



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE TECNOLOGIA
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

RUBENS SILVA CORREIA

**OTIMIZAÇÃO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO,
UTILIZANDO A FERRAMENTA SOLVER**

CARUARU

2016

RUBENS SILVA CORREIA

**OTIMIZAÇÃO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO,
UTILIZANDO A FERRAMENTA SOLVER**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Civil do Centro Acadêmico do Agreste (CAA), da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Área de concentração: Estruturas.

Orientador(a): Profa. Dra. Giuliana Furtado Franca Bono.

CARUARU

2016

RUBENS SILVA CORREIA

OTIMIZAÇÃO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO, UTILIZANDO A FERRAMENTA SOLVER

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Civil do Centro Acadêmico do Agreste (CAA), da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Área de concentração: Estruturas.

A banca examinadora composta pelos professores abaixo, considera o candidato RUBENS SILVA CORREIA aprovado com nota _____.

Caruaru, 15 de dezembro de 2016.

Profa. Dra. Giuliana Furtado Franca Bono _____

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) – Orientadora

Profa. Dra. Juliana Von Schmalz Torres _____

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) – Avaliadora

Prof. Dr. Gustavo Bono _____

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) – Avaliador

Prof. Dr. Cléssio Leão Silva Lima _____

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) – Coordenador da disciplina

*Dedico este trabalho aos meu queridos pais,
Luiz Carlos e Maria José, por todo o amor e
incentivo concedidos. E também ao meu
falecido bisavô, Severino, que tanto sonhou
com este momento.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço ao Criador e Mantenedor do Universo, que em meio a imensidão da existência cuidou de mim ao longo desses anos de graduação. Agradeço por ter me dado a oportunidade de concluir este sonho.

À minha família, especialmente aos meus pais, Luiz Carlos e Maria José, por todo amor, incentivo e compreensão no decorrer desses anos. Cada palavra de conforto, incentivo e amor me ajudaram a prosseguir. E também agradeço a minha querida irmã, Raquel Correia, por estar amavelmente presente em todas as fases da minha vida.

À minha estimada orientadora, Giuliana Bono, pela excelente orientação realizada. Agradeço pelas oportunidades e incentivos, e também pela amizade oferecida. Mais que conhecimentos compartilhados, levarei também seu exemplo de dedicação e comprometimento ao longo de minha vida profissional.

Aos meus queridos amigos da universidade, que foram essenciais para a conclusão deste sonho. A amizade desenvolvida, com aquele “humor característico”, me trouxe muitos momentos felizes. Agradeço em especial a Amanda, Victor, Luindson, Mateus, Rayanne e Elaine.

As minhas queridas amigas, Lucicleide Senna e Priscila Santos, que fizeram parte dessa história. Conhecê-las nesses anos de graduação foi maravilhoso.

A todos os professores do Curso de Engenharia Civil, do Campus Acadêmico do Agreste, pelo empenho e conhecimento transmitidos. E também a Universidade Federal de Pernambuco, por possibilitar a realização deste sonho.

*Attraversiamo. Quer dizer: "Vamos atravessar".
Os amigos dizem isso uns para os outros sem
parar quando estão andando pela calçada e
decidem que chegou a hora de passar para o
outro lado da rua. Ou seja, é literalmente uma
palavra pedestre. Ela não tem nada de mais.
Mesmo assim, por algum motivo, causa-me um
efeito poderoso.*

Elizabeth Gilbert

RESUMO

OTIMIZAÇÃO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO, UTILIZANDO A FERRAMENTA SOLVER

Em um ambiente de competitividade existente na construção civil, é necessário que os engenheiros estruturais concebam estruturas mais econômicas. Em diversas obras de engenharia, as vigas são elementos estruturais de predominância. No dimensionamento convencional de vigas de concreto armado, com a utilização de parâmetros pré-definidos baseados em experiências ou na literatura técnica, fica difícil determinar a solução mais econômica. Porém, tal solução pode ser encontrada ao substituir o dimensionamento convencional por um dimensionamento otimizado. Portanto, o presente trabalho tem por objetivo otimizar o dimensionamento de vigas de concreto armado, visando a minimização dos custos financeiros. O problema, formulado em uma planilha do *Microsoft Excel*, é solucionado através da ferramenta *Analytic Solver Platform*. A função objetivo do problema é a minimização dos custos, tendo como variáveis de projeto as dimensões da seção transversal da viga, com restrições relacionadas as normas técnicas. As conclusões obtidas comprovam a vantagem do dimensionamento otimizado por obter soluções mais econômicas.

Palavras-chave: Otimização Estrutural, Vigas, Concreto Armado, Solver

ABSTRACT

OPTIMIZATION OF REINFORCED CONCRETE BEAMS, USING THE SOLVER TOOL

In an environment of competitiveness in civil construction, it is necessary that structural engineers devise more economical structures. In various engineering works, beams are structural elements of predominance. In the conventional design of reinforced concrete beams, using pre-defined parameters based on experiments or technical literature, it is difficult to determine the most economical solution. However, such a solution can be found by replacing conventional design with optimized design. Therefore, the present work aims to optimize the design of reinforced concrete beams, aiming at minimizing financial costs. The problem, formulated in a Microsoft Excel worksheet, is addressed through the Analytic Solver Platform tool. The objective function of the problem is the minimization of costs, having as design variables the cross-sectional dimensions of the beam, with constraints related to technical standards. The conclusions obtained prove the advantage of the optimized design for obtaining economical solutions.

Keywords: Structural Optimization, Beams, Reinforced Concrete, Solver

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Diagrama tensão-deformação idealizado para concretos de classe até C50 ...	22
Figura 2 - Diagrama tensão-deformação bilinear de tração.....	22
Figura 3 - Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas	24
Figura 4 - Vão efetivo	28
Figura 5 – Domínios de estado-limite último de uma seção transversal	32
Figura 6 - Limitação da posição da linha neutra.....	32
Figura 7 - Seção transversal com armadura simples	33
Figura 8 - Seção transversal com armadura dupla	34
Figura 9 - Fluxograma do dimensionamento à flexão.....	35
Figura 10 - Fluxograma do dimensionamento ao cisalhamento.....	38
Figura 11 - Caixa de diálogo principal do Solver	50
Figura 12 - Caixa de diálogo principal do Solver	50
Figura 13 - Caixa de diálogo principal do Solver	51
Figura 14 - Viga de concreto armado a ser dimensionada, de forma otimizada	52
Figura 15 - Fluxograma do Dimensionamento da viga.....	53
Figura 16 - Comportamento do Custo x Altura.....	57
Figura 17 - Resultados do CASO 1	58
Figura 18 - Altura ótima, em função do vão e da classe do concreto, e a altura pré-dimensionada	59
Figura 19 - Comportamento do Custo x Base x Altura.....	60
Figura 20 - Resultados do CASO 2	60

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Estudos, pertinentes e atuais, sobre otimização de vigas retangulares de concreto armado (continua).....	15
Tabela 2 - Classes de resistência de concretos estruturais.....	19
Tabela 3 - Custos unitários (continua).....	55
Tabela 4 - Custos dos Casos estudados.....	61
Tabela 5 - Validação da planilha de dimensionamento otimizado.....	68

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	JUSTIFICATIVA E MOTIVAÇÃO.....	13
3	OBJETIVOS	14
3.1	Objetivo Geral	14
3.2	Objetivos Específicos.....	14
4	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	14
5	REFERENCIAL TEÓRICO	18
5.1	Dimensionamento de vigas de concreto armado.....	18
5.1.1	Concreto	19
5.1.1.1	Propriedades do concreto	19
5.1.1.1.1	Classes.....	19
5.1.1.1.2	Resistência à compressão	20
5.1.1.1.3	Resistência à tração	20
5.1.1.1.4	Módulo de elasticidade.....	20
5.1.1.1.5	Diagrama tensão-deformação na compressão	21
5.1.1.1.6	Diagrama tensão-deformação na tração.....	22
5.1.2	Aço	23
5.1.2.1	Propriedades do aço (de armadura passiva).....	23
5.1.2.1.1	Categoria	23
5.1.2.1.2	Massa específica.....	23
5.1.2.1.3	Módulo de elasticidade.....	23
5.1.2.1.4	Diagrama tensão-deformação, resistência ao escoamento e à tração	23
5.1.3	Concreto armado	24
5.1.4	Dimensionamento de estruturas de concreto armado.....	25
5.1.4.1	Resistências de cálculo	26
5.1.4.2	Ações	26
5.1.5	Vigas de concreto armado.....	27
5.1.6	Dimensionamento de vigas de concreto armado.....	27
5.1.6.1	Análise estrutural	27
5.1.6.2	Pré-dimensionamento.....	28

5.1.6.3	Esforços solicitantes.....	29
5.1.6.4	Dimensionamento à flexão	29
5.1.6.5	Dimensionamento à força cortante	36
5.1.6.6	Detalhamento	38
5.1.6.7	Estados-limites de serviço	40
5.2	Otimização.....	42
5.2.1	Fundamentos da otimização	42
5.2.2	Métodos de otimização	44
5.2.2.1	Simplex	45
5.2.2.2	Gradiente Reduzido Generalizado.....	46
5.2.2.3	Algoritmos Genéticos	46
5.2.3	A ferramenta Solver	48
6	METODOLOGIA.....	52
6.1	Considerações Gerais	52
6.2	Dimensionamento otimizado	55
7	RESULTADOS E DISCUSSÃO	57
7.1	CASO 1.....	57
7.2	CASO 2	59
8	CONCLUSÕES.....	61
9	REFERÊNCIAS	63
10	ANEXOS	68

1 INTRODUÇÃO

No dimensionamento convencional de vigas de concreto armado é feito um pré-dimensionamento da seção, e então é verificado se seus esforços resistentes são capazes de suportar os esforços atuantes com segurança, atendendo as prescrições das normas técnicas. Se o resultado das verificações for positivo, então adota-se a seção pré-dimensionada. O pré-dimensionamento é baseado em recomendações da literatura ou na experiência do projetista estrutural. Este dimensionamento pode ser uma boa solução, no entanto, podem existir outras para a mesma viga. Dentre todas as soluções existentes há uma que, por exemplo, será financeiramente a mais econômica: uma solução ótima. Através do dimensionamento convencional fica difícil identificá-la.

Para encontrar tal solução, o dimensionamento convencional de vigas de concreto armado pode ser transformado em um problema matemático de otimização. Simplificadamente, um problema de otimização consiste em maximizar ou minimizar uma função, alterando suas variáveis, com ou sem restrições. No caso do dimensionamento de vigas, a função a ser minimizada é o custo, alterando parâmetros da seção, com restrições relativas à segurança, normas técnicas, etc. Assim, a seção encontrada (solução) seria a mais econômica, no tocante aos custos.

Existem diversos métodos de otimização que podem ser utilizados no dimensionamento otimizado de vigas. A escolha do método depende principalmente do tipo de problema. Tais métodos se encontram implementados em diversos *softwares*. Dentre tais *softwares*, existe uma ferramenta simples e robusta que pode ser utilizada no popular *Microsoft Excel*: a ferramenta *Solver*. O *Solver* é uma ferramenta de análise que permite resolver problemas de otimização descritos através de equações escritas nas células das planilhas do *Excel*.

Em virtude da competitividade existente na construção civil, o projetista estrutural é compelido a elaborar projetos mais econômicos. Para tanto, conceitos relacionados a otimização podem ser trazidos para a engenharia estrutural a fim de proporcionar concepções ótimas das estruturas e, conseqüentemente, permitir o abandono de parâmetros estimados.

2 JUSTIFICATIVA E MOTIVAÇÃO

As vigas de concreto armado são elementos bastante comuns nas estruturas usuais de edifícios. Uma pequena redução de custos nesses elementos pode trazer uma significativa

economia no custo total da obra. Assim, o presente estudo é justificado pela necessidade atual de se reduzir custos, em vista do ambiente de competição e inovação na construção civil. Além disso, o dimensionamento otimizado de vigas permite o abandono de parâmetros pré-definidos, poupando o projetista da tomada de decisões desses parâmetros, sendo esta uma contribuição significativa para projetistas com pouca experiência.

A otimização estrutural é motivadora por ser aplicável em diversas situações que podem ser colocadas em prática pelos projetistas estruturais.

3 OBJETIVOS

3.1 Objetivo Geral

O presente trabalho acadêmico tem por objetivo geral realizar o dimensionamento otimizado de uma viga retangular de concreto armado, sujeita a flexão simples e ao cisalhamento, visando a minimização do custo financeiro, através da ferramenta *Solver*.

3.2 Objetivos Específicos

- Estudar e utilizar a ferramenta *Solver*, na resolução do problema de otimização de vigas de concreto armado;
- Encontrar os valores ótimos de altura e base de uma viga retangular de concreto armado, que minimizem os custos financeiros;
- Analisar os resultados do dimensionamento otimizado e comparar com os existentes na literatura.

4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O interesse na aplicação da otimização na engenharia estrutural começou na década de 50. Entre os estudos primários relevantes, estão os de J. Heyman e L.A. Schimit, porém, foram nos anos 70 que os estudos mais significativos se desenvolveram, propagando assim, a otimização estrutural (BASTOS, 2004). Com o passar dos anos, ocorreu um significativo progresso nessa área do conhecimento, como pode ser notado na grande quantidade de artigos, trabalhos acadêmicos e literatura encontrados (ALEXANDRE, 2014).

Segundo Cohn (et al. 1994 *apud* LIMA, 2011) grande parte das pesquisas iniciais em otimização estrutural utilizou o aço como material e poucas vezes o concreto armado. Ainda segundo o autor, tal diferença se justifica pela facilidade de modelagem das características do aço. Porém, essa desigualdade diminuiu no decorrer do tempo.

Atualmente existem diversos estudos de otimização de estruturas de concreto armado, particularmente de vigas. A seguir, na Tabela 1, é apresentada uma relação de alguns trabalhos pertinentes e atuais, sobre otimização de vigas retangulares de concreto armado.

Tabela 1 - Estudos, pertinentes e atuais, sobre otimização de vigas retangulares de concreto armado (continua)

Autor, Ano	Título	Objetivo	Esforços considerados	Método de Otimização	Ferramenta
GUERRA; KIOUSIS, 2006	Design optimization of reinforced concrete structures	Minimizar custo	Flexão simples	Programação quadrática sequencial (SQP)	MATLAB
ISMAIL, 2007	Design Optimization of Structural Concrete Beams Using Genetic Algorithms	Minimizar custo	Flexão simples e cisalhamento	Algoritmos genéticos (AGs)	MATLAB
FALCÓN et al., 2008	A Technique for Optimal Sizing of Flexural Reinforced Concrete Beams	Minimizar custo	Flexão simples	Programação Quadrática Sequencial	MATLAB
KLEIN, 2008	Otimização de vigas de concreto armado: dimensionamento a flexão	Minimizar custo	Flexão simples	Algoritmos Genéticos (AGs)	MATLAB
GALEB, 2009	Optimum design of reinforced concrete rectangular beams using simulated annealing	Minimizar custo	Flexão simples	Recozimento Simulado	MATLAB
MAIA, 2009	Otimização estrutural: estudo e aplicações em problemas clássicos de vigas utilizando a ferramenta Solver	Minimizar custo	Flexão simples	Gradiente Reduzido Generalizado (GRG)	SOLVER

Tabela 1 - Estudos, pertinentes e atuais, sobre otimização de vigas retangulares de concreto armado (conclusão)

Autor, Ano	Título	Objetivo	Esforços considerados	Método de Otimização	Ferramenta
KRIPKA; PAGNUSSAT, 2010	Parâmetros para o dimensionamento otimizado de vigas de concreto armado	Minimizar custo	Flexão simples e cisalhamento	Gradiente Reduzido Generalizado (GRG)	SOLVER
BHALCHANDRA; ADSUL, 2012	Cost Optimization Of Doubly Reinforced Rectangular Beam Section	Minimizar quantidade de material	Flexão simples	Algoritmos Genéticos (AGs)	MATLAB
SINGH; RAI, 2014	Optimisation of RCC Beam	Minimizar custo	Flexão simples e cisalhamento	Algoritmos Genéticos (AGs)	MATLAB
RAHMANIAN; LUCET; TESFAMARIAM, 2014	Optimal design of reinforced concrete beams: A review	Minimizar custo	Flexão simples e cisalhamento	Enumeração Exhaustiva	Microsoft Excel
JUNIOR; OLIVEIRA, 2014	Otimização de vigas de concreto armado com seção retangular submetidas à flexão normal simples	Minimizar custo	Flexão simples e cisalhamento	Gradiente Reduzido Generalizado (GRG)	SOLVER
FRAGA; KRIPKA, 2015	Projeto estrutural de vigas de concreto armado visando a minimização do impacto ambiental	Minimizar custos: ambiental e econômico	Flexão simples e cisalhamento	Gradiente Reduzido Generalizado (GRG)	SOLVER

Fonte: Autor (2016).

