do tipo SAR, que simulam uma antena com tamanho centena de vezes maior que seu tamanho real.

Tabela 1 – Frequências de bandas e comprimento de ondas.

Bandas	Frequência (GHz)	Comprimento de ondas (cm)
P	0.3 – 1	50
L	1 – 2	25
S	2 – 4	10
C	4 – 8	5
X	8 – 12,5	3
Ku	12,5 – 18	2
K	18 – 26,5	1,5
Ka	26,5 – 40	1
V	40 – 75	–
W	75 – 110	–

Fonte: Adaptado de Yamaguchi (2020)

Tabela 2 – Sistemas aerotransportados PolSAR.

Nome	Instituição	Bandas de frequência	Resolução (m)
AIRSAR	USA, NASA/JPL	P, L, C	Range: 7,5, 3,75 Azimuth: 1
UAVSAR	USA, NASA/JPL	L	1×1
SAR580	Canada, CCRS	C, X	6×6
F-SAR	Germany, DLR	P, L, C, X	X&C: $1,5 \times 0,3$, L: $2 \times 0,4$, P: $3 \times 1,5$
AER II-PAMIR	Germany, FHR	X	–
EMISAR	Denmark, DCRS	L, C	X: $2,4 \times 2,4$, 8×8
Phraus	NL, TNO-FEL	C	3×3
SETHI	France, ONERA	P, L, X	X: $0,12 \times 0,12$
PiSAR-L2/X2	Japan, JAXA/NICT	L, X	$1,6 \times 1,6$, $0,3 \times 0,3$

Fonte: Adaptado de Yamaguchi (2020)

2.1.1 Sistemas SAR

Existem basicamente três tipos de sistemas PolSAR: Terrestres (*Ground-Based SAR*–GB-SAR), espaciais (*spacebornes*) e aerotransportados (*airbornes*). Esse último sistema será considerado nesta tese. Os sistemas aerotransportados SAR são geralmente projetados com fins experimentais no desenvolvimento de tecnologias SAR. Eles têm como principais vantagens: (1) operar em qualquer lugar, tempo ou direção observacional, se a condição do voo permitir e (2) fornecer imagens de maior qualidade.

Alguns dos mais conhecidos sistemas aerotransportados SAR são listados na Tabela 2. Entre eles, o pioneiro é o AIRSAR desenvolvido pela NASA/JPL no início dos anos 1980, que tem mostrado a eficácia da informação polarimétrica. Os resultados bem-sucedidos do AIRSAR fizeram que a missão SIR-C/X-SAR fosse enviada ao espaço. O E-SAR e a missão de acompanhamento F-SAR da DLR realizaram várias medições de radar e confirmaram o desempenho dos projetos de concepção. O PiSAR-L2/X2 no Japão também contribuiu para o monitoramento de desastres e para o projeto futuro de missões espaciais SAR. Existem

muitos outros sistemas PolSAR excelentes, como UAV-SAR/USA, EMISAR/Dinamarca, dentre outros.

A Tabela 3 apresenta propriedades dos sensores usados nesta tese para capturar os conjuntos de dados reais.

Tabela 3 – Algumas informações de sensores capturados em conjuntos de dados reais utilizados: Airborne Synthetic Aperture Radar (AIRSAR), Electromagnetics Institute SAR (EMISAR) e Experimental-SAR (E-SAR)

Dados	Sensores	Data de aquisição	Range	Azimuth	L
São Francisco	AIRSAR	9 de Abril, 2008	9,8m	4,8m	4
	Operando em três bandas de frequência, P, L e C				
Foulum	EMISAR	17 de Abril, 1998	1,499m	0,749m	8
	Operando em duas bandas de frequência, C and L				
Muniqué	E-SAR	22 de Julho, 1999	1,498m	0,879m	3
	Operando em quatro bandas de frequência,, X, C, L e P				

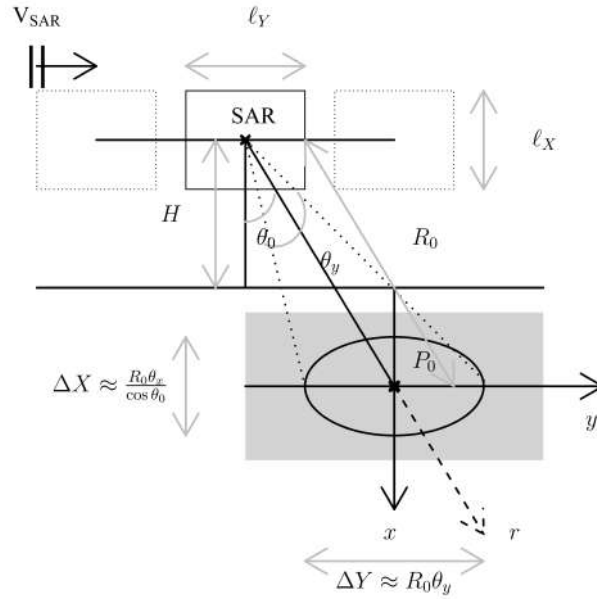
Fonte: Autoria própria (2021)

2.1.2 Retorno SAR para formulação do modelo ARMA 1D

As imagens SAR são obtidas satisfazendo à seguinte dinâmica (ilustrada na Figura 2): Um radar é acoplado a uma plataforma aerotransportada, V_{SAR} , a uma altura H e emite pulsos polarizados a um ângulo de incidência θ_0 (direções horizontal, “H” e vertical, “V”) em direção a uma superfície geográfica. A abertura física do radar (a saber, largura ℓ_X e comprimento ℓ_Y) produz um feixe elíptico com centro em P_0 e eixos com tamanhos ΔX e ΔY . A área imageada é definida em termos dos ângulos de abertura θ_x e θ_y . Em um contexto monopolarizado, uma imagem SAR é formatada de forma que cada um de seus *pixels* está associado a um número complexo denominado *canal de polarização*. Este canal assume um entre quatro estados de pares de direções (enviado, recebido) - (i) (horizontal, horizontal), “HH”, (ii) (horizontal, vertical), “HV”, (iii) (vertical, horizontal), “VH”, e (iv) (vertical, vertical), “VV”.

Além disso, existem duas formas na literatura de radar para lidar com o ruído speckle (inerente à captura de imagens SAR) : (i) processo de múltiplas visadas (*multilook*) e (ii) aplicação de filtros. O processamento de múltiplas visadas consiste em obter $L \in \mathbb{N}$ imagens de um terreno em estudo por tempos distintos. O dado capturado pelo pulso retornado da região é representado pela média dos retornos de cada visada. Na Figura 3 ilustramos esse

Figura 2 – Geometria de obtenção da imagem SAR.



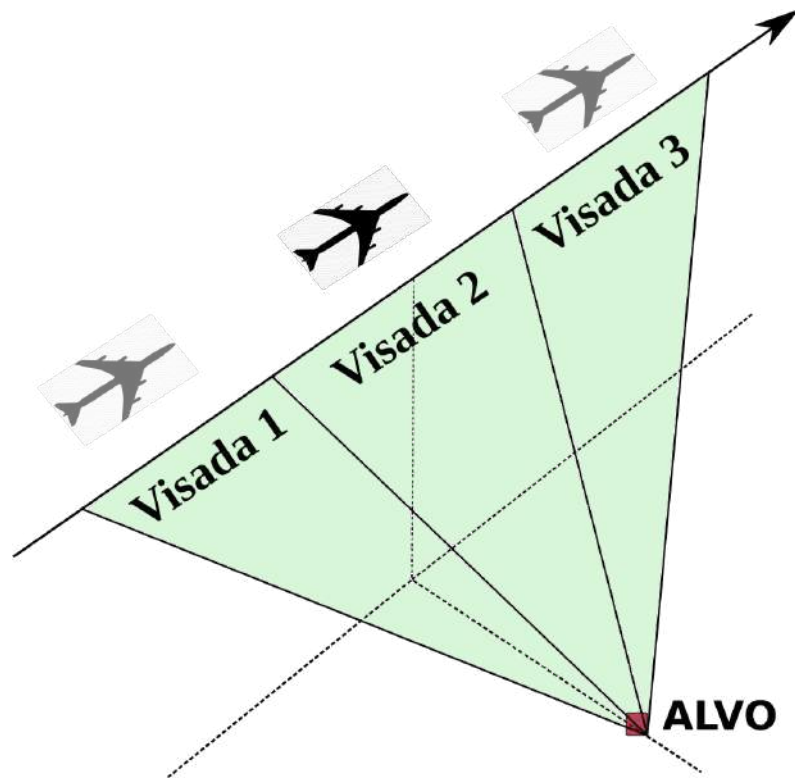
Fonte: Nascimento (2012)

processo considerando $L = 3$. Então o canal de polarização associado com a entrada (i, j) da imagem SAR *multilook* é definido como (para $\underline{\mathbf{j}} = \sqrt{-1}$)

$$R(i, j) = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^{N(i, j)} A_{l,k}(i, j) \exp\{\underline{\mathbf{j}} \psi_{l,k}(i, j)\} \in \mathbb{C}, \quad (2.1)$$

em que L é o número de *looks*, $N(i, j)$ é o número de espalhadores na posição (i, j) , $A_{l,k}(i, j)$ e $\psi_{l,k}(i, j)$ representam a amplitude e fase do k -ésimo espalhador e l -ésimo *look* na célula, respectivamente. Adicionalmente, $A(i, j) = \sqrt{R(i, j)^* R(i, j)}$ e $I(i, j) = A(i, j)^2$ média da amplitude e intensidade de $R(i, j)$, respectivamente, e $(\cdot)^*$ é o conjugado de um número complexo. No que segue, as intensidades da imagem SAR serão denotadas como $Z := I(i, j)$.

Figura 3 – Ilustração do processo multilook.



Fonte: Autoria própria (2021)

2.2 ABORDAGEM MULTIPLICATIVA SAR

O emprego de propriedades estatísticas nos dados SAR desempenha um papel central no processamento e entendimento de imagens. Essas propriedades podem ser usadas para discriminar tipos de solo e desenvolver filtros especializados para redução de ruído *speckle*, entre diversas aplicações. Diversos estudos têm sido realizados com o objetivo de relacionar características físicas e propriedades estatísticas dos dados SAR, para tanto, são assumidas algumas distribuições de probabilidade.

A modelagem multiplicativa considera uma estrutura próxima à física da formação de imagens (OLIVER; QUEGAN, 2004). De acordo com esta abordagem, como apresentado na Seção 2.1.2, a intensidade da imagem SAR é resultado de uma variável aleatória, diga-se $Z \in \mathbb{R}_+$, que é o produto de duas variáveis aleatórias e independentes, digam-se S e T ; i.e., $Z = ST$. A variável aleatória T representa o relevo (*backscatter*) e a variável aleatória S indica o ruído *speckle*. Dentre as modelagens multiplicativas (MMs) particulares mais usadas estão as distribuições $\mathcal{G}_I^0$ e KB , que são conhecidas por caracterizar bem terrenos urbanos em sensoriamento de urbanização (FRERY et al., 1997) e de florestas densas em sensoriamento de

desmatamento (WANG; OUCHI, 2008), respectivamente. Ambas as distribuições são discutidas a seguir.

2.2.1 Distribuição KB não condicional

A distribuição K -Bessel (KB) surge como modelo para Z quando assumimos (i) $S \sim \Gamma(L, L)$ (distribuição gama) e $T \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ e (ii) T e S são independentes. Esse caso é denotado como $Z \sim K(\alpha, \lambda, L)$ e sua densidade é

$$f_Z(z; \alpha, \lambda, L) = \int_0^\infty s^{-1} f_S(z/s) f_T(s) ds = \frac{2}{z} \frac{(L\lambda z)^{\frac{L+\alpha}{2}}}{\Gamma(L)\Gamma(\alpha)} K_{\alpha-L}(2\sqrt{L\lambda z}) \mathbb{I}_{(0,\infty)}(z), \quad (2.2)$$

para $\alpha, \lambda, L > 0$, em que $K_\nu(\cdot)$ é a função modificada de Bessel do segundo tipo de ordem ν . O parâmetro L é o número de *looks* e α representa a rugosidade do relevo. Pequenos valores de α são comuns em áreas heterogêneas (exemplo: cidades), valores intermediários indicam regiões de floresta e grandes valores representam oceanos ou pastos. Aqui, vamos considerar L como uma quantidade conhecida.

O m -ésimo momento não central da distribuição KB, diga-se μ_m , tem a forma

$$\mu_m := \mathbb{E}(Z^m) = \left[\frac{\mu}{\alpha L} \right]^m \frac{\Gamma(\alpha + m)\Gamma(L + m)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(L)}$$

e, conseqüentemente, assumindo $\mu_1 \equiv \mu$,

$$\text{Var}(Z) = \mu^2 \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{L} + \frac{1}{\alpha L} \right] \quad \text{e} \quad \mu = \frac{\alpha}{\lambda}.$$

Além disso, após algumas manipulações algébricas, seu m -ésimo momento central, diga-se $\bar{\mu}_m$, é determinado por

$$\bar{\mu}_m := \mathbb{E}\{(Z - \mu)^m\} = \mu_m {}_1F_2(-m; (1 - m - \alpha, 1 - m - L); \alpha L),$$

em que ${}_pF_q(\mathbf{x}; \mathbf{y}; z)$ representa a função hipergeométrica generalizada com p e q sendo as dimensões de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, respectivamente (SEABORN, 1991). Como consequência $a_k := (\alpha + k)(L + k)$ para $k \in \mathbb{N}$ com $a_0 := a = \alpha L$, o coeficiente de curtose é dado por

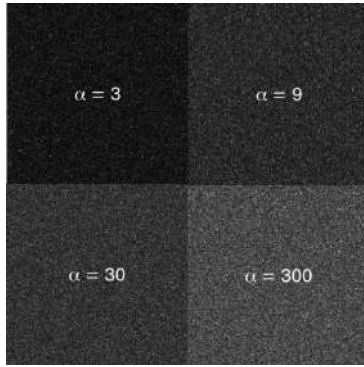
$$\kappa := \frac{\bar{\mu}_4}{[\bar{\mu}_2]^2} = \left\{ \frac{a_3 a_2 a_1}{a} - 4a_2 a_1 + 6a_1 a - 3a^2 \right\} / [\alpha + L + 1]^2$$

e então $\bar{\kappa} := \kappa - 3$ é o chamado excesso de curtose.

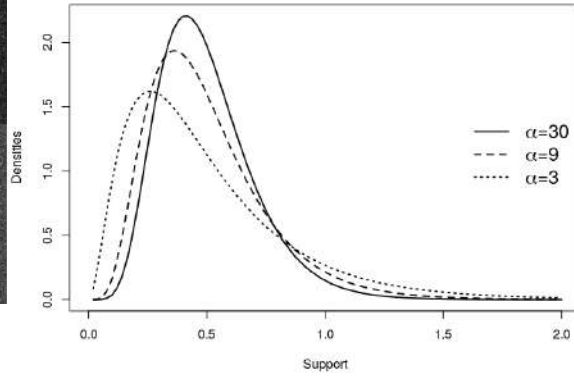
A Figura 4a apresenta uma imagem artificial contendo quatro partes com $\mu = 1$, $\lambda = \alpha/\mu$, $L = 8$, $\alpha \in \{3, 9, 30, 300\}$ e dimensão 512×512 . É possível notar que a variação de α impõe diferentes efeitos na rugosidade da imagem. A Figura 4b apresenta curvas da densidade dada em (2.2). Além disso, quando o valor de α aumenta a imagem apresenta comportamento mais homogêneo; ou seja, quanto menores os valores de α , maior a densidade dos valores de alta intensidade.

Figura 4 – Imagens sintéticas e densidades geradas a partir da distribuição KB para diferentes valores de (α, λ)

(a) Speckle com variação da rugosidade



(b) Densidades KB com variação da rugosidade



Fonte: Autoria própria (2020)

A distribuição KB é reparametrizada na Equação (2.2) de acordo com

$$(\alpha, \lambda, L) \mapsto \left(\alpha, \frac{\alpha}{\lambda}, L \right) := (\alpha, \mu, L).$$

De agora em diante, a notação $Z \sim K(\alpha, \mu, L)$ significa que Z tem densidade

$$f_Z(z) = \frac{2z^{-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(L)} \left(\frac{L\alpha z}{\mu} \right)^{\frac{L+\alpha}{2}} K_{\alpha-L} \left(2\sqrt{\frac{L\alpha z}{\mu}} \right), \quad (2.3)$$

função de distribuição acumulada (fda) (THANH; CONG-THANG; ANH, 2015)

$$F_Z(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(L)} G_{1,3}^{2,1} \left[\frac{\alpha L}{\mu} z \left| \begin{matrix} 1 \\ \alpha, L, 0 \end{matrix} \right. \right] \quad (2.4)$$

e função geradora de momento (fgm)

$$M_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\alpha L}{2\mu t} \right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}} e^{\frac{\alpha L}{\mu t}} G_{4,0}^{2,4} \left[\left(\frac{\alpha L}{2\mu t} \right)^2 \left| \begin{matrix} \frac{\alpha+L}{4}, \frac{\alpha+L+2}{4} \\ \frac{\alpha-L+2}{4}, \frac{\alpha-L+2}{4}, \frac{\alpha-L}{4}, \frac{L-\alpha}{4} \end{matrix} \right. \right],$$

em que $G_{p,q}^{m,n}[\cdot]$ é a função G de Meijer (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2014).

2.2.2 Distribuição $\mathcal{G}_I^0$ não condicional

Frery et al. (1997) propuseram a distribuição $\mathcal{G}_I^0$ obtida do produto de duas variáveis aleatórias independentes, $T \sim \Gamma^{-1}(\alpha, \gamma)$ (*Distribuição gama inversa*), que representa o *backscatter*, e $S \sim \Gamma(L, L)$, que indica o ruído speckle. Dessa forma, a variável aleatória $Z = TS$ tem distribuição $\mathcal{G}_I^0$ com densidade dada por

$$f_Z(z; \alpha, \gamma, L) = \frac{L^L \Gamma(L - \alpha) z^{L-1}}{\gamma^\alpha \Gamma(-\alpha) \Gamma(L)} [\gamma + Lz]^{\alpha-L} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(z), \quad (2.5)$$

em que $-\alpha$ significa rugosidade, γ representa escala e $L > 0$ é o número de *looks*. Esse caso é denotado por $Z \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, L)$. Frery et al. (1997) derivaram o m -ésimo momento da $\mathcal{G}_I^0$ como segue.

Lema 2.2.1 *Seja $Z \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, L)$, o m -ésimo momento não central é*

$$\mathbb{E}(Z^m) = \left(\frac{\gamma}{L}\right)^m \frac{B(L+m, -\alpha-m)}{B(L, -\alpha)}, \quad \text{para } \alpha < -m;$$

caso contrário, o valor esperado diverge. Aqui, $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ é a função beta.

Usando o Lema 2.2.1, tem-se que

$$\mu := \mathbb{E}(Z) = \frac{\gamma}{(-\alpha-1)} \quad \text{e} \quad \text{Var}(Z) = \mu^2 \left[\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right) \frac{L+1}{L} - 1 \right].$$

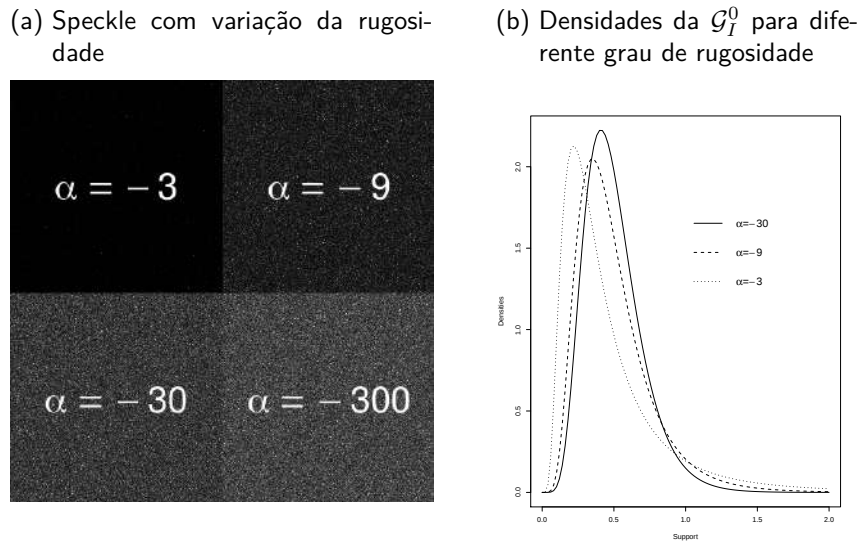
Vasconcelos (2018) também derivou o momento inverso no próximo lema.

Lema 2.2.2 *Seja $Z \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, L)$. Então, o m -ésimo momento inverso de $V = \gamma + LZ$ é dado por*

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{V^m}\right) = \frac{1}{\gamma^m} \prod_{i=0}^{m-1} \left(\frac{-\alpha+i}{-\alpha+L+i}\right).$$

A Figura 5a fornece uma imagem artificial contendo quatro partes com $\mu = 0,5$, $\gamma = \mu(-\alpha-1)$, $L = 8$, $\alpha \in \{-3, -9, -30, -300\}$ e dimensões 512×512 . É possível notar que a variação de α impõe diferentes efeitos na rugosidade da imagem. A Figura 5b apresenta o comportamento da curva (2.5). Além disso, quando o valor de α diminui a imagem fica mais homogênea; i.e., para valores altos de α , as densidades em escala semilogarítmica ilustram bem isso.

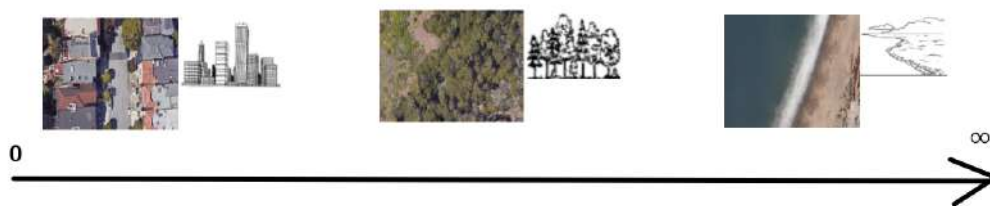
Figura 5 – Imagem SAR sintética e densidades geradas da distribuição $\mathcal{G}_I^0$ para diferentes valores de (α, γ)



Fonte: Autoria própria (2020)

A Figura 6 ilustra algumas regiões representadas pelo parâmetro α das distribuições $\mathcal{G}_I^0$ e KB . Note que valores grandes de $|\alpha|$ representam relevos mais homogêneos (como oceanos e pastos) enquanto que valores moderados e pequenos de $|\alpha|$ representam florestas e cidades, respectivamente.

Figura 6 – Ilustração das representações físicas do parâmetro α em valor absoluto para as distribuições $\mathcal{G}_I^0$ e KB



Fonte: Autoria própria (2021)

2.3 SINTETIZAÇÃO DE TEXTURAS POR APROXIMAÇÃO DE CAMPO ALEATÓRIO 2D POR ESTRUTURAS ARMA SAZONAL

Esta seção apresenta brevemente sobre “síntese de textura”, embora esse não seja o objetivo primário desta tese. O que significa então o termo textura? Não parece haver uma definição concisa de textura na literatura, contudo alguns autores deixaram sugestões por

onde é possível trabalhar. Coggins (1983) compilou um catálogo de definições de textura na literatura de visão computacional. Segundo Haindl (1991) a textura é em geral “a *propriedade visual de uma superfície representando as informações espaciais contidas nas superfícies dos objetos* ”.

Para definir um modelo de textura, requer-se investigar o processo que gerou a textura. Assim, a textura pode ser entendida como uma realização de um processo estocástico em um campo aleatório; grosso modo, um processo estocástico cujo parâmetro é definido em $S \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Tratamentos matemáticos bastantes razoáveis podem ser encontrados nos trabalhos de Besag (1974), Dubes e Jain (1989), Bustos, Frery e Ojeda (1998) e Hristopulos (2020).

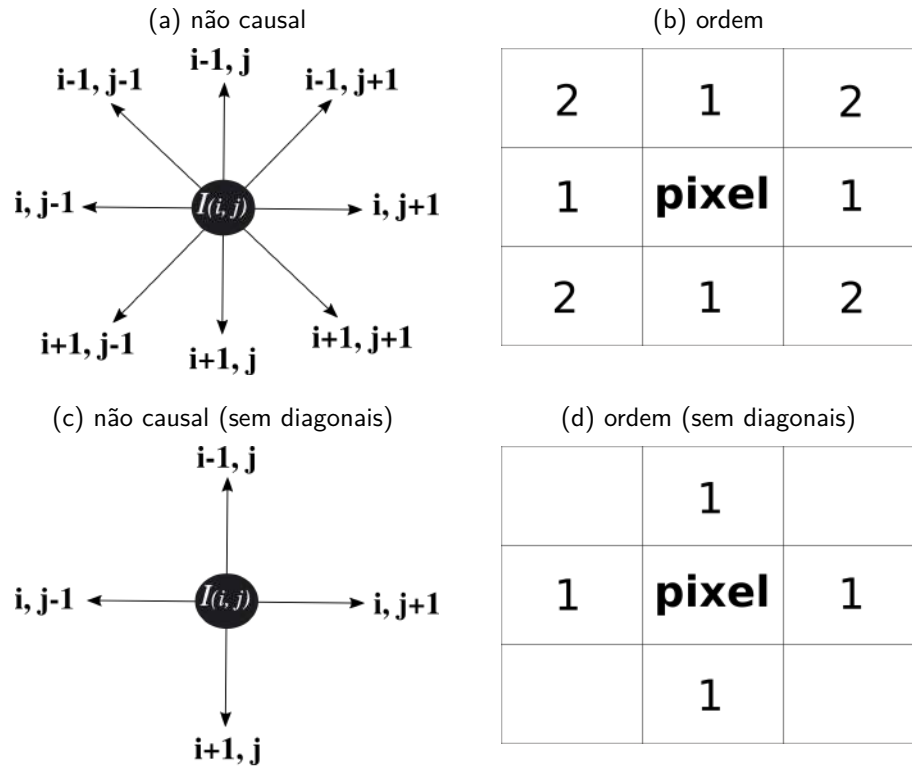
Dubes e Jain (1989) apresentaram uma taxonomia de modelos para texturas, na qual séries temporais são casos particulares. McCormick e Jayaramamurthy (1974), Edward, Kashyap e Mitchel (1979), Chen e Kundu (1995) apresentaram abordagens dirigidas por modelos de séries temporais para analisar texturas de imagens. Em vários trabalhos, o processo de estimação dos parâmetros é realizado através de métodos clássicos, como mínimos quadrados e máxima verossimilhança (PANJWANI; HEALEY, 1995; EDWARD; KASHYAP; MITCHEL, 1979; AYKROYD; ZIMERAS, 1999). Segundo Edward, Kashyap e Mitchel (1979), uma imagem pode ser gerada por um filtro digital recursivo bidimensional (2D). Dessa forma, o processo de campos aleatórios Gaussiano representa o pixel de interesse $I(i, j)$ com sua vizinhança da seguinte forma:

$$I(i, j) = \sum_{\substack{k=0 \\ (k,l) \neq (0,0)}}^a \sum_{l=0}^b \phi_{kl} I(i - k, j - l) + \epsilon(i, j), \quad \text{para } i, j = 0, \dots, N - 1, \quad (2.6)$$

em que ϕ_{kl} representa os parâmetros autoregressivos, $\epsilon(i, j)$ o ruído branco Gaussiano e N é a quantidade de linhas/colunas de uma amostra quadrada de comprimento N .

O modelo não causal (2.6) representa o *pixel* $I(i, j)$ como uma combinação linear dos valores de seus vizinhos mais próximos em cada lado, como apresentado na Figura 7a e a influência dos *pixels* horizontais e verticais no centro (*pixel* de interesse) é maior do que os *pixels* diagonais. A ordem de influência dos *pixels* da vizinhança em seu centro é ilustrada na Figura 7b. Como caso particular do modelo não causal, podemos considerar apenas a influência dos *pixels* horizontais e verticais (Figuras 7c e 7d).

Existe uma grande complexidade relacionada ao processo de estimação dos parâmetros dos processos campos aleatórios de Markov (EDWARD; KASHYAP; MITCHEL, 1979; AYKROYD; ZIMERAS, 1999), necessitando geralmente de abordagens robustas (CHEN; KUNDU, 1995; WILSON; KNUTSSON; GRANLUND, 1983; COMER; D.J., 1999; CLAUSEN; WECHLER, 2000). Outra

Figura 7 – Relação entre vizinhanças do *pixel* da imagem

Fonte: Adaptada de Krishnamoorthi e Seetharaman (2005)

dificuldade desses processos é a alta complexidade computacional que surge quando a ordem do processo aumenta (KRISHNAMOORTHY; SEETHARAMAN, 2005; SARKAR; SHARMA; SONKA, 1997). Para suprir essa lacuna, alguns autores têm buscado aproximar processos de campos aleatórios 2D por estruturas ARMA 1D sazonal. McCormick e Jayaramamurthy (1974), Chin, Jau e Weinman (1987), Dutra e Mascarenhas (1984) e Rangayyan (2004) desenvolveram um método aproximado para determinar modelos ARMA 2D a partir de concatenação de linhas e colunas da imagem. Essa abordagem foi também discutida por Petrou e Sevilla (2006). Em geral, eles consideravam a aproximação de modelos espaciais padrão, como por exemplo

$$I(i, j) = \theta_1 I(i-1, j) + \theta_2 I(i-1, j-1) + \theta_3 I(i, j-1) + \epsilon(i, j), \quad (2.7)$$

por modelos ARMA sazonais (pela relação $(i, j) \rightarrow k = (i-1)S + j$ sendo S o número de linhas de uma submatriz),

$$I(k) = \theta_1 I(k-S) + \theta_2 I(k-S-1) + \theta_3 I(k-1) + \epsilon(k). \quad (2.8)$$

Assim, a relação do *pixel* com sua vizinhança pode ser capturada através de uma estrutura SARMA para uma função $g(\cdot)$ da média μ_t na Equação (2.15).

$$\mu_t = \mathbb{E}(Z_t | \mathcal{F}_{t-1})$$

e $\mathcal{F}_{t-1}$ é a menor σ -álgebra gerada por variáveis observadas nos instantes anteriores a t como discutido em (BENJAMIN; RIGBY; STASINOPOULOS, 2003), a saber as variáveis mensuráveis $Z_1, \dots, Z_{t-1}$. Neste caso, a estrutura geral em termos da seguinte média condicional (retorno SAR), μ_t , será relacionada com um preditor linear, diga-se η_t , por meio de uma função ligação $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, que deve ser estritamente monótona e duas vezes diferenciável. Assim, podemos assumir a seguinte estrutura para μ_t :

$$g(\mu_t) = \eta_t := \mathbf{x}_t^\top \boldsymbol{\beta} + \tau_t, \quad (2.9)$$

em que $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^k$ é um vetor k -dimensional contendo outras variáveis determinísticas (por exemplo, tendência, sazonalidade, ...) no tempo t , $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_k)^\top$ é um conjunto de parâmetros devido à parte linear, τ_t pode ser entendido como um preditor espacial 1D

$$\tau_t = \delta + \sum_{i=1}^p \phi_i [g(z_{t-i}) - \mathbf{x}_{t-i}^\top \boldsymbol{\beta}] + \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{t-j}, \quad (2.10)$$

em que $\epsilon_{t-j} = g(z_{t-1}) - \eta_{t-1}$, $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_p)^\top$ e $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_q)^\top$ são os coeficientes AR e MA, respectivamente. No que segue, assume-se que $\mathbf{x}_t^\top \boldsymbol{\beta} = 0$ nas Equações (2.9) e (2.10); isto é, somente a influência espacial ou temporal é considerada.

Grande parte dos modelos espaciais pode ser abarcada assumindo a versão sazonal da Equação (2.10) dada por (para $\mathbf{x}_t^\top \boldsymbol{\beta} = 0$)

$$\Phi(B^s)\phi_p(B)g(z_t) = \delta + \Theta(B^s)\theta_q(B)\epsilon_t,$$

em que $\epsilon_t = g(z_t) - \eta_t$, $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$ é o polinômio autoregressivo de ordem p , $\Phi_p(B^s) = 1 - \phi_1 B^s - \phi_2 B^{2s} - \dots - \phi_p B^{ps}$ é o polinômio autoregressivo sazonal de ordem p , $\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$ é o polinômio de médias móveis de ordem q e $\Theta_q(B^s) = 1 - \theta_1 B^s - \theta_2 B^{2s} - \dots - \theta_q B^{qs}$ é o polinômio de médias móveis sazonal de ordem q . Dessa forma, podemos adotar como componente sistemática a formulação de uma estrutura SARMA em termos do retorno médio SAR. Neste caso, μ_t será relacionado com um preditor linear com componentes sazonais, diga-se η_t^* , por meio de uma função ligação $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Assim, podemos assumir a seguinte estrutura para μ_t :

$$g(\mu_t) = \eta_t^* = \mathbf{x}_t^\top \boldsymbol{\beta} + \tau_t^*, \quad (2.11)$$

em que

$$\begin{aligned}\tau_t^* = & \delta + \sum_{i=1}^p \left(\phi_i g(z_{t-i}) - \mathbf{x}_{t-i}^\top \boldsymbol{\beta} \right) - \sum_{j=1}^q \boldsymbol{\theta}_j \epsilon_{t-j} + \sum_{I=1}^P \left(\Phi_I g(z_{t-IS}) - \mathbf{x}_{t-IS}^\top \boldsymbol{\beta} \right) \\ & - \sum_{J=1}^Q \boldsymbol{\Theta}_J \epsilon_{t-JS} - \sum_{i=1}^p \sum_{I=1}^P \left(\phi_i \Phi_I g(z_{t-(i+IS)}) - \mathbf{x}_{t-(i+IS)}^\top \boldsymbol{\beta} \right) + \sum_{j=1}^q \sum_{J=1}^Q \boldsymbol{\theta}_j \boldsymbol{\Theta}_J \epsilon_{t-(j+JS)},\end{aligned}$$

sendo S o período, $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_p)^\top$ e $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_q)^\top$ são os coeficientes AR e MA não sazonais, respectivamente, e $\boldsymbol{\Phi} = (\Phi_1, \dots, \Phi_P)^\top$ e $\boldsymbol{\Theta} = (\Theta_1, \dots, \Theta_Q)^\top$ são os coeficientes AR e MA sazonais, respectivamente.

As previsões para os processos Γ -ARMA, KB -ARMA e $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA estendem o caso dos modelos ARMA Gaussiano (BROCKWELL; DAVIS, 2001) como

$$\begin{aligned}\mu_t &= g^{-1}(\mathbb{E}(Z_t | \mathcal{F}_{t-1})) \\ &= g^{-1} \left(\delta + \mathbf{x}_t^\top \boldsymbol{\beta} + \sum_{i=1}^p \phi_i [g(z_{t-i}) - \mathbf{x}_{t-i}^\top \boldsymbol{\beta}] + \sum_{j=1}^q \boldsymbol{\theta}_j \epsilon_{t-j} \right).\end{aligned}\quad (2.12)$$

Então, se considerar previsões no horizonte $h = 1, 2, \dots, h_0$, a equação de previsão para Γ -, $\mathcal{G}_I^0$ - ou KB -ARMA, μ_{n+h} , é expressa por

$$\mu_{n+h} = g^{-1} \left(\delta + \mathbf{x}_{n+h}^\top \boldsymbol{\beta} + \sum_{j=1}^q \boldsymbol{\theta}_j \epsilon_{n+h-j} + \sum_{i=1}^p \phi_i [g(z_{n+h-i}) - \mathbf{x}_{n+h-i}^\top \boldsymbol{\beta}] \right), \quad (2.13)$$

em que $g(z_{n+h-j})$ é trocado por $g(\mu_{n+h-j})$ para $j < h$ e

$$\epsilon_{n+h-j} = \begin{cases} g(z_{n+h-j}) - \eta_{n+h-j}, & \text{if } h \leq j < (n-1), \\ g(\mu_{n+h-j}) - \eta_{n+h-j} = 0, & \text{if } j < h. \end{cases} \quad (2.14)$$

Considerando a sazonalidade, a equação de previsão (S)ARMA, μ_{n+h}^* , é

$$\begin{aligned}\mu_{n+h}^* &= g^{-1} \left(\delta + \sum_{i=1}^p \phi_i g(z_{n+h-i}) - \sum_{j=1}^q \boldsymbol{\theta}_j \epsilon_{n+h-j} + \sum_{I=1}^P \Phi_I g(z_{n+h-IS}) - \sum_{J=1}^Q \boldsymbol{\Theta}_J \epsilon_{n+h-JS} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^q \sum_{J=1}^Q \boldsymbol{\theta}_j \boldsymbol{\Theta}_J \epsilon_{n+h-(j+JS)} \right).\end{aligned}\quad (2.15)$$

2.4.2 Análise de resíduos e diagnóstico para processos ARMA

Em modelos de séries temporais, as análises de diagnóstico e de resíduos (LI, 2003) são cruciais para determinar a qualidade dos ajustes (KEDEM; FOKIANOS, 2002, p. 23). Devido

ao foco da tese recair sobre a introdução de novos modelos de séries temporais, derivação e discussão de suas propriedades elementares visando a inferência pontual e a predição (com posterior interpretação e aplicação no processamento em e entre imagens de radares/satélites), dar-se-á ênfase aos resíduos de *Pearson* para os processos Γ -ARMA, KB -ARMA e $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA. Os resíduos de *Pearson* são definidos como

$$\hat{r}_t = \frac{Z_t - \hat{\mu}_t}{\sqrt{V(\hat{\mu}_t)}}, \quad \text{para } t = 1, \dots, n,$$

em que $V(\hat{\mu}_t) = \hat{\mu}_t^2$ é a função variância para um modelo assumido.

2.4.3 Medidas de acurácia

Nesta tese, modelos de regressão e séries temporais são proposto e discutidos. A fim de avaliar suas eficiências, várias medidas de qualidade preditiva são consideradas.

Diversas medidas de acurácia foram propostas para avaliar o desempenho dos métodos de previsão nas últimas duas décadas (CHEN; TWYXCROSS; GARIBALDI, 2017). Uma das medidas mais usadas (deparentes de escala) é o erro quadrático médio (*Mean Square Error*–MSE). Entretanto, ela não é adequada para comparação entre séries com valores em escalas diferentes. Para suprir essa limitação, outras medidas não dependentes de escala também foram consideradas: o erro percentual médio absoluto simétrico (*symmetric Mean Absolute Percentage Error*–sMAPE) (HIBON, 2000), o erro médio absoluto escalado (*Mean Absolute Scaled Error*–MASE) (HYNDMAN; KOEHLER, 2006) e o erro absoluto relativo limitado médio não escalonado (*Unscaled Mean Bounded Relative Absolute Error* (UMBRAE) (CHEN; TWYXCROSS; GARIBALDI, 2017). Entretanto, essas medidas também apresentam algumas desvantagens sobre alguns aspectos. Uma desvantagem da medida sMAPE é que os resultados podem ser sensíveis quando existem muitos valores próximos de zero, fazendo com que seus valores sejam explosivos nesses casos. Para superar essas desvantagens, Hyndman e Koehler (2006) propuseram o MASE, que é uma medida de erro relativo que usa o MAE de uma previsão de referência (especificamente o passeio aleatório) como seu denominador. Davydenko e Fildes (2013) mostraram que o MASE também é vulnerável a *outliers*, como resultado da divisão por pequenos valores da MAE. Assim, Chen, Twycross e Garibaldi (2017) propuseram a medida de erro relativo UMBRAE. Esta última tem a vantagem de dar menos importância aos *outliers*, uma vez que não tem o problema de ser excessivamente grande. A medida UMBRAE teve

seu desempenho avaliado sob a perspectivas de dados simulados e reais que comprovam uma melhor acurácia em relação as medidas MSE, sMAPE e MASE. Essas medidas são definidas a seguir.

Sejam $\{Z_t; t = 1, \dots, n\}$ e $\{\hat{Z}_t; t = 1, \dots, n\}$ uma série temporal e seus valores preditos. Então,

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^2, & \text{UMBRAE} &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|e_t|}{|e_t| + |e_t^*|}}{1 - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|e_t|}{|e_t| + |e_t^*|}}, \\ \text{MASE} &= \frac{1}{n} \left(\frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |e_t|}{\frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n |e_t^*|} \right) & \text{e } \text{sMAPE} &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|e_t|}{|Z_t|}, \end{aligned}$$

em que $e_t = Z_t - \hat{Z}_t$ e $e_t^* = Z_t - Z_{t-1}$. Neste trabalho, essas quatro medidas são utilizadas como critérios de avaliação do comportamento para diferentes funções de ligações dos novos modelos propostos $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA e KB -ARMA.

3 REMOÇÃO DE RUÍDO EM IMAGENS SAR POR MEIO DO PROCESSO Γ -ARMA

3.1 ESTADO DA ARTE E PROPOSTA

Ao longo dos anos, alguns trabalhos têm sido propostos a fim de reduzir o efeito do *speckle* em imagens SAR no contexto de filtros digitais não lineares: *median* (JAIN, 1989), *boxcar* (DELEDALLE et al., 2014), *Lee* (LEE; GRUNES; MANGO, 1991; LEE; GRUNES; GRANDI, 1999), *enhanced Lee* (KUPIDURA, 2016), *Kuan* (KUAN et al., 1987), Γ -MAP (LOPES et al., 1993), outros (GLAISTER; WONG; CLAUSI, 2014). Sabe-se que, as abordagens *boxcar* e *median* aplicadas às imagens SAR podem borrar detalhes nas bordas e texturas, devido à natureza multiplicativa que o ruído *speckle* impõe aos dados SAR (LEE; POTTIER, 2009). Outros mecanismos de redução do ruído são conhecidos como *Filtros adaptativos*. Por exemplo, Lee et al. (1991, 1999) abordaram a filtragem de imagens SAR combinando modelos de ruído multiplicativo e erro quadrático médio mínimo. O filtro Kuan é uma extensão dos filtros de Lee. O primeiro prevê mudanças locais nas imagens SAR com base na média e variância. Uma desvantagem dos filtros Lee e Kuan é produzir imagens com bordas e texturas muito suaves (DEVEPAL; KUMAR; JOJY, 2015). O filtro Γ -MAP tem sido usado para suavização de áreas florestadas e terras agrícolas em imagens SAR. Entretanto, pode prejudicar a qualidade das imagens SAR filtradas (KALAIYARASI; SARAVANAN; PERUMAL, 2016).

Os filtros da classe não local (NL) também têm atraído a atenção de pesquisadores quanto ao desenvolvimento de técnicas de remoção do *speckle* SAR. Deledalle, Denis e Tupin (2009) propuseram o filtro baseado em fragmento probabilístico (*probabilistic patch-based*—PPB) e Parrilli et al. (2012) desenvolveram um método de eliminação de ruído por correspondência de bloco SAR e método de filtragem 3D (SAR-BM3D). Em seguida, Torres et al. (2014) apresentaram duas abordagens de filtragem do *speckle* como extensões para o algoritmo não local (NL) introduzido por Buades, Coll e Morel (2005): NL (NAGAO; MATSUYAMA, 1979; TORRES; CAVALCANTE; FRERY, 2012) e NL adaptativo. Ainda, Cozzolino et al. (2014) apresentaram um NL adaptativo rápido para imagens SAR. Outros trabalhos foram propostos usando a transformada wavelet (ACHIM; TSAKALIDES; BEZARIANOS, 2003; BIANCHI; ARGENTI; ALPARONE, 2008). Mais recentemente, a teoria de aprendizado profundo (*Deep learning*) tem sido empregada em estudos sobre *despeckling* de dados SAR, como redes neurais convolucionais SAR (CHIERCHIA et al., 2017; WANG; PATEL., 2017) e filtros de redes neurais (YUE; XU; JIN, 2018). Contudo,

todos esses trabalhos de filtragem não assumem uma estrutura de dependência paramétrica sob os *pixels*, o que pode representar uma perda de adequação ou interpretação. Este capítulo oferece uma maneira de adicionar uma estrutura de dependência dinâmica pixel-a-pixel em uma filtragem espacial.

Modelos espaciais autoregressivos (AR) baseados em campos aleatórios de Markov e Gibbs têm sido usados para representar imagens (BENNETAND; KHOTANZAD, 1999). Em particular, Kashyap e Eom (1988) aplicaram o modelo AR bidimensional (2D) de primeira ordem para representar cenários reais. Basu e Reinsel (1993) derivaram algumas propriedades desse modelo e estudaram os estimadores de máxima verossimilhança (EMVs) para os parâmetros. Os modelos espaciais autoregressivo (*autoregressive*-AR) (BESAG, 1974), médias móveis (*moving average*-MA) (HAINING, 1978), e autoregressivos de médias móveis (*autoregressive moving average*-ARMA) bem como o processo AR simultâneo (WHITTLE, 1954) são importantes classes de processos espaciais para processamento de imagem, formalizado em (MARTIN, 1996). Ainda, Bustos, Ojeda e Vallejos (2009) propuseram um trabalho de revisão sobre modelos espaciais ARMA, focando na imagem filtrada por médias de uma abordagem robusta.

Reconhecimento de padrões (GOROVYI; SHARAPOV, 2017) e métodos de processamento de imagem de radar (DUTRA; MASCARENHAS, 1984; DUTRA, 1990) frequentemente usam modelagem espaço-temporal em suas formulações. Devido à tratabilidade analítica, eles usualmente assumem que seus modelos marginais seguem comportamento Gaussiano. Em contraste, alguns fenômenos (por exemplo, a obtenção de intensidade na captura de imagens SAR) impõem que comportamentos não gaussianos para modelos marginais sejam empregados. Embora aplicado fora do contexto de processamento de imagem, Benjamin, Rigby e Stasinopoulos (2003) desenvolveram um processo ARMA condicional denominado ARMA generalizado (GARMA) que pode oferecer uma solução para essa lacuna. O processo GARMA pode ser entendido como o uso de uma estrutura ARMA (em uma componente sistemática) para uma componente aleatória pertencente à família exponencial (FE); assumindo modelos como binomial negativa, Poisson, Gaussiano e gama (Γ).

Neste trabalho, temos dois objetivos: (i) propor um novo filtro para imagens SAR que leve em consideração a correlação espacial entre *pixels* vizinhos e (ii) quantificar o desempenho do filtro proposto em imagens SAR simuladas e reais. Em particular, para realizar (i), adaptamos a proposta de Benjamin, Rigby e Stasinopoulos (2003), sugerindo sua equação de predição como uma alternativa espacial ao processo abordado por Bustos, Ojeda e Vallejos (2009). Algumas propriedades matemáticas do processo Γ -ARMA—necessárias para calcular

nosso filtro— são discutidas também. Combinamos quatro equações de predição do processo Γ -ARMA unidimensional (1D) em diferentes direções de rastreamento para propor um filtro espacial. Fornecemos procedimentos para obter EMVs para os parâmetros do Γ -ARMA e uma expressão compacta para a MIF associada.

Com base em quatro figuras de mérito e imagens artificiais, o desempenho do filtro proposto é quantificado e comparado ao de outros seis: os filtros G-ARMA (ARMA Gaussiano), *boxcar*, *median*, Γ -MAP, *enhanced Lee* e *Kuan*. Finalmente, nosso filtro é aplicado às imagens SAR de São Francisco, Foulum e Munique. Resultados indicam que nossa proposta pode superar os demais filtros comparados.

O processo Γ -ARMA adaptado à formação de imagens SAR é apresentado na Seção 3.2. Na Seção 3.3, a proposta é introduzida. Algumas medidas de qualidade de imagem são discutidas na Seção 3.4. Estudos de comparação entre vários filtros para imagens SAR simuladas e reais são apresentados nas Seções 3.5 e 3.6, respectivamente. Um estudo de custo computacional é feito na Seção 3.7. Conclusões parciais são listadas na Seção 3.8.

3.2 O PROCESSO Γ -ARMA COMO UM MODELO ESTOCÁSTICO PARA IMAGENS SAR

3.2.1 Formulação do modelo

Neste capítulo, usa-se a distribuição Γ (suposição-mãe para abordar as intensidades homogêneas de SAR de acordo as (MMs) discutido por Frery et al. (1997)) como um modelo para descrever $Z := I(i, j)$ (discutido na Seção 2.1.2), incorporando uma estrutura de dependência gerada a partir da vizinhança de Z .

Benjamin, Rigby e Stasinopoulos (2003) propuseram o processo GARMA, no qual assume que seu modelo marginal pertence à família exponencial. Nesta tese, estamos interessados em descrever o retorno espacial por meio do modelo Γ -ARMA.

Seja $\{Z_t; t = 1, \dots, n\}$ uma série 1D espacial de tamanho n tal que, a distribuição condicional de Z_t dado um conjunto de informações vizinhas, diga-se $\mathcal{F}_{t-1}$ (em que $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma\{Z_1, \dots, Z_{t-1}\}$ é a menor σ -álgebra tal que $Z_1, \dots, Z_{t-1}$ são mensuráveis), segue a distribuição Γ . As funções densidade e distribuição acumulada de $[Z_t | \mathcal{F}_{t-1}]$ são dadas por

$$f(z_t | \mathcal{F}_{t-1}; L, \gamma_t) = \frac{\gamma_t^L}{\Gamma(L)} z_t^{L-1} \exp(-\gamma_t z_t) \mathbb{I}_{(0, \infty)}(z_t) \quad (3.1)$$

e

$$F(z_t|\mathcal{F}_{t-1}; L, \gamma_t) = \frac{1}{\Gamma(L)} \gamma(L, z_t \gamma_t), \quad (3.2)$$

respectivamente, em que $\mathbb{I}_A(\cdot)$ é a função indicadora não nula em A , $L > 0$ é o ENL, $\gamma_t > 0$ é o parâmetro de escala, $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$ é a função Γ e $\gamma(a, bt) = \int_0^{bt} x^{a-1} e^{-x} dx$ é a função Γ incompleta inferior. Assumindo $\gamma_t := L/\mu_t$, essa situação é denotada por $[Z_t|\mathcal{F}_{t-1}] \sim \Gamma(L, \mu_t)$. As médias e variâncias condicionais associadas são dadas, respectivamente, por

$$\mathbb{E}(Z_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \mu_t \quad \text{e} \quad \sigma_t^2 := \text{Var}(Z_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \frac{\mu_t^2}{L}. \quad (3.3)$$

Essas duas identidades têm desdobramentos na física de formação de imagens SAR: (i) A média da intensidade do *speckle* μ_t pode ser influenciada pela sua vizinhança e (ii) O parâmetro L impõe um controle na variabilidade sobre os retornos SAR (FRERY et al., 1997; NASCIMENTO; FRERY; CINTRA, 2014a), uma vez que σ_t^2 diminui para grandes valores de L . O parâmetro L^{-1} pode ser entendido como um parâmetro de dispersão.

Conforme discutido na teoria de modelos lineares generalizados (*Generalized Linear Models*—GLM) (KEDEM; FOKIANOS, 2002), μ_t é relacionado com um preditor linear, denominado η_t , por meio de funções de ligações $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Uma escolha comum da função de ligação para $\mu_t > 0$ é a função logarítima, $g(\mu_t) = \log(\mu_t)$. No contexto de processamento de dados SAR, essa ligação é frequentemente usada para transformar o efeito do ruído multiplicativo em aditivo (XIE; PIERCE; ULABY, 2002).

3.2.2 Relação entre Γ -MAP e o processo Γ -ARMA

Ao lidar com a filtragem de dados *speckle*, o retorno do SAR pode ser entendido da perspectiva da MM (LEE et al., 1994): Seja $T(i, j)$ e $S(i, j)$ sendo duas variáveis aleatórias independentes,

$$Z(i, j) = T(i, j) S(i, j), \quad (3.4)$$

em que $Z(i, j)$ é o (i, j) -ésima intensidade do *pixel* de uma imagem SAR, $T(i, j)$ representa a reflectância e $S(i, j) \sim \Gamma(L, L)$ indica o ruído *speckle* tendo média $\mathbb{E}(S[i, j]) = 1$ e variância $\text{Var}(S[i, j]) = 1/L$.

O filtro Γ -MAP assume que o valor original do *pixel* degradado encontra-se entre a média local e seu valor real. O filtro MAP (máximo a posteriori) considera a distribuição Γ para ruído speckle (LOPES et al., 1990). A partir do filtro Γ -MAP, sugerimos uma adaptação para incluir estruturas de dependência baseadas em ARMA entre os *pixels* da vizinhança de $Z(i, j)$ (BENJAMIN; RIGBY; STASINOPOULOS, 2003).

Seja $[Z_t | \mathcal{F}_{t-1}] = [T_t \times V_t | \mathcal{F}_{t-1}]$ em uma posição t de uma imagem tal que T_t é uma variável degenerada tal que $\mathbb{P}(T_t = \mu_t) = 1$ e $\mu_t = \mathbb{E}(Z_t | \mathcal{F}_{t-1})$. Agora, considere maximizar a probabilidade a posteriori da variável T_t com valores μ_t dado o retorno Z_t , $\mathbb{P}(T_t | Z_t)$,

$$\mathbb{P}(T_t | Z_t; \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{f(Z_t | T_t = \mu_t) \mathbb{P}(T_t = \mu_t)}{f(Z_t)}, \quad (3.5)$$

em que $f(Z_t)$ é intratável ou depende só de L (Pois, como Z_t é composta pelo produto das variáveis T_t e S_t , sendo T_t uma variável degenerada e S_t dependente apenas de L -conhecido. Então, não há informação relevante no processo de maximização). Portanto, o sinal estimado (intensidade suavizada), $\hat{\mu}_t$, é reduzido para maximizar

$$\log f(z_t | \mathcal{F}_{t-1}) + \underbrace{\log \mathbb{P}(T_t = \mu_t)}_{=0}. \quad (3.6)$$

em termos de $\boldsymbol{\nu} = (\delta, \boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\phi}^\top, \boldsymbol{\theta}^\top, L)$. Essa abordagem se resume a resolver o problema de otimização descrito no que segue.

Considere o problema de estimação dos parâmetros do modelo Γ -ARMA, $\boldsymbol{\nu} = (\delta, \boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\phi}^\top, \boldsymbol{\theta}^\top, L)$. Seja $m = \max\{p, q\}$ e $\{Z_t | \mathcal{F}_{t-1}\}_{t=1}^n$ tal que $[Z_t | \mathcal{F}_{t-1}] \sim \Gamma(L, \mu_t)$. Dada uma série espacial 1D observada $\{z_t; t = 1, \dots, n\}$, a função de log-verossimilhança em $\boldsymbol{\nu}$, $\ell(\boldsymbol{\nu})$, tem a forma

$$\ell(\boldsymbol{\nu}) = \sum_{t=m+1}^n \log f(z_t | \mathcal{F}_{t-1}; L, \gamma_t) = \sum_{t=m+1}^n \ell_t, \quad (3.7)$$

em que

$$\ell_t = L \log(L) - \log \Gamma(L) + (L - 1) \log z_t - L \frac{z_t}{\mu_t} - L \log \mu_t.$$

O vetor escore associado,

$$U_{\boldsymbol{\nu}} = \left(U_\delta, U_{\boldsymbol{\beta}^\top}, U_{\boldsymbol{\phi}^\top}, U_{\boldsymbol{\theta}^\top}, U_L \right) = \left(\frac{\partial \ell}{\partial \delta}, \frac{\partial \ell}{\partial \boldsymbol{\beta}^\top}, \frac{\partial \ell}{\partial \boldsymbol{\phi}^\top}, \frac{\partial \ell}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top}, \frac{\partial \ell}{\partial L} \right), \quad (3.8)$$

é tal que

$$U_\delta = L \sum_{t=m+1}^n \left(\frac{z_t - \mu_t}{\mu_t^2} \right) \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \delta}, \quad U_{\boldsymbol{\beta}} = L \sum_{t=m+1}^n \left(\frac{z_t - \mu_t}{\mu_t^2} \right) \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \boldsymbol{\beta}},$$

$$U_{\phi} = L \sum_{t=m+1}^n \left(\frac{z_t - \mu_t}{\mu_t^2} \right) \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \phi}, \quad U_{\theta} = L \sum_{t=m+1}^n \left(\frac{z_t - \mu_t}{\mu_t^2} \right) \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \theta}$$

e

$$U_L = (n - m) \mathcal{U}_1(L) + \sum_{t=m+1}^n \log \left(\frac{z_t}{\mu_t} \right) - \sum_{t=m+1}^n \frac{z_t}{\mu_t},$$

em que $\mathcal{U}_1(L) = \log(L) + 1 - \psi(L)$, $\psi(\cdot)$ é a função *digamma* e $(\cdot)'$ é a derivada de primeira ordem. Após algumas manipulações algébricas, os primeiros quatro elementos do vetor escore pode ser representado na forma matricial como

$$U_{\delta} = \mathbf{d}^{\top} \mathbf{T} \mathbf{e}, \quad U_{\beta} = \mathbf{M}^{\top} \mathbf{T} \mathbf{e}, \quad U_{\phi} = \mathbf{P}^{\top} \mathbf{T} \mathbf{e} \quad \text{e} \quad U_{\theta} = \mathbf{R}^{\top} \mathbf{T} \mathbf{e}, \quad (3.9)$$

em que $\mathbf{T} = \text{diag}\{1/g'(\mu_{m+1}), \dots, 1/g'(\mu_n)\}$, $\text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$ é uma matriz diagonal com elementos não nulos $a_1, \dots, a_n$, $\mathbf{d} = \left(\frac{\partial \eta_{m+1}}{\partial \delta}, \dots, \frac{\partial \eta_n}{\partial \delta} \right)^{\top}$, $\mathbf{e} = (e_{m+1}, \dots, e_n)^{\top}$ tal que $e_t = \mu_t^{-2} (z_t - \mu_t)$ e $\mathbf{M}$, $\mathbf{P}$ e $\mathbf{R}$ são matrizes com dimensões $(n - m) \times k$, $(n - m) \times p$ e $(n - m) \times q$, respectivamente, tendo entradas (i, j)

$$M_{i,j} = \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j}, \quad P_{i,j} = \frac{\partial \eta_i}{\partial \phi_j} \quad \text{e} \quad R_{i,j} = \frac{\partial \eta_i}{\partial \theta_j}. \quad (3.10)$$

As estimativas de máxima verossimilhança condicionais (MVC) para ν tem a forma

$$\hat{\nu} = \arg \max_{\nu \in \mathbb{R}^{p+q+k+2}} [\ell(\nu)] \quad (3.11)$$

ou, equivalentemente, pode ser obtido como uma solução de $U_{\nu} = \mathbf{0}$. Note que esse sistema não tem solução em forma fechada, portanto, algoritmos iterativos de otimização não linear devem ser utilizados para maximizar a função de log-verossimilhança, tais como, algoritmos Newton ou quasi-Newton (NOCEDAL; WRIGHT, 2006). No Apêndice A, a MIF e outros detalhes relacionados ao processo de estimação são adicionados.

As equações de predição e previsão do processo Γ -ARMA são introduzidas na Seção 2.4. Então, dado um vetor de *pixels*, a Equação (2.13) pode ser usada para fazer uma predição ou filtragem de z_{n+h} por meio das estimativas de μ_{n+h} , trocando os parâmetros por suas respectivas estimativas de máxima verossimilhança condicionais. Na próxima seção, um mecanismo de filtragem baseado em (2.13) e (2.14) é proposto.

3.3 NOVA CLASSE DE FILTROS LOCAIS PARA DADOS SPECKLE

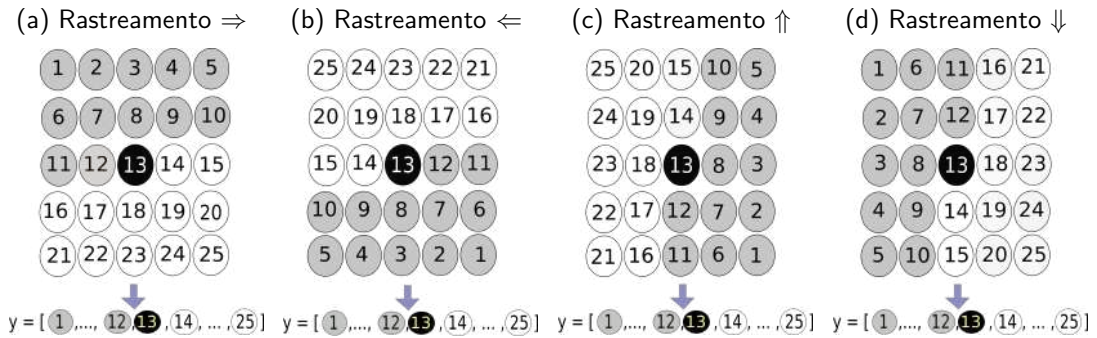
De acordo com Bailey (2011), um filtro local pode ser definido como alguma função de valores $h(\cdot)$ em uma determinada vizinhança local

$$\mu(t_1, t_2) = h(z(t_1, t_2), \dots, z(t_1 + \Delta x, t_2 + \Delta y)), \quad (3.12)$$

para $(\Delta x, \Delta y) \in \mathbf{W}$, em que $\mathbf{W}$ é uma janela centrada em $z(t_1, t_2)$. Nesta tese, objetiva-se determinar $h(\cdot, \dots, \cdot)$ em termos do processo Γ -ARMA e usar (3.12) para filtrar o efeito de ruído speckle mantendo as propriedades da imagem o máximo possível.

Para determinar novos filtros, primeiro caminhos de rastreamento são definidos em uma janela $\mathbf{W}$. Baseado na discussão da Seção 2.3, optamos por fazer dois tipos de rastreamentos dos *pixels* por janela: (i) linhas ($\Leftarrow$ e $\Rightarrow$) e (ii) colunas ($\Downarrow$ e $\Uparrow$) da imagem sequencialmente. A Figura 8 ilustra as quatro séries espaciais que consideramos dadas uma janela.

Figura 8 – Ilustração dos tipos de rastreamento usados para uma janela de tamanho 5×5 .



Fonte: Autoria própria (2020)

Depois, com base na linearidade das equações de predição (BROCKWELL; DAVIS, 2009), sugerimos usar como valor suavizado para a entrada SAR $z(t_1, t_2)$ o preditor não causal

$$\mu(t_1, t_2) = \frac{1}{4} \sum_{l=1}^4 g^{-1} \left(\delta_l + \sum_{i=1}^{p_l} \phi_{l,i} g(z[(t_1, t_2) - \mathbf{s}_{l,i}]) + \sum_{j=1}^{q_l} \theta_{l,i} \epsilon[(t_1, t_2) - \mathbf{s}_{l,j}] \right), \quad (3.13)$$

em que $\mathbf{s}_{1,i} = (i, 0)$, $\mathbf{s}_{2,i} = (-i, 0)$, $\mathbf{s}_{3,i} = (0, i)$, $\mathbf{s}_{4,i} = (0, -i)$,

$$\epsilon[(t_1, t_2) - \mathbf{s}_{l,i}] = g(z[(t_1, t_2) - \mathbf{s}_{l,i}]) - g(\mu[(t_1, t_2) - \mathbf{s}_{l,i}]).$$

Como ilustração, assuma o modelo Γ -AR(1) em todas as quatro séries espaciais 1D (3.13) reduzido a

$$\mu(t_1, t_2) = \frac{1}{4} g^{-1} \left(\delta_1 + \phi_{1,1} g(z(t_1 - 1, t_2)) \right) + \frac{1}{4} g^{-1} \left(\delta_2 + \phi_{2,1} g(z(t_1 + 1, t_2)) \right) \quad (3.14)$$

$$+ \frac{1}{4} g^{-1} \left(\delta_3 + \phi_{3,1} g(z(t_1, t_2 - 1)) \right) + \frac{1}{4} g^{-1} \left(\delta_4 + \phi_{4,1} g(z(t_1, t_2 + 1)) \right),$$

que resulta em (para $g(x) = x$, $\phi_{i,j} = 1$ e $\delta_i = 0$ para todo i, j)

$$\begin{aligned} \mu(t_1, t_2) &= \frac{z(t_1 - 1, t_2) + z(t_1 + 1, t_2) + z(t_1, t_2 - 1) + z(t_1, t_2 + 1)}{4} \\ &= z(t_1, t_2) - \frac{\nabla^2[z(t_1, t_2)]}{4}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

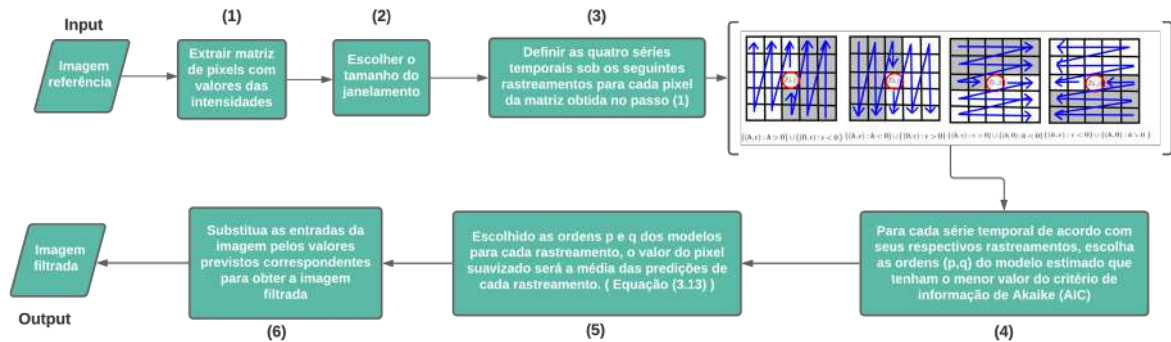
em que $\nabla^2[z(t_1, t_2)]$ é o operador Laplaciano negativo (JIN; XU, 2013, p. 231), que retira as bordas internas e externas:

$$\nabla^2[z(t_1, t_2)] = 4z(t_1, t_2) - z(t_1 - 1, t_2) - z(t_1 + 1, t_2) - z(t_1, t_2 - 1) - z(t_1, t_2 + 1).$$

Observe que a expressão (3.13) é uma classe de filtros espaciais que tem relação com a formação física das imagens SAR. O Algoritmo 1 detalha o uso desta classe (ilustrado na Figura 9).

