



UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
FÍSICA-LICENCIATURA

**PÊNDULO DUPLO: SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL E APLICAÇÃO AO
ENSINO DE FÍSICA**

Bruno Muller de Carvalho Melo

Orientador: Paulo Henrique Ribeiro Peixoto

CARUARU

2014



UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
FÍSICA-LICENCIATURA

**PÊNULO DUPLO: SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL E APLICAÇÃO AO
ENSINO DE FÍSICA**

Monografia apresentada ao Núcleo de Formação Docente, do Centro Acadêmico do Agreste, da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito para conclusão do curso de Física-Licenciatura.

Orientador: Paulo Henrique Ribeiro Peixoto

CARUARU

2014



**PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA DE DEFESA NA
DISCIPLINA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO II**

BRUNO MULLER DE CARVALHO MELO

Título

**“PÊNDULO DUPLO: SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL E
APLICAÇÃO AO ENSINO DE FÍSICA”**

A comissão examinadora composta pelos professores: PAULO HENRIQUE RIBEIRO PEIXOTO, NFD/UFPE; KÁTIA CALLIGARIS RODRIGUES, NFD/UFPE e ERNESTO ARCENIO VALDÉS RODRIGUEZ, NFD/UFPE, sob a presidência do primeiro, consideram o graduando **BRUNO MULLER DE CARVALHO MELO APROVADO.**

Caruaru, 21 de agosto de 2014.

~~JOÃO E. L. DE FREITAS~~
Coordenador do curso de Física –
Licenciatura

PAULO H. R. PEIXOTO
Orientador e 1º Examinador

KATIA C. RODRIGUES
2º Examinador

ERNESTO A. V. RODRIGUEZ
3º Examinador

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho de conclusão de graduação à minha família, em especial aos meus pais, que sempre prezaram para que eu tivesse uma boa formação, e aos meus professores e amigos de turma, que durante toda a minha formação compartilharam seus conhecimentos, tornando possível a realização de mais este sonho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por todas as oportunidades que me permitiram chegar ao final deste curso.

À minha família, isto inclui Élide Santos, que não mediram esforços para que eu sempre seguisse firme nesta caminhada.

Ao meu orientador, que, mesmo após ter me ensinado sete disciplinas, aceitou me orientar e tornou mais fácil a realização deste trabalho.

Aos meus professores, por todos os ensinamentos. Cada um deles me fez melhor como estudante e como pessoa.

A Stterferon Silva, por todo o incentivo e apoio, e a Allan César, pelos conhecimentos que me ajudaram a ingressar e concluir este curso.

Ao professor Fernando Parísio, pelo apoio na organização da aplicação do questionário para os alunos do Campus de Recife.

A todos os professores que cederam uma parte de suas aulas para que a aplicação do questionário pudesse acontecer, e a todos os alunos que participaram da pesquisa.

A todos os meus companheiros de trabalho. Em especial a Ednalva Santos, Carla Oliveira e Eliana Chagas, por permitirem que eu realizasse os estágios necessários à conclusão deste curso.

A Tito Cavalcante, por todas as dicas. Elas me ajudaram muito, principalmente na parte pedagógica do curso.

A todos os meus amigos de turma, por compartilharem seus conhecimentos e participarem na construção dos meus.

A todos que de maneira direta ou indireta contribuíram para minha formação.

RESUMO

Propomos neste trabalho a implementação de um programa que possa auxiliar professores no desenvolvimento das potencialidades intuitivas de seus alunos e um estudo para verificar se existe alguma relação entre o desenvolvimento da intuição física e o avançar dos períodos dos estudantes do curso de Física-Licenciatura, do Campus de Caruaru e do Campus de Recife, ambos da UFPE. Para isso escolhemos o pêndulo duplo como problema motivador e, usando o método de Runge-Kutta na resolução numérica das suas equações, realizamos uma simulação computacional de seu movimento. O estudo foi realizado através da aplicação de um questionário contendo perguntas com respostas fechadas e da posterior análise quantitativa dos percentuais de acerto das respostas dadas pelos estudantes. Os resultados obtidos não apresentam indícios suficientes de que os cursos de Física-Licenciatura dos campi de Caruaru e Recife, da UFPE, apresentam alguma relação entre o desenvolvimento da intuição física de seus alunos e o avanço dos períodos no curso, porém, tendo em vista que este é o primeiro estudo deste tipo realizado nos cursos citados, propomos a realização de outras pesquisas para que resultados mais conclusivos possam ser obtidos.

PALAVRAS CHAVES: desenvolvimento da intuição física, pêndulo duplo, simulação computacional.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Representação esquemática de um pêndulo duplo	16
FIGURA 2 – Situação inicial referente à sugestão 1	29
FIGURA 3 – Configuração resposta para a sugestão 1	30
FIGURA 4 – Situação inicial referente à sugestão 2	30
FIGURA 5 – Configuração resposta para a sugestão 2	31
FIGURA 6 – Situação inicial referente à sugestão 3	31
FIGURA 7 – Situação inicial referente à sugestão 4	32
FIGURA 8 – Situação inicial referente à sugestão 5	33
FIGURA 9 – Situação inicial referente à sugestão 6	33
FIGURA 10 – Situação inicial referente à sugestão 7	34
FIGURA 11 – Configuração resposta para a sugestão 7	34
FIGURA 12 – Gráfico do percentual de acertos dos Estudantes do Campus de Caruaru para a primeira parte da questão 1	36
FIGURA 13 – Gráfico do percentual de acertos dos Estudantes do Campus de Recife para a primeira parte da questão 1	37
FIGURA 14 – Gráfico do percentual de acertos dos Estudantes do Campus de Caruaru para a segunda parte da questão 1	37
FIGURA 15 – Gráfico do percentual de acertos dos Estudantes do Campus de Recife para a segunda parte da questão 1	38
FIGURA 16 – Gráfico do percentual de acertos dos Estudantes do Campus de Caruaru para o item <i>a</i> da questão 2	39
FIGURA 17 – Gráfico do percentual de acertos dos Estudantes do Campus de Recife para o item <i>a</i> da questão 2	40
FIGURA 18 – Gráfico do percentual de acertos dos Estudantes do Campus de Caruaru para o item <i>b</i> da questão 2	40
FIGURA 19 – Gráfico do percentual de acertos dos Estudantes do Campus de Recife para o item <i>b</i> da questão 2	41
FIGURA 20 – Tela inicial ao executar o programa.....	49
FIGURA 21 – tela do programa durante a simulação de movimento do pêndulo duplo	50

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Número de estudantes do Campus de Caruaru, por período, que participaram da pesquisa	15
TABELA 2 – Número de estudantes do Campus de Recife do Agreste, por período, que participaram da pesquisa	15

LISTAS DE ABREVIATURAS

CAA – Centro Acadêmico do Agreste

UFPE – Universidade Federal de Pernambuco

BGI – Borland Graphics Interface

SUMÁRIO

LISTAS DE FIGURAS	08
LISTAS DE TABELAS	09
LISTAS DE ABREVIATURAS	10
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	12
1.1. JUSTIFICATIVA E OBJETIVOS	12
1.2. METODOLOGIA.....	13
1.3. PROBLEMA UTILIZADO NA PESQUISA	16
1.4. ORGANIZAÇÃO.....	17
CAPÍTULO II - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	18
2.1. A MECÂNICA LAGRANGEANA	18
2.1.1. O PRINCÍPIO DE HAMILTON	19
2.1.2. COORDENADAS GENERALIZADAS E EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE ..	20
2.2. O MÉTODO DE RUNGE-KUTTA	21
2.2.1. O MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE PRIMEIRA ORDEM	22
2.2.2. O MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM	23
CAPÍTULO III – PÊNULO DUPLO: SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL.....	24
3.1. A SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL COMO AUXÍLIO NO ENSINO DE FÍSICA... 24	
3.2. MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O PÊNULO DUPLO.....	25
3.3. ADAPTAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DO PÊNULO DUPLO E RESOLUÇÃO ATRAVÉS DO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA	27
3.4. SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL COMO ESTÍMULO PARA O DESENVOLVIMENTODA INTUIÇÃO FÍSICA.....	29
CAPÍTULO IV- ESTUDO SOBRE DESENVOLVIMENTO DA INTUIÇÃO FÍSICA ATRAVÉS DE QUESTIONÁRIO SOBRE O PÊNULO DUPLO.....	35
4.1. RESULTADOS E DISCUSSÃO	35
CAPÍTULO V- CONSIDERAÇÕES FINAIS	42
REFERÊNCIAS	44
APÊNDICE 1	46
APÊNDICE 2	51

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Nesse capítulo apresentaremos inicialmente uma justificativa para o desenvolvimento deste trabalho. Em seguida partiremos para a metodologia desenvolvida e o objeto de estudo escolhido e finalizaremos o capítulo tratando da organização desta monografia.

1.1 JUSTIFICATIVA E OBJETIVOS

Certamente, a maioria dos alunos de graduação em Física já passou pela experiência de chegar à resposta de um problema sem a necessidade de utilizar cálculos matemáticos. Outros, ainda, após chegarem a algumas equações testam sua validade aplicando-as a alguns casos particulares e, analisando o comportamento da solução encontrada para tais casos, são capazes de inferir sobre a validade das equações encontradas. Nestas ocasiões, o aluno utiliza sua intuição¹ física para testar hipóteses e antecipar a solução do problema ou para validar suas respostas.

Ainda durante a graduação, o estudante às vezes depara-se com algumas questões que não possuem respostas no fim do livro, de forma que uma boa maneira de descobrir se sua solução pode estar certa é verificar se sua resposta é condizente com sua intuição física. O mesmo acontece, com maior frequência, em cursos de mestrado e doutorado, de maneira que um estudante que deseja ingressar em um programa de pós-graduação deve estar preparado para enfrentar tais dificuldades.

É sob esta ótica que julgamos ser de grande importância o incentivo ao desenvolvimento da intuição física dos alunos de nossas universidades e o estudo sobre esse tema, de modo a fomentar e mapear o desenvolvimento da potencialidade intuitiva dos alunos durante a sua graduação. Pensando nisso propomos, como objetivos principais, a construção

¹ Neste Trabalho o termo intuição refere-se na verdade à intuição volitiva citada em *O papel da intuição nas descobertas e invenções científicas* dos autores Celso Luis Levada, Miriam de Magalhães Oliveira Levada e Ana Laura Remédio Zeni Beretta, indicado na bibliografia deste trabalho.

de um roteiro de aula, que possa auxiliar professores no incentivo ao desenvolvimento da intuição física dos alunos, e um estudo quantitativo – realizado com os alunos do curso de Física-Licenciatura, do Centro Acadêmico do Agreste e do Campus Recife, ambos da UFPE – para investigar se existe alguma relação entre o avançar dos períodos no curso e o desenvolvimento da intuição física dos estudantes.

1.2 METODOLOGIA

Este projeto teve início no primeiro semestre de 2012, quando cursávamos a disciplina de Metodologia da Pesquisa Educacional. Naquele semestre houve a definição do orientador e a discussão inicial sobre o tema do trabalho que culminaria com a escrita desta monografia. Realizamos ainda uma divisão do projeto em etapas e construímos um cronograma com a previsão inicial sobre o tempo necessário para a conclusão de cada uma delas.

Em meados de dezembro de 2012 iniciamos a apropriação de alguns conteúdos indispensáveis para a realização deste trabalho, como o Cálculo Variacional, o Princípio de Hamilton e a Mecânica Lagrangeana. Isto foi feito através de estudo do livro *Classical Dynamics of particles and systems*².

Continuando o trabalho, demos início á modelagem matemática do problema. Esta etapa teve duração de três semanas. Nela encontramos as equações diferenciais que regem o movimento do pêndulo duplo usando os conceitos aprendidos na etapa anterior.

Após encontrar as equações diferenciais, seguimos para o estudo e a avaliação dos vários métodos computacionais que propõem a aproximação numérica das soluções de equações diferenciais ordinárias. Nesta etapa foram usados os livros *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*³ e *Equações Diferenciais*⁴, quando percebemos que os métodos numéricos encontrados para resolução de equações diferenciais ordinárias tratam das equações diferenciais de primeira ordem, de maneira que para servir a

² J.B. Marion e S.T. Thornton, **Classical Dynamics of Particles and Systems** - 5a. ed., Saunders College Publishing / 2004.

³ BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 6. ed. rev. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 1998.

⁴ ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações diferenciais**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010.

nosso propósito, que era resolver duas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem deveríamos adaptar as equações encontradas transformando-as em um sistema de equações de primeira ordem através do procedimento descrito no terceiro capítulo.

Prosseguimos para a implementação do programa para resolução numérica das equações de movimento do sistema. Esta foi a etapa mais difícil e trabalhosa deste trabalho. O principal motivo foi a dificuldade de encontrar material didático sobre o tema, e principalmente sobre a parte gráfica do DEV C++⁵. Após o término do programa iniciamos uma série de testes com o intuito de verificar se o programa estava funcionando corretamente. Como exemplo, podemos citar os testes sobre a invariância da energia do sistema (já que trata-se de um sistema livre de forças dissipativas), a comparação com outros programas desenvolvidos anteriormente e a verificação do movimento do sistema para casos particulares nos quais sabíamos como deveria ser seu comportamento.