Nota: A tabela contém apenas os estudos pertinentes ao presente trabalho acadêmico. Não é um levantamento de todos os estudos referentes ao assunto.

Nos trabalhos listados anteriormente, é perceptível uma formulação de otimização prevalente: obter valores ótimos dos parâmetros da viga, tendo em vista a minimização do custo financeiro. Problemas clássicos de viga, viga biapoiada e viga contínua, são estudados, onde 60% são casos de vigas sujeitas a flexão simples e 40% sujeitas, além da flexão, ao cisalhamento. Dos métodos de otimização utilizados 58% são métodos determinísticos e 42%

probabilísticos. A ferramenta computacional mais utilizada é o MATLAB, presente em 58% dos casos, enquanto o *Solver* foi utilizado em 42%.

Maia (2009) realizou um estudo de otimização estrutural voltado a problemas clássicos de vigas, utilizando o *Solver*. Dois tipos de vigas foram otimizados: engastada e contínua. A viga retangular contínua, de concreto armado, possui dois vãos e está submetida a flexão simples. O problema de otimização consistia em encontrar a altura da viga e o fator de redução do momento negativo, minimizando os custos e restringindo o problema às especificações das normas técnicas. Não foram consideradas as armaduras transversais, as armaduras de pele e as restrições referentes ao estado limite de serviço, além de não considerar certas variáveis discretas. O problema foi solucionado através do método do Gradiente Reduzido Generalizado (GRG), presente no *Solver*. O autor comprovou a eficiência da otimização através do *Solver* e verificou que os preços dos insumos do concreto armado têm grande influência no problema de otimização.

Kripka e Pagnussat (2010) apresentaram um dimensionamento otimizado de viga contínua, por meio do *Solver*, similar ao de Maia (2009). No entanto, a viga está sujeita também ao cisalhamento, e a otimização consistia em encontrar apenas a altura da viga. As restrições devido aos limites de deformação excessiva foram consideradas, favorecendo a realidade do problema. Constatou-se que a altura obtida pelo dimensionamento otimizado é próxima da estimativa recomendada pela literatura técnica e que sua redução, devido ao aumento da resistência do concreto, eleva os custos. Juntamente a essas conclusões, foi observado o peso dos materiais nos custos, sendo o aço o de maior influência, seguido do concreto e das fôrmas, respectivamente.

Contrariamente aos autores anteriormente citados, Bhalchandra e Adsul (2012) desenvolveram um estudo focado nas técnicas de otimização. Uma viga retangular de concreto armado, biapoiada, com armadura dupla e submetida a flexão simples, foi otimizada por três métodos diferentes. O problema visava a determinação da largura da viga, das áreas de aço e do cobrimento nominal, minimizando a quantidade de material e sujeitando a formulação às restrições de segurança e utilização. Apesar da adoção de simplificações, tais como variáveis do tipo contínua, as restrições relativas à deformação excessiva foram consideradas. Os resultados foram obtidos por métodos como os Algoritmos Genéticos (AGs), através do MATLAB, e o GRG, utilizando o *Solver*. Ao realizar as análises, verificou-se a superioridade dos AGs por obter menores custos.

Sacoman (2012) similarmente ao estudo anterior, avaliou a eficiência do GRG presente no *Solver*. O dimensionamento de uma viga caixão de alumínio, sujeita a flexão simples e ao

cisalhamento, foi transformado em um problema de otimização. Procurou-se encontrar as dimensões da viga que conduzissem aos menores custos, atentando as restrições de segurança e deflexão máxima. Os resultados comprovaram a eficiência do método GRG e a praticidade do *Solver* em problemas de otimização.

Rahmanian, Lucet e Tesfamariam (2014) realizaram um estudo muito realístico sobre otimização de vigas retangulares de concreto armado, representando um grande avanço em relação aos estudos anteriores. Buscou-se determinar a base, a altura e a área de aço de uma viga biapoiada, submetida a flexão simples e ao cisalhamento, que minimizassem os custos. A situação foi condicionada às restrições de segurança e utilização, tais como, limite de deformação e abertura de fissuras. As variáveis foram consideradas discretas. Os autores investigaram a eficiência do *Solver* na resolução desse tipo de problema e verificaram uma ligeira diferença com os resultados obtidos por outras ferramentas. Concluíram que o concreto e o aço possuem maior influência nos custos, concordando com Kripka e Pagnussat (2010).

Junior e Oliveira (2014), assim como Rahmanian, Lucet e Tesfamariam (2014), buscaram analisar um caso mais real de otimização de vigas retangulares de concreto armado. Para uma viga biapoiada, sujeita a flexão simples e ao cisalhamento, foram determinadas as dimensões da seção transversal, a resistência do concreto e o diâmetro das armaduras de aço que minimizassem os custos. Restrições relacionadas as normas técnicas foram impostas e as variáveis foram consideradas como discretas. Constatou-se que no dimensionamento otimizado, a base da seção transversal resultou na dimensão mínima imposta nas restrições, e que a altura se aproxima dos valores recomendados da literatura, corroborando com Kripka e Pagnussat (2010). O dimensionamento otimizado apresentou significativa economia, em relação a outras soluções possíveis, sendo esta uma conclusão relevante.

5 REFERENCIAL TEÓRICO

5.1 Dimensionamento de vigas de concreto armado

A seguir, serão apresentados os conceitos referentes ao dimensionamento de vigas de concreto armado de forma sucinta e objetiva.

Segue-se uma sequência lógica que facilite o entendimento do conteúdo. Primeiramente, são apresentados os materiais do concreto armado, com suas definições e propriedades. Em seguida, são expostas ideias gerais acerca do dimensionamento de estruturas de concreto. E por fim, o dimensionamento de vigas de concreto armado, propriamente dito.

5.1.1 Concreto

O concreto é um material composto, obtido por meio da mistura de cimento, agregado fino (areia), agregado graúdo (brita) e água. Em alguns casos, são incorporados aditivos com o objetivo de melhorar algumas propriedades.

Em seu estado fresco, o concreto apresenta como principais propriedades a consistência, a trabalhabilidade e a homogeneidade. No estado endurecido, as principais características são as mecânicas, como as resistências à compressão e à tração (CARVALHO; FILHO, 2014).

5.1.1.1 Propriedades do concreto

5.1.1.1.1 Classes

Segundo a ABNT NBR 8953:2015, o concreto é classificado em função da sua massa específica, resistência à compressão axial e consistência. Quanto a resistência, a referida norma classifica o concreto em dois grupos, conforme a resistência característica à compressão (fck). Tal classificação é apresentada na Tabela 2:

Tabela 2 - Classes de resistência de concretos estruturais

Classe de resistência Grupo I	Resistência característica à compressão (MPa)	Classe de resistência Grupo II	Resistência característica à compressão (MPa)
C20	20	C55	55
C25	25	C60	60
C30	30	C70	70
C35	35	C80	80
C40	40	C90	90
C45	45		
C50	50	C100	100

Fonte: ABNT NBR 8953:2015.

A ABNT NBR 6118:2014 se aplica aos concretos pertencentes aos Grupos I e II da Tabela 2, até a classe C90. Para o concreto armado, são utilizados os concretos C20 e superiores.

5.1.1.1.2 Resistência à compressão

A resistência característica à compressão é a principal característica do concreto, obtida em ensaios de corpos de prova cilíndricos, moldados de acordo com a ABNT NBR 5738 e rompidos conforme a ABNT NBR 5739. Segundo o item 8.2.4 da ABNT NBR 6118:2014, tal resistência deve ser relacionada à idade de 28 dias, caso não seja indicada.

Na prática, o projetista estrutural estipula um valor de f_{ck} para realizar os cálculos. Assim, o executor deve garantir essa resistência, comparando-a com a resistência do concreto fabricado (ou comprado).

5.1.1.1.3 Resistência à tração

O concreto não é um material que resiste bem à tração, sendo comum não considerar a contribuição dessa resistência. Todavia, é necessário determiná-la, pois pode estar relacionada com a capacidade resistente do elemento de concreto, e diretamente com a fissuração (CARVALHO; FILHO, 2014).

O item 8.2.5 da ABNT NBR 6118:2014 especifica que a resistência à tração direta pode ser considerada igual a $0,9 f_{ct,sp}$ ou $0,7 f_{ct,f}$, sendo $f_{ct,sp}$ a resistência à tração indireta e $f_{ct,f}$ a resistência à tração na flexão, obtidas por meio de ensaios. Na falta desse procedimento, a resistência à tração direta pode ser obtida por meio das equações:

$$f_{ctk,inf} = 0,7 f_{ct,m} \quad (1)$$

$$f_{ctk,sup} = 1,3 f_{ct,m} \quad (2)$$

$$f_{ct,m} = 0,3 f_{ck}^{2/3}, \text{ para concretos de classe até C50.} \quad (3)$$

Nas quais $f_{ct,m}$ e f_{ck} são expressos em MPa.

5.1.1.1.4 Módulo de elasticidade

O módulo de elasticidade é uma grandeza que mede a rigidez de um material sólido, que pode ser definida pelas relações entre tensões e deformações (CARVALHO; FILHO, 2014). Segundo Bueno e Kimura (2015), “é uma propriedade intrínseca dos materiais e depende da

composição química, microestrutura, natureza do agregado, imperfeições e defeitos (poros e fissuras)”.

De acordo com o item 8.2.8 da ABNT NBR 6118:2014, o módulo de elasticidade deve ser obtido por ensaios normatizados, sendo considerado o módulo de deformação tangente inicial aos 28 dias. Quando não forem realizados os ensaios, o item estabelece a seguinte equação para estimativa do módulo de elasticidade inicial:

$$E_{ci} = \alpha_E \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}}, \text{ para } f_{ck} \text{ de 20 a 50 MPa.} \quad (4)$$

Na qual E_{ci} e f_{ck} são dados em MPa, e α_E igual a:

- $\alpha_E = 1,2$ (para basalto e diabásio).
- $\alpha_E = 1$ (para granito e gnaisse).
- $\alpha_E = 0,9$ (para calcário).
- $\alpha_E = 0,7$ (para arenito).

O referido item estabelece que “na avaliação do comportamento de um elemento estrutural ou seção transversal, pode ser adotado módulo de elasticidade único, à tração e à compressão, igual ao módulo de deformação secante E_{cs} ”, sendo estimado pela expressão:

$$E_{cs} = \alpha_i \cdot E_{ci} \quad (5)$$

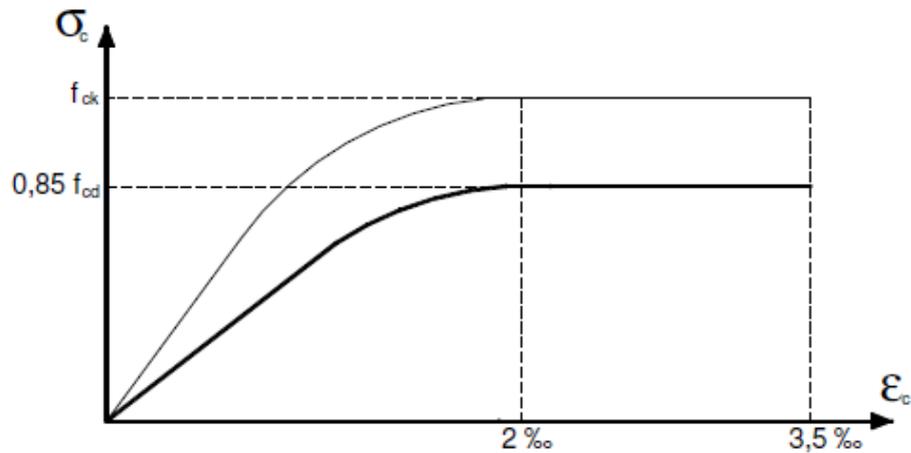
$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \cdot \frac{f_{ck}}{80} \leq 1 \quad (6)$$

Na qual E_{cs} , E_{ci} e f_{ck} são dados em MPa.

5.1.1.1.5 Diagrama tensão-deformação na compressão

A ABNT NBR 6118:2014, no item 8.2.10.1, admite a utilização de um diagrama tensão-deformação idealizado, para análises no estado-limite último, ilustrado na figura abaixo:

Figura 1 - Diagrama tensão-deformação idealizado para concretos de classe até C50



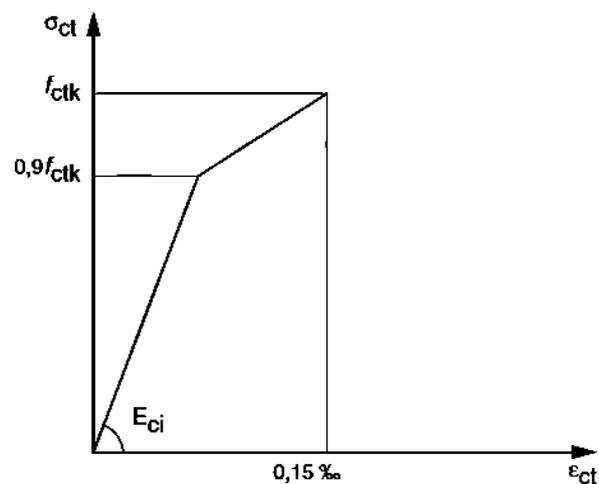
Fonte: BASTOS, 2014.

A referida norma também permite o uso de simplificações desse diagrama, descritas em sua seção 17.

5.1.1.1.6 Diagrama tensão-deformação na tração

Para o concreto não fissurado, o item 8.2.10.2 da ABNT NBR 6118:2014 permite a adoção de um diagrama tensão-deformação bilinear de tração, indicado na figura abaixo:

Figura 2 - Diagrama tensão-deformação bilinear de tração



Fonte: ABNT NBR 6118:2014.

5.1.2 Aço

O aço é um material metálico produzido em usinas siderúrgicas, constituído de ferro com adição de carbono. Para a obtenção de características específicas, podem ser realizadas a adição de outros materiais, tais como manganês, níquel, enxofre, etc (BASTOS, 2014).

No concreto armado, o aço pode ser de armadura passiva ou ativa. A ABNT NBR 6118:2014 define armadura passiva como “qualquer armadura que não seja usada para produzir forças de protensão, isto é, que não seja previamente alongada” e a armadura ativa como destinada à produção de forças de protensão.

5.1.2.1 Propriedades do aço (de armadura passiva)

5.1.2.1.1 Categoria

Para o projeto de estruturas de concreto armado, o aço é classificado de acordo com o valor característico da resistência de escoamento (f_{yk}) nas categorias CA-25, CA-50 e CA-60. As letras CA indicam “Concreto armado” e o número indica o f_{yk} em kN/cm². Essa classificação se encontra na ABNT NBR 7480:2007.

5.1.2.1.2 Massa específica

A ABNT NBR 6118:2014, em seu item 8.3.3, especifica o valor de 7850 kg/m³ para a massa específica do aço de armadura passiva.

5.1.2.1.3 Módulo de elasticidade

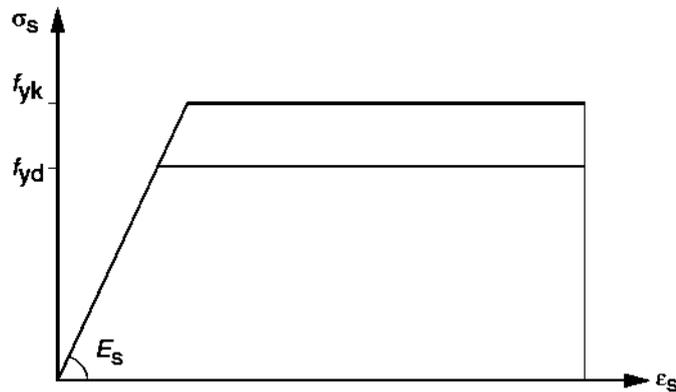
Conforme o item 8.3.5 da ABNT NBR 6118:2014, “na falta de ensaios ou valores fornecidos pelo fabricante, o módulo de elasticidade do aço poder admitido igual a 210 GPa”.