Algoritmo 1: Passo-a-passo do algoritmo do filtro Γ -ARMA

- 1: Obtenha a matriz de pixels com os valores das intensidades;
 - 2: Escolha o tamanho do janelamento $\mathbf{W}$ (usuais: 3×3 , 5×5 , 7×7 ou 9×9);
 - 3: Para cada *pixel* da matriz obtida no passo (1), dada sua vizinhança, defina as quatro séries temporais sob os rastreamentos nas direções $\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\Uparrow$ e $\Downarrow$, como ilustrado na Figura 8;
 - 4: Para cada série temporal de acordo com seus respectivos rastreamentos, escolha o modelo Γ -ARMA(p, q) estimado que tenha o menor valor do critério de informação de Akaike (*Akaike information criterion*– AIC) (KEDEM; FOKIANOS, 2002, p. 25);
 - 5: Especifique sua equação de predição em (3.13);
 - 6: Substitua as entradas da imagem pelos valores previstos correspondentes para obter a imagem filtrada.
-

Figura 9 – Diagrama do algoritmo para filtro Γ -ARMA

Fonte: Autoria própria (2021)

3.4 MEDIDAS DE AVALIAÇÃO DA QUALIDADE DA IMAGEM

A escolha de medidas de qualidade de imagem é uma etapa crucial na avaliação de imagens SAR filtradas. Existem várias ferramentas de avaliação de qualidade de imagem e elas medem o quão próximas as imagens filtradas estão das imagens verdadeiras em diferentes perspectivas (WANG et al., 2004). Neste trabalho, usamos duas fontes de comparação: (i) a inspeção visual de imagens suavizadas (comparativamente com a imagem real) e (ii) quatro medidas de avaliação de qualidade da imagem como figuras de mérito. Um bom método deve suavizar o *speckle* e, em sincronia, preservar os detalhes da imagem.

As medidas de qualidade mais simples e amplamente usadas são o erro médio quadrático (*Mean Square Error*–MSE) e o erro médio absoluto (*Mean Absolute Error*–MAE). Eles são atraentes por sua simplicidade e são matematicamente convenientes no contexto de otimização (WANG et al., 2004). O MSE e MAE são dados por

$$\text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x_j - y_j)^2 \quad \text{e} \quad \text{MAE} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |x_j - y_j|, \quad (3.16)$$

em que $|\cdot|$ representa o módulo de um argumento, N é o número de *pixels* da imagem, x_j é o valor da intensidade do j -ésimo *pixel* da imagem com *speckle* e y_j é o valor da intensidade do j -ésimo *pixel* da imagem filtrada. Entretanto, o MSE e MAE não são adequados para avaliar filtros *speckle* (WANG; BOVIK, 2002).

Outra medida é a correlação de *Pearson*, que mede o grau de relação linear entre dois sinais. Quanto maior em valor absoluto for o coeficiente de correlação, mais semelhantes serão as imagens suavizadas e reais (LI; DAI, 2009). Essa correlação entre as séries suavizadas e reais, diga-se ρ , é definida como

$$\rho = \frac{\sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2 \sum_{j=1}^N (y_j - \bar{y})^2}}, \quad (3.17)$$

em que $(\bar{\cdot})$ representa a média do sinal. O intervalo de ρ é $[-1, 1]$, em que $|\rho| = 1$ indica auto grau de correlação.

Também empregamos o índice universal de qualidade de imagem (UIQI) (WANG; BOVIK, 2002), que é fácil de medir e aplicável ao processamento de imagens. Em vez de usar métodos tradicionais de soma de erros (como MSE e MAE), o UIQI pode ser entendido como uma combinação de três componentes: perda de correlação, distorção de luminância e distorção de contraste. Esta medida é determinada por

$$\text{UIQI} = \rho \frac{2 \bar{x} \bar{y}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \frac{2 S_x S_y}{S_x^2 + S_y^2}, \quad (3.18)$$

em que $S_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2$ e $S_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (y_j - \bar{y})^2$ são as variâncias amostrais. O primeiro componente é o coeficiente de correlação entre $\{x_j, j = 1, \dots, N\}$ e $\{y_j, j = 1, \dots, N\}$. Mesmo que x_j e y_j sejam linearmente relacionados, ainda pode haver distorções relativas entre eles, sendo capturadas pelo segundo e terceiro componentes. O segundo componente pertence a $[0, 1]$ e mede o quão perto a luminância média está entre x_j e y_j . Assim, $\text{UIQI} = 1$ se e somente se $\bar{x} = \bar{y}$. O terceiro componente avalia o quão semelhantes são os contrastes das imagens SAR, onde S_x e S_y podem ser vistos como estimativas do contraste em x e y , respectivamente. Seu intervalo de valores também é $[0, 1]$, onde o valor um é alcançado se e somente se $S_x = S_y$. Quanto maior o valor de UIQI, mais propriedades das imagens são preservadas, como: preservação de textura, detecção de bordas e desfoque ausente.

Finalmente, o ENL é utilizado para avaliar a capacidade de redução do ruído *speckle*. Em áreas homogêneas, para dados de intensidade, o ENL é calculado como

$$\text{ENL} = \frac{\mu^2}{\sigma^2} \quad (3.19)$$

em que μ e σ^2 representam respectivamente, a média e variância das intensidades de uma região homogênea da imagem.

Os melhores resultados são atendidos por valores altos do UIQI, ρ e ENL.

Adicionalmente, métodos de avaliação visual também têm sido propostos. Recentemente, Gomez, Ospina e Frery (2017), propuseram uma medida para avaliar a redução do *speckle*

em imagens SAR. Assumindo o modelo multiplicativo, uma imagem observada Z , assim como abordada anteriormente, é o produto de duas variáveis aleatórias e independentes: T (retro-espalhamento) e S (*speckle*). O objetivo de qualquer filtro *speckle* é obter T (não observado), apenas com os dados observados Z . A suposição usual é que $S \sim \Gamma(1, L)$, com média unitária e parâmetro de forma igual ao número de *looks*. Dessa forma, para avaliar a qualidade dos filtros, o *speckle* pode ser representado através da razão entre a imagem referência e filtrada ($S = Z/T$). Um estimador ideal seria aquele para o qual essa razão seja apenas o *speckle*. A imagem razão que tiver comportamento aleatório e não apresentar padrões terá o melhor desempenho.

3.5 DESEMPENHO DO FILTRO Γ -ARMA PARA DADOS SIMULADOS

Nesta seção, o desempenho do filtro Γ -ARMA em imagens simuladas é avaliado, comparativamente ao seu análogo Gaussiano (denotado como G-ARMA) e os filtros *boxcar*, *median*, Γ -MAP, *enhanced Lee* e *Kuan*. Para este fim, precisamos de imagens livres do efeito do *speckle* como estruturas de referência, como empregado em (FRANCESCHETTI; RICCIO, 2002; MARTINO; RICCIO, 2014). Foram adotadas duas imagens de satélite da cidade de San Diego (EUA) com dimensões 512×512 , que podem ser acessadas em (USC, 2021): 01--San Diego (Miramar NAS) e 05--San Diego (North Island NAS). Como apresentado na Equação (3.4), o ruído *speckle* impõe uma natureza multiplicativa para os retornos SAR. De Frery et al. (1997), sabe-se que tal ruído—atuando sobre o sinal de intensidade— segue a distribuição $\Gamma(L, L)$. Então, desejamos suavizar as imagens de *benchmark* multiplicadas por pixels que seguem uma distribuição gama com $L = 1$ e $L = 4$. As Figuras 10a e 12a apresentam as imagens 01 e 05, respectivamente. Por outro lado, as Figuras 10b e 11b exibem as imagens geradas com $L = 1$ e $L = 4$ para a imagem 01, respectivamente, nas quais podem ser observadas uma forte interferência granular que impede a identificação e interpretação de seus detalhes. Para a imagem 05 as Figuras 12b e 13b fornecem as imagens geradas com $L = 1$ e $L = 4$, respectivamente.

Algumas características das imagens podem influenciar os desempenhos dos filtros considerados: presença dos alvos, diferentes tipos de textura, bordas e rugosidade de regiões homogêneas e heterogêneas. Além de avaliar qualitativamente se esses parâmetros são afetados, as medidas UIQI, ρ e ENL—abordadas na seção anterior— são utilizadas para avaliar e comparar os desempenhos dos filtros considerados. As medidas UIQ e ρ quantificam o quanto as imagens suavizadas preservam as características reais da imagem após filtrar o efeito *speckle*, enquanto

que o ENL quantifica a redução do *speckle*.

As Figuras 10 e 11 apresentam as imagens filtradas para imagem 01. Enquanto que, as Figuras 12 e 13 mostram as imagens filtradas para imagem 05. A Tabela 4 mostra os valores das medidas de avaliação de qualidade da imagem associados a cada imagem suavizada. Em geral, os filtros Γ -ARMA têm as melhores performances em termos de preservação de textura (UIQI e ρ), enquanto que o filtro Boxcar tem melhor desempenho em termos da redução de *speckle* (ENL).

As Figuras 11 e 13 fornecem as imagens filtradas para 01 e 05 respectivamente. Elas envolvem a presença de rodovias (bordas), vegetação (homogênea), oceano (homogênea) e cidades (heterogênea). No entanto, o filtro Γ -ARMA tende a fornecer uma menor perda de propriedades (maiores valores para UIQI e ρ). Baseado na Tabela 4, o filtro proposto tem a melhor desempenho em termos de UIQI e ρ , isto é, tende a fornecer menores perdas de propriedades. Em contra partida, o filtro *Boxcar* teve o melhor resultado em termos do índice ENL (exceção do cenário $L = 4$ para a imagem 01), ou seja, maior redução do *speckle*. Vale salientar que o nosso filtro teve o segundo melhor desempenho na redução do *speckle* e melhor desempenho na preservação de texturas (UIQI e ρ). Em geral, os seguintes resultados são válidos para as medidas UIQI e ρ quando $L = 4$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Para Imagem 01 :} \\ \text{UIQI}(\Gamma\text{-ARMA}) > \text{UIQI}(\text{G-ARMA}) > \text{UIQI}(\text{Boxcar}) > \text{UIQI}(\text{Kuan}) \\ > \text{UIQI}(\Gamma\text{-MAP}) > \text{UIQI}(\text{Median}) > \text{UIQI}(\text{Enhanced Lee}), \\ \text{ENL}(\Gamma\text{-ARMA}) > \text{ENL}(\text{Boxcar}) > \text{ENL}(\Gamma\text{-MAP}) > \text{ENL}(\text{G-ARMA}) \\ > \text{ENL}(\text{Median}) > \text{ENL}(\text{Kuan}) > \text{ENL}(\text{Enhanced Lee}). \\ \\ \text{Para Imagem 05 :} \\ \text{UIQI}(\Gamma\text{-ARMA}) > \text{UIQI}(\text{Kuan}) > \text{UIQI}(\text{Median}) > \text{UIQI}(\text{G-ARMA}) \\ > \text{UIQI}(\text{Boxcar}) > \text{UIQI}(\Gamma\text{-MAP}) > \text{UIQI}(\text{Enhanced Lee}), \\ \text{ENL}(\text{Boxcar}) > \text{ENL}(\Gamma\text{-ARMA}) > \text{ENL}(\text{Kuan}) > \text{ENL}(\Gamma\text{-MAP}) \\ > \text{ENL}(\text{G-ARMA}) > \text{ENL}(\text{Median}) > \text{ENL}(\text{Enhanced Lee}). \end{array} \right.$$

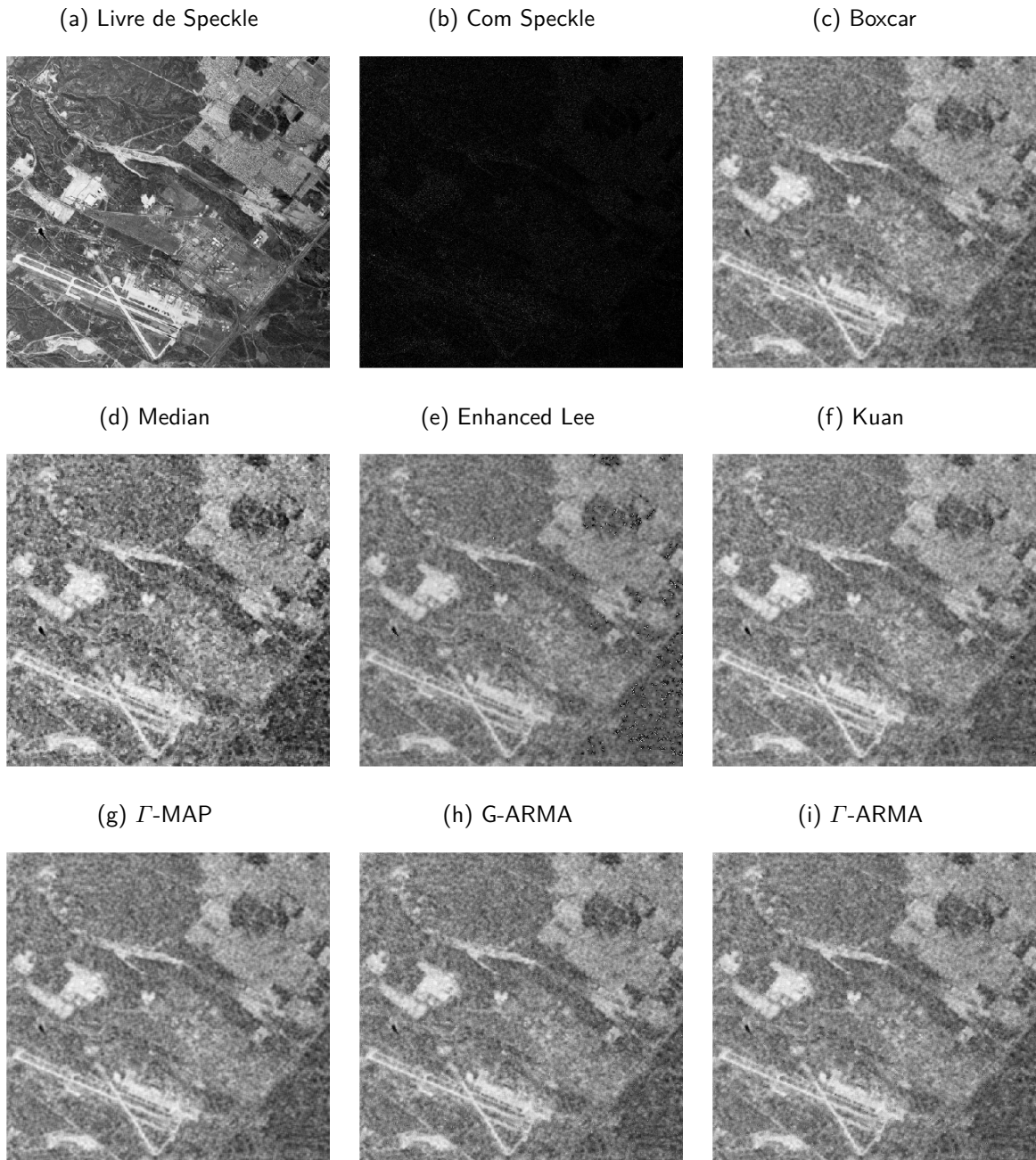
Adicionalmente, fornecemos também a razão de imagem nas Figuras 14 e 14, respectivamente para as imagens 01 e 05. Em geral, todos os filtros não apresentaram um comportamento aleatório na razão entre as imagens livre de *speckle* e filtrada.

Tabela 4 – Medidas de qualidade dos filtros para as imagens 01 e 05 (Janela 5×5). Legenda: valor segundo melhor desempenho e valor primeiro melhor desempenho

Figuras	Filtros	$L = 1$			$L = 4$		
		UIQI	ρ	ENL	UIQI	ρ	ENL
Imagem 01	Boxcar	0,7182	0,7706	23,2499	0,8361	0,8690	10,2985
	Median	0,7115	0,7560	9,3247	0,8283	0,8579	8,3107
	Γ -MAP	0,7185	0,7795	21,2139	0,8359	0,8692	10,1151
	E,Lee	0,7206	0,7809	20,5195	0,7810	0,8066	5,6331
	Kuan	0,7379	0,7803	21,6547	0,8360	0,8690	7,4350
	Γ -ARMA	0,7265	0,7882	22,4086	0,8428	0,8748	11,1389
	G-ARMA	0,7290	0,7904	22,5938	0,8419	0,8732	9,9398
Imagem 05	Boxcar	0,8575	0,9200	19,3705	0,9412	0,9511	10,0208
	Median	0,8595	0,8829	8,5990	0,9446	0,9527	6,0405
	Γ -MAP	0,8576	0,9191	19,2102	0,9411	0,9534	9,0145
	E,Lee	0,8487	0,9061	19,1613	0,8972	0,9007	4,1318
	Kuan	0,8570	0,9192	19,3146	0,9452	0,9571	9,0207
	Γ -ARMA	0,8622	0,9291	19,3389	0,9498	0,9603	9,6361
	G-ARMA	0,8218	0,8629	12,9850	0,9443	0,9431	8,2281

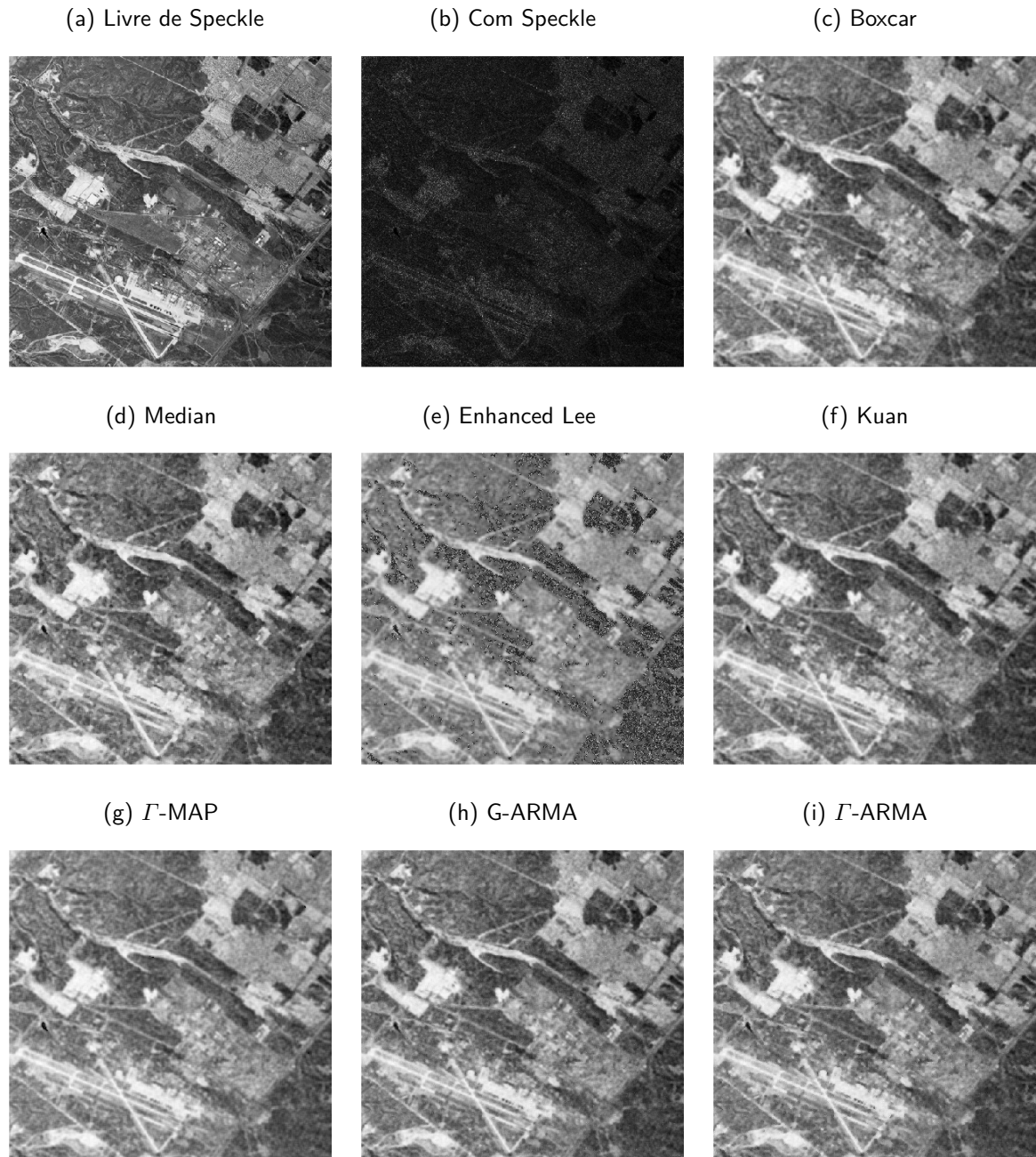
Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 10 – Imagens filtradas de $\theta 1$ ($L = 1$)



Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 11 – Imagens filtradas de $\theta 1$ ($L = 4$)



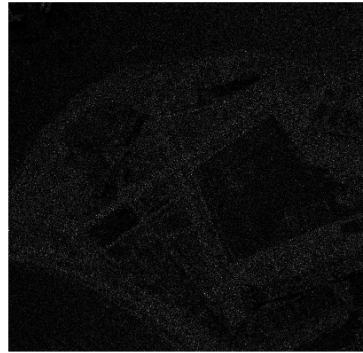
Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 12 – Imagens filtradas de $\emptyset 5$ ($L = 1$)

(a) Livre de Speckle



(b) Com Speckle



(c) Boxcar



(d) Median



(e) Enhanced Lee



(f) Kuan



(g) I -MAP



(h) G-ARMA

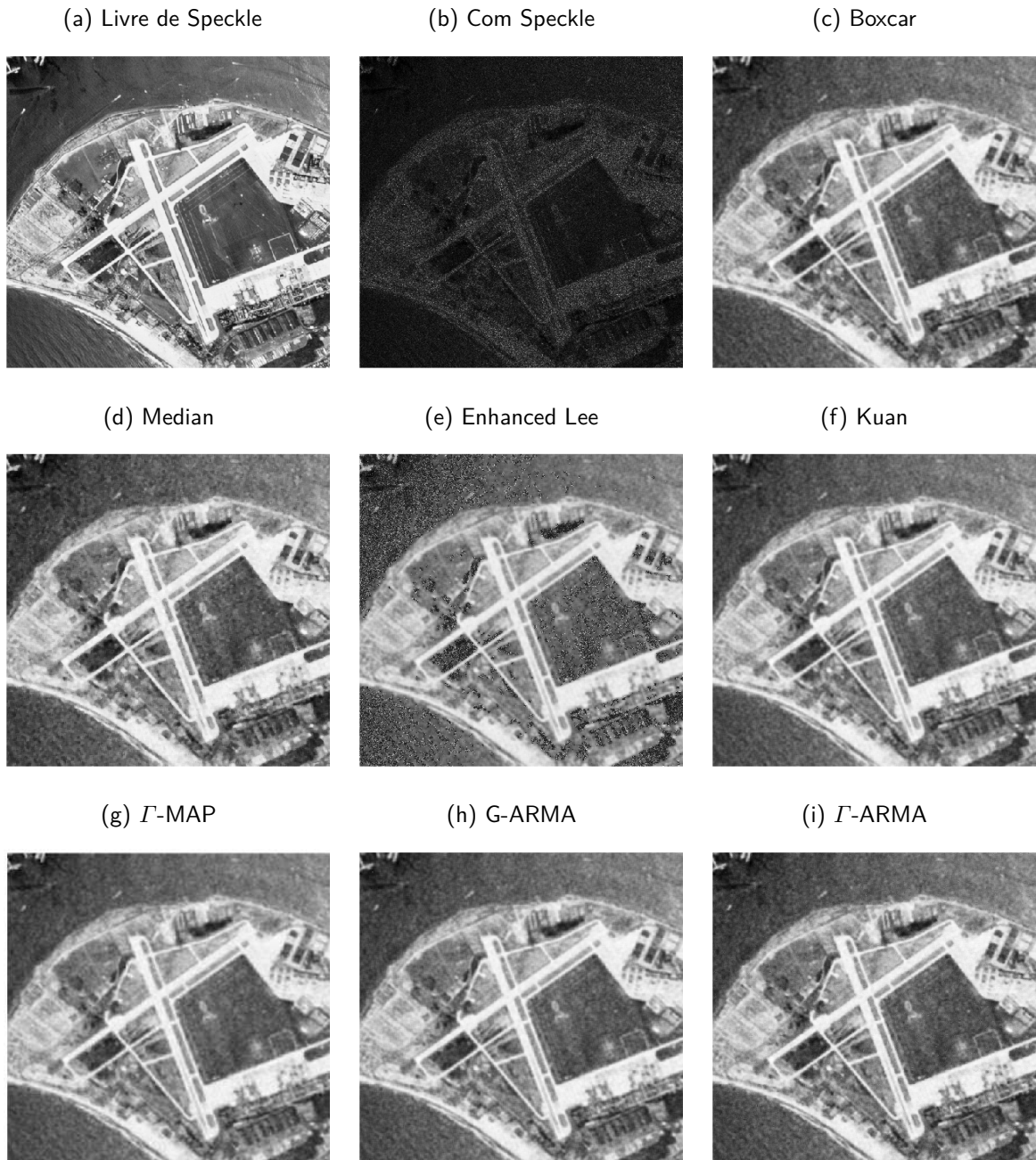


(i) I -ARMA



Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 13 – Imagens filtradas de 05 ($L = 4$)



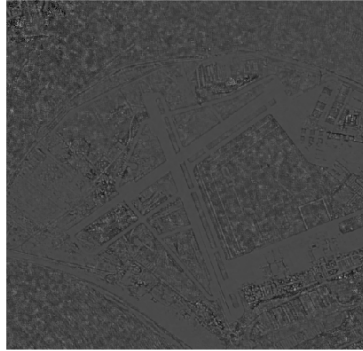
Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 14 – Imagens razão de 05 ($L = 4$)

(a) Boxcar



(b) Median



(c) Enhanced Lee



(d) Kuan



(e) Γ -MAP



(f) G-ARMA



(g) Γ -ARMA



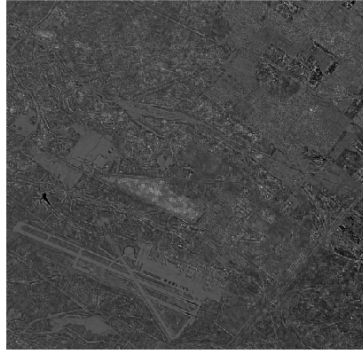
Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 15 – Imagens razão de 01 ($L = 4$)

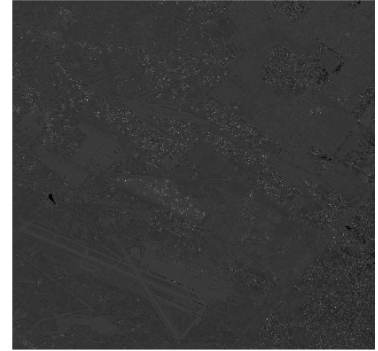
(a) Boxcar



(b) Median



(c) Enhanced Lee



(d) Kuan



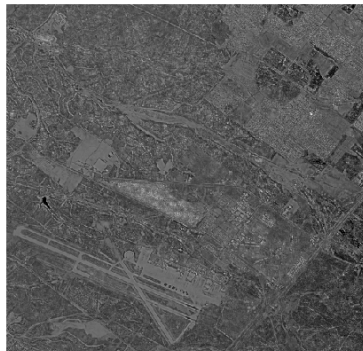
(e) Γ -MAP



(f) G-ARMA



(g) Γ -ARMA



Fonte: Autoria própria (2021)

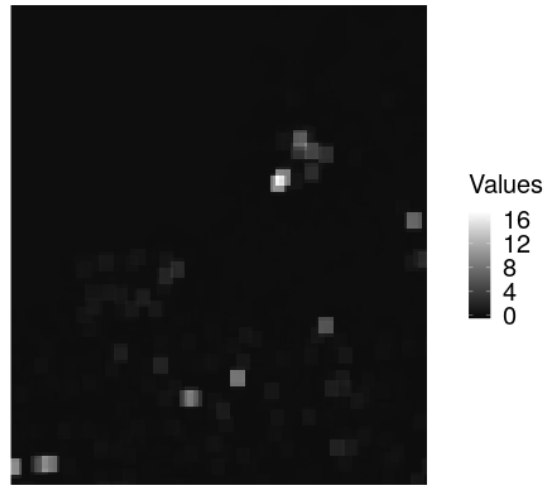
3.6 APLICAÇÃO EM DADOS REAIS SAR

Neste ponto, estamos em posição de avaliar o desempenho do filtro proposto em três imagens SAR diferentes nas Figuras 17a, 18a e 19a, consistindo nas regiões de São Francisco, Foulum e Munique, respectivamente. Seu desempenho também é comparado com os de outros seis filtros: *boxcar*, *median*, Γ -MAP, *enhanced Lee*, *Kuan* e G-ARMA. Adotamos as três medidas de qualidade descritas anteriormente (UIQI, ρ e ENL) para orientar a identificação do melhor filtro. Adicionalmente, também utilizamos a razão entre as imagens ruidosa e filtrada como medida de avaliação gráfica (GOMEZ; OSPINA; FRERY, 2017). Usando o canal de polarização HH (cada canal é um conjunto de valores reais, esses valores são mapeados em, por exemplo, tons de cinza), a Figura 17a exibe uma imagem SAR 150×150 da baía de São Francisco (EUA), capturada pelo sensor AIRSAR com ENL $L = 4$. Apesar de fortemente corrompido pelo *speckle*, esta imagem revela três regiões bem definidas: oceano (homogêneo), floresta (moderadamente heterogêneo) e urbano (altamente heterogêneo). A Figura 18a fornece uma imagem SAR com dimensões 406×360 (da perspectiva do canal HH) de uma região agrícola de Foulum (Holanda), obtido através do sensor EMISAR sob $L = 8$. É composto por quinze terrenos, incluindo edifícios, plantas, beterraba, feijão, ervilha, floresta, batata, solo exposto, erva, cevada e três tipos de trigo. A Figura 19a mostra uma imagem SAR 542×349 de Munique (Alemanha), extraída pelo sensor E-SAR em $L = 3$. Esta última imagem é caracterizada pela presença de plantações, bordas, estradas e áreas urbanas.

Agora estamos em posição de discutir a filtragem de sinais SAR com *speckle*. As Figuras 17b–17h fornecem resultados de suavização para a imagem AIRSAR de São Francisco. A partir de uma inspeção visual, os filtros *boxcar*, *median*, *enhanced Lee* e *Kuan* obtêm os piores resultados, uma vez que as propriedades do relevo são muito afetadas (por exemplo, a densidade de pontos de alto retorno em alvos urbanos é perceptivelmente distorcida). Para esta imagem, o filtro Γ -MAP apresenta dificuldades em algumas regiões com bordas. Para explorar mais causas do problema, a Figura 16 apresenta a estimativa da variância *a priori* do sinal $X(i, j)$, $\text{Var}(X(i, j))$. Observe que existem grandes variabilidades nas regiões nas quais as inconsistências na Figura 17f acontecem. É conhecido que regiões com grandes valores de $\text{Var}(X(i, j))$ podem levar à altos retornos nas imagens filtradas (LEE et al., 1994).

A Figura 17g aproxima a imagem suavizada pelo filtro G-ARMA. Este último filtro tem desempenho melhor do que os três anteriores, mas seu desempenho é pior do que o Γ -ARMA. Nosso filtro parece preservar as propriedades do relevo de forma mais eficaz, como mostrado

Figura 16 – Variância a priori do sinal $X(i, j)$ para Γ -MAP



Fonte: Autoria própria (2020)

na Figura 17h. Os sinais suavizados nas Figuras 23–25 confirmam a melhor adequação do nosso filtro aos picos de intensidades. Agora considere uma avaliação quantitativa dos filtros usados. A Tabela 5 exibe os valores das figuras de mérito para as imagens de São Francisco, Foulum e Munique em janelas 5×5 . Para a imagem de São Francisco, o filtro Γ -ARMA tem desempenho melhor do que os demais suavizadores em relação a preservação de texturas (UIQI e ρ), seguido por sua versão Gaussiana. Entretanto, quando avaliamos a redução do *speckle* através da medida ENL, o filtro Boxcar tem o melhor desempenho, mas nota-se grande perda de propriedades para este filtro. Adicionalmente, a Figura 20 apresenta a razão entre a imagens ruidosa e filtrada para cada filtro. O filtro G-ARMA fornece o melhor resultado visual, superando os outros filtros: áreas homogêneas são notavelmente mais homogêneas.

As Figuras 18b–18h apresentam as imagens filtradas de Foulum. Os filtros *boxcar* e *median* tiveram desempenho inferior aos filtros G-ARMA, Γ -ARMA e Γ -MAP em termos de preservação de texturas. Quando avaliamos a capacidade de redução do *speckle*, o filtro Boxcar tem o melhor desempenho em relação a todos os outros filtros. Porém, é notável perda de qualidade da imagem. A Tabela 5 mostra os valores das medidas de qualidade dos filtros aplicados na imagem Foulum. Em geral, o filtro Γ -ARMA fornece as melhores imagens suavizadas. Contudo, em alguns casos, ambos os filtros G-ARMA e Γ -ARMA têm desempenho equivalente. Isso pode ser justificado, pois a imagem Foulum é a mais homogênea e a distribuição $\Gamma(L, L)$ aproxima-se da Gaussiana para valores grandes de L . Em relação aos filtros clássicos, o Γ -MAP

é melhor que os filtros *boxcar* e *median*. Para o canal HV, esses três apresentam desempenhos semelhantes. A Figura 21 apresenta a razão entre a imagens ruidosa e filtrada para cada filtro. Em geral, os filtros não apresentam diferenças significativas, as áreas homogêneas destacam-se em todos os filtros.

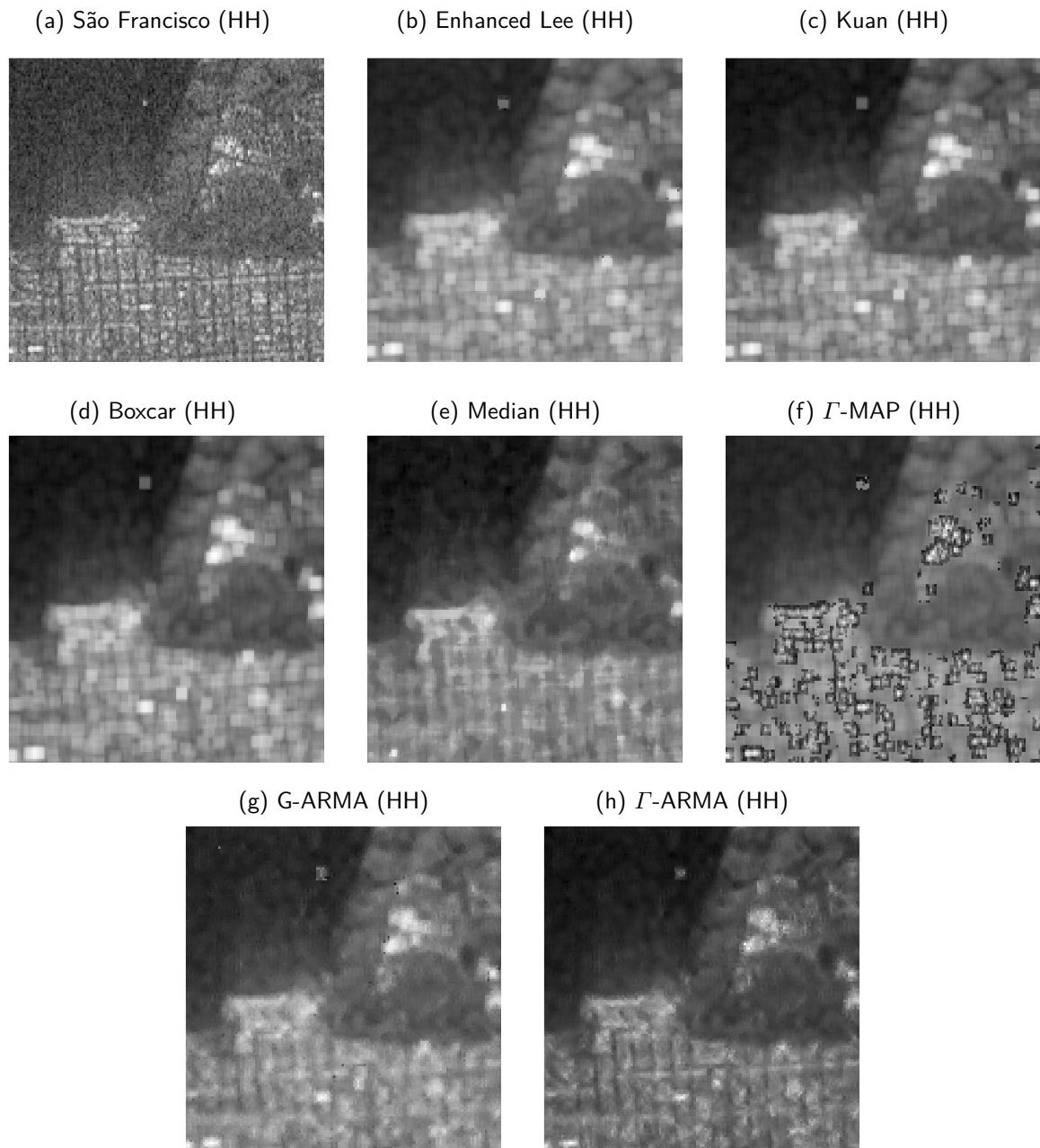
As Figuras 19b–19h apresentam os resultados das filtragem para a imagem E-SAR Munique. Os métodos de suavização baseados na estrutura ARMA fornecem os melhores resultados por inspeção visual, comparativamente aos filtros *boxcar*, *median* e Γ -MAP. A Tabela 5 apresenta os valores das medidas de qualidade. Para todos os canais, o filtro Γ -ARMA também obtém o melhor desempenho para preservação de texturas; isto é, apresenta os maiores valores para UIQI e ρ . Entretanto, em termos da redução do *speckle* o filtro Boxcar tem o melhor resultado, seguido por nosso filtro Γ -ARMA. Adicionalmente, a Figura 21 apresenta a razão entre a imagens ruidosa e filtrada para cada filtro. Os filtros em geral apresentam comportamento aleatório. Sendo assim, através dessa medida é difícil identificar qual melhor desempenho.

Tabela 5 – Medidas de qualidade dos filtros para as imagens São Francisco, Foulum e Munique (Janela 5×5). Legenda: valor segundo melhor desempenho e valor primeiro melhor desempenho

Canais	Filtros	Munique			Foulum			São Francisco		
		UIQI	ρ	ENL	UIQI	ρ	ENL	UIQI	ρ	ENL
VV	Boxcar	0,4043	0,5414	14,3381	0,7852	0,8141	193,1740	0,4283	0,5405	55,7541
	Median	0,1822	0,4412	13,1974	0,7315	0,7768	101,1527	0,1940	0,4939	32,5626
	Γ -MAP	0,2217	0,7696	1,4918	0,8125	0,8499	93,1141	0,4072	0,7782	47,6531
	E.Lee	0,4056	0,5463	2,4986	0,8310	0,8551	91,2645	0,4322	0,5453	49,1127
	Kuan	0,4866	0,6454	6,3189	0,9149	0,9329	79,2789	0,5255	0,6574	31,6705
	Γ -ARMA	0,6661	0,7952	12,1262	0,9354	0,9515	88,7559	0,7413	0,7929	40,9798
	G-ARMA	0,6253	0,7857	11,1372	0,8912	0,9106	80,6135	0,6144	0,7321	41,2482
HV	Boxcar	0,3554	0,4934	11,8511	0,9355	0,9401	247,7220	0,4330	0,5472	103,9989
	Median	0,1270	0,3271	8,0130	0,9354	0,9442	159,4259	0,1985	0,4735	84,2658
	Γ -MAP	0,2206	0,7845	1,3959	0,9359	0,9404	147,4130	0,4524	0,7047	90,1989
	E.Lee	0,3555	0,4936	2,4395	0,9362	0,9407	167,7231	0,4656	0,5759	102,9989
	Kuan	0,3668	0,5120	6,7225	0,9391	0,9436	179,2281	0,5652	0,7007	32,8282
	Γ -ARMA	0,5659	0,6134	9,0715	0,9703	0,9730	195,2517	0,7208	0,7731	43,8316
	G-ARMA	0,5530	0,7676	8,7385	0,9702	0,9722	173,2115	0,6111	0,7328	47,9768
HH	Boxcar	0,4179	0,5463	10,7691	0,6507	0,7116	370,0234	0,4216	0,5429	49,8685
	Median	0,1838	0,4371	9,4513	0,5271	0,6232	152,6837	0,1734	0,4917	29,4028
	Γ -MAP	0,2221	0,8016	1,4216	0,7123	0,8038	169,0191	0,3837	0,8608	37,1665
	E.Lee	0,4182	0,5471	2,4233	0,6703	0,7403	160,1214	0,4221	0,5442	24,8135
	Kuan	0,4584	0,5988	5,5954	0,8092	0,8671	113,0689	0,4658	0,5989	28,8540
	Γ -ARMA	0,7184	0,8276	9,9622	0,9283	0,9522	187,5785	0,7318	0,7627	38,7258
	G-ARMA	0,6301	0,7813	9,8383	0,8193	0,8698	186,9488	0,5741	0,7075	42,9982

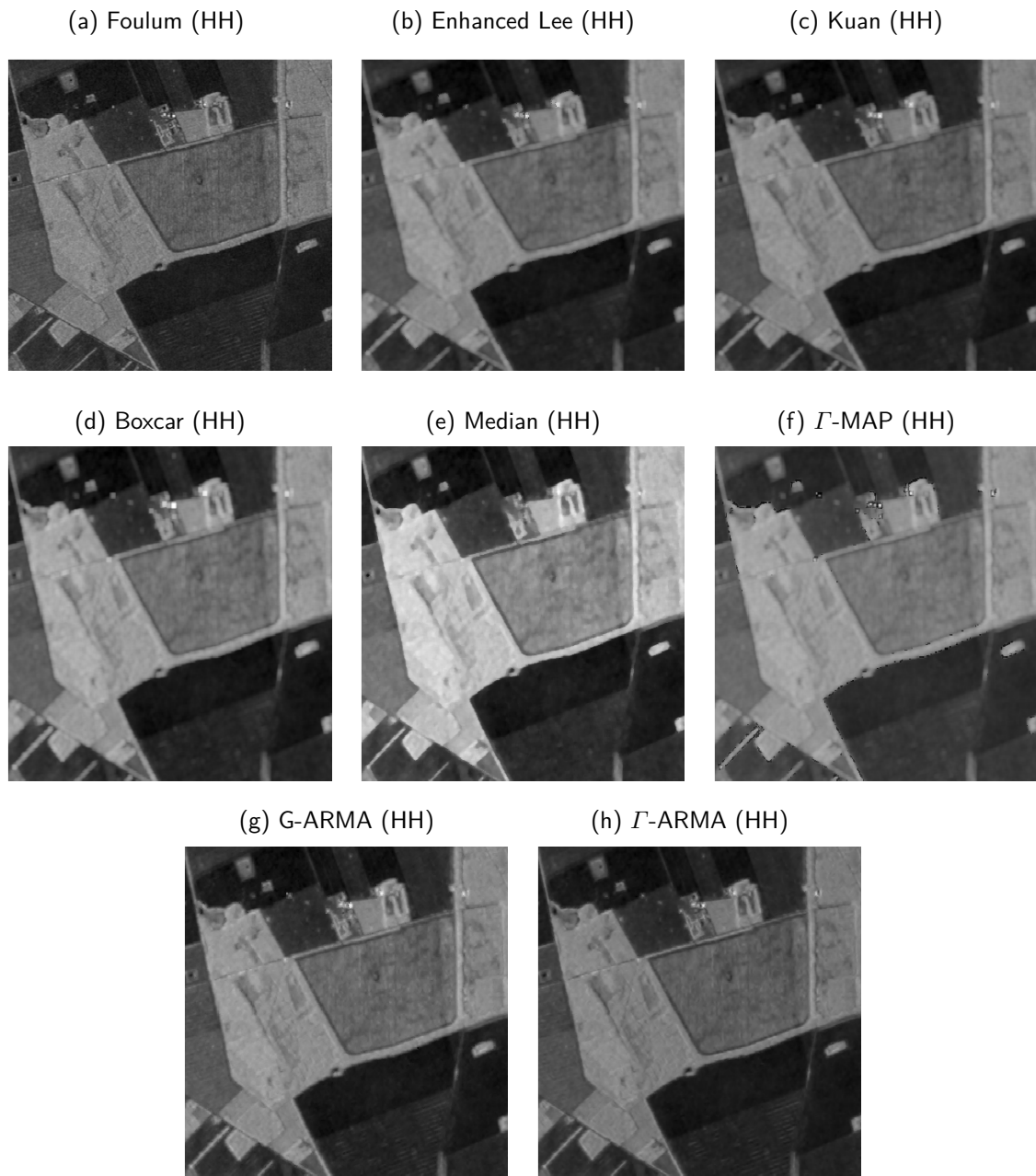
Fonte: Autoria própria (2020)

Figura 17 – Imagens SAR filtradas e reais para São Francisco



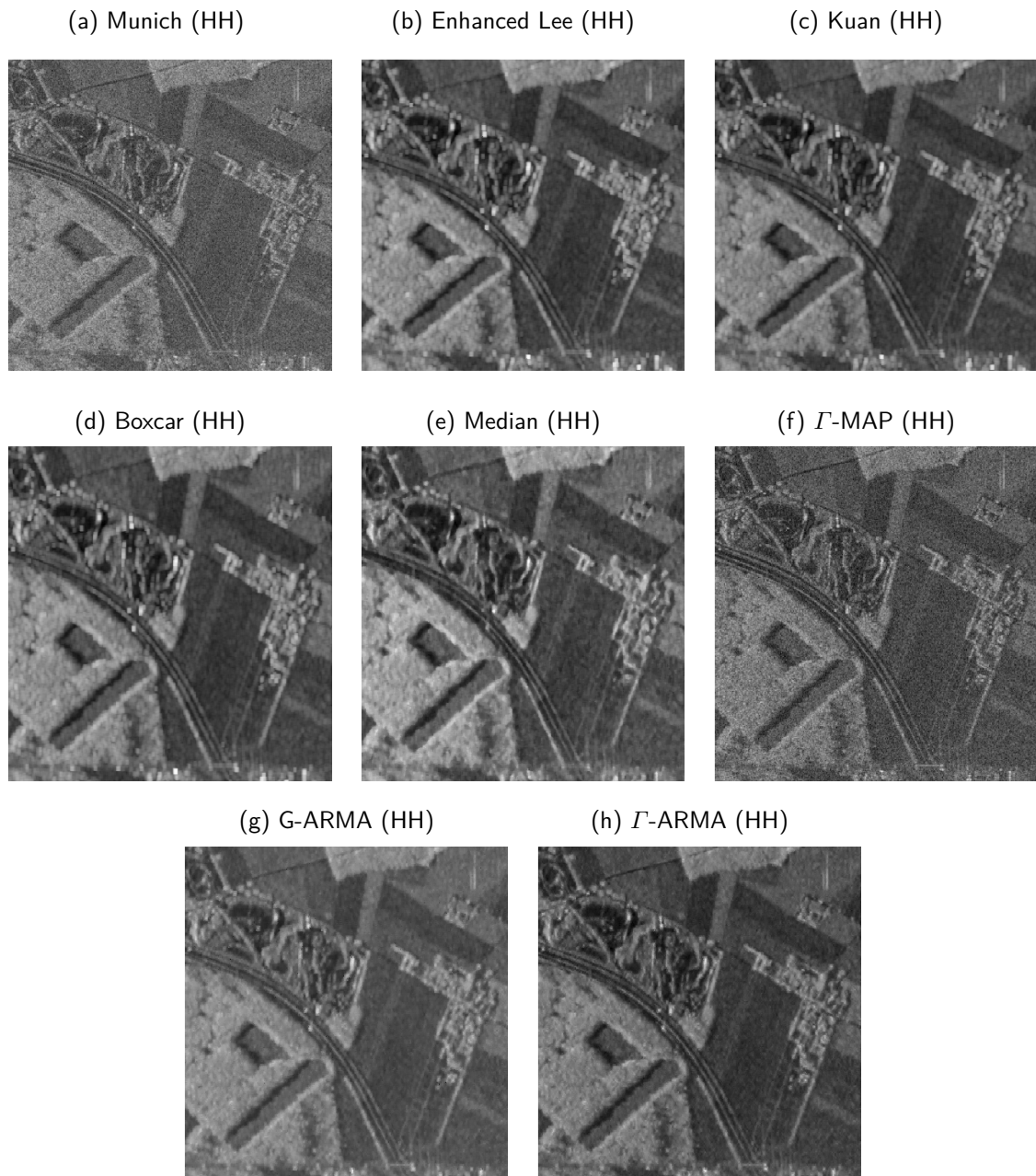
Fonte: Autoria própria (2020)

Figura 18 – Imagens SAR filtradas e reais para Foulum



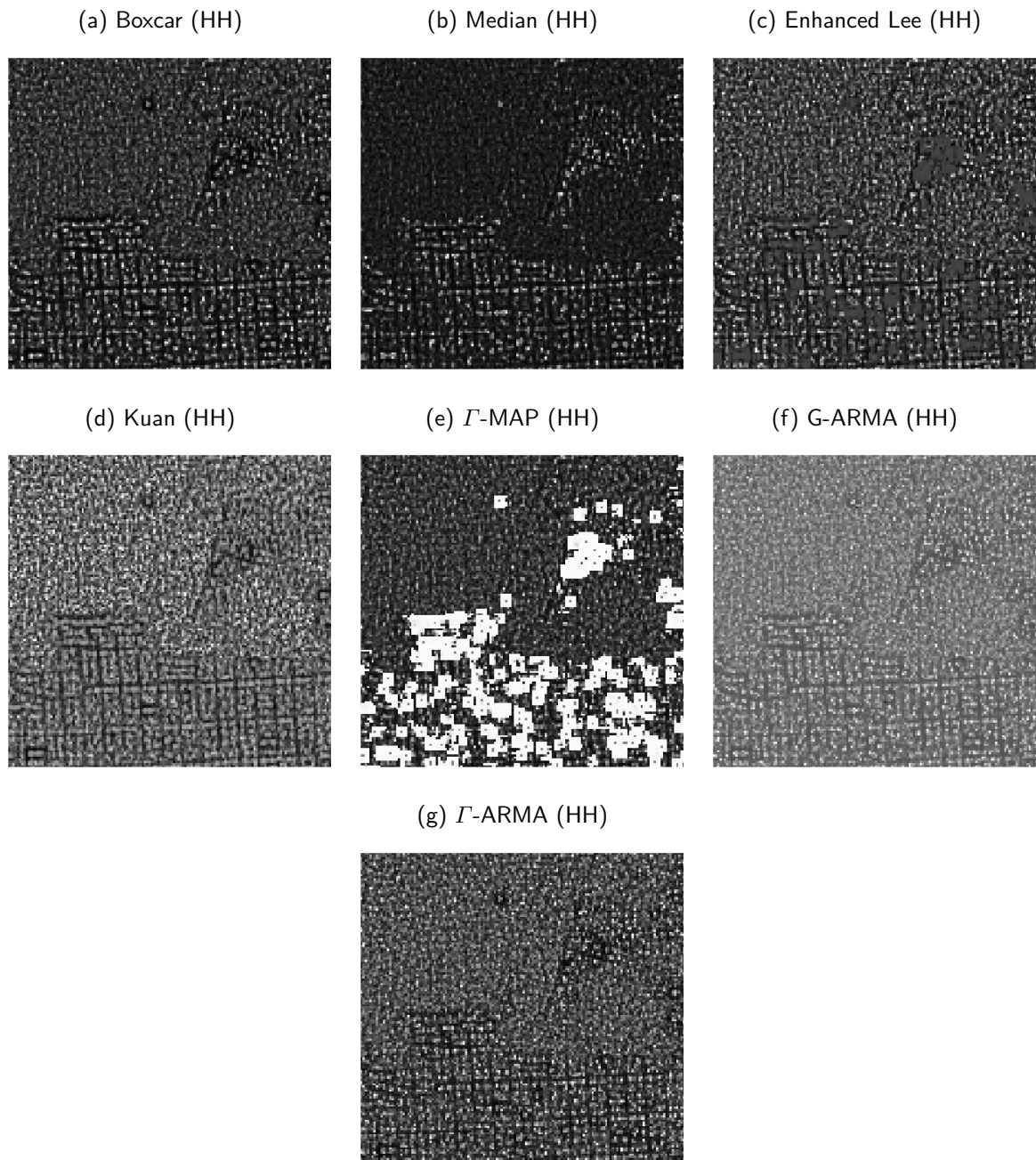
Fonte: Autoria própria (2020)

Figura 19 – Imagens SAR filtradas e reais para Munique



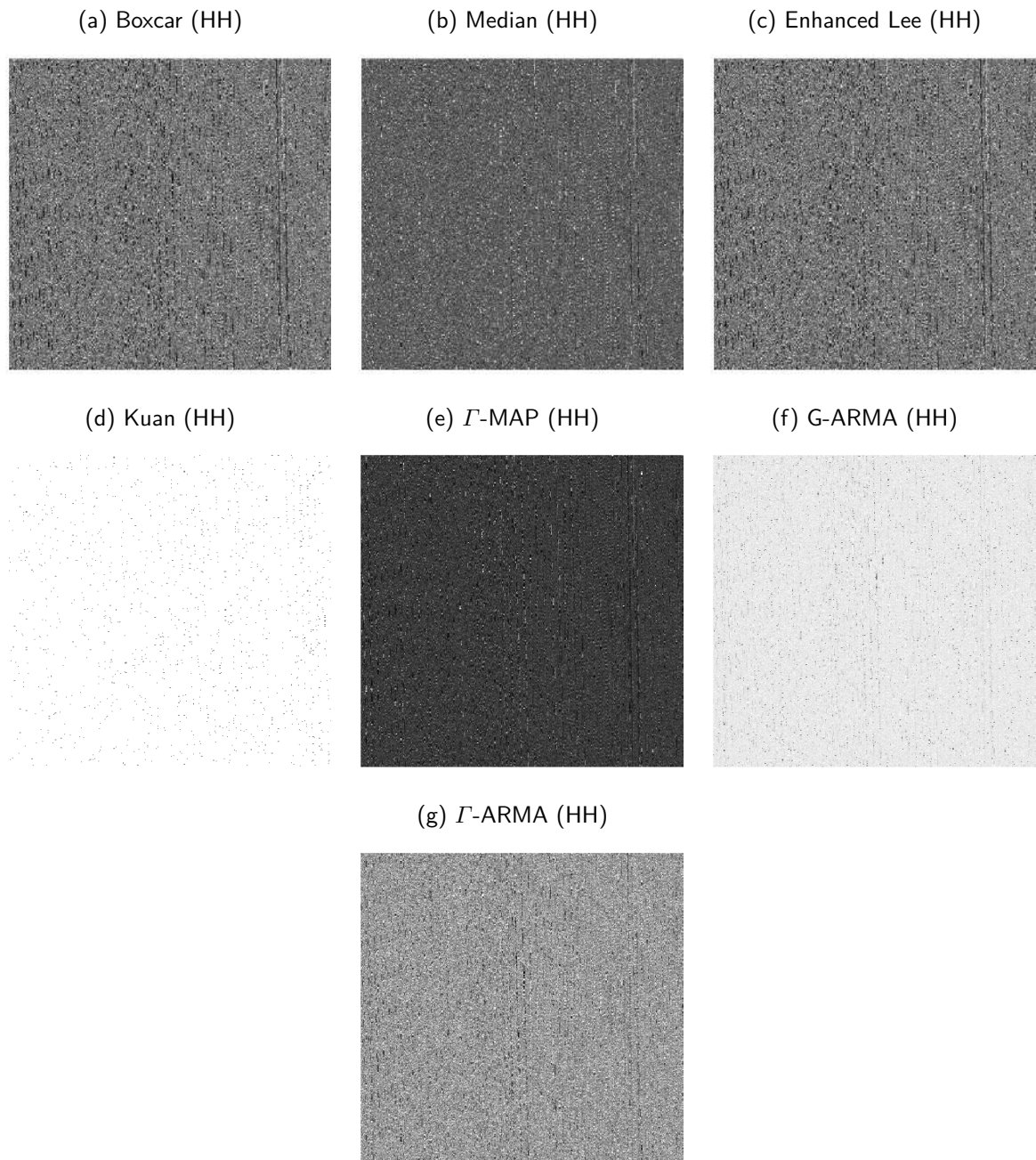
Fonte: Autoria própria (2020)

Figura 20 – Imagens razão para Sao Francisco



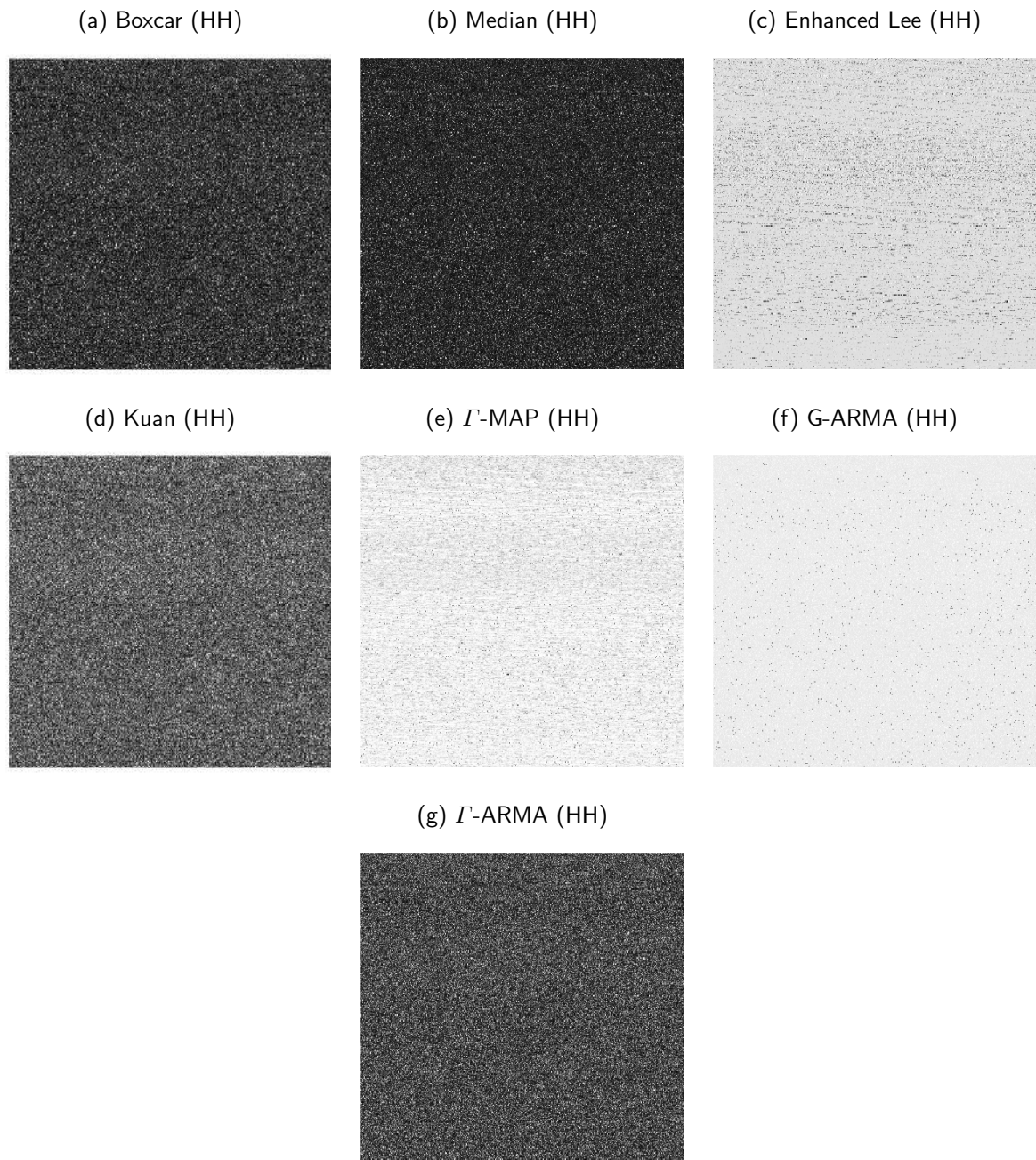
Fonte: Autoria própria (2020)

Figura 21 – Imagens razão para Foulum



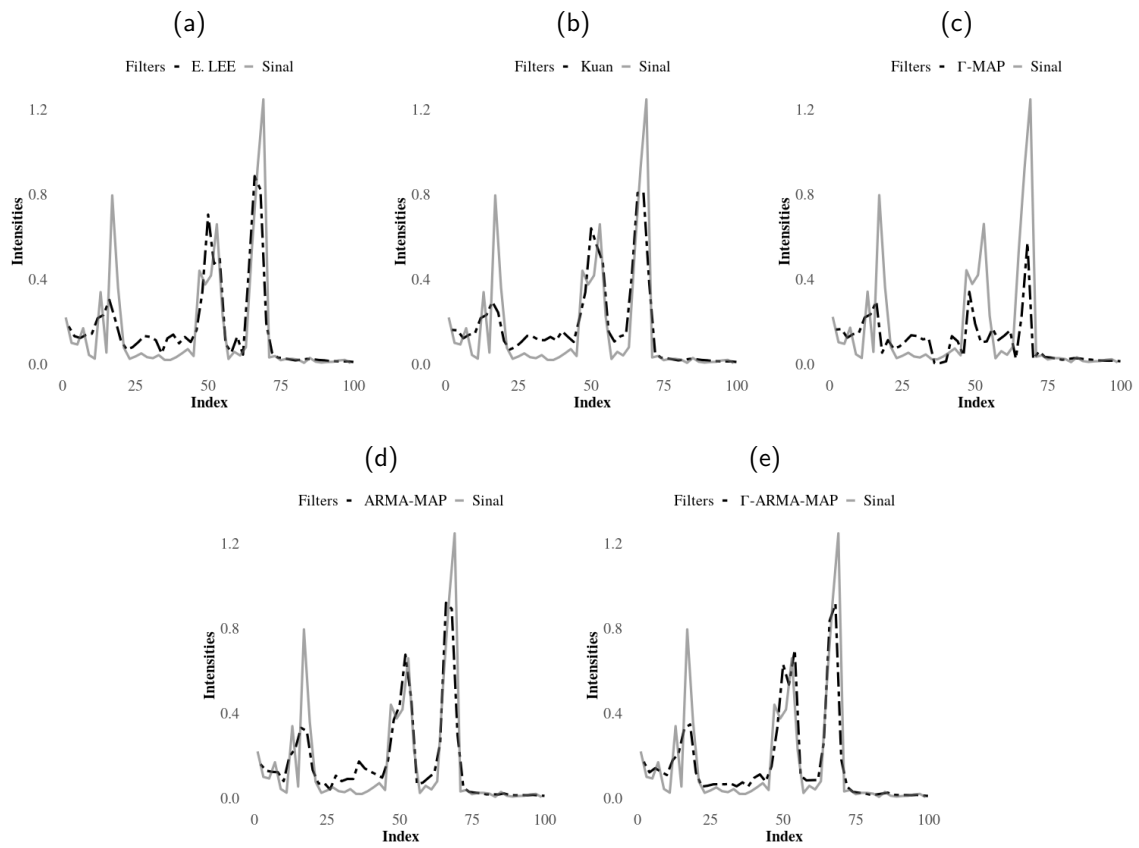
Fonte: Autoria própria (2020)

Figura 22 – Imagens razão para Munique



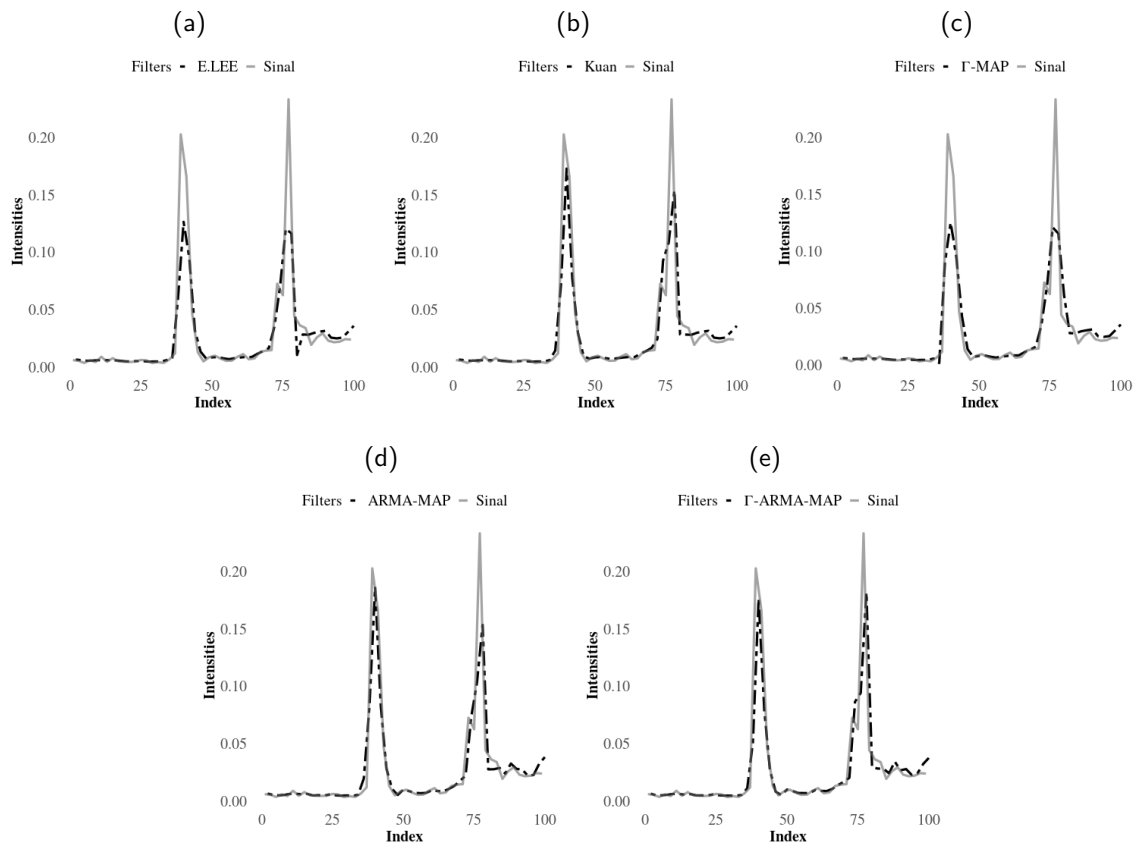
Fonte: Autoria própria(2020)

Figura 23 – Sinais suavizados para imagem de São Francisco. (a) Sinal suavizado por Enhanced Lee , (b) Sinal suavizado por Kuan , (c) Sinal suavizado por Γ -MAP , (d) Sinal suavizado por G-ARMA e (e) Sinal suavizado por Γ -ARMA.