Após o término da parte computacional, iniciamos a construção da sugestão do roteiro de aula com o uso do programa desenvolvido. Nesta etapa analisamos várias situações iniciais e quais os tipos de perguntas que poderiam ser feitas para cada situação, e escolhemos sete sugestões de situações iniciais, com uma pergunta para cada uma e suas respectivas respostas.

Finalmente, iniciamos o estudo sobre a existência ou não de uma relação entre o desenvolvimento da intuição física dos estudantes e o avançar dos períodos dos mesmos em relação ao curso.

O instrumento para coleta de dados usado nesta etapa do trabalho foi o questionário e as perguntas utilizadas foram de múltipla escolha e dicotômicas. As questões de múltipla escolha são as que permitem que o participante escolha uma entre algumas alternativas preestabelecidas. As dicotômicas também envolvem a escolha de uma alternativa, mas nesse caso existem apenas duas alternativas de valores lógicos opostos como sim e não ou verdadeiro e falso.

Este tipo de questionário é bastante objetivo, possibilita interrogar um elevado número de pessoas, exige menos tempo para recolher informações e facilita a sistematização dos resultados fornecidos e a análise dos dados.

⁵ Consulte o livro *Aprendendo a programar programando na linguagem C*, de Jaime Evaristo, indicado na bibliografia deste trabalho

O questionário foi aplicado em todos os períodos do curso de Física-Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste, e nos 1º, 3º, 5º e 7º períodos do curso de Física-Licenciatura do Campus Recife (no semestre 2014.1 havia turmas apenas para os períodos ímpares no Campus de Recife), ambos da UFPE. A aplicação ocorreu simultaneamente, no dia 7 de julho de 2014, das 20:30 às 20:50 horas, e contou com a colaboração de todos os professores que ministravam aula a cada um dos períodos neste horário.

A pesquisa contou com a participação de 129 estudantes da UFPE, sendo 39 alunos do Campus de Recife e 90 alunos do Campus de Caruaru, porém 5 alunos, do Campus de Recife, deixaram de responder o campo referente aos seus respectivos períodos, de forma que suas respostas não puderam ser consideradas e o quantitativo de alunos participantes por curso e período ficou distribuído como mostrado nas tabelas abaixo:

Tabela 1: número de estudantes do CAA, por período, participantes da pesquisa.

UFPE – CAA	
PERÍODO	Nº DE ALUNOS
1º	25
2º	21
3º	13
4º	10
5º	10
6º	3
7º	3
8º	1
9º	4

Tabela 2: número de discentes do Campus Recife, por período, participantes da pesquisa.

UFPE – CAMPUS RECIFE	
PERÍODO	Nº DE ALUNOS
1º	17
3º	9
5º	5
7º	3

1.3 PROBLEMA UTILIZADO NA PESQUISA

O sistema físico usado para o desenvolvimento deste trabalho é conhecido como pêndulo duplo. Trata-se de um sistema não-linear⁶ com dois graus de liberdade⁷ que pode ser classificado como não integrável, ou seja, embora possamos obter as equações que regem seu movimento não conseguimos encontrar sua solução analiticamente.

Como podemos visualizar na Figura 1, o pêndulo duplo é composto por dois pêndulos simples⁸ acoplados, de massas m_1 e m_2 , localizadas nas extremidades de duas hastes com comprimentos l_1 e l_2 e que formam, respectivamente, ângulos θ_1 e θ_2 com a direção vertical. Neste trabalho iremos considerar que o sistema está livre de forças dissipativas como resistência do ar e atrito e que as hastes são rígidas, possuem massas desprezíveis e estão articuladas de maneira que podem girar 360° em torno dos eixos aos quais estão conectados.

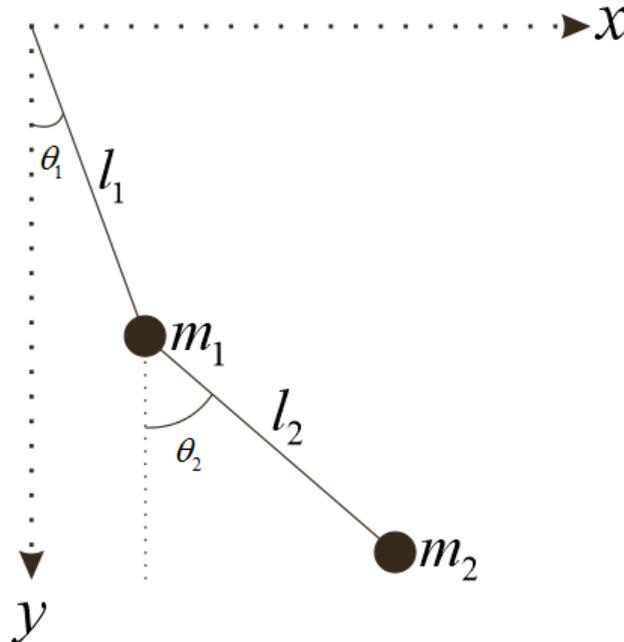


Figura 1 – representação esquemática de um pêndulo duplo

⁶ Caso necessite, consulte o livro *Classical Dynamics of Particles and Systems*, de J.B. Marion e S.T. Thornton, indicado na bibliografia deste trabalho.

⁷ Caso necessite, consulte o livro *Classical Dynamics of Particles and Systems*, de J.B. Marion e S.T. Thornton, indicado na bibliografia deste trabalho.

⁸ Uma boa explicação sobre pêndulo simples pode ser encontrada no volume 2 do livro *Fundamentos de física*, dos autores David Halliday, Robert Resnick e Jearl Walker, indicado na bibliografia deste trabalho.

Como veremos no terceiro capítulo, as equações de movimento do pêndulo duplo formam um conjunto de duas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem acopladas e, por isso, sua solução analítica torna-se inviável, de maneira que devemos recorrer à sua solução numérica para obter qualquer informação sobre o sistema. Neste trabalho uma solução numérica para as equações de movimento do pêndulo duplo, implementada em linguagem C, é apresentada no Apêndice 1. O método para resolução das equações foi o método de Runge-Kutta⁹ e os dados que devem ser fornecidos pelo usuário são as massas m_1 e m_2 dos pêndulos, os comprimentos l_1 e l_2 das hastes, os ângulos iniciais θ_{1_0} e θ_{2_0} e as velocidades angulares iniciais ω_{1_0} e ω_{2_0} .

1.4 ORGANIZAÇÃO

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos. O primeiro deles contém uma breve introdução onde apresentamos a justificativa, os objetivos, a metodologia e o problema utilizado na pesquisa.

O segundo capítulo apresenta uma pequena introdução teórica sobre o Princípio de Hamilton e a Mecânica Lagrangeana – usados neste trabalho para que possamos encontrar as equações que regem a dinâmica do pêndulo duplo – e o método de Runge-Kutta, utilizado na resolução numérica das equações encontradas.

O terceiro capítulo trata da parte computacional do projeto. Nele obtemos as equações de movimento do pêndulo duplo e mostramos como adaptá-las para que possam ser solucionadas numericamente a partir do método de Runge-Kutta. Apresentamos também neste capítulo uma sugestão de roteiro de aula com sete questões sobre o movimento do sistema e suas respectivas soluções.

No quarto capítulo apresentamos a pesquisa de campo realizada neste trabalho através de uma breve explanação sobre o questionário aplicado, suas questões, como foram corrigidas e os resultados obtidos.

O quinto capítulo apresenta uma breve conclusão desta monografia e algumas considerações que consideramos pertinentes para a realização de trabalhos futuros.

⁹ Veja descrição no capítulo 2 deste trabalho.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse Capítulo será apresentada uma breve introdução teórica necessária para o entendimento deste trabalho. Iniciamos com uma pequena discussão sobre a vantagem do uso da mecânica lagrangeana. Em seguida apresentamos o princípio de Hamilton e as equações de Lagrange e concluímos com uma pequena introdução sobre o método de Runge-Kutta.

2.1– A MECÂNICA LAGRANGEANA

A formulação newtoniana da mecânica pode tornar a resolução de um problema um tanto quanto complexa. Ela não se mostra conveniente, por exemplo, na resolução de problemas onde forças de vínculo¹⁰ se fazem presentes. Segundo Marion e Thornton (2004) em situações particulares pode ser difícil ou até mesmo impossível obter expressões matemáticas explícitas para as forças de vínculo. Nestes casos, nos deparamos com um enorme problema¹¹, já que a dinâmica de um sistema – com massa invariante – obedece à Segunda Lei de Newton

$$\vec{F} = M\vec{a}_{cm}$$

onde \vec{F} é a soma vetorial de todas as forças externas que atuam no sistema a ser investigado, M é a massa total do sistema e \vec{a}_{cm} é o vetor aceleração de seu centro de massa. Para superar essa dificuldade, podemos fazer uso de uma segunda formulação da mecânica chamada de Mecânica de Lagrange¹² ou mecânica lagrangeana. Ela nos permite determinar o comportamento dinâmico de vários sistemas sabendo apenas a forma das suas energias cinética e potencial de maneira que, inicialmente, podemos dispensar o estudo das forças atuantes no sistema analisado.

¹⁰ Caso necessite, consulte o livro *Classical Dynamics of Particles and Systems*, de J.B. Marion e S.T. Thornton, indicado na bibliografia deste trabalho.

¹¹ Não conseguimos obter uma expressão para a força total, já que não sabemos expressar as forças de vínculo.

¹² Joseph Louis Lagrange (1736-1813) matemático e físico-matemático italiano conhecido principalmente pelo desenvolvimento do cálculo variacional e pela introdução deste à mecânica.

A mecânica Lagrangeana pode ser formulada a partir de um princípio minimal chamado princípio de Hamilton¹³.

2.1.1 – O PRINCÍPIO DE HAMILTON

Os princípios minimais possuem grande destaque na descrição física dos fenômenos naturais. Eles têm origem na suposição de que a natureza minimiza certas quantidades físicas quando um fenômeno ocorre. O primeiro a propor um desses princípios foi Heron de Alexandria¹⁴, que conseguiu explicar a igualdade entre os ângulos de incidência e reflexão da luz através de um espelho plano propondo que, em um meio homogêneo, a luz sempre segue o caminho mais curto. Mais tarde Pierre de Fermat¹⁵ reformulou este princípio propondo que a luz minimiza o tempo de viagem entre dois pontos quaisquer e com isso conseguiu explicar não apenas a lei de reflexão por um espelho plano, mas também a lei da refração de Snell¹⁶.

Segundo Marion e Thornton (2004) o princípio de Hamilton – enunciado em dois artigos publicados nos anos de 1834 e 1835 – pode ser enunciado da seguinte maneira:

De todos os possíveis caminhos¹⁷ ao longo dos quais um sistema dinâmico pode mover-se de um ponto a outro num intervalo de tempo especificado (consistente com qualquer vínculo) o caminho real seguido é aquele que minimiza a integral temporal da diferença entre as energias cinética e potencial.

A integral definida no princípio de Hamilton, chamada de ação por alguns autores, é definida como

¹³ Willian Rowan Hamilton (1805-1865), matemático e físico irlandês, estudou ótica, dinâmica e álgebra. Em física é conhecido por seu trabalho em mecânica analítica, que posteriormente tornou-se muito importante para a mecânica quântica.

¹⁴ Mais informações sobre Heron e seus trabalhos podem ser encontradas em *Princípios da óptica geométrica e suas exceções: Heron e a reflexão em espelhos*, de R. A. Martins e A. P. B. Silva, indicado na bibliografia deste trabalho.

¹⁵ Pierre de Fermat (1601-1665), matemático francês, influenciou bastante o desenvolvimento da Geometria Analítica, álgebra e teoria dos números. Ficou mundialmente famoso pelo chamado *último teorema de Fermat*. Em física é conhecido pelo princípio do tempo mínimo.

¹⁶ Willebrord Van Roijen Snell (1591-1626), matemático holandês, famoso pela descoberta da lei da refração que recebeu seu nome. Criou o método de triangulação trigonométrica usado ainda hoje em mapeamentos topográficos (inclusive mapeamentos com auxílio de satélites).

¹⁷ Segundo Marion e Thornton (2004) – seção 7.3 – a palavra caminho significa um conjunto de pontos no espaço de configuração e não no espaço tridimensional que estamos acostumados.

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (1)$$

onde

$$L \equiv T - U \quad (2)$$

é a chamada lagrangeana do sistema – diferença entre as energias cinética (T) e potencial (U).