5.1.2.1.4 Diagrama tensão-deformação, resistência ao escoamento e à tração

Para a determinação do diagrama tensão-deformação do aço e os valores característicos da resistência ao escoamento f_{yk} , da resistência à tração f_{stk} e da deformação na ruptura ϵ_{uk} , a ABNT NBR 6118:2014, em seu item 8.3.6, estabelece que sejam feitos ensaios de tração

normatizados. Porém, a norma permite, para o cálculo nos estados-limite de serviço e último, a utilização do diagrama simplificado, indicado na figura abaixo. No mesmo item, é especificado que esse diagrama “é válido para intervalos de temperatura entre -20 °C e 150 °C e pode ser aplicado para tração e compressão”.

Figura 3 - Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas



Fonte: ABNT NBR 6118:2014.

5.1.3 Concreto armado

O concreto possui boa resistência à compressão e baixa resistência à tração. Então, para aumentar a resistência do elemento estrutural, é importante associar o concreto com algum material que tenha uma boa resistência à tração, sendo comum a utilização do aço, convenientemente posicionado no elemento. O concreto e o aço deverão trabalhar em conjunto, o que é possível graças às forças de aderência entre a superfície dos dois materiais. Além disso, o concreto e o aço possuem coeficientes de dilatação térmica próximos e o aço, ao ser envolvido pelo concreto, é protegido contra corrosão e altas temperaturas.

A ABNT NBR 6118:2014 define os elementos de concreto armado como “aqueles cujo comportamento estrutural depende da aderência entre concreto e armadura, e nos quais não se aplicam alongamentos iniciais das armaduras antes da materialização dessa aderência”. Suas principais características são o trabalho conjunto do concreto e armadura, devido à aderência, e à possibilidade de ocorrência de regiões fissuradas de concreto.

Assim, o concreto armado agrupa as qualidades do concreto com as do aço, possibilitando a construção de elementos com formas variadas, com relativa rapidez e facilidade (BASTOS, 2014).

5.1.4 Dimensionamento de estruturas de concreto armado

O dimensionamento estrutural consiste em impedir a ruína total ou parcial de uma estrutura. De modo geral, no dimensionamento estrutural, procura-se dimensionar uma seção, com alguns parâmetros pré-definidos, para suportar as solicitações máximas a que poderá estar sujeita (CARVALHO; FILHO, 2014).

No item 14.2.1, a ABNT NBR 6118:2014 define que “o objetivo da análise estrutural é determinar os efeitos das ações em uma estrutura, com a finalidade de efetuar verificações dos estados-limites últimos e de serviço”. Tal análise, deve ser feita a partir de um modelo estrutural adequado, que deve apresentar a geometria dos elementos estruturais, os carregamentos, as condições de contorno e as características e respostas dos materiais, conforme prescreve o item 14.2.2 da norma citada. Na mesma norma são apresentados alguns tipos de análise estrutural que podem ser utilizados em estruturas de concreto armado, tais como a análise linear e não-linear.

Na verificação da segurança das estruturas de concreto, o item 12.5 da ABNT NBR 6118:2014 especifica que “devem ser atendidas as condições construtivas e as condições analíticas de segurança”. Em relação às condições construtivas deve-se atentar aos critérios de detalhamento (definidos nas seções 18 e 20 da referida norma), ao controle dos materiais e ao controle de execução. Quanto às condições analíticas, as resistências não podem ser menores que as solicitações e devem ser verificadas para todos os estados limites, e de modo geral, em qualquer caso. A norma afirma que devem ser considerados os estados-limites últimos, relacionados a ruína estrutural, e os estados-limites de serviço, referentes a utilização da estrutura.

Além do atendimento às condições anteriormente citadas, a ABNT NBR 6118:2014 também prescreve, em seu item 5.1, que as estruturas de concreto devem atender aos requisitos de qualidade estabelecidos nas normas técnicas, relacionados à capacidade resistente, ao desempenho em serviço e à durabilidade. Os requisitos relacionados à capacidade resistente correspondem à segurança à ruptura, os de desempenho em serviço referem-se a danos como, por exemplo, deformações e fissuração excessivas, e os requisitos de durabilidade estão relacionados a conservação da estrutura, sem a necessidade de reparos dispendiosos durante sua vida útil. Uma quantidade significativa de problemas verificados em construções tem sua origem na fase de projeto, sendo então de grande importância o atendimento aos requisitos de qualidade (BUENO; KIMURA, 2015).

5.1.4.1 Resistências de cálculo

As resistências utilizadas no dimensionamento (f_d), conforme o item 12.3.1 da ABNT NBR 6118:2014, devem ser minoradas através da seguinte expressão:

$$f_d = \frac{f_k}{\gamma_m} \quad (7)$$

Os coeficientes de ponderação (γ_m), para as verificações no estado limite último e de serviço, são encontrados no item 12.4 da norma citada.

5.1.4.2 Ações

No contexto do dimensionamento estrutural, as ações significam quaisquer influências que produzam estado de tensão ou de deformação em uma estrutura (CARVALHO; FILHO, 2014). O item 11.2.1 da ABNT NBR 6118:2014 normatiza que “na análise estrutural deve ser considerada a influência de todas as ações que possam produzir efeitos significativos para a segurança da estrutura em exame, levando-se em conta os possíveis estados limites últimos e os de serviço”.

Segundo a norma citada, as ações podem ser classificadas como permanentes, variáveis e excepcionais. O item 11.3.1 define as ações permanentes como as que ocorrem com valores praticamente constantes durante a existência da estrutura, sendo consideradas também como ações permanentes, as ações que aumentam com o tempo, tendendo a limite constante. Já as ações variáveis são aquelas que apresentam variações durante a vida da construção. As ações excepcionais apresentam curta duração e pequena probabilidade de ocorrência durante a existência da estrutura.

De acordo com o item 11.6.2 da ABNT NBR 6118:2014, as ações são quantificadas por seus valores representativos, que podem ser valores característicos, convencionais excepcionais e reduzidos.

Para o dimensionamento, as ações devem ser combinadas de tal forma que possam ser determinados os efeitos mais desfavoráveis para a estrutura, realizadas de acordo com o item 11.8 da ABNT NBR 6118:2014. Para as verificações de segurança em relação aos estados limites último e de serviço, devem ser utilizadas as combinações últimas e de serviço,

respectivamente. Nas combinações de ação, deve-se considerar o valor representativo das ações, multiplicado por coeficientes de ponderação estabelecidos na norma mencionada.

5.1.5 Vigas de concreto armado

Segundo o item 14.4 da ABNT NBR 6118:2014, os elementos estruturais básicos são classificados conforme sua geometria e função estrutural, sendo os elementos lineares definidos como “aqueles em que o comprimento longitudinal supera em pelo menos três vezes a maior dimensão da seção transversal”. As vigas, então, são definidas como elementos lineares onde o esforço de flexão é dominante.

As vigas de concreto armado são amplamente utilizadas na construção civil, geralmente destinadas à sustentação de outros elementos estruturais e/ou distribuição de esforços. Em edifícios usuais, às lajes se apoiam em vigas que, por sua vez, apoiam-se em pilares que descarregam as cargas nas fundações.

5.1.6 Dimensionamento de vigas de concreto armado

5.1.6.1 Análise estrutural

Para a análise estrutural de vigas, assim como de outros elementos lineares, o item 14.6.1 da ABNT NBR 6118:2014 estabelece as seguintes hipóteses básicas:

- a) A seção se mantém plana após a deformação;
- b) A representação dos elementos por seus eixos longitudinais;
- c) O comprimento dos elementos é limitado pelos centros dos apoios ou pelo cruzamento com o eixo de outro elemento estrutural.

Bueno e Kimura (2015) afirmam que a análise linear pode servir de base para o dimensionamento de elementos lineares. Tal análise linear, descrita em 14.5.2 da ABNT NBR 6118:2014, considera o comportamento elástico-linear para os materiais, e seus resultados podem ser utilizados na verificação dos estados-limites último e de serviço. Para o cálculo da rigidez da viga, na análise linear, o item 14.6.4.1 da referida norma permite, como aproximação, “tomar o módulo de elasticidade secante e o momento de inércia da seção bruta de concreto”.

Porém, para a verificação das flechas, o mesmo item impõe que “devem obrigatoriamente ser consideradas a fissuração e a fluência”.

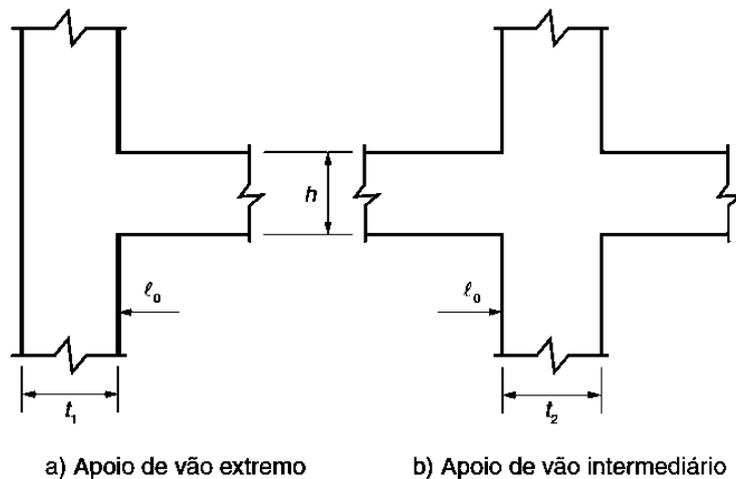
Na análise estrutural de vigas, no tocante a geometria, o item 14.6.2.4 da ABNT NBR 6118:2014 determina que o vão efetivo pode ser calculado pela seguinte equação:

$$l_{ef} = l_0 + a_1 + a_2 \quad (8)$$

Na qual:

- l_0 é o vão livre (Figura 4);
- a_1 é igual ao menor valor entre $\left(\frac{t_1}{2}\right)$ e $0,3h$ (Figura 4);
- a_2 é igual ao menor valor entre $\left(\frac{t_2}{2}\right)$ e $0,3h$ (Figura 4).

Figura 4 - Vão efetivo



Fonte: ABNT NBR 6118:2014.

5.1.6.2 Pré-dimensionamento

No dimensionamento de vigas de concreto armado, é comum pré-dimensionar a seção transversal, determinando a base e a altura, e realizar, posteriormente, as verificações exigidas pelas normas técnicas.

Comumente, a preferência dos profissionais da construção civil é de que os elementos estruturais fiquem escondidos nas edificações. As vigas são embutidas nas paredes de vedação, sendo ocultadas da visão humana, de modo que sua largura fica dependente da espessura final da parede. Assim, um critério para a escolha dessa largura é adotar a espessura da parede, sem

os revestimentos. No entanto, é interessante informar que o ocultamento dos elementos estruturais não é regra. Charleson (2009), por exemplo, considera que tais elementos, além de suas funções estruturais, podem ganhar funções estéticas quando aparentes, enriquecendo a arquitetura. De qualquer modo, antes do projetista determinar a largura da viga, deve atentar-se as especificações e conceitos arquitetônicos determinados. A ABNT NBR 6118:2014, em seu item 13.2.2, especifica que “a seção transversal das vigas não pode apresentar largura menor que 12 cm” e que, em casos excepcionais, esse valor pode ser reduzido para 10 cm.

A altura das vigas (h), pode ser estimada pelas seguintes equações (PINHEIRO; MUZARDO; SANTOS, 2003):

$$\text{Para tramos internos: } h = \frac{l_0}{12} \quad (9)$$

$$\text{Para tramos externos e vigas biapoiadas: } h = \frac{l_0}{10} \quad (10)$$

$$\text{Para balanços: } h = \frac{l_0}{5} \quad (11)$$

De preferência, a altura das vigas deve ser modulada de 5 em 5 cm, ou de 10 em 10 cm. Segundo Bastos (2015a), uma indicação para a altura mínima é de 25 cm. Além disso, a altura da viga fica limitada às disposições construtivas, tais como a interferência em portas e janelas.

5.1.6.3 Esforços solicitantes

Nos edifícios usuais, as ações atuantes nas vigas são provenientes de lajes, paredes, outras vigas e o seu peso próprio. Tais ações, como determina o item 11.8.1 da ABNT NBR 6118:2014, devem ser combinadas, definindo o carregamento da viga. Para as verificações da segurança em relação ao estado-limite último, as ações devem ser combinadas de acordo com o item 11.8.2 da norma citada, e para o estado-limite de serviço, a combinação deve ser feita conforme o item 11.8.3. Assim, os esforços solicitantes de cálculo são calculados para a combinação de ações considerada, conforme normatiza o item 12.5.4 da referida norma.

5.1.6.4 Dimensionamento à flexão

Normalmente, uma das primeiras etapas no dimensionamento de vigas, é o dimensionamento à flexão normal simples. Quando uma viga é submetida a um carregamento vertical surgem tensões normais perpendiculares à seção transversal. O dimensionamento à

flexão, no estado-limite último, é realizado para a seção mais solicitada, impondo que nessa seção sejam alcançadas as deformações específicas limites dos materiais (CARVALHO; FILHO, 2014).

Ao ser submetida à um momento fletor crescente, a seção transversal da viga passa por três níveis de deformação, chamados de Estádios. Para uma viga de concreto, submetida a flexão normal simples, tais estágios de tensão são os Estádios I, II e III. No Estádio I, o concreto consegue resistir as tensões de tração, e o digrama de tensões, ao longo da seção, é linear. No Estádio II, o concreto não mais resiste à tração e a seção se encontra fissurada na região tracionada, e na parte comprimida, o diagrama de tensões se mantém linear. Já no Estádio III, a região comprimida encontra-se plastificada e o concreto dessa região está na iminência da ruptura, sendo que o diagrama de tensões não é mais linear. De forma prática, os Estádios I e II correspondem às situações de serviço, e o Estádio III corresponde ao estado-limite último, que só ocorre em situações extremas. O dimensionamento das vigas de concreto armado, bem como de outros elementos estruturais, é realizado no Estádio III, com o objetivo de resistir aos esforços solicitantes, de forma econômica, sem chegar ao colapso.

Para a análise dos esforços resistentes de uma seção de viga de concreto armado, sujeita a solicitações normais, o item 17.2.2 da ABNT NBR 6118:2014 estabelece as seguintes hipóteses básicas, que devem ser consideradas:

- a) As seções transversais se mantêm planas após a deformação;
- b) A deformação das barras passivas aderentes deve ser a mesma do concreto em seu entorno;
- c) No estado-limite último, as tensões de tração no concreto, normais à seção transversal, devem ser desprezadas;
- d) A distribuição de tensões de compressão no concreto é feita de acordo com o diagrama parábola-retângulo, exposto no item 8.2.10.1 da norma. No entanto, esse diagrama pode ser substituído pelo retângulo de profundidade $y = \lambda x$, onde λ é dado por:

$$\lambda = 0,8, \text{ para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa.} \quad (12)$$

No caso da largura da seção, medida paralelamente à linha neutra, não diminuir a partir desta para a borda comprimida, a tensão constante atuante até a profundidade y pode ser tomada igual a:

$$\alpha_c \cdot f_{cd} \quad (13)$$

$$\text{Para concretos de classe até C50: } \alpha_c = \mathbf{0,85}. \quad (14)$$

Essa simplificação do diagrama tensão-deformação do concreto é permitida pois, conforme a ABNT NBR 6118:2014, “as diferenças de resultados obtidos com esses dois diagramas são pequenas e aceitáveis, sem necessidade de coeficiente de correção adicional”;

- e) A tensão nas armaduras deve ser obtida a partir do diagrama tensão-deformação, exposto no item 8.3.6 da ABNT NBR 6118:2014;
- f) O estado-limite último é caracterizado quando a distribuição das deformações na seção pertencer a um dos domínios esquematizados na Figura 5, com ϵ_{c2} e ϵ_{cu} definidos no item 8.2.10.1 da ABNT NBR 6118:2014.