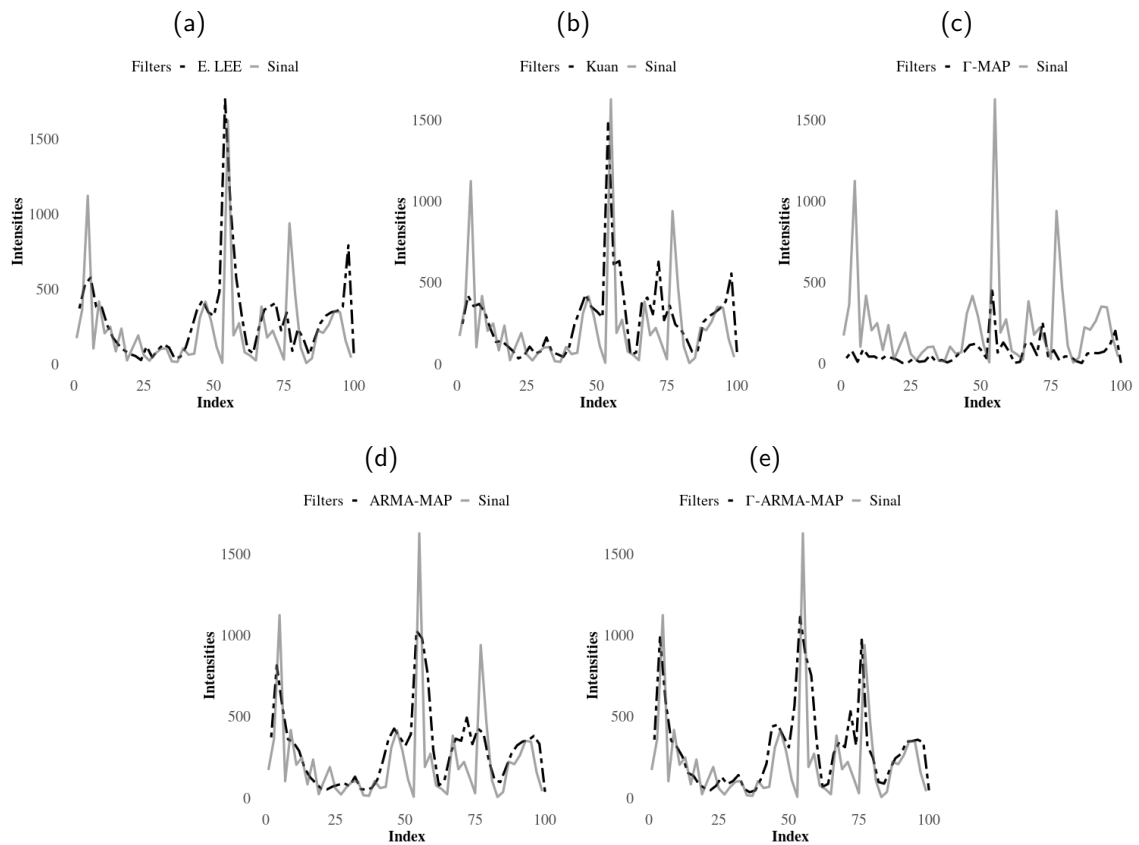
Fonte: Autoria própria (2020)

Figura 24 – Sinais suavizados para imagem de Foulum. (a) Sinal suavizado por Enhanced Lee , (b) Sinal suavizado por Kuan , (c) Sinal suavizado por Γ -MAP , (d) Sinal suavizado por G-ARMA e (e) Sinal suavizado por Γ -ARMA.



Fonte: Autoria própria (2020)

Figura 25 – Sinais suavizados para imagem de Munique (linha e colunas xxxx). (a) Sinal suavizado por Enhanced Lee , (b) Sinal suavizado por Kuan , (c) Sinal suavizado por Γ -MAP , (d) Sinal suavizado por G-ARMA e (e) Sinal suavizado por Γ -ARMA.



Fonte: Autoria própria (2020)

3.7 TEMPO DE EXECUÇÃO

Neste trabalho, foram utilizadas estações do Galileo para avaliar o tempo de execução dos algoritmos (LABS, 2020). Galileo é um *hub* para modelagem, simulações e análise de dados que funciona como um portal rápido para recursos em nuvem. O aplicativo otimiza a infraestrutura de computação.

Nos últimos anos, a programação paralela foi exigida na computação científica de alto desempenho. Para usar computação paralela ou sistemas de *cluster*, os cálculos a serem executados devem ser particionados em várias partes que são atribuídas aos recursos paralelos para execução (RAUBER; RÜNGER, 2010). Desta forma, várias tarefas podem ser realizadas simultaneamente.

Na Tabela 6, apresenta-se o tempo de execução dos algoritmos implementados no R para cada método, considerando a imagem SAR de São Francisco. Variou-se o número de *cores* da máquina para avaliar a redução do tempo de execução para nossas propostas. Os métodos propostos possuem um tempo de execução superior aos existentes na literatura. No entanto, com o uso de computação paralela, o tempo de execução pode ser reduzido consideravelmente. Por exemplo, quando não utilizamos tarefas paralelas (*cores* = 1), o tempo de execução é em torno de 90 min, enquanto que o tempo de execução cai para 5 min ao usar computação paralela com 32 núcleos.

O filtro *boxcar* foi o mais eficiente em termos do tempo de execução, enquanto o filtro I -ARMA teve o pior desempenho. Embora nosso filtro seja bastante custoso em termos de tempo de execução, melhorias podem ser propostas em trabalhos futuros para diminuir o tempo de processamento. Tais como, (i) identificar no código implementado fatores que influenciam no alto tempo de execução, (ii) implementação de algoritmos rápidos (MCLEOD; ZHANG, 2008) e (iii) programação em GPUs (MATLOFF, 2020). Além disso, apesar de ser bastante custoso em termos do tempo de execução, nosso filtro possui uma vantagem sobre os demais filtros. Não somente é capaz de filtrar o *speckle*, mas é possível também gerar mapas dos parâmetros estimados pelo filtro, que podem ser usados como entrada em problemas de segmentação, detecção de mudança e classificação.

Tabela 6 – Tempo de execução para diferentes técnicas de despeckling

Filtros	Tempo de execução	
	Segundos	Minutos
Boxcar	0,907	0,015
Median	5,453	0,091
GMAP	13,933	0,232
Enhanced Lee	5,501	0,092
Kuan	4,904	0,082
G-ARMA (cores = 1)	3281,082	54,685
G-ARMA (cores = 8)	436,874	7,281
G-ARMA (cores = 16)	256,278	4,271
G-ARMA (cores = 32)	193,531	3,226
Γ -ARMA (cores = 1)	5392,231	89,871
Γ -ARMA (cores = 8)	696,776	11,613
Γ -ARMA (cores = 16)	408,619	6,810
Γ -ARMA (cores = 32)	305,652	5,094

Fonte: Autoria própria (2020)

3.8 CONCLUSÃO

Neste capítulo, foram introduzidos e justificadas (sob uma perspectiva física) uma nova modelagem espacial e um filtro para imagens SAR, por meio do processo Γ -ARMA. Algumas propriedades matemáticas desta modelagem foram discutidas bem como uma relação da filtragem proposta com o método Γ -MAP. O desempenho do novo filtro foi quantificado em imagens simuladas, geradas a partir de sinais de satélite. Os resultados indicaram que o filtro Γ -ARMA pode superar a versão Gaussiana e os filtros Γ -MAP, *boxcar*, *median*, *enhanced Lee* e *Kuan*. O novo filtro foi utilizado para extrair sinais espaciais sobre as imagens SAR de São Francisco, Foulum e Munique. Os resultados favoreceram nosso filtro comparativamente aos demais, principalmente ao usar a medida UIQI.

Uma desvantagem do método proposto é seu alto custo computacional devido ao processo de estimação. Trabalhos futuros de complexidade computacional terão como objetivo estudar procedimentos de estimativa rápida para o filtro Γ -ARMA como discutido em (MCLEOD; ZHANG, 2008).

4 NOVO ESTIMADOR PARA O ENL BASEADO NO RESÍDUO DE PEARSON DO MODELO Γ -ARMA

4.1 ESTADO DA ARTE E PROPOSTA

O ENL é um parâmetro importante em imagens SAR. Ele indica o nível de interferência do ruído *speckle* nas imagens SAR, valores pequenos do ENL representam um nível mais alto de ruído *speckle* (quando estimado, geralmente os menores valores ocorrem em cenas com texturas mais pronunciadas, como em regiões urbanas e florestas densas) (LEE; POTTIER, 2009). No processo de captura de dados SAR, o processamento *multilook* é executado visando estabelecer um parâmetro de controle sobre o efeito do ruído *speckle* inerente aos sistemas SAR (OLIVER; QUEGAN, 2004).

Diversas aplicações de sensoriamento remoto por meio de SAR consideram a estimação do L (ENL). Da discussão feita no Capítulo 2, vê-se que este parâmetro está explícito na distribuição que é associada ao *speckle* na abordagem por MM. Dentre essas aplicações, temos: redução do *speckle* (LEE et al., 2009; LEE et al., 2015), detecção de mudança (LIU et al., 2014; NASCIMENTO; CINTRA; FRERY, 2018), detecção de bordas (NASCIMENTO et al., 2014) e classificação (FRERY; CORREIA; FREITAS, 2007; DOULGERIS; ANFENSEN; ELTOFT, 2008; DOULGERIS, 2015). Além disso, o indicador ENL pode ser usado para avaliar o nível de homogeneidade de determinada região (LOPES; TOUZI; NEZRY, 1990; SHEN et al., 2020b).

Diferentes métodos para estimação de L têm sido apresentados na literatura (ANFENSEN; DOULGERIS; ELTOFT, 2009). O método de máxima verossimilhança (MV) é frequentemente utilizado, devido principalmente às suas propriedades assintóticas, como consistência, eficiência e normalidade (CASELLA; BERGER, 2002). Outros métodos de estimação também são considerados, tais como o método dos momentos, que tem como vantagem o custo computacional e maior robustez (GIERULL; SIKANETA, 2002) e log-cumulante (ACHIM; KURUOGLU; ZERUBIA, 2006; GRECO; GINI, 2007).

Para dados monopolarizados, uma área homogênea é normalmente selecionada manualmente das imagens originais antes da estimativa para o L , onde as suposições do *speckle* são totalmente desenvolvidas (LEE; POTTIER, 2009). O ENL costuma ser baseado em medidas estatísticas para intensidades SAR. nas estatísticas das intensidades SAR, dois estimadores utilizados frequentemente são o coeficiente de variância (CoV) (OLIVER; QUEGAN, 2004) e o momento fracionário (FM) (FRERY; CORREIA; FREITAS, 2007). Cui et al. (2011) e Ren et al.

(2015) utilizaram a transformação logarítmica para estimar o ENL. Entretanto, os métodos citados desconsideram a correlação espacial entre os *pixels* vizinhos. Pretendemos avançar em uma proposta que considera um tipo de correção com estrutura ARMA.

Vários trabalhos têm avançado no contexto polarimétricos. Anfinzen, Doulgeris e Eltoft (2009) propuseram um estimador para o ENL utilizando a distribuição Wishart complexa escalonada. Doulgeris, Anfinzen e Eltoft (2011) propuseram um estimador para ENL baseado na expressão log-cumulante de primeira ordem (FOL), Nascimento, Frery e Cintra (2014b) corrigiram o estimador para o ENL proposto por Anfinzen, Doulgeris e Eltoft (2009) pela fórmula de Cox-Sell e por verossimilhança perfilada modificada. Tao et al. (2014) propuseram um estimador para o ENL invariante de textura aplicado a qualquer modelo de produto, chamado de desenvolvimento momentos de traço (DTM). Mais recentemente, com base no estimador de momento traço tradicional para dados SAR polarimétricos, Shen et al. (2020a) introduziram novos estimadores para o ENL incorporando suas características temporais. Entretanto, vale enfatizar que nossa proposta é no campo monopolarizado, podendo ser futuramente estendida para o caso polarimétrico.

Em problemas de séries temporais seguindo a abordagem de regressão, procedimentos para explorar e testar a adequacidade e bondade dos ajustes nos modelos são importantes ferramentas para determinar a qualidade dos ajustes (KEDEM; FOKIANOS, 2002)[p. 23]. Não somente são capazes de determinar se os modelos estão bem ajustados, mas também podem fornecer um estimador consistente para o parâmetro de precisão no contexto dos modelos GARMA. Baseando-se nestes resultados adaptado ao contexto da formação de imagens SAR (como discutido no Capítulo 2), propomos um novo estimador ENL baseado no resíduo de *Pearson*. O novo estimador leva em conta uma estrutura de correlação ARMA entre *pixels* vizinhos. O estimador proposto é aplicado a dados reais e seu desempenho é quantificado e comparado com outros três através das medidas de avaliação: média, mediana, MSE, MAE e coeficiente de variação (CV).

Este capítulo é dividido da seguinte maneira. Alguns estimadores da literatura são apresentados na Seção 4.2. Na Seção 4.3, o novo estimador para o ENL é introduzido bem como algumas de suas propriedades matemáticas. Estudos de comparação em uma imagem SAR real são realizados na Seção 4.4. Conclusões parciais são elencadas na Seção 4.5.

4.2 ESTIMADORES PARA O ENL EM DADOS SAR

4.2.1 Coeficiente de variação (CoV)

A abordagem tradicional para estimar o ENL em dados SAR monopolarizados se inicia por seleccionar manualmente uma região homogênea da imagem. Assumindo que a intensidade, diga-se I , segue uma distribuição $\Gamma(\mu, L)$ com densidade dada por

$$f_I(I; \mu, L) = \frac{1}{\Gamma(L)} \left(\frac{L}{\mu}\right)^L I^{L-1} \exp(-LI/\mu) \mathbb{I}_{(0, \infty)}(I), \quad (4.1)$$

intensidade média μ e o número de *looks* L ou, equivalentemente, como parâmetros de forma e escala dados por L e L/μ , respectivamente. O m -ésimo momento de I é dado por

$$\mathbb{E}(I^m) = \frac{\Gamma(L+m)}{\Gamma(L)} \left(\frac{\mu}{L}\right)^m, \quad (4.2)$$

assumindo que os dados não são correlacionados. Especifica-se que $\mathbb{E}(I) = \mu$ e $\text{Var}(I) = \mu^2/L$. Então, o coeficiente de variação (CoV), $L^{(CoV)}$, é dado por

$$L^{(CoV)} = \frac{[\mathbb{E}(I)]^2}{\text{Var}(I)}. \quad (4.3)$$

Para $I_1, \dots, I_n$ como uma amostra n -dimensional de intensidades extraída de um trecho homogêneo, o estimador tradicional para o ENL, $\hat{L}^{(CoV)}$, é dado por

$$\hat{L}^{(CoV)} = \frac{\bar{I}}{\bar{I}^2 - \overline{I^2}}, \quad (4.4)$$

em que $\bar{I} = n^{-1} \sum_{i=1}^n I_i$ e $\overline{I^k} = n^{-1} \sum_{i=1}^n I_i^k$ para $k \in \mathbb{R}$. Embora o $\hat{L}^{(CoV)}$ seja comumente referido como a definição do ENL (LEE et al., 1994; OLIVER; QUEGAN, 2004), existem outras maneiras de estimar o L como discutido a seguir.

4.2.2 Fractional Moment-Based (FBM)

Frery, Correia e Freitas (2007) propuseram um estimador alternativo também baseado na distribuição Γ , mas usando um momento fracionário (FM) da intensidade dos dados SAR. Da Equação (4.2),

$$\mathbb{E}(I^{1/2}) = \frac{\Gamma(L + 1/2)}{\Gamma(L)} \sqrt{\frac{\mu}{L}} \quad (4.5)$$

trocando $\mathbb{E}\{I^{1/2}\}$ e μ por suas versões amostrais, $\overline{I^{1/2}}$ e $\bar{I}$, pode-se deduzir a seguinte identidade:

$$f(\hat{L}^{(FM)}) = \frac{\Gamma\left(\hat{L}^{(FM)} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\hat{L}^{(FM)}\right) \sqrt{\hat{L}^{(FM)}}} \sqrt{\bar{I}} - \sqrt{\bar{I}}, \quad (4.6)$$

em que $\hat{L}^{(FM)}$ é a estimativa FM e deve ser obtida numericamente. A existência da raiz de $f(\hat{L}^{(FM)})$ é provada em Anfinsen, Doulgeris e Eltoft (2009).

4.2.3 Estimador Γ -MV

Um estimador para o ENL pode ser obtido através do método da máxima verossimilhança. Considere o problema da estimação dos parâmetros, $\gamma = (\mu, L)$. Seja a intensidade I representada por $\{X_t\}_{t=1}^n$ tal que $X_t \sim \Gamma(\mu, L)$. Da Eq. (4.1), a função de log verossimilhança em γ tem a forma

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \ell(\gamma; x_1, \dots, x_n) = \sum_{t=1}^n \log f(x; \mu, L) \\ &= n [L \log L - L \log \mu - \log \Gamma(L)] + \sum_{t=1}^n (L - 1) \log(x_t) - \frac{L}{\mu} \sum_{t=1}^n x_t. \end{aligned} \quad (4.7)$$

O estimador de máxima verossimilhança para γ tem a forma

$$\hat{\gamma} = \arg \max_{\gamma \in \mathbb{R}^2} [\ell(\gamma; X_1, \dots, X_n)].$$

Este caso será denotado por $\hat{L}^{(\Gamma-MV)}$.

4.3 NOVO ESTIMADOR PARA O ENL BASEADO NOS RESÍDUOS DE PEARSON

Nesta seção, vamos apresentar um novo estimador baseado nos resíduos de *Pearson* do processo Γ -ARMA, apresentado no capítulo anterior. Os resíduos de *Pearson* ou *deviance* –

inicialmente apresentados para modelos da classe de modelos lineares generalizados (MLG) por McCullagh e Nelder (1989) – são considerados para o processo Γ -ARMA (BENJAMIN; RIGBY; STASINOPOULOS, 2003). Os resíduos de Pearson do processo Γ -ARMA são definidos como:

$$\hat{r}_t = \frac{Z_t - \hat{\mu}_t}{\sqrt{V(\hat{\mu}_t)}}, \quad \text{para } t = 1, \dots, n,$$

em que $V(\hat{\mu}_t) = \hat{\mu}_t^2$ é a função variância para o caso Γ .

De acordo com Kedem e Fokianos (2002)[p. 26], o Desvio de *Pearson*, diga-se $\{r_t; t = 1, \dots, n\}$ ¹, é um processo diferença *martingale* tal que

$$\mathbb{E}[r_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0, \quad \mathbb{E}[r_t] = 0 \quad \text{e} \quad \mathbb{E}[r_t^2] = L^{-1}.$$

A autocorrelação de ordem h da sequência $\{r_t\}$ é dada por

$$\rho(h) = \frac{L}{n} \sum_{t=h+1}^n r_t r_{t-h}.$$

Por propriedades para grandes amostras dos estimadores MV, tem-se que

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{L}}{n} \sum_{t=h+1}^n \hat{r}_t \hat{r}_{t-h},$$

em que

$$\hat{L} = \left(\frac{1}{N - (p + q + k + 1)} \sum_{t=1}^n \hat{r}_t^2 \right)^{-1} \quad (4.8)$$

é um estimador consistente para L . Portanto, a expressão (4.8) se configura como uma nova forma de estimação do ENL derivada a partir dos resíduos de *Pearson* do processo Γ -ARMA, denominada como $\hat{L}^{(\Gamma\text{-Pearson})}$. Por sua vez, a distribuição do $\hat{L}^{(\Gamma\text{-Pearson})}$ é desconhecida. Então, para calcular o erro padrão do novo estimador de ENL, pode-se recorrer ao método *bootstrap* para obter um erro padrão aproximado. No que segue, uma breve discussão sobre *bootstrap* é apresentada.

O método *bootstrap* foi inicialmente introduzido por Efron (1979), cujo princípio básico, consiste em tratar a amostra como se fosse a própria população, e assim obter réplicas dos dados. Existem duas abordagens para realizar um procedimento de reamostragem *bootstrap*: (i) por meio de reamostragens com reposição, diga-se *bootstrap* não paramétrico ou (ii) assumindo a distribuição ao qual os dados pertencem, diga-se *bootstrap* paramétrico (LIMA, 2017).

¹

$$r_t = \frac{Z_t - \mu_t}{\sqrt{V(\mu_t)}}, \quad \text{para } t = 1, \dots, n,$$

e assume sem perda de generalidade que $\text{Var}(Z_t | \mathcal{F}_{t-1}) = V(\mu_t)/L$

O *bootstrap* objetiva determinar a distribuição de probabilidade empírica de determinada estatística. Assumindo ou não que os dados seguem certa distribuição de probabilidade, pode-se ainda estimar o viés e o erro padrão dessa estatística. Além disso, o método é frequentemente usado para obter intervalos de confiança e testes de hipóteses (EFRON; TIBSHIRANI, 1994; LIMA; F., 2020; NEUMANN; BODNAR; DICKHAUS, 2021). A seguir, apresenta-se um algoritmo para calcular o erro-padrão de acordo com a abordagem *bootstrap* paramétrica.

4.3.1 Bootstrap paramétrico

Nesse caso, dispomos de toda informação necessária sobre a distribuição dos dados, logo as amostras *bootstrap* são obtidas por meio de uma amostragem diretamente nessa distribuição, em que os parâmetros desconhecidos são substituídos pelas suas respectivas estimativas (obtidas através da amostra original). Dessa forma, a estimativa de *bootstrap* é obtida da seguinte maneira:

1. Gere B séries temporais de tamanho n , $z_1^*, \dots, z_B^*$, assumida para a série temporal observada que a distribuição dos dados é o resultado de substituir as estimativas dos parâmetros pelos parâmetros.
2. Para cada série gerada, calculamos a estatística de interesse, digam-se, $T_1^*, \dots, T_B^*$;
3. O erro-padrão de T , denotado por $\widehat{ep}(T)$, é calculado como

$$\widehat{ep}(T) = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{i=1}^B (T_i^* - \overline{T^*})^2},$$

$$\text{em que } \overline{T^*} = B^{-1} \sum_{i=1}^B T_i^*.$$

De acordo com Efron e Tibshirani (1994), quando B vai para infinito, temos que

$$\widehat{ep}(T) \xrightarrow{p} ep(T).$$

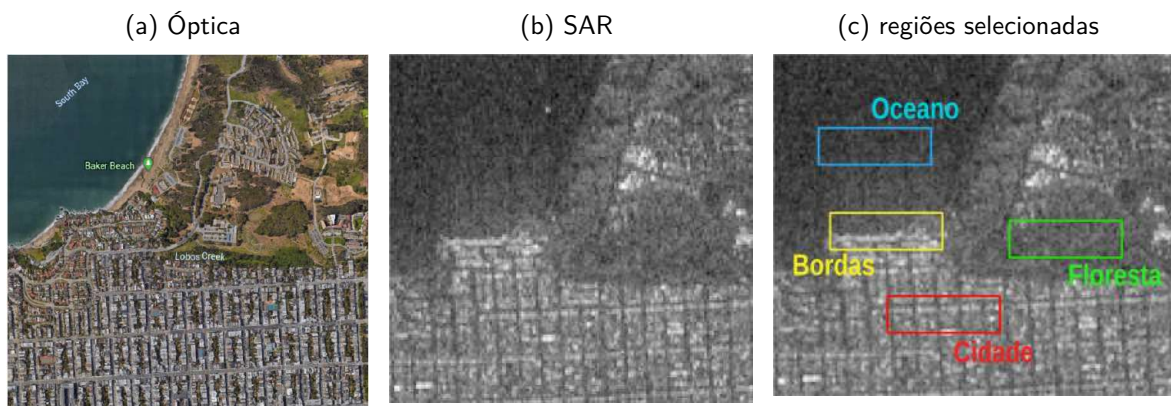
em que $\xrightarrow{p}$ denota convergência em probabilidade.

Portanto, o erro-padrão do novo estimador ENL pode ser obtido via algoritmo *bootstrap* paramétrico.

4.4 APLICAÇÃO EM DADOS REAIS SAR

A Figura 26a apresenta uma imagem óptica da baía de São Francisco (EUA) com dimensões 150×150 , imagem SAR extraída pelo sensor AIRSAR, com ENL $L = 4$ e operando com três bandas de frequência, P, L e C. A captura da imagem foi feita em 9 de abril de 2008, *range* = 9,8m e *Azimuth* 4,8m. Objetiva-se nesta seção avaliar o desempenho do novo estimador para o ENL construído através dos resíduos do modelo Γ -ARMA. Para avaliar a *performance* da nossa proposta, foram selecionadas na imagem de São Francisco quatro regiões distintas: (1) oceano, (2) floresta, (3) cidade e (4) bordas (região de fronteiras das três regiões). Os trechos selecionados são apresentados na Figura 26c. Comparamos nosso estimador para o ENL com três estimadores clássicos da literatura *CoV*, *FBM* e Γ -*MV* para dados mono polarimétrico. Como figuras de mérito quantitativa, utilizamos as seguintes medidas: média, mediana, MSE, MAE e CV. Para análise qualitativa utiliza-se mapas com as estimativas do ENL para cada método.

Figura 26 – Imagens ópticas e SAR com as regiões selecionadas



Fonte: Autoria própria (2020)

Na Figura 27 são apresentados os mapas das estimativas de L . Para cada série temporal de acordo com seus respectivos rastreamentos (Figura 8), o modelo Γ -ARMA foi estimado, a escolha da ordem do modelo foi feita de forma automática selecionando o modelo com menor valor do critério AIC. Nota-se que a região de oceano apresenta os maiores valores para L , visto nas tonalidades mais próximas da cor azul, enquanto que a região urbana tem os menores valores para L com tonalidades mais próximas do vermelho no gráfico. De maneira visual é difícil aferir qual o melhor método de estimação. Portanto, faz-se necessário utilizar métodos quantitativos para determinar possíveis melhorias.

Na Tabela 7, apresentam-se os resultados para a avaliação quantitativa. Identifica-se que em geral, para as regiões urbana e bordas, nossos estimadores fornecem os melhores desempenhos em termos de aproximação das médias e medianas para seu respectivo valor verdadeiro ($L = 4$) e menores valores para MSE, MAE e CV. Entretanto, em regiões mais homogêneas como oceano e moderadamente heterogênea como floresta, o estimador $L^{(\Gamma-MV)}$ tem melhor desempenho. Dessa maneira, analisando de forma geral, o seguinte comportamento pode ser observado:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{L}^{(\Gamma-Pearson)} < \hat{L}^{(\Gamma-MV)} < \hat{L}^{(FBM)} < \hat{L}^{(CoV)}, & \text{para Urbano e Bordas} \\ \hat{L}^{(\Gamma-MV)} < \hat{L}^{(\Gamma-FBM)} < \hat{L}^{(Pearson)} < \hat{L}^{(CoV)}, & \text{para Oceano e Floresta.} \end{array} \right.$$

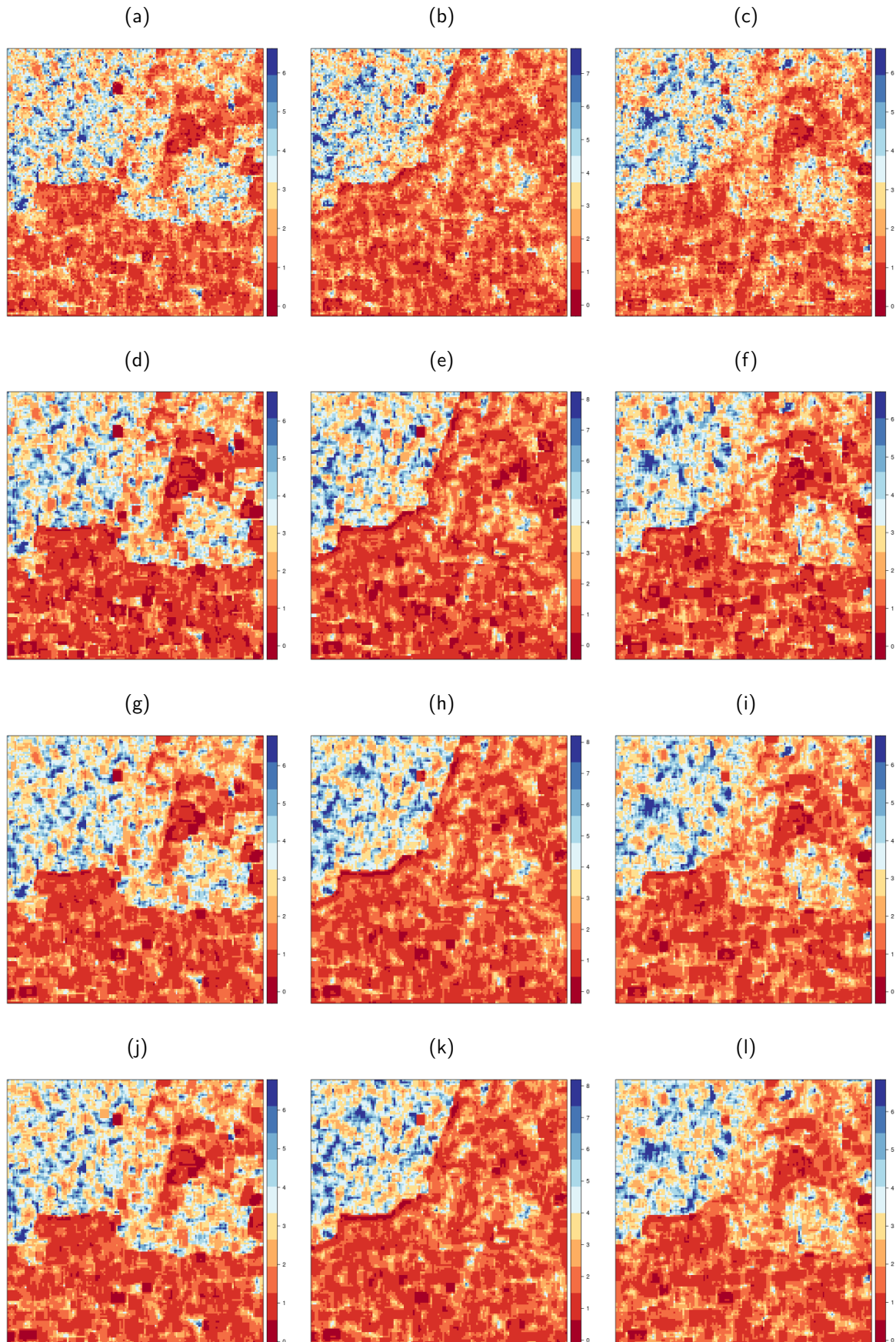
Por fim, quando analisamos toda a imagem, o desempenho do nosso estimador em geral é melhor. Nossa proposta forneceu melhores resultados em regiões extremamente heterogêneas (Cidades) e com grande variabilidade (Bordas), isto é, em regiões que o *speckle* não é totalmente desenvolvido e existe uma dificuldade maior em estimar o ENL.

Tabela 7 – Medidas de avaliação dos estimadores de ENL , Legenda: valor segunda melhor performance e valor primeira melhor performance.

Janela	Canal	Regiões	Γ -Pearson					Γ -MV					CoV					FBM				
			Média	Med.	MSE	MAE	CV	Média	Med.	MSE	MAE	CV	Média	Med.	MSE	MAE	CV	Média	Med.	MSE	MAE	CV
5 × 5	VV	Oceano	3,62	3,38	2,03	1,14	0,38	3,82	3,48	1,92	1,06	0,36	3,75	3,47	1,98	1,08	0,37	3,81	3,47	1,93	1,07	0,36
		Floresta	2,50	2,45	3,19	1,59	0,39	2,60	2,51	2,79	1,49	0,35	2,33	2,28	3,89	1,75	0,45	2,52	2,44	3,12	1,57	0,38
		Urbano	1,45	1,36	6,94	2,55	0,40	1,28	1,18	7,66	2,72	0,41	1,03	0,95	9,15	2,97	0,56	1,16	1,07	8,37	2,84	0,48
		Bordas	2,19	1,89	4,88	2,01	0,58	2,16	1,67	5,43	2,11	0,66	1,94	1,44	6,25	2,26	0,73	2,07	1,57	5,82	2,18	0,70
		Completa	2,22	1,90	4,92	2,00	0,58	2,20	1,87	4,97	2,01	0,60	1,95	1,59	6,15	2,24	0,71	2,10	1,76	5,45	2,10	0,64
	HV	Oceano	4,10	3,86	2,42	1,22	0,38	4,56	4,22	2,72	1,21	0,34	4,30	4,02	2,86	1,27	0,39	4,51	4,20	2,75	1,22	0,35
		Floresta	2,27	2,06	4,17	1,86	0,48	2,35	2,05	4,00	1,81	0,48	2,18	1,98	4,61	1,94	0,52	2,28	2,01	4,26	1,87	0,50
		Urbano	1,60	1,46	6,31	2,41	0,46	1,49	1,35	6,77	2,52	0,45	1,30	1,12	7,92	2,71	0,62	1,39	1,23	7,33	2,62	0,52
		Bordas	2,18	1,70	5,12	2,03	0,62	2,17	1,69	5,33	2,06	0,65	2,00	1,37	6,43	2,26	0,78	2,10	1,55	5,80	2,14	0,70
		Completa	2,43	1,89	5,12	2,02	0,65	2,42	1,87	5,14	2,04	0,67	2,18	1,63	6,15	2,24	0,77	2,33	1,78	5,56	2,12	0,72
	HH	Oceano	3,61	3,42	1,58	1,00	0,33	3,81	3,58	1,47	0,97	0,31	3,72	3,54	1,69	1,05	0,34	3,80	3,61	1,52	0,99	0,32
		Floresta	2,83	2,69	2,62	1,39	0,40	2,96	2,85	2,27	1,29	0,37	2,77	2,72	3,18	1,52	0,47	2,90	2,81	2,54	1,36	0,40
		Urbano	1,47	1,30	6,91	2,54	0,48	1,31	1,16	7,58	2,69	0,45	1,03	0,87	9,22	2,97	0,63	1,18	1,02	8,34	2,82	0,52
		Bordas	2,26	1,82	5,13	2,02	0,64	2,21	1,78	5,37	2,05	0,67	2,05	1,47	6,51	2,26	0,80	2,14	1,66	5,87	2,14	0,72
		Completa	2,31	1,99	4,82	1,94	0,59	2,28	1,98	4,84	1,95	0,60	2,03	1,67	6,11	2,20	0,74	2,18	1,88	5,35	2,05	0,66
7 × 7	VV	Oceano	3,36	3,24	1,20	0,93	0,26	3,49	3,28	1,04	0,88	0,25	3,40	3,30	1,09	0,87	0,25	3,46	3,27	1,02	0,87	0,25
		Floresta	2,16	2,20	3,94	1,84	0,35	2,30	2,32	3,30	1,70	0,28	1,99	2,05	4,68	2,01	0,40	2,19	2,23	3,73	1,81	0,31
		Urbano	1,12	1,07	8,49	2,88	0,27	1,10	1,06	8,51	2,90	0,28	0,79	0,72	10,44	3,21	0,50	0,96	0,92	9,36	3,04	0,36
		Bordas	1,90	1,45	5,88	2,20	0,59	1,88	1,39	5,96	2,22	0,64	1,61	1,07	7,24	2,44	0,77	1,77	1,26	6,53	2,32	0,70
		Completa	1,92	1,62	5,48	2,10	0,0,53	1,91	1,60	5,51	2,15	0,56	1,61	1,24	7,08	2,44	0,73	1,79	1,47	6,13	2,26	0,63
	HV	Oceano	3,69	3,67	1,21	0,91	0,29	4,05	4,01	0,76	0,69	0,22	3,76	3,68	1,01	0,82	0,26	3,98	3,93	0,78	0,70	0,22
		Floresta	2,03	1,88	4,64	2,01	0,43	2,04	1,77	4,61	1,99	0,43	1,89	1,74	5,26	2,14	0,48	1,97	1,74	4,90	2,06	0,45
		Urbano	1,30	1,22	7,60	2,70	0,31	1,28	1,20	7,61	2,72	0,35	0,98	0,85	9,47	3,02	0,61	1,15	1,05	8,36	2,85	0,43
		Bordas	1,91	1,51	6,15	2,21	0,67	1,88	1,50	6,18	2,22	0,69	1,66	1,15	7,47	2,47	0,85	1,78	1,37	6,73	2,32	0,75
		Completa	2,11	1,59	5,39	2,11	0,62	2,09	1,57	5,42	2,12	0,64	1,80	1,30	6,78	2,38	0,77	1,98	1,46	5,95	2,22	0,69
	HH	Oceano	3,21	3,20	1,29	0,95	0,25	3,42	3,34	0,83	0,77	0,21	3,30	3,26	1,20	0,91	0,26	3,39	3,33	0,91	0,80	0,22
		Floresta	2,56	2,60	2,85	1,49	0,34	2,66	2,73	2,40	1,37	0,29	2,43	2,53	3,46	1,63	0,41	2,59	2,67	2,72	1,45	0,33
		Urbano	1,12	1,08	8,45	2,83	0,31	1,11	1,06	8,46	2,89	0,34	0,77	0,74	10,61	3,23	0,53	0,96	0,92	9,39	3,04	0,41
		Bordas	1,92	1,41	5,95	2,23	0,61	1,87	1,38	5,91	2,16	0,62	1,60	0,94	7,60	2,46	0,85	1,75	1,18	6,59	2,28	0,71
		Completa	1,91	1,70	5,35	2,07	0,61	1,90	1,67	5,37	2,08	0,56	1,66	1,23	7,03	2,39	0,75	1,85	1,51	6,00	2,20	0,63

Fonte: Autoria própria (2020)

Figura 27 – ENL predito da imagem São Francisco. (a) Γ -ENL (HH) (b) Γ -ENL (HV) (c) Γ -ENL (VV) (d) CV-ENL (HH) (e) CV-ENL (HV) (f) CV-ENL (VV) (g) FBM-ENL (HH) (h) FBM-ENL (HV) (i) FBM-ENL (VV), (j) Γ -MV (HH) (k) Γ -MV (HV) (l) Γ -MV (VV).



4.5 CONCLUSÃO

Introduziu-se um novo estimador para o ENL em imagens SAR, baseado nos resíduos de *Pearson* do processo Γ -ARMA proposto por Benjamin, Rigby e Stasinopoulos (2003), denotado por $L^{(\Gamma-Pearson)}$. O estimador $\hat{L}^{\Gamma-Pearson}$ tem uma expressão em forma fechada, é provavelmente consistente para o ENL e pode ser interpretado em termos de estruturas na classe ARMA. Um procedimento *bootstrap* para construir o erro-padrão do novo estimador foi introduzido. Como uma aplicação para dados reais, o estimador foi avaliado em uma imagem SAR (São Francisco, EUA). Os resultados mostraram que o nosso estimador teve um desempenho melhor do que estimadores clássicos da literatura para dados monopolarizados (CoV, FBM e Γ -MV) .

5 NOVO MODELO DE REGRESSÃO KB

5.1 ESTADO DA ARTE E PROPOSTA

A intensidade (a norma quadrada de um retorno complexo) do sinal ecoado carrega propriedades físicas da superfície alvo. Assim, bons descritores de intensidades são necessários no processamento estatístico de imagens SAR. Muitos trabalhos avançaram na modelagem de intensidade de forma individual (FRERY et al., 1997), mas, pelo que sabemos, poucas pesquisas abordaram modelos condicionais. Um modelo de regressão baseado na distribuição KB foi proposto por Wang e Ouchi (2008) para estimar a biomassa florestal. Vasconcelos (2018) introduziu o modelo de regressão $\mathcal{G}_I^0$ para dados de intensidades SAR. Palm et al. (2019) propuseram o modelo de regressão *Rayleigh* para dados de amplitudes. Esse capítulo contribui com um novo modelo de regressão para dados de intensidades, seguindo uma estrutura lógica similar aos modelos lineares generalizados propostos em (MCCULLAGH; NELDER, 1989).

Uma das distribuições mais usadas é a KB (LIU, 2018; HUANG; CHEN; GAO, 2019) discutida na Seção 2.2.1. Neste capítulo, propõe-se um novo modelo de regressão para variáveis respostas assumindo distribuição KB que são relacionadas aos *pixels* das imagens SAR. Os sistemas SAR polarimétricos funcionam sob a seguinte dinâmica: pulsos ortogonalmente polarizados (nas direções vertical, “V” ou horizontal, “H”) são transmitidos em direção a um alvo e os ecos retornados são registrados em relação a cada polarização. Assim, quatro canais de polarização são produzidos, HH, HV, VH e VV. Na prática, os canais HV e VH são próximos por causa das condições do teorema da reciprocidade (ULABY; MOORE; FUNG, 1986). As imagens resultantes podem ser entendidas como resultados de uma sequência ou (i) de vetores aleatórios complexos (o que se entende por dado *singlelook*) ou (ii) de matrizes aleatórias hermitianas positivas definidas (dado *multilook*). Aqui, abordamos o caso *multilook*, considerando a proposta de modelos estatísticos para elementos da diagonal principal (ou intensidades dos canais de polarização HH, HV e VV) das matrizes resultantes de imagens PolSAR (*Polarimetric SAR*-PolSAR). Além do desafio de derivar propriedades teóricas de regressão de um modelo amplamente utilizado, nossa proposta é motivada pelo seguinte fato: dado um retorno PolSAR, qualquer intensidade de um canal em particular pode ser relacionada com outro canal. Propomos a formulação de um modelo de regressão de K -Bessel (KBR) bem como a derivação de algumas de suas propriedades: função escore, MIF e uma medida de resíduo quantílico. Um procedimento para obtenção de EMVs para os parâmetros da KBR é

discutido e avaliado via experimentos Monte Carlo. Finalmente, o modelo KBR é aplicado a dados reais SAR e os resultados fornecem evidências de que ele pode superar os modelos de regressão gama e Gaussiana.

Esse capítulo é organizado como segue. Seção 5.2 aborda a definição de um novo modelo de regressão. A Seção 5.3 indica o processo de inferência associado ao modelo KBR. O desempenho do método de estimação é submetido a experimentos simulados na Seção 5.4. Uma aplicação para dados reais também é abordada. A Seção 5.5 endereça as principais conclusões desta pesquisa.

5.2 NOVO MODELO DE REGRESSÃO E SUA CONEXÃO COM A FORMAÇÃO FÍSICA DE IMAGENS SAR

5.2.1 Definição

Suponha que a entrada (i, j) de uma imagem SAR, diga-se $Y = Y(i, j)$, seja descrita pelo produto entre (i) um sinal determinístico, denominado e^η (ou, na localização (i, j) , $\eta = \eta(i, j)$), e (ii) uma variável aleatória assumindo distribuição KB $\varepsilon(i, j)$ com média um; i.e., $Y(i, j) = e^{\eta(i, j)} \varepsilon(i, j)$. Seja $\mathbf{y} = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$ uma amostra aleatória obtida da distribuição KB, conforme definido em (2.2). Aqui, cada Y_i refere-se a um pixel em uma amostra da imagem. Nosso objetivo é verificar a significância da média condicional de Y em termos das intensidades de outros canais de polarização (dada uma relação paramétrica pré-especificada), comparativamente à análise isolada como acontece frequentemente na literatura (LIU, 2018; HUANG; CHEN; GAO, 2019). Isso nos permite ajustar uma distribuição diferente para cada Y_i estendendo a distribuição KB com uma estrutura de regressão. Partimos da hipótese de que isso deve melhorar o processamento de imagens SAR, particularmente para regiões com retroespalhamento bastante heterogêneo.

A distribuição com densidade (2.3) é também chamada de *gamma-gamma* e reduz-se à distribuição KB *single look* (para $\alpha > 0$ e $L = 1$) e à exponencial negativa (para $\alpha \rightarrow \infty$ e $L = 1$). Uma propriedade interessante da distribuição KB é que ela é invariante por escala, isto é, se $c > 0$ e $Y \sim K(\alpha, \mu, L)$, então $cY \sim K(\alpha, c\mu, L)$. Agora, para algum vetor de covariáveis $\mathbf{x}_i := (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})^\top \in \mathbb{R}^p$, seja

$$\eta_i := \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} = \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij} = g(\mu_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

o preditor linear para o i -ésimo *pixel* em i , com $x_{i1} := 1$ e $\beta \in \mathbb{R}^p$ sendo um vetor de parâmetros fixos desconhecidos. Uma escolha comum da função de ligação para $\mu_i > 0$ é a logarítmica $g(\mu_i) = \log(\mu_i)$. Nosso objetivo é usar os retornos das intensidades de outros canais de polarização como covariáveis. Finalmente, a próxima distribuição das variáveis da amostra segue da invariância de escala mencionada: uma vez, $\varepsilon_i \sim K(\alpha, 1, L)$, então

$$\{Y_i | \mathbf{x}_i\} = e^{\eta_i} \varepsilon_i \sim K(\alpha, e^{\eta_i}, L), \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.1)$$

Aqui, o parâmetro de interesse é $\theta = (\alpha, \beta^\top)^\top$, em que β é o coeficiente de regressão e α é um parâmetro de dispersão com interpretabilidade física em imagens SAR.

5.2.2 Versão log-linear

A log linearização da Equação (5.1) pode ser escrita como

$$[H_i | \mathbf{x}_i] = \mathbf{x}_i^\top \beta + \gamma_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

em que $H_i = \log(Y_i)$ e $\gamma_i = \log(\varepsilon_i)$. Então, da teoria de modelos lineares (SEARLE, 2012), o estimador de mínimos quadrados ordinários (MQO) para β (Assumindo que $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 | \dots | \mathbf{x}_n]^\top$ e $\text{posto}(\mathbf{X}) = p < n$) é dado por

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{h}, \quad (5.2)$$

em que $\mathbf{h} = (H_1, \dots, H_n)^\top$.

Em seu artigo, Oliver (1993) considera várias abordagens para estimar a média $\mu = \alpha/\lambda$ e o parâmetro de forma α nos cenários *multilooks* para segmentação de textura. Como chutes iniciais para obter as EMVs para os parâmetros da KBR, vamos adotar (5.2).

5.3 INFERÊNCIA ESTATÍSTICA E ANÁLISE RESIDUAL PARA KBR

5.3.1 Inferência

Sejam $(Y_1 | \mathbf{x}_1), \dots, (Y_n | \mathbf{x}_n)$ um conjunto n -dimensional de variáveis aleatórias independentes tendo $Y_i \sim K(\alpha, \mu_i, L)$ tal que $\mu_i = \exp(\mathbf{x}_i^\top \beta)$. A função de log-verossimilhança em $\theta = (\alpha, \beta^\top)^\top$ é

$$\ell(\theta) = n \left\{ \log 2 + \left(\frac{L + \alpha}{2} \right) \log L \alpha - \log \Gamma(\alpha) - \log \Gamma(L) \right\}$$

$$+ \left(\frac{L + \alpha}{2} \right) \sum_{i=1}^n (\log Y_i - \eta_i) + \sum_{i=1}^n (\log K_i - \log Y_i),$$

em que $K_i = K_{\alpha-L}(2\sqrt{L\alpha} e^{-\eta_i} Y_i)$.

A função escore associada,

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{U}_\alpha(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{U}_\beta(\boldsymbol{\theta}))^\top = \left(\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha}, \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta^\top} \right)^\top,$$

é determinada por

▪

$$\mathbf{U}_\alpha(\boldsymbol{\theta}) = n \left\{ \frac{1}{2} [\log(L\alpha) + 1] + \frac{L}{2\alpha} - \psi(\alpha) \right\} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\log Y_i - \eta_i] + \sum_{i=1}^n \frac{K_i^{(\alpha)}}{K_i},$$

em que $\psi(\cdot)$ é a função *digamma*, $K_i = K_{\alpha-L}(2\sqrt{L\alpha} e^{-\eta_i} Y_i)$ e $K_i^{(\alpha)} = \partial K_i / \partial \alpha$.

▪

$$\mathbf{U}_\beta(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n y_i^* \mathbf{x}_i = \mathbf{X}^\top \mathbf{y}^*,$$

em que $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 | \cdots | \mathbf{x}_n]^\top$, $\mathbf{y}^* = (Y_1^*, \dots, Y_n^*)^\top$, $Y_i^* = -\left\{ \frac{L+\alpha}{2} + \delta_i \sqrt{L\alpha} e^{-\eta_i} Y_i \right\}$,

$$\delta_i = \left[\frac{1}{K_{\alpha-L}(z)} \frac{\partial}{\partial z} K_{\alpha-L}(z) \right]_{z=2\sqrt{L\alpha} e^{-\eta_i} Y_i}$$

e, de Abramowitz e Stegun (1964), $\frac{\partial}{\partial z} K_{\alpha-L}(z) = -\frac{1}{2} [K_{\alpha-L-1}(z) + K_{\alpha-L+1}(z)]$.

De $\mathbb{E}[U_\alpha(\boldsymbol{\theta})] = 0$, segue o próximo corolário.

Corolário 1 *Seja $Y_i \sim K(\alpha, \mu_i, L)$. Então,*

$$\mathbb{E} \left[\frac{K_i^{(\alpha)}}{K_i} \right] = \frac{\eta_i}{2} - \frac{\psi(\alpha) + \psi(L) - \log(\alpha L / \mu_i)}{2} - \left\{ \frac{1}{2} [\log(L\alpha) + 1] + \frac{L}{2\alpha} - \psi(\alpha) \right\}.$$

A matriz de informação observada KBR,

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \left[-\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top} \right] = \left[\begin{array}{c|c} J_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\theta}) & J_{\alpha\beta}^\top(\boldsymbol{\theta}) \\ \hline J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\theta}) & J_{\beta\beta^\top}(\boldsymbol{\theta}) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial^2 \alpha} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha \partial \beta^\top} \\ \hline \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha \partial \beta} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta \partial \beta^\top} \end{array} \right],$$

é determinada por

▪

$$J_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = n \left\{ \frac{1}{2\alpha} - \frac{L}{2\alpha^2} - \psi^{(1)}(\alpha) \right\} + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{K_i^{(\alpha\alpha)} K_i - [K_i^{(\alpha)}]^2}{K_i^2} \right\},$$

em que $\psi^{(1)}(x) = \partial \psi(x) / \partial x$ e $K_i^{(\alpha\alpha)} = \partial^2 K_i / \partial \alpha^2$.

■

$$J_{\beta\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{X}^\top \mathbf{y}^{**},$$

em que $\mathbf{y}^{**} = (Y_1^{**}, \dots, Y_i^{**}, \dots, Y_n^{**})^\top$,

$$Y_i^{**} = - \left[\frac{1}{2} + \frac{\delta_i}{2} \sqrt{\frac{L e^{\eta_i} Y_i}{\alpha}} + \left(\frac{\partial \delta_i}{\partial \alpha} \right) \sqrt{L \alpha e^{\eta_i} Y_i} \right],$$

$$\frac{\partial \delta_i}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \frac{K_i^{(\alpha)} (K_{i:-1} + K_{i:1}) - K_i^{(\alpha)} [K_{i:-1}^{(\alpha)} + K_{i:1}^{(\alpha)}]}{K_i^2},$$

$$K_{i:r} = K_{\alpha-L+r} (2\sqrt{L\alpha e^{-\eta_i} Y_i}) \text{ e } K_{i:-1}^{(\alpha)} = \partial K_{i:-1} / \partial \alpha.$$

■

$$J_{\beta\beta^\top}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{X}^\top \mathbf{W} \mathbf{X},$$

em que $\mathbf{W} = \text{diag}(Y_1^{***}, \dots, Y_i^{***}, \dots, Y_n^{***})$,

$$Y_i^{***} = (-1) \left[\frac{\delta_i}{2} \sqrt{\frac{L \alpha Y_i}{e^{\eta_i}}} - \frac{\delta_i^*}{2} (L \alpha Y_i e^{\eta_i}) \right]$$

e

$$\begin{aligned} \delta_i^* = K_i^{-2} & \left\{ \frac{K_i}{2} [K_{\alpha-L-2}(z) + 2 K_{\alpha-L}(z) + K_{\alpha-L+2}]_{z=2\sqrt{L\alpha e^{-\eta_i} Y_i}} \right. \\ & \left. + \left\{ [\partial K_{\alpha-L}(z)]_{z=2\sqrt{L\alpha e^{-\eta_i} Y_i}} \right\}^2 \right\}. \end{aligned}$$

A MIF,

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left[\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]^\top \right\} = \mathbb{E} \left[- \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top} \right],$$

é uma ferramenta muito útil para calcular variâncias assintóticas, estimativas intervalares e fazer testes de hipótese em termos de α ou/e β . A próxima proposição aborda uma expressão para o MIF.

Proposição 1 *Seja $Y_i \sim K(\alpha, \mu_i, L)$. A MIF é*

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[J_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\theta})] & \mathbb{E}[J_{\alpha\beta}^\top(\boldsymbol{\theta})] \\ \mathbb{E}[J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\theta})] & \mathbb{E}[J_{\beta\beta^\top}(\boldsymbol{\theta})] \end{bmatrix},$$

em que

$$\mathbb{E}[J_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\theta})] = n \left[\frac{L}{2\alpha^2} - \frac{1}{2\alpha} + \psi^{(1)}(\alpha) \right] + \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{K_i^{(\alpha\alpha)} K_i - (K_i^{(\alpha)})^2}{K_i^2} \right],$$

$$\mathbb{E}[J_{\beta\alpha}(\boldsymbol{\theta})] = \mathbf{X}^\top \mathbb{E}(\mathbf{y}^{**})$$

e

$$\mathbb{E}[J_{\beta\beta^\top}(\boldsymbol{\theta})] = \mathbf{X}^\top \mathbb{E}(\mathbf{W}) \mathbf{X},$$

$$\mathbb{E}(\mathbf{y}^{**}) = [\mathbb{E}(Y_1^{**}), \dots, \mathbb{E}(Y_i^{**}), \dots, \mathbb{E}(Y_n^{**})]^\top$$

e

$$\mathbb{E}(\mathbf{W}) = \text{diag}(\mathbb{E}(Y_1^{***}), \dots, \mathbb{E}(Y_i^{***}), \dots, \mathbb{E}(Y_n^{***})).$$

Na prática, os momentos da Proposição 1 devem ser obtidos por Monte Carlo.

Agora, estamos em posição de definir o processo de estimação. As EMVs são definidas como $[\hat{\alpha}, \hat{\beta}] = \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}} [\ell(\boldsymbol{\theta})]$ ou, equivalentemente, $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \mathbf{0}$, em que $\boldsymbol{\Theta}$ é o espaço paramétrico. Vale salientar que não é possível obter uma expressão de forma fechada da última identidade. Portanto, neste caso, usa-se o método iterativo de Newton-Raphson para obter EMVs, dado por

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)} + [-\mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)})]^{-1} \mathbf{U}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}),$$

forneendo como pontos iniciais para $\boldsymbol{\beta}^{(0)}$ a Equação (5.2) e para $\alpha \in (0.1, 50)$ (tal que a log-verossimilhança seja máxima).

Para estimativas intervalares dos parâmetros da KBR, podemos adotar a MIF $(p+1) \times (p+1)$ $\mathbf{I}_1(\boldsymbol{\theta}) = n^{-1} \mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$. Sob algumas condições de regularidade (BICKEL; DOKSUM, 2015), $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} N_{p+1}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_1^{-1}(\boldsymbol{\theta}))$, em que $N_{p+1}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ denota a $(p+1)$ -variável de distribuição normal com média e matriz de covariância $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$, respectivamente.

5.3.2 Análise de resíduos

Aqui, usamos o resíduo quantílico padronizado definido como

$$r_i = \Phi^{-1}(F_Y(y_i; \hat{\alpha}, \hat{\mu})), \quad (5.3)$$

em que $\Phi(\cdot)$ é a fda da distribuição normal padrão e $F_Y(\cdot)$ determinada em (2.4). O quantil residual segue para grandes amostras uma distribuição normal padrão quando os parâmetros são estimados de forma consistente (DUNN; SMYTH, 1996). Assim, a medida (5.3) pode ser entendida como uma ferramenta de diagnóstico para verificar se um tipo de modelo de regressão é adequado aos dados. Usaremos este critério na seção de aplicação.

5.4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Esta seção aborda dois estudos numéricos. Os primeiros cenários de simulação são feitos para verificar o quão rápido as EMVs satisfazem a propriedade de consistência (como esperado da teoria de MV) e qual é a influência de alguns fatores (devido à formação física das imagens SAR) sobre esses resultados assintóticos. Em segundo lugar, é feita uma aplicação a dados reais.

5.4.1 Estudo de Monte Carlo

Agora um estudo de simulação Monte Carlo é apresentado para quantificar o comportamento assintótico das EMVs para os parâmetros do modelo KBR proposto. Para tanto, usamos dois critérios de avaliação: (i) estimativa média e (ii) MSE. Consideramos o modelo (que será usado na aplicação) $\mathbb{E}(Y|X) = \exp(\beta_0 + \beta_1 X)$ tal que: $\alpha \in \{1, 3, 5, 10\}$ (quatro níveis de rugosidade do terreno), $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0, 2$ e $L \in \{1, 2, 4, 10\}$ (quatro níveis do ENL).

As Tabelas 8 e 9 mostram valores de médias e MSE para $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$, assumindo variáveis preditoras $X \sim \mathcal{U}(-1, 1)$ e $X \sim K(\alpha, \lambda = 2, L)$, respectivamente. Para todos os parâmetros, as estimativas convergem em média para o valor real do parâmetro e os valores de MSE diminuem com o aumento do tamanho da amostra, conforme esperado. Também descobrimos que, quando L aumenta, os valores de MSE diminuem, indicando que a convergência ocorre mais rapidamente para grandes valores de L . Este último resultado corrobora com a literatura, uma vez que o efeito do ruído *speckle* é reduzido com o aumento do número de *looks* em imagens SAR. Em relação ao parâmetro α , quando o valor de α aumenta, os valores MSE de $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ diminuem. Em outras palavras, para cenários mais homogêneos, a convergência de parâmetros é alcançada mais rapidamente.

No que diz respeito a não convergências (falhas) do processo de otimização, calculamos a frequência de falhas para cada cena. Como podemos ver nas Tabelas 8 e 9, apenas para o caso *single look* ($L = 1$), há casos de não convergências para os tamanhos de amostra $n = 49$ e 81. Para tamanhos de amostras grandes, a quantidade de falhas é reduzida drasticamente. Adicionalmente, identifica-se que o aumento do valor de α em pequenos tamanhos de amostra pode gerar uma maior quantidade de não convergências. Por exemplo, quando $\alpha = 10$ e $n = 49$ e 81, o número de não convergências é muito alto.

Tabela 8 – Valores para critérios de avaliação dos parâmetros KBR na cena: $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0,2$ e variável explanatória $X \sim \mathcal{U}(-1, 1)$

α	n	$L = 1$						Falhas	$L = 2$						Falha
		Média			MSE				Média			MSE			
		$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$		$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	
1	49	1,425	0,955	0,196	3,761	0,060	0,165	27	1,133	0,968	0,208	0,282	0,040	0,119	0
	81	1,163	0,971	0,207	0,419	0,035	0,098	1	1,072	0,982	0,201	0,057	0,025	0,068	0
	121	1,086	0,986	0,199	0,081	0,023	0,060	0	1,054	0,987	0,206	0,033	0,016	0,045	0
	500	1,020	0,997	0,198	0,011	0,006	0,015	0	1,012	0,997	0,201	0,006	0,004	0,011	0
3	49	7,585	0,977	0,193	101,156	0,034	0,102	475	5,425	0,983	0,203	42,511	0,020	0,060	0
	81	6,506	0,980	0,197	67,207	0,021	0,060	6	4,064	0,992	0,198	10,805	0,013	0,037	0
	121	5,106	0,986	0,202	35,448	0,014	0,039	0	3,593	0,992	0,199	4,057	0,008	0,023	0
	500	3,251	0,998	0,199	1,003	0,003	0,010	0	3,097	0,998	0,200	0,241	0,002	0,006	0
5	49	11,463	0,980	0,197	157,585	0,029	0,087	858	10,413	0,988	0,201	114,335	0,017	0,048	0
	81	11,382	0,986	0,201	142,841	0,017	0,053	29	8,387	0,990	0,200	62,982	0,010	0,029	0
	121	9,908	0,990	0,199	102,456	0,012	0,033	0	7,112	0,993	0,201	33,410	0,007	0,020	0
	500	6,163	0,997	0,204	14,176	0,003	0,008	0	5,365	0,997	0,199	1,877	0,002	0,005	0
10	49	16,138	0,981	0,209	174,425	0,026	0,081	1416	17,564	0,986	0,201	170,025	0,013	0,041	0
	81	16,885	0,988	0,197	168,087	0,015	0,048	66	16,349	0,992	0,201	141,126	0,008	0,024	0
	121	16,431	0,992	0,200	155,998	0,010	0,030	0	15,063	0,993	0,198	111,172	0,006	0,016	0
	500	12,941	0,999	0,199	65,160	0,002	0,007	0	11,756	0,999	0,200	30,363	0,001	0,004	0
α	n	$L = 4$						Falhas	$L = 10$						Falhas
		Média			MSE				Média			MSE			
		$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$		$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	
1	49	1,094	0,976	0,200	0,072	0,031	0,091	0	1,075	0,982	0,199	0,055	0,025	0,074	0
	81	1,057	0,984	0,200	0,037	0,018	0,053	0	1,047	0,987	0,197	0,029	0,015	0,047	0
	121	1,035	0,991	0,199	0,021	0,012	0,036	0	1,031	0,991	0,202	0,018	0,010	0,031	0
	500	1,009	0,998	0,200	0,004	0,003	0,009	0	1,007	0,996	0,199	0,004	0,002	0,007	0
3	49	3,716	0,987	0,199	4,768	0,014	0,040	0	3,383	0,994	0,203	1,068	0,010	0,028	0
	81	3,383	0,993	0,200	1,288	0,008	0,023	0	3,196	0,993	0,203	0,461	0,006	0,017	0
	121	3,228	0,996	0,200	0,623	0,005	0,016	0	3,142	0,996	0,199	0,276	0,004	0,011	0
	500	3,054	0,999	0,199	0,103	0,001	0,004	0	3,032	0,999	0,200	0,056	0,001	0,003	0
5	49	7,523	0,995	0,201	39,064	0,011	0,031	0	5,875	0,995	0,200	6,057	0,007	0,020	0
	81	6,290	0,995	0,200	13,204	0,006	0,018	0	5,485	0,997	0,201	2,146	0,004	0,012	0
	121	5,718	0,995	0,199	5,163	0,004	0,012	0	5,292	0,996	0,200	1,167	0,003	0,008	0
	500	5,148	0,999	0,200	0,568	0,001	0,003	0	5,087	1,000	0,201	0,219	0,001	0,002	0
10	49	15,738	0,994	0,199	119,171	0,008	0,023	0	12,977	0,994	0,199	48,816	0,004	0,013	0
	81	14,039	0,995	0,199	80,680	0,005	0,014	0	11,750	0,998	0,199	23,612	0,003	0,008	0
	121	13,069	0,996	0,201	55,801	0,003	0,009	0	11,122	0,999	0,200	12,222	0,002	0,005	0
	500	10,637	0,999	0,201	6,826	0,001	0,002	0	10,253	0,999	0,199	1,788	0,000	0,001	0

Fonte: Autoria própria (2020)

Tabela 9 – Valores para critérios de avaliação dos parâmetros KBR na cena: $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0,2$ e variável explanatória $X \sim \mathcal{K}(\alpha, \lambda = 2, L)$

α	N	$L = 1$						Falhas	$L = 2$						Falhas
		Média			MSE				Média			MSE			
		$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$		$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	
1	49	1,541	0,978	0,150	6,481	0,083	0,130	1	1,139	0,991	0,161	0,147	0,062	0,119	0
	81	1,176	0,989	0,173	0,809	0,048	0,064	0	1,080	0,993	0,173	0,061	0,037	0,060	0
	121	1,092	0,992	0,183	0,090	0,032	0,039	0	1,050	0,992	0,186	0,032	0,024	0,036	0
	500	1,017	1,000	0,194	0,011	0,007	0,007	0	1,013	1,000	0,196	0,006	0,006	0,008	0
3	49	8,458	0,992	0,188	120,424	0,058	0,012	105	5,271	0,989	0,192	37,107	0,045	0,011	0
	81	6,638	0,989	0,194	71,584	0,034	0,007	2	4,080	0,992	0,198	12,283	0,025	0,006	0
	121	5,232	0,996	0,195	37,858	0,023	0,004	0	3,526	0,998	0,196	3,216	0,017	0,004	0
	500	3,282	0,999	0,199	1,035	0,005	0,001	0	3,110	0,999	0,199	0,259	0,004	0,001	0
5	49	13,044	0,993	0,193	190,150	0,053	0,004	81	10,450	0,994	0,197	115,254	0,038	0,004	0
	81	11,453	0,997	0,196	146,688	0,030	0,002	2	8,134	0,996	0,197	58,734	0,024	0,002	0
	121	9,915	0,998	0,197	104,759	0,020	0,001	0	7,165	0,994	0,199	34,651	0,015	0,001	0
	500	6,097	0,999	0,200	12,992	0,005	0,000	0	5,294	1,000	0,200	1,800	0,004	0,000	0
10	49	18,026	0,999	0,196	193,681	0,050	0,001	104	17,397	1,000	0,198	166,773	0,036	0,001	0
	81	17,228	0,997	0,198	172,554	0,028	0,001	3	16,117	1,000	0,199	135,587	0,021	0,001	0
	121	16,183	0,999	0,199	149,301	0,018	0,000	0	15,006	1,000	0,199	111,178	0,014	0,000	0
	500	13,200	1,000	0,199	70,102	0,004	0,000	0	11,665	0,999	0,200	29,786	0,003	0,000	0
α	N	$L = 4$						Falhas	$L = 10$						Falhas
		Média			MSE				Média			MSE			
		$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$		$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	
1	49	1,097	0,997	0,162	0,075	0,053	0,106	0	1,082	0,998	0,157	0,057	0,049	0,109	0
	81	1,052	0,998	0,171	0,035	0,031	0,060	0	1,047	0,996	0,179	0,029	0,028	0,058	0
	121	1,037	0,995	0,186	0,022	0,020	0,037	0	1,030	1,001	0,182	0,017	0,018	0,037	0
	500	1,008	1,001	0,195	0,004	0,005	0,008	0	1,008	1,001	0,194	0,004	0,004	0,008	0
3	49	3,772	0,992	0,197	5,215	0,036	0,011	0	3,371	0,996	0,198	1,048	0,031	0,010	0
	81	3,392	0,997	0,196	1,416	0,021	0,006	0	3,199	0,995	0,201	0,458	0,019	0,006	0
	121	3,237	0,998	0,198	0,653	0,013	0,004	0	3,125	1,000	0,198	0,276	0,013	0,004	0
	500	3,061	0,998	0,200	0,102	0,003	0,001	0	3,031	0,999	0,200	0,054	0,003	0,001	0
5	49	7,499	0,993	0,199	38,131	0,033	0,004	0	5,909	0,998	0,198	5,506	0,028	0,004	0
	81	6,231	0,998	0,199	11,994	0,019	0,002	0	5,537	0,999	0,199	2,437	0,016	0,002	0
	121	5,724	0,998	0,199	5,013	0,013	0,001	0	5,304	1,000	0,199	1,199	0,011	0,001	0
	500	5,139	1,000	0,200	0,551	0,003	0,000	0	5,075	1,000	0,200	0,216	0,003	0,000	0
10	49	15,603	1,002	0,198	116,492	0,030	0,001	0	13,090	0,997	0,200	49,470	0,026	0,001	0
	81	14,185	0,999	0,199	80,617	0,017	0,001	0	11,748	0,998	0,199	23,352	0,016	0,001	0
	121	12,974	1,000	0,199	54,885	0,011	0,000	0	11,065	0,999	0,200	11,290	0,010	0,000	0
	500	10,711	1,001	0,200	7,816	0,003	0,000	0	10,220	0,999	0,200	1,622	0,002	0,000	0

Fonte: Autoria própria (2020)

5.4.2 Aplicação para dados reais SAR

Agora, o modelo KBR é aplicado a uma imagem PolSAR da baía de São Francisco (Figura 28), que foi adquirida em 9 de abril de 2008, pelo sistema RADARSAT-2 na banda C com dimensões de 150×150 pixels. Esta imagem foi estudada em detalhes por Azmedroub, Ouazzeddine e Souissi (2016).