2.1.2 – COORDENADAS GENERALIZADAS E EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE

Para poder estudar o movimento de um sistema qualquer existe a necessidade de adotar um sistema de referência – já que alguns conceitos como posição e trajetória apenas fazem sentido quando relacionados a um referencial – e definir algumas variáveis que permitam localizar o sistema estudado em cada instante de tempo (estas variáveis são chamadas coordenadas). Chamamos de coordenadas generalizadas – comumente representadas por q_j – um conjunto qualquer de coordenadas, mesmo que não tenham unidades de comprimento, com as quais podemos especificar, para qualquer instante de tempo, as posições das partículas de um sistema. Lembrando que as energias potencial e cinética são, respectivamente, funções das posições e velocidades, e usando agora o conceito de coordenadas generalizadas e suas derivadas temporais, podemos escrever a equação (1) como

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L\{q_j(t), \dot{q}_j(t); t\} dt, \text{ com } j = 1, 2, 3, \dots n \quad (3)$$

onde o ponto acima da variável q_j representa sua derivada com respeito ao tempo e o ponto e vírgula no argumento da lagrangeana separa a variável independente t das variáveis dependentes e suas derivadas.

Através do cálculo variacional¹⁸ é possível mostrar que a integral acima assume um valor extremo – que no caso da ação geralmente é um mínimo – quando a lagrangeana obedece a um conjunto de equações chamadas de equações de Euler¹⁹-Lagrange:

¹⁸ Caso necessite, o leitor poderá obter uma boa explicação sobre cálculo variacional consultando o livro *Classical Dynamics of Particles and Systems*, de J.B. Marion e S.T. Thornton, indicado na bibliografia deste trabalho.

¹⁹ Leonhard Euler (1707-1783), brilhante matemático suíço, contribuiu para a teoria dos grafos, mecânica, ótica, teoria dos números, astronomia, cálculo diferencial e integral, cálculo de variações, funções especiais, equações diferenciais ordinárias e parciais e teoria de funções. Introduziu a função gama e a resolução de equações diferenciais pelo método dos fatores integrantes. Na área de equações diferenciais trabalhou com equações lineares de coeficientes constantes, equações de segunda ordem com coeficientes variáveis, solução de equações por série de potências, fatores integrantes e solucionou a equação de Bessel.

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0, \text{ onde } j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4)$$

Este conjunto de equações possui, para a mecânica lagrangeana, a mesma importância que a equação $\vec{F} = M\vec{a}_{cm}$ tem para a mecânica newtoniana. Elas fornecem n equações diferenciais – uma para cada coordenada do sistema analisado – que quando resolvidas fornecem a posição dos constituintes do sistema a cada instante de tempo.

2.2 – O MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

Dentre os métodos numéricos encontrados na literatura que produzem aproximações para soluções de equações diferenciais, um dos mais populares é o chamado método de Runge-Kutta, que tem esse nome graças a dois alemães chamados Carl David Runge²⁰ e Martin Wilhelm Kutta²¹. Existem na verdade vários desses métodos, que são chamados de métodos de Runge-Kutta de 1ª, 2ª, 3ª, ..., k -ésima ordem. O mais usado deles – por possuir simples implementação, baixo esforço computacional e erro muito pequeno em relação à solução da equação diferencial analisada – é o de quarta ordem. Os métodos de Runge-Kutta consistem basicamente na aproximação da solução da equação diferencial analisada por um polinômio de Taylor²² até o termo de ordem k . Usaremos, em capítulo posterior, para resolução das equações diferenciais que regem o movimento do pêndulo duplo, o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, mas a título de ilustração mostraremos agora como encontrar a fórmula de iteração para o método de primeira ordem e como devemos generalizar o procedimento para métodos de ordem qualquer.

²⁰ Carl David Runge (1856-1927), matemático e físico alemão, trabalhou durante muitos anos em espectroscopia. A análise de dados levou-o a investigar os problemas da computação numérica e o método de Runge-Kutta originou-se de um artigo sobre a resolução numérica de equações diferenciais, em 1895. O método foi estendido a sistemas de equações em 1901 por Kutta.

²¹ Martin Wilhelm Kutta, (1867-1944), matemático e engenheiro alemão, é bastante conhecido por suas contribuições à teoria clássica de aerofólios.

²² Brook Taylor (1685-1731), matemático inglês, foi um dos fundadores do cálculo de diferenças finitas e um dos primeiros a usá-lo em interpolação e somatório de séries. É muito conhecido pela chamada série de Taylor. Para mais informações sobre série de Taylor consulte STEWART (2011).

2.2.1 – O MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE PRIMEIRA ORDEM

Podemos escrever um polinômio de Taylor para uma função $y(x)$, em torno de um ponto x_0 , da seguinte maneira:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0) \frac{(x-x_0)}{1!} + y''(x_0) \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + y^k(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!} + \dots \quad (5)$$

Porém, como buscamos um método iterativo (a ser usado na implementação de um programa), devemos substituir x_0 por x_n e x por $x_{n+1} = x_n + h$, de maneira que a equação (5) se torna:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + y'(x_n)h + y''(x_n) \frac{h^2}{2!} + \dots + y^k(x_n) \frac{h^k}{k!} + \dots, \quad (6)$$

onde h é um pequeno incremento na variável x .

Os métodos de Runge-Kutta buscam aproximações para equações do tipo

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (7)$$

sujeitas à condição inicial

$$y(x_0) = y_0, \quad (8)$$

portanto, nossa tarefa é buscar uma função do tipo

$$y(x_n + h) = y(x_n) + h\varphi(x_n, y_n; h) \quad (9)$$

que coincida com um polinômio de Taylor de ordem 1. Fazendo $k = 1$ na equação (6), obtemos

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n). \quad (10)$$

Portanto, igualando as equações (9) e (10) obtemos

$$\varphi(x_n, y_n; h) = y'(x_n),$$

de onde concluímos que a fórmula de iteração para o método de Runge-Kutta de primeira ordem é a própria equação (10).

Para encontrar a fórmula de iteração para os métodos de ordem $k > 1$ usamos o mesmo desenvolvimento ilustrado acima: primeiro, através da fórmula (6), encontramos um polinômio de Taylor de ordem k e posteriormente buscamos uma função do tipo

$$y(x_n + h) = y(x_n) + h\varphi(x_n, y_n; h)$$

que coincida com o polinômio encontrado.

2.2.2 – O MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

No caso do método de Runge-Kutta de quarta ordem precisa-se determinar constantes apropriadas para que uma fórmula do tipo

$$y(x_n + h) = y(x_n) + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4,$$

onde $a, b, c,$ e d são constantes e k_1, k_2, k_3 e k_4 são funções de x_n e $y(x_n)$, coincida com um polinômio de Taylor até o termo de grau quatro (ZILL, D. G. e CULLEN, M. R., 2001), ou seja, com um polinômio do tipo

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_n).$$

Segundo ZILL e CULLEN (2001), a obtenção dessas constantes é, no mínimo, trabalhosa²³ e possui os seguintes resultados:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (11)$$

onde

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad (12)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right), \quad (13)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right), \quad (14)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3), \quad (15)$$

com $f = \frac{dy}{dx}$, como na equação (7).

²³ Uma boa descrição sobre uma maneira de obter estas equações (não se tratando de deduções completas) pode ser encontrada em VALLE (2012).

CAPÍTULO III

PÊNULO DUPLO: SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

Iniciaremos este capítulo apresentando alguns problemas enfrentados por professores e alunos que justificam o uso da simulação computacional como auxílio no processo de ensino-aprendizagem de física. Em seguida, encontraremos as equações diferenciais que governam o movimento do pêndulo duplo e procederemos com a adaptação de tais equações para que possam ser solucionadas pelo método numérico de Runge–Kutta. Por fim, mostraremos algumas possibilidades de uso do programa como auxílio para professores e alunos em uma discussão qualitativa sobre o movimento do pêndulo duplo.

3.1- A SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL COMO AUXÍLIO NO ENSINO DE FÍSICA

O ensino da Física, bem como sua aprendizagem, não tem se mostrado tarefa fácil para grande quantidade dos professores e alunos tanto na Educação Básica quanto na Educação Superior. Um dos motivos para tais problemas é a necessidade de lidar com fenômenos inacessíveis experimentalmente, que exigem uma alta dose de abstração e são descritos com elevada complexidade matemática (MEDEIROS, A. e MEDEIROS, C. F., 2002). Na tentativa de minimizar tais dificuldades alguns professores e autores de livros didáticos tem frequentemente recorrido ao uso de ilustrações. Existe, porém, um grande problema em representar fenômenos dinâmicos através de imagens estáticas e para contorná-lo tem sido utilizados alguns recursos como imagens sequenciadas para representar o sistema analisado em diferentes instantes de tempo ou imagens com linhas tracejadas para simbolizar movimentos e trajetórias, mas mesmo esses tipos de ilustração exigem um certo grau de abstração por parte dos alunos (MEDEIROS, A. e MEDEIROS, C. F., 2002). Eles devem ser capazes de imaginar a evolução dinâmica do sistema físico através dessas imagens e isso muitas vezes pode se tornar uma tarefa difícil para aqueles que não possuem conhecimento prévio do fenômeno em questão.

Uma boa alternativa para toda essa problemática é a simulação computacional. Sua principal característica é o alto grau de interatividade com o aprendiz, já que a simulação pode ser realizada a partir de parâmetros fornecidos pelo próprio estudante. Imagine por exemplo um aluno que estuda o lançamento de um projétil. Através de uma simulação computacional ele poderia escolher variar o ângulo de lançamento ou a velocidade inicial e analisar como o movimento do projétil mudará de acordo com a mudança de cada um desses parâmetros.

Neste trabalho recorreremos à simulação computacional como auxílio para a resolução do sistema de equações diferenciais relacionadas à dinâmica do pêndulo duplo. Para este caso, a simulação computacional faz-se necessária, pois, como veremos a seguir, as equações que regem o movimento do sistema analisado possuem resolução analítica inviável.

3.2- MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O PÊNDULO DUPLO

Para obtermos as equações que regem a dinâmica do pêndulo duplo devemos inicialmente encontrar a sua lagrangeana e posteriormente substituí-la nas equações de Euler-Lagrange. Para isso analisamos a Figura 1 (página 13), de onde podemos observar que:

$$\begin{aligned}x_1 &= l_1 \operatorname{sen} \theta_1, \\y_1 &= l_1 \operatorname{cos} \theta_1, \\x_2 &= l_1 \operatorname{sen} \theta_1 + l_2 \operatorname{sen} \theta_2, \\y_2 &= l_1 \operatorname{cos} \theta_1 + l_2 \operatorname{cos} \theta_2,\end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \operatorname{cos} \theta_1, \\ \dot{y}_1 &= -l_1 \dot{\theta}_1 \operatorname{sen} \theta_1, \\ \dot{x}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \operatorname{cos} \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \operatorname{cos} \theta_2, \\ \dot{y}_2 &= -l_1 \dot{\theta}_1 \operatorname{sen} \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \operatorname{sen} \theta_2.\end{aligned}$$

Portanto, as energias cinéticas para as massas m_1 e m_2 são, respectivamente,

$$T_1 = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2, \quad (16)$$

$$T_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2} [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)], \quad (17)$$

e suas energias potenciais são

$$U_1 = -m_1 g l_1 \cos \theta_1, \quad (18)$$

$$U_2 = -m_1 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2). \quad (19)$$

Desta maneira, como a lagrangeana do sistema é dada por

$$L = T - U = (T_1 + T_2) - (U_1 + U_2), \quad (20)$$

temos que

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 + m_2 l_2 \cos \theta_2. \quad (21)$$

Substituindo a equação (21) na equação (4), para $q_1 = \theta_1$ e $q_2 = \theta_2$, obtemos finalmente as equações do movimento do sistema. São elas:

$$m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g \sin \theta_1 + (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0, \quad (22)$$

$$l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g \sin \theta_2 - l_2 \ddot{\theta}_2 - l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0. \quad (23)$$

Observando as equações acima percebemos que são equações diferenciais ordinárias de segunda ordem acopladas, e possuem solução analítica inviável, de maneira que devemos recorrer a uma solução numérica. Para isso, reescreveremos as equações (22) e (23) nas seguintes formas, respectivamente:

$$\ddot{\theta}_1 = [-m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) + g m_2 \sin \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g \sin \theta_1] / [(m_1 + m_2) l_1 - m_2 l_1 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)], \quad (24)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \{(m_1 + m_2)[g \sin \theta_2 - l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g \sin \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)] - m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)\} / [m_2 l_2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) l_2]. \quad (25)$$

Mas o método de Runge-Kutta foi desenvolvido para solução de equações diferenciais de primeira ordem, de maneira que para usá-lo devemos transformar as equações (24) e (25) em um conjunto de equações de primeira ordem como a seguir²⁴.

3.3- ADAPTAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DO PÊNULO DUPLO E RESOLUÇÃO ATRAVÉS DO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA.