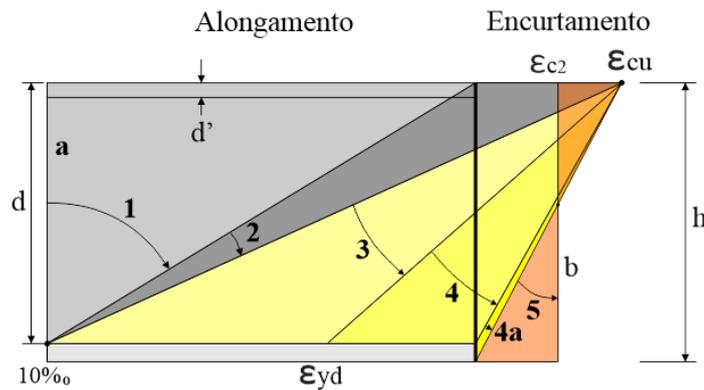
Os domínios de deformação, expostos na Figura 5, representam as várias possibilidades de ruína da seção, caracterizadas pelas deformações específicas de cálculo do concreto e do aço. A flexão simples é representada pelos Domínios 2, 3 e 4, onde a seção resistente é composta do aço tracionado e do concreto comprimido. No Domínio 2, o concreto não alcança a ruptura ($\epsilon_c < \epsilon_{cu}$) e o alongamento do aço tracionado é o máximo permitido (1%), sendo essa a ruptura convencional por deformação plástica. No Domínio 3, o concreto alcança a ruptura à compressão (ϵ_{cu}) e o aço escoou ($\epsilon_s \geq \epsilon_{yd}$), sendo uma ruptura convencional por encurtamento-limite do concreto. No Domínio 4, assim como no Domínio 3, o concreto atinge a ruptura (ϵ_{cu}), porém o aço não escoou ($\epsilon_s < \epsilon_{yd}$), sendo também uma ruptura convencional por encurtamento-limite do concreto. O Domínio 3 representa uma situação ideal, pois a ruptura do concreto ocorre simultaneamente com o escoamento do aço, sendo então, tanto o concreto quanto o aço, aproveitados integralmente, e além do mais, a ruína acontece com avisos (devido as grandes deformações). Em contraste, o Domínio 4 representa uma situação antieconômica, pois o aço não é utilizado com toda a sua capacidade resistente e a ruptura é frágil. Portanto, procura-se trabalhar a viga no Domínio 3, sendo o Domínio 2 aceitável e o Domínio 4 evitado.

Devido às limitações da posição da linha neutra, impostas no item 17.2.3 da ABNT NBR 6118:2014, parte do Domínio 3 e o Domínio 4 não são atingidos (Figura 6), como demonstra Carvalho e Filho (2014). Tais limitações são necessárias devido a

necessidade de se garantir boas condições de ductilidade nas vigas. Conforme o item 14.6.4.3 da norma citada, essa limitação é dada por:

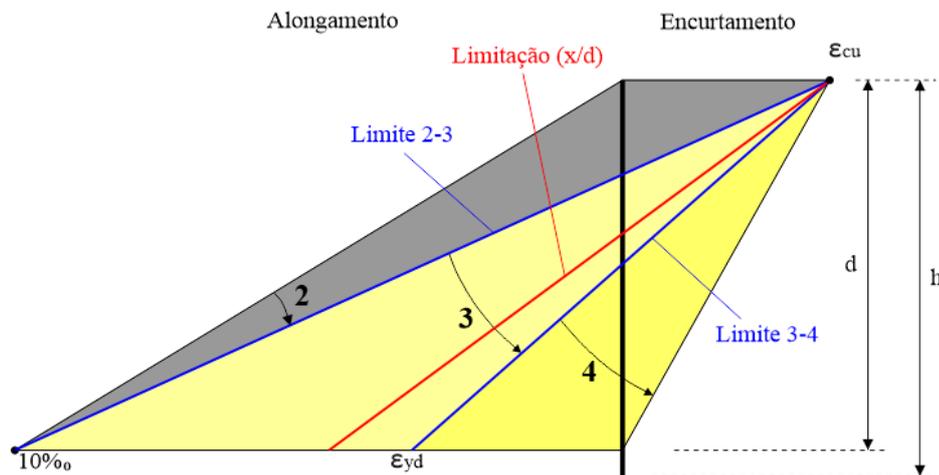
$$\frac{x}{d} \leq 0,45, \text{ para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa.} \quad (15)$$

Figura 5 – Domínios de estado-limite último de uma seção transversal



Fonte: Adaptado de ABNT NBR 6118:2014.

Figura 6 - Limitação da posição da linha neutra

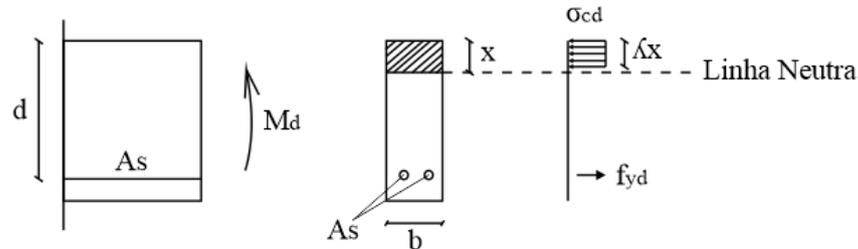


Fonte: Autor (2016).

Para a seção transversal retangular, esquematizada na Figura 7, através das equações de equilíbrio das forças atuantes normais à seção e do equilíbrio dos momentos, são obtidas as equações da posição da linha neutra (x) e da área necessária de aço resistente à tração (A_s). Ressalta-se que, como as restrições da posição da linha neutra limitam a seção aos Domínios 2

e 3, para um melhor aproveitamento da armadura, tem-se $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd}$, resultando para tensão no aço o valor da tensão de escoamento ($F_s = f_{yd}$).

Figura 7 - Seção transversal com armadura simples



Fonte: Adaptado de CARVALHO e FILHO (2014).

$$x = \frac{d}{\lambda} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot M_d}{\alpha_c \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2} \right)} \right] \quad (16)$$

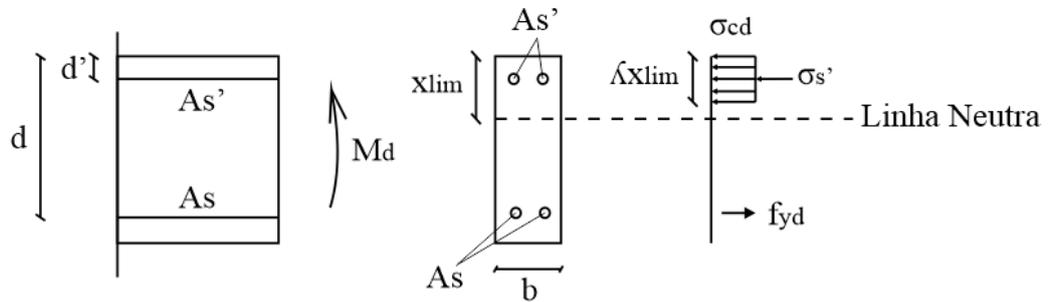
$$A_s = \frac{\alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \lambda \cdot x \cdot b}{f_{yd}} \quad (17)$$

Nas quais:

- d é a altura útil;
- M_d é o momento sollicitante de cálculo;
- b é a largura da seção transversal da viga.

Podem acontecer situações em que o valor de (x/d) não atenda aos limites impostos pela ABNT NBR 6118:2014. Em tais casos, ao invés de se aumentar a altura da seção, é possível adotar uma armadura de compressão para respeitar os limites da posição da linha neutra. Para a determinação da área de aço da armadura de compressão, deve ser calculado o momento limite (M_{dlim}) que a seção consegue resistir, para a situação de armadura simples com o valor da linha neutra limite. A diferença entre o momento atuante (M_d) e o momento limite (M_{dlim}) será resistida pela armadura de compressão. Ao possuir armadura inferior de tração e armadura superior de compressão, é comum nomear a viga como duplamente armada. Assim, para a seção retangular com armadura dupla, esquematizada na Figura 8, através das equações de equilíbrios, são determinadas as equações da área de aço comprimido (A_s') e tracionado (A_s):

Figura 8 - Seção transversal com armadura dupla



Fonte: Adaptado de CARVALHO e FILHO (2014).

$$A_s' = \frac{M_d - M_{dlim}}{\sigma_s'(d - d')} \quad (18)$$

$$A_s = \frac{\sigma_s' \cdot A_s' + \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \lambda \cdot x_{lim} \cdot b}{f_{yd}} \quad (19)$$

Nas quais:

- d' é a distância entre o centro de gravidade da armadura tracionada até a borda comprimida de concreto;
- M_{dlim} é o máximo momento que a seção consegue resistir, para a situação de armadura simples com a linha neutra limite;
- σ_s' é a tensão na armadura de compressão.

Em conformidade com o item 17.3.5 da ABNT NBR 6118:2014, a armadura de flexão calculada deve respeitar valores mínimos e máximos normatizados. A armadura mínima evita rupturas frágeis da seção, além de absorver pequenos esforços não considerados no cálculo. Já a imposição de valores máximos assegura condições de ductilidade e respeita o campo de validade dos ensaios que deram origem às prescrições de funcionamento do conjunto aço-concreto. O item 17.3.5.2.1 da referida norma, afirma que a armadura mínima de tração deve ser determinada pelo dimensionamento da seção a um momento fletor mínimo, calculado pela expressão abaixo, respeitando a taxa mínima absoluta de 0,15%:

$$M_{d,min} = 0,8 \cdot W_0 \cdot f_{ctk,sup} \quad (20)$$

Na qual:

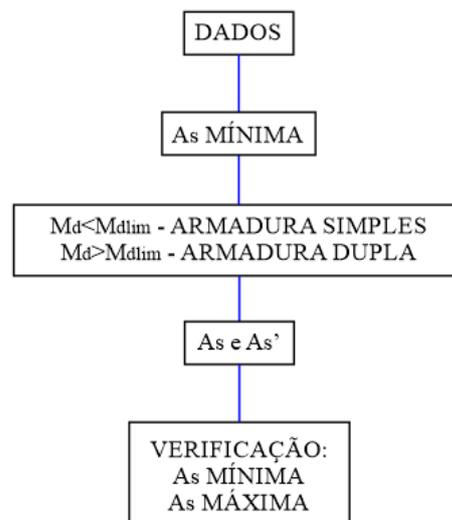
- W_0 é o módulo de resistência da seção transversal bruta de concreto, relativo à fibra mais tracionada;
- $f_{ctk,sup}$ é a resistência característica superior do concreto à tração.

E segundo o item 17.3.5.2.4 ABNT NBR 6118:2014, a soma das armaduras de tração e de compressão ($A_s + A_s'$) não pode ter valor maior que 4% da área de concreto (A_c), calculada na região fora da zona de emendas.

Em síntese, o dimensionamento de vigas com seção retangular de concreto armado, sujeita à flexão, segue o seguinte roteiro de cálculo, esquematizado na Figura 9:

1. Dados pré-definidos da seção: b , h , f_{ck} e f_{yk} ;
2. Cálculo da armadura mínima de tração;
3. Determinação da seção como simplesmente ou duplamente armada. Calcula-se o M_{dlim} e compara-o com o M_d . Se M_d for maior que M_{dlim} , a seção terá armadura dupla, caso contrário, apenas armadura de tração;
4. Cálculo das armaduras;
5. Verificação das áreas de aço, no tocante aos valores mínimos e máximos de armadura.

Figura 9 - Fluxograma do dimensionamento à flexão.



Fonte: Autor (2016).

5.1.6.5 Dimensionamento à força cortante

Em casos reais de vigas submetidas a um carregamento vertical, surgem na seção transversal, além das tensões normais, tensões tangenciais que equilibram o esforço cortante. Dessa forma, é desenvolvido um estado biaxial de tensões, com tensões principais de tração e compressão geralmente inclinadas em relação ao eixo da viga, sendo que as de compressão são resistidas pelo concreto comprimido, e as tensões de tração resistidas pela armadura transversal. Desse modo, é necessária a determinação dessa armadura para proporcionar segurança frente aos distintos tipos de ruptura (CARVALHO; FILHO, 2014).

A ABNT NBR 6118:2014 prescreve, em seu item 17.4.1, como hipótese básica para o dimensionamento de elementos lineares sujeitos à força cortante, a admissão de dois tipos de modelo de cálculo (modelo de cálculo I e II) “que pressupõem a analogia com modelo em treliça, de banzos paralelos, associado a mecanismos resistentes complementares desenvolvidos no interior do elemento estrutural e traduzidos por uma componente adicional V_c ”. No modelo de cálculo I, a treliça clássica de Ritter-Mörsch é adotada, e no modelo de cálculo II, adota-se a treliça generalizada (BASTOS, 2015b).

A resistência da viga, em uma determinada seção transversal, consoante o item 17.4.2.1 da ABNT NBR 6118:2014, deve ser considerada satisfatória, quando verificadas simultaneamente, as seguintes condições:

$$V_{sd} \leq V_{Rd2} \quad (21)$$

$$V_{sd} \leq V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \quad (22)$$

Nas quais:

- V_{sd} é a força cortante solicitante de cálculo, na seção;
- V_{Rd2} é a força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto, conforme o modelo de cálculo adotado;
- $(V_{Rd3} = V_c + V_{sw})$ é a força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína por tração diagonal, onde V_c é a parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao da treliça e V_{sw} a parcela resistida pela armadura transversal, conforme o modelo de cálculo adotado.

Para a determinação da armadura transversal, em uma determinada seção, basta apenas considerar o sinal de igualdade na verificação da eq.(22). Assim, a primeira verificação refere-

se ao esmagamento das diagonais comprimidas de concreto, e a segunda, ao cálculo da armadura transversal.

No presente trabalho, será considerado apenas o modelo de cálculo I. Nesse modelo, admite-se “diagonais de compressão inclinadas de $\theta = 45^\circ$ em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural e admite ainda que a parcela complementar V_c tenha valor constante, independentemente de V_{sd} ” (item 17.4.2.2 da ABNT NBR 6118:2014). No mesmo item, são apresentadas as equações que devem ser utilizadas no modelo de cálculo I. É comum considerar a inclinação (α) da armadura transversal, em relação ao eixo longitudinal da viga, igual a 90° .

No dimensionamento à força cortante, bem como à flexão, a armadura calculada deve atender a um valor mínimo, situado no item 17.4.1.1.1 da ABNT NBR 6118:2014. A taxa de armadura mínima é dada pela seguinte equação:

$$\rho_{sw} = \frac{A_{sw}}{b_w \cdot s \cdot \text{sen}\alpha} \geq 0,2 \cdot \frac{f_{ct,m}}{f_{ywk}} \quad (23)$$

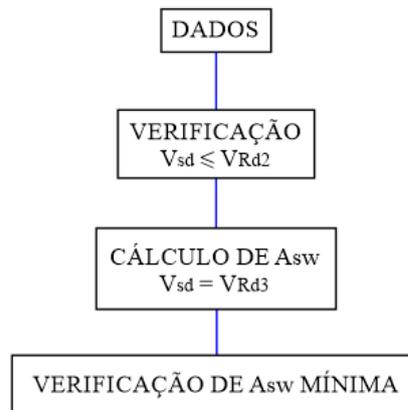
Na qual:

- A_{sw} é a área da seção transversal dos estribos;
- s é o espaçamento dos estribos, medido segundo o eixo longitudinal do elemento estrutural;
- α é a inclinação dos estribos em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural;
- b_w é a largura média da alma, medida ao longo da altura útil da seção;
- f_{ywk} é a resistência característica ao escoamento do aço da armadura transversal;
- $f_{ct,m}$ é dado no item em 8.2.5 ABNT NBR 6118:2014.

Resumidamente, o dimensionamento de vigas retangulares de concreto armado à força cortante se dá pelas seguintes etapas, esquematizadas na Figura 10:

1. Dados da seção: b , h , f_{ck} e f_{yk} da armadura transversal;
2. Verificação da compressão diagonal do concreto: $V_{sd} \leq V_{Rd2}$;
3. Cálculo da armadura transversal, através da equação: $V_{sd} = V_{Rd3}$;
4. Verificação do atendimento a taxa de armadura mínima.