Figura 28 – Imagem óptica obtida pelo Google earth.



Fonte: Autoria própria (2020)

Estamos interessados em investigar dois modelos:

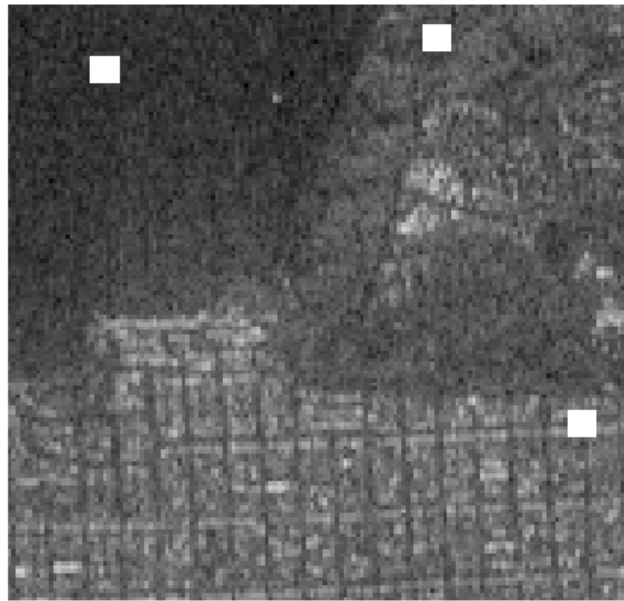
- (i) Como variável resposta, assumimos o vetor de intensidade do pixel do canal HH, diga-se Y_{HH} , e, como variável explanatória, a intensidade do canal HV, diga-se X_{HV} : $\mathbb{E}(Y_{HH}|X_{HV}) = \exp(\beta_0 + \beta_1 X_{HV})$, denotado como $Y_{HH} \sim X_{HV}$.
- (ii) Como variável resposta, assumimos o vetor de intensidade do pixel do canal VV, diga-se Y_{VV} , e X_{HV} como variável explanatória: $\mathbb{E}(Y_{VV}|X_{HV}) = \exp(\beta_0 + \beta_1 X_{HV})$, denotado como $Y_{VV} \sim X_{HV}$.

A Figura 30 apresenta valores das correlações relativas aos pares de intensidade (Y_{HH}, X_{HV}) e (Y_{VV}, X_{HV}) . Para quantificar os mapas de correlação, usamos uma janela 7×7 definida a partir da vizinhança de cada pixel específico. Para os canais HH e HV, as Figuras 30a e 30b apresentam resultados para (HH, HV) . Observa-se que as regiões mais heterogêneas (cenários urbanos) fornecem as maiores correlações. As Figuras 30c e 30d apresentam os valores das

correlações para (VV, HV) . A maioria das áreas heterogêneas também tem correlação mais alta, porém o mapa (VV, HV) apresenta maior número de regiões com correlação fraca do que o mapa (HH, HV) .

A Figura 29 destaca em quadrados brancos três regiões do mapa da baía de São Francisco: oceano, floresta e urbano. A Tabela 11 exibe os resultados de ajuste do modelo KBR para essas

Figura 29 – Imagem SAR de São Francisco (usando o canal HH como nível de cinza) com regiões selecionadas.



Fonte: Autoria própria (2020)

regiões. Em todos os casos, temos evidências para rejeitar $H_0 : \beta_1 = 0$; ou seja, a abordagem baseada em regressão é mais recomendada do que o uso de distribuições não condicionais. Com relação às estimativas de α , regiões mais homogêneas (oceano) têm valores mais altos de $\hat{\alpha}$, enquanto regiões mais heterogêneas (urbanas) assumem valores mais baixos de $\hat{\alpha}$.

As estimativas de β_1 para os modelos de regressão Γ e K -Bessel são positivas; ou seja, há uma relação positiva entre os pares de intensidade $(\log Y_{HH}, X_{HV})$ e $(\log Y_{VV}, X_{HV})$. As regiões mais heterogêneas têm valores mais baixos de β_1 para compensar os retornos mais altos obtidos nas regiões urbanas. A Figura 31 mostra os resultados dos ajustes de regressão que indica uma diferença não expressiva entre os modelos de regressão Γ e KB .

Para avaliar se os modelos estão bem ajustados, fizemos uma análise de resíduos por meio de envelopes simulados em cada situação. As Figuras 32, 33 e 34 mostram os envelopes

simulados para regiões oceânicas, florestais e urbanas, respectivamente. É notável que apenas o modelo KBR é adequado para as três texturas. A Tabela 10 indica os valores- p do teste de *Kolmogorov-Smirnov*. O modelo KBR é o único a ter um desempenho adequado em todos os casos, indicando a KBR como a menos sensível a diferentes tipos de terreno. Embora, em termos preditivos os modelos sejam próximos, quando é avaliado o comportamento dos resíduos, apenas o nosso modelo está bem ajustado em cenários urbanos. Dessa forma, assumir os modelos de regressão baseado nas distribuições marginais Gaussiana e gama, podem levar a conclusões erradas (Exemplo: construção de testes de hipóteses e intervalos de confiança).

Tabela 10 – Valores p do teste de *Kolmogorov-Smirnov* para normalidade dos resíduos do modelo de regressão

Regiões	$Y_{HH} \sim X_{HV}$			$Y_{VV} \sim X_{HV}$		
	KB	Gama	Normal	KB	Gama	Normal
Oceano	0,17	0,35	0,03	0,89	0,77	0,13
Floresta	0,95	0,26	0,01	0,81	0,62	0,01
Urbana	0,25	0,09	0,00	0,26	0,01	0,00

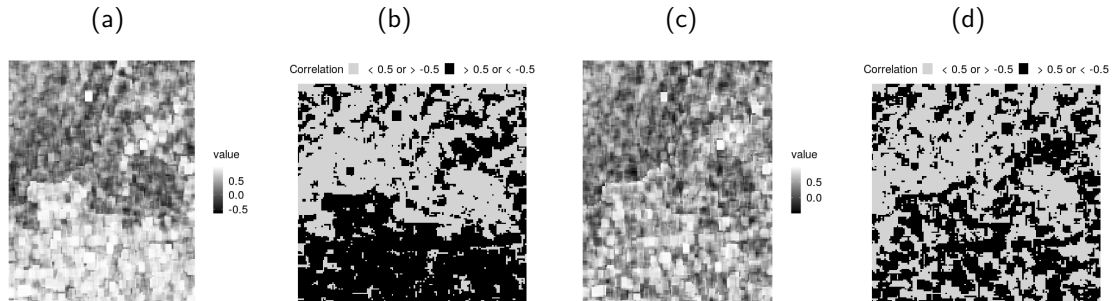
Fonte: Autoria própria (2020)

Tabela 11 – Ajuste KBR para três regiões diferentes: oceano, floresta e urbana, Legenda: est. (estatística)

Regiões	Modelos	θ	$Y_{HH} \sim X_{HV}$				$Y_{VV} \sim X_{HV}$			
			estimativas	EP	est. t	valor p	estimativas	EP	est. t	valor p
Oceano	K-Bessel	$\hat{\alpha}$	37,270	4,895	—	—	93,675	4,342	—	—
		$\hat{\beta}_0$	-5,393	0,013	9,648	0,002	-4,243	0,011	15,539	0,000
		$\hat{\beta}_1$	770,214	10,746	182,355	0,000	856,769	8,293	173,673	0,000
	Normal	$\hat{\beta}_0$	0,004	0,001	3,353	0,002	0,009	0,004	2,547	0,014
		$\hat{\beta}_1$	6,501	1,702	3,819	0,000	27,420	5,605	4,892	0,000
	Gama	$\hat{\beta}_0$	-5,410	0,154	-35,211	0,000	-4,281	0,134	-31,913	0,000
Floresta	K-Bessel	$\hat{\alpha}$	8,027	1,547	—	—	12,917	2,088	—	—
		$\hat{\beta}_0$	-4,220	0,024	18,916	0,000	-4,283	0,022	22,757	0,000
		$\hat{\beta}_1$	42,662	1,151	109,188	0,000	44,836	1,135	114,932	0,000
	Normal	$\hat{\beta}_0$	0,015	0,007	2,054	0,046	0,012	0,006	1,960	0,056
		$\hat{\beta}_1$	1,092	0,345	3,166	0,003	1,195	0,299	3,998	0,000
	Gama	$\hat{\beta}_0$	-4,214	0,217	-19,455	0,000	-4,290	0,171	-25,153	0,000
Urbana	K-Bessel	$\hat{\alpha}$	3,695	0,497	—	—	2,072	0,134	—	—
		$\hat{\beta}_0$	-2,512	0,026	35,877	0,000	-2,205	0,029	18,661	0,000
		$\hat{\beta}_1$	18,624	0,415	74,721	0,000	15,236	0,500	51,962	0,000
	Normal	$\hat{\beta}_0$	-0,035	0,064	-0,547	0,587	0,055	0,067	0,817	0,418
		$\hat{\beta}_1$	6,427	1,056	6,083	0,000	4,744	1,120	4,234	0,000
	Gama	$\hat{\beta}_0$	-2,440	0,261	-9,354	0,000	-2,142	0,271	-7,907	0,000
		$\hat{\beta}_1$	17,873	4,338	4,120	0,000	14,899	4,506	3,307	0,002

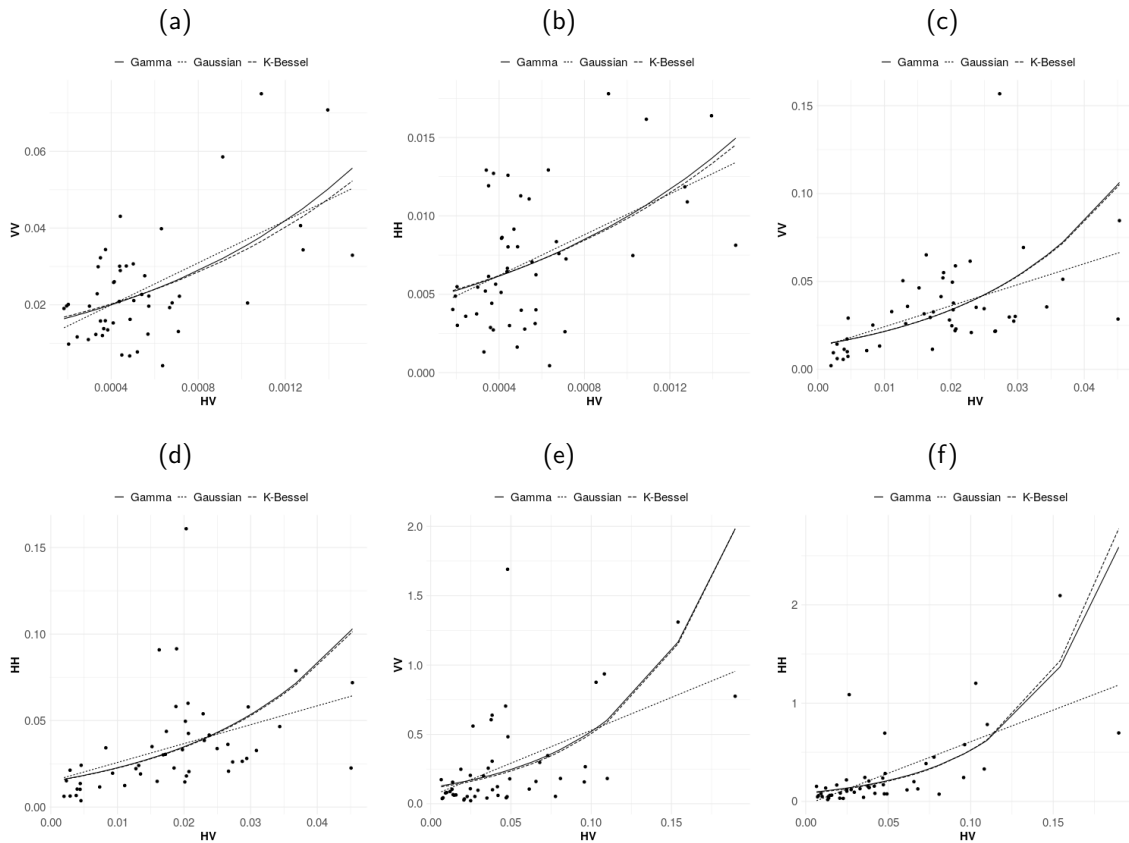
Fonte: Autoria própria (2020)

Figura 30 – Correlação pixel a pixel. (a) Correlação entre as intensidades dos canais HH e HV, (b) correlação entre as intensidades dos canais HH e HV, (c) correlação entre as intensidades dos canais VV e HV e (d) correlação entre as intensidades dos canais VV e HV.



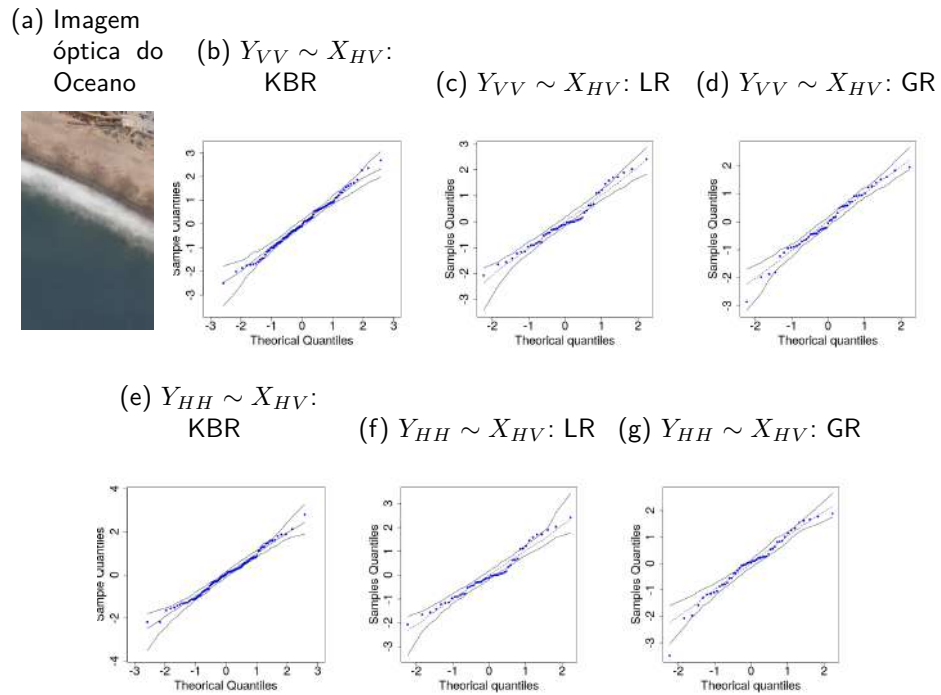
Fonte: Autoria própria (2020)

Figura 31 – Ajustes dos modelos de regressão usados. (a) $Y_{VV} \sim X_{HV}$ para a região do oceano, (b) $Y_{HH} \sim X_{HV}$ para a região do oceano, (c) $Y_{VV} \sim X_{HV}$ para a região da floresta, (d) $Y_{HH} \sim X_{HV}$ para a região da floresta, (e) $Y_{VV} \sim X_{HV}$ para a região urbana e (f) $Y_{HH} \sim X_{HV}$ para a região urbana.



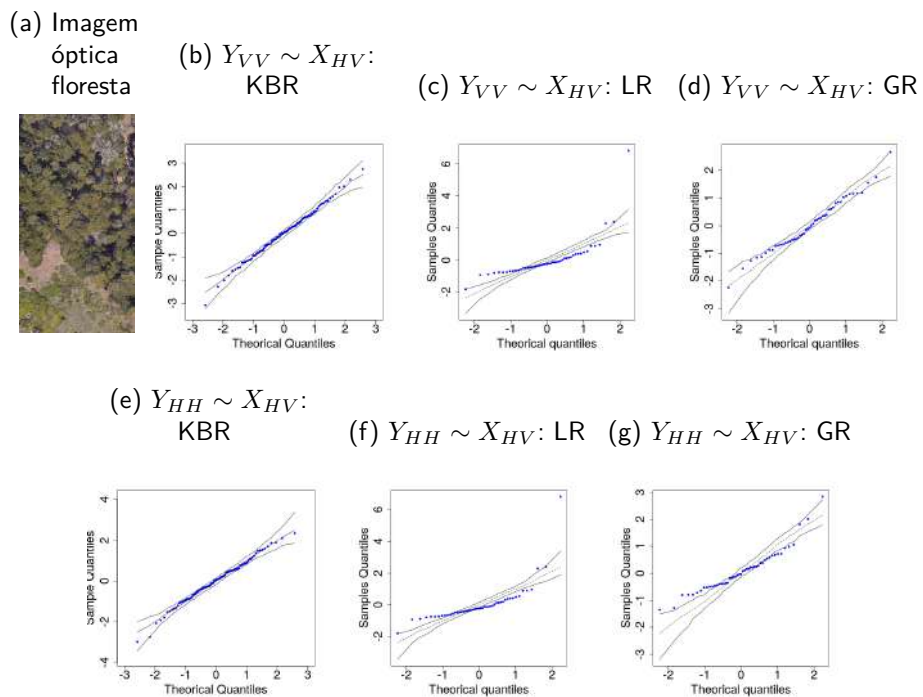
Fonte: Autoria própria (2020)

Figura 32 – Análise de diagnóstico em dados do oceano.



Fonte: Autoria própria (2020)

Figura 33 – Análise de diagnóstico em dados do floresta.



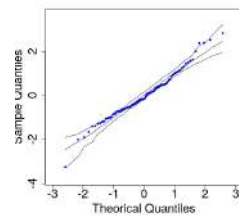
Fonte: Autoria própria (2020)

Figura 34 – Análise de diagnóstico em dados do urbano.

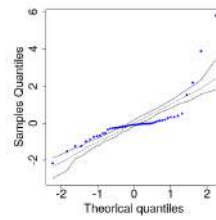
(a) Imagem
óptica
urbana



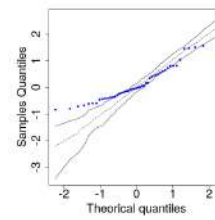
(b) $Y_{VV} \sim X_{HV}$:
KBR



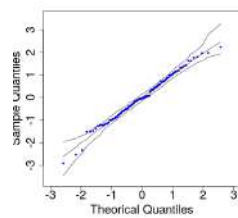
(c) $Y_{VV} \sim X_{HV}$: LR



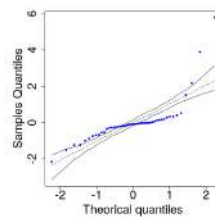
(d) $Y_{VV} \sim X_{HV}$: GR



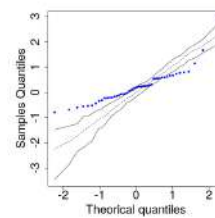
(e) $Y_{HH} \sim X_{HV}$:
KBR



(f) $Y_{HH} \sim X_{HV}$: LR



(g) $Y_{HH} \sim X_{HV}$: GR



Fonte: Autoria própria (2020)

5.5 CONCLUSÕES

Neste capítulo, propomos um novo modelo de regressão denominado regressão K-Bessel (KBR) para extrair informações de imagens SAR. O paradigma de descrever intensidades por meio de uma distribuição não condicional (como feito na prática) foi revisitado, sugerindo uma abordagem baseada em KBR. A KBR foi inspirada no fato de que - ao capturar dados PolSAR - as intensidades de vários canais são coletadas ao mesmo tempo, mas pouco se investiga sobre a relação entre essas intensidades. Várias propriedades matemáticas da KBR foram derivadas: função score, MIF e resíduos quantílicos. Estudos de simulação Monte Carlo para diferentes níveis de textura, variáveis preditoras e ENL mostraram que as EMVs alcançaram a consistência assintótica esperada para tamanhos de amostra usados na prática, sendo mais pronunciados para grande número de *looks* e pequenos valores do parâmetro de dispersão (ou rugosidade, termos físicos). Por fim, esse modelo foi aplicado a dados reais, revelando que o KBR pode superar os modelos clássicos como normal e gama.

6 NOVO MODELO KB -ARMA

6.1 ESTADO DA ARTE E PROPOSTA

O uso de distribuições de probabilidade em problemas com imagens SAR tem sido bastante difundido ao longo dos anos como exemplo, têm-se as distribuições Rician e Gaussiana inversa (ELTOFT, 2005), Rayleigh (PALM et al., 2019), Rayleigh generalizada (KURUOGLU; ZERUBIA, 2004) e Gaussiana Rayleigh generalizada (MOSER; ZERUBIA; SERPICO, 2006). Mais recentemente, Vasconcelos et al. (2020) e Cordeiro et al. (2019) têm avançado em novas propostas de distribuições para imagens SAR. Sob a perspectiva da MM, Frery et al. (1997) propuseram uma nova classe de distribuições, denominada $\mathcal{G}$, que é capaz de modelar cenários moderados e extremamente heterogêneos. Como caso particular desta classe temos a distribuição KB , indicada para cenários moderadamente heterogêneos.

Diversos trabalhos na literatura SAR têm se destacado no uso da distribuição KB (OLIVER, 1993; LOPES; LAUR; NEZRY, 1990). A estimação dos parâmetros da KB tem sido feita por MV (JOUGHIN; PERCIVAL; WINEBRENNER, 1993; ROBERTS; FURUI, 2000; ABRAHAM; LYONS, 2010), método dos momentos (BIAN; MERCER, 2015; ABRAHAM; LYONS, 2010) e logaritmo dos cumulantes (BREKKE; ANFINSEN, 2011; REDDING, 1999). Além disso, vários métodos de pós-processamento têm usado a distribuição KB como *input*: detecção de bordas (OLIVER, 1993), detecção de navios (BIAN; MERCER, 2015; VACHON; KABATOFF; QUINN, 2014), segmentação (BEAULIEU; TOUZI, 2004), dentre outros. Entretanto, esses trabalhos assumem que todos os *pixels* são independentes de sua vizinhança, o que pode gerar imprecisões ou perda de interpretabilidade. Nesta tese, propõe-se um modelo tipo ARMA tendo marginal KB que pode ser utilizado tanto como aproximação espacial para uma CAM 2D como para descrever a dinâmica de atributos (como os índices vegetativos NDVI e EVI) em imagens de radar ou satélite distintas.

Neste trabalho, propomos um novo processo ARMA com distribuição marginal KB -Bessel, denominado modelo KB -ARMA. Sua proposta está associada à formação física de imagens SAR. Derivamos expressões para a função score e MIF. Apresenta-se também um procedimento para obter EMVs e quantificar seu comportamento assintótico por meio de experimentos Monte Carlo. Uma aplicação para dados reais é feita para imagem São Francisco (EUA). Os resultados indicam que o processo proposto pode fornecer um desempenho melhor do que o modelo Γ -ARMA.

Esse capítulo se divide da seguinte forma. Na Seção 6.2, nosso modelo baseado na distribuição KB é apresentado assim como algumas de suas propriedades são discutidas. Na Seção 6.3, é apresentado um estudo de simulação Monte Carlo para avaliar o comportamento assintótico dos EMVs para os parâmetros do processo KB -ARMA. Além disso, estudos de comparação de desempenho para imagens reais SAR são discutidos na Seção 6.4. Por fim, a conclusão é apresentada na Seção 6.5.

6.2 O MODELO KB -ARMA

Até agora na literatura, a distribuição KB foi empregada considerando o contexto de independência. No entanto, por assumir dependência aos dados por trás das imagens, diversas aplicações em processamento de imagem SAR (por exemplo, filtragem, segmentação, classificação) são conhecidas (LEE; POTTIER, 2009; BUSTOS; OJEDA; VALLEJOS, 2009). Com o objetivo de dar uma resposta a esta lacuna, essa seção descreve as intensidades por um modelo ARMA com distribuição marginal KB . Para tal fim, o mecanismo lógico seguido por Benjamin, Rigby e Stasinopoulos (2003) é feito para derivar o novo processo.

Seja $\{Z_t; t = 1, \dots, n\}$ uma série temporal n -dimensional tal que a distribuição condicional de Z_t dado um conjunto de informações passadas, diga-se $\mathcal{F}_{t-1}$, é KB . As funções densidade e distribuição acumulada de $[Z_t|\mathcal{F}_{t-1}]$ são dadas por

$$f(Z_t|\mathcal{F}_{t-1}; \alpha, L) = \frac{2z_t^{-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(L)} \left(\frac{L\alpha z_t}{\mu_t} \right)^{\frac{L+\alpha}{2}} K_{\alpha-L} \left(2\sqrt{\frac{L\alpha z_t}{\mu_t}} \right)$$

e

$$F(Z_t|\mathcal{F}_{t-1}; \alpha, L) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(L)} G_{1,3}^{2,1} \left[\frac{\alpha L}{\mu} z_t \left| \begin{matrix} 1 \\ \alpha, L, 0 \end{matrix} \right. \right].$$

A média e variância condicional são dadas por, respectivamente,

$$\mathbb{E}(Z_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \mu_t \quad \text{e} \quad \text{Var}(Z_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \mu_t^2 \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{L} + \frac{1}{\alpha L} \right].$$

Essas duas identidades têm significado físico: (i) a média do retorno μ_t pode tanto influenciar a vizinhança de uma imagem como atributos de imagens obtidos nos passos subsequentemente anteriores e (ii) o parâmetro L impõe um controle na interferência do *speckle* nos dados SAR.

Aqui, μ_t é relacionado a um preditor, diga-se η_t , por meio de funções de ligações $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

No componente sistemático do modelo KB -ARMA, como discutido na Seção 2.4.1, existem dois termos, $\mathbf{x}_t^\top \boldsymbol{\beta}$ (termos de regressão) e τ_t (termos autorregressivo e de médias móveis). Portanto, a estrutura geral para μ_t tem a forma

$$g(\mu_t) = \eta_t = \mathbf{x}_t^\top \boldsymbol{\beta} + \tau_t,$$

em que $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^k$ é um vetor k -dimensional contendo as covariáveis no instante t , $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_k)^\top$ é o conjunto de parâmetros devido à parte linear, τ_t pode ser entendido como um preditor indexado no tempo t (ou 1D espacial)

$$\tau_t = \delta + \sum_{i=1}^p \phi_i [g(z_{t-i}) - \mathbf{x}_{t-i}^\top \boldsymbol{\beta}] + \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{t-j},$$

em que $\epsilon_{t-j} = g(z_{t-1}) - \eta_{t-1}$, $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_p)^\top$ e $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_q)^\top$ são os coeficientes AR e MA, respectivamente.

6.2.1 Inferência por verossimilhança condicional

Considere o problema de estimação dos parâmetros do KB -ARMA, $\boldsymbol{\nu} = (\delta, \boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\phi}^\top, \boldsymbol{\theta}^\top, L, \alpha)$. Sejam $m = \max\{p, q\}$ e $\{Z_t | \mathcal{F}_{t-1}\}_{t=1}^n$ tal que $[Z_t | \mathcal{F}_{t-1}] \sim KB(\alpha, \mu_t(-\alpha - 1), L)$. Dado o vetor de série $\{z_t; t = m+1, \dots, n\}$, a função de log-verossimilhança em $\boldsymbol{\nu}$ tem a forma

$$\ell(\boldsymbol{\nu}) = \ell(\boldsymbol{\nu}; z_1, \dots, z_n) = \sum_{t=m+1}^n \log f(z_t | \mathcal{F}_{t-1}; \alpha, L, \gamma_t) = \sum_{t=m+1}^n \ell_t(\boldsymbol{\nu}), \quad (6.1)$$

em que

$$\begin{aligned} \ell_t(\boldsymbol{\nu}) = & \log(2) - \log \Gamma(\alpha) - \log \Gamma(L) + \left(\frac{L + \alpha}{2} \right) \log(L\alpha) \\ & + (\log K_t - \log z_t) + \left(\frac{L + \alpha}{2} \right) (\log z_t - \log \mu_t) \end{aligned}$$

e $K_t = K_{\alpha-L} \left(2\sqrt{L\alpha \frac{z_t}{\mu_t}} \right)$. O vetor escore associado,

$$U_{\boldsymbol{\nu}} = \left(U_\alpha, U_\delta, U_{\boldsymbol{\beta}^\top}, U_{\boldsymbol{\phi}^\top}, U_{\boldsymbol{\theta}^\top} \right) = \left(\frac{\partial \ell}{\partial \alpha}, \frac{\partial \ell}{\partial \delta}, \frac{\partial \ell}{\partial \boldsymbol{\beta}^\top}, \frac{\partial \ell}{\partial \boldsymbol{\phi}^\top}, \frac{\partial \ell}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top} \right),$$

é

$$U_{\delta} = \sum_{t=m+1}^n \frac{\partial \ell_t(\boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \delta}, \quad U_{\beta} = \sum_{t=m+1}^n \frac{\partial \ell_t(\boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \beta},$$

$$U_{\phi} = \sum_{t=m+1}^n \frac{\partial \ell_t(\boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \phi}, \quad U_{\theta} = \sum_{t=m+1}^n \frac{\partial \ell_t(\boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \theta},$$

e

$$U_{\alpha} = (n-m) \left\{ \frac{1}{2} \left[\log(L\alpha) + \frac{L}{\alpha} + 1 \right] - \psi(\alpha) \right\} + \frac{1}{2} \sum_{t=m+1}^n (\log(z_t) - \log(\mu_t)) + \sum_{t=m+1}^n \frac{K_t^{(\alpha)}}{K_t},$$

em que $\psi(\cdot)$ é a função digamma, $K_t^{(\alpha)} = \partial K_t / \partial \alpha$ e os resultados para

$$\frac{\partial \ell_t(\boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t}, \quad \frac{\partial \eta_t}{\partial \delta}, \quad \frac{\partial \eta_t}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \eta_t}{\partial \phi} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \eta_t}{\partial \theta}$$

são dados no Apêndice C.

Após algumas manipulações algébricas, os primeiros quatro elementos do vetor escore pode ser representado em termos matriciais como $U_{\delta} = \mathbf{d}^{\top} \mathbf{T} \mathbf{a}$, $U_{\beta} = \mathbf{M}^{\top} \mathbf{T} \mathbf{a}$, $U_{\phi} = \mathbf{P}^{\top} \mathbf{T} \mathbf{a}$ e $U_{\theta} = \mathbf{R}^{\top} \mathbf{T} \mathbf{a}$, em que $\mathbf{T} = \text{diag}\{1/g'(\mu_{m+1}), \dots, 1/g'(\mu_n)\}$, $\mathbf{d} = \left(\frac{\partial \eta_{m+1}}{\partial \delta}, \dots, \frac{\partial \eta_n}{\partial \delta} \right)^{\top}$, $\mathbf{a} = (a_{m+1}, \dots, a_n)^{\top}$ tal que $a_t = \frac{\partial \ell_t(\boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t}$ e $\mathbf{M}$, $\mathbf{P}$ e $\mathbf{R}$ são matrizes com dimensões $(n-m) \times k$, $(n-m) \times p$ e $(n-m) \times q$, respectivamente, com entradas (i, j)

$$M_{i,j} = \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j}, \quad P_{i,j} = \frac{\partial \eta_i}{\partial \phi_j} \quad \text{e} \quad R_{i,j} = \frac{\partial \eta_i}{\partial \theta_j}.$$

As EMVs para $\boldsymbol{\nu}$ têm a forma

$$\hat{\boldsymbol{\nu}} = \arg \max_{\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^{p+q+k+2}} [\ell(\boldsymbol{\nu}; Z_1, \dots, Z_n)]$$

ou, equivalentemente, podem ser obtidas como solução de $U_{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{0}$. Observe que este sistema não tem solução em forma fechada e, portanto, algoritmos de otimização não linear devem ser usados para maximizar a $\ell(\boldsymbol{\nu})$; como algoritmos de Newton ou quase Newton (NOCEDAL; WRIGHT, 2006). Outra importante quantidade é MIF, que é brevemente deduzida na proposição seguinte.

Proposição 2 *Após algumas manipulações algébricas, sendo*

$$\mathbf{W}_1 = \text{diag} \left\{ \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell_{m+1}}{\partial \mu_{m+1}^2} \right] \frac{1}{g'(\mu_{m+1})}, \dots, \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell_n}{\partial \mu_n^2} \right] \frac{1}{g'(\mu_n)} \right\}$$

e

$$\mathbf{W}_2 = \text{diag} \left\{ \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell_{m+1}}{\partial \mu_{m+1} \partial \alpha} \right] \frac{1}{g'(\mu_{m+1})}, \dots, \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell_n}{\partial \mu_n \partial \alpha} \right] \frac{1}{g'(\mu_n)} \right\}$$

, a MIF, denominada $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\boldsymbol{\nu})$, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\boldsymbol{\nu}) &= \mathbb{E} \left(\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\nu})}{\partial \boldsymbol{\nu}^\top} \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\nu})}{\partial \boldsymbol{\nu}} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right) = -\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\nu})}{\partial \boldsymbol{\nu}^\top \partial \boldsymbol{\nu}} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right) \\ &= \begin{bmatrix} K_{\beta\beta} & K_{\beta\delta} & K_{\beta\phi} & K_{\beta\theta} & K_{\beta\alpha} \\ K_{\delta\beta} & K_{\delta\delta} & K_{\delta\phi} & K_{\delta\theta} & K_{\delta\alpha} \\ K_{\phi\beta} & K_{\phi\delta} & K_{\phi\phi} & K_{\phi\theta} & K_{\phi\alpha} \\ K_{\theta\beta} & K_{\theta\delta} & K_{\theta\phi} & K_{\theta\theta} & K_{\theta\alpha} \\ K_{\alpha\beta} & K_{\alpha\delta} & K_{\alpha\phi} & K_{\alpha\theta} & K_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

em que $K_{\beta\beta} = \mathbf{M}^\top \mathbf{W}_1 \mathbf{M}$, $K_{\beta\delta} = K_{\delta\beta}^\top = \mathbf{M}^\top \mathbf{W}_1 \mathbf{d}$, $K_{\beta\phi} = K_{\phi\beta}^\top = \mathbf{M}^\top \mathbf{W}_1 \mathbf{P}$, $K_{\beta\theta} = K_{\theta\beta}^\top = \mathbf{M}^\top \mathbf{W}_1 \mathbf{R}$, $K_{\beta\delta} = K_{\delta\beta}^\top = \mathbf{M}^\top \mathbf{W}_1 \mathbf{d}$, $K_{\delta\delta} = \mathbf{d}^\top \mathbf{W}_2 \mathbf{d}$, $K_{\delta\phi} = K_{\phi\delta}^\top = \mathbf{d}^\top \mathbf{W}_1 \mathbf{P}$, $K_{\delta\theta} = K_{\theta\delta}^\top = \mathbf{d}^\top \mathbf{W}_1 \mathbf{R}$, $K_{\phi\phi} = \mathbf{P}^\top \mathbf{W}_1 \mathbf{P}$, $K_{\phi\theta} = K_{\theta\phi}^\top = \mathbf{P}^\top \mathbf{W}_1 \mathbf{R}$, $K_{\theta\theta} = -c_2 \mathbf{R}^\top \mathbf{W}_1 \mathbf{R}$, $K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha} = \mathbf{M}^\top \mathbf{W}_2$, $K_{\alpha\delta} = K_{\delta\alpha} = \mathbf{d}^\top \mathbf{W}_2$, $K_{\alpha\phi} = K_{\phi\alpha} = \mathbf{P}^\top \mathbf{W}_2$, $K_{\alpha\theta} = K_{\theta\alpha} = \mathbf{R}^\top \mathbf{W}_2$ e $K_{\alpha\alpha} = (n - m) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha - L}{\alpha^2} \right) - \Psi^{(1)}(\alpha) \right] + \sum_{t=m+1}^n \mathbb{E} \left[\frac{K_t K_t^{(\alpha\alpha)} - [K_t^{(\alpha)}]^2}{K_t^2} \right]$.

Detalhes da expressão de MIF são apresentados no Apêndice F.

Para adaptar as predições do nosso modelo para imagens SAR, primeiro definimos o janelamento $\mathbf{W}$, como discutido no Capítulo 3. Optamos por fazer dois tipos de ordenação dos pixels por janela: (i) linhas ($\Leftarrow$ e $\Rightarrow$) e (ii) colunas ($\Downarrow$ e $\Uparrow$) da imagem sequencialmente. A Figura 8 apresentada na Seção 3.3 ilustra as quatro séries espaciais consideradas no janelamento. Na sequência, baseada na linearidade das equações de predições (BROCKWELL; DAVIS, 2009), sugere-se o uso do valor suavizado para a entrada $z(t_1, t_2)$ da imagem SAR,

$$\mu(t_1, t_2) = \frac{1}{4} \sum_{l=1}^4 g^{-1} \left(\delta_l + \sum_{i=1}^{p_l} \phi_{l,i} g(z[(t_1, t_2) - \mathbf{s}_{l,i}]) + \sum_{j=1}^{q_l} \theta_{l,i} \epsilon[(t_1, t_2) - \mathbf{s}_{l,j}] \right), \quad (6.2)$$

em que $\mathbf{s}_{1,i} = (i, 0)$, $\mathbf{s}_{2,i} = (-i, 0)$, $\mathbf{s}_{3,i} = (0, i)$, $\mathbf{s}_{4,i} = (0, -i)$,

$$\epsilon[(t_1, t_2) - \mathbf{s}_{l,i}] = g(z[(t_1, t_2) - \mathbf{s}_{l,i}]) - g(\mu[(t_1, t_2) - \mathbf{s}_{l,i}]).$$

6.3 ESTUDO NÚMÉRICO

Nesta seção, apresenta-se um estudo de simulação Monte Carlo para avaliar as estimativas dos parâmetros do KB -ARMA. Neste sentido, três funções de ligações são consideradas: (i) Logarítmica ($\log(\cdot)$), (ii) raiz quadrada ($\sqrt{\cdot}$) and (iii) função logarítmica de Lambert ($\log W(\cdot)$) (CORLESS et al., 1996). Essa última função de ligação não tem sido usada como uma função de ligação em modelos MLG, sendo uma contribuição desta tese. Os seguintes modelos particulares são usados:

- KB -AR(1): $\nu = (\phi, L, \delta)$: $g(\mu_t) = \delta + \phi g(z_{t-1})$,
- KB -MA(1): $\nu = (\theta, L, \delta)$: $g(\mu_t) = \delta + \theta[g(z_{t-1}) - g(\mu_{t-1})]$,
- KB -ARMA(1,1): $\nu = (\phi, \theta, L, \delta)$: $g(\mu_t) = \delta + \phi g(z_{t-1}) + \theta[g(z_{t-1}) - g(\mu_{t-1})]$,

em que $\phi, \theta \in \{-0,8; -0,5; 0,5; 0,8\}$, $\alpha = 3$, $L = 4$ e 8 e séries de tamanho $n = 49, 121$ e 500 . Como figuras de mérito, foram adotadas as medidas de acurácia MSE, MASE, sMAPE e UMBRAE para avaliar o desempenho das estimativas dos parâmetros e previsões (Equações apresentadas na Seção 2.4.3). Essas medidas são amplamente usadas na literatura para avaliar a acurácia das previsões em modelos de séries temporais (CHEN; TWYCCROSS; GARIBALDI, 2017). Ainda, foram utilizadas 1000 réplicas Monte Carlo em todos os estudos de simulação.

As Tabelas 12, 13 e 14 apresentam os valores das médias e MSE das estimativas dos parâmetros para os modelos KB -AR(1), KB -MA(1) e KB -ARMA(1,1), respectivamente. Em geral, os valores médios das estimativas dos parâmetros aproximam-se dos valores reais. Além disso, o MSE diminui quando o tamanho da série aumenta, como esperado. Com respeito aos valores de $\hat{\alpha}$, para os modelos AR(1) e MA(1), as estimativas não são influenciadas pela variação dos valores de ϕ e θ . Entretanto, para o processo ARMA(1,1), quando os valores de $|\phi|$ ou $|\theta|$ aumentam, a convergência de $\hat{\alpha}$ é mais lenta. Quando comparamos o MSE das estimativas de α , nota-se que: (i) Para valores positivos de ϕ ou θ , a função de ligação logarítmica de W de Lambert, desempenha melhor quando estão próximos de 1, (ii) para valores negativos de ϕ ou θ , a função de ligação raiz quadrada apresentou os melhores resultados e (iii) para valores de ϕ ou θ iguais a $-0,5$ e $0,5$, a função de ligação logarítmica apresentou os melhores resultados. Por exemplo, para o modelo AR(1), as seguintes desigualdades do MSE são satisfeitas para $\hat{\alpha}$, considerando $n = 49$ e $L = 4, 8$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{MSE}_{\sqrt{\cdot}}(\hat{\alpha}) < \text{MSE}_{\log(\cdot)}(\hat{\alpha}) < \text{MSE}_{\log W(\cdot)}(\hat{\alpha}) \quad \text{para } \phi = -0,8. \\ \\ \text{MSE}_{\log(\cdot)}(\hat{\alpha}) < \text{MSE}_{\log W(\cdot)}(\hat{\alpha}) < \text{MSE}_{\sqrt{\cdot}}(\hat{\alpha}) \quad \text{para } \phi = -0,5 \text{ e } 0,5 \\ \\ \text{MSE}_{\log W(\cdot)}(\hat{\alpha}) < \text{MSE}_{\sqrt{\cdot}}(\hat{\alpha}) < \text{MSE}_{\log(\cdot)}(\hat{\alpha}) \quad \text{para } \phi = 0,8. \end{array} \right.$$

Para $n = 121, 500$ e $L = 4$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{MSE}_{\log(\cdot)}(\hat{\alpha}) < \text{MSE}_{\sqrt{\cdot}}(\hat{\alpha}) < \text{MSE}_{\log W(\cdot)}(\hat{\alpha}) \quad \text{para } \phi = -0,8. \\ \\ \text{MSE}_{\log(\cdot)}(\hat{\alpha}) < \text{MSE}_{\log W(\cdot)}(\hat{\alpha}) < \text{MSE}_{\sqrt{\cdot}}(\hat{\alpha}) \quad \text{para } \phi = -0,5. \\ \\ \text{MSE}_{\log(\cdot)}(\hat{\alpha}) < \text{MSE}_{\sqrt{\cdot}}(\hat{\alpha}) < \text{MSE}_{\log W(\cdot)}(\hat{\alpha}) \quad \text{para } \phi = 0,5. \\ \\ \text{MSE}_{\sqrt{\cdot}}(\hat{\alpha}) < \text{MSE}_{\log(\cdot)}(\hat{\alpha}) \approx \text{MSE}_{\log W(\cdot)}(\hat{\alpha}) \quad \text{para } \phi = 0,8. \end{array} \right.$$

Para $n = 121, 500$ e $L = 8$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{MSE}_{\log W(\cdot)}(\hat{\alpha}) \approx \text{MSE}_{\log(\cdot)}(\hat{\alpha}) \approx \text{MSE}_{\sqrt{\cdot}}(\hat{\alpha}) \quad \text{Para } \phi = -0,8, -0,5, 0,5, 0,8. \end{array} \right.$$

Para tamanho de amostra pequeno, a função de ligação $\log W(\cdot)$ é mais recomendada para autocorrelações fortemente positivas, enquanto que $\sqrt{\cdot}$ é indicada para autocorrelações fortemente negativa. Para valores grandes do ENL e n , os modelos tendem a desempenhar de maneira similar para as diferentes funções de ligações.

As desigualdades do MSE apresentam o seguinte comportamento para $\hat{\delta}$ e $\hat{\phi}$ no processo AR(1): Para $n = 49, 121, 500$ e $L = 4, 8$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{MSE}_{\log W(\cdot)}(\hat{\delta} \text{ ou } \hat{\phi}) < \text{MSE}_{\log(\cdot)}(\hat{\delta} \text{ ou } \hat{\phi}) < \text{MSE}_{\sqrt{\cdot}}(\hat{\delta} \text{ ou } \hat{\phi}) \quad \text{para } \phi = -0,8 \text{ e } -0,5. \\ \\ \text{MSE}_{\sqrt{\cdot}}(\hat{\delta} \text{ ou } \hat{\phi}) < \text{MSE}_{\log(\cdot)}(\hat{\delta} \text{ ou } \hat{\phi}) < \text{MSE}_{\log W(\cdot)}(\hat{\delta} \text{ ou } \hat{\phi}) \quad \text{para } \phi = 0,5 \text{ e } 0,8. \end{array} \right.$$

Os modelos com ligação $\log W(\cdot)$ apresentam os melhores resultados para autocorrelações negativas, em contra partida os modelos com ligações $\sqrt{\cdot}$ são mais recomendado para autocorrelações positivas. Resultados similares são obtidos para os processos MA(1) e ARMA(1,1).

Tabela 12 – Média e MSE das estimativas dos parâmetros do processo KB -AR(1) com $\alpha = 3$ e $L = 4, 8$

ligação	Medidas	N	$L = 4$				$L = 8$			
			ϕ				ϕ			
			-0, 8	-0, 5	0, 5	0, 8	-0, 8	-0, 5	0, 5	0, 8
$\log(\mu)$	Média($\hat{\alpha}$)	49	3,978	4,204	3,589	3,889	3,469	3,514	3,493	3,439
		121	3,266	3,218	3,258	3,242	3,224	3,147	3,169	3,172
		500	3,056	3,044	3,053	3,036	3,040	3,024	3,033	3,015
	Média($\hat{\delta}$)	49	-0,999	-1,002	-1,118	-1,355	-0,986	-1,009	-1,108	-1,303
		121	-1,000	-1,006	-1,075	-1,149	-0,997	-1,007	-1,061	-1,158
		500	-0,995	-0,994	-1,012	-1,040	-0,996	-0,997	-1,006	-1,044
	Média($\hat{\phi}$)	49	-0,786	-0,494	0,454	0,746	-0,784	-0,499	0,457	0,751
		121	-0,798	-0,499	0,472	0,778	-0,795	-0,501	0,477	0,775
		500	-0,798	-0,497	0,496	0,794	-0,797	-0,500	0,498	0,794
	MSE($\hat{\alpha}$)	49	5,615	13,968	2,881	11,373	1,517	1,512	1,498	1,228
		121	0,493	0,564	0,578	0,658	0,428	0,321	0,294	0,364
		500	0,104	0,087	0,092	0,091	0,059	0,063	0,057	0,049
	MSE($\hat{\delta}$)	49	0,018	0,023	0,131	0,446	0,013	0,020	0,112	0,396
		121	0,007	0,008	0,055	0,150	0,006	0,008	0,047	0,146
		500	0,002	0,003	0,011	0,030	0,001	0,002	0,009	0,028
	MSE($\hat{\phi}$)	49	0,008	0,013	0,017	0,010	0,008	0,013	0,017	0,011
		121	0,003	0,005	0,007	0,003	0,003	0,006	0,007	0,004
		500	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
$\sqrt{\mu}$	Média($\hat{\alpha}$)	49	3,949	4,316	3,614	3,829	3,477	3,520	3,475	3,414
		121	3,278	3,223	3,256	3,235	3,226	3,149	3,172	3,172
		500	3,056	3,045	3,054	3,038	3,039	3,024	3,033	3,016
	Média($\hat{\delta}$)	49	-1,217	-1,089	-0,996	-0,992	-1,264	-1,095	-0,996	-0,984
		121	-1,104	-1,022	-1,000	-0,999	-1,099	-1,042	-0,996	-0,997
		500	-1,023	-1,006	-0,997	-0,999	-1,015	-1,009	-1,000	-0,998
	Média($\hat{\phi}$)	49	-0,722	-0,444	0,490	0,790	-0,719	-0,440	0,494	0,784
		121	-0,764	-0,483	0,500	0,799	-0,769	-0,472	0,494	0,796
		500	-0,794	-0,498	0,496	0,799	-0,797	-0,496	0,500	0,798
	MSE($\hat{\alpha}$)	49	4,823	20,309	4,231	9,180	1,405	1,488	1,476	1,227
		121	0,509	0,579	0,581	0,625	0,424	0,327	0,296	0,369
		500	0,105	0,088	0,095	0,092	0,058	0,063	0,057	0,049
	MSE($\hat{\delta}$)	49	0,183	0,070	0,008	0,005	0,237	0,068	0,006	0,019
		121	0,070	0,022	0,003	0,002	0,063	0,026	0,003	0,001
		500	0,013	0,006	0,001	0,000	0,012	0,006	0,001	0,000
	MSE($\hat{\phi}$)	49	0,024	0,027	0,009	0,005	0,025	0,023	0,010	0,014
		121	0,009	0,009	0,003	0,001	0,007	0,010	0,005	0,001
		500	0,002	0,003	0,001	0,000	0,001	0,002	0,001	0,000
$\log W(\mu)$	Média($\hat{\alpha}$)	49	3,987	4,233	3,589	3,710	3,468	3,520	3,493	3,439
		121	3,299	3,213	3,267	3,290	3,222	3,146	3,170	3,173
		500	3,056	3,046	3,054	3,036	3,040	3,024	3,033	3,015
	Média($\hat{\delta}$)	49	-0,994	-0,998	-1,118	-1,364	-0,990	-1,003	-1,107	-1,315
		121	-0,999	-1,003	-1,068	-1,121	-0,996	-1,005	-1,059	-1,161
		500	-0,996	-0,995	-1,012	-1,035	-0,997	-0,997	-1,006	-1,044
	Média($\hat{\phi}$)	49	-0,784	-0,489	0,454	0,744	-0,785	-0,493	0,458	0,749
		121	-0,796	-0,496	0,474	0,781	-0,793	-0,501	0,477	0,775
		500	-0,798	-0,496	0,496	0,795	-0,798	-0,498	0,498	0,794
	MSE($\hat{\alpha}$)	49	5,768	15,415	2,893	3,196	1,507	1,559	1,495	1,231
		121	0,698	0,566	0,671	0,977	0,422	0,319	0,295	0,364
		500	0,111	0,096	0,100	0,091	0,059	0,063	0,057	0,049
	MSE($\hat{\delta}$)	49	0,010	0,015	0,119	0,464	0,008	0,013	0,104	0,413
		121	0,004	0,005	0,045	0,133	0,003	0,005	0,043	0,149
		500	0,001	0,001	0,010	0,028	0,001	0,001	0,008	0,027
	MSE($\hat{\phi}$)	49	0,004	0,010	0,016	0,011	0,005	0,010	0,017	0,012
		121	0,001	0,003	0,006	0,003	0,001	0,004	0,007	0,004
		500	0,000	0,001	0,001	0,001	0,000	0,001	0,001	0,001

Fonte: Autoria própria (2020)

Tabela 13 – Média e MSE das estimativas dos parâmetros do processo $KB\text{-}MA(1)$ com $\alpha = 3$ e $L = 4, 8$

ligação	Medidas	N	$L = 4$				$L = 8$			
			θ				θ			
			-0, 8	-0, 5	0, 5	0, 8	-0, 8	-0, 5	0, 5	0, 8
$\log(\mu)$	Média($\hat{\alpha}$)	49	3,840	4,293	3,597	3,504	3,363	3,533	3,484	3,228
		121	3,215	3,216	3,250	3,121	3,170	3,143	3,162	3,091
		500	3,041	3,045	3,052	3,015	3,027	3,023	3,032	2,997
	Média($\hat{\delta}$)	49	-1,011	-1,021	-1,003	-1,019	-1,006	-1,020	-1,012	-1,012
		121	-1,004	-1,007	-1,007	-0,999	-1,003	-1,007	-1,007	-1,002
		500	-1,000	-0,999	-1,002	-1,003	-1,000	-1,000	-1,000	-1,006
	Média($\hat{\theta}$)	49	-0,827	-0,554	0,496	0,755	-0,821	-0,548	0,491	0,742
		121	-0,813	-0,507	0,493	0,780	-0,809	-0,515	0,498	0,777
		500	-0,802	-0,501	0,504	0,793	-0,800	-0,503	0,501	0,794
	MSE($\hat{\alpha}$)	49	5,104	16,035	2,995	3,523	1,162	1,496	1,558	0,937
		121	0,443	0,564	0,569	0,518	0,369	0,314	0,291	0,306
		500	0,102	0,088	0,095	0,089	0,056	0,063	0,057	0,048
	MSE($\hat{\delta}$)	49	0,002	0,006	0,033	0,047	0,001	0,004	0,022	0,036
		121	0,001	0,002	0,014	0,018	0,000	0,002	0,010	0,015
		500	0,000	0,000	0,004	0,005	0,000	0,000	0,003	0,004
	MSE($\hat{\theta}$)	49	0,012	0,028	0,019	0,014	0,012	0,025	0,019	0,016
		121	0,003	0,007	0,007	0,004	0,004	0,007	0,007	0,005
		500	0,001	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
$\sqrt{\mu}$	Média($\hat{\alpha}$)	49	3,862	4,248	3,613	3,805	3,372	3,521	3,506	3,349
		121	3,247	3,207	3,265	3,209	3,176	3,144	3,169	3,122
		500	3,040	3,046	3,053	3,021	3,027	3,024	3,032	3,001
	Média($\hat{\delta}$)	49	-0,992	-1,004	-1,001	-0,999	-1,004	-0,998	-0,999	-0,999
		121	-0,999	-0,995	-1,000	-1,000	-1,000	-0,989	-0,999	-1,000
		500	-1,004	-1,003	-1,000	-1,000	-1,002	-1,002	-1,000	-1,000
	Média($\hat{\theta}$)	49	-0,767	-0,502	0,532	0,808	-0,769	-0,491	0,540	0,813
		121	-0,787	-0,492	0,512	0,788	-0,788	-0,486	0,516	0,800
		500	-0,799	-0,504	0,499	0,797	-0,798	-0,500	0,502	0,797
	MSE($\hat{\alpha}$)	49	5,664	17,657	3,139	11,492	1,323	1,540	1,556	1,279
		121	0,678	0,560	0,682	0,908	0,398	0,315	0,295	0,351
		500	0,112	0,103	0,102	0,094	0,057	0,063	0,057	0,047
	MSE($\hat{\delta}$)	49	0,024	0,008	0,001	0,000	0,007	0,006	0,001	0,000
		121	0,004	0,003	0,000	0,000	0,003	0,018	0,000	0,000
		500	0,001	0,001	0,000	0,000	0,001	0,001	0,000	0,000
	MSE($\hat{\theta}$)	49	0,016	0,023	0,019	0,010	0,013	0,023	0,020	0,011
		121	0,003	0,006	0,004	0,003	0,003	0,010	0,006	0,003
		500	0,001	0,001	0,001	0,000	0,001	0,002	0,001	0,000
$\log W(\mu)$	Média($\hat{\alpha}$)	49	3,795	4,146	3,615	3,559	3,341	3,543	3,488	3,317
		121	3,246	3,215	3,269	3,218	3,176	3,147	3,169	3,131
		500	3,039	3,046	3,052	3,028	3,024	3,023	3,033	3,006
	Média($\hat{\delta}$)	49	-1,001	-1,011	-1,004	-1,029	-0,998	-1,012	-1,009	-1,020
		121	-1,001	-1,004	-1,005	-1,005	-1,000	-1,005	-1,006	-1,009
		500	-0,999	-0,999	-1,002	-1,005	-0,999	-0,999	-1,000	-1,007
	Média($\hat{\theta}$)	49	-0,814	-0,536	0,501	0,780	-0,812	-0,539	0,498	0,776
		121	-0,806	-0,503	0,497	0,792	-0,805	-0,514	0,501	0,790
		500	-0,799	-0,500	0,504	0,796	-0,798	-0,502	0,502	0,797
	MSE($\hat{\alpha}$)	49	4,653	8,112	3,002	2,581	1,167	1,549	1,481	0,969
		121	0,641	0,572	0,679	0,835	0,402	0,323	0,296	0,354
		500	0,111	0,096	0,098	0,091	0,057	0,063	0,057	0,048
	MSE($\hat{\delta}$)	49	0,001	0,003	0,018	0,027	0,001	0,002	0,012	0,020
		121	0,000	0,001	0,006	0,011	0,000	0,001	0,005	0,009
		500	0,000	0,000	0,002	0,003	0,000	0,000	0,002	0,002
	MSE($\hat{\theta}$)	49	0,011	0,018	0,017	0,011	0,011	0,019	0,019	0,012
		121	0,003	0,005	0,006	0,003	0,004	0,005	0,006	0,004
		500	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001

Fonte: Autoria própria (2020)

Tabela 14 – Média e MSE das estimativas dos parâmetros do processo KB -ARMA(1,1) com $\alpha = 3$ e $L = 4, 8$

ligação	Medidas	N	$L = 4$ $\phi = \theta$				$L = 8$ $\phi = \theta$			
			-0, 8	-0, 5	0, 5	0, 8	-0, 8	-0, 5	0, 5	0, 8
$\log(\mu)$	Média($\hat{\alpha}$)	49	2,895	4,143	3,990	2,440	2,719	3,506	3,531	2,540
		121	2,593	3,288	3,158	2,423	2,711	3,193	3,152	2,465
		500	2,662	3,047	3,050	2,597	2,774	3,052	3,020	2,626
	Média($\hat{\delta}$)	49	-0,847	-0,973	-1,089	-1,259	-0,869	-0,987	-1,063	-1,215
		121	-0,887	-1,001	-1,021	-0,947	-0,918	-1,003	-1,040	-0,913
		500	-0,938	-0,996	-1,007	-0,826	-0,960	-0,999	-0,994	-0,816
	Média($\hat{\phi}$)	49	-0,802	-0,450	0,481	0,770	-0,799	-0,465	0,491	0,774
		121	-0,812	-0,498	0,497	0,811	-0,806	-0,496	0,490	0,816
		500	-0,804	-0,499	0,498	0,823	-0,802	-0,501	0,502	0,826
	Média($\hat{\theta}$)	49	-0,479	-0,550	0,449	0,406	-0,477	-0,556	0,452	0,369
		121	-0,530	-0,507	0,474	0,487	-0,559	-0,520	0,482	0,466
		500	-0,640	-0,502	0,498	0,620	-0,671	-0,500	0,492	0,599
	MSE($\hat{\alpha}$)	49	2,865	7,854	7,939	0,965	1,098	1,265	1,706	0,853
		121	0,620	0,633	0,415	0,571	0,473	0,351	0,340	0,437
		500	0,251	0,089	0,107	0,236	0,141	0,063	0,051	0,185
	MSE($\hat{\delta}$)	49	0,031	0,014	0,145	0,561	0,022	0,012	0,150	0,422
		121	0,015	0,005	0,071	0,163	0,009	0,005	0,068	0,137
		500	0,005	0,001	0,020	0,065	0,002	0,001	0,020	0,060
	MSE($\hat{\phi}$)	49	0,010	0,034	0,017	0,008	0,010	0,027	0,019	0,008
		121	0,003	0,010	0,007	0,002	0,004	0,009	0,008	0,003
		500	0,001	0,002	0,002	0,001	0,001	0,002	0,002	0,001
	MSE($\hat{\theta}$)	49	0,132	0,048	0,023	0,165	0,134	0,037	0,024	0,194
		121	0,087	0,011	0,009	0,103	0,076	0,010	0,010	0,116
		500	0,033	0,002	0,002	0,035	0,023	0,002	0,002	0,043
$\sqrt{\mu}$	Média($\hat{\alpha}$)	49	3,157	4,320	3,810	3,736	2,897	3,515	3,576	3,320
		121	2,773	3,205	3,320	3,086	2,739	3,149	3,179	3,026
		500	2,813	3,035	3,061	2,967	2,838	3,015	3,037	2,959
	Média($\hat{\delta}$)	49	-1,006	-1,041	-0,992	-0,971	-1,025	-1,032	-0,982	-0,972
		121	-1,010	-0,995	-0,992	-0,984	-0,993	-1,009	-0,992	-0,984
		500	-1,006	-1,005	-1,000	-0,996	-1,003	-1,002	-0,999	-0,995
	Média($\hat{\phi}$)	49	-0,837	-0,464	0,488	0,757	-0,828	-0,468	0,475	0,751
		121	-0,820	-0,495	0,488	0,772	-0,812	-0,485	0,490	0,774
		500	-0,817	-0,498	0,501	0,794	-0,821	-0,501	0,499	0,791
	Média($\hat{\theta}$)	49	-0,751	-0,485	0,520	0,794	-0,738	-0,464	0,527	0,804
		121	-0,757	-0,475	0,513	0,794	-0,751	-0,485	0,510	0,799
		500	-0,790	-0,496	0,498	0,799	-0,796	-0,492	0,501	0,800
	MSE($\hat{\alpha}$)	49	4,264	16,314	4,935	14,005	1,405	1,548	1,774	1,533
		121	0,732	0,626	0,786	0,737	0,461	0,323	0,340	0,374
		500	0,180	0,088	0,098	0,104	0,136	0,061	0,060	0,070
	MSE($\hat{\delta}$)	49	0,093	0,090	0,012	0,021	0,129	0,076	0,009	0,007
		121	0,037	0,027	0,004	0,004	0,066	0,029	0,003	0,002
		500	0,006	0,007	0,001	0,001	0,005	0,008	0,000	0,001
	MSE($\hat{\phi}$)	49	0,063	0,048	0,019	0,021	0,060	0,034	0,016	0,010
		121	0,026	0,015	0,006	0,011	0,036	0,015	0,004	0,002
		500	0,003	0,004	0,001	0,002	0,003	0,003	0,001	0,001
	MSE($\hat{\theta}$)	49	0,037	0,022	0,027	0,014	0,043	0,025	0,024	0,008
		121	0,022	0,008	0,006	0,003	0,033	0,007	0,006	0,001
		500	0,003	0,001	0,000	0,000	0,001	0,002	0,000	0,000
$\log W(\mu)$	Média($\hat{\alpha}$)	49	1,596	3,889	3,818	2,967	1,879	3,574	3,549	2,839
		121	1,395	3,215	3,267	2,730	1,743	3,122	3,164	2,750
		500	1,745	3,037	3,052	2,876	1,996	3,024	3,034	2,878
	Média($\hat{\delta}$)	49	-0,910	-0,982	-1,168	-1,412	-0,929	-0,981	-1,187	-1,383
		121	-0,966	-0,991	-1,075	-1,145	-0,976	-0,993	-1,064	-1,168
		500	-1,006	-0,999	-1,021	-0,976	-1,012	-0,996	-1,023	-0,996
	Média($\hat{\phi}$)	49	-0,853	-0,483	0,440	0,751	-0,855	-0,476	0,434	0,749
		121	-0,863	-0,498	0,477	0,781	-0,871	-0,492	0,475	0,779
		500	-0,838	-0,503	0,494	0,802	-0,854	-0,497	0,492	0,801
	Média($\hat{\theta}$)	49	-0,545	-0,500	0,534	0,592	-0,538	-0,506	0,519	0,564
		121	-0,627	-0,487	0,508	0,661	-0,607	-0,501	0,505	0,640
		500	-0,739	-0,493	0,501	0,756	-0,711	-0,498	0,500	0,741
	MSE($\hat{\alpha}$)	49	3,242	7,526	3,860	1,854	2,363	1,954	1,688	0,892
		121	2,969	0,634	0,635	0,368	2,039	0,302	0,340	0,265
		500	1,763	0,113	0,103	0,127	1,183	0,055	0,050	0,075
	MSE($\hat{\delta}$)	49	0,013	0,011	0,227	0,699	0,009	0,011	0,211	0,576
		121	0,005	0,003	0,084	0,181	0,003	0,003	0,070	0,239
		500	0,000	0,001	0,019	0,043	0,000	0,001	0,015	0,037
	MSE($\hat{\phi}$)	49	0,009	0,023	0,030	0,010	0,008	0,022	0,029	0,011
		121	0,006	0,007	0,009	0,003	0,003	0,006	0,010	0,004
		500	0,002	0,001	0,002	0,001	0,000	0,001	0,002	0,001
	MSE($\hat{\theta}$)	49	0,081	0,029	0,023	0,064	0,088	0,028	0,024	0,076
		121	0,039	0,009	0,009	0,030	0,046	0,009	0,010	0,033
		500	0,005	0,002	0,002	0,004	0,010	0,002	0,002	0,006

Fonte: Autoria própria (2020)

Também foram avaliados os desempenhos dos modelos KB -AR(1), -MA(1) e -ARMA(1,1) em termos de suas predições nas Tabelas 15, 16 and 17, respectivamente. Foram utilizadas as seguintes medidas de acurácia como critério de comparação: MASE, sMAPE e UMBRAE. Quando os valores de ϕ e θ são negativos, o modelo KB com a função de ligação logarítimo W de Lambert apresenta os melhores resultados. Para valores positivos de ϕ ou θ negativos, o modelo KB com a função de ligação raiz quadrada teve melhor desempenho quando comparado com outras ligações. Para a medida sMAPE, os modelos são similares em geral.