Através da definição das variáveis auxiliares

$$Z_1 \equiv \dot{\theta}_1,$$

$$Z_2 \equiv \dot{\theta}_2,$$

podemos transformar as equações (24) e (25), que são, respectivamente, equações dos tipos

$$\ddot{\theta}_1 = f(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2), \quad (27)$$

$$\ddot{\theta}_2 = g(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2), \quad (28)$$

no seguinte sistema de equações de primeira ordem:

$$\begin{cases} Z_1 = \dot{\theta}_1, \\ Z_2 = \dot{\theta}_2, \\ \dot{Z}_1 = f(\theta_1, \theta_2, Z_1, Z_2), \\ \dot{Z}_2 = g(\theta_1, \theta_2, Z_1, Z_2). \end{cases}$$

Para solucionar este sistema devemos definir um conjunto de funções como o que está representado nas equações de (11) a (15) para cada uma das quatro variáveis acima, de maneira que teremos um conjunto com vinte funções a serem inseridas no arquivo para implementação. Nessas funções, que são mostradas abaixo, f e g são definidas como nas equações (27) e (28):

$$k_{1n} = f(\theta_{1n}, \theta_{2n}, Z_{1n}, Z_{2n}); \quad (29)$$

$$j_{1n} = g(\theta_{1n}, \theta_{2n}, Z_{1n}, Z_{2n}); \quad (30)$$

²⁴ Caso tenha alguma dúvida consulte *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*, de Boyce e Diprima, citado nas referências deste trabalho.

$$k_{2n} = f\left(\theta_{1n} + \frac{h}{2}\left(Z_{1n} + \frac{h}{2}k_{1n}\right), \theta_{2n} + \frac{h}{2}\left(Z_{2n} + \frac{h}{2}j_{1n}\right), Z_{1n} + \frac{h}{2}k_{1n}, Z_{2n} + \frac{h}{2}j_{1n}\right); \quad (31)$$

$$j_{2n} = g\left(\theta_{1n} + \frac{h}{2}\left(Z_{1n} + \frac{h}{2}k_{1n}\right), \theta_{2n} + \frac{h}{2}\left(Z_{2n} + \frac{h}{2}j_{1n}\right), Z_{1n} + \frac{h}{2}k_{1n}, Z_{2n} + \frac{h}{2}j_{1n}\right); \quad (32)$$

$$k_{3n} = f\left(\theta_{1n} + \frac{h}{2}\left(Z_{1n} + \frac{h}{2}k_{2n}\right), \theta_{2n} + \frac{h}{2}\left(Z_{2n} + \frac{h}{2}j_{2n}\right), Z_{1n} + \frac{h}{2}k_{2n}, Z_{2n} + \frac{h}{2}j_{2n}\right); \quad (33)$$

$$j_{3n} = g\left(\theta_{1n} + \frac{h}{2}\left(Z_{1n} + \frac{h}{2}k_{2n}\right), \theta_{2n} + \frac{h}{2}\left(Z_{2n} + \frac{h}{2}j_{2n}\right), Z_{1n} + \frac{h}{2}k_{2n}, Z_{2n} + \frac{h}{2}j_{2n}\right); \quad (34)$$

$$k_{4n} = f(\theta_{1n} + h(Z_{1n} + hk_{3n}), \theta_{2n} + h(Z_{2n} + hj_{3n}), Z_{1n} + hk_{3n}, Z_{2n} + hj_{3n}); \quad (35)$$

$$j_{4n} = g(\theta_{1n} + h(Z_{1n} + hk_{3n}), \theta_{2n} + h(Z_{2n} + hj_{3n}), Z_{1n} + hk_{3n}, Z_{2n} + hj_{3n}); \quad (36)$$

$$p_{1n} = Z_{1n}; \quad (37)$$

$$o_{1n} = Z_{2n}; \quad (38)$$

$$p_{2n} = Z_{1n} + \frac{h}{2}k_{1n}; \quad (39)$$

$$o_{2n} = Z_{2n} + \frac{h}{2}j_{1n}; \quad (40)$$

$$p_{3n} = Z_{1n} + \frac{h}{2}k_{2n}; \quad (41)$$

$$o_{3n} = Z_{2n} + \frac{h}{2}j_{2n}; \quad (42)$$

$$p_{4n} = Z_{1n} + hk_{3n}; \quad (43)$$

$$o_{4n} = Z_{2n} + hj_{3n}; \quad (44)$$

$$\theta_{1(n+1)} = \theta_{1n} + \frac{h}{6}(k_{1n} + 2k_{2n} + 2k_{3n} + k_{4n}); \quad (45)$$

$$\theta_{2(n+1)} = \theta_{2n} + \frac{h}{6}(j_{1n} + 2j_{2n} + 2j_{3n} + j_{4n}); \quad (46)$$

$$Z_{1(n+1)} = Z_{1n} + \frac{h}{6}(p_{1n} + 2p_{2n} + 2p_{3n} + p_{4n}); \quad (47)$$

$$Z_{2(n+1)} = Z_{2n} + \frac{h}{6}(o_{1n} + 2o_{2n} + 2o_{3n} + o_{4n}); \quad (48)$$

3.4- SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL COMO ESTÍMULO PARA O DESENVOLVIMENTO DA INTUIÇÃO FÍSICA

Um programa, escrito em linguagem C, desenvolvido para a resolução do sistema de equações acima, pode ser encontrado no Apêndice 1. Ele pode ser usado para auxiliar professores e alunos no estudo do movimento do pêndulo duplo sem atrito. Uma possibilidade é usá-lo como fator estimulante no desenvolvimento da intuição física dos alunos. Para isso o professor poderá, por exemplo, apresentar um conjunto de condições iniciais e estimular os alunos a pensarem sobre como será o movimento do sistema e posteriormente apresentar e discutir a resposta correta com o uso do programa. Apresentamos abaixo algumas possibilidades.

- Sugestão 1

Os pêndulos possuem massas iguais, hastes de mesmo comprimento e partem do repouso formando, respectivamente, ângulos iniciais de 180° e 160° , como na Figura 2. Como estará o sistema depois de passado um intervalo de tempo pequeno, mas suficiente para que o sistema saia de sua configuração inicial?

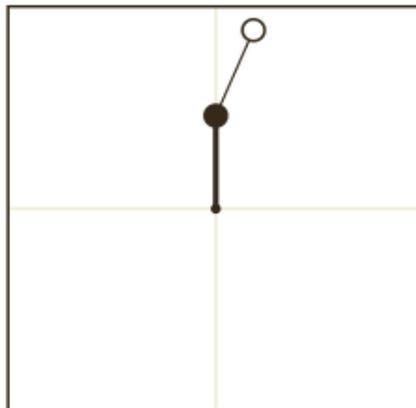


Figura 2 – situação inicial referente à sugestão 1.

Neste caso podemos ver que o segundo pêndulo possui tendência para girar para a direita e, como seu ponto de apoio é o primeiro pêndulo, ao girar para a direita o segundo imprime no primeiro uma força que faz com que o primeiro gire para a esquerda. Para conferir a resposta inserimos no programa as condições iniciais $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$,

$l_1 = l_2 = 1 \text{ m}$, $\theta_1 = 180^\circ$, $\theta_2 = 160^\circ$ e $\omega_1 = \omega_2 = 0$, e vemos a seguinte configuração, apresentada na Figura 3.

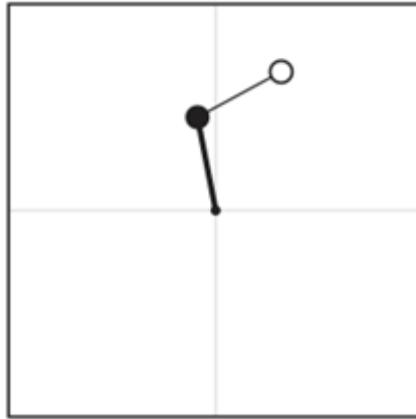


Figura 3 – configuração resposta para a sugestão 1.

- Sugestão 2

Os pêndulos possuem massas iguais, hastes de mesmo comprimento e partem do repouso formando ângulos iguais a 80° , como na Figura 4. Qual será a configuração do sistema após um pequeno intervalo de tempo, suficiente para que uma mudança apreciável na configuração possa ocorrer?

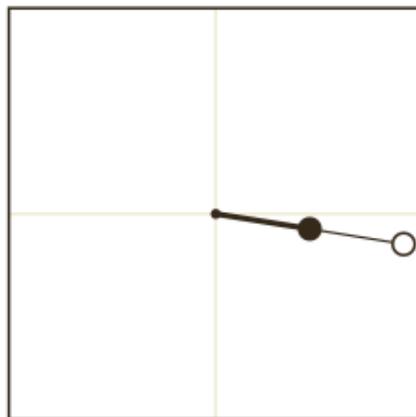


Figura 4 – situação inicial referente à sugestão 2.

A resposta novamente tem a ver com o ponto de suspensão do segundo pêndulo. Como o ponto de suspensão do segundo pêndulo é o primeiro, tanto o segundo pêndulo quanto o seu ponto de apoio giram juntos no sentido horário e isso faz com que o segundo pêndulo gire mais lentamente que o primeiro. Inserindo no programa as condições iniciais

$m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$, $l_1 = l_2 = 1 \text{ m}$, $\theta_1 = \theta_2 = 80^\circ$ e $\omega_1 = \omega_2 = 0$, obtemos a configuração apresentada na figura 5.

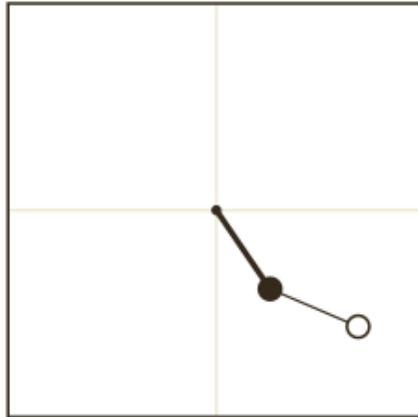


Figura 5 – configuração resposta para a sugestão 2.

- Sugestão 3

O primeiro pêndulo possui massa muito maior que o segundo e os dois partem do repouso com ângulos iguais a 60° . O que podemos afirmar sobre o movimento do sistema?

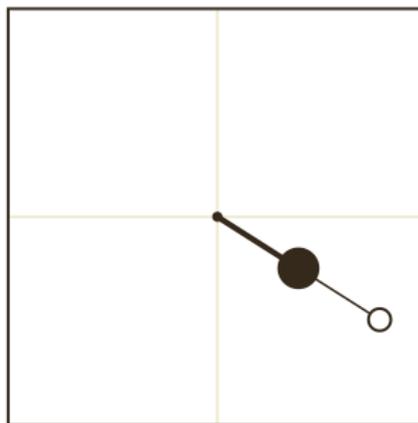


Figura 6 – situação inicial referente à sugestão 3.

A resposta é que o primeiro pêndulo possuirá movimento semelhante ao de um pêndulo simples, pois como a massa do segundo pêndulo é muito menor que a do primeiro, ele não possui inércia suficiente para causar uma mudança significativa no movimento do primeiro. Podemos verificar isto inserindo no programa as seguintes condições iniciais: $m_1 = 100 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$, $l_1 = l_2 = 1 \text{ m}$, $\theta_1 = \theta_2 = 60^\circ$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

- Sugestão 4

O primeiro pêndulo possui massa muito menor que a do segundo e os dois partem do repouso a partir de ângulos iguais a 60° . O que podemos afirmar sobre o movimento do sistema?

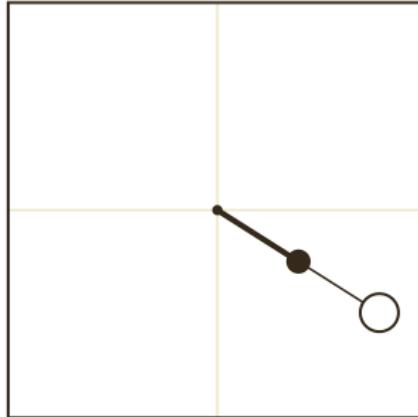


Figura 7 – situação inicial referente à sugestão 4.

Novamente temos que, como na sugestão 2, no início do movimento o segundo pêndulo tende a girar mais lentamente que o primeiro. Porém, neste caso o primeiro pêndulo encontrará uma grande resistência graças à grande inércia do segundo e não conseguirá influenciar no seu movimento. O resultado é que o primeiro pêndulo possuirá um movimento oscilatório e não periódico enquanto o segundo oscilará como um pêndulo simples de comprimento $l_1 + l_2$. Verificamos tal comportamento inserindo no programa as seguintes condições iniciais: $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 100 \text{ kg}$, $l_1 = l_2 = 1 \text{ m}$, $\theta_1 = \theta_2 = 60^\circ$ e $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

- Sugestão 5

Observe a Figura 8. Sabendo que o primeiro pêndulo possui massa muito maior que a do segundo e que os dois se encontram em repouso a ângulos de 0° quando o segundo sofre uma violenta pancada na direção horizontal, representada pela seta, descreva o movimento do sistema após a pancada.

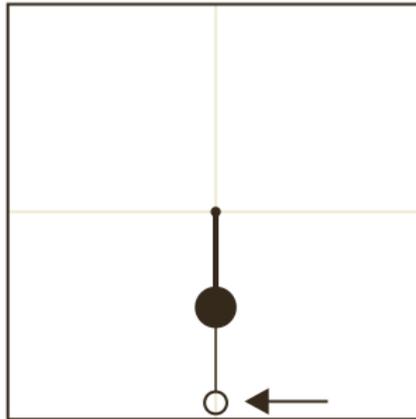


Figura 8 – situação inicial referente à sugestão 5.

