



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

MANOEL DE SÁ JARDIM NETO

**CERTIFICADOS DE POSITIVIDADE, O PROBLEMA DOS MOMENTOS E O
FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO GLOBAL**

Recife
2020

MANOEL DE SÁ JARDIM NETO

**CERTIFICADOS DE POSITIVIDADE, O PROBLEMA DOS MOMENTOS E O
FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO GLOBAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Processamento de Energia.

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Ribeiro Barbosa de Aquino.

Coorientador: Prof. Ph.D. Geraldo Leite Torres.

Catálogo na fonte
Bibliotecária Margareth Malta, CRB-4 / 1198

J37c	Jardim Neto, Manoel de Sá. Certificados de positividade, o problema dos momentos e o fluxo de potência ótimo global / Manoel de Sá Jardim Neto. - 2020. 81 folhas, il., gráfs., tabs. Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Ribeiro Barbosa de Aquino. Coorientador: Prof. Dr. Geraldo Leite Torres. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2020. Inclui Referências e Apêndice. 1. Engenharia Elétrica. 2. Certificados de Positividade. 3. Fluxo de Potência Ótimo. 4. Hierarquia de Lasserre. 5. Problema dos Momentos. 6. Programação Semidefinida. 7. Relaxação dos Momentos/SOS. I. Aquino, Ronaldo Ribeiro Barbosa de (Orientador). II. Torres, Geraldo Leite (Coorientador). III. Título UFPE 621.3 CDD (22. ed.) BCTG/2021-86
------	--

MANOEL DE SÁ JARDIM NETO

**CERTIFICADOS DE POSITIVIDADE, O PROBLEMA DOS MOMENTOS E O
FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO GLOBAL**

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da
Universidade Federal de Pernambuco,
como requisito parcial para a obtenção do
título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Aprovada em: 24/11/2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ronaldo Ribeiro Barbosa de Aquino
(Orientador e Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Ph.D. Geraldo Leite Torres
(Coorientador e Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Vicente Ribeiro Simoni
(Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Ph.D. Roberto Imbuzeiro Moraes Felinto de Oliveira
(Examinador Externo)
Instituto de Matemática Pura e Aplicada

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus orientadores Geraldo Torres e Ronaldo Aquino pela amizade de anos, pela confiança e pela oportunidade de aprendizado. Em particular, agradeço a Geraldo por ter me apresentado a Programação Semidefinida e o Fluxo de Potência Ótimo. Agradeço a Ronaldo pela grande presteza e ensinamentos contínuos desde a graduação.

Agradeço à UFPE, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE) e ao Departamento de Engenharia Elétrica (DEE).

Agradeço ao Laboratório de Otimização Aplicada a Sistemas de Potência (LOASP) e ao Laboratório Digital de Sistemas de Potência (LDSP).

Agradeço à banca examinadora por aceitar o convite e pelas valiosas sugestões.

Agradeço aos professores que tive durante a minha formação. Em especial, gostaria de lembrar do meu padrinho, primo, amigo e professor de Matemática da 8ª série: Jarbas Jardim (*in memoriam*).

Agradeço aos meus amigos.

Agradeço à minha mãe Rosa Adriana e ao meu pai Sérgio Jardim, agradeço aos meus irmãos, a toda minha família e à minha namorada Joyce Havana.

Agradeço a Deus por tudo.

*“A busca da verdade deve ser
o objetivo de nossa atividade;
é o único fim digno dela.”*
(POINCARÉ, 1905)

RESUMO

Apresentamos alguns dos principais resultados da teoria dos polinômios positivos, o problema dos momentos e aplicações ao fluxo de potência ótimo (FPO) global determinístico, estocástico e racional. O problema de certificar positividade de um polinômio multivariado sob subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ e o problema de determinar a existência, unicidade e identificar uma medida boreliana suportada em um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ a partir de uma sequência de reais representando seus momentos estão relacionados entre si e possuem uma rica teoria em desenvolvimento. Muitos problemas importantes podem ser abordados a partir desta teoria. Alguns exemplos envolvem os temas: otimização, probabilidade, teoria de controle, equações diferenciais parciais, análise convexa, teoria ergódica e computação algébrica. Serão apresentadas aplicações ao FPO, que é um problema de otimização não linear de relevância em análise de sistemas de potência. A saber, o FPO permite a obtenção do melhor estado de operação de uma rede elétrica sob determinado critério de função de custo. Por ser um problema não convexo, os métodos tradicionais realizam a busca por ótimos locais. A obtenção de ótimos globais é, em geral, um problema NP-difícil. A teoria apresentada permite a formulação de uma hierarquia de relaxações convexas semidefinidas para o FPO em busca de resultados globais. Além das aplicações determinísticas, utilizamos as técnicas em versões do fluxo de potência ótimo estocástico (FPOE) e em um problema de FPO não usual formulado deliberadamente para análise dos métodos com função objetivo racional.

Palavras-chave: Certificados de Positividade. Fluxo de Potência Ótimo. Hierarquia de Lasserre. Otimização Polinomial Global. Problema dos Momentos. Programação Semidefinida. Relaxação dos momentos/SOS.

ABSTRACT

We present some of the main results in positive polynomials theory, the moment problem and global optimal power flow (OPF) applications: deterministic, stochastic and rational. Certifying the positivity of a multivariate polynomial on a subset of $\mathbb{R}^n$ and identifying a Borel measure supported on a subset of $\mathbb{R}^n$ from a sequence of its moments, as well as determining its existence and uniqueness, are related problems and there are great results being developed. Several important problems can be approached using these theories. Some examples include optimization, probability, control theory, partial differential equations, convex analysis, ergodic theory and algebraic computation. Applications to OPF will be presented, which is a relevant nonlinear optimization problem in power systems analysis. Namely, OPF allows obtaining the best operation configuration in an electrical grid based on some cost function. Since the problem is non-convex, traditional methods search for local solutions. Getting global solutions is, generally, NP-hard. The theory presented allows to formulate a hierarchy of convex semidefinite relaxations to OPF aiming for global results. Besides deterministic applications, we utilize these techniques to stochastic optimal power flow (SOPF) and an unusual OPF deliberately formulated to analyze the methods with rational objective function.