No que segue, apresenta-se o comportamento das desigualdades da medida UMBRAE (similarmente também válido para MASE) para os modelos KB -AR(1) e -MA(1):

Para $n = 49, 121, 500$ e $L = 4, 8$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{UMBRAE}_{\log W(\cdot)}(\hat{y}) < \text{UMBRAE}_{\log(\cdot)}(\hat{y}) < \text{UMBRAE}_{\sqrt{\cdot}}(\hat{y}) \quad \text{para } \phi = -0,8 \text{ e } -0,5. \\ \text{UMBRAE}_{\sqrt{\cdot}}(\hat{y}) < \text{UMBRAE}_{\log W(\cdot)}(\hat{y}) \approx \text{UMBRAE}_{\log(\cdot)}(\hat{y}) \quad \text{para } \phi = 0,5 \text{ e } 0,8. \end{array} \right.$$

Entretanto, considerando o modelo KB -ARMA(1,1) para a medida MASE, quando $\phi = \theta = 0,8$, os valores de MASE têm aumento significativo para a função de ligação $\log W(\cdot)$. Segundo Chen, Twycross e Garibaldi (2017), a medida MASE pode ter efeito explosivo na presença de comportamento muito volátil (o que geralmente ocorre na geração de séries artificiais com $\phi = \theta = 0,8$). Por este motivo a medida UMBRAE é mais confiável.

Tabela 15 – Medidas de acurácia para o processo AR(1) com $\alpha = 3$ e $L = 4, 8$

ligação	Medidas	N	$L = 4$				$L = 8$			
			ϕ				ϕ			
			-0, 8	-0, 5	0, 5	0, 8	-0, 8	-0, 5	0, 5	0, 8
$\log(\mu)$	UMBRAE	49	0,481	0,649	0,985	1,021	0,476	0,625	0,958	0,980
		121	0,492	0,659	0,991	1,057	0,474	0,635	0,960	1,020
		500	0,504	0,665	1,002	1,091	0,486	0,645	0,971	1,046
	sMAPE	49	0,593	0,599	0,599	0,599	0,535	0,529	0,525	0,531
		121	0,599	0,606	0,602	0,604	0,532	0,539	0,534	0,540
		500	0,609	0,607	0,606	0,611	0,540	0,542	0,540	0,542
	MASE	49	0,376	0,515	0,853	0,751	0,359	0,502	0,847	0,691
		121	0,369	0,516	0,860	0,802	0,353	0,502	0,859	0,833
		500	0,370	0,517	0,872	0,914	0,354	0,510	0,871	0,913
$\sqrt{\mu}$	UMBRAE	49	1,047	0,981	0,666	0,556	0,992	0,924	0,643	0,509
		121	1,054	0,984	0,670	0,546	1,024	0,941	0,653	0,518
		500	1,062	0,990	0,682	0,552	1,038	0,963	0,656	0,519
	sMAPE	49	0,589	0,597	0,599	0,593	0,528	0,525	0,528	0,532
		121	0,600	0,605	0,602	0,604	0,534	0,538	0,535	0,539
		500	0,609	0,607	0,606	0,611	0,540	0,542	0,540	0,542
	MASE	49	0,940	0,864	0,534	0,432	0,936	0,853	0,528	0,404
		121	0,947	0,872	0,537	0,426	0,945	0,863	0,531	0,399
		500	0,952	0,876	0,541	0,431	0,952	0,874	0,529	0,405
$\log W(\mu)$	UMBRAE	49	0,442	0,627	0,985	1,025	0,440	0,618	0,966	0,984
		121	0,447	0,630	0,992	1,060	0,441	0,618	0,961	1,023
		500	0,455	0,641	1,003	1,092	0,448	0,626	0,972	1,047
	sMAPE	49	0,592	0,598	0,599	0,600	0,536	0,529	0,525	0,531
		121	0,606	0,606	0,603	0,608	0,535	0,539	0,534	0,540
		500	0,609	0,608	0,606	0,611	0,540	0,542	0,540	0,542
	MASE	49	0,313	0,466	0,853	0,774	0,301	0,472	0,848	0,723
		121	0,280	0,471	0,857	0,872	0,273	0,468	0,859	0,852
		500	0,251	0,469	0,870	0,923	0,245	0,471	0,870	0,918

Fonte: Autoria própria (2020)

Tabela 16 – Medidas de acurácia para o processo MA(1) com $\alpha = 3$ e $L = 4, 8$,

ligação	Medidas	N	$L = 4$				$L = 8$			
			θ				θ			
			-0,8	-0,5	0,5	0,8	-0,8	-0,5	0,5	0,8
$\log(\mu)$	UMBRAE	49	0,603	0,669	0,943	0,922	0,593	0,645	0,913	0,891
		121	0,613	0,694	0,953	0,913	0,599	0,661	0,912	0,892
		500	0,617	0,697	0,952	0,920	0,602	0,671	0,925	0,891
	sMAPE	49	0,594	0,595	0,597	0,606	0,536	0,524	0,526	0,548
		121	0,603	0,607	0,601	0,611	0,537	0,537	0,536	0,546
		500	0,610	0,607	0,606	0,612	0,542	0,542	0,541	0,543
	MASE	49	0,471	0,541	0,806	0,786	0,458	0,534	0,807	0,786
		121	0,468	0,549	0,813	0,784	0,458	0,534	0,810	0,783
		500	0,467	0,550	0,823	0,786	0,461	0,542	0,820	0,783
$\sqrt{\mu}$	UMBRAE	49	0,868	0,927	0,690	0,636	0,863	0,898	0,672	0,617
		121	0,888	0,944	0,703	0,641	0,864	0,904	0,686	0,625
		500	0,892	0,947	0,710	0,639	0,867	0,923	0,686	0,614
	sMAPE	49	0,599	0,600	0,597	0,601	0,537	0,527	0,527	0,536
		121	0,608	0,607	0,603	0,608	0,535	0,539	0,534	0,541
		500	0,610	0,608	0,608	0,610	0,541	0,542	0,541	0,542
	MASE	49	0,794	0,813	0,561	0,499	0,781	0,811	0,553	0,486
		121	0,802	0,826	0,558	0,501	0,793	0,819	0,555	0,492
		500	0,798	0,830	0,566	0,500	0,793	0,828	0,557	0,488
$\log W(\mu)$	UMBRAE	49	0,574	0,659	0,941	0,915	0,570	0,638	0,912	0,890
		121	0,584	0,674	0,947	0,904	0,574	0,649	0,911	0,886
		500	0,590	0,679	0,951	0,918	0,578	0,661	0,923	0,886
	sMAPE	49	0,591	0,596	0,599	0,607	0,537	0,524	0,526	0,551
		121	0,607	0,607	0,606	0,610	0,537	0,537	0,536	0,543
		500	0,610	0,609	0,606	0,612	0,542	0,543	0,541	0,543
	MASE	49	0,419	0,517	0,800	0,764	0,420	0,517	0,803	0,765
		121	0,411	0,519	0,808	0,758	0,412	0,508	0,804	0,757
		500	0,383	0,519	0,815	0,756	0,388	0,518	0,814	0,761

Fonte: Autoria própria (2020)

Tabela 17 – Medidas de acurácia para o processo ARMA(1,1) com $\alpha = 3$ e $L = 4, 8$,

ligação	Medidas	N	$L = 4$				$L = 8$			
			ϕ				ϕ			
			-0, 8	-0, 5	0, 5	0, 8	-0, 8	-0, 5	0, 5	0, 8
$\log(\mu)$	UMBRAE	49	0,405	0,515	0,979	0,981	0,393	0,492	0,929	0,942
		121	0,411	0,527	0,994	0,995	0,386	0,507	0,960	0,961
		500	0,399	0,533	1,006	0,958	0,376	0,516	0,973	0,932
	sMAPE	49	0,651	0,592	0,595	0,671	0,590	0,523	0,530	0,599
		121	0,650	0,604	0,610	0,651	0,572	0,537	0,535	0,585
		500	0,629	0,609	0,609	0,633	0,560	0,541	0,543	0,566
	MASE	49	0,328	0,387	0,867	1,423	0,295	0,371	0,866	1,249
		121	0,307	0,387	0,880	1,878	0,281	0,379	0,869	1,931
		500	0,302	0,392	0,880	2,144	0,272	0,376	0,877	1,737
$\sqrt{\mu}$	UMBRAE	49	0,927	0,947	0,556	0,464	0,918	0,918	0,528	0,437
		121	0,910	0,970	0,560	0,471	0,888	0,943	0,534	0,434
		500	0,880	0,976	0,567	0,476	0,863	0,951	0,534	0,436
	sMAPE	49	0,644	0,596	0,596	0,616	0,592	0,525	0,520	0,554
		121	0,625	0,604	0,603	0,609	0,559	0,539	0,536	0,541
		500	0,616	0,608	0,605	0,611	0,549	0,542	0,542	0,542
	MASE	49	0,913	0,870	0,443	0,406	0,906	0,870	0,421	0,369
		121	0,895	0,882	0,442	0,407	0,865	0,873	0,423	0,364
		500	0,863	0,879	0,449	0,413	0,845	0,877	0,421	0,370
$\log W(\mu)$	UMBRAE	49	0,511	0,479	0,977	0,979	0,468	0,467	0,948	0,940
		121	0,468	0,485	0,990	0,965	0,430	0,478	0,955	0,938
		500	0,392	0,498	1,004	0,939	0,371	0,490	0,977	0,910
	sMAPE	49	0,804	0,605	0,600	0,675	0,700	0,523	0,533	0,617
		121	0,762	0,606	0,604	0,651	0,655	0,538	0,542	0,583
		500	0,660	0,610	0,608	0,625	0,590	0,543	0,543	0,558
	MASE	49	0,261	0,298	0,886	1,421	0,257	0,274	0,876	1,247
		121	0,280	0,245	0,870	1,875	0,278	0,264	0,873	1,929
		500	0,301	0,226	0,874	2,140	0,292	0,233	0,872	1,734

Fonte: Autoria própria (2020)

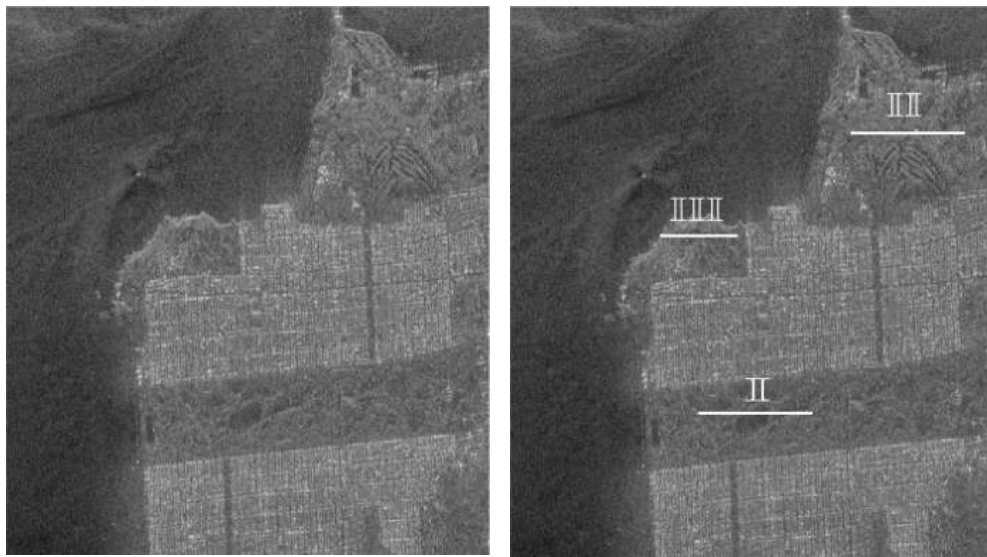
6.4 APLICAÇÃO EM DADOS REAIS SAR

Agora, pretende-se aplicar o modelo KB -ARMA para predição das intensidades capturadas por sensores SAR. A Figura 35a apresenta uma imagem SAR da baía de São Francisco (EUA) com dimensões 900×1024 , extraída pelo sensor AIRSAR, com $L = 4$ e operando com três bandas de frequência, P, L e C. A capturação da imagem realizada em 9 de abril de 2008, $range = 9,8m$ e $Azimuth 4,8m$. Aqui, estamos interessados em modelar as intensidades do canal de polarização HH.

Figura 35 – Imagem de São Francisco e as regiões consideradas.

(a) Imagem de São Francisco 900×1024

(b) regiões selecionadas



Fonte: Autoria própria (2020)

Para avaliar o desempenho da nossa proposta em comparação com o modelo Γ -ARMA, selecionamos alguns trechos de floresta da imagem de São Francisco. Os trechos selecionados são apresentados pelos segmentos brancos na Figura 35b, a saber, Região I: linha 146 e colunas de 250 a 400, Região II: linha 424 e colunas de 450 a 600 e Região III: linha 322 e colunas 200 a 300. As predições foram avaliadas qualitativamente pelos gráficos com os sinais verdadeiro e estimado nas Figuras 37-39 e quantitativamente pelas medidas de acurácia (MASE, sMASE e UMBRAE) apresentados na Tabela 18.

A escolha da ordem do modelo KB -ARMA(p, q) foi feita através do AIC (AKAIKE, 1978). O modelo que apresenta o menor AIC é mais apropriado ao vetor de dados. Diferentes regiões podem nos sugerir diferentes modelos, para a Região I, o modelo selecionado foi AR(1), enquanto que para as regiões II e III, a estrutura ARMA(1,1) é a melhor. Para ilustrar as

escolhas da estrutura ARMA, a Figura 36 apresenta as séries observadas e suas respectivas funções de autocorrelação (ACF) e autocorrelação parcial (PACF) para as regiões I, II e III. O corte no primeiro lag da PACF sugere um modelo AR(1), como visto na Figura 40. Enquanto que o corte no lag 1 na PACF e ACF, sugerem um ARMA(1,1) (36e, 36f, 36h e 36i).

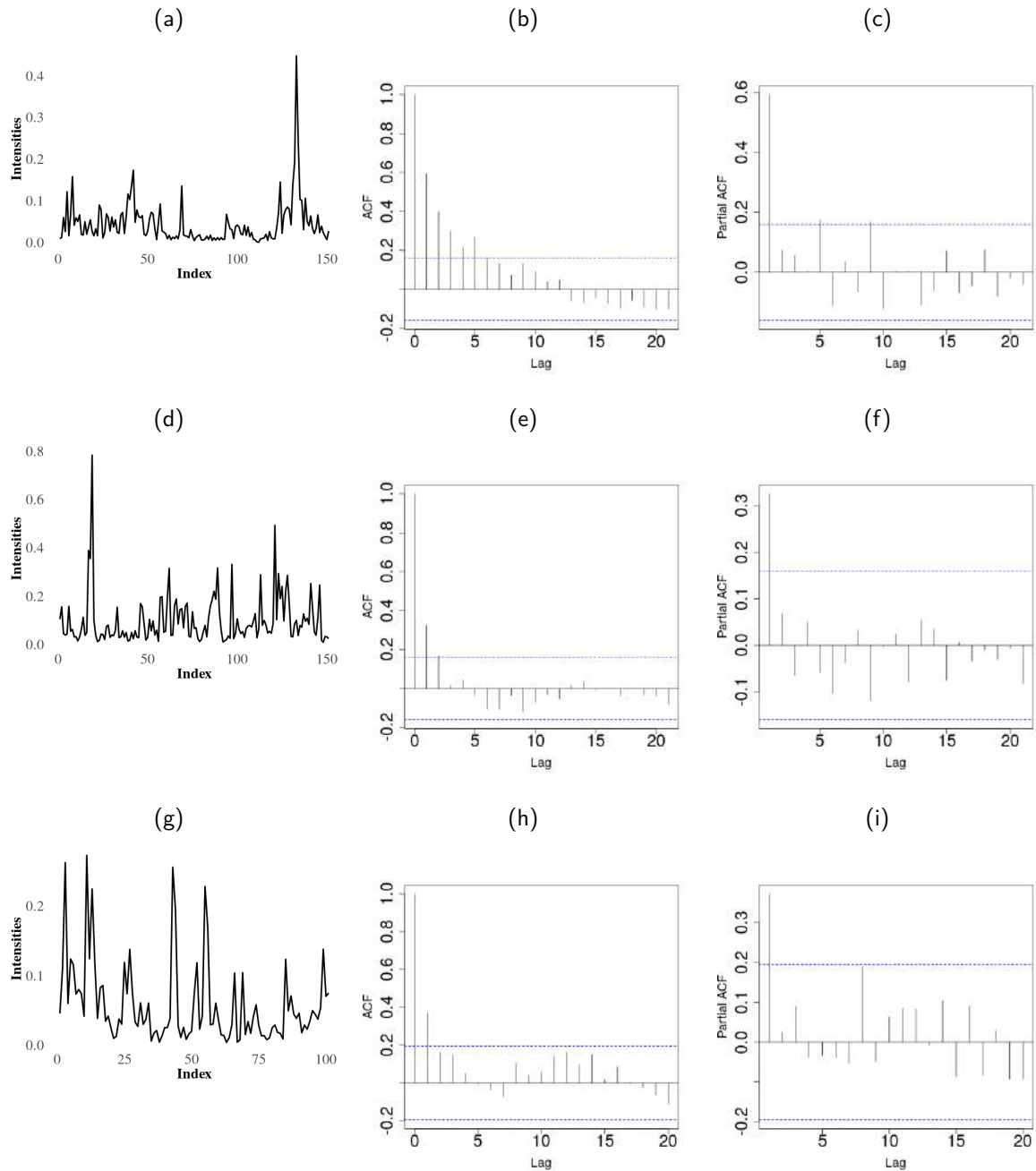
De acordo com as Figuras 37–39, em geral, os modelos KB -ARMA tiveram os melhores desempenhos em comparação com os modelos Γ -ARMA. As previsões realizadas pelo modelo KB -ARMA com a função de ligação $\sqrt{\cdot}$ apresentadas nas Figuras 37c, 38c e 39c tiveram os melhores ajustes. Resultado este que corrobora com as medidas de ajuste sMAPE, MASE e UMBRAE apresentadas na Tabela 18. O melhor resultado foi obtido usando o modelo KB -ARMA com função de ligação $\sqrt{\cdot}$ em todas as regiões.

Uma etapa importante nos ajustes de séries temporais é verificar a qualidade do ajuste do modelo. Neste sentido, foi realizado uma breve análise residual dos ajustes. Para todas as regiões I, II e III, foram computados os resíduos de *Pearson* para as Figuras 40, 41 e 42. Para todos os casos, os resíduos apresentam um comportamento de ruído branco. Adicionalmente, na Tabela 18 são apresentados os valores p do teste Ljung Box para verificar se os resíduos são independentes. Verifica-se que para os 20 primeiros *lags*, os valores p são maiores que o nível de significância $\alpha = 10\%$; mostrando evidências para não rejeitar a hipótese nula de que os resíduos são independentes.

Agora, estamos em posição de testar nossa proposta para toda a imagem de São Francisco. Dessa forma, escolheu-se o modelo com função de ligação $\sqrt{\cdot}$, visto que teve o melhor desempenho.

Uma das aplicações do modelo KB -ARMA no processamento de imagem SAR é fornecer mapas dos parâmetros estimados que nos ajudem a identificar áreas e/ou objetos. A Figura 43 apresenta as estimativas dos parâmetros assumindo os modelos KB -AR(1), KB -MA(1) e KB -ARMA(1,1) *pixel-por-pixel* assim como discutido na Seção 6.2. Em relação ao parâmetro α , para ambos os modelos, os valores de $\hat{\alpha}$ são maiores para regiões mais homogêneas (oceano), intermediário para regiões de floresta e menores para regiões com maior heterogeneidade, como no caso de cidades. Esse resultado é importante para caracterizar regiões de acordo com a rugosidade (valor de α) como ilustrado na Figura 4. Com respeito aos valores de $\hat{\delta}$, nota-se que as regiões mais heterogêneas apresentam valores maiores, enquanto que para as regiões mais homogêneas como oceano assumem valores menores e negativos. Além disso, nota-se que, para o modelo KB -MA(1), o mapa de $\hat{\delta}$ caracteriza melhor a imagem. Para os parâmetros ϕ e θ ,

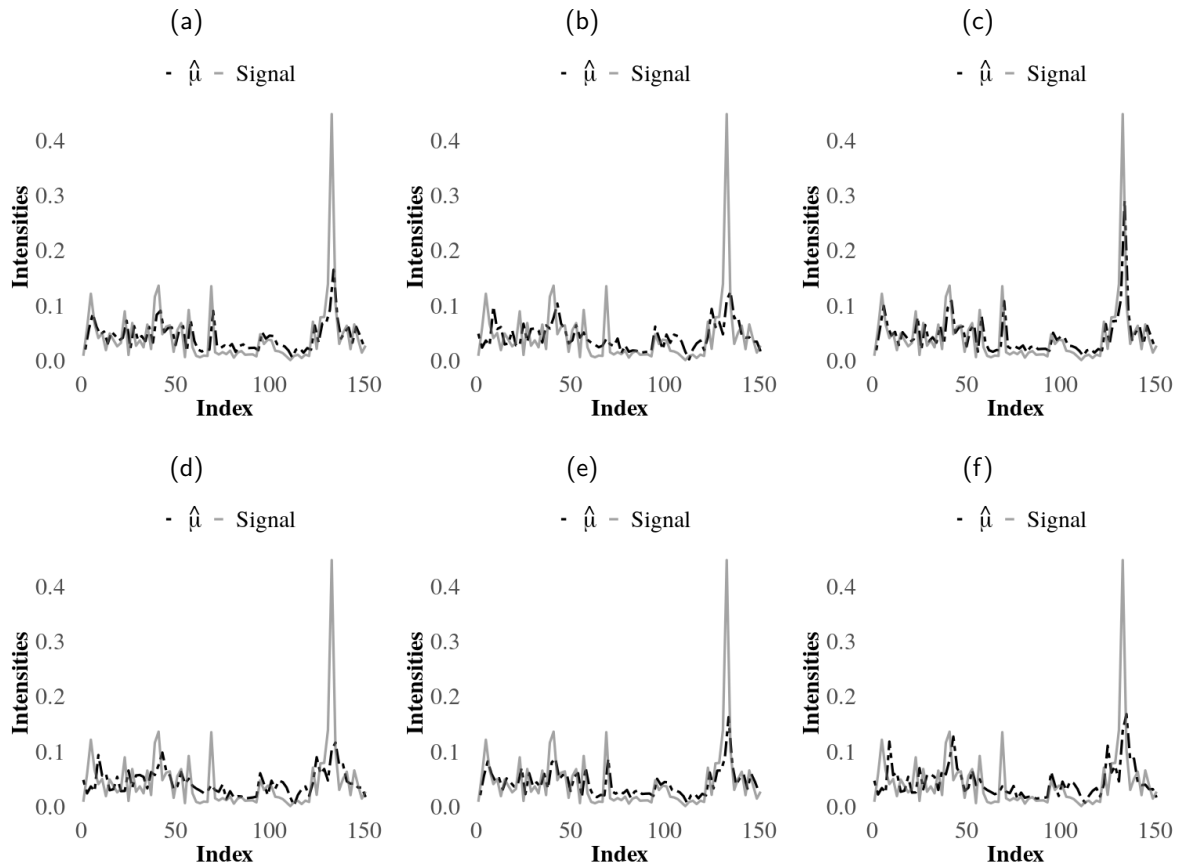
Figura 36 – Séries observadas, ACF e PACF. (a) Série observada Região I, (b) ACF Região I, (c) PACF Região I, (d) Série observada Região I, (e) ACF Região II, (f) PACF Região II, (g) Série observada Região III, (h) ACF Região III e (i) PACF Região III.



Fonte: Autoria própria (2020)

nota-se que, em geral, os mapas apresentam valores de $\hat{\phi}$ e $\hat{\theta}$ positivos (≈ 1) para a região de cidade e valores negativos ($\approx -0,5$) para regiões de oceano e floresta. A caracterização de uma imagem SAR por mapas das estimativas dos parâmetros do modelo, pode nos fornecer *insights* importantes para identificações de regiões e objetos. Além disso, propostas de classificadores

Figura 37 – Sinais preditos (Região I). (a) modelo KB -ARMA com $g(\mu) = \log W(\mu)$, (b) modelo KB -ARMA com $g(\mu) = \log(\mu)$, (c) modelo KB -ARMA com $g(\mu) = \sqrt{\mu}$, (d) modelo Γ -ARMA com $g(\mu) = \log W(\mu)$, (e) modelo Γ -ARMA com $g(\mu) = \log(\mu)$ e (f) modelo Γ -ARMA com $g(\mu) = \sqrt{\mu}$.



Fonte: Autoria própria (2020)

podem ser sugeridas a partir dessas estimativas.

Por fim, a imagem de SF pode ser representada através das previsões do modelo KB -ARMA. A Figura 44 apresenta os valores dos *pixels* preditos pelo modelo. Nota-se que a predição do modelo proposto representa a imagem de São Francisco com redução do *speckle*.

Tabela 18 – Medidas de acurácia e teste Ljung-Box (lag = 20) para os modelos Γ -ARMA e KB -ARMA

Regiões	Modelos	Link	Medidas			Teste Ljung-Box	
			sMAPE	MASE	UMBRAE	Estatística Q	valor p
Região I	Γ -ARMA	$\log(\mu)$	0,449	0,537	0,765	22,501	0,314
		$\sqrt{\mu}$	0,379	0,382	0,629	23,203	0,279
		$\log W(\mu)$	0,450	0,540	0,765	22,310	0,324
	KB -ARMA	$\log(\mu)$	0,435	0,509	0,736	21,740	0,355
		$\sqrt{\mu}$	0,371	0,361	0,606	22,889	0,294
		$\log W(\mu)$	0,435	0,513	0,736	21,571	0,364
Região II	Γ -ARMA	$\log(\mu)$	0,449	0,537	0,765	14,102	0,825
		$\sqrt{\mu}$	0,465	0,570	0,905	14,102	0,825
		$\log W(\mu)$	0,446	0,520	0,853	15,989	0,717
	KB -ARMA	$\log(\mu)$	0,459	0,567	0,884	14,843	0,785
		$\sqrt{\mu}$	0,440	0,519	0,837	16,320	0,697
		$\log W(\mu)$	0,458	0,568	0,887	14,181	0,821
Região III	Γ -ARMA	$\log(\mu)$	0,503	0,614	0,908	15,896	0,723
		$\sqrt{\mu}$	0,494	0,571	0,872	18,178	0,576
		$\log W(\mu)$	0,490	0,561	0,888	18,767	0,537
	KB -ARMA	$\log(\mu)$	0,469	0,533	0,855	18,993	0,522
		$\sqrt{\mu}$	0,444	0,470	0,800	19,200	0,509
		$\log W(\mu)$	0,467	0,531	0,845	18,750	0,538

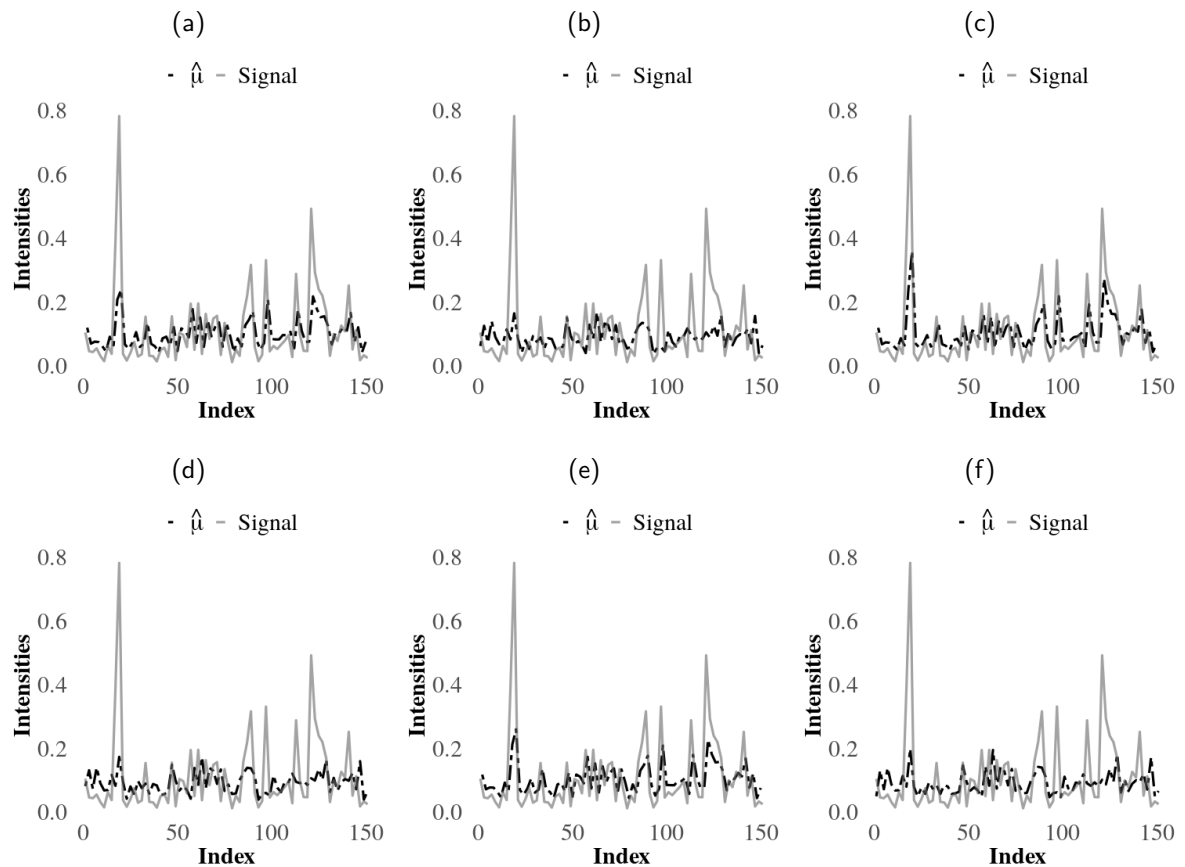
Fonte: Autoria própria (2020)

Tabela 19 – Estimativas dos parâmetros do modelo KB -ARMA

Regiões	Modelos	Ligação	$\hat{\alpha}$ (EP)	$\hat{\delta}$ (EP)	$\hat{\phi}_1$ (EP)	$\hat{\theta}_1$ (EP)
Região I	Γ -AR(1)	$\log(\mu)$	-	-1,40 (0,0152)	0,52 (0,0048)	-
		$\sqrt{\mu}$	-	0,08 (0,0011)	0,68 (0,0049)	-
		$\log W(\mu)$	-	-1,42 (0,0180)	0,52 (0,0056)	-
	KB -AR(1)	$\log(\mu)$	2,65 (0,0443)	-1,31 (0,0196)	0,55 (0,0054)	-
		$\sqrt{\mu}$	2,70 (0,0419)	0,07 (0,0011)	0,70 (0,0067)	-
		$\log W(\mu)$	2,65 (0,0428)	-1,33 (0,0191)	0,55 (0,0050)	-
Região II	Γ -ARMA(1,1)	$\log(\mu)$	-	-1,54 (0,0280)	0,29 (0,0119)	0,18 (0,0115)
		$\sqrt{\mu}$	-	0,20 (0,0040)	0,38 (0,0123)	0,15 (0,0113)
		$\log W(\mu)$	-	-1,55 (0,0323)	0,32 (0,0136)	0,14 (0,0132)
	KB -ARMA(1,1)	$\log(\mu)$	3,11 (0,0633)	-1,65 (0,0348)	0,26 (0,0141)	0,22 (0,0134)
		$\sqrt{\mu}$	3,05 (0,0564)	0,20 (0,0045)	0,37 (0,0153)	0,16 (0,0147)
		$\log W(\mu)$	3,11 (0,0576)	-1,67 (0,0369)	0,28 (0,0143)	0,20 (0,0143)
Região III	Γ -ARMA(1,1)	$\log(\mu)$	-	-1,84 (0,0486)	0,31 (0,0173)	0,20 (0,0167)
		$\sqrt{\mu}$	-	0,08 (0,0040)	0,69 (0,0153)	-0,29 (0,0227)
		$\log W(\mu)$	-	-1,85 (0,0534)	0,32 (0,0189)	0,18 (0,0196)
	KB -ARMA(1,1)	$\log(\mu)$	2,68 (0,0621)	-1,66 (0,0554)	0,38 (0,0191)	0,13 (0,0214)
		$\sqrt{\mu}$	2,63 (0,0658)	0,14 (0,0039)	0,47 (0,0174)	0,12 (0,0167)
		$\log W(\mu)$	2,68 (0,0707)	-1,56 (0,0657)	0,42 (0,0217)	0,07 (0,0247)

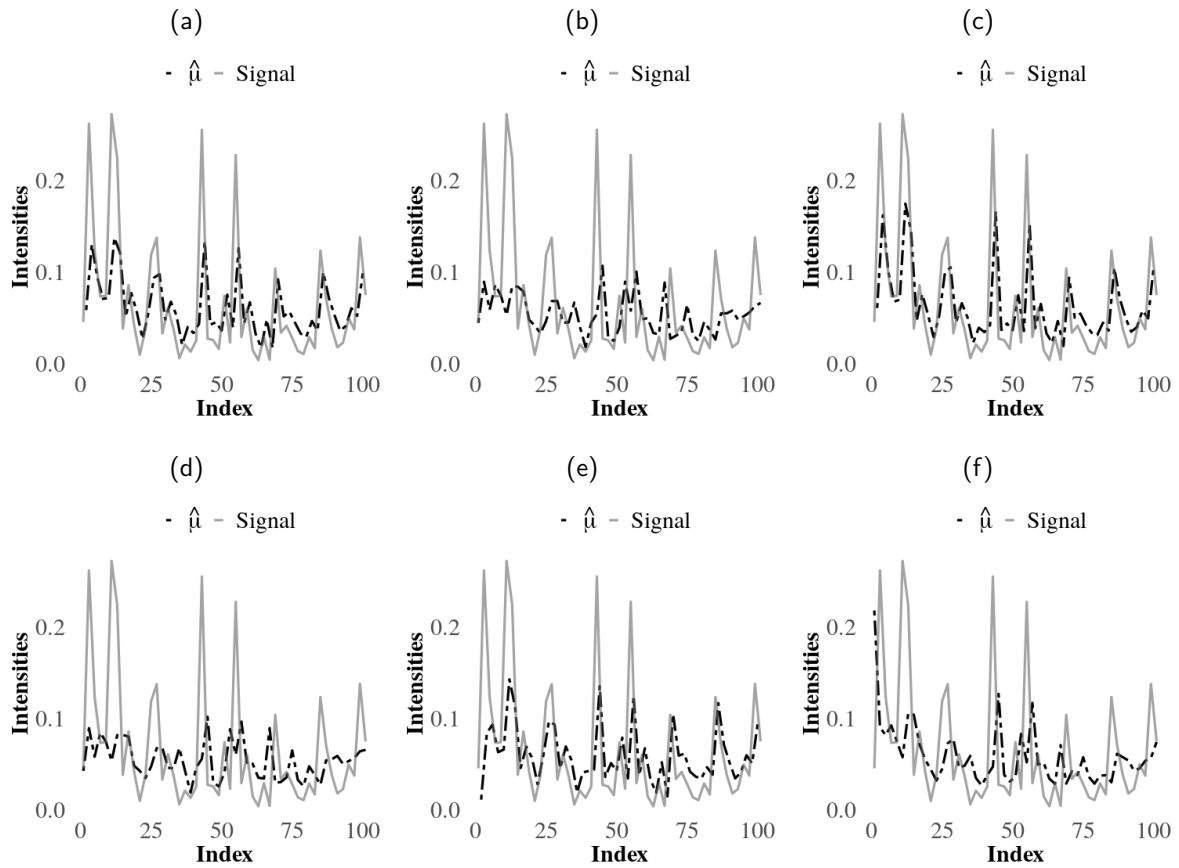
Fonte: Autoria própria (2020)

Figura 38 – Sinais preditos (Região II). (a) modelo KB -ARMA com $g(\mu) = \log W(\mu)$, (b) modelo KB -ARMA com $g(\mu) = \log(\mu)$, (c) modelo KB -ARMA com $g(\mu) = \sqrt{\mu}$, (d) modelo Γ -ARMA com $g(\mu) = \log W(\mu)$, (e) modelo Γ -ARMA com $g(\mu) = \log(\mu)$ e (f) modelo Γ -ARMA com $g(\mu) = \sqrt{\mu}$.



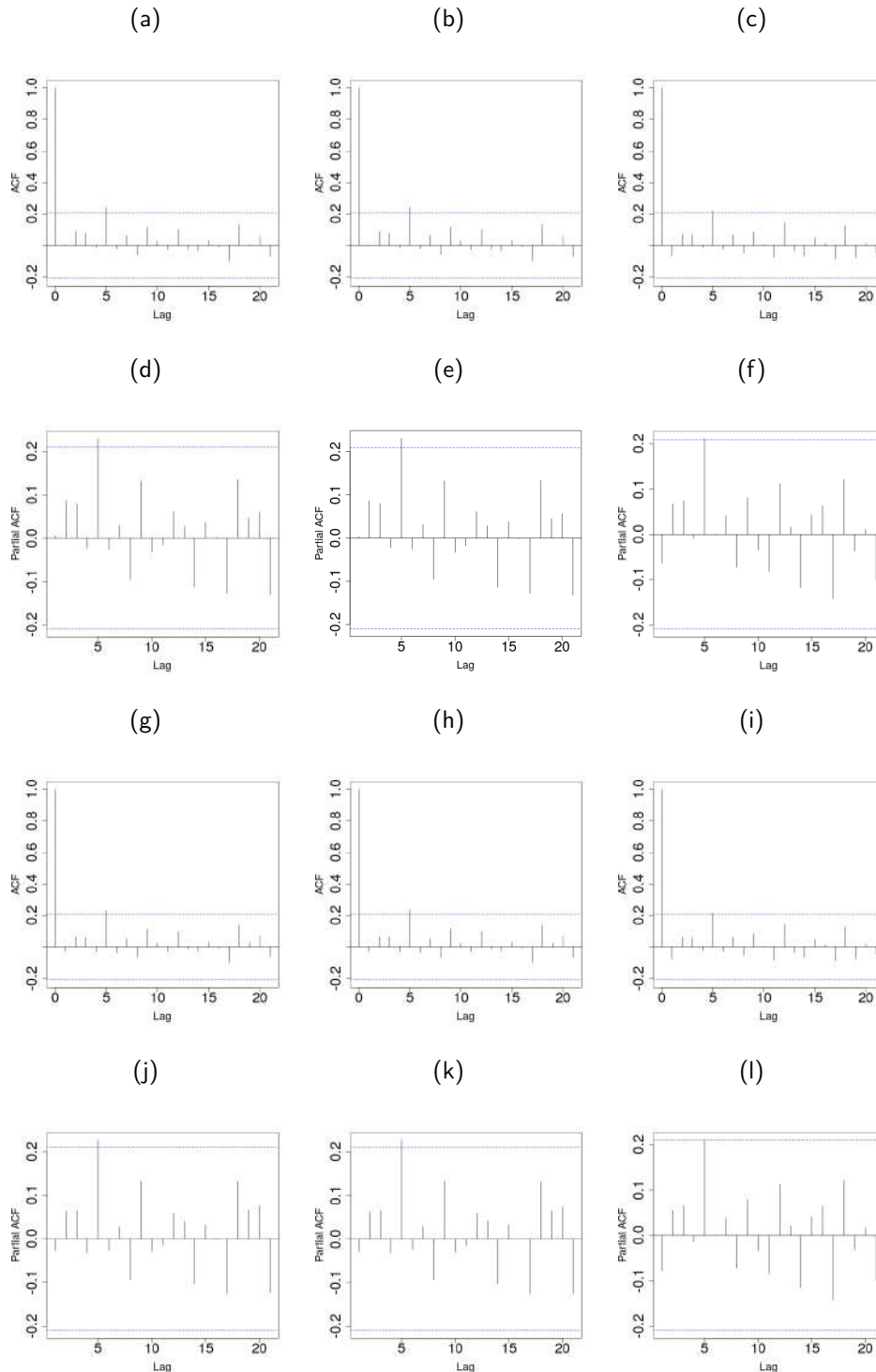
Fonte: Autoria própria (2020)

Figura 39 – Sinais preditos (Região III). (a) modelo KB -ARMA com $g(\mu) = \log W(\mu)$, (b) modelo KB -ARMA com $g(\mu) = \log(\mu)$, (c) modelo KB -ARMA com $g(\mu) = \sqrt{\mu}$, (d) modelo Γ -ARMA com $g(\mu) = \log W(\mu)$, (e) modelo Γ -ARMA com $g(\mu) = \log(\mu)$ e (f) modelo Γ -ARMA com $g(\mu) = \sqrt{\mu}$.



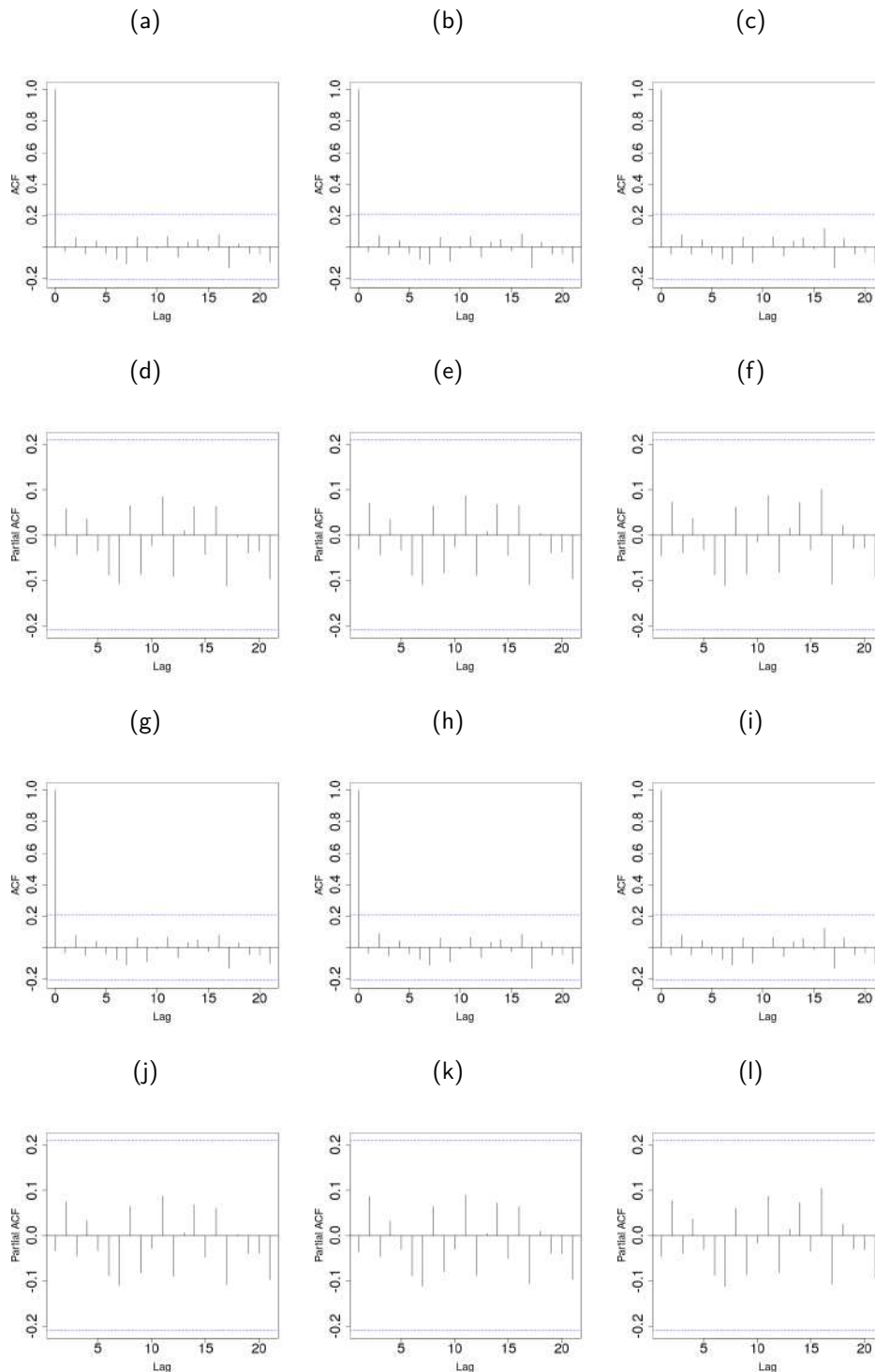
Fonte: Autoria própria (2020)

Figura 40 – ACF e PACF dos resíduos (Região I). (a) ACF para Γ -ARMA com $g(\cdot) = \log W(\cdot)$, (b) ACF para Γ -ARMA com $g(\cdot) = \log(\cdot)$, (c) ACF para Γ -ARMA com $g(\cdot) = \sqrt{\cdot}$, (d) PACF para Γ -ARMA com $g(\cdot) = \log W(\cdot)$, (e) PACF para Γ -ARMA com $g(\cdot) = \log(\cdot)$, (f) PACF para Γ -ARMA com $g(\cdot) = \sqrt{\cdot}$, (g) ACF para KB -ARMA com $g(\cdot) = \log W(\cdot)$, (h) ACF para KB -ARMA com $g(\cdot) = \log(\cdot)$, (i) ACF para KB -ARMA com $g(\cdot) = \sqrt{\cdot}$, (j) PACF para KB -ARMA com $g(\cdot) = \log W(\cdot)$, (k) PACF para KB -ARMA com $g(\cdot) = \log(\cdot)$ e (l) PACF para KB -ARMA com $g(\cdot) = \sqrt{\cdot}$.



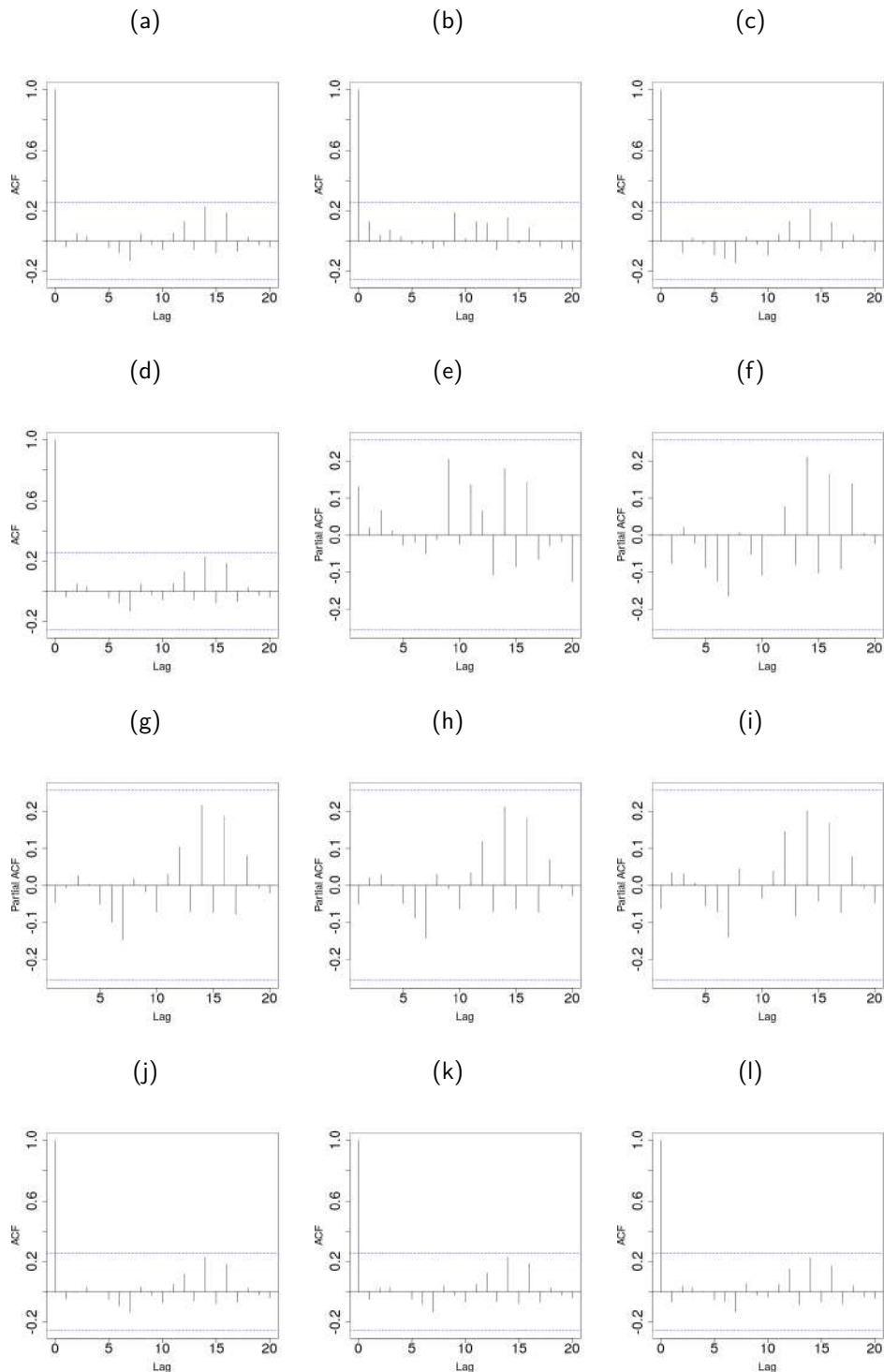
Fonte: Autoria própria (2020)

Figura 41 – ACF e PACF dos resíduos (Região II). (a) ACF para Γ -ARMA com $g(\cdot) = \log W(\cdot)$, (b) ACF para Γ -ARMA com $g(\cdot) = \log(\cdot)$, (c) ACF para Γ -ARMA com $g(\cdot) = \sqrt{\cdot}$, (d) PACF para Γ -ARMA com $g(\cdot) = \log W(\cdot)$, (e) PACF para Γ -ARMA com $g(\cdot) = \log(\cdot)$, (f) PACF para Γ -ARMA com $g(\cdot) = \sqrt{\cdot}$, (g) ACF para KB -ARMA com $g(\cdot) = \log W(\cdot)$, (h) ACF para KB -ARMA com $g(\cdot) = \log(\cdot)$, (i) ACF para KB -ARMA com $g(\cdot) = \sqrt{\cdot}$, (j) PACF para KB -ARMA com $g(\cdot) = \log W(\cdot)$, (k) PACF para KB -ARMA com $g(\cdot) = \log(\cdot)$ e (l) PACF para KB -ARMA com $g(\cdot) = \sqrt{\cdot}$.



Fonte: Autoria própria (2020)

Figura 42 – ACF e PACF dos resíduos (Região III). (a) ACF para Γ -ARMA com $g(\cdot) = \log W(\cdot)$, (b) ACF para Γ -ARMA com $g(\cdot) = \log(\cdot)$, (c) ACF para Γ -ARMA com $g(\cdot) = \sqrt{\cdot}$, (d) PACF para Γ -ARMA com $g(\cdot) = \log W(\cdot)$, (e) PACF para Γ -ARMA com $g(\cdot) = \log(\cdot)$, (f) PACF para Γ -ARMA com $g(\cdot) = \sqrt{\cdot}$, (g) ACF para KB -ARMA com $g(\cdot) = \log W(\cdot)$, (h) ACF para KB -ARMA com $g(\cdot) = \log(\cdot)$, (i) ACF para KB -ARMA com $g(\cdot) = \sqrt{\cdot}$, (j) PACF para KB -ARMA com $g(\cdot) = \log W(\cdot)$, (k) PACF para KB -ARMA com $g(\cdot) = \log(\cdot)$ e (l) PACF para KB -ARMA com $g(\cdot) = \sqrt{\cdot}$.



Fonte: Autoria própria (2020)

Figura 43 – Mapas para as estimativas $\hat{\alpha}$, $\hat{\delta}$, $\hat{\phi}$ e $\hat{\theta}$.

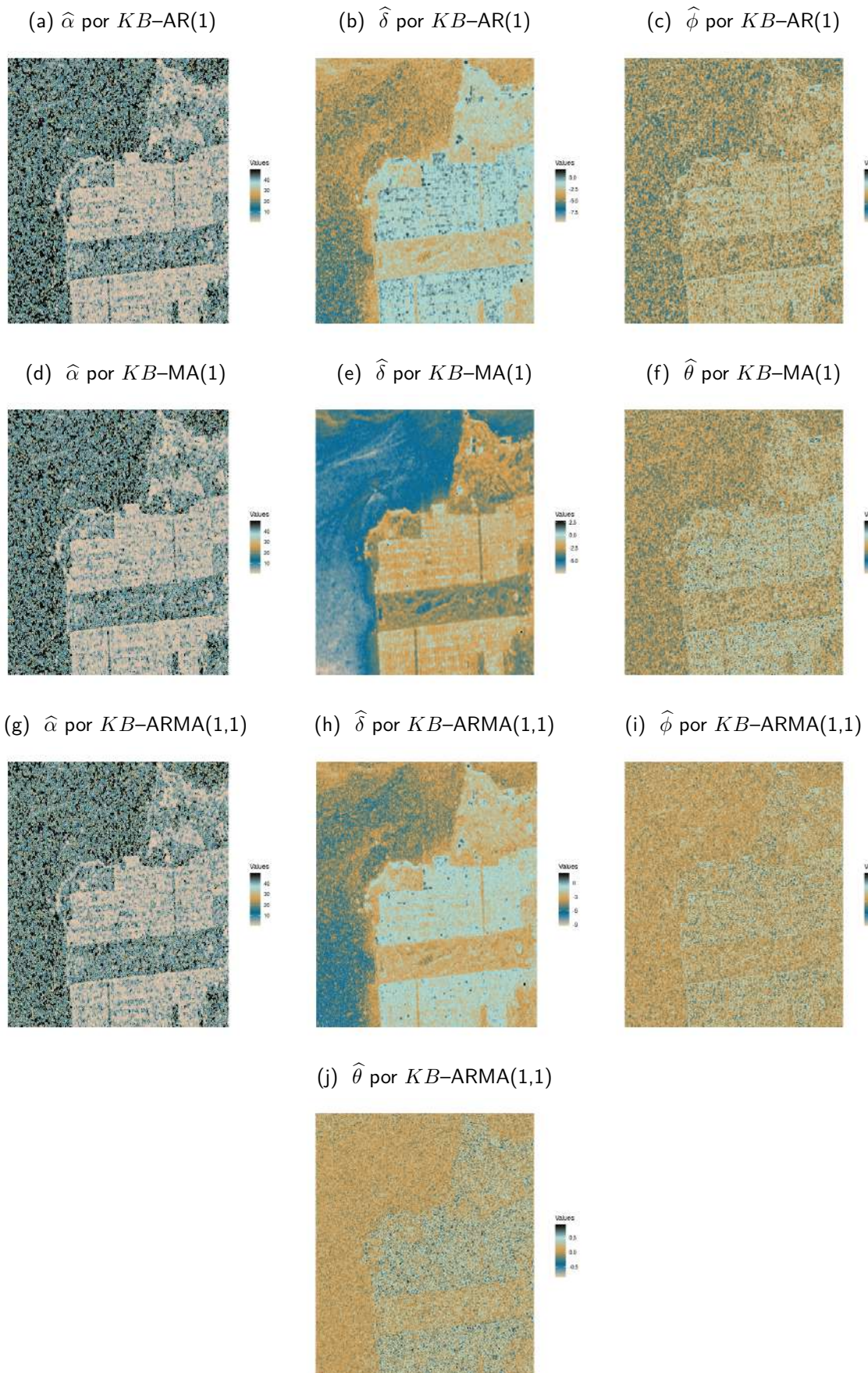
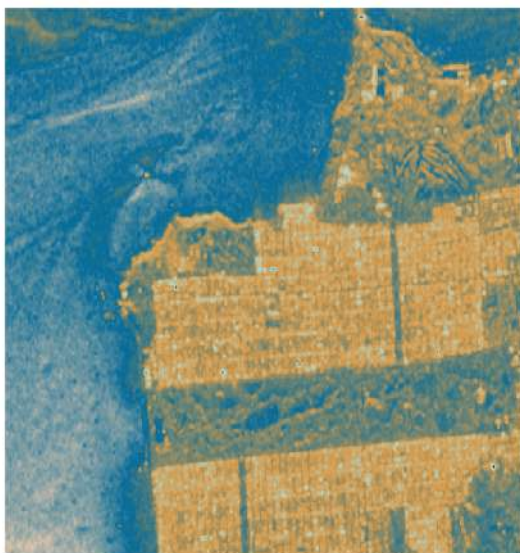
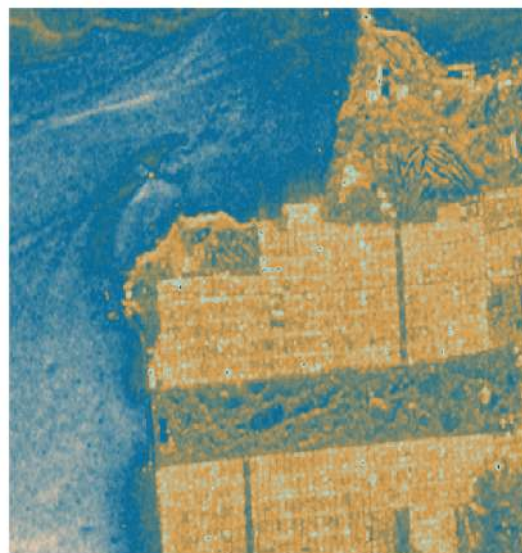


Figura 44 – Mapas para os valores preditos ($\hat{\mu}$).

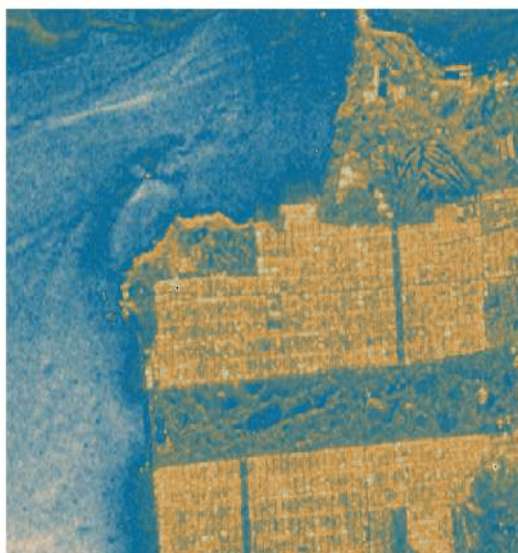
(a) $\hat{\mu}$ por $KB-AR(1)$



(b) $\hat{\mu}$ por $KB-MA(1)$



(c) $\hat{\mu}$ por $KB-ARMA(1,1)$



Fonte: Autoria própria (2020)

6.5 CONCLUSÃO

Foi proposto um novo modelo 1D para imagens SAR, denominado processo KB -ARMA. Foram derivadas algumas de suas propriedades matemáticas, tais como, vetor escore, MIF, análise de resíduo e equação de predição. Experimentos Monte Carlo foram realizados para avaliar o comportamento assintótico das EMVs e comparar o desempenho dos estimadores para diferentes funções de ligação.

Como uma aplicação a dados reais SAR, foi aplicado o nosso modelo na imagem SAR da baía de São Francisco. Através do modelo KB -ARMA foi possível identificar padrões na imagem de acordo com as estimativas dos parâmetros do modelo proposto. Resultados mostraram que a nossa proposta tem melhor desempenho em comparação ao modelo Γ -ARMA, que é um *benchmark* para dados SAR.

7 PROCESSO $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA PARA DADOS SPECKLE

7.1 ESTADO DA ARTE E PROPOSTA

Uma das MMs particulares mais usadas é a distribuição $\mathcal{G}_I^0$, que é conhecida por caracterizar bem diferentes texturas (FRERY et al., 1997). Esse modelo é semelhante a distribuição de Fisher, que é uma reparametrização da própria distribuição $\mathcal{G}_I^0$ (CINTRA; FRERY; NASCIMENTO, 2011).

O processo de estimação dos parâmetros da $\mathcal{G}_I^0$ é frequentemente realizado por máxima verossimilhança (MV) (FRERY; CRIBARI-NETO; SOUZA, 2004), método dos momentos (MEJAIL et al., 2000), versões robustas (FRERY et al., 1997; MEJAIL et al., 2000; BUSTOS; LUCINI; FRERY, 2002; ALLENDE et al., 2006) e versões melhoradas por correção de viés (CRIBARI-NETO; FRERY; SILVA, 2002; VASCONCELLOS; FRERY; SILVA, 2005; PIANTO; CRIBARI-NETO, 2011). Adicionalmente, testes de hipóteses baseados em inferência clássica (SILVA; CRIBARI-NETO; FRERY, 2008), teoria da informação (NASCIMENTO; CINTRA; FRERY, 2010) e métodos não paramétricos (DONOHUE et al., 1993; BEAUCHEMIN; THOMSON; EDWARDS, 1998; CINTRA; FRERY; NASCIMENTO, 2011) têm sido propostos.

De forma semelhante ao capítulo anterior, vamos tratar de um novo processo ARMA com marginal $\mathcal{G}_I^0$, denominado modelo $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA. Expressões em forma fechada são derivadas para a função score e a MIF. Discutimos um procedimento para obter estimativas de máxima verossimilhança e seus comportamentos assintóticos são quantificados para alguns casos por meio de experimentos Monte Carlo. Uma aplicação para dados reais é feita para uma cena geográfica de Weßling (Munique, Alemanha). Os resultados indicam que nosso processo pode fornecer um desempenho melhor do que o modelo I -ARMA, que foi usado como um suposto natural no início desta tese.

Esse trabalho segue dividido da seguinte maneira. Na Seção 7.2, nosso modelo foi proposto bem como algumas de suas propriedades matemáticas. Na Seção 7.3, foi apresentado um estudo de simulação Monte Carlo para avaliar o comportamento assintótico dos estimadores de máxima verossimilhança do processo $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA. Além disso, realizaram-se estudos de comparação em uma imagem SAR real na Seção 7.4. Conclusões parciais são elencadas na Seção 7.5.

No que segue, introduz-se um novo processo ARMA, que estende a proposta de Vasconcelos (2018) de um modelo de regressão com variável resposta seguindo a distribuição $\mathcal{G}_I^0$.

7.2 MODELO $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA

Até o momento, a distribuição $\mathcal{G}_I^0$ foi empregada assumindo o contexto de independência. Embora o paradigma (largamente utilizado no processamento de imagens SAR) do suposto de independência tenha sua justificação tanto (i) no fato de que o tempo de processamento de um *pixel* ao outro na captura de uma imagem seja muito pequeno como (ii) no grande número de trabalhos de boa *performance* que se baseiam nesta condição, esta tese estende como ganho o pensar na condição de independência como um caso particular da estrutura ARMA. Assumindo esta flexibilização, a grande maioria das situações sustentam quantitativamente a necessidade de uma estrutura ARMA.

No que segue, definimos a distribuição condicional $\mathcal{G}_I^0$ munida com um comportamento sistemático tipo ARMA.

Seja $\{Z_t; t = 1, \dots, n\}$ sendo uma série temporal n -dimensional tal que a distribuição condicional de Z_t dado um conjunto de informações passadas, diga-se $\mathcal{F}_{t-1}$, segue a distribuição $\mathcal{G}_I^0$. As funções densidade e distribuição acumulada de $[Z_t|\mathcal{F}_{t-1}]$ são dadas por

$$f(Z_t|\mathcal{F}_{t-1}; \alpha, \gamma_t, L) = \frac{L^L \Gamma(L - \alpha)}{\gamma_t^\alpha \Gamma(-\alpha) \Gamma(L)} z_t^{L-1} [\gamma_t + L z_t]^{\alpha-L} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(z_t)$$

e

$$F(Z_t|\mathcal{F}_{t-1}; \alpha, \gamma_t, L) = \frac{L^L \Gamma(L - \alpha)}{\Gamma^L \Gamma(-\alpha)} z_t^L {}_2F_1 \left(L, L - \alpha; L + 1; \frac{-L z_t}{\gamma_t} \right),$$

respectivamente, em que $L > 0$ é o número de *looks*, $\gamma_t = \mu_t(-\alpha - 1) > 0$, ${}_2F_1(\cdot, \cdot; \cdot; \cdot)$ é a função Gauss hipergeométrica dada por

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_j} \frac{z^j}{j!}$$

e $(q)_j = q(q+1) \cdots (q+j-1)$ para $j > 0$ é o símbolo *Pochhammer* (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964). A média e variância condicionais associadas são dadas por, respectivamente,

$$\mathbb{E}(Z_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \mu_t \quad \text{e} \quad \text{VAR}(Z_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \mu_t^2 \left[\left(\frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} \right) \frac{L + 1}{L} - 1 \right].$$

Essas duas identidades têm um significado físico: (i) O retorno médio μ_t pode ser influenciado pela sua vizinhança e (ii) o parâmetro L impõe um controle da interferência do *speckle* nos dados SAR.

No modelo de regressão $\mathcal{G}_I^0$ (VASCONCELOS, 2018), μ_t é relacionado com um preditor linear η_t usando a função de ligação $g(x) = \log(x)$. No componente sistemático de $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA, o termo τ_t é formado por termos autoregressivo e de médias móveis. Aqui, μ_t é relacionado com um preditor linear usando três diferentes funções de ligações ($g(x) = \{\log(x), \log W(x), \sqrt{x}\}$).