Mais uma vez, graças à grande diferença entre as massas, o segundo pêndulo não possui inércia suficiente para alterar consideravelmente o estado de repouso do primeiro, que permanece praticamente imóvel, enquanto o segundo passa a realizar um movimento circular em torno do primeiro. Neste caso podemos inserir no programa as condições iniciais $m_1 = 100 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$, $l_1 = l_2 = 1 \text{ m}$, $\theta_1 = \theta_2 = 0$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 100 \text{ rad/s}$.

- Sugestão 6

Descreva o movimento do sistema, mostrado na Figura 9, sabendo que o primeiro pêndulo possui massa muito menor que a do segundo e que ambos estão em repouso a ângulos de 0° quando o primeiro sofre uma violenta pancada na direção horizontal, representada pela seta.

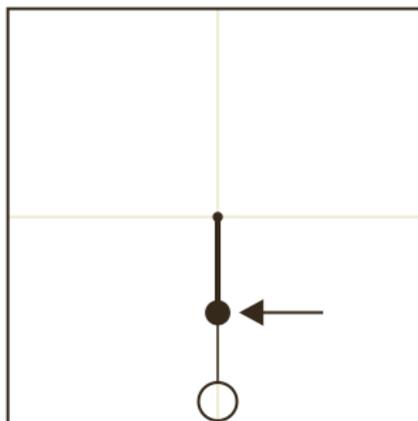


Figura 9 – situação inicial referente à sugestão 6.

O movimento do primeiro pêndulo, nesse caso, novamente não irá causar mudança significativa no estado do segundo, que permanece praticamente imóvel enquanto o primeiro realiza um movimento oscilatório em torno de seu ponto inicial. Podemos inserir as condições

iniciais $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 100 \text{ kg}$, $l_1 = l_2 = 1 \text{ m}$, $\theta_1 = \theta_2 = 0$, $\omega_1 = 100 \text{ rad/s}$ e $\omega_2 = -100 \text{ rad/s}$ para verificar tal comportamento.

- Sugestão 7

Considere que dois pêndulos idênticos em massa e comprimento de haste são abandonados a ângulos iguais a 90° como ilustramos na Figura 10. O que podemos afirmar sobre o estado do sistema após passado um intervalo de tempo pequeno mas suficiente para o sistema sair de sua configuração inicial?

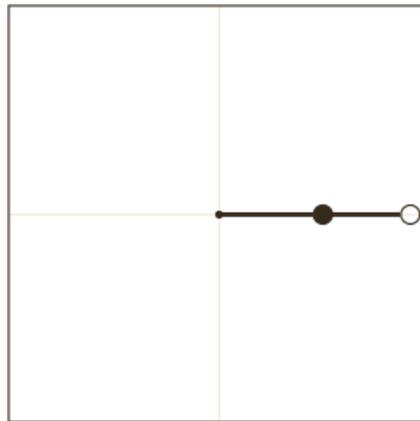


Figura 10 – situação inicial referente à sugestão 7.

Sabemos que a força de gravidade age da mesma maneira nas duas massas, portanto, no início do movimento, quando a força de vínculo ainda não alterou consideravelmente o movimento vertical do primeiro pêndulo, os dois pêndulos terão percorrido distâncias verticais idênticas de maneira que o sistema estará na posição indicada na Figura 9. Para verificação inserimos em nosso programa as condições: $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$, $l_1 = l_2 = 1 \text{ m}$, $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$ e $\omega_1 = \omega_2 = 0$. A resposta está na Figura 11.

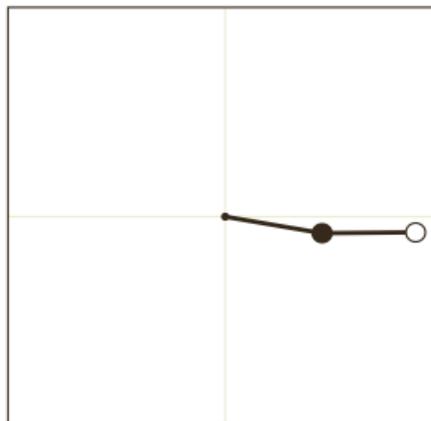


Figura 11 – configuração resposta para a sugestão 7.

CAPÍTULO IV

ESTUDO SOBRE DESENVOLVIMENTO DA INTUIÇÃO FÍSICA ATRAVÉS DE QUESTIONÁRIO SOBRE O PÊNDULO DUPLO

Neste capítulo será apresentada a pesquisa de campo realizada neste trabalho. Iniciaremos com uma breve explanação sobre o questionário aplicado, passando pelas questões nele contidas e como foram corrigidas. Apresentaremos também os resultados obtidos e finalizaremos apresentando algumas sugestões para trabalhos futuros.

4.1- RESULTADOS E DISCUSSÃO

O questionário apresentado aos alunos pode ser visto no Apêndice 2. Ele contém duas páginas e é composto por três partes. A primeira delas contém todas as informações que julgamos necessárias para que os estudantes pudessem responder a todas as questões apresentadas. A segunda permite a identificação do campus da UFPE ao qual o estudante está vinculado, qual o período letivo que o mesmo está cursando, se ele já viu ou analisou de alguma maneira o movimento de um pêndulo duplo e, principalmente, se o mesmo soube anteriormente da aplicação do questionário. A terceira parte refere-se à pesquisa propriamente dita. Nela encontramos as questões relativas ao movimento do pêndulo duplo.

QUESTÃO 01

A primeira questão apresenta seis afirmativas referentes ao movimento de um pêndulo duplo que está inicialmente em repouso quando recebe uma violenta pancada, em seu segundo disco, na direção horizontal. Nesta questão, é pedido que o estudante decida sobre a validade de cada uma das afirmativas apresentadas assinalando V para as que julgar

verdadeiras e F para as que considerar falsas. Com o intuito de evitar possíveis acertos por chute, a primeira questão foi dividida em dois blocos com três alternativas interrelacionadas de tal forma que a terceira alternativa de cada bloco depende da resposta das duas alternativas anteriores. Respostas brancas ou nulas também obedeceram à correção feita por bloco, de maneira que uma resposta foi considerada branca apenas quando o estudante não marcou nenhuma das três primeiras ou das três últimas alternativas, e considerada nula quando continha respostas rasuradas, com mais de uma marcação por alternativa ou incompleta. Apresentaremos a seguir os gráficos com os dados obtidos. O número acima de cada barra é a quantidade de participantes do questionário, no respectivo período.

A Figura 12, mostrada abaixo, apresenta a porcentagem de acertos dos estudantes do Campus de Caruaru para o primeiro bloco da primeira questão. Neste bloco as respostas corretas seriam, respectivamente, falso, verdadeiro, falso.

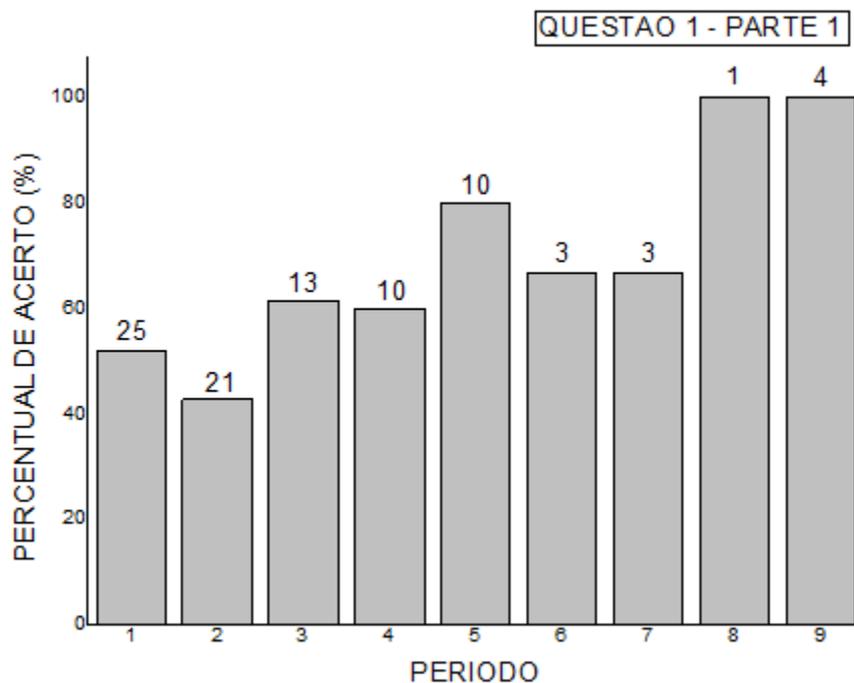


Figura 12 - gráfico do percentual de acertos dos estudantes do Campus de Caruaru para a primeira parte da questão 1.

A Figura 13 representa o percentual de acertos das respostas dadas pelos alunos do Campus de Recife para o bloco 1 da primeira questão.

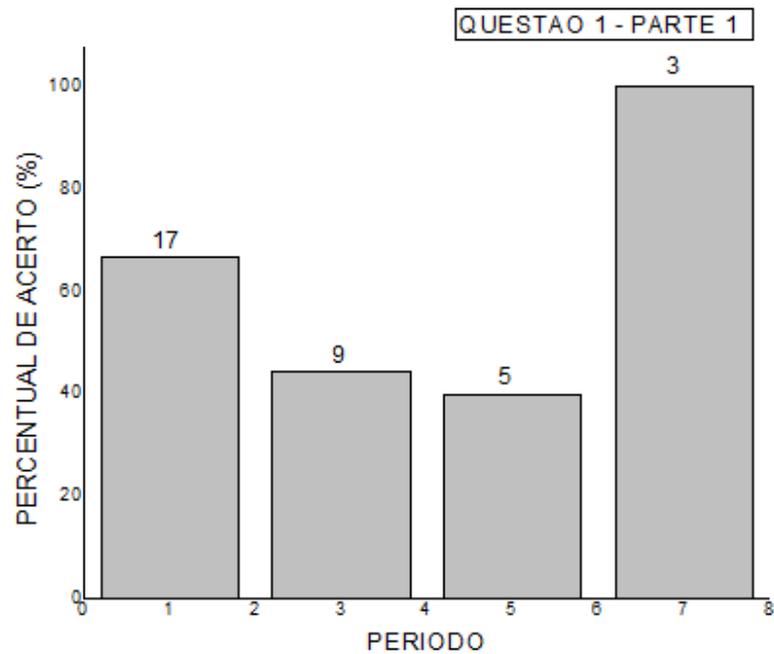


Figura 13 - gráfico do percentual de acertos dos estudantes do Campus de Recife para a primeira parte da questão 1.

Os resultados para a parte 2 da questão 1 são mostrados nas Figura 14 e 15. Elas representam respectivamente o percentual de acertos dos alunos do Campus de Caruaru e do Campus de Recife. Neste caso a sequência correta seria verdadeiro, falso, falso.

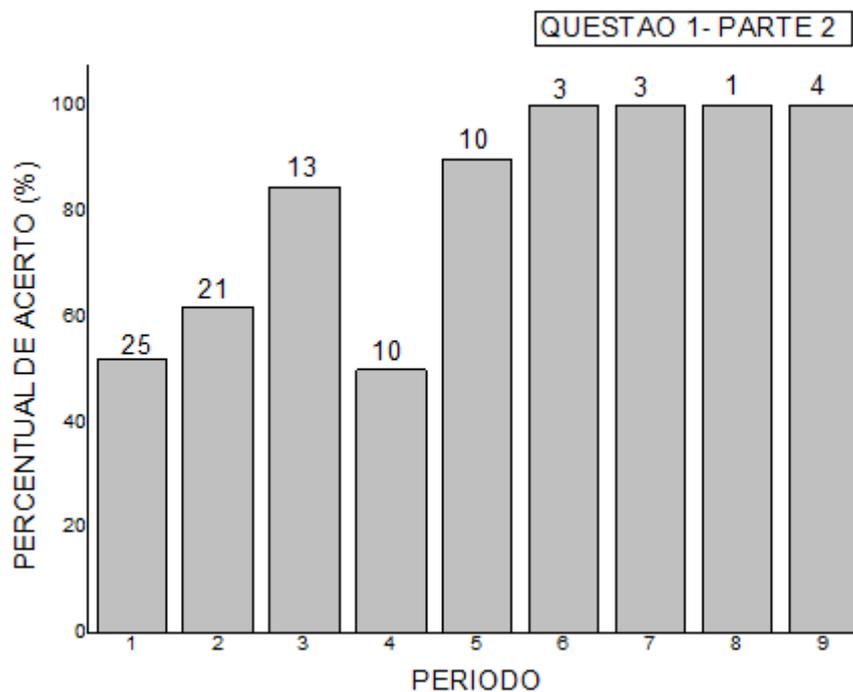


Figura 14 - gráfico do percentual de acertos dos estudantes do Campus de Caruaru para a segunda parte da questão 1.