Keywords: Global Polynomial Optimization. Lasserre Hierarchy. Moment Problem. Moment/SOS Relaxation. Optimal Power Flow. Positivity Certificate. Semidefinite Programming.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Grafos dos sistemas de teste	49
Figura 2 – Fluxo de potência ótimo racional	54
Figura 3 – LMBM3 - Restrição ao fluxo estocástica	55
Figura 4 – Histograma - Restrição ao fluxo estocástica	56
Figura 5 – WB3 - Admitância <i>shunt</i> estocástica	57
Figura 6 – Histograma - Admitância <i>shunt</i> estocástica	58
Figura 7 – WB5 - Demanda de carga estocástica	59
Figura 8 – Histograma - Demanda de carga estocástica	60
Figura 9 – WB5 - Custos de geração estocásticos	61
Figura 10 – Histograma - Custos de geração estocásticos	62

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Múltiplas soluções locais	48
Tabela 2 – Sistema WB2	49
Tabela 3 – Sistema WB3	50
Tabela 4 – Sistema LMBM3	50
Tabela 5 – Sistema WB5	50
Tabela 6 – Sistema WB5mod	51
Tabela 7 – Sistema case22loop	51
Tabela 8 – Sistema case30loop	51
Tabela 9 – Sistema case30loopmod	52
Tabela 10 – Minimização de Q_{g_1}	53
Tabela 11 – Maximização de fp_1	53
Tabela 12 – Fator de potência - barra 1	53
Tabela 13 – Restrição ao fluxo estocástica - LMBM3	56
Tabela 14 – Admitância <i>shunt</i> estocástica - WB3	58
Tabela 15 – Demanda de carga estocástica - WB5	60
Tabela 16 – Custos de geração estocásticos - WB5	62

LISTA DE SIGLAS

fp	Fator de Potência
FP	Fluxo de Potência
FPO	Fluxo de Potência Ótimo
FPOE	Fluxo de Potência Ótimo Estocástico
PCSO	Programação Cônica de Segunda Ordem
PDPI	Primal-Dual de Pontos Interiores
PL	Programação Linear
PSD	Programação Semidefinida
<i>QCQP</i>	<i>Quadratically Constrained Quadratic Program</i> - Programação Quadrática com Restrição Quadrática
<i>SOS</i>	<i>Sum of Squares</i> - Soma de Quadrados
VA	Variável Aleatória

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}_+$	Conjunto dos números reais não negativos
$\mathbb{R}^n$	Espaço euclidiano de dimensão n
$\mathbb{V}$	Espaço vetorial real
$0_{\mathbb{V}}$	Vetor nulo de $\mathbb{V}$
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{N}^n$	Conjunto das n -uplas de números naturais
$\mathbb{M}_{k,n}$	Espaço vetorial real das matrizes reais de ordem $k \times n$
$\mathbb{M}_n$	Espaço vetorial real das matrizes reais de ordem n
$\mathbb{S}_n$	Espaço vetorial real das matrizes reais simétricas de ordem n
x^T, A^T	Vetor transposto, matriz transposta
$\geq$	Relação de ordem parcial de Löwner
$\mathbb{R}[x]$	Anel dos polinômios com coeficientes reais a n indeterminadas / Espaço vetorial real dos polinômios com coeficientes reais e n variáveis
$\mathbb{R}[x]_d$	Subespaço vetorial dos polinômios com grau menor ou igual a d
$S(g_1, \dots, g_m)$	Conjunto semialgébrico básico fechado definido por $\{g_1, \dots, g_m\} \subset \mathbb{R}[x]$
$PO(g_1, \dots, g_m)$	Pré-ordenamento gerado pelo conjunto $\{g_1, \dots, g_m\} \subset \mathbb{R}[x]$
$MQ(g_1, \dots, g_m)$	Módulo quadrático gerado pelo conjunto $\{g_1, \dots, g_m\} \subset \mathbb{R}[x]$
$PO_d(g_1, \dots, g_m)$	Subconjunto de $PO(g_1, \dots, g_m) \cap \mathbb{R}[x]_d$ utilizado na relaxação de ordem d
$MQ_d(g_1, \dots, g_m)$	Subconjunto de $MQ(g_1, \dots, g_m) \cap \mathbb{R}[x]_d$ utilizado na relaxação de ordem d
$\text{Tr}(A)$	Traço da matriz A
$\Sigma[x]$	Cone dos polinômios a n indeterminadas que são soma de quadrados (SOS)
$\Sigma[x]_d$	Cone dos polinômios SOS a n indeterminadas com grau menor ou igual a d
x^α	$\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$. Em que: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$
$ \alpha $	$\sum_{i=1}^n \alpha_i$. Em que: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$
$\text{rank}(A)$	Rank (posto) da matriz A
$M(\mathbb{K})_+$	Espaço vetorial real das medidas de Borel com suporte contido em $\mathbb{K}$