7.2.1 Inferência baseada na verossimilhança condicional

Considere o problema da estimação dos parâmetros do $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA, $\boldsymbol{\nu} = (\delta, \boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\phi}^\top, \boldsymbol{\theta}^\top, L, \alpha)$. Sejam $m = \max\{p, q\}$ e $\{Z_t | \mathcal{F}_{t-1}\}_{t=1}^n$ tal que $[Z_t | \mathcal{F}_{t-1}] \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, \mu_t(-\alpha - 1), L)$. Dada uma série temporal observada $\{z_t; t = 1, \dots, n\}$, a função de log verossimilhança condicional em $\boldsymbol{\nu}$ tem a forma

$$\ell(\boldsymbol{\nu}) = \ell(\boldsymbol{\nu}; z_1, \dots, z_n) = \sum_{t=m+1}^n \log f(z_t | \mathcal{F}_{t-1}; \alpha, L, \gamma_t) = \sum_{t=m+1}^n \ell_t(\boldsymbol{\nu}), \quad (7.1)$$

em que

$$\begin{aligned} \ell_t(\boldsymbol{\nu}) = & L \log(L) + \log \Gamma(L - \alpha) - \alpha \log \mu_t - \alpha \log(-\alpha - 1) - \log \Gamma(-\alpha) \\ & - \log \Gamma(L) + (L - 1) \log(z_t) + (\alpha - L) \log(v_t) \end{aligned}$$

e $v_t = \mu_t(-\alpha - 1) + Lz_t$. O vetor escore associado

$$U_{\boldsymbol{\nu}} = \left(U_{\alpha}, U_L, U_{\delta}, U_{\boldsymbol{\beta}^\top}, U_{\boldsymbol{\phi}^\top}, U_{\boldsymbol{\theta}^\top} \right) = \left(\frac{\partial \ell}{\partial \alpha}, \frac{\partial \ell}{\partial L}, \frac{\partial \ell}{\partial \delta}, \frac{\partial \ell}{\partial \boldsymbol{\beta}^\top}, \frac{\partial \ell}{\partial \boldsymbol{\phi}^\top}, \frac{\partial \ell}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top} \right),$$

é determinado por

$$\begin{aligned} U_{\delta} &= \sum_{t=m+1}^n \left(\frac{c_1}{v_t} - \frac{\alpha}{\mu_t} \right) \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \delta}, \\ U_{\boldsymbol{\beta}} &= \sum_{t=m+1}^n \left(\frac{c_1}{v_t} - \frac{\alpha}{\mu_t} \right) \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \boldsymbol{\beta}}, \\ U_{\boldsymbol{\phi}} &= \sum_{t=m+1}^n \left(\frac{c_1}{v_t} - \frac{\alpha}{\mu_t} \right) \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \boldsymbol{\phi}}, \\ U_{\boldsymbol{\theta}} &= \sum_{t=m+1}^n \left(\frac{c_1}{v_t} - \frac{\alpha}{\mu_t} \right) \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \\ U_L &= (n - m) \mathcal{U}_1(\alpha, L) + \sum_{t=m+1}^n \log \left(\frac{z_t}{v_t} \right) + (\alpha - L) \sum_{t=m+1}^n \frac{z_t}{v_t} \end{aligned}$$

e

$$U_\alpha = (n - m)\mathcal{U}_2(\alpha, L) + \sum_{t=m+1}^n \log\left(\frac{v_t}{\mu_t}\right) - (\alpha - L) \sum_{t=m+1}^n \frac{\mu_t}{v_t},$$

em que $\mathcal{U}_1(\alpha, L) = \log(L) + \psi(L - \alpha) - \psi(L) + 1$, $\mathcal{U}_2(\alpha, L) = \psi(-\alpha) - \psi(L - \alpha) - \log(-\alpha - 1) + \alpha(-\alpha - 1)^{-1}$, $\psi(\cdot)$ é a função digamma e os resultados para $\frac{\partial \eta_t}{\partial \delta}$, $\frac{\partial \eta_t}{\partial \beta}$, $\frac{\partial \eta_t}{\partial \phi}$ e $\frac{\partial \eta_t}{\partial \theta}$ são dados no Apêndice G. Após algumas manipulações algébricas, os primeiros quatro elementos do vetor escore podem ser representados na forma de matriz como

$$U_\delta = \mathbf{d}^\top \mathbf{T} \mathbf{a}, \quad U_\beta = \mathbf{M}^\top \mathbf{T} \mathbf{a}, \quad U_\phi = \mathbf{P}^\top \mathbf{T} \mathbf{a} \quad \text{e} \quad U_\theta = \mathbf{R}^\top \mathbf{T} \mathbf{a},$$

em que $\mathbf{T} = \text{diag}\{1/g'(\mu_{m+1}), \dots, 1/g'(\mu_n)\}$, $\mathbf{d} = \left(\frac{\partial \eta_{m+1}}{\partial \delta}, \dots, \frac{\partial \eta_n}{\partial \delta}\right)^\top$, $\mathbf{a} = (a_{m+1}, \dots, a_n)^\top$ tal que $a_t = \left(\frac{c_1}{v_t} - \frac{\alpha}{\mu_t}\right)$ e $\mathbf{M}$, $\mathbf{P}$ e $\mathbf{R}$ são matrizes com dimensões $(n - m) \times k$, $(n - m) \times p$ e $(n - m) \times q$, respectivamente, dadas as entradas (i, j)

$$M_{i,j} = \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j}, \quad P_{i,j} = \frac{\partial \eta_i}{\partial \phi_j} \quad \text{e} \quad R_{i,j} = \frac{\partial \eta_i}{\partial \theta_j}.$$

As EMVs para ν tem a forma

$$\hat{\nu} = \arg \max_{\nu \in \mathbb{R}^{p+q+k+2}} [\ell(\nu; Z_1, \dots, Z_n)]$$

ou, equivalentemente, pode ser obtido como solução de $U_\nu = \mathbf{0}$. Note que esse sistema não possui solução em forma fechada e, portanto, algoritmos iterativos de otimização não linear devem ser usados para maximizar a função de log verossimilhança condicional; como algoritmos de Newton ou quase Newton (NOCEDAL; WRIGHT, 2006).

Outra importante quantidade é a MIF, que é brevemente deduzida na proposição seguinte.

Proposição 3 *Após algumas manipulações algébricas, sendo*

$$\mathbf{W}_1 = \text{diag}\left\{\frac{1}{\mu_{m+1}} \frac{1}{g'(\mu_{m+1})}, \dots, \frac{1}{\mu_n} \frac{1}{g'(\mu_n)}\right\}$$

e

$$\mathbf{W}_2 = \text{diag}\left\{\frac{1}{\mu_{m+1}^2 [g'(\mu_{m+1})]^2}, \dots, \frac{1}{\mu_n^2 [g'(\mu_n)]^2}\right\}$$

. A MIF, denominada $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\nu)$, pode ser escrita como

$$\mathbf{K}(\nu) = \mathbb{E}\left(\frac{\partial \ell(\nu)}{\partial \nu^\top} \frac{\partial \ell(\nu)}{\partial \nu} \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ell(\nu)}{\partial \nu^\top \partial \nu} \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} K_{\beta\beta} & K_{\beta\delta} & K_{\beta\phi} & K_{\beta\theta} & K_{\beta L} & K_{\beta\alpha} \\ K_{\delta\beta} & K_{\delta\delta} & K_{\delta\phi} & K_{\delta\theta} & K_{\delta L} & K_{\delta\alpha} \\ K_{\phi\beta} & K_{\phi\delta} & K_{\phi\phi} & K_{\phi\theta} & K_{\phi L} & K_{\phi\alpha} \\ K_{\theta\beta} & K_{\theta\delta} & K_{\theta\phi} & K_{\theta\theta} & K_{\theta L} & K_{\theta\alpha} \\ K_{L\beta} & K_{L\delta} & K_{L\phi} & K_{L\theta} & K_{LL} & K_{L\alpha} \\ K_{\alpha\beta} & K_{\alpha\delta} & K_{\alpha\phi} & K_{\alpha\theta} & K_{\alpha L} & K_{\alpha\alpha} \end{bmatrix},$$

em que $K_{\beta\beta} = -c_2 M^\top W_2 M$, $K_{\beta\delta} = K_{\delta\beta}^\top = -c_2 M^\top W_2 d$, $K_{\beta\phi} = K_{\phi\beta}^\top = -c_2 M^\top W_2 P$, $K_{\beta\theta} = K_{\theta\beta}^\top = -c_2 M^\top W_2 R$, $K_{\beta\delta} = K_{\delta\beta}^\top = -c_2 M^\top W_2 d$, $K_{\delta\delta} = -c_2 d^\top W_2 d$, $K_{\delta\phi} = K_{\phi\delta}^\top = -c_2 d^\top W_2 P$, $K_{\delta\theta} = K_{\theta\delta}^\top = -c_2 d^\top W_2 R$, $K_{\phi\phi} = -c_2 P^\top W_2 P$, $K_{\phi\theta} = K_{\theta\phi}^\top = -c_2 P^\top W_2 R$, $K_{\theta\theta} = -c_2 R^\top W_2 R$, $K_{LL} = -(n-m)c_7$, $K_{L\beta} = K_{\beta L} = c_4 M^\top W_1$, $K_{L\delta} = K_{\delta L} = c_4 d^\top W_1$, $K_{L\phi} = K_{\phi L} = c_4 P^\top W_1$, $K_{L\theta} = K_{\theta L} = c_4 R^\top W_1$, $K_{\alpha\alpha} = -(n-m)c_5$, $K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha} = -c_3 M^\top W_1$, $K_{\alpha\delta} = K_{\delta\alpha} = -c_3 d^\top W_1$, $K_{\alpha\phi} = K_{\phi\alpha} = -c_3 P^\top W_1$, $K_{\alpha\theta} = K_{\theta\alpha} = -c_3 R^\top W_1$, $K_{\alpha L} = K_{L\alpha} = -(n-m)c_6$ e

$$\begin{aligned} c_2 &= \alpha \frac{L}{L - \alpha + 1}, \\ c_3 &= \left[\frac{(L - 2\alpha - 1)\alpha}{(-\alpha - 1)(\alpha - L)} - \frac{\alpha(\alpha - 1)}{(-\alpha - 1)(L - \alpha + 1)} - 1 \right], \\ c_4 &= \left[\frac{\alpha}{(\alpha - L)(L - \alpha + 1)} \right], \\ c_5 &= \left[\psi^{(1)}(L - \alpha) - \psi^{(1)}(-\alpha) - \frac{\alpha + 2}{(-\alpha - 1)^2} - 2 \frac{\alpha}{(-\alpha - 1)(\alpha - L)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{(-\alpha - 1)^2(L - \alpha + 1)} \right], \\ c_6 &= \left[-\psi^{(1)}(L - \alpha) + \frac{1}{L - \alpha} + \frac{\alpha}{(-\alpha - 1)} \left(\frac{1}{(\alpha - L)(L - \alpha + 1)} \right) \right] \end{aligned}$$

e

$$c_7 = \left[\frac{1}{L} + \psi^{(1)}(L - \alpha) - \psi^{(1)}(L) - 2 \frac{1}{L - \alpha} + \frac{L + 1}{L} \frac{1}{(L - \alpha + 1)} \right].$$

Note que a MIF não é bloco diagonal. Fazer a inferência neste caso é um pouco diferente do que é feito no processo GARMA. Detalhes da expressão de MIF são apresentadas nos Apêndices H e I.

Finalmente, sob certas condições de regularidade (SLUD; KEDEM, 1994; FOKIANOS; KEDEM, 1998), os estimadores de MV satisfazem

$$\left(\hat{\delta}, \hat{\beta}^\top, \hat{\phi}^\top, \hat{\theta}^\top, \hat{L}, \hat{\alpha}\right)^\top \stackrel{a}{\sim} \mathcal{N}_{(p+q+k+2)} \left(\left(\delta, \beta^\top, \phi^\top, \theta^\top, L, \alpha\right)^\top, \mathbf{K}^{-1} \right),$$

para $n - m \rightarrow \infty$.

Este resultado é muito importante para fazer inferências pontuais, intervalares e para hipóteses. Inferência baseada em testes de hipóteses para ν pode ser formulada como

$$\mathcal{H}_0 : \mathbf{B}\nu = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_1 : \mathbf{B}\nu \neq \mathbf{0}, \quad (7.2)$$

em que $\mathbf{B}$ é uma matriz $h \times (k + p + q + 2)$ de posto completo h ($< k + p + q + 2$). Alguns exemplos para hipóteses nulas de interesse ($\mathcal{H}_0$) para (7.2) são: $\mathcal{H}_0 : \beta = \mathbf{0}$, $\mathcal{H}_0 : \phi = \mathbf{0}$ e $\mathcal{H}_0 : \theta = \mathbf{0}$.

Um teste que pode ser usado para (7.2) é o teste da razão entre verossimilhanças condicionais (RVC), com expressão para a estatística do teste dada por

$$CLR = 2 [\ell(\hat{\nu}) - \ell(\tilde{\nu})],$$

em que $\hat{\nu}$ e $\tilde{\nu}$ são estimadores de MV irrestritos e restritos em $\mathcal{H}_0$, respectivamente. Atendidas algumas condições de regularidade, RCV segue assintoticamente (para séries com tamanhos grandes) sob $\mathcal{H}_0$ a distribuição qui-quadrada com h grau de liberdade.

As equações de predição e previsão do processo $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA são introduzidas na Seção 2.4. Substituindo as EMVs dos parâmetros (ν por $\hat{\nu}$) nas Equações 2.13 e 2.14, temos que

$$\hat{\mu}_{n+h} = g^{-1} \left(\hat{\delta} + \mathbf{x}_{n+h}^\top \hat{\beta} + \sum_{j=1}^q \hat{\theta}_j \epsilon_{n+h-j} + \sum_{i=1}^p \hat{\phi}_i \left[g(z_{n+h-i}) - \mathbf{x}_{t+h-i}^\top \hat{\beta} \right] \right), \quad (7.3)$$

em que $g(z_{n+h-j})$ é trocado por $g(\mu_{n+h-j})$ para $j < h$ e

$$\epsilon_{n+h-j} = \begin{cases} g(z_{n+h-j}) - \eta_{n+h-j}, & \text{if } h \leq j < (n-1), \\ g(\hat{\mu}_{n+h-j}) - \eta_{n+h-j} = 0, & \text{if } j < h. \end{cases} \quad (7.4)$$

7.3 ESTUDO DE VALIDAÇÃO NUMÉRICA

Nesta seção, objetiva-se quantificar o desempenho dos estimadores MV para os parâmetros $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA. Para este fim, três funções de ligação são consideradas, como discutido no Capítulo

6: (i) logarítmica ($\log(\cdot)$), (ii) raiz quadrada ($\sqrt{\cdot}$) e (iii) função logarítmica W de Lambert ($\log W(\cdot)$).

Os seguintes modelos particulares foram considerados:

- $\mathcal{G}_I^0\text{-AR}(1)$: $\nu = (\phi, L, \delta)$: $g(\mu_t) = \delta + \phi g(y_{t-1})$,
- $\mathcal{G}_I^0\text{-MA}(1)$: $\nu = (\theta, L, \delta)$: $g(\mu_t) = \delta + \theta[g(y_{t-1}) - g(\mu_{t-1})]$,
- $\mathcal{G}_I^0\text{-ARMA}(1,1)$: $\nu = (\phi, \theta, L, \delta)$: $g(\mu_t) = \delta + \phi g(y_{t-1}) + \theta [g(y_{t-1}) - g(\mu_{t-1})]$,

em que $\phi, \theta \in \{-0,8; -0,5; 0,5; 0,8\}$, $\alpha = -3$ (que representa regiões urbanas, textura mais indicada para $\mathcal{G}_I^0$), $L = 4$ e 8 e séries com tamanho $n = 49, 121$ e 500. Como figura de mérito, adotam-se MSE, MASE, sMAPE e UMBRAE para avaliar o desempenho das predições. Essas medidas são amplamente usadas na literatura para acessar a acurácia das predições para modelos de séries temporais (CHEN; TWYCCROSS; GARIBALDI, 2017). Em todos os casos de simulação foram usadas mil réplicas de Monte Carlo.

As Tabelas 20, 21 e 22 apresentam os valores da média e MSE das estimativas dos parâmetros para os processos $\mathcal{G}_I^0\text{-AR}(1)$, $\mathcal{G}_I^0\text{-MA}(1)$ e $\mathcal{G}_I^0\text{-ARMA}(1,1)$, respectivamente. Em geral, os valores médios das estimativas dos parâmetros se aproximam dos valores reais dos parâmetros e os valores MSE diminuem quando o tamanho da série aumenta, conforme esperado. Com relação a $\hat{\alpha}$, as estimativas não são influenciadas pela variação de ϕ e θ . Para todos os modelos, as convergências mais rápidas de estimativas são obtidas quando os valores ϕ ou θ aumentam. Ao comparar o MSE das estimativas dos parâmetros para as diferentes funções de ligações, é perceptível que: (1) para valores negativos de ϕ ou θ , a função de ligação logarítmica W de Lambert tem melhor desempenho do que os demais e (2) para valores positivos de ϕ ou θ , a função de ligação raiz quadrada apresenta o melhor resultado.

No que segue, identifica-se o comportamento das desigualdade do MSE para $\hat{\alpha}$ do modelo AR(1). Para $n = 49$ e $L = 4, 8$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{MSE}_{\log W(\cdot)}(\hat{\alpha}) < \text{MSE}_{\log(\cdot)}(\hat{\alpha}) < \text{MSE}_{\sqrt{\cdot}}(\hat{\alpha}) \quad \text{para } \phi = -0,8. \\ \text{MSE}_{\sqrt{\cdot}}(\hat{\alpha}) < \text{MSE}_{\log W(\cdot)}(\hat{\alpha}) < \text{MSE}_{\log(\cdot)}(\hat{\alpha}) \quad \text{para } \phi = -0,5. \\ \text{MSE}_{\sqrt{\cdot}}(\hat{\alpha}) < \text{MSE}_{\log(\cdot)}(\hat{\alpha}) < \text{MSE}_{\log W(\cdot)}(\hat{\alpha}) \quad \text{para } \phi = 0,5 \text{ e } 0,8. \end{array} \right.$$

Para $n = 121, 500$ e $L = 4$:

Tabela 20 – As médias e MSE das estimativas dos parâmetros para o processo $\mathcal{G}_I^0$ -AR(1) com $\alpha = -3$ e $L = 4, 8$. Legenda: valor segundo melhor desempenho e valor primeiro melhor desempenho

ligação	Medidas	n	$L = 4$				$L = 8$			
			ϕ				ϕ			
			-0, 8	-0, 5	0, 5	0, 8	-0, 8	-0, 5	0, 5	0, 8
$\log(\mu)$	Média($\hat{\alpha}$)	49	-3,765	-3,804	-3,638	-3,804	-3,440	-3,439	-3,432	-3,428
		121	-3,189	-3,197	-3,283	-3,215	-3,150	-3,130	-3,190	-3,159
		500	-3,077	-3,036	-3,087	-3,043	-3,038	-3,039	-3,057	-3,030
	Média($\hat{\delta}$)	49	-0,998	-0,987	-1,146	-1,363	-1,000	-1,003	-1,143	-1,256
		121	-0,986	-0,996	-1,069	-1,188	-0,991	-0,997	-1,058	-1,146
		500	-1,000	-0,995	-1,016	-1,050	-0,998	-0,998	-1,015	-1,042
	Média($\hat{\phi}$)	49	-0,777	-0,486	0,446	0,745	-0,780	-0,489	0,446	0,760
		121	-0,787	-0,492	0,478	0,773	-0,787	-0,494	0,483	0,778
		500	-0,795	-0,497	0,496	0,793	-0,797	-0,495	0,495	0,794
	MSE($\hat{\alpha}$)	49	3,465	14,450	2,718	3,556	1,357	1,360	1,308	1,280
		121	0,581	0,529	0,748	0,525	0,343	0,356	0,358	0,335
		500	0,102	0,088	0,092	0,091	0,061	0,062	0,062	0,063
	MSE($\hat{\delta}$)	49	0,030	0,038	0,177	0,476	0,028	0,033	0,169	0,333
		121	0,014	0,015	0,062	0,180	0,011	0,013	0,056	0,139
		500	0,003	0,004	0,013	0,039	0,002	0,003	0,013	0,030
	MSE($\hat{\phi}$)	49	0,009	0,015	0,020	0,010	0,009	0,014	0,020	0,008
		121	0,003	0,006	0,007	0,004	0,004	0,005	0,007	0,003
		500	0,001	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,001
$\sqrt{\mu}$	Média($\hat{\alpha}$)	49	-3,799	-3,695	-3,634	-3,739	-3,458	-3,447	-3,425	-3,402
		121	-3,200	-3,217	-3,290	-3,222	-3,154	-3,133	-3,190	-3,161
		500	-3,076	-3,034	-3,088	-3,044	-3,037	-3,040	-3,057	-3,031
	Média($\hat{\delta}$)	49	-1,164	-1,076	-1,000	-0,997	-1,211	-1,071	-0,993	-0,993
		121	-1,082	-1,027	-0,992	-0,988	-1,103	-1,034	-0,991	-0,996
		500	-1,018	-1,005	-0,997	-0,999	-1,024	-1,002	-0,998	-1,000
	Média($\hat{\phi}$)	49	-0,726	-0,456	0,497	0,797	-0,716	-0,448	0,493	0,791
		121	-0,769	-0,478	0,494	0,789	-0,765	-0,479	0,493	0,796
		500	-0,792	-0,499	0,498	0,799	-0,792	-0,498	0,499	0,800
	MSE($\hat{\alpha}$)	49	3,770	8,611	2,576	3,141	1,331	1,378	1,268	1,193
		121	0,648	0,602	0,871	0,599	0,345	0,359	0,361	0,343
		500	0,103	0,087	0,095	0,091	0,061	0,062	0,062	0,063
	MSE($\hat{\delta}$)	49	0,191	0,068	0,010	0,007	0,206	0,070	0,019	0,006
		121	0,078	0,033	0,012	0,019	0,073	0,024	0,003	0,002
		500	0,013	0,006	0,001	0,001	0,013	0,006	0,001	0,001
	MSE($\hat{\phi}$)	49	0,039	0,027	0,009	0,006	0,034	0,027	0,012	0,005
		121	0,017	0,013	0,005	0,012	0,010	0,009	0,002	0,002
		500	0,002	0,002	0,000	0,000	0,002	0,002	0,000	0,000
$\log W(\mu)$	Média($\hat{\alpha}$)	49	-3,766	-3,784	-3,641	-3,802	-3,433	-3,439	-3,432	-3,427
		121	-3,186	-3,197	-3,283	-3,215	-3,152	-3,130	-3,190	-3,158
		500	-3,075	-3,035	-3,086	-3,043	-3,036	-3,039	-3,057	-3,030
	Média($\hat{\delta}$)	49	-0,998	-0,992	-1,147	-1,377	-1,001	-1,004	-1,144	-1,269
		121	-0,993	-0,998	-1,067	-1,191	-0,996	-0,998	-1,056	-1,149
		500	-1,000	-0,995	-1,014	-1,051	-0,999	-0,998	-1,015	-1,043
	Média($\hat{\phi}$)	49	-0,784	-0,486	0,445	0,743	-0,786	-0,491	0,445	0,758
		121	-0,793	-0,494	0,478	0,772	-0,792	-0,495	0,484	0,778
		500	-0,798	-0,496	0,497	0,793	-0,798	-0,496	0,496	0,793
	MSE($\hat{\alpha}$)	49	3,444	11,388	2,771	3,523	1,333	1,340	1,309	1,279
		121	0,568	0,528	0,748	0,525	0,348	0,356	0,358	0,335
		500	0,105	0,088	0,092	0,091	0,061	0,062	0,062	0,063
	MSE($\hat{\delta}$)	49	0,016	0,023	0,158	0,498	0,015	0,020	0,153	0,350
		121	0,007	0,009	0,054	0,183	0,006	0,008	0,050	0,142
		500	0,001	0,002	0,011	0,039	0,001	0,002	0,012	0,030
	MSE($\hat{\phi}$)	49	0,005	0,011	0,019	0,011	0,005	0,012	0,019	0,009
		121	0,001	0,004	0,006	0,004	0,002	0,004	0,006	0,003
		500	0,000	0,001	0,001	0,001	0,000	0,001	0,001	0,001

Fonte: Autoria própria (2020)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{MSE}_{\log W(\cdot)}(\hat{\alpha}) \approx \text{MSE}_{\log(\cdot)}(\hat{\alpha}) < \text{MSE}_{\sqrt{\cdot}}(\hat{\alpha}) \quad \text{para } \phi = -0,8 \text{ e } -0,5. \\ \text{MSE}_{\sqrt{\cdot}}(\hat{\alpha}) < \text{MSE}_{\log(\cdot)}(\hat{\alpha}) \approx \text{MSE}_{\log W(\cdot)}(\hat{\alpha}) \quad \text{para } \phi = 0,5 \text{ e } 0,8. \end{array} \right.$$

Para $n = 121, 500$ e $L = 8$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{MSE}_{\log W(\cdot)}(\hat{\alpha}) \approx \text{MSE}_{\log(\cdot)}(\hat{\alpha}) \approx \text{MSE}_{\sqrt{\cdot}}(\hat{\alpha}) \quad \text{para } \phi = -0,8, -0,5, 0,5, 0,8. \end{array} \right.$$

De acordo com os resultados, a função ligação $\log W(\cdot)$ é mais recomendada para fortes autocorrelações negativas; enquanto $\sqrt{\cdot}$ é mais indicada para autocorrelações fortemente positivas. Quando os valores de L aumentam, os modelos tendem a performar de maneira similar para diferentes funções de ligação.

As seguintes desigualdades MSE se mantêm para $\hat{\delta}$ e $\hat{\phi}$ no modelo AR(1): Para $n = 49, 121, 500$ e $L = 4, 8$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{MSE}_{\log W(\cdot)}(\hat{\delta} \text{ ou } \hat{\phi}) < \text{MSE}_{\log(\cdot)}(\hat{\delta} \text{ ou } \hat{\phi}) < \text{MSE}_{\sqrt{\cdot}}(\hat{\delta} \text{ ou } \hat{\phi}) \quad \text{para } \phi = -0,8 \text{ e } -0,5. \\ \text{MSE}_{\sqrt{\cdot}}(\hat{\delta} \text{ ou } \hat{\phi}) < \text{MSE}_{\log(\cdot)}(\hat{\delta} \text{ ou } \hat{\phi}) < \text{MSE}_{\log W(\cdot)}(\hat{\delta} \text{ ou } \hat{\phi}) \quad \text{para } \phi = 0,5 \text{ e } 0,8. \end{array} \right.$$

Modelos com ligação $\log W(\cdot)$ têm melhor desempenho para autocorrelações negativas enquanto que modelos com ligação $\sqrt{\cdot}$ são mais recomendados para autocorrelações positivas. Resultados similares são obtidos para os processos MA(1) e ARMA(1,1).

Também avalia-se os desempenhos dos modelos $\mathcal{G}_I^0$ -AR(1), -MA(1) e -ARMA(1,1) em termos de suas predições nas Tabelas 23, 24 e 25, respectivamente. Nesse sentido, foram empregadas três medidas de acurácia como ferramenta de comparação: MASE, sMAPE e UMBRAE. Quando os valores de ϕ ou θ são negativos, o modelo $\mathcal{G}_I^0$ com função de $\log W(\cdot)$ apresenta os melhores resultados. Para valores positivos de ϕ ou θ , a função de ligação raiz quadrada performa melhor em comparação com os demais. Para a medida sMAPE, em geral, os modelos são similares.

Por exemplo, as seguintes desigualdades para MASE (também válido para UMBRAE) são verificadas for os modelos $\mathcal{G}_I^0$ -AR(1) e -MA(1): Para $n = 49, 121, 500$ e $L = 4, 8$:

Tabela 21 – As médias e MSE das estimativas dos parâmetros para o processo $\mathcal{G}_I^0$ -MA(1) com $\alpha = -3$ e $L = 4, 8$. Legenda: valor segundo melhor desempenho e valor primeiro melhor desempenho

ligação	Medidas	n	$L = 4$				$L = 8$			
			θ				θ			
			-0, 8	-0, 5	0, 5	0, 8	-0, 8	-0, 5	0, 5	0, 8
$\log(\mu)$	Média($\hat{\alpha}$)	49	-3,627	-3,665	-3,619	-3,613	-3,345	-3,449	-3,429	-3,359
		121	-3,162	-3,215	-3,282	-3,189	-3,128	-3,131	-3,182	-3,125
		500	-3,069	-3,033	-3,087	-3,035	-3,029	-3,039	-3,055	-3,028
	Média($\hat{\delta}$)	49	-1,005	-1,009	-1,017	-1,030	-1,004	-1,017	-1,019	-1,041
		121	-1,001	-1,006	-1,017	-1,027	-1,003	-1,005	-1,024	-1,023
		500	-1,000	-0,999	-1,010	-1,009	-1,000	-1,001	-1,006	-1,006
	Média($\hat{\theta}$)	49	-0,823	-0,539	0,478	0,772	-0,828	-0,548	0,488	0,776
		121	-0,812	-0,515	0,494	0,787	-0,816	-0,518	0,498	0,786
		500	-0,801	-0,501	0,499	0,797	-0,802	-0,501	0,499	0,797
	MSE($\hat{\alpha}$)	49	3,006	6,519	2,506	2,797	1,225	1,428	1,305	1,177
		121	0,600	0,591	0,815	0,538	0,333	0,361	0,349	0,326
		500	0,102	0,087	0,095	0,090	0,060	0,062	0,063	0,062
	MSE($\hat{\delta}$)	49	0,003	0,010	0,064	0,106	0,003	0,008	0,053	0,076
		121	0,001	0,004	0,024	0,034	0,001	0,003	0,018	0,030
		500	0,000	0,001	0,006	0,008	0,000	0,001	0,005	0,007
	MSE($\hat{\theta}$)	49	0,015	0,028	0,023	0,014	0,014	0,029	0,023	0,012
		121	0,006	0,008	0,007	0,004	0,005	0,008	0,006	0,004
		500	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001
$\sqrt{\mu}$	Média($\hat{\alpha}$)	49	-3,677	-3,805	-3,620	-3,672	-3,366	-3,444	-3,421	-3,377
		121	-3,166	-3,209	-3,284	-3,181	-3,098	-3,125	-3,181	-3,148
		500	-3,061	-3,036	-3,085	-3,031	-3,026	-3,039	-3,055	-3,033
	Média($\hat{\delta}$)	49	-0,994	-1,010	-0,999	-0,999	-0,995	-0,999	-0,999	-0,998
		121	-1,006	-1,001	-0,998	-0,999	-1,005	-1,003	-0,997	-0,999
		500	-1,000	-1,003	-0,999	-1,000	-1,001	-1,000	-0,999	-1,000
	Média($\hat{\theta}$)	49	-0,780	-0,493	0,523	0,798	-0,780	-0,496	0,523	0,799
		121	-0,796	-0,500	0,502	0,793	-0,795	-0,501	0,499	0,795
		500	-0,799	-0,501	0,499	0,798	-0,799	-0,503	0,499	0,799
	MSE($\hat{\alpha}$)	49	3,034	16,109	2,618	2,818	1,190	1,355	1,340	1,116
		121	0,566	0,606	0,881	0,469	0,304	0,351	0,345	0,272
		500	0,099	0,087	0,094	0,060	0,058	0,061	0,060	0,043
	MSE($\hat{\delta}$)	49	0,017	0,018	0,001	0,000	0,017	0,013	0,001	0,000
		121	0,007	0,006	0,001	0,000	0,006	0,005	0,000	0,000
		500	0,002	0,001	0,000	0,000	0,001	0,001	0,000	0,000
	MSE($\hat{\theta}$)	49	0,008	0,020	0,012	0,007	0,009	0,020	0,015	0,007
		121	0,002	0,006	0,003	0,002	0,002	0,006	0,003	0,002
		500	0,000	0,001	0,000	0,000	0,000	0,001	0,000	0,000
$\log W(\mu)$	Média($\hat{\alpha}$)	49	-3,716	-3,767	-3,634	-3,648	-3,427	-3,499	-3,440	-3,371
		121	-3,180	-3,221	-3,294	-3,202	-3,129	-3,137	-3,187	-3,137
		500	-3,066	-3,034	-3,087	-3,037	-3,029	-3,041	-3,056	-3,028
	Média($\hat{\delta}$)	49	-1,000	-1,011	-1,013	-1,020	-1,004	-1,016	-1,013	-1,026
		121	-1,000	-1,005	-1,014	-1,019	-1,001	-1,005	-1,018	-1,017
		500	-1,000	-0,999	-1,007	-1,007	-1,000	-1,001	-1,004	-1,003
	Média($\hat{\theta}$)	49	-0,813	-0,537	0,482	0,772	-0,825	-0,551	0,492	0,772
		121	-0,807	-0,512	0,494	0,789	-0,809	-0,518	0,499	0,786
		500	-0,800	-0,500	0,500	0,797	-0,801	-0,501	0,499	0,797
	MSE($\hat{\alpha}$)	49	3,909	9,229	2,596	2,947	1,312	1,527	1,306	1,160
		121	0,594	0,594	0,947	0,545	0,313	0,361	0,355	0,320
		500	0,098	0,087	0,095	0,087	0,060	0,062	0,062	0,062
	MSE($\hat{\delta}$)	49	0,002	0,006	0,032	0,053	0,001	0,005	0,030	0,038
		121	0,001	0,002	0,013	0,019	0,001	0,002	0,010	0,016
		500	0,000	0,000	0,004	0,005	0,000	0,000	0,003	0,004
	MSE($\hat{\theta}$)	49	0,012	0,023	0,021	0,012	0,012	0,027	0,021	0,012
		121	0,004	0,006	0,003	0,003	0,004	0,007	0,006	0,004
		500	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001

Fonte: Autoria própria (2020)

Tabela 22 – As médias e MSE das estimativas dos parâmetros para o processo $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA(1,1) com $\alpha = -3$ e $L = 4, 8$. Legenda: valor segundo melhor desempenho e valor primeiro melhor desempenho

Cigação	Medidas	n	$L = 4$				$L = 8$			
			$\phi = \theta$				$\phi = \theta$			
			-0, 8	-0, 5	0, 5	0, 8	-0, 8	-0, 5	0, 5	0, 8
$\log(\mu)$	Média($\hat{\alpha}$)	49	-4,284	-4,074	-3,837	-4,284	-3,548	-3,620	-3,489	-3,643
		121	-3,221	-3,255	-3,280	-3,225	-3,140	-3,190	-3,201	-3,148
		500	-3,071	-3,044	-3,091	-3,040	-3,036	-3,039	-3,063	-3,031
	Média($\hat{\delta}$)	49	-1,001	-0,998	-1,154	-1,470	-0,997	-1,002	-1,161	-1,474
		121	-0,994	-1,001	-1,083	-1,315	-0,996	-0,998	-1,078	-1,251
		500	-0,998	-0,998	-1,020	-1,076	-0,998	-0,996	-1,018	-1,072
	Média($\hat{\phi}$)	49	-0,774	-0,471	0,458	0,743	-0,788	-0,482	0,454	0,740
		121	-0,785	-0,487	0,479	0,764	-0,790	-0,482	0,483	0,769
		500	-0,795	-0,497	0,496	0,792	-0,797	-0,493	0,496	0,791
	Média($\hat{\theta}$)	49	-0,866	-0,569	0,512	0,815	-0,824	-0,548	0,510	0,821
		121	-0,815	-0,525	0,503	0,796	-0,812	-0,527	0,503	0,799
		500	-0,802	-0,503	0,501	0,800	-0,801	-0,505	0,501	0,799
	MSE($\hat{\alpha}$)	49	7,146	18,685	4,437	11,796	2,268	2,340	1,885	2,768
		121	0,622	0,628	0,675	0,534	0,339	0,396	0,365	0,319
		500	0,100	0,088	0,094	0,093	0,063	0,063	0,061	0,062
	MSE($\hat{\delta}$)	49	0,009	0,016	0,333	1,130	0,007	0,016	0,293	0,941
		121	0,002	0,006	0,114	0,422	0,002	0,005	0,098	0,299
		500	0,000	0,002	0,024	0,067	0,000	0,001	0,024	0,053
	MSE($\hat{\phi}$)	49	0,012	0,027	0,028	0,015	0,009	0,027	0,027	0,016
		121	0,004	0,009	0,010	0,005	0,003	0,009	0,010	0,005
		500	0,001	0,002	0,002	0,001	0,001	0,002	0,002	0,001
	MSE($\hat{\theta}$)	49	0,047	0,059	0,041	0,027	0,028	0,041	0,030	0,026
		121	0,007	0,013	0,010	0,004	0,005	0,012	0,010	0,004
		500	0,001	0,003	0,002	0,001	0,001	0,003	0,002	0,001
$\sqrt{\mu}$	Média($\hat{\alpha}$)	49	-3,354	-3,798	-3,793	-3,898	-3,009	-3,468	-3,525	-3,554
		121	-2,878	-3,203	-3,343	-3,290	-2,897	-3,125	-3,222	-3,249
		500	-2,940	-3,028	-3,097	-3,049	-2,924	-3,038	-3,060	-3,057
	Média($\hat{\delta}$)	49	-1,041	-1,044	-0,991	-0,964	-1,064	-1,037	-0,984	-0,960
		121	-1,025	-1,019	-0,996	-0,977	-1,030	-1,022	-0,990	-0,974
		500	-1,010	-1,002	-0,997	-0,994	-1,004	-1,002	-0,998	-0,994
	Média($\hat{\phi}$)	49	-0,791	-0,465	0,485	0,738	-0,786	-0,462	0,477	0,734
		121	-0,828	-0,482	0,496	0,762	-0,815	-0,481	0,489	0,757
		500	-0,810	-0,501	0,497	0,790	-0,814	-0,497	0,498	0,790
	Média($\hat{\theta}$)	49	-0,765	-0,476	0,511	0,800	-0,738	-0,469	0,526	0,801
		121	-0,786	-0,486	0,498	0,798	-0,786	-0,485	0,504	0,798
		500	-0,798	-0,494	0,500	0,799	-0,796	-0,497	0,500	0,800
	MSE($\hat{\alpha}$)	49	3,685	18,209	3,302	3,561	1,011	1,524	1,513	1,440
		121	0,552	0,617	1,002	0,669	0,326	0,357	0,378	0,465
		500	0,107	0,088	0,098	0,115	0,076	0,064	0,063	0,088
	MSE($\hat{\delta}$)	49	0,089	0,082	0,020	0,010	0,115	0,078	0,017	0,009
		121	0,027	0,035	0,005	0,004	0,031	0,031	0,004	0,005
		500	0,003	0,007	0,001	0,001	0,005	0,008	0,001	0,001
	MSE($\hat{\phi}$)	49	0,028	0,050	0,030	0,026	0,036	0,042	0,026	0,023
		121	0,013	0,020	0,008	0,012	0,013	0,017	0,006	0,012
		500	0,003	0,004	0,001	0,003	0,004	0,004	0,001	0,002
	MSE($\hat{\theta}$)	49	0,014	0,023	0,029	0,007	0,025	0,021	0,026	0,008
		121	0,003	0,007	0,006	0,001	0,004	0,007	0,005	0,001
		500	0,000	0,001	0,000	0,000	0,000	0,001	0,000	0,000
$\log W(\mu)$	Média($\hat{\alpha}$)	49	-1,931	-3,795	-3,794	-3,044	-2,117	-3,531	-3,508	-2,753
		121	-2,006	-3,211	-3,288	-2,786	-2,239	-3,136	-3,208	-2,719
		500	-2,410	-3,040	-3,087	-2,886	-2,613	-3,040	-3,059	-2,866
	Média($\hat{\delta}$)	49	-0,912	-0,974	-1,200	-1,477	-0,906	-0,985	-1,205	-1,489
		121	-0,970	-0,992	-1,103	-1,293	-0,960	-0,993	-1,081	-1,301
		500	-0,998	-0,998	-1,022	-1,083	-0,995	-0,998	-1,020	-1,103
	Média($\hat{\phi}$)	49	-0,810	-0,470	0,437	0,733	-0,798	-0,471	0,431	0,726
		121	-0,822	-0,490	0,471	0,761	-0,813	-0,490	0,479	0,756
		500	-0,816	-0,501	0,495	0,789	-0,813	-0,498	0,495	0,784
	Média($\hat{\theta}$)	49	-0,625	-0,512	0,513	0,586	-0,615	-0,527	0,521	0,557
		121	-0,706	-0,503	0,507	0,663	-0,693	-0,507	0,506	0,637
		500	-0,767	-0,495	0,502	0,750	-0,764	-0,500	0,501	0,739
	MSE($\hat{\alpha}$)	49	1,542	7,012	4,026	3,302	1,259	1,758	1,512	0,771
		121	1,105	0,630	0,640	0,368	0,747	0,355	0,379	0,280
		500	0,437	0,084	0,098	0,093	0,207	0,060	0,060	0,061
	MSE($\hat{\delta}$)	49	0,015	0,013	0,323	0,876	0,014	0,013	0,291	0,892
		121	0,003	0,004	0,100	0,365	0,004	0,004	0,094	0,281
		500	0,000	0,001	0,020	0,065	0,000	0,001	0,019	0,051
	MSE($\hat{\phi}$)	49	0,006	0,022	0,033	0,013	0,006	0,024	0,031	0,016
		121	0,002	0,007	0,010	0,005	0,002	0,007	0,010	0,006
		500	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,002	0,001
	MSE($\hat{\theta}$)	49	0,039	0,032	0,032	0,069	0,042	0,037	0,029	0,085
		121	0,012	0,011	0,010	0,029	0,014	0,010	0,009	0,038
		500	0,002	0,002	0,002	0,005	0,002	0,002	0,002	0,007

Fonte: Autoria própria (2020)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{MASE}_{\log W(\cdot)}(\hat{y}) < \text{MASE}_{\log(\cdot)}(\hat{y}) < \text{MASE}_{\sqrt{\cdot}}(\hat{y}) \quad \text{para } \phi = -0,8 \text{ e } -0,5. \\ \text{MASE}_{\sqrt{\cdot}}(\hat{y}) < \text{MASE}_{\log W(\cdot)}(\hat{y}) < \text{MASE}_{\log(\cdot)}(\hat{y}) \quad \text{para } \phi = 0,5 \text{ e } 0,8. \end{array} \right.$$

Tabela 23 – Medidas de acurácia para o processo $\mathcal{G}_T^0\text{-AR}(1)$ com $\alpha = -3$ e $L = 4, 8$. Legenda: **valor** segundo melhor desempenho e **valor** primeiro melhor desempenho

ligação	Medidas	n	L = 4				L = 8			
			ϕ				ϕ			
			-0,8	-0,5	0,5	0,8	-0,8	-0,5	0,5	0,8
$\log(\mu)$	UMBRAE	49	0,527	0,716	1,062	1,096	0,518	0,710	1,063	1,076
		121	0,539	0,726	1,084	1,163	0,534	0,716	1,066	1,146
		500	0,542	0,720	1,093	1,198	0,534	0,719	1,078	1,177
	sMAPE	49	0,619	0,627	0,626	0,620	0,568	0,563	0,564	0,563
		121	0,640	0,638	0,633	0,636	0,577	0,577	0,569	0,574
		500	0,640	0,641	0,638	0,643	0,579	0,579	0,578	0,581
	MASE	49	0,408	0,554	0,850	0,727	0,405	0,551	0,849	0,722
		121	0,411	0,553	0,861	0,830	0,406	0,555	0,863	0,830
		500	0,408	0,552	0,868	0,912	0,402	0,553	0,866	0,909
$\sqrt{\mu}$	UMBRAE	49	1,134	1,055	0,725	0,599	1,131	1,045	0,715	0,573
		121	1,160	1,068	0,740	0,607	1,143	1,053	0,726	0,591
		500	1,156	1,072	0,746	0,622	1,151	1,061	0,733	0,600
	sMAPE	49	0,616	0,627	0,626	0,623	0,565	0,563	0,567	0,567
		121	0,643	0,636	0,633	0,635	0,577	0,576	0,571	0,573
		500	0,640	0,642	0,639	0,641	0,578	0,579	0,577	0,580
	MASE	49	0,959	0,866	0,557	0,463	0,959	0,864	0,553	0,444
		121	0,958	0,869	0,562	0,477	0,955	0,866	0,557	0,459
		500	0,955	0,870	0,565	0,483	0,955	0,871	0,559	0,465
$\log W(\mu)$	UMBRAE	49	0,471	0,690	1,064	1,101	0,468	0,683	1,066	1,080
		121	0,478	0,693	1,087	1,165	0,482	0,697	1,069	1,147
		500	0,476	0,693	1,095	1,198	0,475	0,697	1,081	1,178
	sMAPE	49	0,617	0,626	0,626	0,620	0,569	0,563	0,563	0,563
		121	0,640	0,638	0,633	0,636	0,578	0,576	0,570	0,574
		500	0,640	0,641	0,638	0,643	0,579	0,579	0,578	0,581
	MASE	49	0,343	0,524	0,846	0,758	0,349	0,532	0,847	0,750
		121	0,326	0,519	0,858	0,850	0,335	0,531	0,861	0,854
		500	0,319	0,519	0,866	0,920	0,328	0,531	0,864	0,918

Fonte: Autoria própria (2020)

Tabela 24 – Medidas de acurácia para o processo $\mathcal{G}_I^0\text{-MA}(1)$ com $\alpha = -3$ e $L = 4, 8$. Legenda: valor segundo melhor desempenho e valor primeiro melhor desempenho

ligação	Medidas	n	$L = 4$				$L = 8$			
			θ				θ			
			-0, 8	-0, 5	0, 5	0, 8	-0, 8	-0, 5	0, 5	0, 8
$\log(\mu)$	UMBRAE	49	0,689	0,751	1,017	1,002	0,703	0,754	1,001	0,988
		121	0,685	0,751	1,032	0,985	0,679	0,761	1,015	0,979
		500	0,679	0,761	1,033	0,993	0,672	0,752	1,023	0,982
	sMAPE	49	0,648	0,637	0,626	0,637	0,597	0,570	0,566	0,582
		121	0,649	0,637	0,634	0,637	0,586	0,580	0,570	0,580
		500	0,641	0,642	0,639	0,642	0,580	0,579	0,577	0,581
	MASE	49	0,530	0,591	0,813	0,816	0,529	0,589	0,817	0,820
		121	0,518	0,580	0,824	0,794	0,521	0,583	0,819	0,799
		500	0,514	0,582	0,824	0,787	0,514	0,582	0,824	0,788
$\sqrt{\mu}$	UMBRAE	49	0,936	0,997	0,756	0,691	0,936	0,982	0,752	0,682
		121	0,956	1,010	0,771	0,706	0,949	1,002	0,759	0,688
		500	0,956	1,017	0,776	0,708	0,950	1,005	0,763	0,691
	sMAPE	49	0,622	0,629	0,626	0,624	0,569	0,562	0,566	0,569
		121	0,646	0,637	0,633	0,639	0,581	0,577	0,571	0,576
		500	0,641	0,642	0,639	0,642	0,579	0,578	0,578	0,580
	MASE	49	0,807	0,821	0,579	0,530	0,802	0,817	0,577	0,523
		121	0,806	0,825	0,585	0,535	0,795	0,822	0,581	0,527
		500	0,805	0,828	0,588	0,539	0,799	0,825	0,584	0,530
$\log W(\mu)$	UMBRAE	49	0,629	0,720	1,018	0,980	0,645	0,723	1,009	0,971
		121	0,644	0,732	1,036	0,982	0,649	0,744	1,025	0,974
		500	0,646	0,742	1,038	0,990	0,646	0,738	1,029	0,982
	sMAPE	49	0,622	0,627	0,627	0,633	0,569	0,565	0,567	0,573
		121	0,643	0,636	0,635	0,637	0,580	0,577	0,569	0,579
		500	0,640	0,642	0,640	0,642	0,580	0,579	0,577	0,580
	MASE	49	0,469	0,564	0,812	0,780	0,490	0,573	0,811	0,788
		121	0,468	0,561	0,816	0,765	0,488	0,569	0,816	0,777
		500	0,459	0,564	0,818	0,753	0,481	0,571	0,820	0,763

Fonte: Autoria própria (2020)

Tabela 25 – Medidas de acurácia para o processo $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA(1,1) com $\alpha = -3$ e $L = 4, 8$.

Legenda: valor segundo melhor desempenho e valor primeiro melhor desempenho

ligação	Medidas	n	$L = 4$				$L = 8$			
			$\phi = \theta$				$\phi = \theta$			
			-0, 8	-0, 5	0, 5	0, 8	-0, 8	-0, 5	0, 5	0, 8
$\log(\mu)$	UMBRAE	49	0,417	0,555	1,057	0,957	0,403	0,553	1,040	0,941
		121	0,415	0,577	1,070	0,967	0,400	0,572	1,053	0,963
		500	0,413	0,579	1,088	0,994	0,400	0,572	1,075	0,980
	sMAPE	49	0,820	0,630	0,625	0,657	0,743	0,560	0,562	0,603
		121	0,707	0,634	0,632	0,645	0,636	0,574	0,566	0,582
		500	0,654	0,641	0,639	0,642	0,592	0,578	0,577	0,581
	MASE	49	0,381	0,432	0,868	0,761	0,360	0,430	0,870	0,732
		121	0,342	0,433	0,874	0,773	0,324	0,434	0,871	0,774
		500	0,340	0,437	0,874	0,816	0,318	0,433	0,870	0,794
$\sqrt{\mu}$	UMBRAE	49	0,999	1,040	0,618	0,514	1,036	1,037	0,598	0,490
		121	1,000	1,055	0,623	0,525	0,997	1,048	0,606	0,501
		500	0,975	1,065	0,630	0,541	0,983	1,054	0,616	0,512
	sMAPE	49	0,670	0,630	0,622	0,633	0,617	0,561	0,567	0,575
		121	0,665	0,637	0,632	0,629	0,601	0,577	0,569	0,570
		500	0,647	0,642	0,639	0,638	0,586	0,578	0,578	0,577
	MASE	49	0,936	0,890	0,480	0,461	0,933	0,877	0,471	0,430
		121	0,934	0,886	0,490	0,471	0,911	0,884	0,476	0,441
		500	0,892	0,888	0,495	0,490	0,872	0,882	0,482	0,453
$\log W(\mu)$	UMBRAE	49	0,492	0,519	1,072	1,019	0,463	0,514	1,045	1,018
		121	0,447	0,536	1,076	1,016	0,431	0,527	1,056	1,022
		500	0,384	0,530	1,089	1,013	0,370	0,530	1,076	1,000
	sMAPE	49	0,907	0,635	0,624	0,672	0,808	0,565	0,562	0,618
		121	0,802	0,642	0,633	0,663	0,722	0,578	0,567	0,608
		500	0,692	0,641	0,640	0,652	0,628	0,579	0,576	0,590
	MASE	49	0,322	0,360	0,860	0,793	0,277	0,370	0,856	0,783
		121	0,312	0,337	0,855	0,807	0,258	0,358	0,858	0,826
		500	0,239	0,330	0,861	0,825	0,249	0,354	0,858	0,781

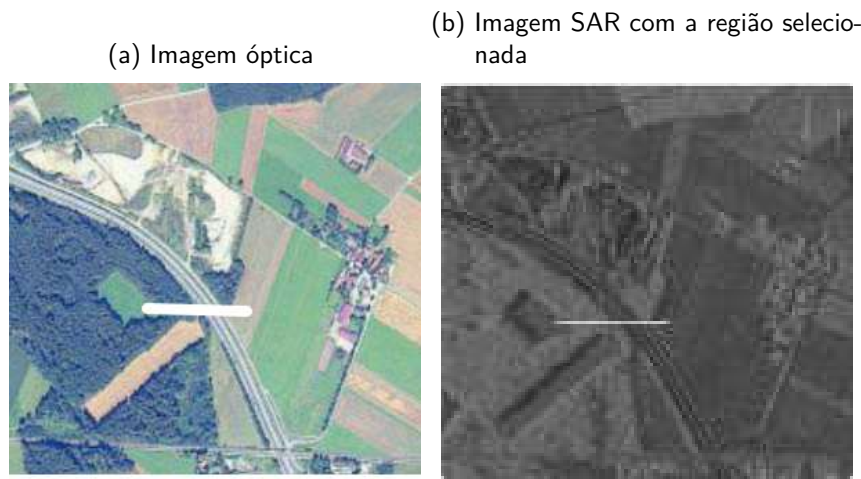
Fonte: Autoria própria (2020)

7.4 APLICAÇÃO PARA DADOS REAIS

Agora, estamos em posição de aplicar o modelo $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA para predições das intensidades obtidas em imagens SAR.

A Figura 45a fornece uma imagem SAR 542×349 de uma vizinhança de Weßling (Munique, Alemanha), extraída por um sensor *Experimental Airborne SAR* (E-SAR) com ENL $L = 3$. A captura foi feita em 22 de julho de 1999, $Range = 1,498\text{m}$ e $Azimuth = 0,879\text{m}$. Estamos interessados em modelar intensidades do canal de polarização VV.

Figura 45 – Imagem SAR de Munique e região selecionada (linha na cor branca).

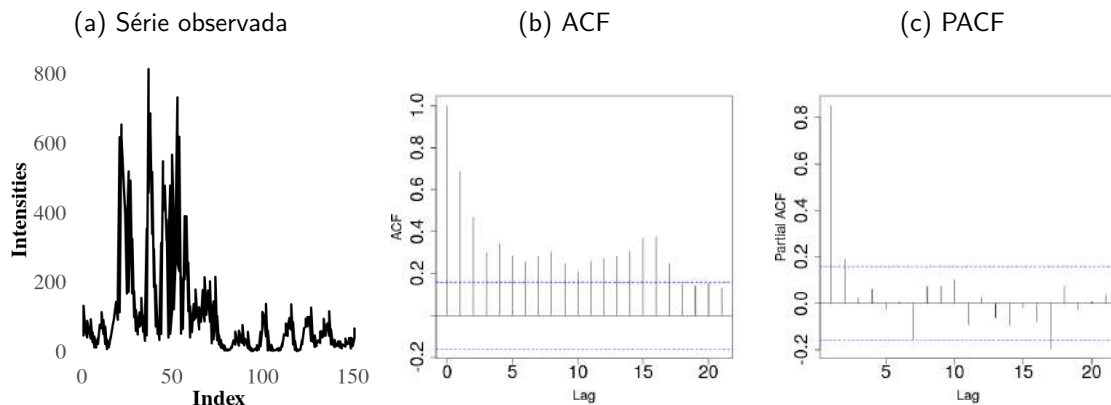


Fonte: Autoria própria (2020)

Para avaliar o desempenho de nossa proposta em comparação com aquele devido ao processo I -ARMA, um *patch* da imagem é selecionado (linha 140 e colunas 150–300), representado pela linha branca na Figura 45b. Este segmento representa uma série de intensidades contendo pastagens, florestas, estradas e áreas de cultivo em coordenadas horizontais. Os ajustes obtidos são avaliados qualitativamente por gráficos dos sinais verdadeiros e estimados na Figura 47 e quantitativamente por medidas de precisão do poder preditivo (MASE, sMASE e UMBRAE) apresentadas na Tabela 27.

A escolha da ordem do modelo $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA(p, q) é feita através do AIC. Para todas as funções de ligação associadas aos modelos I - e $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA, a estrutura AR(2) é a melhor. Para ilustrar tal escolha, as Figuras 46b e 46c apresentam função de autocorrelação amostral (ACF) e função de autocorrelação parcial (PACF) da série observada na Figura 46a, respectivamente. O corte no segundo lag da PACF sugere que o modelo AR(2) é o mais apropriado.

Figura 46 – Série temporal observada–Trecho da imagem de Munique (linha 140 e colunas 150–300)



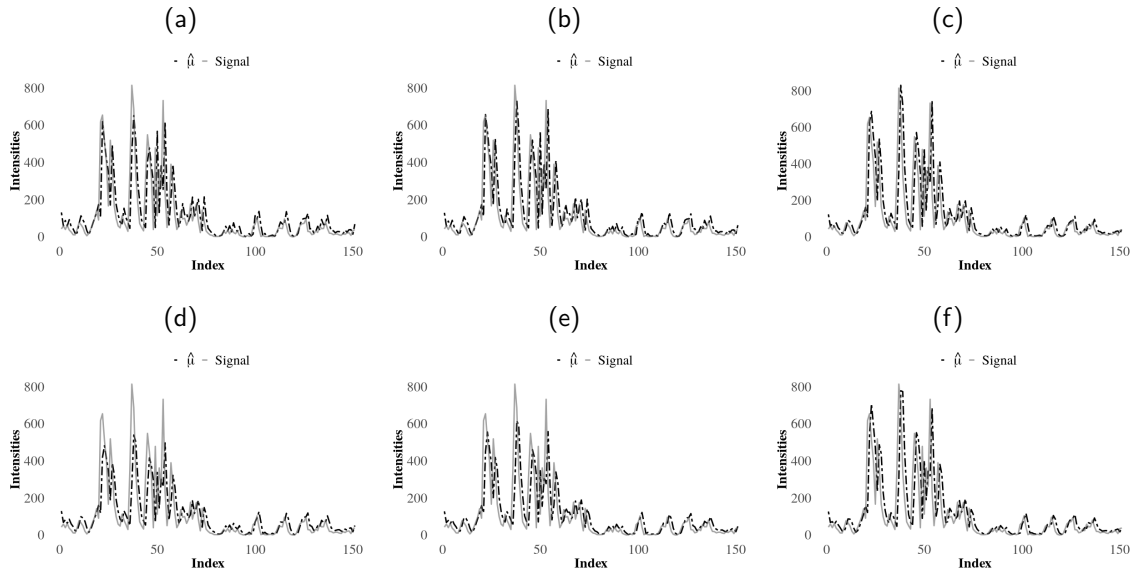
Fonte: Autoria própria (2020)

Da Figura 47, em geral, os modelos $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA tiveram melhores predições em relação aos modelos Γ -ARMA. O ajuste fornecido pelo modelo $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA com ligação $\sqrt{\cdot}$ na Figura 47c apresenta a melhor predição. De acordo com as medidas sMAPE, MASE e UMBRAE, a Tabela 27 mostra que os modelos $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA têm melhor desempenho do que os modelos Γ -ARMA. O melhor resultado é obtido pelo modelo $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA com a ligação $\sqrt{\cdot}$.

Agora, uma breve análise residual é discutida. As Figuras 48 e 49 apresentam, respectivamente, ACF e PACF de Γ - e $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA dos resíduos de Pearson. Para ambos os casos, obtêm-se padrões semelhantes devido ao ruído branco. Além disso, a Tabela 27 exibe os valores p dos testes de Ljung Box para verificar se os resíduos são independentes. É perceptível para as primeiras 20 defasagens que os valores p são maiores do que os níveis de significância $\alpha = 10\%$. Assim, não rejeitamos a hipótese nula de que os resíduos são independentes em todos os casos.

A Tabela 26 fornece as estimativas dos parâmetros e erro-padrão (EP) para os modelos Γ - e $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA. Em geral, todos os modelos usados estão bem ajustados. A Tabela 27 também indica o poder preditivo dos modelos para esta aplicação. Conforme discutido no estudo de simulação, valores positivos para as estimativas de ϕ_1 em $\mathcal{G}_I^0$ -AR (2) sugerem o uso da ligação $\sqrt{\cdot}$.

Figura 47 – Sinais previstos da linha 140 e colunas 150–300. (a) Modelo $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA com $g(\mu) = \log W(\mu)$, (b) Modelo $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA com $g(\mu) = \log(\mu)$, (c) Modelo $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA com $g(\mu) = \sqrt{\mu}$, (d) Modelo Γ -ARMA com $g(\mu) = \log W(\mu)$, (e) Modelo Γ -ARMA com $g(\mu) = \log(\mu)$ and (f) Modelo Γ -ARMA com $g(\mu) = \sqrt{\mu}$.



Fonte: Autoria própria (2020)

Tabela 26 – Estimativas dos parâmetros para os modelos Γ -AR(2) e $\mathcal{G}_I^0$ -AR(2).

Modelo	Ligação	$\hat{\alpha}$ (EP)	$\hat{\delta}$ (EP)	$\hat{\phi}_1$ (EP)	$\hat{\phi}_2$ (EP)
Γ -ARMA	$\log(\mu)$	-	1.12 (0.0195)	0.71 (0.0065)	0.09 (0.0066)
	$\sqrt{\mu}$	-	0.97 (0.0335)	0.82 (0.0061)	0.19 (0.0060)
	$\log W(\mu)$	-	0.39 (0.0058)	0.67 (0.0064)	0.05 (0.0058)
$\mathcal{G}_I^0$ -ARMA	$\log(\mu)$	-2.61 (0.0452)	1.13 (0.0162)	0.91 (0.0051)	-0.10 (0.0063)
	$\sqrt{\mu}$	-2.74 (0.0468)	1.05 (0.1308)	0.95 (0.0073)	0.03 (0.0077)
	$\log W(\mu)$	-2.60 (0.0390)	0.37 (0.0050)	0.85 (0.0054)	-0.11 (0.0051)

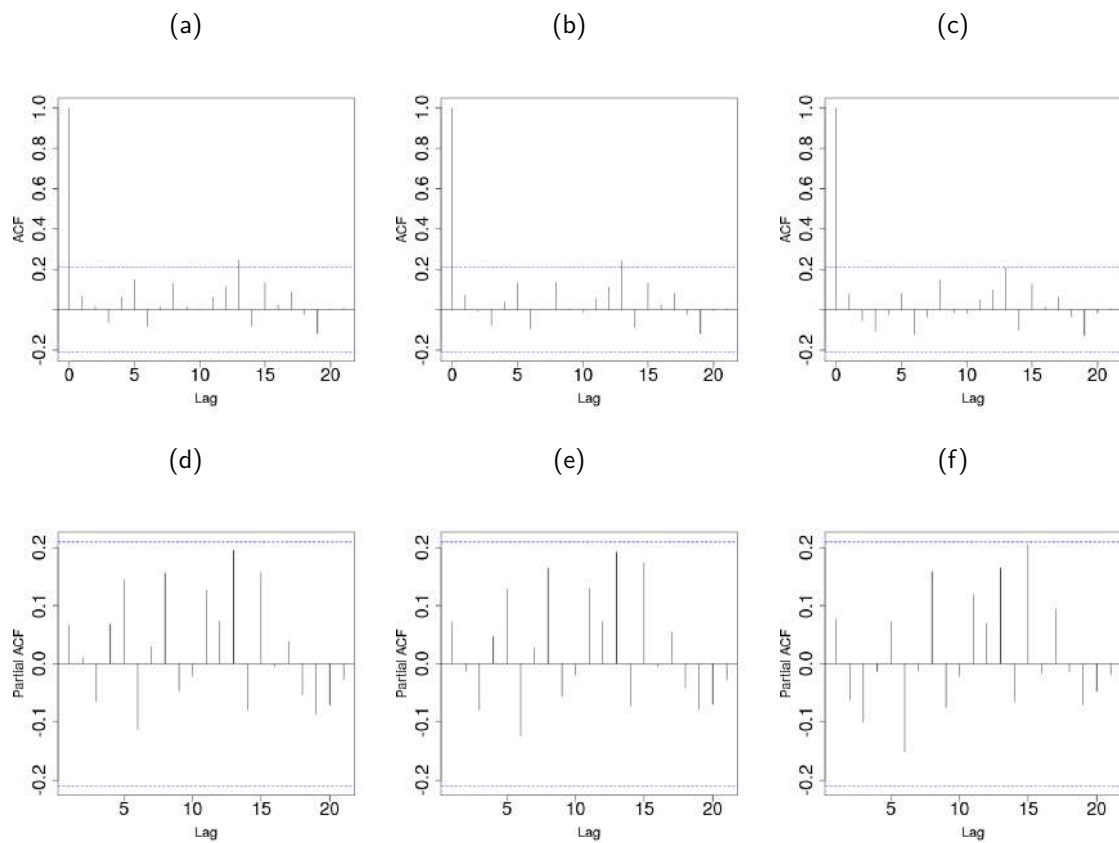
Fonte: Autoria própria (2020)

Tabela 27 – Medidas de acurácia e teste Ljung-Box(lag = 20) para os modelos Γ -ARMA e $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA. Legenda: valor segundo melhor resultado e valor primeiro melhor resultado

Modelos	Ligação	Medidas			Teste Ljung-Box	
		sMAPE	MASE	UMBRAE	estatística Q	valor p
Γ -ARMA	$\log(\mu)$	0.420	0.354	0.812	9.443	0.491
	$\sqrt{\mu}$	0.391	0.319	0.723	10.475	0.400
	$\log W(\mu)$	0.442	0.430	0.883	9.386	0.496
$\mathcal{G}_I^0$ -ARMA	$\log(\mu)$	0.410	0.312	0.813	11.361	0.330
	$\sqrt{\mu}$	0.352	0.213	0.657	10.083	0.433
	$\log W(\mu)$	0.423	0.377	0.851	10.805	0.373

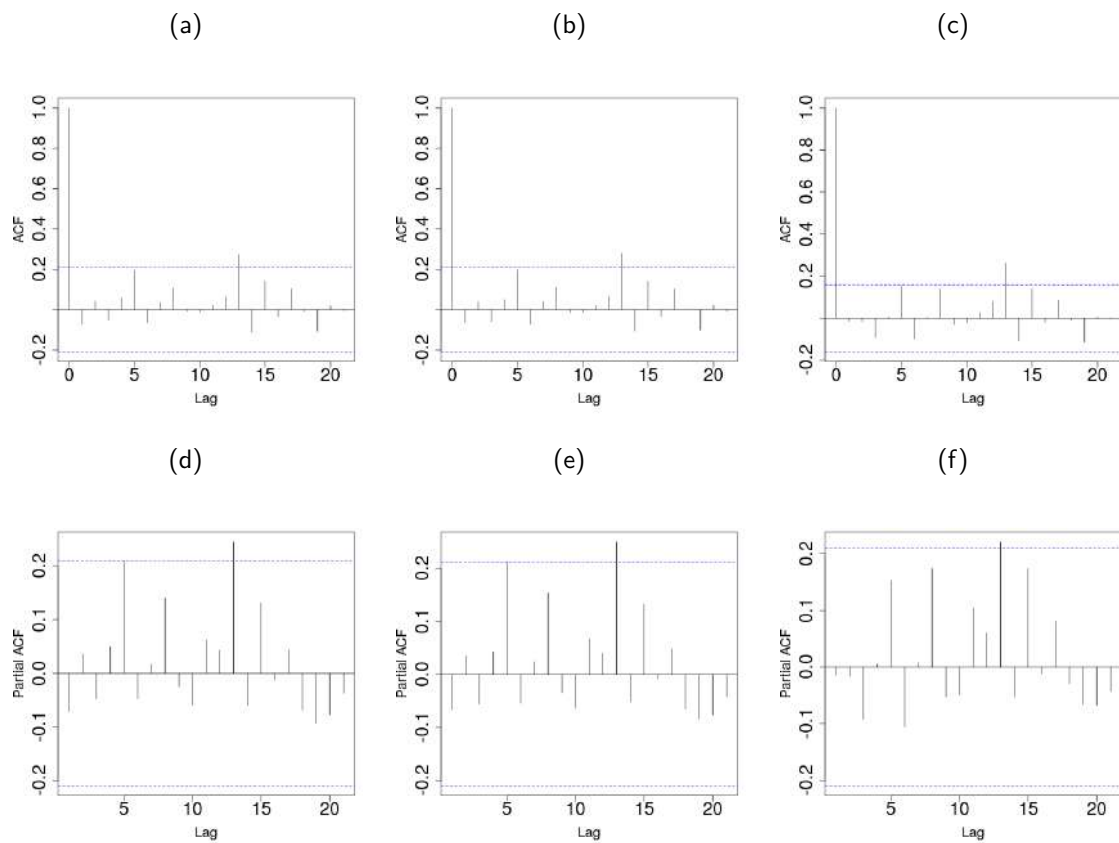
Fonte: Autoria própria (2020)

Figura 48 – ACF e PACF dos resíduos do modelo Γ -ARMA. (a) ACF com $g(\mu) = \log W(\mu)$, (b) ACF com $g(\mu) = \log(\mu)$, (c) ACF com $g(\mu) = \sqrt{\mu}$, (d) PACF com $g(\mu) = \log W(\mu)$, (e) PACF com $g(\mu) = \log(\mu)$ e (f) PACF com $g(\mu) = \sqrt{\mu}$.