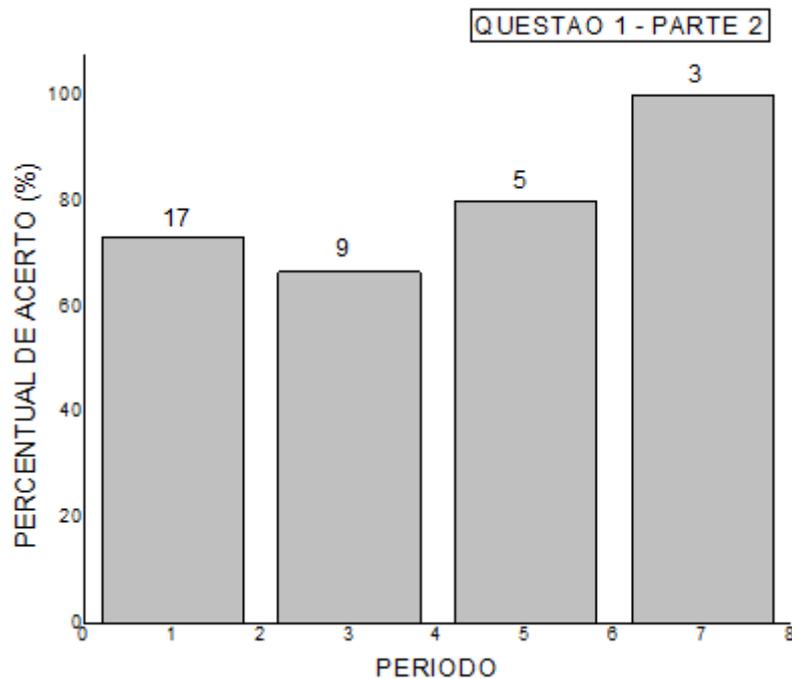


Figura 15 - gráfico do percentual de acertos dos estudantes do Campus de Recife para a segunda parte da questão 1.

Um fato interessante que pode ser observado é que se compararmos a média do percentual de acerto dos alunos dos cinco primeiros períodos com a média dos alunos dos cinco últimos, no caso dos estudantes do Campus de Caruaru, ou a média do percentual de acertos dos alunos do primeiro e do terceiro períodos com a média do dos alunos do quinto e do sétimo períodos, no caso dos estudantes do Campus de Recife, podemos observar que houve um aumento significativo em todos os gráficos acima, da primeira para a segunda metade do curso. No gráfico da Figura 12 a média de acertos dos estudantes dos períodos 1 a 5 foi de 59,28% e a média dos períodos 5 a 9 foi de 82,67%. No gráfico da Figura 13 a média do primeiro e terceiro períodos foi de 55,55%, enquanto a média dos períodos 5 e 7 foi de 70%. Já no gráfico da Figura 14 a média da primeira parte foi 67,70% e a da segunda parte foi de 98%, e no gráfico da Figura 15 as médias foram de 70% e 90% para o primeiro e o terceiro períodos e para o quinto e sétimo períodos, respectivamente.

Podemos observar também que três dos quatro gráficos acima apresentam um comportamento interessante. O gráfico da Figura 15 apresentou apenas uma queda no percentual de acertos entre o primeiro e terceiro períodos, o gráfico da Figura 12 apresentou duas quedas entre os períodos 1 e 2 e entre os períodos 5 e 6 e o gráfico da Figura 14 apresentou apenas uma queda entre os períodos 3 e 4, de maneira que podemos perceber uma

predominância de aumentos no número de acertos entre os períodos considerados. O único desses gráficos que apresentou mais quedas que aumentos foi o da Figura 13.

QUESTÃO 02

A segunda questão – que está dividida nos itens **a** e **b** – trata do movimento de um pêndulo duplo abandonado a partir do repouso em duas configurações iniciais distintas. Em cada item é apresentado um quadro com a configuração inicial do sistema e mais quatro que representam possíveis configurações num instante posterior. Nesta questão o estudante deverá marcar com um “X” um dos quadros que em sua opinião representa o sistema depois de passado um intervalo de tempo pequeno, mas suficiente para que uma mudança perceptível na configuração do sistema possa acontecer. Foram consideradas como respostas brancas as que não continham nenhuma marcação e nulas as que continham rasuras ou marcações em mais de uma alternativa. A resposta correta para o item *a* foi representada no penúltimo quadro e os percentuais de acerto para os alunos do Campus de Caruaru e do Campus de Recife são apresentados nas Figuras 16 e 17, respectivamente.

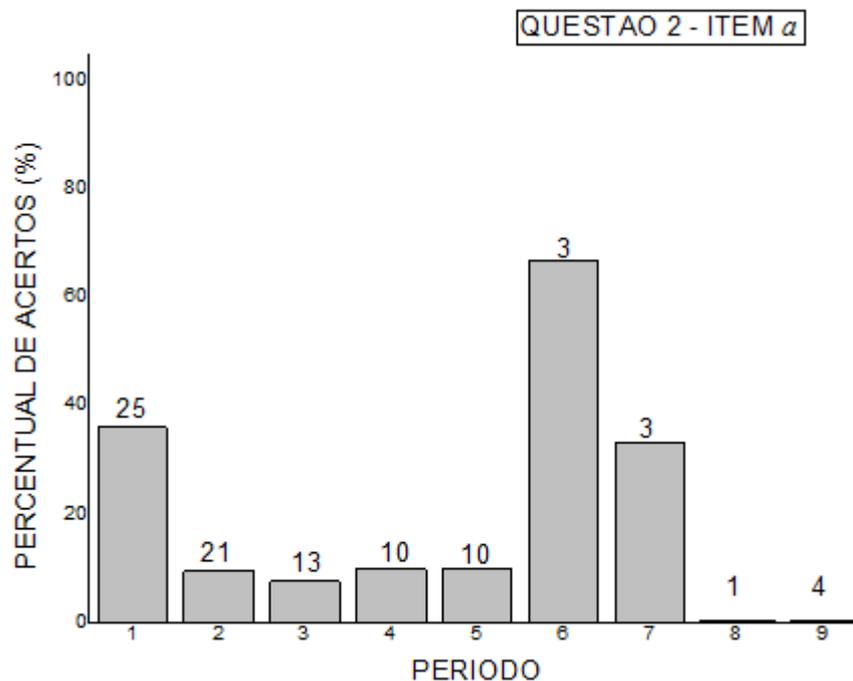


Figura 16 - gráfico do percentual de acertos dos estudantes do Campus de Caruaru para o item *a* da questão 2.

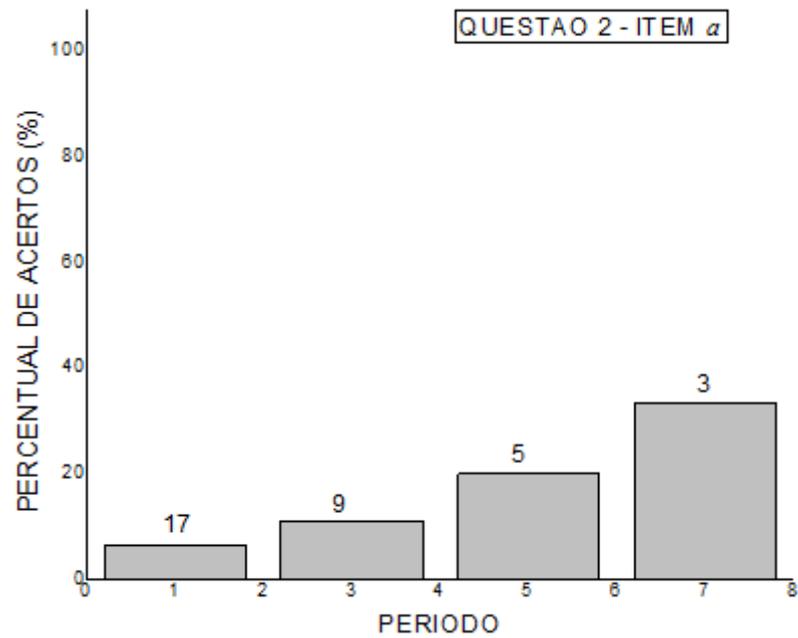


Figura 17 - gráfico do percentual de acertos dos estudantes do Campus de Recife para o item *a* da questão 2.

As Figuras 18 e 19, mostradas a seguir, apresentam os percentuais de acertos para o item *b* da segunda questão para os alunos do Campus de Caruaru e do Campus de Recife, respectivamente. Neste caso, a resposta correta foi apresentada no último quadro.

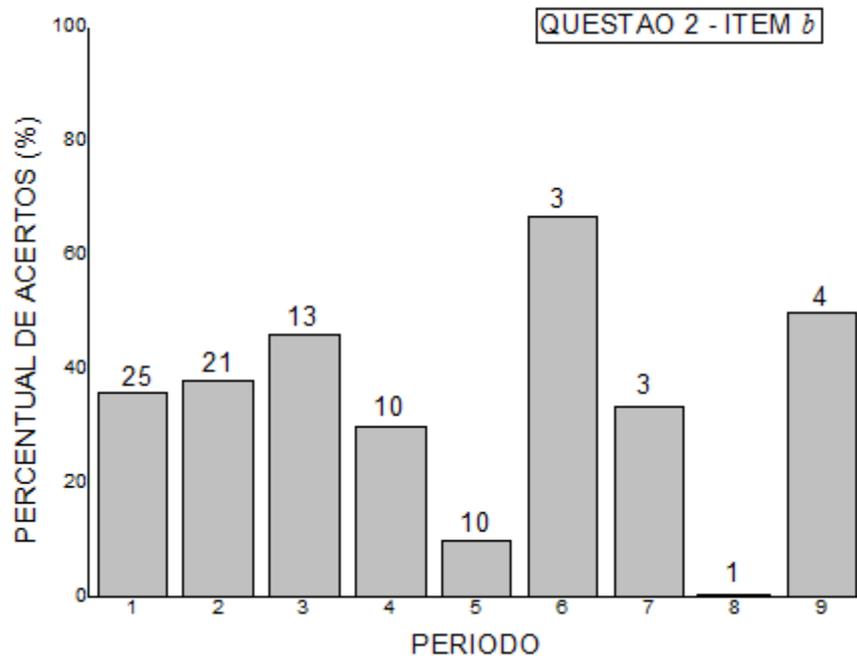


Figura 18 - gráfico do percentual de acertos dos estudantes do Campus de Caruaru para o item *b* da questão 2.

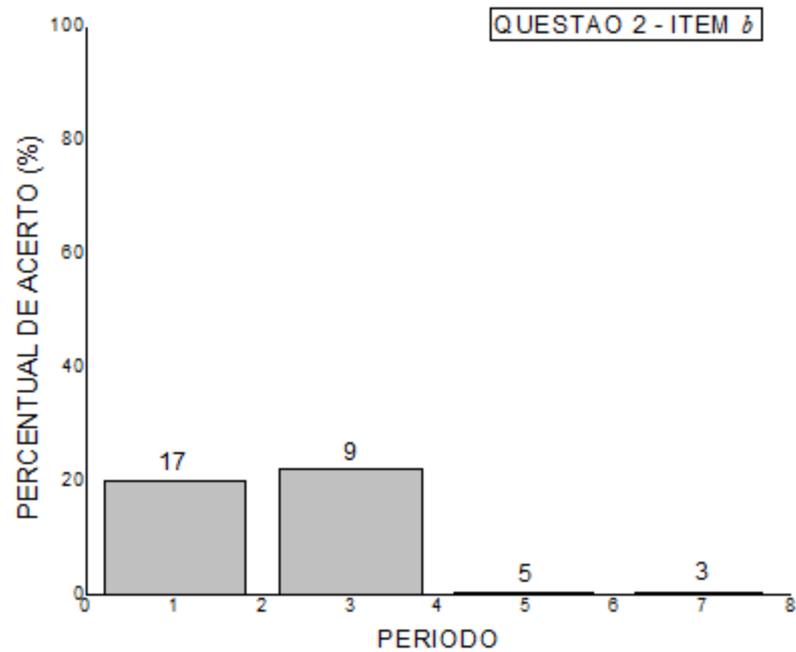


Figura 19 - gráfico do percentual de acertos dos estudantes do Campus de Recife para o item *b* da questão 2.

No caso dos gráficos apresentados nas Figuras 16, 17, 18 e 19, que representam os resultados para a questão 2, podemos observar que apenas um deles, o da Figura 17, apresenta aumento regular no percentual de acerto com o avanço no curso.

Na comparação entre as médias dos percentuais de acertos dos alunos da primeira metade do curso com os alunos da segunda metade, como fizemos para as figuras de 12 a 15, tivemos aumento nos gráficos apresentados nas Figuras 16 e 17, nos quais a média saltou de 14,64% para 20% e de 8,89% para 26,67%, respectivamente. No gráfico da Figura 18 a média permaneceu praticamente inalterada, passando de 32,05% para 32%, e no gráfico da Figura 19 a média passou de 21,11 % para 0%.