$\pi\mu$	Medida marginal de μ
$\text{gr}(f)$	Grau do polinômio f
$P(A)$	Probabilidade do evento A ocorrer
χ_B	Função característica (indicadora) de B
$\mathcal{P}[x]$	Cone dos polinômios não negativos em $\mathbb{R}[x]$
$\mathcal{M}$	Cone das sequências que possuem medidas representativas
$\mathcal{M}_{\succeq}$	Cone das sequências cujas matrizes dos momentos são positivas semidefinidas
C^*	Cone dual de C
$\mathbb{V}^*$	Espaço vetorial dual algébrico de $\mathbb{V}$
$\sigma(Y)$	σ -álgebra de Borel em Y
$\hat{Y}$	Matriz admitância de barra
G	Matriz condutância de barra
B	Matriz susceptância de barra
b_{shij}	Susceptância <i>shunt</i> na linha (i, j)
$\hat{V}_i = e_i + jf_i$	Tensão complexa na barra i
$\hat{I}_{D_i} = a_i + jb_i$	Corrente complexa demandada na barra i
$\hat{x}^*$	Complexo conjugado do número $\hat{x}$
G_{ij}, B_{ij}	Elemento (i, j) das matrizes G, B
P_i	Potência ativa líquida na barra i
Q_i	Potência reativa líquida na barra i
P_{ij}	Fluxo de potência ativa entre as barras i e j
Q_{ij}	Fluxo de potência reativa entre as barras i e j
C_i	Custo de geração na barra i
P_{D_i}	Potência ativa demandada na barra i
Q_{D_i}	Potência reativa demandada na barra i
P_{G_i}	Potência ativa gerada na barra i
Q_{G_i}	Potência reativa gerada na barra i
fp_i	Fator de potência na barra i
s_{ij}	Fluxo de potência aparente entre as barras i e j

$X^{\min}, X^{\max}$	Limites mínimo e máximo da variável X
$\Re(\hat{x}), \Im(\hat{x})$	Partes real e imaginária do número complexo $\hat{x}$
$X \sim U(a, b)$	Variável aleatória distribuída uniformemente no intervalo $[a, b]$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES	18
1.2	ESTRUTURA DO DOCUMENTO	18
2	INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO SEMIDEFINIDA	20
2.1	INTRODUÇÃO	20
2.2	DUALIDADE FORTE E MÉTODOS DE PONTOS INTERIORES	22
2.3	SEDUMI	23
3	<i>POSITIVSTELLENSATZ</i>	24
3.1	INTRODUÇÃO	24
3.2	O 17º PROBLEMA DE HILBERT	25
3.3	CERTIFICADOS DE POSITIVIDADE VIA SOMA DE QUADRADOS	26
3.4	OTIMIZAÇÃO POLINOMIAL VIA <i>SOS</i>	29
3.5	CASO RESTRITO	30
3.5.1	Problema <i>QCQP</i> e Relaxação Semidefinida	30
3.5.2	Hierarquia de Relaxações <i>SOS</i>	31
3.6	<i>POSITIVSTELLENSATZ</i> E COMPLEXIDADE	33
3.7	SOSTOOL	34
4	O PROBLEMA DOS MOMENTOS E A HIERARQUIA DE LASSERRE	35
4.1	O PROBLEMA DOS MOMENTOS	35
4.2	HIERARQUIA DE LASSERRE E OTIMIZAÇÃO POLINOMIAL GLOBAL	38
4.3	HIERARQUIA DE LASSERRE E OTIMIZAÇÃO RACIONAL GLOBAL	39
4.4	HIERARQUIA DE LASSERRE E OTIMIZAÇÃO POLINOMIAL GLOBAL ESTOCÁSTICA	40
4.5	DUALIDADE	42
4.6	GLOPTIPOLY 3	43

5	FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO GLOBAL	44
5.1	FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO	44
5.2	FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO RACIONAL	52
5.3	FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO ESTOCÁSTICO	54
5.3.1	Restrição ao Fluxo Estocástica	55
5.3.2	Incertezas nos Parâmetros da Rede	57
5.3.3	Demanda de Carga Estocástica	58
5.3.4	Custos de Geração Estocásticos	60
6	CONCLUSÕES	63
	REFERÊNCIAS	65
A	APÊNDICE - SISTEMAS DE TESTE	70

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Certificar positividade de polinômios multivariados sob subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ é um problema de interesse em Matemática. Além da importância teórica, existem muitas aplicações práticas relacionadas ao tema. Decomposição em soma de quadrados (*sum of squares: SOS*) representa um destacado certificado de positividade (*positivstellensatz*¹). Outro problema interessante consiste em identificar uma medida de Borel com suporte em subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ a partir de uma sequência de números reais representando seus momentos. O problema dos momentos e a teoria dos polinômios *SOS* possuem uma estreita relação entre si [1], [2].

Programação semidefinida (PSD) é uma das áreas de pesquisa mais ativas em otimização convexa. Isto se deve à capacidade de formulação de uma ampla faixa de problemas e à existência de algoritmos eficientes para solução sob as perspectivas teórica e prática [3]. Há teoremas que relacionam o problema dos momentos/*SOS* à PSD, permitindo uma abordagem favorável para a solução de alguns destes problemas.

Muitos problemas de engenharia podem ser estudados pela teoria dos momentos e polinômios

¹ Termo alemão que se refere aos teoremas que certificam positividade, semelhante ao célebre teorema *nullstellensatz* de Hilbert.

positivos. Alguns exemplos são otimização polinomial global [4], análise de estabilidade de sistemas dinâmicos polinomiais [5] e controle ótimo [6].

O fluxo de potência ótimo (FPO) é uma ferramenta em análise de sistemas elétricos de potência que visa a busca do melhor estado de operação de uma rede sob determinadas restrições [7], [8]. É um problema de otimização contínua não linear, eventualmente com formulação mista. Alguns objetivos podem ser minimizar perdas de potência ativa, o custo de geração ou o corte de carga sob contingências, maximizar o carregamento do sistema, minimizar o fluxo de potência entre ramos do circuito elétrico, minimizar o consumo de reativos, etc. As equações de balanço de potência nas barras representam as restrições dadas pelas leis de Kirchhoff. Além disto, o FPO possui restrições físicas relacionadas aos aspectos construtivos dos equipamentos, como as restrições das relações de transformação dos transformadores e há restrições operacionais, como os limites de tensão nas barras e os limites de fluxo em alguns ramos.