Fonte: Autoria própria (2020)

Figura 49 – ACF e PACF dos resíduos do modelo $\mathcal{G}_0^I$ -ARMA. (a) ACF com $g(\mu) = \log W(\mu)$, (b) ACF com $g(\mu) = \log(\mu)$, (c) ACF com $g(\mu) = \sqrt{\mu}$, (d) PACF com $g(\mu) = \log W(\mu)$, (e) PACF com $g(\mu) = \log(\mu)$ e (f) PACF com $g(\mu) = \sqrt{\mu}$.



Fonte: Autoria própria (2020)

7.5 CONCLUSÃO

Foi introduzida uma nova modelagem 1D para imagens SAR, chamada de processo $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA. Derivou-se algumas de suas propriedades matemáticas; tais como vetor escore, MIF, análise de resíduos e equações de predição. Experimentos Monte Carlo foram usados para avaliar o comportamento de ambos os EMVs e comparar o desempenho de várias funções de ligações. Como uma aplicação para dados reais, o modelo proposto foi empregado em uma imagem SAR (Munique, Alemanha). Os resultados mostraram que o $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA teve um desempenho melhor do que o modelo Γ -ARMA que é uma referência para dados SAR, como discutido no Capítulo 6.

8 ESTUDO DO COMPORTAMENTO DO ÍNDICE NDVI PARA REGIÃO DE FLORESTA NACIONAL

8.1 ESTADO DA ARTE E PROPOSTA

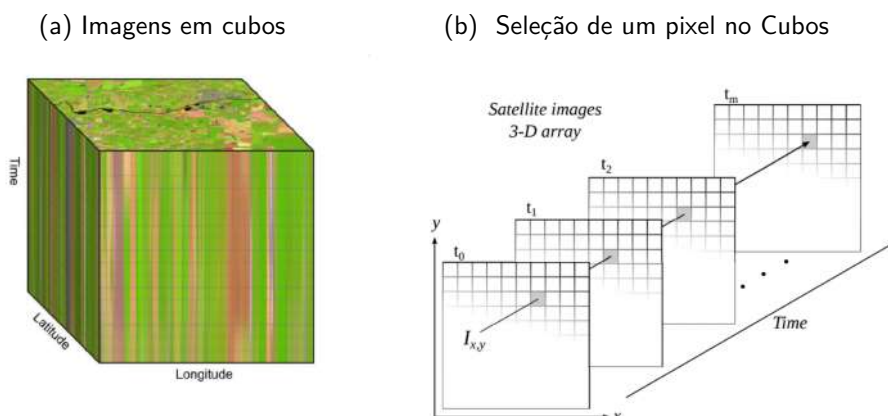
Nos capítulos anteriores, tratamos do uso dos modelos de séries temporais para uma única imagem (ao que chamamos de um contexto espacial aproximado). Entretanto, se tivermos uma mesma região mapeada em diversos instantes de tempos, os modelos desta tese são perfeitamente aplicados conforme discussão subsequente.

Como os satélites de sensoriamento remoto passam pelo mesmo ponto em diferentes instantes de tempo, seus dados são mapeáveis para *arrays* tridimensionais no espaço-tempo (Figura 50). Cada localização de *pixel*, diga-se $I(x,y)$, em tempos sequenciais, $t_1, \dots, t_m$, gera uma série temporal a partir das imagens de satélite. Seja $Z_{x,y} = (z_1, \dots, z_m)$ uma série temporal de uma determinada localização (pixel (x,y)) nos instantes de tempos, $t_1, \dots, t_m$, em que z_i é o valor da medida do sensor no tempo t_i . Combinando toda a cobertura espacial do satélite, obtemos um conjunto de séries temporais $D = \{Z_1, \dots, Z_s\}$ (MAUS et al., 2016). Esse tipo de conjuntos de dados é denominado cubo de dados (*Data Cubes*) (NATIVI; MAZZETTI; CRAGLIA, 2017). Recentemente, diversos repositórios de cubos de dados foram criados (APPEL et al., 2018). Um dos projetos pioneiros de bastante sucesso foi o da Austrália (LEWIS et al., 2016; KOPP et al., 2019). No Brasil, o projeto *Data Cubes Brazil* foi criado por pesquisadores do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) (FERREIRA et al., 2020; SOARES et al., 2020). O projeto também tem avançado na criação de pacotes na linguagem R, o *rsat* (Brazil Data Cube team, 2021).

Os cubos de dados ajudam a organizar os dados coletados em diferentes instantes de tempos, contribuindo para um melhor gerenciamento dos dados. A estrutura do cubo também simplifica as operações de agregação de dados: como análises semanais, mensais ou anuais. Em um contexto de mapeamento, os cubos de dados para imagens de satélites são tipicamente em três dimensões (3D): latitude, longitude e tempo (KILLOUGH, 2018). Uma consulta de um cubo de dados de imagens em um momento específico retornará um mapa de imagem, como ilustrado no nível superior do cubo na Figura 50a. Ou seja, ao especificar um local (longitude e latitude) de um cubo de dados, ter-se-á uma série temporal de valores naquele local (Figura 50b).

Os Índices de Vegetação são propostos com o objetivo de (i) combinar bandas espectrais

Figura 50 – Ilustração da extração de séries temporais para cubos de dados.



Fonte: Kopp et al. (2019)

(usando principalmente as regiões do espectro visível e do infravermelho próximo) para aumentar o contraste entre os diferentes tipos de vegetações, bem como (ii) quantificar características das plantas (tais como biomassa, vigor, densidade, etc). Esses índices estão relacionados a parâmetros biofísicos da cobertura vegetal e podem caracterizar parâmetros como o índice de área foliar e a biomassa, radiação fotossinteticamente ativa absorvida, produtividade de determinada cultura, além de minimizarem efeitos da iluminação da cena e declividade da superfície que influenciam na reflectância da vegetação (PONZONI; SHIMABUKURO; KUPLICH, 2019).

Entre os índices de vegetação mais conhecido, está o NDVI proposto por ROUSE et al. (1973). O NDVI é formulado da seguinte maneira:

$$\text{NDVI} = (\text{NIR} - \text{VE}) / (\text{NIR} + \text{VE}),$$

em que NIR e VE são as reflectâncias no infravermelho próximo e vermelho, respectivamente. Mais detalhes sobre as bandas dos sensores ópticos podem ser encontrados em (GEMITZI; KOUTSIAS; LAKSHMI, 2019). O NDVI se emprega como um dos índices mais antigos e utilizados em razão de seu bom desempenho na identificação de variações da vegetação. Em geral, o NDVI varia entre $-1,0$ e $1,0$. Mais especificamente para a vegetação, este índice varia entre aproximadamente $(0, 1)$. Há na literatura autores que citam o NDVI para a vegetação variando entre intervalos mais restritos, como $(0,3, 1)$ (RAMOS, 2016).

Nesse capítulo pretende-se avaliar o comportamento do NDVI ao longo do tempo de uma região de reserva florestal através dos processos $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA e KB -ARMA em comparação com o processo Γ -ARMA. No que segue, apresenta-se uma ferramenta para extração de séries temporais do índice NDVI.

8.2 FERRAMENTA SATVEG PARA EXTRAÇÃO DE SÉRIES TEMPORAIS

O SATVeg (Sistema de Análise Temporal da Vegetação) é uma ferramenta Web desenvolvida pela Embrapa Informática Agropecuária (EMPRAPA, 2021). O sistema objetiva facilitar o acesso e visualização de séries temporais dos índices vegetativos NDVI e EVI do sensor MODIS, a bordo dos satélites TERRA e AQUA. As séries temporais são armazenadas em um grande banco de dados geoespaciais (cubos de dados), conforme disponibilidade de imagens no *Land Processes Distributed Active Archive Center* (LP DAAC). Para gerar o gráfico da série histórica do NDVI ou EVI, basta utilizar a interface *Google Maps*, navegar até a região de interesse e clicar sobre a imagem. O gráfico com a série histórica completa com o nome do município é exibido na tela do SATVeg, como ilustrado na Figura 51.

Figura 51 – Interface da ferramenta Web SATVeg.



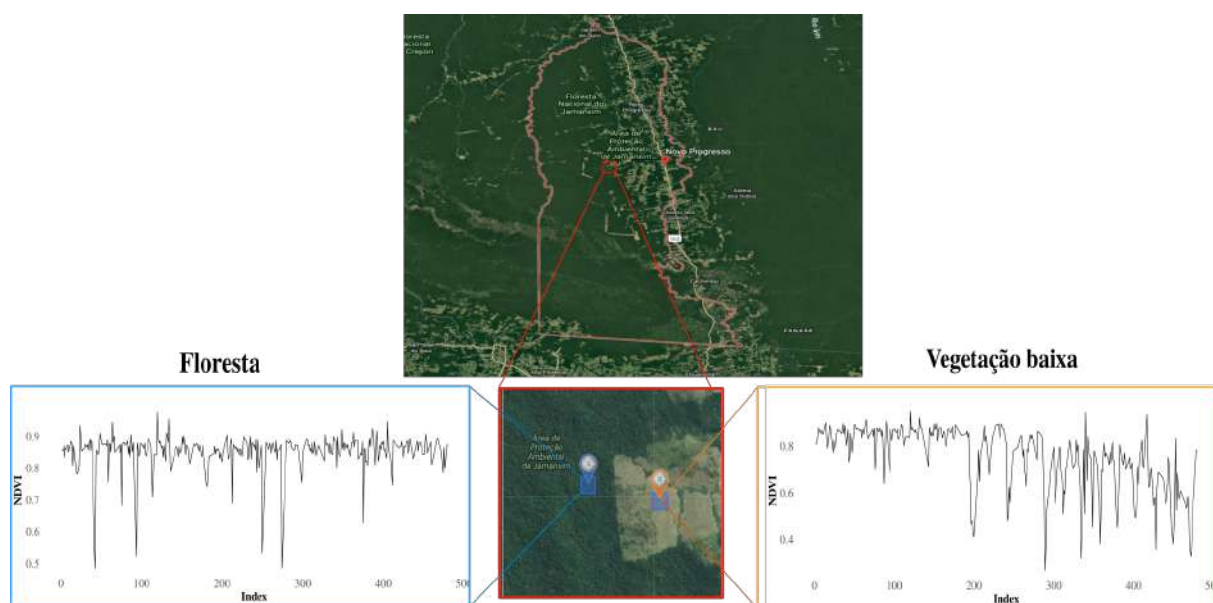
Fonte: Emprapa (2021)

8.3 APLICAÇÃO DOS MODELOS $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA E KB -ARMA PARA PREDIÇÃO DO NDVI

Nesta seção, apresenta-se um estudo do comportamento dos NDVIs de regiões selecionadas na Floresta Nacional do Jamanxim, localizada no município Novo Progresso do Estado do Pará, como ilustrado na Figura 52. Para este fim, foi utilizada a ferramenta SATVeg para extração das séries temporais dos NDVIs do sensor óptico MODIS do satélite TERRA. Foram selecionadas duas regiões: (i) Floresta e (ii) Pastagem ou vegetação baixa. Nota-se que para

a região de floresta, os valores do NDVI estão próximos de 1, com exceção de alguns baixos valores (pode ocorrer por interferência de nuvens e efeitos da atmosfera e solo). Em relação a região de vegetação baixa, a partir de determinado ponto, a variabilidade do NDVI é alterada, passando a ter bastante alternância entre valores pequenos e altos do NDVI.

Figura 52 – Regiões selecionadas da Floresta Nacional do Jamanxim, localizada no município Novo Progresso-PA.

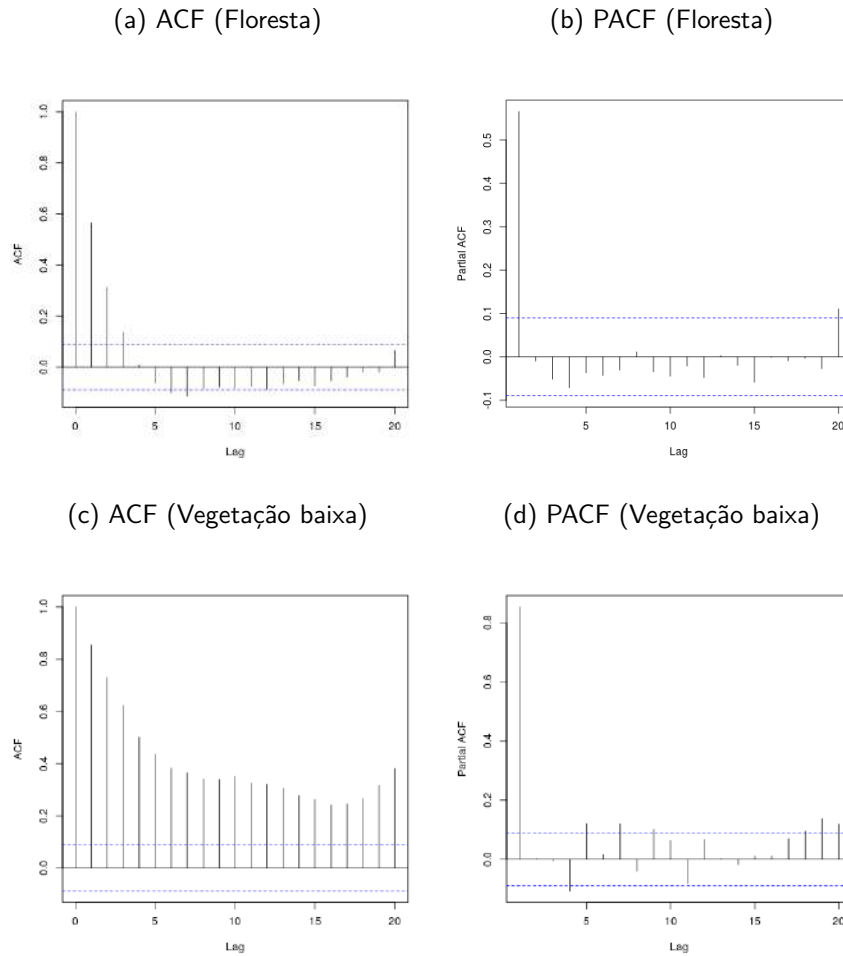


Fonte: Autoria própria (2021)

Objetiva-se quantificar o desempenho dos processos Γ -ARMA, KB -ARMA e $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA para avaliar o comportamento dos NDVIs. A rigor, em termos do suporte, dever-se-ia utilizar como distribuição marginal uma medida de probabilidade em $(-1,1)$. Entretanto, como esses índices em floresta estão em $(0,1)$, assumimos o risco de utilizar distribuições com suporte grosso modo mais amplo do que $(0,1)$, mas que com interpretabilidade mais encaixada com o processamento de imagens de radar. Para este fim, as funções de ligações, (i) logarítmica ($\log(\cdot)$), (ii) raiz quadrada ($\sqrt{\cdot}$) e (iii) função logarítmica W de Lambert ($\log W(\cdot)$) são usadas em todos os modelos. A escolha da ordem dos processos é feita através do AIC em conjunto com os gráficos ACF e PACF das séries observadas, que são fornecidos na Figura 53. Para a região de floresta, os modelos são Γ -MA(2), KB -MA(2) e $\mathcal{G}_I^0$ -MA(2); enquanto que para a região de vegetação baixa os modelos foram Γ -ARMA(1,1), KB -ARMA(1,1) e $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA(1,1).

A capacidade preditiva dos modelos é avaliada quantitativamente por medidas de precisão

Figura 53 – Funções ACF e PACF das séries observadas.



Fonte: Autoria própria (2021)

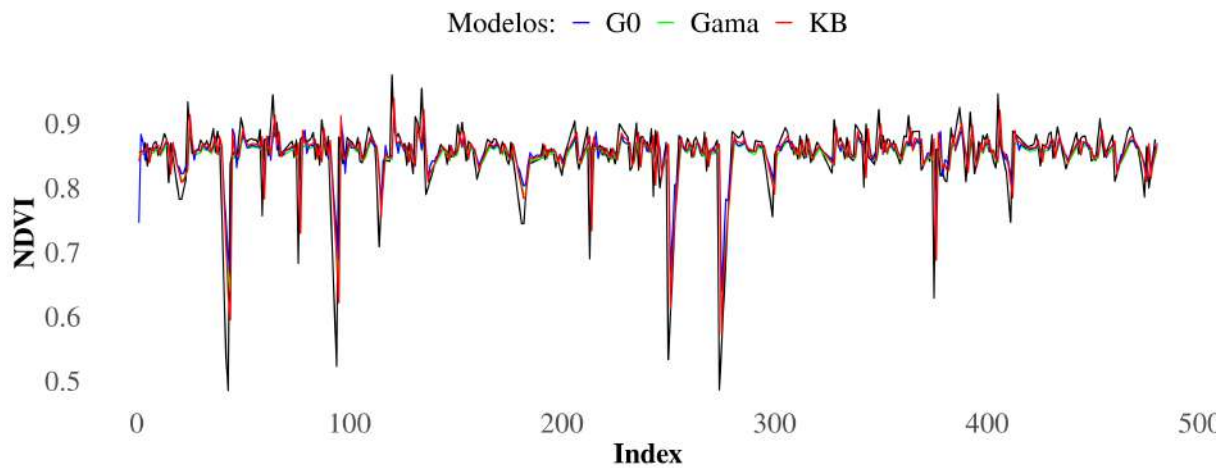
do poder preditivo (MASE, sMASE e UMBRAE) apresentadas na Tabela 28. Os resultados mostram que, para a região de floresta, o melhor ajuste foi do modelo KB -MA(2) com função de ligação W de Lambert. Enquanto que, para a região de vegetação baixa, o melhor ajuste foi do modelo $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA(1,1) com a ligação raiz quadrada.

Como avaliação qualitativa, escolhendo as melhores versões para cada processo a Figura 54 apresenta as predições dos NDVIs para os processos Γ -ARMA, KB -ARMA e $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA. Na Figura 54a são fornecidas as predições para a região de floresta dos modelos Γ -MA(2) com $g(\cdot) = \sqrt{\cdot}$, KB -MA(2) com $g(\cdot) = \log W(\cdot)$ e $\mathcal{G}_I^0$ -MA(2) com $g(\cdot) = \sqrt{\cdot}$. Na Figura 54b são exibidas as predições para a região de floresta dos modelos Γ -ARMA(1,1) com $g(\cdot) = \sqrt{\cdot}$, KB -ARMA(1,1) com $g(\cdot) = \sqrt{\cdot}$ e $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA(1,1) com $g(\cdot) = \sqrt{\cdot}$.

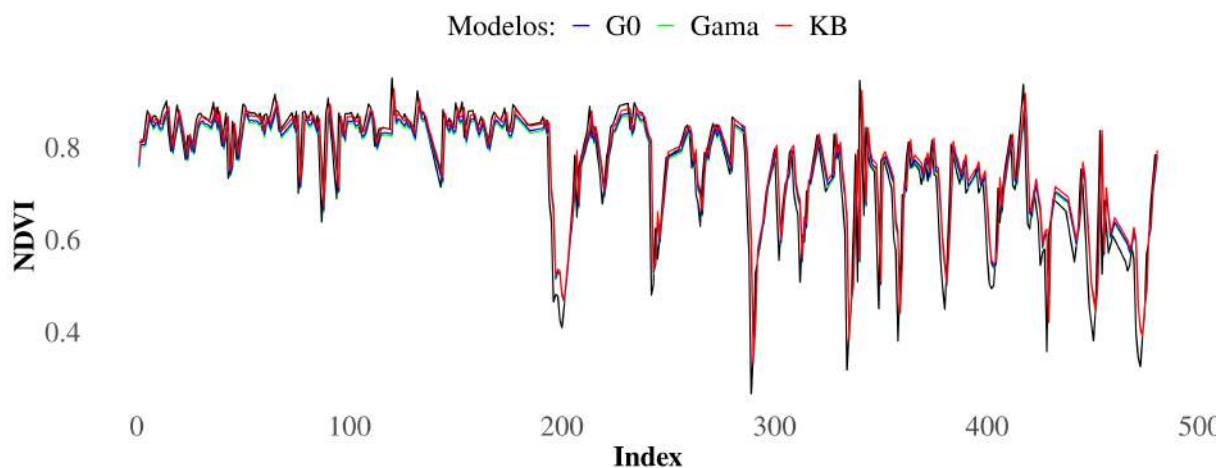
A Tabela 29 fornece as estimativas dos parâmetros e erros-padrão (EP) para os processos Γ -, KB e $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA. A Tabela 30 exhibe os valores p dos testes de *Ljung-Box* para verificar

Figura 54 – Predição do NDVI usando processos Γ -ARMA, KB -ARMA e $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA.

(a) Floresta



(b) Vegetação Baixa



Fonte: Autoria própria (2021)

se os resíduos de *Pearson* são independentes. Para as primeiras 20 defasagens os valores p são maiores do que os níveis de significância $\alpha = 10\%$. Assim, não há evidências para rejeitar a hipótese nula de que os resíduos são independentes em todos os casos. Como uma nota final, os resultados foram feitos para $L = 4$. As mesmas análises foram feitas para $L = 1$ e 10 , mas os resultados e conclusões não sofreram grandes mudanças.

Tabela 28 – Medidas de acurácia. Legenda: valor segundo melhor desempenho e valor primeiro melhor desempenho

Ligação	Floresta				Vegetação baixa			
	Modelo	sMAPE	MASE	UMBRAE	Modelo	sMAPE	MASE	UMBRAE
$\log(\cdot)$	Γ -MA(2)	0,019	0,514	0,739	Γ -ARMA(1,1)	0,029	0,435	0,727
$\sqrt{\cdot}$		0,019	0,501	0,722		0,028	0,421	0,707
$\log W(\cdot)$		0,019	0,520	0,747		0,029	0,439	0,734
$\log(\cdot)$	KB -MA(2)	0,021	0,572	0,780	KB -ARMA(1,1)	0,029	0,402	0,654
$\sqrt{\cdot}$		0,017	0,464	0,666		0,027	0,404	0,676
$\log W(\cdot)$		0,014	0,361	0,540		0,030	0,449	0,731
$\log(\cdot)$	$\mathcal{G}_I^0$ -MA(2)	0,021	0,550	0,738	$\mathcal{G}_I^0$ -ARMA(1,1)	0,028	0,406	0,671
$\sqrt{\cdot}$		0,020	0,541	0,729		0,027	0,393	0,649
$\log W(\cdot)$		0,021	0,556	0,748		0,028	0,415	0,686

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 29 – Estimativas dos parâmetros dos processos Γ -, KB - e $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA. Legenda: (EP)

Modelo	Floresta			
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\delta}$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$
Γ -MA(2)	—	0,921	0,534	0,239
$(g(\cdot) = \sqrt{\cdot})$	—	(0,0017)	(0,0021)	(0,0018)
KB -MA(2)	298,158	-0,670	0,498	0,197
$(g(\cdot) = \log W(\cdot))$	(1,1747)	(0,0018)	(0,0022)	(0,0022)
$\mathcal{G}_I^0$ -MA(2)	-167,614	0,926	0,545	0,245
$(g(\cdot) = \sqrt{\cdot})$	(0,4946)	(0,0016)	(0,0019)	(0,0020)
Modelo	Vegetação baixa			
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\delta}$	$\hat{\phi}$	$\hat{\theta}$
Γ -ARMA(1,1)	—	0,159	0,818	-0,030
$(g(\cdot) = \sqrt{\cdot})$	—	(0,0014)	(0,0019)	(0,0028)
KB -ARMA(1,1)	357,475	0,161	0,816	0,012
$(g(\cdot) = \sqrt{\cdot})$	(1,8341)	(0,0012)	(0,0018)	(0,0026)
$\mathcal{G}_I^0$ -ARMA(1,1)	-167,614	0,159	0,821	-0,020
$(g(\cdot) = \sqrt{\cdot})$	(3,0984)	(0,0012)	(0,0018)	(0,0025)

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 30 – Teste Ljung-Box(lag = 20)

Floresta			Vegetação baixa		
Modelos	Valor p	Estatística	Modelos	Valor p	Estatística
Γ -MA(2)	0,959	10,480	Γ -ARMA(1,1)	0,591	12,288
$\mathcal{G}_I^0$ -MA(2)	0,651	17,027	$\mathcal{G}_I^0$ -ARMA(1,1)	0,619	12,247
KB -MA(2)	0,296	22,856	KB -ARMA(1,1)	0,794	6,068

Fonte: Autoria própria (2021)

8.4 CONCLUSÃO

Os modelos KB -ARMA e $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA foram aplicados no contexto de cubo de imagens, extraindo séries temporais de regiões na Floresta nacional de Jamanxim. Resultados mostram que os modelos propostos podem ser aplicados também no contexto de múltiplas imagens. Os resultados indicam que o $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA com a função de ligação raiz quadrada teve melhor desempenho para região de vegetação baixa, enquanto que, o processo KB -ARMA com função de ligação logarítmica da W de Lambert teve o melhor desempenho para região de floresta.

9 CONCLUSÕES

No Capítulo 3, introduzimos uma nova modelagem unidimensional (1D) para imagens de Radar de Abertura Sintética (SAR) que está alinhada com sua formação física por meio do processo Γ -ARMA. Algumas de suas propriedades matemáticas –necessárias para desenvolver uma nova classe de filtros foram propostas: vetor escore, MIF, ferramentas de análise residual e equações de previsão. Um procedimento por estimação de máxima verossimilhança para os parâmetros do modelo Γ -ARMA foi discutido e seu desempenho quantificado por meio de experimentos Monte Carlo, produzindo erro quadrático médio controlado assintoticamente para vários modelos particulares. Finalmente, fornecemos uma nova classe de filtros espaciais para dados *speckle*, combinando as equações de predição dos modelos propostos. Como uma aplicação para dados reais, empregamos nosso filtro para extrair sinais espaciais sobre imagens simuladas e reais (São Francisco, Foulum e Munique). Os resultados favoreceram nosso filtro, comparativamente à outros seis (*boxcar*, *median*, *Enhanced Lee*, *Kuan*, Γ -MAP e G-ARMA).

No Capítulo 4, foi introduzido um novo estimador do ENL para imagens SAR, baseado nos resíduos do processo Γ -ARMA, chamado $L^{(\Gamma\text{-Pearson})}$. Derivou-se uma expressão fechada para o estimador de L . Um procedimento *bootstrap* para construir o erro-padrão do novo estimador também foi descrito. Como uma aplicação para dados reais, o estimador foi avaliado em uma imagem SAR (São Francisco, EUA). Os resultados mostraram que o nosso estimador teve um desempenho melhor do que estimadores clássicos da literatura para dados monopolarizados (CoV, FBM e Γ -MV).

No Capítulo 5, propusemos a formulação de um modelo de regressão K -Bessel (KBR), bem como a derivação de algumas de suas propriedades: função escore, MIF e uma medida de resíduo quantílico. Nossa proposta foi motivada pelo fato: dado um retorno SAR polarimétrico, qualquer intensidade de um canal em particular pode ser relacionada com outro canal. Um procedimento de estimação por máxima verossimilhança para parâmetros KBR também foi discutido e avaliado por meio de um estudo via simulação Monte Carlo. Finalmente, nossa proposta foi aplicada a dados SAR reais e os resultados fornecem evidências de que nosso modelo pode superar os modelos de regressão gama e normal.

Nos Capítulos 6 e 7, introduzimos novas modelagens unidimensional (1D) para imagens SAR, os processos $\mathcal{G}_I^0$ - e KB -ARMA. Derivaram-se algumas de suas propriedades matemáticas; tais como vetor escore, MIF, análise de resíduos e equações de predição. Experimentos

Monte Carlo foram usados para avaliar o comportamento dos seus EMVs e comparar o desempenho de várias funções de ligações ($\log(\cdot)$, $\log W(\cdot)$ e $\sqrt{\cdot}$). Como aplicações a dados reais, o modelo proposto $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA foi empregado em uma imagem SAR (Munique, Alemanha), enquanto o modelo proposto KB -ARMA foi aplicado na imagem da baía de São Francisco (EUA). Os resultados mostraram que os modelos $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA e KB -ARMA tiveram um desempenho melhor do que o modelo Γ -ARMA, o processo padrão para dados SAR conforme a proposta desta tese.

Os modelos KB -ARMA e $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA foram aplicados no contexto de cubos de imagens, extraíndo séries temporais de regiões da Floresta nacional de Jamanxim. Resultados mostram que os modelos propostos podem ser aplicados também no contexto de múltiplas imagens. Os resultados indicam que o $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA com a função de ligação raiz quadrada teve o melhor desempenho para região de vegetação baixa. Enquanto que, o processo KB -ARMA com função de ligação logarítmica da W de Lambert teve o melhor desempenho para regiões de floresta.

9.1 PESQUISAS FUTURAS

No que segue, apresentamos alguns tópicos para pesquisas futuras que decorrem deste trabalho de tese.

- Novos modelos SARMA 1D e ARMA2D:

- Propostas de novos processos com estrutura SARMA tendo como marginais as distribuições KB e $\mathcal{G}_I^0$ tanto para extração e entendimentos de atributos em imagens SAR (abordagem que chamamos de espacial por aproximação segundo (MCCORMICK; JAYARAMAMURTHY, 1974; CHIN; JAU; WEINMAN, 1987; DUTRA; MASCARENHAS, 1984; RANGAYYAN, 2004)).

- Propostas de novos processos com estrutura ARMA 2D tendo como marginais as distribuições KB e $\mathcal{G}_I^0$ para extração de atributos espaciais.

- Derivações de propriedades matemáticas dos modelos, tais como: expressões em forma fechada de fácil implementação para função score, MIF, entropias (como em (FRERY; CINTRA; NASCIMENTO, 2013)) e divergências (como em (NASCIMENTO; CINTRA; FRERY, 2010; FRERY; NASCIMENTO; CINTRA, 2014; NASCIMENTO; CINTRA; FRERY, 2018));

– Ensaios teóricos sobre inferência pontual, intervalar e para teste de hipótese para os modelos propostos (similares aos feitos em (NASCIMENTO; CINTRA; FRERY, 2010; FRERY; NASCIMENTO; CINTRA, 2014)).

– Estudos sobre teoria assintótica ligada a inferência dos novos modelos (a exemplo do feito em (NASCIMENTO, 2012)).

▪ Novos procedimentos de aprendizagem estatística:

– Proposta de novos filtros para as distribuições KB e $\mathcal{G}_I^0$ (a exemplo de (ALMEIDA-JR; NASCIMENTO, 2019)).

– Proposta de novos classificadores (a exemplo de (FERREIRA; NASCIMENTO; ALMEIDA-JR, 2019)).

– Proposta de novos detectores de bordas (a exemplo de (NASCIMENTO et al., 2014)) e de mudanças (a exemplo de (NASCIMENTO; CINTRA; FRERY, 2018)).

REFERÊNCIAS

- ABRAHAM, D. A.; LYONS, A. P. Reliable methods for estimating the K-distribution shape parameter. *IEEE JOURNAL OF OCEANIC ENGINEERING*, v. 35, n. 2, p. 288–302, 2010.
- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. NY, United States: Dover, 1964.
- ACHIM, A.; KURUOGLU, E.; ZERUBIA, J. SAR image filtering based on the heavy-tailed Rayleigh model. *IEEE Transactions Image Processing*, v. 15, p. 2686–2693, 2006.
- ACHIM, A.; TSAKALIDES, P.; BEZARIANOS, A. SAR image denoising via bayesian wavelet shrinkage based on heavy-tailed modeling,. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 41, p. 1773–1784, 2003.
- AKAIKE, H. A bayesian analysis of the minimum AIC procedure. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, v. 30, p. 9–14, 1978.
- ALLENDE, H.; FRERY, A. C.; GALBIATI, J.; PIZARRO, L. M-estimators with asymmetric influence functions: The GA0 distribution case. *The Journal of Statistical Computation and Simulation.*, v. 76, p. 941–956, 2006.
- ALMEIDA-JR, P. *Teoria da Informação Aplicada a Modelos ARMA: Testes Para Identificação e Quantificação de Overfitting*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2016.
- ALMEIDA-JR, P. M.; NASCIMENTO, A. D. C. Filtragem de imagens SAR via processos ARMA gama. In: UFRGS. *Escola de Séries Temporais e Econometria*. Gramado, 2019.
- ANFENSEN, S. N.; DOULGERIS, A. P.; ELTOFT, T. Estimation of the equivalent number of looks in polarimetric synthetic aperture radar imagery. *IEEE Transactions Geoscience Remote Senses*, v. 47, p. 3795–3809, 2009.
- APPEL, M.; LAHN, F.; BUYTAERT, W.; PEBESMA, E. Open and scalable analytics of large earth observation datasets: From scenes to multidimensional arrays using sciDB and GDAL. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, v. 138, p. 47 – 56, 2018.
- AYKROYD, R.; ZIMERAS, S. Inhomogeneous prior models for image reconstruction. *Journal of American Statistical Association*, v. 94, p. 934–946, 1999.
- AZMEDROUB, B.; OUARZEDDINE, M.; SOUISSI, B. Extraction of urban areas from polarimetric SAR imagery. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, v. 9, p. 2583–2591, 2016.
- BAILEY, D. G. *Design for Embedded Image Processing on FPGAs*. Singapore: John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd, 2011.
- BASU, S.; REINSEL, G. Properties of the spatial unilateral first-order ARMA model. *Advances in Applied Probability*, v. 25, p. 631–648, 1993.
- BAYER, F.; BAYER, D.; PUMI, G. Kumaraswamy autoregressive moving average models for double bounded en- vironmental data. *Journal of Hydrology*, v. 555, p. 385–396, 2017.

- BAYER, F. M.; CINTRA, R. J.; CRIBARI-NETO, F. Beta seasonal autoregressive moving average models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Taylor & Francis, v. 88, p. 2961–2981, 2018.
- BEAUCHEMIN, M.; THOMSON, K.; EDWARDS, G. On nonparametric edge detection in multilook SAR images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 36, p. 1826–1829, 1998.
- BEAULIEU, J.; TOUZI, R. Segmentation of textured polarimetric SAR scenes by likelihood approximation. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 42, p. 2063–2072, 2004.
- BENJAMIN, M. A.; RIGBY, R. A.; STASINOPOULOS, D. M. Generalized autoregressive moving average models. *Journal of the American Statistical Association*, v. 98, p. 214–223, 2003.
- BENNETAND, J.; KHOTANZAD, A. Maximum likelihood estimation methods for multispectral random field image models. *IEEE Transactions Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 21, p. 537–543, 1999.
- BESAG, J. Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, v. 55, p. 192–236, 1974.
- BIAN, Y.; MERCER, B. SAR probability density function estimation using a generalized form of K-distribution. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, v. 51, p. 1136–1146, 2015.
- BIANCHI, T.; ARGENTI, F.; ALPARONE, L. Segmentation-based MAP despeckling of SAR images in the undecimated wavelet domain. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 46, p. 2728–2742, 2008.
- BICKEL, P. J.; DOKSUM, K. A. *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics*. 2. ed. Boca Raton: Prentice-Hall, 2015. v. 1. 532 p.
- BORGES-JUNIOR, A. P. M. *Um Novo Modelo de Regressão K: Descrição de Texturas em Dados Speckle*. Dissertação (Trabalho de conclusão de curso) — Departamento de Estatística, UFPE, Recife/PE, 2016.
- Brazil Data Cube team. *R package rstac*. 2021. [Online; acessado 18-01-2021]. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=rstac>>.
- BREKKE, C.; ANFINSEN, S. Ship detection in ice infested waters based on dual-polarization SAR imagery. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, v. 8, p. 391–395, 2011.
- BROCKWELL, P.; DAVIS, R. *Introduction To Time Series And Forecasting*. Second edition. New York, NY 10013, USA: Springer Texts in Statistics, 2001.
- BROCKWELL, P. J.; DAVIS, R. A. *Time Series: Theory and Methods*. 2nd ed. 1991. 2nd printing. ed. New York, USA: Springer, 2009.
- BUADES, A.; COLL, B.; MOREL, J. M. A review of image denoising algorithms, with a new one. *SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation*, v. 4, p. 490–530, 2005.

- BUSTOS, O.; OJEDA, S.; VALLEJOS, R. Spatial ARMA models and its applications to image filtering. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, v. 23, p. 141–165, 2009.
- BUSTOS, O. H.; FRERY, A. C.; OJEDA, S. M. Strong markov processes in image modelling. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, v. 12, p. 149–194, 1998.
- BUSTOS, O. H.; LUCINI, M. M.; FRERY, A. C. M-estimators of roughness and scale for GA0-modelled SAR imagery. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, p. 105–114, 2002.
- CASELLA, G.; BERGER, R. L. *Statistical inference*. Michigan, EUA: Duxbury Pacific Grove, CA, 2002. v. 2.
- CHEN, C.; TWYXCROSS, J.; GARIBALDI, J. M. A new accuracy measure based on bounded relative error for time series forecasting. *PLOS ONE*, v. 12, p. 1–23, 2017.
- CHEN, J.-L.; KUNDU, A. Unsupervised segmentation using multichannel decomposition and hidden markov models,. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 4, p. 603–619, 1995.
- CHIERCHIA, G.; COZZOLINO, D.; POGGI, G.; VERDOLIVA, L. SAR image despeckling through convolutional neural networks. *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, p. 5438–5441, 2017.
- CHIN, R.; JAU, J.; WEINMAN, J. The application of time series models to cloud field morphology analysis. *American Meteorological Society*, v. 26, p. 363–373, 1987.
- CINTRA, R. J.; FRERY, A. C.; NASCIMENTO, A. D. C. Parametric and nonparametric tests for speckled imagery. *Pattern Analysis and Applications*, v. 16, p. 1–21, 2011.
- CLAUSEN, C.; WECHLER, H. Color image compression using PCA and backpropagation learning. *Pattern Recognition*, v. 33, p. 1555–1560, 2000.
- COGGINS, J. M. *A Framework for Texture Analysis Based on Spatial Filtering*. Tese (Doutorado) — Computer Science Department, Michigan State University, United States, 1983.
- COMER, M. L.; D.J., E. Segmentation of textured images using a multiresolution gaussian autoregressive model,. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 8, p. 408–420, 1999.
- CORDEIRO, G. M.; CINTRA, R. J.; RÊGO, L. C.; NASCIMENTO, A. ao D. The gamma generalized normal distribution: A descriptor of SAR imagery. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 347, p. 257 – 272, 2019.
- CORLESS, R.; GONNET, G.; HARE, D.; JEFFREY, D.; KNUTH, D. On the lambert W function. *Advances in Computational Mathematics*, v. 5, p. 329–359, 1996.
- COZZOLINO, D.; PARRILLI, S.; SCARPA, G.; POGGI, G.; VERDOLIVA, L. Fast adaptive nonlocal SAR despeckling,. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, v. 11, p. 524–528, 2014.
- CRIBARI-NETO, F.; FRERY, A. C.; SILVA, M. F. Improved estimation of clutter properties in speckled imagery. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 40, p. 801–824, 2002.

- CUI, Y.; ZHOU, G.; YANG, J.; YAMAGUCHI, Y. Unsupervised estimation of the equivalent number of looks in SAR images. *IEEE Geoscience Remote Sensing Letters*, v. 8, p. 710–714, 2011.
- DAVYDENKO, A.; FILDES, R. Measuring forecasting accuracy: The case of judgmental adjustments to sku-level demand forecasts. *International Journal of Forecasting*, v. 29, p. 510–522, 2013.
- DELEDALLE, C.; DENIS, L.; POGGI, G.; TUPIN, F.; VERDOLIVA, L. Exploiting patch similarity for sar image processing: the nonlocal paradigm. *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 31, p. 69–78, 2014.
- DELEDALLE, C. A.; DENIS, L.; TUPIN, F. Iterative weighted maximum likelihood denoising with probabilistic patch-based weights. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 18, p. 2661–2672, 2009.
- DEVEPAL, D.; KUMAR, S.; JOJY, C. Comprehensive survey on SAR image despeckling techniques. *Indian Journal of Science and Technology*, v. 8, p. 0974–5645, 2015.
- DONOHUE, K. D.; RAHMATI, M.; HASSEBROOK, L. G.; GOPALAKRISHNAN, P. Parametric and nonparametric edge detection for speckle degraded images. *Optical Engineering*, SPIE, v. 32, p. 1935–1946, 1993.
- DOULGERIS, A. An automatic U-distribution and markov random field segmentation algorithm for polsar images. *IEEE Transactions on Geoscience Remote Sensing*, v. 53, p. 1819–1827, 2015.
- DOULGERIS, A.; ANFINSEN, S.; ELTOFT, T. Automated non-gaussian clustering of polarimetric synthetic aperture radar images. *IEEE Transactions on Geoscience Remote Sensing*, v. 49, p. 3665–3676, 2011.
- DOULGERIS, A. P.; ANFINSEN, S. N.; ELTOFT, T. Classification with a non-Gaussian model for PolSAR data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 46, p. 2999–3009, 2008.
- DUBES, R. C.; JAIN, A. K. *Random field models in image analysis*. London: Taylor & Francis, 1989. v. 16. 131–164 p.
- DUNN, P. K.; SMYTH, G. K. Randomized quantile residuals. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, [American Statistical Association, Taylor & Francis, Ltd., Institute of Mathematical Statistics, Interface Foundation of America], v. 5, p. 236–244, 1996.
- DUTRA, L. *Classificação de texturas usando modelos ARMA e distâncias da função de autocorrelação*. Tese (Doutorado) — INPE, São José dos Campos, SP, 1990.
- DUTRA, L. V.; MASCARENHAS, N. D. A. Some experiments with spatial feature extraction methods in multispectral classification. *International Journal of Remote Sensing*, v. 5, p. 303–313, 1984.
- EDWARD, J.; KASHYAP, R. L.; MITCHEL, R. Image data compression using autoregressive time series models. *Pattern Recognition*, v. 11, p. 313–323, 1979.
- EFRON, B. Bootstrap methods: another look at the jackknife. *Annals of Statistics*, v. 7, p. 1–26, 1979.

EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. *An Introduction to the Bootstrap*. Philadelphia, EUA: Chapman and Hall/CRC, 1994.

ELTOFT, T. The Rician inverse gaussian distribution: A new model for non-Rayleigh signal amplitude statistics. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 14, p. 1722–1735, 2005.

EMPRAPA. SATVeg. 2021. [Online; acessado 17-01-2021]. Disponível em: <<https://www.satveg.cnptia.embrapa.br/>>.

FEBRITASARI, P.; WARDHANI, N. W. S.; SA'ADAH, U. Generalized linier autoregressive moving average (GLARMA) negative binomial regression models with metropolis hastig algorithm. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, IOP Publishing, v. 546, p. 052023, 2019.

FERREIRA, J. A.; NASCIMENTO, A. D. C.; ALMEIDA-JR, P. M. Classificação em intensidades SAR multidimensionais de terrenos via processos VARMA. In: UFRGS. *Escola de Séries Temporais e Econometria*. Gramado, 2019.

FERREIRA, K.; QUEIROZ, G.; VINHAS, L.; MARUJO, R.; SIMOES, R.; PICOLI, M.; CAMARA, G.; CARTAXO, R.; GOMES, V.; SANTOS, L.; SANCHEZ, A.; ARCANJO, J.; FRONZA, J.; NORONHA, C.; COSTA, R.; ZAGLIA, M.; ZIOTI, F.; KORTING, T.; SOARES, A.; CHAVES, M.; FONSECA, L. Earth observation data cubes for brazil: Requirements, methodology and products. *Remote Sensing*, v. 12, p. 4033, 2020.

FOKIANOS, K.; KEDEM, B. Prediction and classification of non-stationary categorical time series. *Journal of Multivariate Analysis*, v. 67, p. 277–296, 1998.

FONSECA, R. V.; CRIBARI-NETO, F. Bimodal Birnbaum–Saunders generalized autoregressive score model. *Journal of Applied Statistics*, Taylor & Francis, v. 45, n. 14, p. 2585–2606, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/02664763.2018.1428734>>.

FRANCESCHETTI, G.; RICCIO, D. SARAS: A synthetic aperture radar (SAR) raw signal simulato. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 20, p. 110–123, 2002.

FREITAS, C. C.; SANT'ANNA, S. J. S.; RENNÓ, C. D.; CORREIA, A. H. *Utilização de imagens de radar de abertura sintética na classificação de uso e ocupação do solo*. São José dos Campos, 2007.

FRERY, A.; CORREIA, A.; FREITAS, C. D. Classifying multifrequency fully polarimetric imagery with multiple sources of statistical evidence and contextual information. *IEEE Transactions Geoscience Remote Sensing*, v. 45, p. 3098–3109, 2007.

FRERY, A. C.; CINTRA, R. J.; NASCIMENTO, A. D. C. Entropy-based statistical analysis of PolSAR data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 51, p. 3733–3743, 2013.

FRERY, A. C.; CRIBARI-NETO, F.; SOUZA, M. O. Analysis of minute features in speckled imagery with maximum likelihood estimation. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, v. 2004, p. 2476–2491, 2004.

FRERY, A. C.; MULLER, H. J.; YANASSE, C. C. F.; ANNA, S. J. S. S. A model for extremely heterogeneous clutter. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 35, p. 648–659, 1997.

- FRERY, A. C.; NASCIMENTO, A. D. C.; CINTRA, R. J. Analytic expressions for stochastic distances between relaxed complex Wishart distributions. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 52, p. 1213–1226, 2014.
- FRERY, A. C.; SANT'ANNA, S. J. S.; MASCARENHAS, N. D. A.; BUSTOS, O. H. Robust inference techniques for speckle noise reduction in 1-look amplitude SAR images. *Applied Signal Processing*, v. 4, p. 61–76, 1997.
- GAO, G. *Characterization of SAR Clutter and Its Applications to Land and Ocean Observations*. Beijing, China: Springer Singapore, 2019.
- GEMITZI, A.; KOUTSIAS, N.; LAKSHMI, V. *Advanced Environmental Monitoring with Remote Sensing Time Series Data and R*. Boca Raton: CRC Press, 2019.
- GIERULL, C. H.; SIKANETA, I. C. Estimating the effective number of looks in interferometric SAR data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 40, p. 1733–1742, 2002.
- GLAISTER, J.; WONG, A.; CLAUSI, D. A. Despeckling of synthetic aperture radar images using monte carlo texture likelihood sampling. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 52, p. 1238–1248, 2014.
- GOMEZ, L.; OSPINA, R.; FRERY, A. Unassisted quantitative evaluation of despeckling filters. *Remote Sensing*, v. 9, 2017.
- GOROVYI, I. M.; SHARAPOV, D. S. Pattern detection and recognition in SAR images. In: UKRCON. *IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering*. Ukraine, 2017.
- GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. *Table of integrals, series, and products*. California, EUA: Academic press, 2014.
- GRECO, M.; GINI, F. Statistical analysis of high-resolution SAR ground clutter data. *IEEE Transaction on Geoscience Remote Sensing*, v. 45, p. 566–575, 2007.
- HAINDL, M. Texture synthesis. *CWI Quarterly*, v. 4, p. 305–331, 1991.
- HAINING, R. P. The moving average model for spatial interaction. *Transactions and Papers, Institute of British Geographers, New Series*, v. 3, p. 202–225, 1978.
- HAMILTON, J. D. *Time series analysis*. New Jersey: Princeton University Press, 1994.
- HIBON, S. M. M. The M3-competition: results, conclusions and implications. *International Journal of Forecasting*, v. 16, p. 451–476, 2000.
- HRISTOPULOS, D. *Random Fields for Spatial Data Modeling*. Netherlands: Springer Nature, 2020.
- HUANG, K.; CHEN, C.; GAO, G. Mellin transform-based approach for parameter estimation of K distribution plus noise. *IEEE Access*, v. 7, p. 29202–29212, 2019.
- HYNDMAN, R. J.; KOEHLER, A. B. Another look at measures of forecast accuracy. *International Journal of Forecasting*, v. 22, p. 679–688, 2006.
- INPE. AQUA. 2021. [Online; acessado 17-01-2021]. Disponível em: <<http://www.dgi.inpe.br/documentacao/dgi/documentacao/satelites/aqua/capa-aqua/>>.

INPE. *TERRA*. 2021. [Online; acessado 17-01-2021]. Disponível em: <<http://www.dgi.inpe.br/documentacao/satelites/terra>>.

JAIN, A. K. *Fundamentals of Digital Image Processing*. first. New Jersey, EUA: Prentice Hall, Inc., 1989.

JIN, Y.; XU, F. *Polarimetric Scattering and SAR Information Retrieval*. Singapore: Wiley, 2013. (Wiley - IEEE).

JOUGHIN, I. R.; PERCIVAL, D. B.; WINEBRENNER, D. P. Maximum likelihood estimation of distribution parameters for SAR data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 31, p. 989–999, 1993.

KALAIYARASI, M.; SARAVANAN, S.; PERUMAL, B. A survey on: De-speckling methods of SAR image. In: *International Conference on Control, Instrumentation, Communication and Computational Technologies (ICCICCT)*. Kumaracoil, India: [s.n.], 2016.

KASHYAP, R.; EOM, K. Robust images techniques with an image restoration application. *IEEE Transactions on Acoustics and Speech Signal Processing*, v. 36, p. 1313–1325, 1988.

KAZEMINIA, M.; MEHRJOO, M. On the derivatives of Bessel and modified Bessel functions with respect to the order and the argument. *International Research Journal of Applied and Basic Sciences*, v. 4, p. 4127–4133, 2013.

KEDEM, B.; FOKIANOS, K. *Regression Models for Time Series Analysis*. New Jersey: Wiley & Sons, 2002.

KILLOUGH, B. Overview of the open data cube initiative. In: PROCEEDINGS OF THE IGARSS 2018. *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*. Valencia, Spain, 2018. p. 8629–8632.

KOPP, S.; BECKER, P.; DOSHI A. WRIGHT, D.; ZHANG, K.; XU, H. Achieving the full vision of earth observation data cubes. *Data*, v. 4, p. 94, 2019.

KRISHNAMOORTHY, R.; SEETHARAMAN, K. Image compression based on a new family of autoregressive models. In: ROVISP2005. *International Conference on Robotics, Vision, Information and Signal Processing*. Malaysia, 2005.

KUAN, D.; SAWCHUK, A.; STRAND, T.; CHAVEL, P. Adaptive restoration of images with speckle. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 35, p. 373–383, 1987.

KUPIDURA, P. Comparison of filters dedicated to speckle suppression in SAR images. *The international Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, XLI-B7, p. 269–276, 2016.

KURUOGLU, E. E.; ZERUBIA, J. Modeling SAR images with a generalization of the rayleigh distribution. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 13, p. 527–533, 2004.

LABS, I. H. *Galileo*. 2020. [Online; acessado 07-08-2020]. Disponível em: <<https://galileoapp.io/>>.

LEE, J.; AINSWORTH, T.; WANG, Y.; CHEN, K. Polarimetric SAR speckle filtering and the extended sigma filter. *IEEE Transactions on Geoscience Remote Sensing*, v. 53, p. 1150–1160, 2015.

- LEE, J.; GRUNES, M. R.; GRANDI, G. de. Polarimetric SAR speckle filtering and its implication for classification. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 37, p. 2363–2373, 1999.
- LEE, J.; GRUNES, M. R.; MANGO, S. A. Speckle reduction in multipolarization, multifrequency SAR imagery. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 29, p. 535–544, 1991.
- LEE, J.; GRUNES, M. R.; SCHULER, D. L.; POTTIER, E.; FERRO-FAMIL, L. Scattering-model-based speckle filtering of polarimetric SAR data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 44, p. 176–187, 2006.
- LEE, J.; JURKEVICH, I.; DEWAELE, P.; WAMBACQ, P.; COSTERLINCK, A. Speckle filtering of synthetic aperture radar images: A review. *Remote Sensing*, v. 8, p. 311–340, 1994.
- LEE, J.; WEN, J.; AINSWORTH, T.; CHEN, K.; CHEN, A. Improved sigma filter for speckle filtering of SAR imagery. *IEEE Transactions on Geoscience Remote Sensing*, v. 47, p. 202–213, 2009.
- LEE, J. S.; POTTIER, E. *Polarimetric Radar Imaging: From Basics to Applications*. Boca Raton: CRC, 2009.
- LEWIS, A.; LYMBURNER, L.; PURSS, M.; BROOKE, B.; EVANS, B.; IP A.AND DEKKER, A.; IRONS, J.; MINCHIN, S.; MUELLER, M. High-resolution detection of environmental change over continental scales from satellite data—the earth observation data cube. *International Journal Digital Earth*, v. 9, p. 106—111, 2016.
- LI, J.; DAI, W. Image quality assessment based on the correlation coefficient and the 2-D discrete wavelet transform. In: *2009 IEEE International Conference on Automation and Logistics*. Shenyang, China: IEEE International Conference on Automation and Logistics, 2009.
- LI, J.; PAN, Z.; ZHANG, Z.; ZHANG, H. Dynamic ARMA-based background subtraction for moving objects detection. *IEEE Access*, v. 7, p. 128659–128668, 2019.
- LI, W. K. *Diagnostic Checks in Time Series*. 1. ed. Boca Raton: CRC Press I Llc, 2003.
- LIMA, F.; F., C.-N. Bootstrap-based testing inference in beta regressions. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, v. 34, p. 18–34, 2020.
- LIMA, F. P. *INFERÊNCIA BOOTSTRAP EM MODELOS DE REGRESSÃO BETA*. Tese (Doutorado) — Departamento de Estatística, UFPE, Recife, PE, 2017.
- LIU, C. Method for fitting K-distributed probability density function to ocean pixels in dual-polarization SAR. *Canadian Journal of Remote Sensing*, Taylor & Francis, v. 44, p. 299–310, 2018.
- LIU, M.; ZHANG, H.; WANG, C.; WU, F. Change detection of multilook polarimetric SAR images using heterogeneous clutter models. *IEEE Transactions Geoscience Remote Sensing*, v. 52, p. 7483–7494, 2014.

- LOPES, A.; LAUR, H.; NEZRY, E. Statistical distribution and texture in multilook and complex SAR images. In: INTERNATIONAL GEOSCIENCE AND REMOTE SENSING SYMPOSIUM. *Remote Sensing Science for the Nineties*. Washington, DC,, 1990. v. 3, p. 2427–2430.
- LOPES, A.; NEZRY, E.; TOUZI, R.; LAUR, H. Structure detection and statistical adaptive speckle filtering in SAR images. *International Journal Remote Sensing*, v. 14, p. 1735–1758, 1993.
- LOPES, A.; NEZRY, E.; TOUZI, R.; LAUR, H. Maximum a posteriori speckle filtering and first order textural models in SAR images. In: IGARSS. *Paper presented at the International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*. College Park, Maryland, 1990. p. 2409–2412.
- LOPES, A.; TOUZI, R.; NEZRY, E. Adaptive speckle filters and scene heterogeneity. *IEEE Transactions on Geoscience Remote Sensing*, v. 28, p. 992–1000, 1990.
- MARTIN, R. J. Some results on unilateral ARMA lattice processes. *Journal of Statistical Planning and Inference*, v. 50, p. 395–411, 1996.
- MARTINO, G. D.; RICCIO, D. Benchmarking framework for SAR despeckling. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 52, p. 1596–1615, 2014.
- MATLOFF, N. *Parallel Computing for Data Science*. Boca Raton: CRC Press, 2020.
- MAUS, V.; CAMARA, G.; CARTAXO, R.; SANCHEZ, A.; RAMOS, M.; QUEIROZ, G. A timeweighted dynamic time warping method for land-use and land-cover mapping. *IEEE J Sel Top Appl Earth Observ Remote Sens*, v. 9, p. 3729–3739, 2016.
- MCCORMICK, B. H.; JAYARAMAMURTHY, S. N. Time series model for texture synthesis. *International Journal of Computer and Information Sciences*, v. 3, p. 329–343, 1974.
- MCCULLAGH, P.; NELDER, J. *Generalized Linear Model*. 2nd ed.. ed. London: Champman and Hall, 1989.
- MCLEOD, A.; ZHANG, Y. Faster ARMA maximum likelihood estimation. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 52, p. 2166–2176, 2008.
- MEJAIL, M. E.; JACOBO-BERLLES, J.; FRERY, A. C.; BUSTOS, H. Parametric roughness estimation in amplitude SAR images under the multiplicative model. *Revista de Teledetección*, v. 13, p. 37–49, 2000.
- MELO, M.; ALENCAR, A. Conway–Maxwell–Poisson Autoregressive Moving Average Model for equidispersed, underdispersed, and overdispersed count data. *Journal Of Time Series Analysis*, v. 41, p. 830–857, 2020.
- MILANI, E. A.; HARTMANN, M.; ANDRADE, M. G.; DINIZ, C. A. R. A Bernoulli autoregressive moving average model applied to rainfall occurrence. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, Taylor & Francis, v. 48, p. 2743–2756, 2019.
- MOSER, G.; ZERUBIA, J.; SERPICO, S. B. SAR amplitude probability density function estimation based on a generalized gaussian model. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 15, p. 1429–1442, 2006.

- NAGAO, M.; MATSUYAMA, T. Edge preserving smoothing. *Computer Graphics and Image Processing*, v. 9, p. 394–407, 1979.
- NASCIMENTO, A. D. C. *Teoria Estatística da Informação para dados de radar de abertura sintética Univariados e polarimétricos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2012.
- NASCIMENTO, A. D. C.; CINTRA, R. J.; FRERY, A. C. Hypothesis testing in speckled data with stochastic distances. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 48, p. 373–385, 2010.
- NASCIMENTO, A. D. C.; CINTRA, R. J.; FRERY, A. C. Detecting changes in fully polarimetric SAR imagery with statistical information theory. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 57, p. 1380 – 1392, 2018.
- NASCIMENTO, A. D. C.; FRERY, A. C.; CINTRA, R. J. Bias correction and modified profile likelihood under the Wishart complex distribution. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 52, p. 4932–4941, 2014.
- NASCIMENTO, A. D. C.; FRERY, A. C.; CINTRA, R. J. Bias correction and modified profile likelihood under the Wishart complex distribution. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 52, p. 4932–4941, 2014.
- NASCIMENTO, A. D. C.; HORTA, M. M.; FRERY, A. C.; CINTRA, R. J. Comparing edge detection methods based on stochastic entropies and distances for PolSAR imagery. *IEEE Journal of Selected topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, v. 7, 2014.
- NATIVI, S.; MAZZETTI, P.; CRAGLIA, M. A view-based model of data-cube to support big earth data systems interoperability. *Big Earth Data*, v. 1, p. 75–99, 2017.
- NEUMANN, A.; BODNAR, T.; DICKHAUS, T. Estimating the proportion of true null hypotheses under dependency: A marginal bootstrap approach. *Journal of Statistical Planning and Inference*, v. 210, p. 76–86, 2021.
- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. *Numerical Optimization*. New York: Springer, 2006.
- OLIVER, C. Optimum texture estimators for SAR clutter. *Journal of Physics D: Applied Physics*, v. 25, p. 1824–1835, 1993.
- OLIVER, C.; QUEGAN, S. *Understanding Synthetic Aperture Radar Images*. Boston: Scitech Publishing, 2004.
- PALM, B. G.; BAYER, F. M.; CINTRA, R. J. Signal detection and inference based on the beta binomial autoregressive moving average model. *Digital Signal Processing*, v. 109, p. 102911, 2021.
- PALM, B. G.; BAYER, F. M.; CINTRA, R. J.; PETTERSSON, M. I.; MACHADO, R. Rayleigh regression model for ground type detection in SAR imagery. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, v. 16, p. 1660–1664, 2019.
- PANJWANI, D. k.; HEALEY, G. Markov random field models for unsupervised segmentation of textured color images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 17, p. 939–1014, 1995.

- PARRILLI, S.; PODERICO, M.; ANGELINO, C. V.; VERDOLIVA, L. A nonlocal SAR image denoising algorithm based on LLMMSE wavelet shrinkage. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, v. 50, p. 606–616., 2012.
- PETROU, M. M. P.; SEVILLA, P. G. *Image Processing Dealing with Texture*. 1. ed. The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex PO19 8SQ, England: Wiley, 2006.
- PIANTO, D. M.; CRIBARI-NETO, F. Dealing with monotone likelihood in a model for speckled data. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 55, p. 1394 –1409, 2011.
- PONZONI, F.; SHIMABUKURO, Y.; KUPLICH, T. *Sensoriamento remoto da vegetação*. São Paulo, Brasil: Oficina de textos, 2019.
- R Development Core Team. R: A language and environment for statistical computing. *R Foundation for Statistical Computing, Vienna*, 2021.
- RAMOS, M. F. *Estudo da variação temporal do índice vegetação por diferença normalizada em Juiz de Fora a partir de imagens de satélites*. Dissertação (Trabalho de conclusão de curso) — Universidade Federal de Juíz de fora, Juíz de Fora, MG, 2016.
- RANGAYYAN, R. *Biomedical Image Analysis*. Boca Raton: CRC Press, 2004. (Biomedical Engineering).
- RAUBER, T.; RÜNGER, G. *Parallel Programming*. 2. ed. Switzerland: Springer-Lehrbuch, 2010.
- REDDING, N. . Estimating the parameters of the K-distribution in the intensity domain. In: *DSTO-TR-0839*. Salisbury, Australia: [s.n.], 1999.
- REN, W.; SONG, J.; TIAN, S.; ZHANG, X. Estimation of the equivalent number of looks in SAR images based on singular value decomposition. *IEEE Geoscience Remote Sensing Letters*, v. 12, p. 2208–2212, 2015.
- ROBERTS, W. J. J.; FURUI, S. Maximum likelihood estimation of K-distribution parameters via the expectation-maximization algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 48, p. 3303–3306, 2000.
- ROCHA, A. V.; CRIBARI-NETO, F. Beta autoregressive moving average models. *Test*, v. 18, p. 529–545, 2009.
- ROCHA, A. V.; CRIBARI-NETO, F. Erratum to: Beta autoregressive moving average models. *Test*, v. 26, p. 451–459, 2017.
- ROUSE, J.; HAAS, R.; SCHELL, J.; DEERING, D. Monitoring vegetation systems in the great plains with ERTS. In: NASA. *EARTH RESOURCES TECHNOLOGY SATELLITE SYMPOSIUM*. Washington, 1973.
- SARKAR, A.; SHARMA, K.; SONKA, R. V. A new approach for subset 2-D AR model identification for describing textures. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 6, p. 407–413, 1997.
- SEABORN, J. *Hypergeometric Functions and Their Applications*. New York: Springer, 1991. (Texts in applied mathematics).

- SEARLE, S. *Linear Models*. Washington: Wiley, 2012. (Wiley Series in Probability and Statistics - Applied Probability and Statistics Section).
- SHEN, P.; WANG, C.; FU, H.; ZHU, J.; HU, J. Estimation of equivalent number of looks in time-series pol(in)SAR data. *Remote sensing*, v. 12, 2020.
- SHEN, P.; WANG, C.; LUO, X.; FU, H.; ZHU, J. PolinSAR complex coherence nonlocal estimation using shape-adaptive patches matching and trace-moment-based NLRB estimator. *IEEE Transactions Geoscience Remote Sensing*, 2020.
- SILVA, M.; CRIBARI-NETO, F.; FRERY, A. C. Improved likelihood inference for the roughness parameter of the GA0 distribution. *Environmetrics*, v. 19, p. 347–368, 2008.
- SLUD, E.; KEDEM, B. Partial likelihood analysis of logistic regression and autoregression. *Statistica Sinica*, v. 4, p. 89–106, 1994.
- SOARES, A.; KORTING, T.; FONSECA, L.; BENDINI, H. Simple nonlinear iterative temporal clustering. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, p. 1–11, 2020.
- TAO, L.; HAO-GUI, C.; ZE-MIN, X.; JUN, G. Texture-invariant estimation of equivalent number of looks based on trace moments in polarimetric radar imagery. *IEEE Geoscience Remote Sensing Letters*, v. 20, p. 1129–1133, 2014.
- THANH, V. P.; CONG-THANG, T.; ANH, T. P. On the MGF-based approximation of the sum of independent gamma-gamma random variables. In: VTC SPRING. *2015 IEEE 81st Vehicular Technology Conference*. Glasgow, UK, 2015. p. 1–5.
- TORRES, L.; CAVALCANTE, T.; FRERY, A. Speckle reduction using stochastic distances. In: SPRINGER. *Pattern Recognition, Image Analysis, Computer Vision, and Applications*. Buenos Aires, 2012. v. 7441, p. 632–639.
- TORRES, L.; SANT'ANNA, S. J. S.; FREITAS, C. C.; FRERY, A. C. Speckle reduction in polarimetric SAR imagery with stochastic distances and nonlocal means. *Pattern Recognition*, v. 47, p. 141–157, 2014.
- ULABY, F. T.; MOORE, R. K.; FUNG, A. K. *Microwave remote sensing active and passive: radar remote sensing and surface scattering and emission theory*. Norwood, MA: Artech House, Inc, 1986.
- USC. *Image database*. 2021. [Online; acessado 16-03-2021]. Disponível em: <<http://sipi.usc.edu/database/database.php?volume=aerials>>.
- VACHON, P. W.; KABATOFF, C.; QUINN, R. Operational ship detection in canada using RADARSAT. In: IEEE I. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Symposium*. Quebec City, QC, Canada, 2014. p. 998–1001.
- VASCONCELLOS, K. L. P.; FRERY, A. C.; SILVA, L. B. Improving estimation in speckled imagery. *Computational Statistics*, v. 20, p. 503–519, 2005.
- VASCONCELOS, J. M. *Essays on New Models and the Mellin Transform: Experiments in Survival and Radar Data*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2018.
- VASCONCELOS, J. M.; CINTRA, R. J.; NASCIMENTO, A. D.; RÊGO, L. C. The compound truncated Poisson Cauchy model: A descriptor for multimodal data. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 378, p. 112887, 2020.