Figura 10 - Fluxograma do dimensionamento ao cisalhamento.



Fonte: Autor (2016).

5.1.6.6 Detalhamento

Na verificação da segurança das vigas de concreto armado, devem ser atendidas, além das condições analíticas, as condições construtivas estabelecidas no item 12.5.1 da ABNT NBR 6118:2014. Uma dessas condições são os critérios de detalhamento, explanadas na seção 18 da norma citada. Com os cálculos das áreas de aço efetuados, a quantidade, escolha e arranjo das armaduras deve atender tais critérios normatizados.

Para as armaduras longitudinais, a escolha do diâmetro ou dos diâmetros e do número de barras necessário para atender à área de aço calculada admite várias possibilidades, sendo recomendado a escolha de diâmetros com valores próximos entre si (BASTOS, 2015c). As especificações para as armaduras de flexão (armaduras longitudinais) estão no item 18.3.2 da ABNT NBR 6118:2014 e são expostas, juntamente com conceitos adicionais, a seguir:

- a) A armadura deve atender a quantidade mínima normatizada;
- b) Em relação a distribuição transversal, os espaçamentos entre as faces das barras longitudinais, medidos no plano da seção transversal, devem atender aos valores mínimos estabelecidos no item 18.3.2.2 ABNT NBR 6118:2014. Na direção horizontal, o espaçamento deve atender aos seguintes valores: 20 mm, diâmetro da barra (do feixe, ou da luva) e 1,2 vez a dimensão máxima característica do agregado graúdo. Na direção vertical, os mesmos valores devem ser atendidos, com a diferença do terceiro valor, que deve ser 0,5 vez a dimensão máxima característica do agregado graúdo. Além disso, os espaçamentos devem ser projetados de forma a possibilitar a introdução do vibrador,

impedir a segregação dos agregados e a ocorrência de vazios no interior da viga (item 18.2.1 da referida norma);

- c) Além do detalhamento da armadura longitudinal na seção, deve-se obter o seu desenvolvimento no vão da viga. O comprimento das armaduras de tração, ao longo da viga, deve ser determinado através do diagrama de momentos fletores decalado, conforme as prescrições do item 18.3.2.3.1 ABNT NBR 6118:2014. Uma questão construtiva que deve ser considerada, é que existe a necessidade de que quatro barras de aço (duas superiores e duas inferiores) se estendam em toda a viga para auxiliar as armaduras transversais;
- d) Uma etapa do detalhamento muito importante para a segurança estrutural é a ancoragem da armadura longitudinal (BASTOS, 2015d). Para tanto, os itens 18.3.2.4, 18.3.2.4.1 e a seção 9 da ABNT NBR 6118:2014 especificam os critérios para a ancoragem das armaduras. É comum o prolongamento das barras de aço, de acordo com as diretrizes normatizadas, para a ancoragem junto aos apoios.

As armaduras transversais, destinadas a resistir as forças de tração provocadas por forças cortantes, podem ser compostas por estribos, combinados ou não com barras dobradas ou telas soldadas, conforme afirma o item 18.3.3.1 da ABNT NBR 6118:2014. Os critérios para o detalhamento das armaduras transversais (com estribos) estão no item 18.3.3.2 da norma citada, sendo apresentados a seguir:

- a) Os estribos devem ser fechados através de um ramo horizontal, envolvendo a armadura longitudinal de tração, e ancorados na face oposta;
- b) O diâmetro dos estribos deve ser maior ou igual a 5 mm, e não deve exceder 1/10 da largura da alma da viga. Quando a barra que constitui o estribo for lisa, seu diâmetro não pode ser maior que 12 mm;
- c) O espaçamento longitudinal mínimo entre estribos deve ser suficiente para permitir a passagem da agulha do vibrador. Esse espaçamento deve atender aos valores máximos, estabelecidos no referido item. Além dessas limitações, o espaçamento entre os ramos verticais do estribo não pode exceder os valores estipulados no mesmo item;
- d) Outro tópico do detalhamento dos estribos, é a ancoragem, que deve ser feita de acordo com o item 9.4.6.

Existe ainda, outro aspecto no detalhamento de vigas, não relacionado as armaduras de flexão e esforço cortante. Segundo o item 17.3.5.2.3 da ABNT NBR 6118:2014, para as vigas com altura superior a 60 cm é necessário adotar uma armadura mínima lateral, denominada armadura de pele. Essa armadura deve ser 0,10% da área da seção transversal, em cada face da alma da viga, com espaçamento não superior a 20 cm e deve ser corretamente ancorada nos apoios. Ainda segundo a mesma norma, não é necessária uma armadura superior a 5 cm²/m por face.

As armaduras, além de dispostas corretamente na viga, devem possuir um cobrimento adequado de concreto, estabelecido no item 7.4.7 da ABNT NBR 6118:2014, para protege-las da corrosão e da ação do fogo. O cobrimento a ser adotado (cobrimento nominal) para vigas de concreto armado, é encontrado na tabela 7.2 da referida norma, e depende da classe de agressividade ambiental, determinada na tabela 6.1 da mesma norma. O cobrimento nominal deve atender aos valores mínimos normatizados (item 7.4.7.5 da ABNT NBR 6118:2014).

5.1.6.7 Estados-limites de serviço

Os estados-limites de serviço, segundo o item 10.4 da ABNT 6118:2014, são “aqueles relacionados ao conforto do usuário e à durabilidade, aparência e boa utilização das estruturas, seja em relação aos usuários, seja em relação às máquinas e aos equipamentos suportados pelas estruturas”. Nas vigas de concreto armado, como em outros elementos estruturais, esses limites devem ser verificados, sendo comum a verificação dos estados-limites de deformação excessiva e fissuração.

O estado-limite de deformação excessiva é o estado em que as deformações atingem os valores limites normatizados. Deve ser verificado conforme as estipulações do item 17.3.2 da ABNT NBR 6118:2014. Segundo tal item, a verificação deve ser feita através de modelos que consideram a rigidez efetiva da viga, a existência de fissuras no concreto e as deformações diferidas no tempo. Essas considerações contribuem para a determinação de valores de deformação mais coerentes, porém, não se pode esperar grande precisão, pois a deformação real da viga depende também do processo construtivo, assim como das propriedades dos materiais no momento da sua efetiva solicitação.

Assim, por se tratar de um valor complexo de se determinar, o item 17.3.2.1 da ABNT NBR 6118:2014 apresenta uma avaliação aproximada da flecha em vigas. Admite-se o concreto e o aço como materiais de comportamento elástico e linear, de modo que as seções ao longo da viga possam ter as deformações específicas determinadas nos Estádios I e II.

Na avaliação aproximada da flecha imediata nas vigas, a ABNT NBR 6118:2014 permite a utilização de uma rigidez equivalente, dada no item 17.3.2.1.1. Para o Estádio I, considera-se a rigidez da seção bruta de concreto, mas para o estágio II, a armadura deve ser levada em consideração.

Finalmente, um valor aproximado para a flecha imediata (a_i) de vigas pode ser obtido pela equação da resistência dos materiais, considerando a rigidez equivalente:

$$a_i = \frac{\alpha_c \cdot p \cdot l^4}{(EI)_{eq,t0}} \quad (24)$$

Na qual:

- p é a carga definida pela combinação de ações;
- l é o vão da viga;
- α_c é o coeficiente que, no caso de vigas biapoiadas e carga uniformemente distribuída é igual a (5/384).

O efeito da fluência, relacionado ao surgimento de deformações ao longo do tempo, deve ser obrigatoriamente levado em consideração na avaliação das deformações excessivas nas vigas, conforme o item 17.3.2.1 da ABNT NBR 6118:2014, pois, segundo Carvalho e Filho (2014), o valor da deformação devido ao efeito de fluência pode atingir valores até o triplo do valor da deformação imediata. A flecha diferida é dada, de maneira aproximada, pela multiplicação da flecha imediata pelo fator α_f , dado no item 17.3.2.1.2 da norma citada.

Enfim, com a determinação das flechas imediata e diferida, é calculada a flecha total, dada pela soma das duas anteriores. A flecha total deve atender aos valores de deslocamentos-limites estipulados no item 13.3 da ABNT NBR 6118:2014, que são classificados em quatro grupos básicos de acordo com o efeito provocado pela deformação excessiva.

Caso a flecha total ultrapasse os valores limites normatizados, uma das providências que podem ser tomadas é a adoção de uma contraflecha (a_c), estimada por meio da expressão (PINHEIRO; MUZARDO, 2004):

$$a_c = a_i + \frac{a_f}{2} \quad (25)$$

Na qual:

- a_i é a flecha imediata;
- a_f é a flecha diferida;

O estado-limite de fissuração, especificadamente o de abertura de fissuras, é o estado em que as fissuras se apresentam com aberturas iguais aos máximos valores estabelecidos pela ABNT NBR 6118:2014. Tal estado-limite deve ser verificado conforme o item 17.3.3 da referida norma, onde são apresentadas duas formas de verificação. No item 17.3.3.2 o controle de fissuração é feito através da limitação da abertura estimada das fissuras, e no item 17.3.3.3 o controle é feito através do atendimento as restrições de diâmetro e espaçamento máximos.

A verificação de abertura de fissuras, através do item 17.3.3.2 da ABNT NBR 6118:2014, deve ser feita para cada elemento das armaduras passivas ou ativas aderentes que controlam a fissuração da peça, sendo considerada uma certa área do concreto de envolvimento. Com a determinação do tamanho da abertura de fissuras, conforme o item citado, verifica-se se este valor respeita os valores limites de abertura de fissuras estabelecidos no item 13.4.2 da norma citada.

5.2 Otimização

5.2.1 Fundamentos da otimização

Em seu sentido comum, a otimização pode ser definida como o processo de procura por uma solução que forneça o maior benefício possível, conforme algum critério, ou seja, é a busca da melhor condição (BAZZO; PEREIRA, 2006). O conceito é encontrado em várias situações simples do cotidiano. Constantemente procura-se o melhoramento de soluções, afim de maximizar benefícios ou minimizar prejuízos. Na engenharia estrutural, existe um grande número de problemas passíveis de otimização. A redução dos custos dos elementos estruturais de um edifício, por meio de um dimensionamento que tenha por solução a mais econômica, é um exemplo dos benefícios da otimização.

De forma mais técnica, a otimização pode ser definida como o estudo de problemas que buscam determinar certas variáveis que maximizam ou minimizam uma função, por meio de técnicas matemáticas de otimização.

Conforme Chapra e Canale (2011), comumente, os problemas de otimização possuem os seguintes elementos fundamentais:

- a) Uma função objetivo, $f(x)$, a qual representa o objetivo da otimização;
- b) Variáveis de projeto, x , que podem ser contínuas ou discretas;
- c) Restrições, que representam as limitações sob as quais o problema está submetido.

Um problema de otimização, de modo geral, pode ser enunciado como:

Encontre x , que minimiza/maximiza $f(x)$, sujeito a:

$$d_i(x) \leq a_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (26)$$

$$e_i(x) = b_i \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (27)$$

onde x é um vetor n -dimensional das variáveis de projeto, $f(x)$ é a função objetivo, $d_i(x)$ e $e_i(x)$ são restrições, e a_i e b_i são constantes.

As variáveis de projeto são os parâmetros do problema que são alterados para otimização do sistema. Um exemplo conveniente são as dimensões da seção transversal de uma viga, ou o valor de uma propriedade do material que a compõe. São classificadas em variáveis contínuas e discretas. As variáveis contínuas podem assumir qualquer valor, já as variáveis discretas, de forma contrária, estão restritas a valores isolados. Em um problema de otimização de vigas, a altura pode ser um exemplo de variável discreta, já que é usual modular seu valor de 5 em 5 cm, ou de 10 em 10 cm, por questões construtivas.

A função objetivo quantifica o que se quer otimizar, sendo em função das variáveis de projeto escolhidas. Essa função é utilizada como uma medida da eficiência do projeto, uma vez que o problema de otimização visa maximizá-la ou minimizá-la. Sua formulação é de grande importância, pois deve representar corretamente o que se deseja otimizar. A depender das finalidades da otimização, a função objetivo é classificada como mono-objetivo ou multiobjetivo. A função objetivo mono-objetivo possui apenas um objetivo, contrariamente à multiobjetivo que apresenta vários. Na otimização de estruturas de concreto armado, uma função objetivo comum é a minimização do custo financeiro, como pode ser constatado no pequeno apanhado de estudos sobre otimização de vigas de concreto armado, apresentado no início deste trabalho.

As restrições podem ser definidas como as limitações impostas ao problema para se obter a solução otimizada. Podem ser restrições laterais, de igualdade ou desigualdade. Nos problemas de otimização de vigas de concreto armado, é comum ter como restrições os estados-limites último e de serviço, bem como especificações das normas técnicas.

Com base na forma da função objetivo e das restrições, o problema de otimização é classificado como linear ou não-linear. Se a função objetivo e as restrições são lineares, a otimização é considerada linear, e quando são não-lineares, o problema de otimização é não-linear. Além dessa classificação, os problemas de otimização podem ser unidimensionais ou multidimensionais. Os problemas unidimensionais envolvem funções que dependem de uma única variável, enquanto os multidimensionais dependem de duas ou mais variáveis.

Grande parte dos problemas de otimização, que buscam representar adequadamente a realidade, envolvem restrições, sendo então categorizados como problemas de otimização com restrições. Em tais casos, as restrições definem o espaço de soluções viáveis, denominado por domínio viável. No tocante as soluções ótimas, um conceito de importância é o de solução local e solução global. Uma solução local possui um valor de função objetivo inferior ao da solução global (SILVA, 2016).

5.2.2 Métodos de otimização

A escolha do método depende do tipo de problema de otimização. Ao longo dos anos, com o significativo progresso intelectual no campo da otimização, diversos métodos foram desenvolvidos para resolução dos problemas de otimização. De forma abrangente, tais métodos se dividem em métodos gráficos, analíticos e numéricos.

Os métodos gráficos, como a própria nomenclatura sugere, consiste em obter a solução ótima por meio da construção de gráficos da função objetivo e das restrições. Com esses gráficos, o domínio viável é delimitado, permitindo sua análise para a determinação da solução ótima. É aplicável apenas em problemas que possuem no máximo duas variáveis de projeto. Todavia, são de grande valia na aprendizagem de conceitos fundamentais de otimização, já que permitem uma boa visualização gráfica do problema.

Os métodos analíticos fornecem solução apenas para problemas simples, no entanto, são pertinentes na análise de certos conceitos de otimização, como as condições necessárias e suficientes da solução ótima, e possibilitam a validação de métodos numéricos aplicados a problemas genéricos (SILVA, 2016). Como exemplos importantes, temos o cálculo diferencial e o cálculo variacional.

Os métodos numéricos podem ser classificados em específicos e genéricos. Nos métodos específicos, para cada problema, uma formulação específica deve ser desenvolvida. Contrariamente, os genéricos podem ser aplicados em qualquer problema de otimização, sendo, portanto, métodos bastante utilizados. Além disso, são os métodos implementados nos

softwares de otimização. Uma outra classificação dos métodos numéricos é a divisão em métodos determinísticos e probabilísticos.

Conforme Holtz (2005), os métodos determinísticos geram uma sequência determinística de prováveis soluções exigindo, de modo geral, o uso de pelo menos a primeira derivada da função objetivo em relação as variáveis de projeto, sendo então necessário que tal função seja contínua e diferenciável no espaço de busca. Estão divididos em dois grandes grupos, a saber os métodos de otimização linear e não-linear.

Segundo o autor anteriormente citado, os métodos probabilísticos (baseados em algoritmos probabilísticos) usam somente a avaliação da função objetivo na busca por boas soluções, e introduzem nesse processo dados e parâmetros aleatórios. Apresentam, como principais vantagens, a utilização em problemas com funções multimodais, a não exigência de que a função objetivo seja diferenciável e contínua no espaço de busca e a possibilidade de utilização em diversos problemas de otimização. Porém, tais métodos não garantem a determinação da solução ótima, e sim uma boa solução bastante próxima do ótimo.