O FPO é um problema de otimização não convexo e, por este motivo, soluções ótimas locais podem não representar a melhor solução global. Otimização não convexa global é um problema NP-difícil e, portanto, não deve existir um algoritmo de tempo polinomial que alcança sempre soluções globais para problemas não convexos, a menos que $P = NP$. Classificação de problemas e alguns resultados em teoria da complexidade computacional podem ser encontrados em [9], [10]. Naturalmente, os métodos tradicionais de otimização aplicados ao FPO convergem para soluções estacionárias (ótimos locais). Estamos interessados em alcançar a melhor solução do FPO (solução global), quando possível em tempo não proibitivo. É comum o uso de coordenadas polares para formulação das equações de fluxo de potência, devido à interpretação fasorial das grandezas elétricas, mas utilizamos coordenadas cartesianas para as variáveis elétricas, uma vez que permitem a formulação do FPO como um problema de otimização polinomial. A teoria dos momentos/SOS fornece uma abordagem global para problemas de otimização polinomial a partir de hierarquias de relaxações semidefinidas.

O problema de otimização original é aproximado (relaxado) por um problema de PSD em um espaço de dimensão maior. O problema semidefinido é convexo e sua solução é sempre global. A solução do PSD fornece uma cota para a solução do problema original e, eventualmente, a solução global original pode ser recuperada a partir da solução do PSD, situação na qual dizemos que a relaxação é exata. Se a exatidão não é alcançada, uma nova relaxação semidefinida mais estreita² é formulada em um espaço de dimensão ainda maior e uma cota melhor para a solução é alcançada. Os PSDs fornecem uma sequência de cotas convergindo para solução do problema original. A sequência de problemas convexos consiste na hierarquia de relaxações semidefinidas, conhecida por hierarquia de Lasserre ou hierarquia de relaxações dos momentos/SOS. Uma vez que o problema de otimização global é NP-difícil, exatidão nem sempre é alcançada para uma relaxação de ordem baixa, casos nos quais a obtenção de soluções para o problema original torna-se inviável. Todavia, conforme apresentaremos, é comum alcançar exatidão para relaxações de ordens pequenas para problemas práticos de

² Uma melhor aproximação do problema original.

FPO. Isto justifica a vantagem destes métodos para as aplicações globais.

1.1 OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES

O presente trabalho de pesquisa objetiva a busca de soluções globais para alguns problemas de FPO e de fluxo de potência ótimo estocástico (FPOE) a partir de hierarquias de relaxações semidefinidas dos momentos/*SOS*. Iniciamos com casos determinísticos para sistemas de teste com múltiplas soluções locais e acrescentamos exemplos simples com as primeiras aplicações ao FPOE. Além disto, apresentamos um exemplo pictórico de FPO com função objetivo racional, ilustrando a versatilidade da técnica.

As poucas aplicações da teoria ao FPO determinístico existentes na literatura consideram a abordagem do problema dos momentos e o certificado de positividade de Putinar [11], [12], [4]. Contribuímos com uma análise mais detalhada, considerando as formulações da hierarquia a partir do problema dos momentos e da linguagem da geometria algébrica real, utilizando os *positivstellensatz* de Schmüdgen e Putinar. Apresentamos tópicos relacionados à dualidade entre as formulações e aos teoremas de complexidades dos *positivstellensatz* e realizamos diversos testes com diferentes softwares, incluindo pacotes com tratamento de esparsidade.

1.2 ESTRUTURA DO DOCUMENTO

Esta dissertação apresenta a seguinte estrutura:

1. Introdução: motivação, objetivos e ementa do texto.
2. Introdução à Programação Semidefinida: PSD como um problema de programação cônica. Formulação de um problema semidefinido padrão, dualidade forte e métodos de pontos interiores para PSD. Pacote SeDuMi.
3. *Positivstellensatz*: Polinômios positivos, decomposição *SOS* e o décimo-sétimo problema de Hilbert. Relação entre polinômios *SOS* e PSD. Definições da geometria algébrica real, os *positivstellensatz* de Schmüdgen e Putinar e aplicações ao problema de otimização polinomial global. Teoremas de complexidade dos *positivstellensatz* baseados em pré-ordenamentos e módulos quadráticos. Pacote SOSTOOL.
4. O Problema dos Momentos e a Hierarquia de Lasserre: o problema dos momentos e uma condição necessária e suficiente para existência de medidas representativas dada pelo teorema de Riesz-Haviland. Solução do problema dos momentos para medidas suportadas em semialgêbricos básicos compactos a partir das versões duais dos teoremas de Schmüdgen e Putinar. Otimização

polinomial global via relaxação dos momentos: hierarquia de relaxações semidefinidas de Lasserre. Outras aplicações: otimização racional global e otimização polinomial global estocástica. Dualidade entre cones convexos relacionando o problema de certificar positividade ao problema dos momentos. Pacote GloptiPoly 3.

5. Aplicações: FPO global como ferramenta para determinação do melhor estado de operação de um sistema elétrico de potência. Formulação do FPO polinomial utilizando coordenadas cartesianas para descrição das variáveis elétricas. Aplicações da hierarquia de relaxações dos momentos/*SOS* para solução global de problemas determinísticos com múltiplas soluções locais. Solução global de um FPO racional utilizando a hierarquia de Lasserre. Aplicações da hierarquia de Lasserre a problemas de FPOEs: variáveis aleatórias (VAs) relacionadas à natureza do problema e à incerteza na modelagem dos parâmetros do sistema elétrico.
6. Conclusões: síntese das teorias desenvolvidas e aplicações apresentadas. Indicação de possíveis pesquisas futuras.
7. Apêndice A: sistemas de teste em formato MatPower para problemas de FPO com múltiplas soluções locais.