- WANG, H.; OUCHI, K. Accuracy of the K-distribution regression model for forest biomass estimation by high-resolution polarimetric SAR: Comparison of model estimation and field data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 46, p. 1058–1064, 2008.
- WANG, P. H. Z.; PATEL., V. M. SAR image despeckling using a convolutional neural network. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 24, p. 1763–1767, 2017.
- WANG, Z.; BOVIK, A. C. A universal image quality index. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 9, p. 81–84, 2002.
- WANG, Z.; BOVIK, A. C.; SHEIKH, H. R.; SIMONCELLI, E. P. Image quality assessment: From error visibility to structural similarity. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 13, p. 1057–1149, 2004.
- WHITTLE, P. On stationary processes on the plane. *Biometrika*, v. 41, p. 434–449, 1954.
- WILSON, R.; KNUTSSON, H. E.; GRANLUND, G. H. Anisotropic nonstationary image estimation and its applications: Part II-predictive image coding. *IEEE Transaction on Image Communications*, v. 31, p. 398–404, 1983.
- XIE, H.; PIERCE, L. E.; ULABY, F. T. Statistical properties of logarithmically transformed speckle. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 40, p. 721–727, 2002.
- YAMAGUCHI, Y. *Polarimetric SAR Imaging*. Boca Raton: CRC Press Taylor & Francis Group, LLC, 2020.
- YUE, D.; XU, F.; JIN, Y. SAR despeckling neural network with logarithmic convolutional product model. *International Journal of Remote Sensing*, v. 39, p. 7483–7505, 2018.
- ZHENG, T.; CHEN, R. Dirichlet ARMA models for compositional time series. *Journal of Multivariate Analysis*, v. 158, p. 31–46, 2017.

APÊNDICE A – DERIVAÇÃO DA MATRIZ DE INFORMAÇÃO DE FISHER PARA O MODELO Γ -ARMA.

Depois de algumas manipulações algébricas, a MIF, denominada $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\boldsymbol{\nu})$, pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\boldsymbol{\nu}) &= \mathbb{E} \left(\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\nu})}{\partial \boldsymbol{\nu}^\top} \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\nu})}{\partial \boldsymbol{\nu}} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right) = -\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\nu})}{\partial \boldsymbol{\nu}^\top \partial \boldsymbol{\nu}} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right) \\ &= \begin{bmatrix} K_{\beta\beta} & K_{\beta\delta} & K_{\beta\phi} & K_{\beta\theta} & K_{\beta L} \\ K_{\delta\beta} & K_{\delta\delta} & K_{\delta\phi} & K_{\delta\theta} & K_{\delta L} \\ K_{\phi\beta} & K_{\phi\delta} & K_{\phi\phi} & K_{\phi\theta} & K_{\phi L} \\ K_{\theta\beta} & K_{\theta\delta} & K_{\theta\phi} & K_{\theta\theta} & K_{\theta L} \\ K_{L\beta} & K_{L\delta} & K_{L\phi} & K_{L\theta} & K_{LL} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

em que $\mathbf{W}^{-1} = \text{diag}\{\mu_{m+1} g'(\mu_{m+1}), \dots, \mu_n g'(\mu_n)\}$, $K_{\beta\beta} = LM^\top \mathbf{W} M$, $K_{\beta\delta} = K_{\delta\beta}^\top = LM^\top \mathbf{W} d$, $K_{\beta\phi} = K_{\phi\beta}^\top = LM^\top \mathbf{W} P$, $K_{\beta\theta} = K_{\theta\beta}^\top = LM^\top \mathbf{W} R$, $K_{\beta L} = K_{L\beta}^\top = LM^\top \mathbf{W} d$, $K_{\delta\delta} = Ld^\top \mathbf{W} d$, $K_{\delta\phi} = K_{\phi\delta}^\top = Ld^\top \mathbf{W} P$, $K_{\delta\theta} = K_{\theta\delta}^\top = Ld^\top \mathbf{W} R$, $K_{\phi\phi} = LP^\top \mathbf{W} P$, $K_{\phi\theta} = K_{\theta\phi}^\top = LP^\top \mathbf{W} R$, $K_{\theta\theta} = LR^\top \mathbf{W} R$, $K_{LL} = -(n - m) \left[\frac{1}{L} - \psi'(L) \right]$ e $K_{L\beta} = K_{\beta L} = K_{L\delta} = K_{\delta L} = K_{L\phi} = K_{\phi L} = K_{L\theta} = K_{\theta L} = 0$. Note que a MIF não é bloco diagonal, contudo o conjunto $\{\boldsymbol{\nu}\} - \{L\}$ são conjuntamente bloco diagonal em relação ao parâmetro L .

Sob certas condições de regularidades apresentadas em (SLUD; KEDEM, 1994; FOKIANOS; KEDEM, 1998), os estimadores de MV satisfazem:

$$\left(\hat{\delta}, \hat{\beta}^\top, \hat{\phi}^\top, \hat{\theta}^\top, \hat{L} \right)^\top \stackrel{a}{\sim} \mathcal{N}_{(p+q+k+2)} \left(\left(\delta, \beta^\top, \phi^\top, \theta^\top, L \right)^\top, \mathbf{K}^{-1} \right),$$

para $n - m \rightarrow \infty$, em que $\mathcal{N}_s$ denota uma distribuição normal s -dimensional.

APÊNDICE B – SUPORTE MATEMÁTICO PARA COMPUTAÇÃO U_α DOS MODELOS KBR E KB -ARMA

No (KAZEMINIA; MEHRJOO, 2013, *Teorema 3.6*), os autores derivaram uma expressão para $\frac{\partial}{\partial \nu} K_\nu(f(\nu))$ para uma função valor-real contínua e diferenciável f para valores de $\nu \notin \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} K_\nu(f(\nu)) &= f'(\nu) \left\{ \frac{\nu}{f(\nu)} K_\nu(f(\nu)) - K_{\nu+1}(f(\nu)) \right\} - \pi \cot(\pi \nu) K_\nu(f(\nu)) \\ &+ \frac{1}{2} \pi \csc(\pi \nu) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} I_{-x}(f(\nu)) - \frac{\partial}{\partial x} I_x(f(\nu)) \right\}_{x=\nu}, \quad \nu \notin \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Sendo $\mu_t = g^{-1}(\eta_t)$, $\nu := \alpha - L$, $f(\nu) := 2\sqrt{L\alpha z_t/\mu_t} = 2\sqrt{(\alpha - \nu)(\nu + L)z_t/\mu_t}$ e $d\nu = d\alpha$, em que $f'(\nu) = f'(\alpha)$. Então,

$$f'(\alpha) := -\sqrt{z_t/\mu_t} \left\{ \frac{\alpha - L - 2\nu}{\sqrt{(\alpha - \nu)(\nu + L)}} \right\} = -\sqrt{z_t/\mu_t} \left\{ \sqrt{\frac{\alpha}{L}} - \sqrt{\frac{L}{\alpha}} \right\},$$

$$\begin{aligned} K_t^{(\alpha)} &= f'(\alpha) \left\{ \frac{\alpha - L}{f(\alpha)} K_{\alpha-L}(f(\alpha)) - K_{\alpha-L+1}(f(\alpha)) \right\} - \pi \cot(\pi(\alpha - L)) K_{\alpha-L}(f(\alpha)) \\ &+ \frac{\pi}{2} \csc(\pi(\alpha - L)) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} I_{-x}(f(\alpha)) - \frac{\partial}{\partial x} I_x(f(\alpha)) \right\}_{x=\alpha}, \quad \alpha \notin \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \nu} I_\nu(z) = I_\nu(z) \log\left(\frac{z}{2}\right) - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu} \frac{\psi(k+1+\nu)}{k! \Gamma(k+1+\nu)}.$$

APÊNDICE C – COMPONENTES DO VETOR ESCORE PARA KB -ARMA.

Considere a derivação de

$$U_{\boldsymbol{\nu}} = \left(U_{\delta}, U_{\boldsymbol{\beta}^{\top}}, U_{\boldsymbol{\phi}^{\top}}, U_{\boldsymbol{\theta}^{\top}}, U_{\alpha}, U_{\mathcal{L}} \right).$$

Para o parâmetro α ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \alpha} &= \frac{1}{2} \left(\log(L\alpha) + \frac{L}{\alpha} + 1 \right) - \Psi(\alpha) + \frac{K_t^{(\alpha)}}{K_t} \\ &\quad + \frac{1}{2} [\log(z_t) - \log(\mu_t)] \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} U_{\alpha} &= (n - m) \left(\frac{1}{2} \left(\log(L\alpha) + \frac{L}{\alpha} + 1 \right) - \Psi(\alpha) \right) + \sum_{t=m+1}^n \frac{K_t^{(\alpha)}}{K_t} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{t=m+1}^n [\log(z_t) - \log(\mu_t)] \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

em que $K_t^{(\alpha)} = \frac{\partial K_t}{\partial \alpha}$ é obtido no Apêndice B.

A seguir, calcula-se algumas derivadas parciais importantes:

$$\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} = \frac{1}{K_t} K_t^{(\mu_t)} - \left(\frac{L + \alpha}{2} \right) \frac{1}{\mu_t} \quad (\text{C.2})$$

em que, de Abramowitz e Stegun (1964), $\frac{\partial}{\partial z} K_{\alpha-L}(z) = -\frac{1}{2} [K_{\alpha-L-1}(z) + K_{\alpha-L+1}(z)]$, tem-se que

$$\begin{aligned} K_t^{(\mu_t)} &= \frac{\partial}{\partial \mu_t} K_{\alpha-L} \left(2\sqrt{L\alpha z_t / \mu_t} \right) \\ &= \frac{1}{\mu_t} \left[\sqrt{\alpha L z_t / \mu_t} \right] \left[K_{\alpha-L-1}(z) + K_{\alpha-L+1}(z) \right]_{z=2\sqrt{\alpha L z_t / \mu_t}}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Ainda,

$$\frac{d\mu_t}{d\eta_t} = \frac{1}{g'(\mu_t)}, \quad (\text{C.4})$$

em que $g'(x) = \frac{dg(x)}{dx}$. Das Equações (C.2) e (C.4), temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} &= \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} \frac{d\mu_t}{d\eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \\ &= \left[\frac{1}{K_t} K_t^{(\mu_t)} - \left(\frac{L + \alpha}{2} \right) \frac{1}{\mu_t} \right] \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \boldsymbol{\lambda}}, \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

em que $\boldsymbol{\lambda}$ representa os parâmetros $\delta, \beta, \boldsymbol{\theta}$ e ϕ . Dessa forma, para o parâmetro δ , segue que

$$U_\delta = \sum_{t=m+1}^n \left[\frac{1}{K_t} K_t^{(\mu_t)} - \left(\frac{L + \alpha}{2} \right) \frac{1}{\mu_t} \right] \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \delta}.$$

Em relação a β , tem-se que

$$U_\beta = \sum_{t=m+1}^n \left[\frac{1}{K_t} K_t^{(\mu_t)} - \left(\frac{L + \alpha}{2} \right) \frac{1}{\mu_t} \right] \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \beta}.$$

Para os parâmetros do vetor ϕ ,

$$U_\phi = \sum_{t=m+1}^n \left[\frac{1}{K_t} K_t^{(\mu_t)} - \left(\frac{L + \alpha}{2} \right) \frac{1}{\mu_t} \right] \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \phi}.$$

Finalmente, para $\boldsymbol{\theta}$,

$$U_{\boldsymbol{\theta}} = \sum_{t=m+1}^n \left[\frac{1}{K_t} K_t^{(\mu_t)} - \left(\frac{L + \alpha}{2} \right) \frac{1}{\mu_t} \right] \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \boldsymbol{\theta}}.$$

Para a derivada de $\ell(\cdot)$ com respeito a δ , seja $r_t = g(z_t) - g(\mu_t)$ sendo um termo do erro, de tal modo que

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial \delta} = 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial r_{t-j}}{\partial \delta} = 1 - \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial \eta_{t-j}}{\partial \delta}.$$

Com respeito a β , para $l = 1, \dots, r$, tem-se que

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial \beta_l} = x_{tl} - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{(t-i)l} - \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial \eta_{t-j}}{\partial \beta_l},$$

em que x_{tl} é o l -ésimo elemento de x_t . Para a derivada de $\ell(\cdot)$ com respeito a ϕ_i , para $i = 1, \dots, p$,

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial \phi_i} = g(z_{t-i}) - x_{t-1}^\top \boldsymbol{\beta} - \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial \eta_{t-j}}{\partial \phi_i}.$$

Para a derivada de $\ell(\cdot)$ com respeito a θ_j , para $j = 1, \dots, q$, tem-se que

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial \theta_j} = r_{t-j} - \sum_{i=1}^q \theta_i \frac{\partial \eta_{t-i}}{\partial \theta_j}.$$

APÊNDICE D – SUPORTE MATEMÁTICO PARA COMPUTAÇÃO DE $J_{\alpha\alpha}$ E $J_{\mu_t\alpha}$ DOS MODELOS KBR E KB-ARMA

$$\begin{aligned}
 K_t^{(\alpha\alpha)} = & f''(\alpha) \left\{ \frac{\alpha - L}{f(\alpha)} K_{\alpha-L}(f(\alpha)) - K_{\alpha-L+1}(f(\alpha)) \right\} \\
 & + f'(\alpha) \left\{ \frac{f(\alpha) - f'(\alpha)(\alpha - L)}{f(\alpha)^2} K_{\alpha-L}(f(\alpha)) + \frac{\alpha - L}{f(\alpha)} K_t^{(\alpha)} - K_{t:1}^{(\alpha)} \right\} \\
 & + \pi^2 K_t \csc^2(\pi(\alpha - L)) - \pi \cot(\pi(\alpha - L)) K_t^{(\alpha)} \\
 & - \frac{\pi}{2} \csc(\pi(\alpha - L)) \cot(\pi(\alpha - L)) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} I_{-x}(f(\alpha)) - \frac{\partial}{\partial x} I_x(f(\alpha)) \right\}_{x=\alpha} \quad (D.1)
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{\pi}{2} \csc(\pi(\alpha - L)) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} I_{-x}(f(\alpha)) - \frac{\partial}{\partial x} I_x(f(\alpha)) \right\}_{x=\alpha} \quad (D.2)$$

e de acordo com a Equação (3.50) de (KAZEMINIA; MEHRJOO, 2013),

$$K_{t:1}^{(\alpha)} = \frac{\partial K_{\alpha-L+1}(f(\alpha))}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{f(\alpha)^{\alpha-L+1}}{2^{\alpha-L+1}} \int_0^\infty \frac{e^{-t-f(\alpha)^2/(4t)}}{t^{\alpha-L+2}} dt \right\}.$$

e

$$K_{t:2}^{(\alpha)} = \frac{\partial K_{\alpha-L-1}(f(\alpha))}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{f(\alpha)^{\alpha-L-1}}{2^{\alpha-L-1}} \int_0^\infty \frac{e^{-t-f(\alpha)^2/(4t)}}{t^{\alpha-L}} dt \right\}.$$

A derivação de $K_t^{(\mu_t\alpha)}$ é obtida por

$$\begin{aligned}
 K_t^{(\mu_t\alpha)} &= \frac{\partial K_t}{\partial \mu_t \partial \alpha} \\
 &= \frac{1}{\mu_t} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[K_{\alpha-L-1}(z) + K_{\alpha-L+1}(z) \right] \left[\sqrt{\alpha L z_t / \mu_t} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[K_{\alpha-L-1}(z) + K_{\alpha-L+1}(z) \right] \left[\frac{L y_t / \mu_t}{\sqrt{\alpha L y_t / \mu_t}} \right] \right\}_{z=2\sqrt{\alpha L z_t / \mu_t}} \quad (D.3)
 \end{aligned}$$

**APÊNDICE E – CÁLCULOS DA SEGUNDA DERIVADA DE ℓ_t EM RELAÇÃO
A μ_t PARA UM PROCESSO KB -ARMA**

Seja $Q_t = \frac{1}{K_t} [K_{\alpha-L-1}(z) + K_{\alpha-L+1}(z)]$ e $S_t = \frac{\sqrt{\alpha L z_t / \mu_t}}{\mu_t}$ seguem as suas respectivas derivadas parciais em relação a μ_t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu_t} Q_t = & \left\{ -\frac{1}{K_t^2} \left[K_{\alpha-L-1}(z) + K_{\alpha-L+1}(z) \right]^2 \left[\frac{\sqrt{\alpha L z_t / \mu_t}}{\mu_t} \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{K_t} \left[K_{\alpha-L-1}^{(\mu_t)}(z) + K_{\alpha-L+1}^{(\mu_t)}(z) \right] \right\}_{z=2\sqrt{\alpha L z_t / \mu_t}} \end{aligned} \quad (E.1)$$

em que $K_{\alpha-L-1}^{(\mu_t)}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial \mu_t} K_{\alpha-L-1}(\cdot)$. Por fim, pela regra do quociente

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu_t} S_t &= \frac{\mu_t \frac{\partial}{\partial \mu_t} \left\{ \sqrt{\alpha L z_t / \mu_t} \right\} - \sqrt{\alpha L z_t / \mu_t}}{\mu_t^2} \\ &= -\frac{3}{2} \frac{\sqrt{\alpha L z_t / \mu_t}}{\mu_t^2} \end{aligned} \quad (E.2)$$

Portanto, derivando a Equação (C.2) e usando os resultados de (E.1) e (E.2) . Temos que,

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t^2} = \frac{1}{\mu_t^2} \left[\frac{L + \alpha}{2} \right] + \left[Q_t \frac{\partial}{\partial \mu_t} S_t + S_t \frac{\partial}{\partial \mu_t} Q_t \right] \quad (E.3)$$

APÊNDICE F – MATRIZ DE INFORMAÇÃO DE FISHER PARA O MODELO K -ARMA.

A MIF é derivada a seguir. primeiro, foi considerado λ_i e λ_j para representar os parâmetros $(\delta, \beta, \phi, \theta)$. Inicialmente, da Equação (6.1), temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\nu})}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} &= \sum_{t=m+1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left[\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\Theta})}{\partial \lambda_i} \right] \\
 &= \sum_{t=m+1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left[\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} \frac{d\mu_t}{d\eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} \right] \\
 &= \sum_{t=m+1}^n \left[\frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left(\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} \right) \frac{d\mu_t}{d\eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left(\frac{d\mu_t}{d\eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} \right) \right] \\
 &= \sum_{t=m+1}^n \left[\frac{\partial^2 \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t^2} \left(\frac{d\mu_t}{d\eta_t} \right)^2 \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left(\frac{d\mu_t}{d\eta_t} \right) \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} \frac{d\mu_t}{d\eta_t} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left(\frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} \right) \right] \\
 &= \sum_{t=m+1}^n \left[\frac{\partial^2 \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t^2} \left(\frac{d\mu_t}{d\eta_t} \right)^2 \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} \frac{d\mu_t}{d\eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} \frac{d\mu_t}{d\eta_t} \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \lambda_j \partial \lambda_i} \right]. \tag{F.1}
 \end{aligned}$$

Da Equação (E.3),

$$\frac{\partial^2 \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t^2} = \frac{1}{\mu_t^2} \left[\frac{L + \alpha}{2} \right] + \left[Q_t \frac{\partial}{\partial \mu_t} S_t + S_t \frac{\partial}{\partial \mu_t} Q_t \right]$$

sob condições de regularidade $\mathbb{E} \left(\frac{\partial \ell_t}{\partial \mu_t} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right) = 0$ e, portanto da Equação (F.1),

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(U_{\lambda_i \lambda_j}) &= \sum_{t=m+1}^n \mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right) \\
 &= \sum_{t=m+1}^n \mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \mu_t^2} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right) \left(\frac{d\mu_t}{d\eta_t} \right)^2 \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} \tag{F.2}
 \end{aligned}$$

Derivando a Equação (C.5) com respeito a α ,

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\nu})}{\partial \lambda \partial \alpha} = \sum_{t=m+1}^n \left[\frac{K_t K_t^{(\mu_t \alpha)} - K_t^{(\alpha)} K_t^{(\mu_t)}}{K_t^2} - \frac{1}{2\mu_t} \right] \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i}.$$

Portanto, tomando o valor esperado condicional, segue-se que

$$\mathbb{E}(U_{\lambda_i \alpha}) = \sum_{t=m+1}^n \left[\mathbb{E} \left(\frac{K_t K_t^{(\mu_t \alpha)} - K_t^{(\alpha)} K_t^{(\mu_t)}}{K_t^2} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right) - \frac{1}{2\mu_t} \right] \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} \tag{F.3}$$

em que $K_t^{(\mu_t\alpha)} = \frac{\partial^2 K_t}{\partial \mu_t \partial \alpha}$. Da segunda derivada de ℓ_t com respeito a α , obtém-se

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\nu})}{\partial \alpha^2} = (n - m) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha - L}{\alpha^2} \right) - \Psi^{(1)}(\alpha) \right] + \sum_{t=m+1}^n \left[\frac{K_t K_t^{(\alpha\alpha)} - [K_t^{(\alpha)}]^2}{K_t^2} \right]$$

em que $K_t^{(\alpha\alpha)} = \frac{\partial^2 K_t}{\partial \alpha^2}$ (obtida em (D.1)) e $K_t^{(\alpha)} = \frac{\partial K_t}{\partial \alpha}$ (obtida em (B.1)). Portanto, aplicando o valor esperado condicional,

$$\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\nu})}{\partial \alpha^2} \right) = (n - m) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha - L}{\alpha^2} \right) - \Psi^{(1)}(\alpha) \right] + \sum_{t=m+1}^n \mathbb{E} \left[\frac{K_t K_t^{(\alpha\alpha)} - [K_t^{(\alpha)}]^2}{K_t^2} \right]$$

Na prática, o valor esperado condicional pode ser obtido via Monte Carlo.

APÊNDICE G – COMPONENTES DO VETOR ESCORE PARA $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA.

Considere a derivação de

$$U_{\boldsymbol{\nu}} = \left(U_{\delta}, U_{\boldsymbol{\beta}^{\top}}, U_{\boldsymbol{\phi}^{\top}}, U_{\boldsymbol{\theta}^{\top}}, U_{\alpha}, U_L \right).$$

Para o parâmetro L ,

$$\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial L} = \underbrace{\log(L) + \psi(L - \alpha) - \psi(L) + 1}_{\mathcal{U}_1(\alpha, L)} + \log\left(\frac{z_t}{v_t}\right) + (\alpha - L) \frac{z_t}{v_t}$$

e dessa forma

$$U_L = (n - m) \mathcal{U}_1(\alpha, L) + \sum_{t=m+1}^n \log\left(\frac{z_t}{v_t}\right) + (\alpha - L) \sum_{t=m+1}^n \frac{z_t}{v_t}. \quad (\text{G.1})$$

Para o parâmetro α ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \alpha} &= \underbrace{\psi(-\alpha) - \psi(L - \alpha) - \log(-\alpha - 1) + \frac{\alpha}{-\alpha - 1}}_{\mathcal{U}_2(\alpha, L)} + \log\left(\frac{v_t}{\mu_t}\right) \\ &\quad - (\alpha - L) \frac{\mu_t}{v_t} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$U_{\alpha} = (n - m) \mathcal{U}_2(\alpha, L) + \sum_{t=m+1}^n \log\left(\frac{v_t}{\mu_t}\right) - (\alpha - L) \sum_{t=m+1}^n \frac{\mu_t}{v_t}. \quad (\text{G.2})$$

A seguir, foi calculado algumas derivadas parciais importantes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} &= -\alpha \frac{1}{\mu_t} + (\alpha - L) \frac{1}{v_t} (-\alpha - 1) = \frac{\overbrace{(\alpha - L)(-\alpha - 1)}^{c_1}}{v_t} - \frac{\alpha}{\mu_t} \\ &= \frac{c_1}{v_t} - \frac{\alpha}{\mu_t} \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$

e

$$\frac{d\mu_t}{d\eta_t} = \frac{1}{g'(\mu_t)}, \quad (\text{G.4})$$

em que $g'(x) = \frac{dg(x)}{dx}$. De (G.3) e (G.4), temos que

$$\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} \frac{d\mu_t}{d\eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \left(\frac{c_1}{v_t} - \frac{\alpha}{\mu_t} \right) \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \boldsymbol{\lambda}}, \quad (\text{G.5})$$

em que $\boldsymbol{\lambda}$ representa os parâmetros $\delta, \beta, \boldsymbol{\theta}$ e ϕ .

Para o parâmetro δ ,

$$\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \delta} = \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} \frac{d\mu_t}{d\eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \delta} = \left(\frac{c_1}{v_t} - \frac{\alpha}{\mu_t} \right) \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \delta},$$

segue que

$$U_\delta = \sum_{t=m+1}^n \left(\frac{c_1}{v_t} - \frac{\alpha}{\mu_t} \right) \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \delta}.$$

Para o parâmetro β ,

$$\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \beta_l} = \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} \frac{d\mu_t}{d\eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \beta_l} = \left(\frac{c_1}{v_t} - \frac{\alpha}{\mu_t} \right) \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \beta_l},$$

tem-se que

$$U_\beta = \sum_{t=m+1}^n \left(\frac{c_1}{v_t} - \frac{\alpha}{\mu_t} \right) \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \beta}.$$

Para os parâmetros $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)^\top$,

$$\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \phi_i} = \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} \frac{d\mu_t}{d\eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \phi_i} = \left(\frac{c_1}{v_t} - \frac{\alpha}{\mu_t} \right) \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \phi_i}$$

e, portanto,

$$U_\phi = \sum_{t=m+1}^n \left(\frac{c_1}{v_t} - \frac{\alpha}{\mu_t} \right) \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \phi}.$$

Finalmente, para o parâmetro $\boldsymbol{\theta}$,

$$\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \theta_j} = \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} \frac{d\mu_t}{d\eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \theta_j} = \left(\frac{c_1}{v_t} - \frac{\alpha}{\mu_t} \right) \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \theta_j}$$

e

$$U_{\boldsymbol{\theta}} = \sum_{t=m+1}^n \left(\frac{c_1}{v_t} - \frac{\alpha}{\mu_t} \right) \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \boldsymbol{\theta}}.$$

Para a derivada de $\ell(\cdot)$ com respeito a δ , seja $r_t = g(z_t) - g(\mu_t)$ sendo um termo do erro de modo a

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial \delta} = 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial r_{t-j}}{\partial \delta} = 1 - \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial \eta_{t-j}}{\partial \delta}.$$

Com respeito a β , para $l = 1, \dots, r$, tem-se que

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial \beta_l} = x_{tl} - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{(t-i)l} - \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial \eta_{t-j}}{\partial \beta_l},$$

em que x_{tl} é o l -ésimo elemento de x_t . Para a derivada de $\ell(\cdot)$ com respeito a ϕ_i , para $i = 1, \dots, p$,

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial \phi_i} = g(z_{t-i}) - x_{t-1}^\top \boldsymbol{\beta} - \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial \eta_{t-j}}{\partial \phi_i}.$$

Para a derivada de $\ell(\cdot)$ com respeito a θ_j , para $j = 1, \dots, q$, tem-se que

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial \theta_j} = r_{t-j} - \sum_{i=1}^q \theta_i \frac{\partial \eta_{t-i}}{\partial \theta_j}.$$

APÊNDICE H – DERIVAÇÃO DE VALORES ESPERADOS ÚTEIS PARA A DISTRIBUIÇÃO $\mathcal{G}_I^0$

Nesta seção, apresenta-se as derivações de

$$\mathbb{E} \left[\frac{Z_t}{(\gamma_t + L Z_t)} \right], \quad \mathbb{E} \left[\frac{Z_t}{(\gamma_t + L Z_t)^2} \right] \quad \text{e} \quad \mathbb{E} \left[\frac{Z_t}{(\gamma_t + L Z_t)} \right]^2$$

para $t = m + 1, \dots, n$. Seja

$$H(A, B) = \frac{B^B \Gamma(B - A)}{\Gamma(B) \Gamma(-A)}, \quad \text{para} \quad -A, B > 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{Z_t}{(\gamma_t + L Z_t)} \right] &= \int_0^\infty \frac{z_t}{(\gamma_t + L z_t)} \frac{H(\alpha, L)}{\gamma_t^\alpha} \frac{z_t^{L-1}}{(\gamma_t + L z_t)^{L-\alpha}} dz_t \\ &= \frac{H(\alpha, L)}{\gamma_t^\alpha} \left(\frac{L+1}{L} \right)^{(L+1)-\alpha} \\ &\quad \int_0^\infty \frac{z_t^{(L+1)-1}}{\left(\gamma_t \left(\frac{L+1}{L} \right) + (L+1) z_t \right)^{(L+1)-\alpha}} dz_t \\ &= \frac{H(\alpha, L)}{\gamma_t^\alpha} \left(\frac{L+1}{L} \right)^{(L+1)-\alpha} \frac{\left(\gamma_t \frac{(L+1)}{L} \right)^\alpha}{H(\alpha, L+1)} \\ &= \frac{1}{L - \alpha}. \end{aligned} \tag{H.1}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{Z_t}{(\gamma_t + L Z_t)^2} \right] &= \int_0^\infty \frac{z_t}{(\gamma_t + L z_t)^2} \frac{H(\alpha, L)}{\gamma_t^\alpha} \frac{z_t^{L-1}}{(\gamma_t + L z_t)^{L-\alpha}} dz_t \\ &= \frac{H(\alpha, L)}{\gamma_t^\alpha} \left(\frac{L+1}{L} \right)^{L-\alpha+2} \\ &\quad \int_0^\infty \frac{z_t^{(L+1)-1}}{\left(\gamma_t \left(\frac{L+1}{L} \right) + (L+1) z_t \right)^{L-\alpha+2}} dz_t \\ &= \frac{H(\alpha, L)}{\gamma_t^\alpha} \left(\frac{L+1}{L} \right)^{L-\alpha+2} \frac{\left(\gamma_t \frac{(L+1)}{L} \right)^{\alpha-1}}{H(\alpha-1, L+1)} \\ &= (-\alpha) [\gamma_t (L - \alpha + 1) (L - \alpha)]^{-1} \end{aligned} \tag{H.2}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left\{ \left(\frac{Z_t}{(\gamma_t + LZ_t)} \right)^2 \right\} &= \int_0^\infty \frac{z_t^2}{(\gamma_t + LZ_t)^2} \frac{H(\alpha, L)}{\gamma_t^\alpha} \frac{z_t^{L-1}}{(\gamma_t + LZ_t)^{L-\alpha}} dz_t \\
&= \frac{H(\alpha, L)}{\gamma_t^\alpha} \left(\frac{L+2}{L} \right)^{(L+2)-\alpha} \\
&\quad \int_0^\infty \frac{z_t^{(L+2)-1}}{\left(\gamma_t \frac{L+2}{L} + (L+2)z_t \right)^{(L+2)-\alpha}} dz_t \\
&= \frac{H(\alpha, L)}{\gamma_t^\alpha} \left(\frac{L+2}{L} \right)^{(L+2)-\alpha} \frac{\left(\gamma_t \frac{L+2}{L} \right)^\alpha}{H(\alpha, L+2)} \\
&= \frac{L+1}{L} \frac{1}{(L-\alpha+1)(L-\alpha)} \tag{H.3}
\end{aligned}$$

APÊNDICE I – MATRIZ DE INFORMAÇÃO DE FISHER PARA A DISTRIBUIÇÃO $\mathcal{G}_I^0$.

A $\mathcal{G}_I^0$ MIF é derivada a seguir. primeiro, foi considerado λ_i e λ_j para representar os parâmetros $(\delta, \beta, \phi, \theta)$. Inicialmente, da Equação (7.1), temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\nu})}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} &= \sum_{t=m+1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left[\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\Theta})}{\partial \lambda_i} \right] \\
 &= \sum_{t=m+1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left[\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} \frac{d\mu_t}{d\eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} \right] \\
 &= \sum_{t=m+1}^n \left[\frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left(\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} \right) \frac{d\mu_t}{d\eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left(\frac{d\mu_t}{d\eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} \right) \right] \\
 &= \sum_{t=m+1}^n \left[\frac{\partial^2 \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t^2} \left(\frac{d\mu_t}{d\eta_t} \right)^2 \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left(\frac{d\mu_t}{d\eta_t} \right) \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} \frac{d\mu_t}{d\eta_t} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left(\frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} \right) \right] \\
 &= \sum_{t=m+1}^n \left[\frac{\partial^2 \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t^2} \left(\frac{d\mu_t}{d\eta_t} \right)^2 \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} \frac{d\mu_t}{d\eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t} \frac{d\mu_t}{d\eta_t} \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \lambda_j \partial \lambda_i} \right]. \tag{I.1}
 \end{aligned}$$

Da equação (G.3),

$$\frac{\partial^2 \ell_t(\mu_t, \boldsymbol{\nu})}{\partial \mu_t^2} = \frac{\alpha}{\mu_t^2} - \frac{(\alpha - L)(-\alpha - 1)(-\alpha - 1)}{v_t^2}.$$

sob condições de regularidade $\mathbb{E} \left(\frac{\partial \ell_t}{\partial \mu_t} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right) = 0$ e, portanto da equação (I.1),

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(U_{\lambda_i \lambda_j}) &= \sum_{t=m+1}^n \mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right) \\
 &= \sum_{t=m+1}^n \mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \mu_t^2} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right) \left(\frac{d\mu_t}{d\eta_t} \right)^2 \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} \\
 &\quad \left(\text{em que } \mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \mu_t^2} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right) = \frac{\alpha}{\mu_t^2} - c_1(-\alpha - 1) \mathbb{E} \left(\frac{1}{V_t^2} \right) = \frac{\alpha L}{(L - \alpha + 1)} \frac{1}{\mu_t^2} \right) \\
 &= \underbrace{\alpha \frac{L}{(L - \alpha + 1)}}_{c_2} \sum_{t=m+1}^n \left[\frac{1}{\mu_t^2} \right] \frac{1}{[g'(\mu_t)]^2} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} \\
 &= c_2 \sum_{t=m+1}^n \left[\frac{1}{\mu_t^2} \right] \frac{1}{[g'(\mu_t)]^2} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i}. \tag{I.2}
 \end{aligned}$$

Então, derivando a equação (G.5) com respeito a α ,

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\nu})}{\partial \boldsymbol{\lambda} \partial \alpha} = \sum_{t=m+1}^n \left[(L - 2\alpha - 1) \frac{1}{v_t} + c_1 \frac{\mu_t}{v_t^2} - \frac{1}{\mu_t} \right] \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i}.$$

Portanto, tomando o valor esperado condicional e usando os resultados do Lema 2.2.2, segue-se que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_{\lambda_i \alpha}) &= \sum_{t=m+1}^n \left[(L - 2\alpha - 1) \mathbb{E}\left(\frac{1}{V_t}\right) + c_1 \mu_t \mathbb{E}\left(\frac{1}{V_t^2}\right) - \frac{1}{\mu_t} \right] \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} \\ &= \sum_{t=m+1}^n \left[(L - 2\alpha - 1) \frac{(-\alpha)}{\mu_t(-\alpha-1)(-\alpha+L)} \right. \\ &\quad \left. + c_1 \mu_t \frac{(-\alpha)(-\alpha+1)}{\mu_t^2(-\alpha-1)^2(-\alpha+L)(-\alpha+L+1)} - \frac{1}{\mu_t} \right] \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} \\ &= \sum_{t=m+1}^n \left[\frac{(L - 2\alpha - 1)\alpha}{\mu_t(-\alpha-1)(\alpha-L)} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{\mu_t(-\alpha-1)(L-\alpha+1)} - \frac{1}{\mu_t} \right] \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} \\ &= \underbrace{\left[\frac{(L - 2\alpha - 1)\alpha}{(-\alpha-1)(\alpha-L)} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{(-\alpha-1)(L-\alpha+1)} - 1 \right]}_{c_3} \sum_{t=m+1}^n \frac{1}{\mu_t} \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} \\ &= c_3 \sum_{t=m+1}^n \frac{1}{\mu_t} \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Com respeito a L ,

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\nu})}{\partial \boldsymbol{\lambda} \partial L} = \sum_{t=m+1}^n \left[-(-\alpha-1) \frac{1}{v_t} - (\alpha-L)(-\alpha-1) \frac{z_t}{v_t^2} \right] \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i}. \quad (1.4)$$

Tomando o valor esperado condicional em (1.4) e trocando os resultados do Lema 2.2.2 e Equação (H.2), tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_{\lambda_i L}) &= \sum_{t=m+1}^n \left[-(-\alpha-1) \mathbb{E}\left(\frac{1}{V_t}\right) - (\alpha-L)(-\alpha-1) \mathbb{E}\left(\frac{Z_t}{V_t^2}\right) \right] \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} \\ &= \sum_{t=m+1}^n \left[-(-\alpha-1) \frac{\alpha}{\mu_t(-\alpha-1)(\alpha-L)} \right. \\ &\quad \left. - (\alpha-L)(-\alpha-1) \frac{\alpha}{\mu_t(-\alpha-1)(L-\alpha+1)(\alpha-L)} \right] \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} \\ &= \sum_{t=m+1}^n \left[-\frac{\alpha}{\mu_t(\alpha-L)} - \frac{\alpha}{\mu_t(L-\alpha+1)} \right] \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} \\ &= - \underbrace{\left[\frac{\alpha}{(\alpha-L)(L-\alpha+1)} \right]}_{c_4} \sum_{t=m+1}^n \frac{1}{\mu_t} \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} \\ &= -c_4 \sum_{t=m+1}^n \frac{1}{\mu_t} \frac{1}{g'(\mu_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i}. \end{aligned}$$

Da segunda derivada de ℓ_t com respeito a α , obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\nu})}{\partial \alpha^2} &= (n-m) \left[\psi^{(1)}(L-\alpha) - \psi^{(1)}(-\alpha) + \frac{1}{(-\alpha-1)} - \frac{1}{(-\alpha-1)^2} \right] - 2 \sum_{t=m+1}^n \frac{\mu_t}{v_t} \\
&\quad - (\alpha-L) \sum_{t=m+1}^n \frac{\mu_t^2}{v_t^2} \\
&= (n-m) \left[\psi^{(1)}(L-\alpha) - \psi^{(1)}(-\alpha) - \frac{\alpha+2}{(-\alpha-1)^2} \right] - 2 \sum_{t=m+1}^n \frac{\mu_t}{v_t} \\
&\quad - (\alpha-L) \sum_{t=m+1}^n \frac{\mu_t^2}{v_t^2}.
\end{aligned}$$

Portanto, aplicando o valor esperado condicional do Lemma 2.2.2,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\nu})}{\partial \alpha^2} \right) &= (n-m) \left[\psi^{(1)}(L-\alpha) - \psi^{(1)}(-\alpha) - \frac{\alpha+2}{(-\alpha-1)^2} \right] - 2 \sum_{t=m+1}^n \mu_t \mathbb{E} \left(\frac{1}{V_t} \right) \\
&\quad - (\alpha-L) \sum_{t=m+1}^n \mu_t^2 \mathbb{E} \left(\frac{1}{V_t^2} \right) \\
&= (n-m) \left[\psi^{(1)}(L-\alpha) - \psi^{(1)}(-\alpha) - \frac{\alpha+2}{(-\alpha-1)^2} \right] - 2 \sum_{t=m+1}^n \mu_t \frac{\alpha}{\mu_t(-\alpha-1)(\alpha-L)} \\
&\quad - (\alpha-L) \sum_{t=m+1}^n \mu_t^2 \frac{\alpha(\alpha-1)}{\mu_t^2(-\alpha-1)^2(L-\alpha+1)(\alpha-L)} \\
&= (n-m) \underbrace{\left[\psi^{(1)}(L-\alpha) - \psi^{(1)}(-\alpha) - 2 \frac{\alpha}{(-\alpha-1)(\alpha-L)} + \frac{2(\alpha^2-L-1)-\alpha L}{(-\alpha-1)^2(L-\alpha+1)} \right]}_{c_5} \\
&= (n-m) c_5.
\end{aligned}$$

Da segunda derivada de (G.2) com respeito a L , tem-se que

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\nu})}{\partial \alpha \partial L} = -(n-m) \psi^{(1)}(L-\alpha) + \sum_{t=m+1}^n \frac{z_t}{v_t} + \sum_{t=m+1}^n \frac{\mu_t}{v_t} + (\alpha-L) \sum_{t=m+1}^n \mu_t \frac{z_t}{v_t^2}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\nu})}{\partial \alpha \partial L} \right) &= -(n-m) \psi^{(1)}(L-\alpha) + \sum_{t=m+1}^n \mathbb{E} \left(\frac{Z_t}{V_t} \right) + \sum_{t=m+1}^n \mu_t \mathbb{E} \left(\frac{1}{V_t} \right) \\
&\quad + (\alpha-L) \sum_{t=m+1}^n \mu_t \mathbb{E} \left(\frac{Z_t}{V_t^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (n-m) \left[-\psi^{(1)}(L-\alpha) + \frac{1}{L-\alpha} + \frac{\alpha}{(-\alpha-1)(\alpha-L)} + \frac{\alpha}{(-\alpha-1)(L-\alpha+1)} \right] \\
&= (n-m) \underbrace{\left[-\psi^{(1)}(L-\alpha) + \frac{1}{L-\alpha} + \frac{\alpha}{(-\alpha-1)} \left(\frac{1}{(\alpha-L)(L-\alpha+1)} \right) \right]}_{c_6} \\
&= (n-m)c_6.
\end{aligned}$$

Finalmente, da segunda derivada de ℓ_t com respeito a L ,

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\nu})}{\partial L^2} = (n-m) \left[\frac{1}{L} + \psi^{(1)}(L-\alpha) - \psi^{(1)}(L) \right] - 2 \sum_{t=m+1}^n \frac{z_t}{v_t} - (\alpha-L) \sum_{t=m+1}^n \frac{z_t^2}{v_t^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\nu})}{\partial L^2} \right) &= (n-m) \left[\frac{1}{L} + \psi^{(1)}(L-\alpha) - \psi^{(1)}(L) \right] - 2 \sum_{t=m+1}^n \mathbb{E} \left(\frac{Z_t}{V_t} \right) \\
&\quad - (\alpha-L) \sum_{t=m+1}^n \mathbb{E} \left(\frac{Z_t^2}{V_t^2} \right) \\
&= (n-m) \underbrace{\left[\frac{1}{L} + \psi^{(1)}(L-\alpha) - \psi^{(1)}(L) - 2 \frac{1}{L-\alpha} + \frac{L+1}{L} \frac{1}{(L-\alpha+1)} \right]}_{c_7} \\
&= (n-m)c_7.
\end{aligned}$$

APÊNDICE J – TEXTURAS SIMULADAS POR PROCESSOS ARMAS

Diferentes tipos de texturas podem ser gerados a partir de processos ARMA, concatenando linhas ou colunas (MCCORMICK; JAYARAMAMURTHY, 1974). Nesta seção, apresenta-se um estudo de imagens simuladas através dos processos Γ -, $\mathcal{G}_I^0$ - e KB -ARMA (as formulações desses processos serão apresentadas nos capítulos seguintes). Nas Figuras 55, 56, 57 e 58, apresentam-se as texturas simuladas assumindo as estruturas AR(1), AR(2), MA(1) e ARMA(1,1), respectivamente. Para este fim, a função de ligação logarítmica ($\log(\cdot)$) foi considerada. Os seguintes modelos particulares foram considerados:

- Γ -, $\mathcal{G}_I^0$ - e KB - AR(1): $\nu = (\delta, \phi_1, \alpha, L): \log(\mu_t) = \delta + \phi_1 \log(y_{t-1})$,
- Γ -, $\mathcal{G}_I^0$ - e KB - AR(2): $\nu = (\delta, \phi_1, \phi_2, \alpha, L): \log(\mu_t) = \delta + \phi_1 \log(y_{t-1}) + \phi_2 \log(y_{t-2})$,
- Γ -, $\mathcal{G}_I^0$ - e KB - MA(1): $\nu = (\delta, \theta_1, \alpha, L): \log(\mu_t) = \delta + \theta_1 [\log(y_{t-1}) - \log(\mu_{t-1})]$,
- Γ -, $\mathcal{G}_I^0$ - e KB - ARMA(1,1): $\nu = (\delta, \phi_1, \theta_1, \alpha, L): \log(\mu_t) = \delta + \phi_1 \log(y_{t-1}) + \theta_1 [\log(y_{t-1}) - \log(\mu_{t-1})]$,

em que $L = 4$, $\phi_1, \phi_2, \theta_1 \in \{-0,9, 0, 1, 0,9\}$, $\alpha = -3$ (para marginal $\mathcal{G}_I^0$) e $\alpha = 3$ (para marginal KB).

As estruturas AR(1) (Figura 55), AR(2) (Figura 56) e ARMA(1,1) (Figura 58) apresentam comportamento semelhante. Quando $\phi_1 = \theta_1 = 0,9$, existe uma variação no tipo de texturas simuladas. Enquanto que, para $\phi_1 = \theta_1 = 0,1$, as texturas apresentam um cenário mais homogêneo, entretanto existe grande rugosidade. Por último, quando $\phi_1 = \theta_1 = -0,9$, as texturas apresentam um cenário não homogêneo. Para modelos MA(1), em geral, nota-se que não existe mudanças de texturas significativas, mas a textura é bastante rugosa.

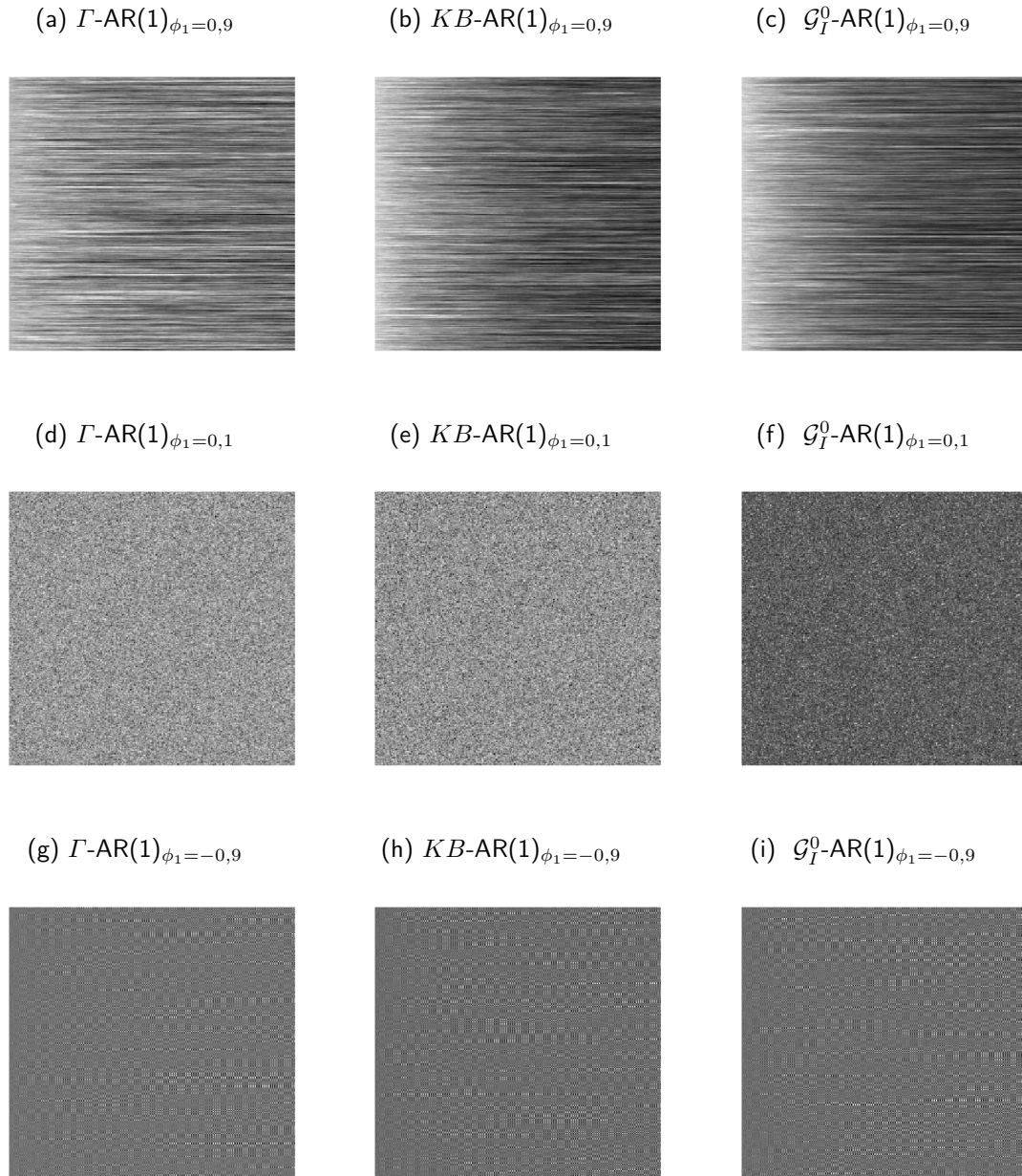
Em geral o comportamento da geração de texturas para os modelos com marginais Γ , $\mathcal{G}_I^0$ e KB são semelhantes.

As texturas simuladas indicam que, as estruturas AR(1), AR(2), MA(1) e ARMA(1,1) geram diferentes tipos de texturas. Além disso, a variação dos parâmetros do processo ARMA geram texturas diferentes. Valores de ϕ_1 ou θ_1 próximos da não estacionariedade ($|\phi_1| = |\theta_1| \approx 1$), geram imagens com texturas heterogêneas. Enquanto que para valores de ϕ_1 ou θ_1 próximos de um passeio aleatório ($|\phi_1| = |\theta_1| \approx 0$), geram imagens mais homogêneas.

Para modelos AR(2), como apresentado por Hamilton (1994, p.17) e ilustrado na Figura 59 foram considerados pares de pontos (na cor azul) dentro do triângulo de estabilidade. Nota-

se que para autovalores complexos (quando $\phi_1 = 0,1$ e $\phi_2 = -0,9$), existe uma alternância de texturas.

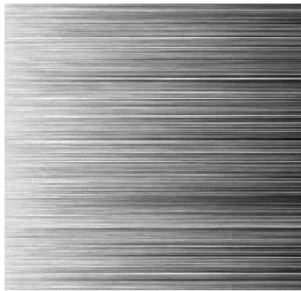
Figura 55 – Texturas simuladas a partir de processos Γ -, KB - e $\mathcal{G}_I^0$ -AR(1).



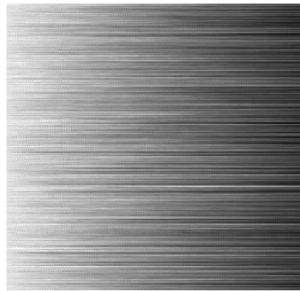
Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 56 – Texturas simuladas a partir de processos Γ -, KB - e $\mathcal{G}_I^0$ -AR(2).

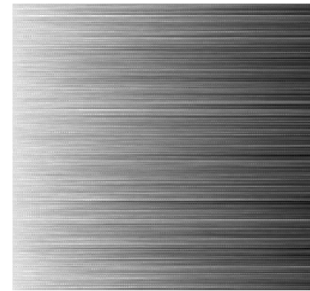
(a) Γ -AR(2) $_{\phi_1=0,1,\phi_2=0,9}$



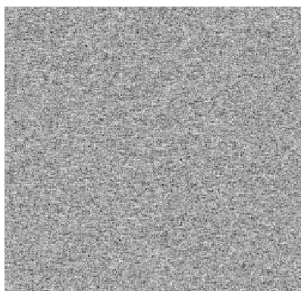
(b) KB -AR(2) $_{\phi_1=0,1,\phi_2=0,9}$



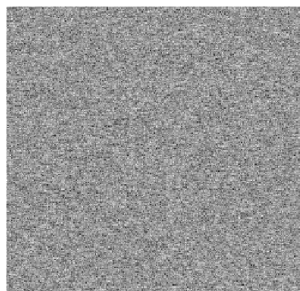
(c) $\mathcal{G}_I^0$ -AR(2) $_{\phi_1=0,1,\phi_2=0,9}$



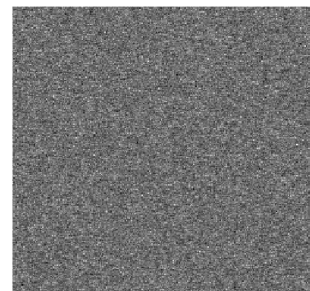
(d) Γ -AR(2) $_{\phi_1=0,1,\phi_2=0,1}$



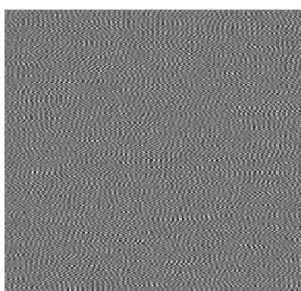
(e) KB -AR(2) $_{\phi_1=0,1,\phi_2=0,1}$



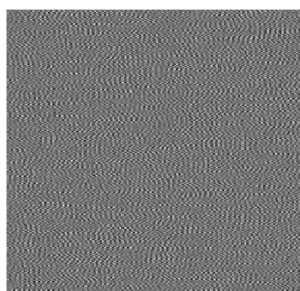
(f) $\mathcal{G}_I^0$ -AR(2) $_{\phi_1=0,1,\phi_2=0,1}$



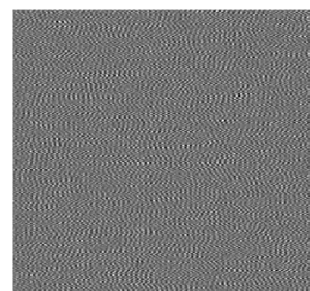
(g) Γ -AR(2) $_{\phi_1=0,1,\phi_2=-0,9}$



(h) KB -AR(2) $_{\phi_1=0,1,\phi_2=-0,9}$

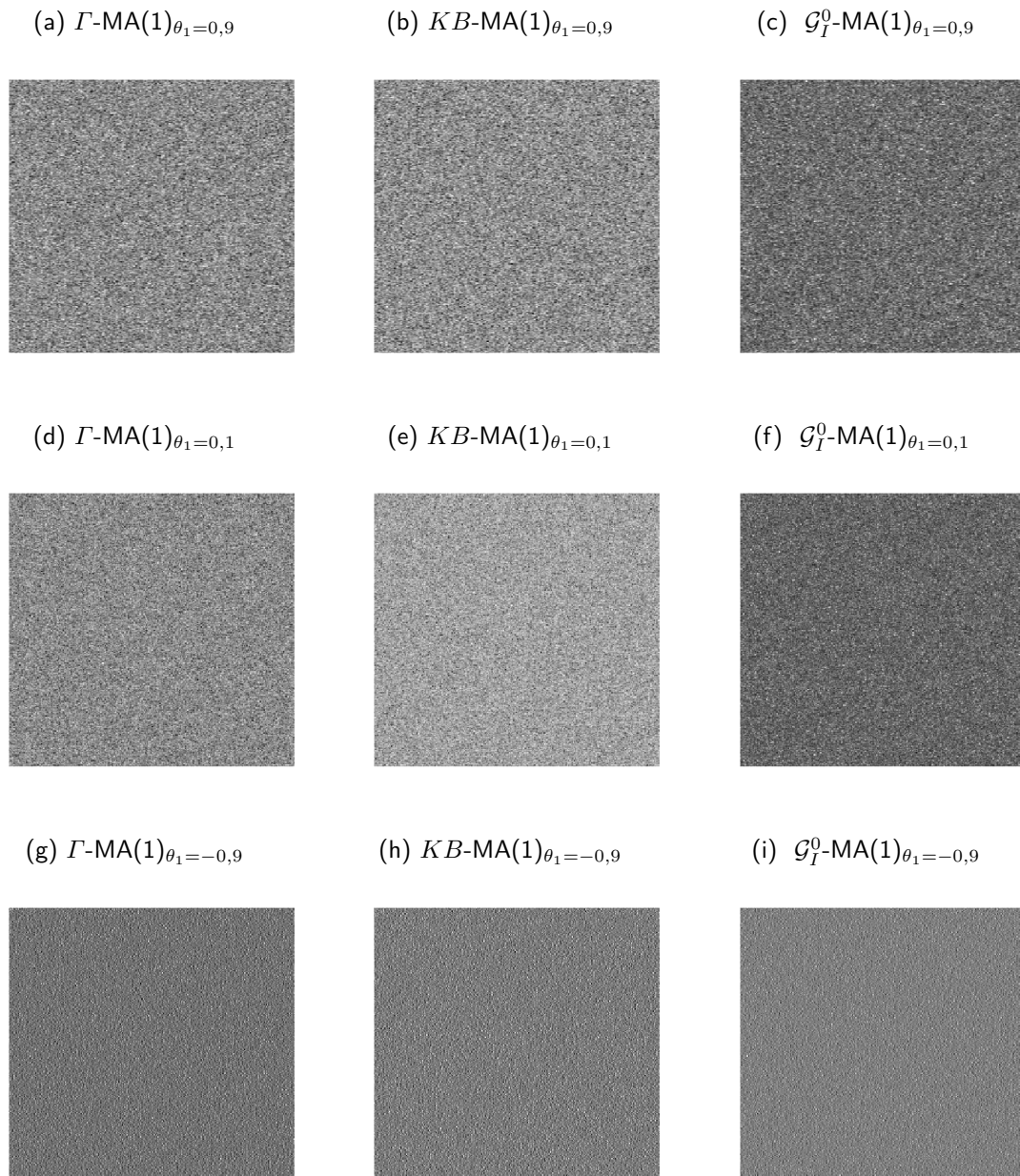


(i) $\mathcal{G}_I^0$ -AR(2) $_{\phi_1=0,1,\phi_2=-0,9}$



Fonte: Autoria própria (2021)

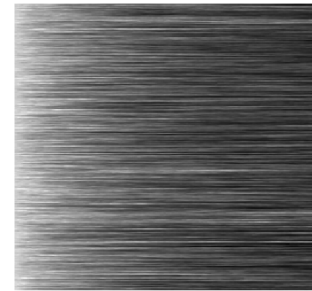
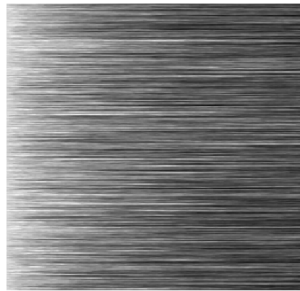
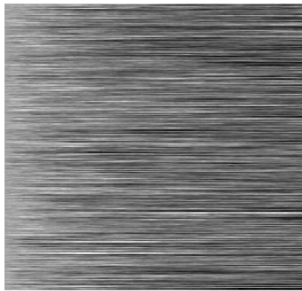
Figura 57 – Texturas simuladas a partir de processos Γ -, KB - e $\mathcal{G}_I^0$ -MA(1).



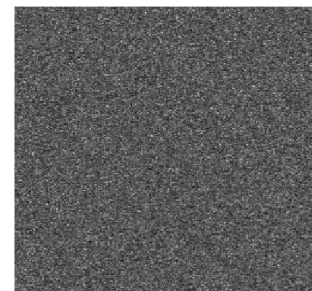
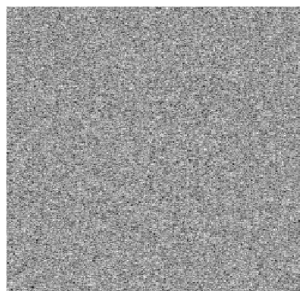
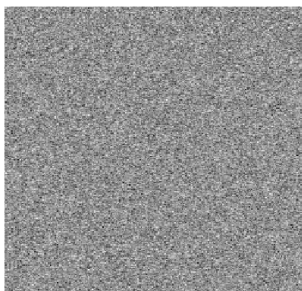
Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 58 – Texturas simuladas a partir de processos Γ -, KB - e $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA(1,1),

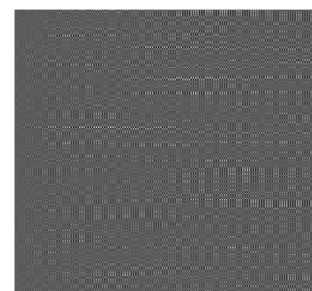
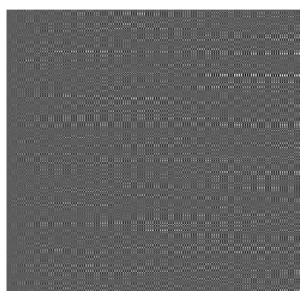
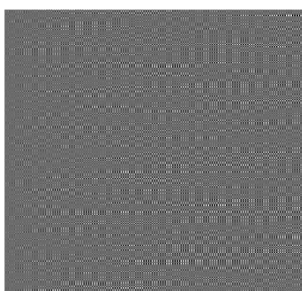
(a) Γ -ARMA(1,1) $_{\phi_1=\theta_1=0,9}$ (b) KB -ARMA(1,1) $_{\phi_1=\theta_1=0,9}$ (c) $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA(1,1) $_{\phi_1=\theta_1=0,9}$



(d) Γ -ARMA(1,1) $_{\phi_1=\theta_1=0,1}$ (e) KB -ARMA(1,1) $_{\phi_1=\theta_1=0,1}$ (f) $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA(1,1) $_{\phi_1=\theta_1=0,1}$

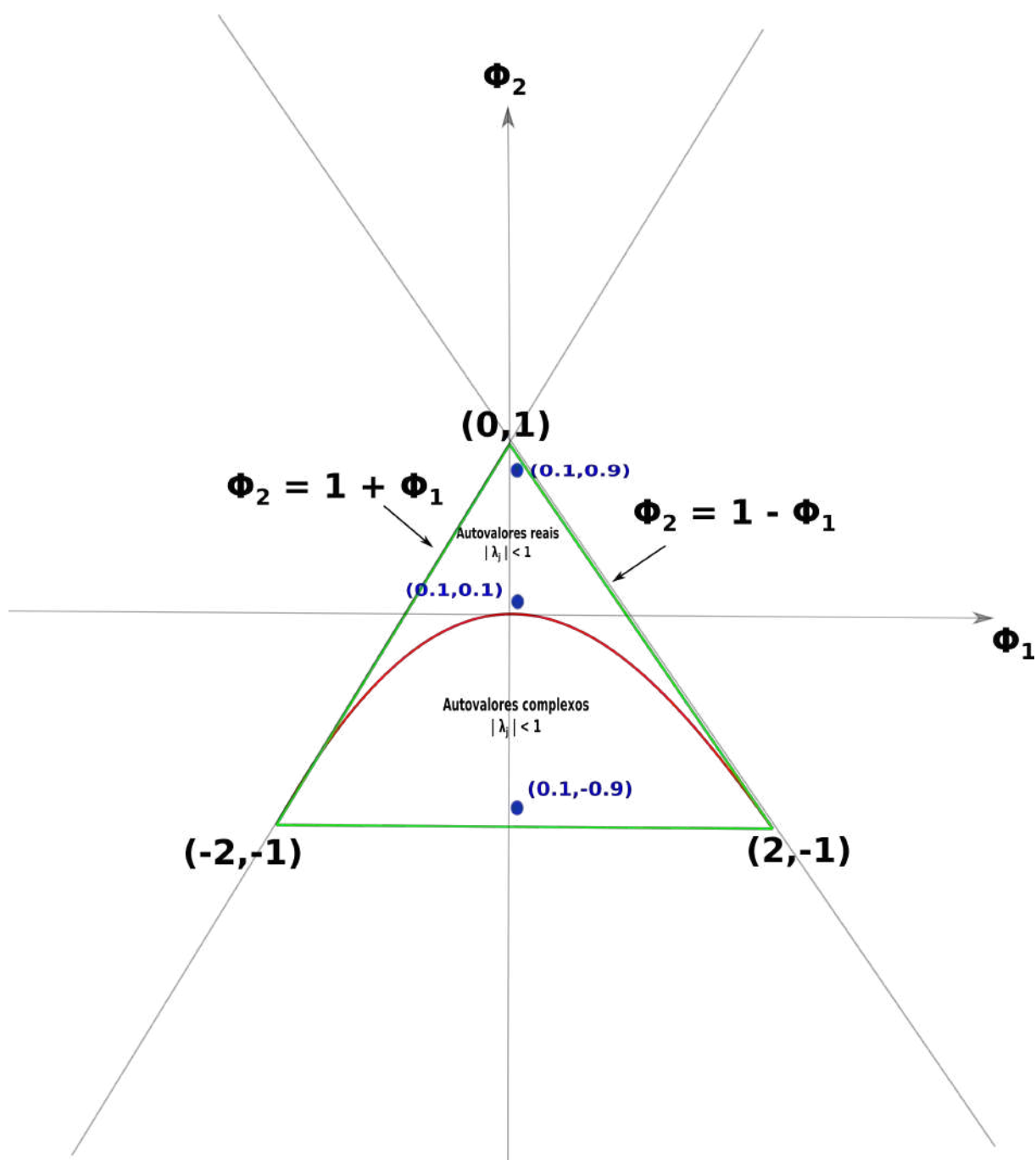


(g) Γ -ARMA(1,1) $_{\phi_1=\theta_1=-0,9}$ (h) KB -ARMA(1,1) $_{\phi_1=\theta_1=-0,9}$ (i) $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA(1,1) $_{\phi_1=\theta_1=-0,9}$



Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 59 – Região de estabilidade para processos autoregressivos de segunda ordem.



Fonte: Autoria própria (2021)