Devido à grande diversidade de métodos de otimização, a seguir, serão abordados apenas os métodos de otimização disponíveis na ferramenta *Solver*: o *Simplex*, o Gradiente Reduzido Generalizado e os Algoritmos Genéticos.

5.2.2.1 Simplex

O método *Simplex* é um algoritmo pertencente ao grupo de métodos determinísticos, que se utiliza de um conjunto de ferramentas da álgebra linear para determinar a solução ótima de um problema de otimização linear, através de métodos iterativos. É um algoritmo geral, considerado de grande eficiência na solução de problemas lineares, e adaptável ao cálculo computacional, sendo de grande importância no estudo da otimização matemática (GOLDBARG; LUNA, 2005).

De modo geral, o *Simplex* parte de uma solução viável do sistema de equações formado pelas restrições do problema, estando essa solução normalmente localizada nos extremos do espaço de soluções viáveis. A partir dessa solução, o método vai identificando novas soluções viáveis, que são iguais ou melhores que as anteriores. Para tanto, o *Simplex* possui um critério de escolha que permite encontrar novas e melhores soluções viáveis extremas, e também um critério para determinar se o valor escolhido é a solução ótima (GOLDBARG; LUNA, 2005). Assim, o *Simplex* é baseado na suposição de que a solução ótima é um ponto extremo (CHAPRA; CANALE, 2011).

5.2.2.2 Gradiente Reduzido Generalizado

O Método do Gradiente Reduzido Generalizado (GRG) é um popular método determinístico de otimização não-linear restrita, que utiliza uma abordagem direta de busca (CHAPRA; CANALE, 2011).

O GRG envolve uma matemática complexa, sendo abordado aqui apenas a ideia geral do método. Assim como os métodos gerais de otimização não-linear, o GRG inicia com uma solução viável, chamada de ponto de partida. O algoritmo tenta se deslocar do ponto inicial em uma direção, na região viável, que possibilite o melhoramento do valor da função objetivo. Deste modo, ocorre um deslocamento (tamanho de passo) na direção viável selecionada, resultando em uma solução viável e melhor que a inicial. Depois, o método tenta encontrar outra direção que resulte em melhores valores da função objetivo. Se tal direção existir, o algoritmo determina um novo tamanho de passo e move-se nessa direção. O processo continua até encontrar uma solução onde não haja direção viável que melhore a função objetivo. Enfim, quando não há mais possibilidade de melhoria, o algoritmo finaliza (RAGSDALE, 2009).

Conforme Chapra e Canale (2011), o GRG primeiramente "reduz o problema a um problema de otimização sem restrições, o que é feito resolvendo-se um conjunto de equação não-lineares para as variáveis básicas em termos das variáveis não-básicas". Assim, o problema sem restrições é solucionado por meio de abordagens dos métodos gradientes.

Segundo Ragsdale (2009), o GRG, bem como os métodos de otimização não-linear, pode finalizar em uma solução ótima local que pode não ser o valor ótimo global. A solução fornecida pelo GRG possui grande dependência do ponto de partida inicial.

5.2.2.3 Algoritmos Genéticos

Os algoritmos genéticos são definidos como técnicas de busca baseadas nos mecanismos de seleção natural e genética, pertencentes ao grupo de métodos de otimização probabilísticos, particularmente aos algoritmos evolucionários (LINDEN, 2008).

Por se basearem em uma analogia da teoria da evolução biológica, formulada por Charles Darwin, o estudo dos algoritmos genéticos deve começar por uma rápida introdução de conceitos básicos referentes a essa teoria. No século XIX, Darwin observou que as espécies, de animais ou plantas, que transmitem características vantajosas relacionadas a sobrevivência e adaptação ao ambiente, possuem maiores chances de sobrevivência nas gerações futuras,

fenômeno denominado “sobrevivência do mais apto” ou “seleção natural”. Um pouco mais adiante, no século XX, a genética moderna passou a explicar os mecanismos básicos da adaptação proposta por Darwin. Nas espécies onde a reprodução é sexuada, as crias herdam alguns dos cromossomos dos pais, sendo as suas características individuais determinadas pelos genes contidos nesses cromossomos. Um filho que, ocasionalmente, herda as melhores características dos pais possui maior probabilidade de sobrevivência na vida adulta, e de transmitir tais características à geração seguinte. Um outro fator ligado a transmissão de características é a taxa de mutação aleatória de baixo nível no DNA dos cromossomos. Uma mutação que ocorre aleatoriamente muda as características de um cromossomo que o filho herdou de um pai, podendo ser uma mutação indiferente, desvantajosa ou vantajosa. Se a mutação forneceu melhorias nas características dos cromossomos, o filho tem maior probabilidade de sobreviver e contribuir com a geração futura. Assim, a população tende a melhorar lentamente ao longo do tempo, por meio do processo evolutivo descrito (HILLIER; LIEBERMAN, 2010).

As ideias do processo de evolução biológica podem ser associadas a busca da solução de um problema de otimização. As soluções viáveis do problema correspondem aos indivíduos da espécie, onde a adaptação de cada um é medida pelo valor da função objetivo. Em cada iteração do algoritmo genético, a população atual de soluções (indivíduos) é formada pelo conjunto das soluções que estão sendo consideradas. Os membros mais adaptados da população sobrevivem e passam a ser pais, gerando filhos (novas soluções) que possuem algumas de suas características (genes). Pelo fato de os membros mais adaptados possuírem mais chances de se tornarem pais, um algoritmo genético tende a gerar populações melhores, à medida que é executado. Ocasionalmente ocorrem mutações, fazendo com que certos filhos adquiram características que seus pais não possuem. Portanto, a sobrevivência dos mais adaptados deve tender a levar o algoritmo genético a encontrar uma solução bastante próxima da solução ótima (HILLIER; LIEBERMAN, 2010).

É importante ressaltar que os algoritmos genéticos não constituem um método de busca da solução ótima de um problema, mas uma meta-heurística que encontra soluções próximas da solução ótima. E por se tratar de um método probabilístico, os algoritmos genéticos podem fornecer diferentes valores de solução, a cada execução com os mesmos parâmetros. Também é pertinente diferenciar os algoritmos genéticos de outros métodos de busca, facilmente confundíveis. Diferentemente dos métodos enumerativos, os algoritmos genéticos não avaliam todas as soluções possíveis, mas apenas um conjunto delas, e contrariamente aos métodos

aleatórios, utilizam informações pertinentes do problema para direcionar a busca das soluções, não sendo totalmente aleatório (LINDEN, 2008).

Conforme Linden (2008), os algoritmos genéticos apresentam as seguintes características positivas:

- a) Na busca das soluções, os algoritmos genéticos não utilizam apenas informações locais. Assim, não necessariamente ficam presos em um máximo ou mínimo local.
- b) Não utilizam métodos de busca totalmente aleatórios.
- c) Não são afetados por descontinuidades nas funções do problema de otimização, ou em suas derivadas.
- d) São capazes de lidar com funções discretas e contínuas, e também com funções mistas.

Portanto, conforme o autor anteriormente citado, os algoritmos genéticos são adequados em problemas de otimização onde:

- a) Existem funções multimodais complexas, sendo este o caso da maioria das funções de custo atreladas a problemas reais.
- b) Existem funções com descontinuidades, ou funções onde não é possível calcular uma derivada.
- c) O espaço de busca da solução é extremamente grande, sendo impossível a resolução por meio de métodos tradicionais.

5.2.3 A ferramenta Solver

O *Solver* é uma ferramenta utilizada em planilhas do *software Microsoft Excel*, criada pela *Frontline Systems*. Faz parte de um conjunto de ferramentas de análise hipotética, onde o valor de uma célula, determinada por uma fórmula, sofre alterações para se saber como é afetado por tais mudanças. Assim, é possível encontrar um valor ideal para determinada equação, contida em uma célula, sendo então o *Solver* uma ferramenta de otimização.

Existem diversas versões do *Solver*. Versões modernas do *Microsoft Excel* vêm com uma ferramenta nativa do *Solver*. A *Frontline Systems* comercializa versões avançadas do *Solver*, como o *Analytic Solver Platform*, que possui várias opções não presentes no *Solver* nativo do *Excel*.

Para o presente trabalho, foi utilizado o *Analytic Solver Platform for Education* (versão 2016-R3), que é uma versão educacional do *Analytic Solver Platform*. A seguir, será feita, de forma breve, uma exposição geral dos procedimentos e conceitos básicos para a utilização do *Analytic Solver Platform* na resolução de problemas de otimização. A fim de facilitar a compreensão textual, a seguir, a palavra *Solver* deve ser entendida como a versão *Analytic Solver Platform*.

RAGSDALE (2014) apresenta as etapas para implementação de um problema de otimização linear em uma planilha do *Excel*, mas que podem ser adaptadas a problemas de otimização não-linear. Assim, conforme o autor mencionado, para formulação de um problema de otimização em uma planilha do *Excel*, visando a utilização do *Solver*, procede-se conforme a sequência a seguir:

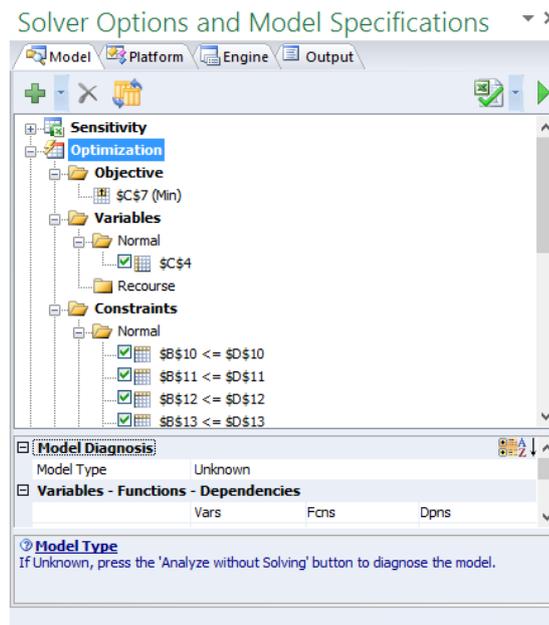
- a) *Organizar os dados na planilha*. Primeiramente, devem ser organizados os dados do problema de otimização. Devem estar claramente identificados e agrupados como “dados”, de modo a facilitar a posterior construção das equações envolvidas. Nessa etapa, não são colocadas as variáveis de projeto.
- b) *Reservar células separadas na planilha para representar cada variável de projeto*. Coloca-se em células separadas cada uma das variáveis de projeto, com sua respectiva identificação. É importante que tais células estejam claramente identificadas e agrupadas como sendo “variáveis de projeto”.
- c) *Colocar em uma célula da planilha, a fórmula da função objetivo do problema*. Em uma célula, a equação da função objetivo é colocada, de forma a fazer referência as células dos dados e das variáveis de projeto, e identificada como tal.
- d) *Para cada restrição, crie uma fórmula em uma célula separada na planilha*. Em células separadas são colocadas as restrições, de forma a explicitá-las e identificá-las.

Formulado o problema na planilha, deve-se abrir a caixa de diálogo principal do *Solver* “*Solver Options and Model Specifications*”, ilustrada nas Figuras 11, 12 e 13. Para resolução do problema de otimização, através do *Solver*, segue-se os seguintes procedimentos:

- a) Em “*Objective*” (Figura 11) é informada a localização da célula que contém a função objetivo, e também o objetivo da otimização (maximização ou minimização).
- b) Em “*Variables*” (Figura 11) são colocadas as referências das células das variáveis de projeto.

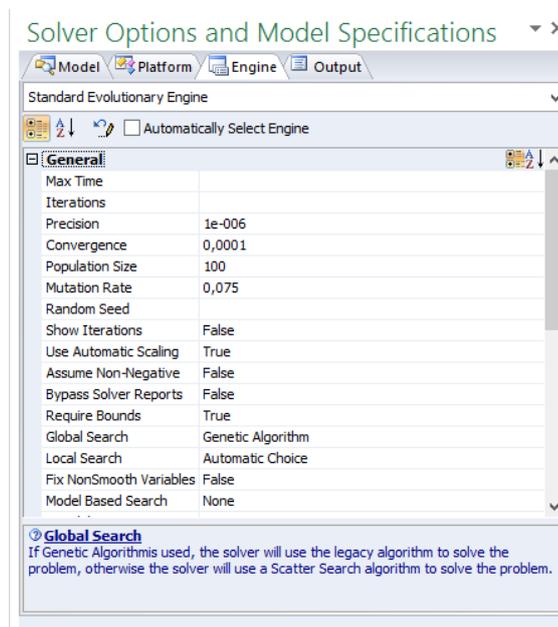
- c) Na opção “Constraints” (Figura 11) são informadas as restrições do problema.
- d) Na aba “Engine” (Figura 12) é escolhido o método de otimização para resolução do problema.
- e) Finalmente, na aba “Output” (Figura 13), a resolução do problema é iniciada ao clicar em Resolver.

Figura 11 - Caixa de diálogo principal do Solver



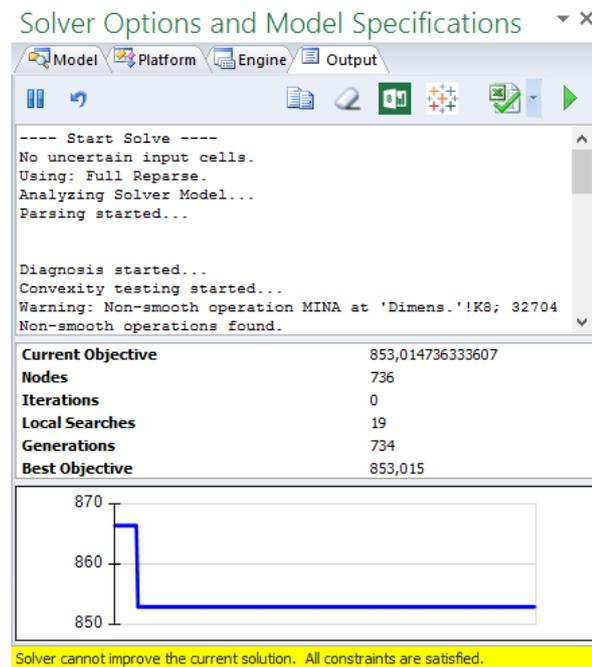
Fonte: Excel 2013.

Figura 12 - Caixa de diálogo principal do Solver



Fonte: Excel 2013.

Figura 13 - Caixa de diálogo principal do Solver



Fonte: Excel 2013.

Existe um recurso bastante interessante na análise de problemas de otimização no *Solver*. Ao clicar no ícone “Analyze without Solving”, são feitos testes de convexidade para se saber o tipo de problema de otimização. Os resultados de tal análise são exibidos em “Model Diagnosis” (Figura 11).

O *Solver* possui três métodos principais de solução: o *LP Simplex*, o GRG Não Linear e o *Evolutionary*. O Método *LP Simplex* é utilizado na resolução de problemas de otimização linear. O GRG Não Linear é o método do Gradiente Reduzido Generalizado, sendo utilizado para problemas não-lineares. O *Evolutionary*, baseado em algoritmos genéticos, é usado em problemas não-lineares complexos. A *Frontline*, fabricante do *Solver*, recomenda o seguinte na escolha do método de solução:

- a) Se a função objetivo e as restrições são funções lineares, o problema de otimização é linear, sendo então o *LP Simplex* projetado para esse tipo de problema.
- b) Se a função objetivo e as restrições são não-lineares e suaves, pode ser utilizado o GRG Não Linear. Se o problema é convexo, existe a garantia de que a solução encontrada é a solução global ótima. Porém, se o problema não é convexo, não há garantia de que a solução encontrada é o ótimo global, podendo ser um ótimo local.

- c) Se a função objetivo e as restrições são funções não-suaves e não-convexas, o método *Evolutionary* é adequado. Nesta situação, a solução encontrada é uma boa solução, podendo ser a solução ótima global.