Capítulo 2

INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO SEMIDEFINIDA

2.1 INTRODUÇÃO

Programação cônica é uma área da otimização convexa na qual o espaço viável é definido sobre um cone convexo. Alguns casos particulares são PSD, a programação no cone de segunda ordem (PCSO) e a programação linear (PL). O que difere entre estes casos são os cones convexos nos quais o problema está definido. PSD é uma das áreas de pesquisa mais ativas em otimização convexa e sua aplicação a problemas da indústria é cada vez mais frequente [3]. Isto se deve à capacidade de formulação de uma ampla faixa de problemas e à existência de algoritmos eficientes para solução sob as perspectivas teórica e prática. Além disso, PSD engloba PCSO e PL como casos particulares.

Definição 2.1.1. Um subconjunto C de um espaço vetorial real $\mathbb{V}$ é um cone convexo se é fechado para combinações lineares com coeficientes não negativos:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \text{ e } \forall x, y \in C \Rightarrow \alpha x + \beta y \in C \quad (2.1)$$

C é pontudo se satisfaz: $x, -x \in C \Rightarrow x = 0_{\mathbb{V}}$

Consideremos o espaço vetorial real das matrizes reais de ordem n dotado com o produto interno:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{M}_n \times \mathbb{M}_n &\mapsto \mathbb{R} \\ \langle A, B \rangle &= \text{Tr}(A^T B). \end{aligned} \quad (2.2)$$

O conjunto das matrizes simétricas de ordem n ($\mathbb{S}_n$) é um importante subespaço vetorial de $\mathbb{M}_n$.

Definição 2.1.2. Diz-se que $A \in \mathbb{S}_n$ é positiva semidefinida ($A \geq 0$), se $x^T A x \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. É positiva definida ($A > 0$), se $x^T A x > 0$ para todo $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

Proposição 2.1.1. O conjunto das matrizes simétricas positivas semidefinidas é um cone convexo, pontudo, cujo interior é o conjunto das matrizes simétricas positivas definidas.

Proposição 2.1.2 (Ordem de Lowner). O cone das matrizes simétricas positivas semidefinidas induz uma relação de ordem parcial sobre $\mathbb{S}_n$: $A, B \in \mathbb{S}_n, A \geq B$, se $A - B \geq 0$.

A demonstração destes fatos é direta. A relação de ordem é também homogênea e aditiva. Outros cones convexos induzem relações de ordem parcial da mesma maneira. Algumas propriedades importantes sobre matrizes positivas semidefinidas:

Proposição 2.1.3. Seja $A \in \mathbb{S}_n$. São equivalentes as seguintes afirmações:

1. A é positiva semidefinida (definida)
2. Os autovalores de A são não negativos (positivos)
3. Os menores principais de A são não negativos (positivos)
4. Decomposição Cholesky: existe uma matriz $L \in \mathbb{M}_{k,n}$ tal que $A = L^T L$ ($k = n$ e L não singular).

A demonstração da equivalência das afirmações pode ser encontrada em grande parte dos livros de análise matricial [13] e álgebra linear numérica.

Um problema de PSD é um problema de otimização da forma:

$$\min_{X \in \mathbb{S}_n} \langle C, X \rangle \quad (2.3a)$$

$$\text{sujeito a: } \langle A_i, X \rangle = b_i, \quad i \in \{1, \dots, m\} \quad (2.3b)$$

$$X \geq 0 \quad (2.3c)$$

em que $C, A_i \in \mathbb{S}_n, b_i \in \mathbb{R}$. A função objetivo é linear e o conjunto viável é a interseção de um espaço afim e o cone semidefinido positivo. Conjuntos deste tipo recebem o nome de espectraedro¹.

¹ Análogo ao poliedro em PL, que é a interseção de um espaço afim com o ortante positivo (cone para PL).

2.2 DUALIDADE FORTE E MÉTODOS DE PONTOS INTERIORES

Podemos definir o problema dual associado ao problema primal (2.3):

$$\max_{y \in \mathbb{R}^m} b^T y \quad (2.4a)$$

$$\text{sujeito a: } C - \sum_{i=1}^m y_i A_i \geq 0. \quad (2.4b)$$

A maneira em que o problema dual é construído assegura dualidade fraca: $\langle C, X \rangle \geq b^T y$, sempre que X e y são viáveis. Isto significa que pontos viáveis do problema primal fornecem cotas superiores para a solução do problema dual, enquanto que pontos viáveis do problema dual fornecem cotas inferiores para a solução do problema primal. Se o *gap* de dualidade for nulo para pontos viáveis: $\langle C, X^* \rangle - b^T y^* = 0$, (X^*, y^*) constitui um par de soluções dos problemas primal e dual. Reciprocamente, dualidade forte ocorre sob hipóteses de qualificação das restrições [3]:

Teorema 2.2.1 (Dualidade Forte). Se o problema primal é limitado e possui ponto com viabilidade estrita²: $X > 0$, então o problema dual alcança solução y^* e as soluções dos problemas são iguais. Da mesma forma, se o problema dual é limitado e possui ponto estritamente viável: $C - \sum_{i=1}^m y_i A_i > 0$, então o problema primal alcança solução X^* e os problemas possuem soluções iguais. Portanto, quando ambos os problemas possuem pontos com viabilidade estrita, existe par de soluções primal-dual (X^*, y^*) , satisfazendo: $\langle C, X^* \rangle = b^T y^*$.

O teorema permite a solução de problemas de PSD pela busca de um par (X, y) satisfazendo a viabilidade primal, dual e *gap* de dualidade nulo. Estas são as condições de otimalidade para o problema semidefinido.