Temos, portanto que quatro dos oito gráficos apresentados (os das figuras 12, 14, 15 e 17) possuem predominância de aumentos nos percentuais de acerto de estudantes de períodos consecutivos e que, na comparação entre as médias dos percentuais de acerto dos alunos da primeira e da segunda metade do curso, apenas dois dos oito gráficos (os apresentados nas figuras 18 e 19) não apresentaram aumentos significativos.

CAPÍTULO V

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo de possíveis relações entre o decorrer da vida acadêmica dos alunos e o desenvolvimento da intuição física dos mesmos pode ser um fator determinante para a melhoria da qualidade de ensino em um curso superior. Um curso onde professores ensinam os conteúdos de maneira matematizada e esperam que os alunos memorizem os assuntos através da resolução de enormes listas de exercício, por exemplo, certamente não apresentará crescimento nas potencialidades intuitivas de seus discentes com o passar dos períodos, de maneira que a realização de pesquisas semelhantes a esta podem detectar ou no mínimo dar indícios deste problema.

Neste trabalho, especificamente, como pode ser observado no capítulo IV, seis dentre os oito gráficos, representados nas Figuras de 12 a 19, apresentaram aumentos nas comparações entre a média de acertos dos estudantes que se encontram na primeira metade do curso e os que se encontram na última metade. Verificamos também que em quatro desses gráficos predominam os aumentos nos percentuais de acertos para estudantes de períodos consecutivos. Esses resultados, porém, não apresentam indícios suficientes de que os cursos de Física-Licenciatura dos campi de Caruaru e Recife, da UFPE, apresentam alguma relação entre o desenvolvimento da intuição física de seus alunos e o avanço dos períodos no curso, de maneira que sugerimos que outras investigações como esta sejam realizadas para que resultados mais conclusivos possam ser obtidos.

Durante a realização deste trabalho foram encontradas algumas dificuldades que gostaríamos de citar e que nos permitem fazer algumas sugestões para possíveis realizações de pesquisas futuras.

- O uso de um questionário apenas com questões fechadas gerou dificuldades na análise dos dados obtidos, já que na maioria deles não foram encontrados padrões bem definidos, como pode ser visto no capítulo IV, de maneira que, para a realização de pesquisas semelhantes, sugerimos que sejam adicionadas ao questionário algumas perguntas com respostas abertas. Com isto o pesquisador teria a possibilidade de analisar as respostas quantitativa e qualitativamente.

- Uma segunda dificuldade foi o pequeno número de estudantes participantes na aplicação do questionário (podemos citar como exemplo o oitavo período do campus de caruaru que contou com a participação de apenas um estudante) e a impossibilidade de uma segunda aplicação – já que os alunos participantes em um primeiro momento poderiam trocar informações com os que iriam responder em um momento posterior causando o comprometimento dos resultados obtidos. Sugerimos, neste caso, que o pesquisador atente para a escolha do dia da aplicação, garantindo que o maior número possível de estudantes possa participar da pesquisa.
- A terceira dificuldade encontrada diz respeito ao programa desenvolvido. Neste trabalho não foi possível a realização de um programa mais interativo de maneira que sugerimos que em trabalhos posteriores o pesquisador atente para esta questão criando um programa mais fácil de ser executado e talvez até desenvolvendo uma descrição mais detalhada em formato tutorial.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6023: Informação e documentação – Referências – Apresentação.** Disponível em: www.habitus.ifcs.ufrj.br/pdf/abntnbr6023.pdf. Acesso em: 20 ago. 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 10520: Informação e documentação – Citações em documentos – Apresentação.** Disponível em: www.cch.ufv.br/revista/pdfs/10520-citas.pdf. Acesso em: 20 ago. 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 14724: Informação e documentação – Trabalhos Acadêmicos – Apresentação.** Disponível em: pt.slideshare.net/LazinhaSantos/nbr-14724-2011-nova-norma-da-abnt-para-trabalhos-academicos-11337543. Acesso em: 20 ago. 2014.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** 6. ed. Tradução Valéria de Magalhães Iorio. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

LEVADA, C. L.; LEVADA, M. M. O.; BERETA, A. L.R. Z. **O PAPEL DA INTUIÇÃO NAS DESCOBERTAS E INVENÇÕES CIENTÍFICAS.** Disponível em: www.conhecer.org.br/enciclop/2010c/o%20papel.pdf. Acesso em 05 ago. 2014.

DEPARTAMENTO DE ELETRÔNICA E COMPUTAÇÃO DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA. **Solução de Equações Diferenciais Ordinárias Usando Métodos Numéricos.** Disponível em: www-usr.inf.ufsm.br/~gbaratto/graduacao/ELC1021/Atual/textos/EDO/solucao_EDO_pelos_metodos_Euler_Runge-Kutta.pdf. Acesso em: 13 mai. 2013.

EDUARDO CASAVELLA. **TUTORIAL DE INSTALAÇÃO DO DEV C++.** Disponível em: linguagemc.com.br/tutorial-de-instalacao-do-dev-c/. Acesso em: 8 mar. 2013.

EVARISTO, J. **Aprendendo a Programar Programando na Linguagem C.** 3. ed. Alagoas: EDUFAL

FACULDADE DE ENGENHARIA DO CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA. **Apostila de DEV C++.** Disponível em: educaonline.eng.br/UNISANTA/HTML/DOWNLOAD/APOSTILAS/apostila%20de%20dev.pdf. Acesso em: 19 jun. 2013.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física, volume 2.** 8. ed. Tradução e revisão técnica Ronaldo Sérgio de Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

LUIS ANTONIO. **C++ Básico.** Disponível em: www.inf.ufes.br/~avalli/programacao/material/apostilandoC++.pdf. Acesso em: 19 jun. 2013.

MARION, J.B.: THORNTON, S. T. **Classical Dynamics of Particles and Systems.** 5. ed. Saunders College Publishing, 2004.

MARTINS, R. A.; SILVA, A. P. B. **Princípios da óptica geométrica e suas exceções: Heron e a reflexão em espelhos.** *Revista Brasileira de Ensino de Física*, São Paulo, v. 35, n. 1, mar. 2013. Disponível em: www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/351605.pdf. Acesso em: 20 mar. 2013.

MEDEIROS, A.; MEDEIROS, C. F. **Possibilidades e Limitações das Simulações Computacionais no Ensino da Física.** *Revista Brasileira de Ensino de Física*, São Paulo, v. 24, n. 2, jun. 2002. Disponível em: www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v24_77.pdf. Acesso em: 18 jan. 2014.

PAULO ANDRÉ CASTRO. **Uso de Gráficos no ambiente Dev C++.** Disponível em: www.comp.ita.br/~pauloac/ces11/Graficos_DevCpp.pdf. Acesso em: 18 jun. 2013.

STEWART, J. **Cálculo, volume 2.** 6. ed. Tradução Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

VALLE, K. N. F. **Métodos Numéricos de Euler e Runge-Kutta.** 2012. 40 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Programa de Pós-graduação em matemática para professores, Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais. 2012.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações diferenciais, volume 2.** 3. ed. Tradução Alfredo Alves de Farias. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010.

APÊNDICE 1

O código do programa, escrito em linguagem C, desenvolvido neste trabalho para simular o movimento do pêndulo duplo é o seguinte:

```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<graphics.h>
#include<math.h>

double f1(double t, double teta1, double teta2, double z1, double z2)
    {return z1;}

double f2(double t, double teta1, double z1, double teta2, double z2)
    {return z2;}

double g1(double t, double teta1, double teta2, double z1, double z2, double m1, double
m2, double l1, double l2, double g)
    {return (-m2*l1*z1*z1*sin(teta1-teta2)*cos(teta1-teta2)
+g*m2*sin(teta2)*cos(teta1-teta2) -m2*l2*z2*z2*sin(teta1-teta2)-
(m1+m2)*g*sin(teta1))/((m1+m2)*l1-m2*l1*cos(teta1-teta2)*cos(teta1-teta2));
    }

double g2(double t, double teta1, double teta2, double z1, double z2, double m1, double
m2, double l1, double l2, double g)
    {return ((m1+m2)*(g*sin(teta2)-l1*z1*z1*sin(teta1-teta2)-
g*sin(teta1)*cos(teta1-teta2))-m2*l2*z2*z2*sin(teta1-teta2)*cos(teta1-
teta2))/(m2*l2*cos(teta1-teta2)*cos(teta1-teta2)-(m1+m2)*l2);
    }

main()
    {
//declaração dos tipos de variáveis usadas no programa

double t0, tn, tn1, tmax, teta1, teta2, teta1n, teta2n;
double m1, m2, l1, l2, g, pi, T1, T2, Z1, Z2, T, U, En;
double z1n, z2n, z1, z2, teta10, teta20, z10, z20;
double h;
double k1, k2, k3, k4;
double j1, j2, j3, j4;
double p1, p2, p3, p4;
double o1, o2, o3, o4;
int n, i;

//inserção das condições iniciais
```

```

printf("forneca o valor da massa 1 em kilogramas:");
scanf("%lf", &m1);
printf("forneca o valor da massa 2 em kilogramas:");
scanf("%lf", &m2);
printf("forneca o comprimento da haste da massa 1 em metros:");
scanf("%lf", &l1);
printf("forneca o comprimento da haste da massa 2 em metros:");
scanf("%lf", &l2);
printf("forneca o angulo inicial da massa 1 em graus:");
scanf("%lf", &teta10);
printf("forneca o angulo inicial da massa 2 em graus:");
scanf("%lf", &teta20);
printf("forneca a velocidade inicial da massa 1 :");
scanf("%lf", &z10);
printf("forneca a velocidade inicial da massa 2 :");
scanf("%lf", &z20);

```

```

initwindow(700,500); //comando para iniciar janela gráfica (eixo x, eixo y)

```

```

t0 = 0;
g = 9.81;
h = 0.001;
pi = 3.1415926536;
tmax = 50;

```

```

//inicia as variáveis com os valores iniciais

```

```

n = 0;
tn = t0;
teta1n = teta10*2*pi/360;
z1n = z10*2*pi/360;
teta2n = teta20*2*pi/360;
z2n = z20*2*pi/360;

```

```

while (tn < tmax)
{

```

```

//desenho dos eixos

```

```

line(350, 20, 350, 480);
line(100, 250, 600, 250);

```

```

// desenho do primeiro pêndulo

```

```

circle(350+100*sin(teta1n), 250+100*cos(teta1n), 15);
line(350, 250, 350+100*sin(teta1n), 250+100*cos(teta1n));

```

```

//desenho do segundo pêndulo

```

```

circle( 350+100*sin(teta1n)+100*sin(teta2n), 250+100*cos(teta1n)+100*cos(teta2n), 15);
line(350+100*sin(teta1n), 250+100*cos(teta1n), 350+100*sin(teta1n)+100*sin(teta2n),
250+100*cos(teta1n)+100*cos(teta2n));

```

```

// Comando para imprimir números na tela. Transformamos variáveis numéricas em textuais.

```

```

T1 = teta1n*360/(2*pi);
T2 = teta2n*360/(2*pi);
Z1 = z1n*360/(2*pi);
Z2 = z2n*360/(2*pi);

char A [30];
char B [30];
char C [30];
char D [30];
char E [30];

sprintf(A, "teta1=%lf", T1);
outtextxy(50, 50, A);
sprintf(B, "teta2=%lf", T2);
outtextxy(50, 100, B);
sprintf(C, "Z1=%lf", Z1);
outtextxy(50, 150, C);
sprintf(D, "Z2=%lf", Z2);
outtextxy(50, 200, D);
sprintf(E, "energia=%lf", En);
outtextxy(500, 50, E);
delay(10);
cleardevice(); //limpa a tela grafica

```

//implementação do método de Runge-Kutta

```

k1 = h*f1(tn, teta1n, teta2n, z1n, z2n);
j1 = h*f2(tn, teta1n, teta2n, z1n, z2n);
p1 = h*g1(tn, teta1n, teta2n, z1n, z2n, m1, m2, l1, l2, g);
o1 = h*g2(tn, teta1n, teta2n, z1n, z2n, m1, m2, l1, l2, g);

k2 = h*f1(tn+h/2, teta1n+k1/2, teta2n+j1/2, z1n+p1/2, z2n+o1/2);
j2 = h*f2(tn+h/2, teta1n+k1/2, teta2n+j1/2, z1n+p1/2, z2n+o1/2);
p2 = h*g1(tn+h/2, teta1n+k1/2, teta2n+j1/2, z1n+p1/2, z2n+o1/2, m1, m2, l1, l2, g);
o2 = h*g2(tn+h/2, teta1n+k1/2, teta2n+j1/2, z1n+p1/2, z2n+o1/2, m1, m2, l1, l2, g);

k3 = h*f1(tn+h/2, teta1n+k2/2, teta2n+j2/2, z1n+p2/2, z2n+o2/2);
j3 = h*f2(tn+h/2, teta1n+k2/2, teta2n+j2/2, z1n+p2/2, z2n+o2/2);
p3 = h*g1(tn+h/2, teta1n+k2/2, teta2n+j2/2, z1n+p2/2, z2n+o2/2, m1, m2, l1, l2, g);
o3 = h*g2(tn+h/2, teta1n+k2/2, teta2n+j2/2, z1n+p2/2, z2n+o2/2, m1, m2, l1, l2, g);

k4 = h*f1(tn+h, teta1n+k3, teta2n+j3, z1n+p3, z2n+o3);
j4 = h*f2(tn+h, teta1n+k3, teta2n+j3, z1n+p3, z2n+o3);
p4 = h*g1(tn+h, teta1n+k3, teta2n+j3, z1n+p3, z2n+o3, m1, m2, l1, l2, g);
o4 = h*g2(tn+h, teta1n+k3, teta2n+j3, z1n+p3, z2n+o3, m1, m2, l1, l2, g);

tn1 = tn+h;
z1 = z1n +(p1+2*p2+2*p3+p4)/6;
teta1 = teta1n +(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
z2 = z2n +(o1+2*o2+2*o3+o4)/6;
teta2 = teta2n +(j1+2*j2+2*j3+j4)/6;