6 METODOLOGIA

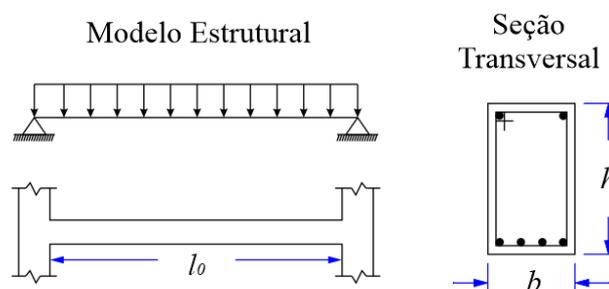
6.1 Considerações Gerais

Como informado anteriormente, o presente trabalho visa realizar o dimensionamento otimizado de vigas de concreto armado. Para tanto, inicialmente, foi apresentada a teoria pertinente que serviu de “alicerce” para este estudo.

A viga de concreto armado a ser dimensionada (Figura 14) de forma otimizada, é de seção transversal retangular, biapoiada em pilares e submetida a um carregamento vertical uniformemente distribuído. O modelo estrutural é do tipo viga biapoiada, não considerando a rigidez dos pilares.

A viga possui um vão livre, entre as faces dos apoios, de 450 cm. Os pilares são de seção transversal quadrada de dimensão de 20 cm. O carregamento característico permanente e variável é de, respectivamente, 12 kN/m e 8 kN/m. O concreto utilizado é de classe C25 e o aço CA-50. O cobrimento nominal é de 30 mm, sendo a Classe de Agressividade Ambiental II. No adensamento do concreto da viga, é admitido a utilização de um vibrador com diâmetro da agulha de 25 mm.

Figura 14 - Viga de concreto armado a ser dimensionada, de forma otimizada



Fonte: Autor (2016).

O dimensionamento otimizado foi realizado em conformidade com a ABNT NBR 6118:2014. Para realizar o dimensionamento otimizado, o dimensionamento estrutural da viga foi formulado em uma planilha do *Excel*, seguindo a sequência de dimensionamento ilustrada na Figura 15. Com os dados de entrada, são calculados o vão efetivo, as cargas atuantes e o módulo de elasticidade do concreto. Em seguida, são determinados os esforços solicitantes na viga. Com tais esforços, é feito o dimensionamento à flexão e ao cisalhamento. Posteriormente é realizado o detalhamento do dimensionamento ao cisalhamento, seguido do detalhamento do dimensionamento à flexão. Com o detalhamento, verifica-se os estados-limites de serviço de deformação excessiva (flecha) e fissuração. Por fim, determina-se a armadura de pele (quando necessário) e define-se a ancoragem. Ao colocar os dados de entrada, todas as etapas descritas anteriormente acontecem de forma automática.

Figura 15 - Fluxograma do Dimensionamento da viga



Fonte: Autor (2016).

Para validar a planilha do dimensionamento otimizado, foi dimensionado o exemplo de viga retangular apresentado por Bueno e Kimura (2015), comparando os resultados obtidos na planilha com os resultados dos autores citados, sendo verificada uma boa aproximação dos valores encontrados. Essa validação se encontra com as informações tabeladas no ANEXO A.

Em relação ao dimensionamento, é pertinente informar algumas considerações deste trabalho:

- Para realizar o dimensionamento de uma viga de concreto, é necessário estimar sua altura útil, que é a distância do centro de gravidade da armadura longitudinal de tração até a fibra mais tracionada do concreto. Para essa estimativa, foi considerada a variação dos parâmetros de dimensões da viga e as cargas atuantes. À medida que as dimensões da viga diminuem e as cargas aumentam, a estimativa da altura útil resulta em valores pequenos, já que certamente o detalhamento irá resultar em mais de uma camada de barras na zona tracionada. Contrariamente, com o aumento das dimensões da viga e a diminuição das cargas, a estimativa de altura útil resulta em valores maiores. Esse tipo de estimativa é de grande importância para que no final do dimensionamento a altura útil real seja maior ou igual a estimada, e assim evitar o recálculo da área de aço e das etapas posteriores.
- No dimensionamento à flexão, foi considerada a possibilidade de armadura dupla, quando necessário.
- Foi considerada a possibilidade de armadura de pele, caso seja necessário, sendo adotado o diâmetro de 6,3 mm para essa armadura.
- No detalhamento das armaduras transversais (estribos) foram considerados diâmetros comerciais de até 12,5 mm de aço CA-50. A escolha do diâmetro e do espaçamento é feita de forma a se aproximar o máximo possível da área de aço calculada, respeitando as imposições da ABNT NBR 6118:2014. O desenvolvimento dos estribos, ao longo do vão, é considerado, sendo detalhados a região dos apoios e o trecho central (com armadura transversal mínima).
- No detalhamento das armaduras longitudinais, foram considerados diâmetros comerciais de até 16 mm de aço CA-50, já que diâmetros maiores são mais comuns em obras de grande porte. A escolha da disposição das barras na seção transversal segue as prescrições da ABNT NBR 6118:2014. Primeiramente, tenta-se dispor as barras em uma única camada, de modo a se aproximar ao máximo da área de aço calculada, e quando isso não é possível, a disposição ocorre em várias camadas.
- No cálculo da deformação excessiva, é levada em consideração a possibilidade de adoção de contraflecha, afim de diminuir a flecha total.
- Na determinação da ancoragem das armaduras de tração, tenta-se primeiramente uma ancoragem reta de todas as barras. Quando isso não é possível, são considerados ganchos nas barras da primeira camada. Se a solução com ganchos não for possível, utilizam-se grampos juntamente com os ganchos. A ancoragem das armaduras de

compressão e de pele, quando existirem, é do tipo ancoragem reta. A ancoragem dos estribos também é levada em consideração.

6.2 Dimensionamento otimizado

Foram realizadas duas situações de dimensionamento otimizado. Na primeira situação, o CASO 1, o problema de otimização é formulado da seguinte forma:

- *Variáveis de projeto.* A altura da viga, sendo a base fixa com 20 cm;
- *Função Objetivo.* A minimização dos custos financeiros da viga, sendo considerados os custos relacionados ao aço, as fôrmas e ao concreto;
- *Restrições.* As restrições da otimização serão as limitações impostas pela ABNT NBR 6118:2014 e limitações da altura da viga.

Na segunda situação, o CASO 2, o problema de otimização formulado é:

- *Variáveis de projeto.* A altura e a base da viga;
- *Função Objetivo.* A minimização dos custos financeiros da viga, sendo considerados os custos relacionados ao aço, as formas e ao concreto;
- *Restrições.* As restrições da otimização serão as limitações impostas pela ABNT NBR 6118:2014 e limitações da altura e base da viga.

Os custos unitários do aço, das fôrmas e do concreto foram extraídos das tabelas de preço do SINAPI (Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil), do mês de outubro de 2016 para o estado de Pernambuco. Tais custos são apresentados na Tabela a seguir:

Tabela 3 - Custos unitários (continua)

Custos Unitários	
Concreto	
Classe	(R\$/m ³)
C20	252,13
C25	246,81
C30	254,99
C40	293,76

Tabela 3 - Custos unitários (conclusão)

Custos Unitários	
Fôrmas	
(R\$/m ²)	106,52
Aço CA-50	
Diâmetro (mm)	(R\$/kg)
5	13,21
6,13	13,21
8	13,43
10	11,11
12,5	9,72
16	8,47

Fonte: SINAPI (2016).

As restrições mencionadas anteriormente, para os CASOS 1 e 2, são expostas a seguir:

- De acordo com o item 17.2.4.1 da ABNT NBR 6118:2014, a verificação da compressão diagonal do concreto deve ser atendida. A força cortante solicitante de cálculo (V_{sd}) deve ser menor ou igual a força cortante resistente de cálculo à compressão (V_{Rd2}):

$$V_{sd} \leq V_{Rd2} \quad (28)$$

- Quando for necessário utilizar mais de uma camada de barras na seção transversal da viga, a distância do centro de gravidade das barras (a) ao centro da barra mais afastada deve ser menor que 10% da altura, conforme o item 17.2.4.1 da ABNT NBR 6118:2014:

$$a \leq 10\%h \quad (29)$$

- Em conformidade com o item 17.3.5.2.4 da ABNT NBR 6118:2014, a soma das armaduras de tração (A_s) e compressão (A_s') não deve ter valor maior que 4% da área de concreto da seção (A_c):

$$(A_s + A_s') \leq 4\%A_c \quad (30)$$

- Na verificação do estado-limite de deformação excessiva, de acordo com a ABNT NBR 6118:2014, a flecha total (a_t) não deve ultrapassar o valor limite (a_{lim}) indicado em 13.3. É considerado a flecha limite para aceitabilidade visual.

$$a_t \leq a_{lim} = \frac{l}{250} \quad (31)$$

- O estado-limite de fissuração é verificado conforme o item 17.3.3.2 da ABNT NBR 6118:2014. O tamanho das aberturas de fissuras (w) devem respeitar o valor limite (w_{lim}) estipulado pela norma:

$$w \leq w_{lim} \quad (32)$$

- As variáveis de projeto devem ser números inteiros.
- As variáveis de projeto possuem limitações. No CASO 1, a altura deve ser maior ou igual a 25 cm e menor ou igual a 100 cm. No CASO 2, a altura tem os mesmos limites do CASO 1, e a base deve ser no mínimo 12 cm e menor ou igual a 20 cm.

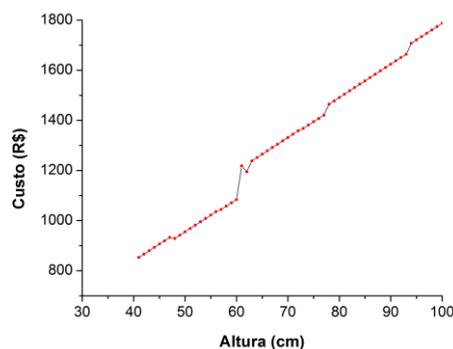
7 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Implementados os CASOS 1 e 2 em uma planilha, os mesmos foram resolvidos através do *Solver*. Os resultados e comentários são expostos a seguir, para cada caso.

7.1 CASO 1

Antes de resolver o dimensionamento otimizado com o *Solver*, foi feita uma análise do tipo de problema de otimização. Clicando no “Analyze without Solving”, o *Solver* retornou que o problema é não-linear e não-suave. De fato, ao observar o comportamento da função objetivo (Figura 16), é perceptível que o problema é realmente não-linear. Analisando a Figura 16, a função objetivo Custo possui máximos e mínimos locais. Assim, o método mais adequado a se utilizar nessa situação é o *Evolutionary*.

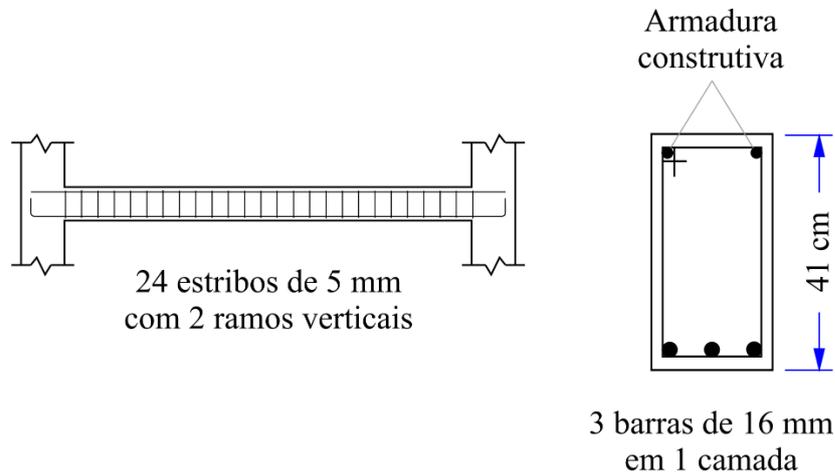
Figura 16 - Comportamento do Custo x Altura



Fonte: Autor (2016).

Resolvendo o problema de otimização, a altura ótima encontrada é de 41 cm, que leva a viga a ter um custo de R\$ 853,01. Os principais resultados do dimensionamento otimizado são apresentados na Figura 17.

Figura 17 - Resultados do CASO 1



Fonte: Autor (2016).

Conforme visto na teoria apresentada, o *Evolutionary* é baseado em algoritmos genéticos, que são métodos probabilísticos de otimização. Assim, não se tem certeza se o resultado apresentado acima é de fato a solução ótima global. Porém, ao executar o *Solver* várias vezes, variando algumas configurações do *Evolutionary* (população e taxa de mutação), o resultado obtido é sempre o mesmo. Então, de fato, o resultado obtido deve ser a solução ótima global. É interessante observar que, ao analisar a Figura 16, de fato, a altura de 41 cm é a altura ótima.

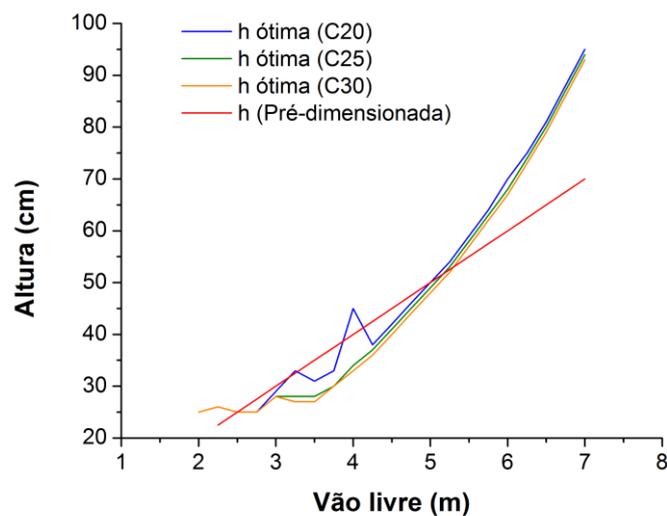
No dimensionamento à flexão, a seção mais solicitada resultou no Domínio 3, sendo a deformação do aço tracionado de 0,894%. É pertinente observar que o Domínio 3 representa uma situação econômica por se ter um grande aproveitamento do aço e do concreto. Além disso, a deformação do aço resultou bastante próxima da deformação máxima permitida (1%). Portanto, verifica-se que o dimensionamento otimizado conduz a uma situação de grande aproveitamento dos materiais.

O deslocamento máximo da viga resultou em um valor de 1,97 cm, com a adoção de uma contraflecha de 1 cm. Assim, o resultado da otimização conduziu a um valor de altura que resultasse em uma situação limite, sendo então a restrição de deformação excessiva determinante.

No dimensionamento convencional, a altura pré-dimensionada para o problema seria de 45 cm. Essa altura conduziria a um custo de R\$ 906,26. Então, a altura ótima, ao invés da pré-dimensionada, traria uma economia de 5,8%. Se pensarmos na grande quantidade de vigas em um edifício residencial, certamente, a economia trazida pelo dimensionamento otimizado seria significativa.

Mesmo com as diferenças de custos que os dois tipos de dimensionamento trazem, o valor de altura ótima resultou próximo do valor pré-dimensionado. Alterando o vão e a classe do concreto, foram obtidos os valores de altura ótima (Figura 18). É perceptível que, para vãos menores, a altura ótima é relativamente próxima da altura pré-dimensionada, conclusão obtida por outros autores. Porém, é visto que à medida que o vão aumenta, a diferença entre as alturas começa a ser significativa.

Figura 18 - Altura ótima, em função do vão e da classe do concreto, e a altura pré-dimensionada

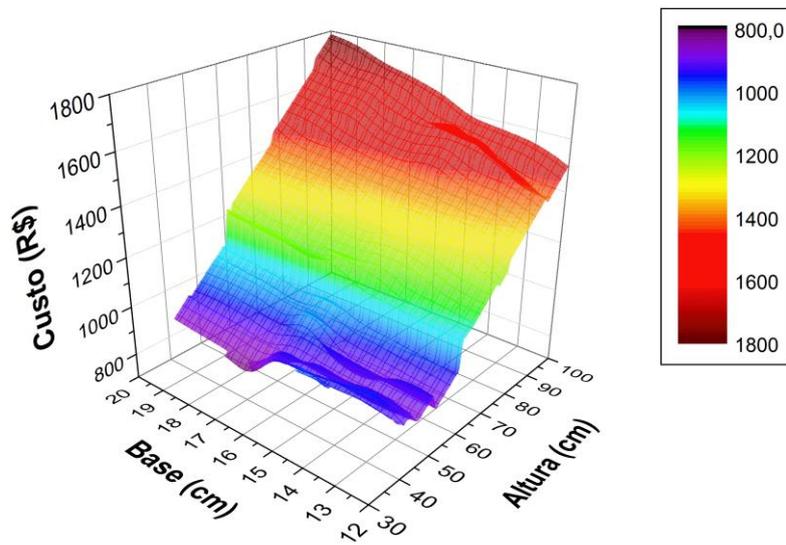


Fonte: Autor (2016).