Métodos primal-dual de pontos interiores (PDPI) consistem em uma família de algoritmos eficientes para PSD. São algoritmos de tempo polinomial e apresentam bons resultados nas aplicações práticas. De forma análoga ao caso em PL, uma barreira logarítmica é adicionada à função objetivo para assegurar que as iterações ocorram no interior do cone semidefinido [3]. Um parâmetro de barreira σ que multiplica esta parcela é reduzido conforme processo iterativo, fazendo com que o problema perturbado se aproxime do problema original.

A extensão dos métodos de pontos interiores para problemas de programação cônica mais gerais foi apresentada no trabalho seminal [14]. Os autores identificaram a propriedade básica que levaria à complexidade polinomial dos algoritmos com função de barreira. Esta função deve satisfazer critérios técnicos que a classifica como auto-concordante.

² Condição de regularidade de Slater.

O problema semidefinido com barreira logarítmica assume a forma:

$$\min_{X \in S_n} \langle C, X \rangle - \sigma \log(\det(X)) \quad (2.5a)$$

$$\text{sujeito a: } \langle A_i, X \rangle = b_i, \quad i \in \{1, \dots, m\} \quad (2.5b)$$

$$X \geq 0. \quad (2.5c)$$

As condições de otimalidade para o problema com barreira são:

$$C - \sum_{i=1}^m y_i A_i + S = 0 \quad (2.6a)$$

$$\langle A_i, X \rangle = b_i \quad (2.6b)$$

$$XS = \sigma \quad (2.6c)$$

Uma linearização do sistema é resolvido em cada iteração do algoritmo e o parâmetro de barreira é atualizado pela estimativa: $\sigma = \langle X, S \rangle / n$. Um novo sistema é resolvido e o processo se repete. O critério de parada é baseado na viabilidade dos problemas primal, dual e valor alcançado pelo *gap* de dualidade. Esta é apenas uma visão geral e detalhes das variações dos métodos e implementações computacionais podem ser encontrados em [15].

PL e PCSO são casos particulares de PSD e muitos outros problemas importantes podem ser formulados via PSD. Uma ampla faixa de problemas combinatórios NP-difícil são resolvidos por algoritmos de aproximação via relaxação semidefinida.

Exemplos de problemas nos quais PSD possui papel de destaque são: máximo corte em um grafo (*max-cut*) [16], limitantes para capacidade de um canal a partir da função theta de Lóvasz [17], programação inteira 0-1 [18], desigualdades matriciais lineares [19], correlações quânticas [20] e otimização polinomial global [21]. Este último será apresentado nos próximos capítulos.

2.3 SEDUMI

SeDuMi é um software de disponibilidade gratuita implementado em MATLAB que permite a solução eficiente de problemas de programação cônica (linear, quadrática e semidefinida). Uma descrição da ferramenta pode ser obtida em [22]. O programa utiliza algoritmos baseados em métodos PDPI.

Há uma grande quantidade de programas computacionais de otimização para PSD disponíveis gratuitamente. Alguns exemplos são: SeDuMi, SDPT3 [23], SDPA [24], CSDP [25].

Capítulo 3

POSITIVSTELLENSATZ

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo estamos interessados no problema de certificar não negatividade ou positividade de um polinômio multivariado sob um subconjunto do $\mathbb{R}^n$. Ou seja, dado $p \in \mathbb{R}[x]$ e $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$, queremos um critério que assegure a validade da desigualdade:

$$p(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{K}. \quad (3.1)$$

Este problema possui muitas aplicações que serão apresentadas posteriormente. Alguns teoremas baseados na estrutura algébrica de $\mathbb{K}$ permitem a classificação de polinômios satisfazendo (3.1). Os métodos apresentados são da geometria algébrica real. Referimo-nos indistintamente a funções polinomiais por polinômios¹.

Dizemos que um polinômio é não negativo se $p(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$. É positivo se a desigualdade estrita é assegurada. Um polinômio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ é *SOS* se existem polinômios $q_i(x) \in \mathbb{R}[x]$,

¹ A rigor, a palavra polinômio refere-se aos elementos de um anel de polinômios.

satisfazendo:

$$p(x) = \sum_{i=1}^m q_i^2(x) \quad (3.2)$$

Começamos pelo caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}^n$. Todo polinômio *SOS* é não negativo. Portanto, uma forma de certificar não negatividade de um polinômio é apresentando uma decomposição *SOS*. Uma pergunta natural é: todo polinômio não negativo é *SOS*?

A resposta é não. Hilbert estabeleceu em 1888 um resultado que caracteriza os polinômios não negativos que são *SOS*:

Teorema 3.1.1. (Hilbert) Não negatividade e *SOS* são equivalentes apenas nos casos:

- polinômios univariados
- polinômios quadráticos
- polinômios quárticos bivariados

Para os demais casos, existem polinômios não negativos que não são *SOS*. O exemplo mais famoso é o polinômio de Motzkin:

$$M(x_1, x_2) = x_1^4 x_2^2 + x_1^2 x_2^4 - 3x_1^2 x_2^2 + 1 \quad (3.3)$$

Não negatividade segue da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica para $(x_1^4 x_2^2, x_1^2 x_2^4, 1)$. Um teorema a ser apresentado garante que este polinômio não pode ser escrito como soma de quadrados.

Dada a importância histórica, mencionamos brevemente o 17º problema de Hilbert.

3.2 O 17º PROBLEMA DE HILBERT

Em 1900, durante o 3º congresso internacional de matemáticos, realizado em Paris, o matemático alemão David Hilbert apresentou uma lista de problemas que guiariam boa parte da pesquisa matemática do século XX. Os 23 problemas de Hilbert acabaram se tornando a mais famosa lista de problemas da história da Matemática [26]. Alguns dos problemas que compõem a lista são a hipótese do contínuo, a existência de algoritmos para solubilidade de equações diofantinas, a hipótese de Riemann e a conjectura de Goldbach. Muitos já foram resolvidos, restando alguns em aberto.