```

```

n = n+1;
tn = tn1;
z1n = z1;
teta1n = teta1;
z2n = z2;
teta2n = teta2;

// cálculo da energia do sistema
T = (m1*l1*l1*z1n*z1n)/2+(l1*l1*z1n*z1n+l2*l2*z2n*z2n+2*l1*l2*z1n*z2n*cos(teta1n-
teta2n))*m2/2;

U = -(m1+m2)*g*l1*cos(teta1n)-m2*g*l2*cos(teta2n);
En = T+U;
}

closegraph(); // fecha modo gráfico

return 0;

}

```

Para utilizá-lo o leitor deverá seguir os seguintes passos:

- 1- instalar em seu computador um compilador para programas desenvolvidos em linguagem C. Um bom exemplo é o DEV C++. Seu processo de instalação pode ser encontrado em **TUTORIAL DE INSTALAÇÃO DO DEV C++**, do autor Eduardo Casavella, indicado na bibliografia deste trabalho.
- 2- Instalar uma rotina gráfica no ambiente DEV C++. Um bom exemplo é a Borland Graphics Interface (BGI). Consulte **Uso de Gráficos no ambiente Dev C++**, do autor Paulo André Castro, indicado na bibliografia deste trabalho, para aprender a baixar e instalar os arquivos necessários ao uso da BGI.
- 3- Criar um projeto e copiar o código acima.

Com isto o computador estará pronto para executar o programa. Ao fazê-lo a seguinte tela será aberta (Figura 20):

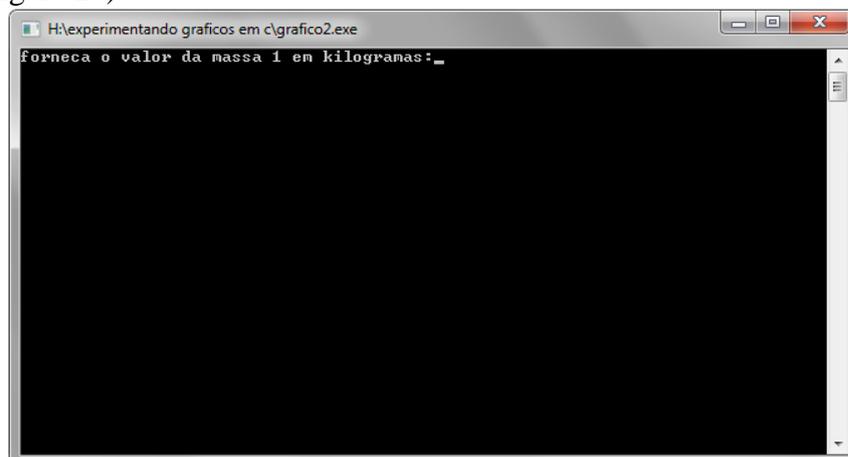


Figura 20- tela inicial ao executar o programa

E o usuário deverá seguir os passos a seguir, apertando a tecla “enter” após cada um deles:

- 1- Digitar o valor da massa do pêndulo 1 em kilogramas.
- 2- Digitar o valor da massa do pêndulo 2 em kilogramas.
- 3- Digitar o valor do comprimento da haste do pêndulo 1 em metros.
- 4- Digitar o valor do comprimento da haste do pêndulo 2 em metros.
- 5- Digitar o valor do ângulo inicial do pêndulo 1 em graus.
- 6- Digitar o valor do ângulo inicial do pêndulo 2 em graus.
- 7- Digitar o valor da velocidade angular inicial do pêndulo 1 em radianos por segundo.
- 8- Digitar o valor da velocidade angular inicial do pêndulo 2 em radianos por segundo.

Após todos os dados serem fornecidos uma tela como na Figura 21 irá abrir:

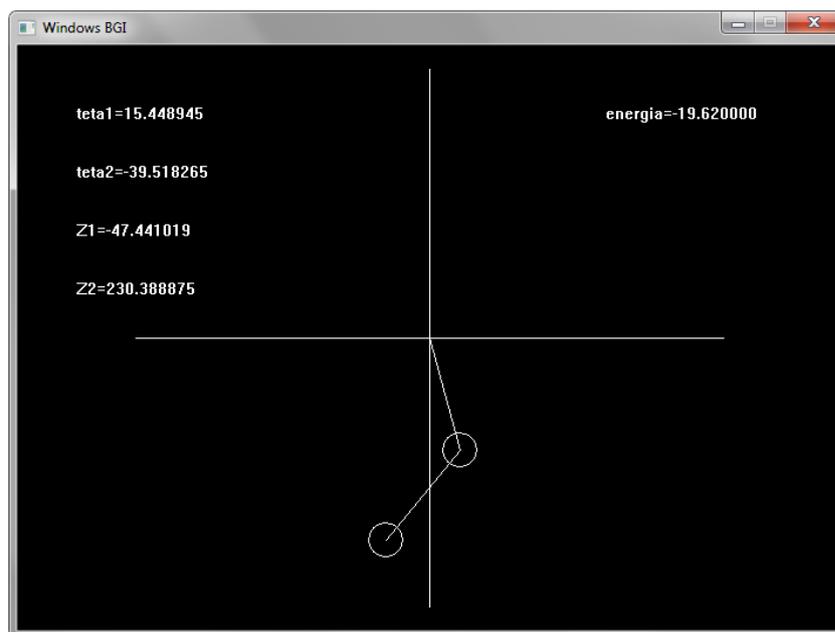


Figura 21- tela do programa durante a simulação de movimento do pêndulo duplo

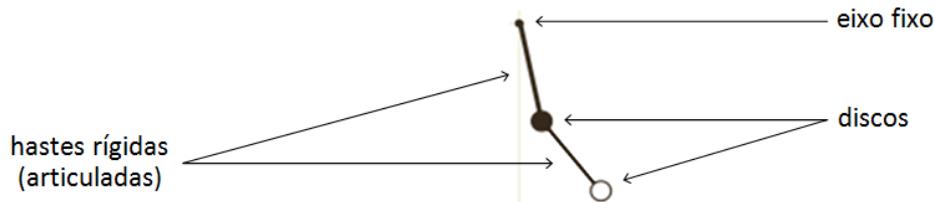
Esta tela apresenta a simulação do movimento do pêndulo duplo para as configurações iniciais que foram fornecidas e os valores da energia do sistema (no canto superior direito), dos ângulos θ_1 e θ_2 e de Z_1 e Z_2 (no canto superior esquerdo, de cima para baixo, respectivamente) para cada instante de tempo.

APÊNDICE 2

Questionário apresentado aos estudantes.

QUESTIONÁRIO

Este questionário – que é anônimo e será utilizado exclusivamente para fins acadêmicos – trata do movimento de um pêndulo duplo com hastes rígidas. Você tem 20 minutos para respondê-lo. É necessário ler com atenção as informações abaixo.



- O sistema não está sujeito a forças dissipativas, como resistência do ar ou atrito.
- As hastes rígidas têm massas desprezíveis, de forma que as massas estão concentradas nos discos.
- As hastes são articuladas de tal maneira que podem girar 360° em torno dos eixos aos quais estão conectadas (isso é experimentalmente realizável).

Instituição: UFPE/Caruaru UFPE/Recife

Sou estudante do _____ período do curso de Física-Licenciatura (informe o período no qual está cursando o maior número de disciplinas).

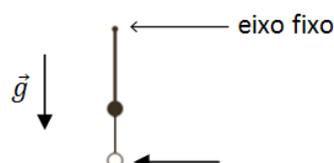
Você já assistiu a algum vídeo ou simulação computacional apresentando um pêndulo duplo com hastes rígidas em movimento? () SIM () NÃO

Em caso afirmativo, você analisou tal movimento? Como?

Você sabia da aplicação deste questionário? () SIM () NÃO

Em caso afirmativo, se preparou para ele de alguma forma? Como?

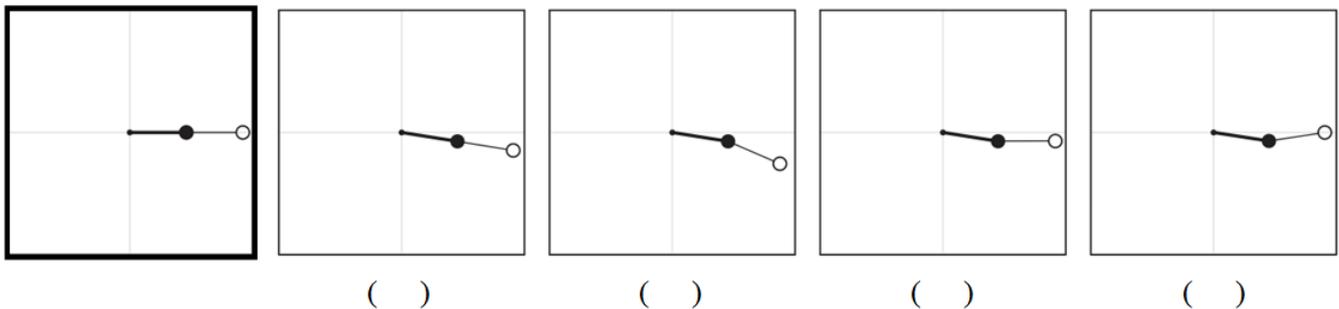
QUESTÃO 01: Na figura abaixo, o pêndulo duplo está inicialmente em repouso. A seta inferior representa uma violenta pancada horizontal sofrida pelo disco branco. Assinale V (verdadeiro) ou F (falso) em cada uma das afirmativas a seguir.



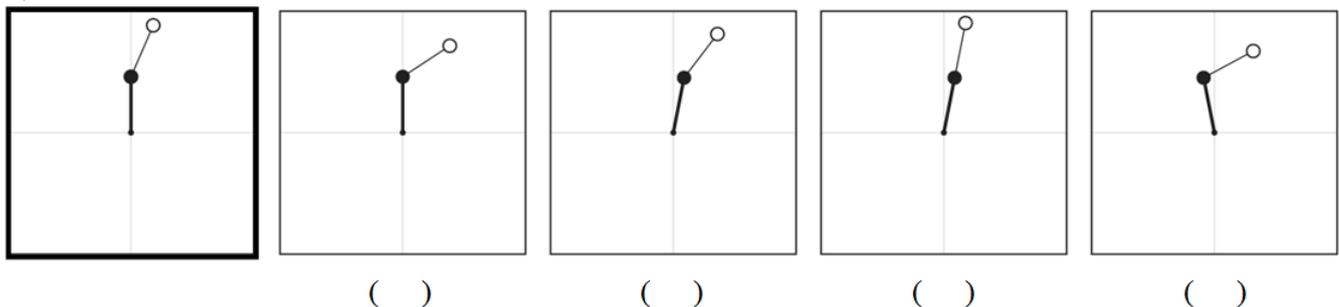
- () Se a massa do disco preto é muito menor que a massa do disco branco, após a pancada o disco branco realiza movimento circular em torno do disco preto.
- () Se a massa do disco preto é muito menor que a massa do disco branco, após a pancada ambos os discos realizam movimento circular em torno do eixo fixo.
- () As duas afirmativas acima estão incorretas.
- () Se a massa do disco preto é muito maior que a massa do disco branco, após a pancada o disco branco realiza movimento circular em torno do disco preto.
- () Se a massa do disco preto é muito maior que a massa do disco branco, após a pancada ambos os discos realizam movimento circular em torno do eixo fixo.
- () As duas afirmativas acima estão incorretas.

QUESTÃO 02: Nos itens **a** e **b**, o primeiro desenho representa um pêndulo duplo inicialmente em repouso. Os discos possuem massas iguais, e as hastes têm o mesmo comprimento. Assinale qual das figuras à direita melhor representa o sistema após um pequeno intervalo de tempo. Considere um intervalo de tempo grande o suficiente para que uma mudança perceptível na configuração do sistema ocorra.

a)



b)



Muito obrigado por sua participação!