7.2 CASO 2

Assim como no CASO 1, no CASO 2 foi feita uma análise do tipo de problema de otimização. Executando o “Analyze without Solving”, o *Solver* retornou que o problema é não-linear e não-suave. Observando o comportamento da função objetivo, ilustrada na Figura 19, é visto que o problema é de fato não-linear. A superfície é multimodal, com vários máximos e mínimos locais. Assim, o método mais adequado a se utilizar nessa situação é o *Evolutionary*.

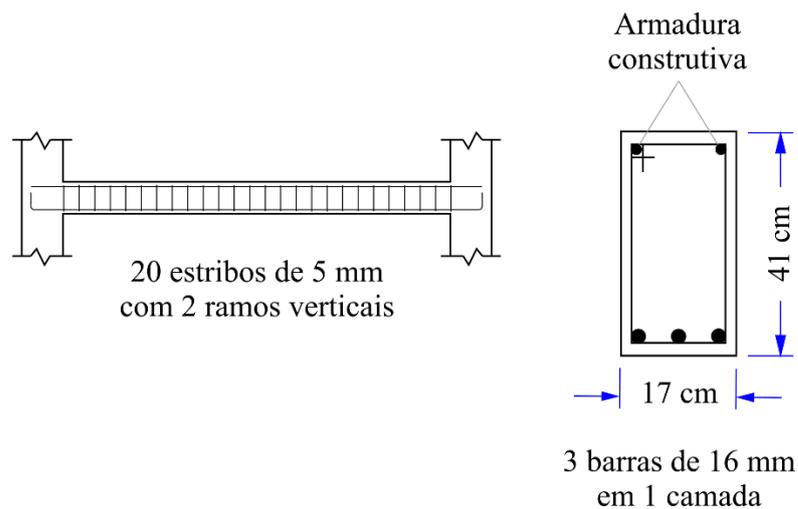
Figura 19 - Comportamento do Custo x Base x Altura



Fonte: Autor (2016).

Executando o *Solver* e resolvendo o problema de otimização, a altura ótima encontrada é de 41 cm e a base de 17 cm, o que resulta em um custo de R\$ 812,16. Os principais resultados do dimensionamento otimizado são apresentados na Figura 20:

Figura 20 - Resultados do CASO 2



Fonte: Autor (2016).

Para saber se de fato a solução encontrada é a ótima global, o *Solver* foi executado várias vezes, variando algumas configurações do *Evolutionary* (população e taxa de mutação). O resultado obtido é sempre o mesmo, comprovando que a solução encontrada é realmente a

solução ótima global. Observando a Figura 19, é visto que a região de menor custo compreende a base entre 16 e 19 cm, e a altura entre 40 e 50 cm, confirmando a solução encontrada.

No dimensionamento à flexão, a seção mais solicitada resultou no Domínio 3, sendo a deformação do aço tracionado de 0,697% (próxima da deformação máxima de 1%). Assim como no CASO 1, o dimensionamento otimizado resultou em uma seção com grande aproveitamento dos materiais, sendo esta uma situação econômica.

O deslocamento máximo da viga resultou em um valor de 2,16 cm, com a adoção de uma contraflecha de 1 cm, o que comprova que a restrição de deformação excessiva foi determinante no problema de otimização.

No dimensionamento convencional, a altura pré-dimensionada para o problema seria de 45 cm, e supondo que fosse escolhida uma base de 20 cm, o custo da viga seria de R\$ 906,26. Portanto, o dimensionamento otimizado, ao invés do convencional, traria uma economia de 10,4%. Em um edifício residencial, com um grande número de vigas, a economia trazida pelo dimensionamento otimizado seria significativa.

É interessante observar que o custo da viga no CASO 2, com duas variáveis de projeto, resultou menor que o custo no CASO 1 com apenas uma variável de projeto, como é perceptível na Tabela 5. A economia no CASO 2, em relação ao CASO 1, é de 4,8%.

Tabela 4 - Custos dos Casos estudados

CASO	CASO 1	CASO 2
Variáveis de projeto	Altura	Base e Altura
Custo (R\$)	853,01	812,16

Fonte: Autor (2016).

8 CONCLUSÕES

Com base nas exposições anteriores, é intuitivo que o dimensionamento otimizado de vigas de concreto armado, visando a minimização de custos, em lugar do convencional, pode ser de grande vantagem em obras de engenharia civil. Uma pequena redução de custos nesses elementos estruturais, pode acarretar significativa economia no projeto como um todo. Assim, uma das conclusões deste estudo é a vantagem do dimensionamento otimizado em lugar do convencional, por trazer economia nos custos.

Como esperado, o dimensionamento otimizado conduz a seções transversais econômicas, já que leva a seção ao Domínio 3 com grande aproveitamento do aço.

Apesar das vantagens do dimensionamento otimizado sobre o convencional, a altura pré-dimensionada em situações de vãos pequenos (até 6 m), ainda pode ser considerada uma boa estimativa por ser próxima da altura ótima.

A medida que a quantidade das variáveis de projeto aumenta, no dimensionamento otimizado, os custos diminuem. Isso se dá pelo fato de que a “escolha” dos valores das variáveis de projeto é feita automaticamente pelo dimensionamento otimizado, poupando o projetista da tomada de decisões dos valores dessas variáveis.

A ferramenta *Solver* mostrou ser de grande eficiência ao encontrar os valores ótimos de uma situação complexa, como o dimensionamento de vigas. Observando a solução ótima e o comportamento da função objetivo, ficou comprovada a eficiência do *Solver* em encontrar a solução ótima global.

Para estudos e trabalhos futuros, relacionados ao presente estudo, o autor sugere:

- Considerar a rigidez dos pilares no modelo estrutural, o que levará a viga a ser solicitada por momentos fletores negativos nos apoios;
- No detalhamento, realizar o desenvolvimento longitudinal das armaduras ao longo do vão. Esse desenvolvimento consiste em dividir a viga em algumas seções, onde nas seções mais solicitadas haverá uma quantidade maior de barras.
- Através dos resultados do dimensionamento otimizado, tentar encontrar uma equação para a altura pré-dimensionada que resulte em valores muito próximos da altura ótima, em diferentes situações.

A ideia de obter soluções ótimas é de significativo interesse em diversas áreas do conhecimento. Com expectativas modestas, o autor deste trabalho espera que este estudo possa contribuir para a ampliação e disseminação da otimização estrutural no Campus Acadêmico do Agreste, já que pesquisas estão sendo iniciadas nessa área, e no ambiente acadêmico da engenharia.

9 REFERÊNCIAS

ALEXANDRE, L. de J. **Otimização do pré-projeto de vigas de concreto armado utilizando algoritmos genéticos**. 2014. 152 f. Tese (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – NORMA BRASILEIRA. **Concreto - Procedimento para moldagem e cura de corpos de prova, NBR 5738**. ABNT, 2015, 9 p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – NORMA BRASILEIRA. **Concreto - Ensaio de compressão de corpos-de-prova cilíndricos, NBR 5739**. ABNT, 2007, 9 p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – NORMA BRASILEIRA. **Concreto para fins estruturais - Classificação pela massa específica, por grupos de resistência e consistência, NBR 8953**. ABNT, 2015, 3 p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – NORMA BRASILEIRA. **Projeto de estruturas de concreto – Procedimento, NBR 6118**. Rio de Janeiro: ABNT, 2014, 238 p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – NORMA BRASILEIRA. **Aço destinado a armaduras para estruturas de concreto armado - Especificação, NBR 7480**. ABNT, 2007, 13 p.

BASTOS, E. A. **Otimização de seções retangulares de concreto armado submetidas à flexo-compressão oblíqua utilizando algoritmos genéticos**. 2004. 168 f. Tese (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

BASTOS, P. S. dos S. **Estruturas de concreto armado**. 2014. Disponível em <<http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/>>. Acesso em 8 mai. 2016.

BASTOS, P. S. dos S. **Vigas de concreto armado**. 2015a. Disponível em <<http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/>>. Acesso em 8 mai. 2016.

BASTOS, P. S. dos S. **Dimensionamento de vigas de concreto armado à força cortante**. 2015b. Disponível em <<http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/>>. Acesso em 8 mai. 2016.

BASTOS, P. S. dos S. **Flexão normal simples - vigas**. 2015c. Disponível em <<http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/>>. Acesso em 8 mai. 2016.

BASTOS, P. S. dos S. **Ancoragem de armaduras**. 2015d. Disponível em <<http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/>>. Acesso em 8 mai. 2016.

BAZZO, W. A.; PEREIRA, L. T. do V. **Introdução à Engenharia: conceitos, ferramentas e comportamentos**. Florianópolis: Ed. da UFSC, 2006. 270 p.

BHALCHANDRA, S. A.; ADSUL, P. K. **Cost Optimization Of Doubly Reinforced Rectangular Beam Section**. International Journal of Modern Engineering Research, 2012. Disponível em <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.416.7472&rep=rep1&type=pdf>>. Acesso em 27 abr. 2016.

BUENO, S.; KIMURA A. **ABNT NBR 6118:2014 Comentários e Exemplos de Aplicação**. São Paulo: IBRACON, 2015. 480 p.

CARVALHO, R. C.; FILHO, J. R. de F. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado: segundo a NBR 6118:2014**. São Carlos:EdUFSCar, 2014. 415 p.

CHAPRA, C. C.; CANALE, R. P. **Métodos Numéricos para Engenharia**. Porto Alegre: AMGH, 2011.

CHARLESON, A. W. **A estrutura aparente: um elemento de composição em arquitetura**. Porto Alegre: Bookman, 2009. 216 p.

FALCÓN, G. S. et al. **A Technique for Optimal Sizing of Flexural Reinforced Concrete Beams**. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ENGINEERING OPTIMIZATION, 2008, Rio de Janeiro. Disponível em: <http://www.academia.edu/3582731/A_Technique_for_Optimal_Sizing_of_Flexural_Reinforced_Concrete_Beams>. Acesso em 28 abr. 2016.

FRAGA, J. L. T.; KRIPKA, M. **Projeto estrutural de vigas de concreto armado visando a minimização do impacto ambiental**. Revista de Engenharia e Tecnologia, 2015. Disponível em <<http://www.revistaret.com.br/ojs-2.2.3/index.php/ret/article/viewFile/332/321>>. Acesso em 27 abr. 2016.

FRONTLINE SOLVERS. **Excel Solver Help**. Disponível em <<http://www.solver.com/excel-solver-help>>. Acesso em 17 março. 2016.

GALEB, A. C. **Optimum design of reinforced concrete rectangular beams using simulated annealing**. The Iraqi Journal For Mechanical And Material Engineering, Edição especial, 2009. Disponível em <<http://www.iasj.net/iasj?func=fulltext&aId=43972>>. Acesso em 28 abr. 2016.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. **Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

GUERRA, A; KIOUSIS, P.D. **Design optimization of reinforced concrete structures**. Computers and Concrete, 2006. Disponível em: <http://inside.mines.edu/~aguerra/Guerra_DesignOpt.pdf>. Acesso em 27 abr. 2106.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. Porto Alegre: AMGH, 2010. 852 p.

HOLTZ, G. C. da C. H. **Traçado automático de envoltórias de esforços em estruturas planas utilizando um algoritmo evolucionário**. 2005. Tese (Mestrado em Engenharia Civil) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

ISMAIL, M. A. **Design Optimization of Structural Concrete Beams Using Genetic Algorithms**. 2007. 111 f. Tese (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Islâmica de Gaza, Gaza.

JUNIOR, F. H. M. M.; OLIVEIRA, D. M. de. **Otimização de vigas de concreto armado com seção retangular submetidas à flexão normal simples**. Construindo, Belo Horizonte, 2014. Disponível em <<http://www.fumec.br/revistas/construindo/article/view/2576/1500>>. Acesso em 27 abr. 2016.

KLEIN, H. W. **Otimização de vigas de concreto armado: dimensionamento a flexão**. 2008. 90 f. Tese (Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Civil) - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí.

KRIPKA, M.; PAGNUSSAT, R. **Parâmetros para o dimensionamento otimizado de vigas de concreto armado**. Revista Técnica, jul. 2010. Disponível em: <<http://techne.pini.com.br/engenharia-civil/160/parametros-para-o-dimensionamento-otimizado-de-vigas-de-concreto-armado-287764-1.aspx>>. Acesso em 1 mai. 2016.

LIMA, M. L. R. **Otimização topológica e paramétrica de vigas de concreto armado utilizando algoritmos genéticos**. 2011. 114 f. Tese (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade de São Paulo, São Paulo.

LINDEN, R. **Algoritmos genéticos**. Rio de Janeiro: Brasport, 2008.

MAIA, J. P. R. **Otimização estrutural: estudo e aplicações em problemas clássicos de vigas utilizando a ferramenta Solver**. 2009. 83 f. Tese (Mestrado em Engenharia Civil) Universidade de São Paulo, São Carlos.

PINHEIRO, L. M.; MUZARDO, C. D.; SANTOS, S. P. **Pré-dimensionamento**. 2003. Disponível em <http://www.fec.unicamp.br/~almeida/ec802/Lancamento/Pre-dimensionamento_EESC.pdf>. Acesso em 18 mai. 2016.

PINHEIRO, L. M.; SANTOS, S. P. **Estados Limites de Serviço**. 2004. Disponível em <<http://www.fec.unicamp.br/~almeida/ec702/ELS/14%20ELS.pdf>>. Acesso em 18 mai. 2016.

RAGSDALE, C. T. **Modelagem de planilha e Análise de Decisão: uma introdução prática a business analytics**. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

RAHMANIAN, I.; LUCET Y.; TESHAMARIAM S. **Optimal design of reinforced concrete beams: A review**. Computers and Concrete, 2014. Disponível em <https://www.researchgate.net/publication/264031616_Optimal_design_of_reinforced_concrete_beams_A_review>. Acesso em 1 mai. 2016.

SACOMAN, M. A. R. **Otimização de projetos utilizando GRG, Solver e Excel**. In: XL CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, Belém, 2012. Disponível em <<http://www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2012/artigos/103911.pdf>>. Acesso em 25 abr. 2016.

SILVA, E. C N. S. **PMR 5215 - Otimização aplicada ao projeto de sistemas mecânicos**. Disponível em <<http://sites.poli.usp.br/d/pmr5215/a1-5215.pdf>>. Acesso em 5 abr. 2016.

SINGH, B.; RAI, H. S. **Optimisation of RCC Beam**. International Journal of Engineering, Business and Enterprise Applications, 2014. Disponível em <<http://iasir.net/IJEBEApapers/IJEBEA14-316.pdf>>. Acesso em 28 abr. 2016.

10 ANEXOS

ANEXO A

Tabela 5 - Validação da planilha de dimensionamento otimizado.

Dados de entrada			
Altura - 40 cm			
Base - 22 cm			
Altura útil - 35,5 cm			
Vão efetivo - 410 cm			
$g_k = 28 \text{ kN/m}$; $q_k = 7 \text{ kN/m}$			
Concreto C25			
Aço CA-50			
Cobrimento - 3 cm			
Ecs = 24000 MPa			
ϕ do estribo - 6,3 mm			
Dados de saída			
Categoria	Símbolo	Bueno e Kimura (2015)	Autor (2016)
FLEXÃO	x (cm)	12,66	12,66
	As (cm ²)	7,78	7,78
DETALHAMENTO	n ϕ DN	4 ϕ 16	4 ϕ 16
ELS- FLECHA	Mr (kN.m)	22,57	22,57
	Ma (kN.m)	63,25	63,25
	I _{II} (cm ⁴)	51509	51520
	ai (cm)	0,85	0,85
	af (cm)	1,12	1,12
ELS - FISSURAS	Mr (kN.m)	15,8	15,8
	Ma (kN.m)	64,72	64,72
	I _{II} (cm ⁴)	75432	75448
	σ_s (kN/cm ²)	26,4	26,5
	w (mm)	0,16	0,19

Fonte: Autor (2016).