O 17º problema da lista de Hilbert busca caracterizar os polinômios não negativos que podem ser escritos como soma de quadrados de funções racionais. A formulação original do problema seria: todo polinômio multivariado não negativo é soma de quadrados de funções racionais? A resposta afirmativa foi provada por Emil Artin e Otto Schreier em 1927.

3.3 CERTIFICADOS DE POSITIVIDADE VIA SOMA DE QUADRADOS

Sabemos que *SOS* é um certificado de não negatividade. A utilidade deste certificado é consequência do teorema que estabelece a relação entre *SOS* e PSD. Consideremos o vetor $v_d(x)$ de dimensão $s(d) = \binom{n+d}{d}$, com os elementos da base monomial de $\mathbb{R}[x]_d$, ordenado seguindo a ordem lexicográfica:

$$v_d(x) = [1 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \ x_1^2 \ x_1 x_2 \ \dots \ x_n^2 \ \dots \ x_n^d]^T. \quad (3.4)$$

Teorema 3.3.1. $p \in \Sigma[x]_{2d} \iff \exists Q \in \mathbb{S}_{s(d)}, Q \geq 0 \mid p = v_d^T Q v_d$.

O teorema estabelece que a busca por uma decomposição *SOS* para um polinômio é equivalente a resolver um problema de PSD. De fato, a variável Q deve satisfazer positividade semidefinida, além das restrições impostas pelos coeficientes na igualdade $p = v_d^T Q v_d$, definindo um espectraedro para o problema semidefinido.

Exemplo 3.3.1. Seja $p(x) = 2x_1^4 + 5x_2^4 - x_1^2 x_2^2 + 2x_1^3 x_2 + 2x_1 + 2 \in \mathbb{R}[x]$, uma quártica bivariada. Sabemos pelo Teorema 3.1.1 que este polinômio é não negativo se e somente se ele é *SOS*. Procuramos uma matriz $Q \geq 0$, tal que $p(x) = v_2^T Q v_2$, em que $v_2 = [1 \ x_1 \ x_2 \ x_1^2 \ x_1 x_2 \ x_2^2]^T$. PSD permite a obtenção de uma matriz:

$$Q = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 6 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -4 & 0 & 15 \end{bmatrix}.$$

A partir de uma fatorização Cholesky, $Q = V^T V$, obtemos uma decomposição *SOS* explícita:

$$\begin{aligned} p(x) &= v_2^T (V^T V) v_2 = (V v_2)^T (V v_2) \\ &= \frac{4}{3} x_2^2 + \frac{1349}{705} x_2^4 + \frac{1}{12} (4x_1 + 3)^2 + \frac{1}{15} (3x_1^2 + 5x_1 x_2)^2 + \frac{1}{315} (-21x_1^2 + 20x_2^2 + 10)^2 \\ &\quad + \frac{1}{59220} (328x_2^2 - 235)^2 \end{aligned}$$

Desta forma, sabemos que $p(x) \in \Sigma[x]$ e, portanto, $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Seguem algumas definições necessárias da geometria algébrica real.

Definição 3.3.1. Um conjunto semialgébrico básico fechado é um conjunto da forma:

$$S(g_1, \dots, g_m) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0, i \in \{1, \dots, m\}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Para alguma família $\{g_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}[x]$.

Definição 3.3.2. O pré-ordenamento gerado por $\{g_1, \dots, g_m\} \subset \mathbb{R}[x]$ é o conjunto:

$$PO(g_1, \dots, g_m) = \left\{ \sum_{J \subset \{1, \dots, m\}} s_J g_J \in \mathbb{R}[x] \mid s_J \in \Sigma[x], g_\emptyset = 1, g_J = \prod_{i \in J} g_i \right\} \subset \mathbb{R}[x].$$

Definição 3.3.3. O módulo quadrático gerado por $\{g_1, \dots, g_m\} \subset \mathbb{R}[x]$ é o conjunto:

$$MQ(g_1, \dots, g_m) = \left\{ \sum_{i=0}^m s_i g_i \in \mathbb{R}[x] \mid s_i \in \Sigma[x], g_0 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}[x].$$

Observe que $MQ(g_1, \dots, g_m) \subset PO(g_1, \dots, g_m)$.

Definição 3.3.4. Um módulo quadrático $MQ \subset \mathbb{R}[x]$ é arquimediano se $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $N - \sum_{i=1}^n x_i^2 \in MQ$.

Quando $f \in MQ(g_1, \dots, g_m)$ ou $f \in PO(g_1, \dots, g_m)$, é fácil ver que $f \geq 0$ para todo $x \in S(g_1, \dots, g_m)$. Sob a hipótese de compacidade do semialgébrico básico fechado, positividade de um polinômio neste conjunto, implica que o polinômio seja elemento do pré-ordenamento associado. Mais ainda, se o módulo quadrático é arquimediano, o resultado análogo é verdadeiro para o módulo quadrático. Estes são os resultados dos teoremas que certificam positividade de polinômios sob conjuntos semialgébricos básicos compactos:

Teorema 3.3.2 (Schmüdgen). Suponha que $S(g_1, \dots, g_m)$ é semialgébrico básico compacto. Então, seja $f \in \mathbb{R}[x]$:

$$f(x) > 0, \forall x \in S(g_1, \dots, g_m) \Rightarrow f \in PO(g_1, \dots, g_m).$$

A versão deste teorema para módulos quadráticos considera a hipótese arquimediana adicional:

Teorema 3.3.3 (Putinar). Suponha que $S(g_1, \dots, g_m)$ é semialgébrico básico compacto e tal que $MQ(g_1, \dots, g_m)$ é arquimediano. Então, seja $f \in \mathbb{R}[x]$:

$$f(x) > 0, \forall x \in S(g_1, \dots, g_m) \Rightarrow f \in MQ(g_1, \dots, g_m).$$

A hipótese do módulo quadrático ser arquimediano não é muito restritiva. Uma condição equivalente é: $\exists g \in MQ$ tal que $\{x \in \mathbb{R}^n, g(x) \geq 0\}$ é compacto. Em muitas aplicações, é interessante adicionar uma desigualdade para garantir que o módulo quadrático seja arquimediano: $g_{m+1}(x) = N - \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$ com $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

É natural questionar se existem conjuntos semialgébricos básicos compactos cujos módulos quadráticos associados não sejam arquimedianos. A resposta é sim e a identificação destes conjuntos é

não trivial. O conjunto $\mathbb{K} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 1 - x_1^2 - x_1^3 x_2 - x_2^6 \geq 0\}$ é um exemplo de semialgébrico básico, compacto e tal que $MQ(x_1, x_2, 1 - x_1^2 - x_1^3 x_2 - x_2^6)$ não é arquimediano. Mais detalhes podem ser encontrados em [27], [28].

Os teoremas de Schmüdgen e Putinar são exemplos do tipo *positivstellensatz*. Os Teoremas 3.3.1, 3.3.2 e 3.3.3 permitem certificar positividade de polinômios em conjuntos semialgébricos básicos compactos via PSD. No caso do polinômio ser positivo, a existência desta representação é garantida pelos teoremas. Reciprocamente², caso $f \in MQ(g_1, \dots, g_m)$ ou $f \in PO(g_1, \dots, g_m)$, garantimos que $f \geq 0$ no conjunto semialgébrico básico. Assim, uma tentativa para identificar se um polinômio é não negativo em certo conjunto semialgébrico básico compacto, consiste em buscar polinômios SOS que o represente como elemento do pré-ordenamento ou módulo quadrático. O exemplo a seguir ilustra esta ideia.

Exemplo 3.3.2. Certifiquemos que $f \geq 0$ em $\mathbb{K}$:

$$f = x_1^3 - x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + x_2^3, \quad \mathbb{K} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g_1 = x_1 \geq 0, g_2 = x_2 \geq 0, g_3 = x_1 + x_2 - 1 \geq 0\}.$$

Tentamos identificar se $f \in MQ$. Desejamos encontrar $s_0, s_1, s_2, s_3 \in \Sigma[x]$, tais que: $f = s_0 + s_1g_1 + s_2g_2 + s_3g_3$.

A ideia é limitar o grau dos candidatos s_i e aumentar o limite, se necessário. Portanto, o problema consiste em encontrar matrizes positivas semidefinidas $Q_i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$, satisfazendo:

$$f = s_0 + s_1g_1 + s_2g_2 + s_3g_3$$

$$s_i = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} Q_i \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad Q_i \geq 0, \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Este é um problema de viabilidade semidefinida, com solução:

$$Q_0 = 0_{3 \times 3}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, $f(x) = x_2^2x_1 + x_1^2x_2 + (x_1 - x_2)^2(x_1 + x_2 - 1)$. Portanto, $f \geq 0$ em $\mathbb{K}$.

² Perceba que há uma diferença entre positividade e não negatividade.

3.4 OTIMIZAÇÃO POLINOMIAL VIA SOS

Iniciamos pelo caso irrestrito. Considere o problema:

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} p(x) \quad (3.5)$$

O problema (3.5) pode ser reformulado como:

$$\sup_{(x, \gamma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \gamma \quad (3.6a)$$

$$\text{sujeito a: } p(x) - \gamma \geq 0 \quad (3.6b)$$

Para o caso univariado, a condição de não negatividade é equivalente à condição *SOS* (Teorema 3.1.1) e o problema pode ser reescrito como:

$$\sup \gamma \quad (3.7a)$$

$$\text{sujeito a: } p(x) - \gamma \in \Sigma[x] \quad (3.7b)$$

Este problema pode ser resolvido via PSD utilizando o Teorema 3.3.1. Como consequência, otimização irrestrita global para polinômios univariados é um problema de complexidade polinomial. Este pode não ser o caso para polinômios multivariados, uma vez que positividade e *SOS* não são sempre equivalentes.

Para o caso multivariado, a substituição da restrição de desigualdade pela restrição *SOS* fornece um problema cuja solução é uma cota inferior para o problema original³ e, eventualmente, é a solução exata. Este procedimento consiste na relaxação *SOS*. A exatidão é avaliada a partir dos *ranks* das matrizes da solução do problema dual semidefinido. A decomposição *SOS* fornece um sistema de equações algébricas cujas soluções são os pontos nos quais o mínimo global é atingido⁴. A obtenção destes pontos é melhor realizada por fatorização das matrizes das soluções dos problemas semidefinidos. Detalhes podem ser encontrados em [29], [30].

Para otimização restrita, que ocorre na maioria das situações práticas, os teoremas de Putinar e Schmüdgen permitem a formulação de problemas semidefinidos que constituem a hierarquia das relaxações convexas.

³ No caso em que o problema é inviável, sua solução é $-\infty$.

⁴ O ínfimo de um polinômio multivariado pode não ser alcançado, como é o caso do polinômio $p(x_1, x_2) = x_1^2 + (1 - x_1 x_2)^2$, que fornece um sistema de equações algébricas com solução vazia.

3.5 CASO RESTRITO

Antes de apresentar a hierarquia de relaxações semidefinidas para problemas polinomiais gerais, é interessante considerar programação quadrática com restrição quadrática (*QCQP*) utilizando relaxação semidefinida da restrição de *rank* unitário, conhecida por relaxação de Shor. Este é um caso particular do esquema de hierarquia de relaxações. A saber, é equivalente à primeira relaxação da hierarquia.

3.5.1 Problema *QCQP* e Relaxação Semidefinida

Consideramos o problema *QCQP*:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} x^T A_0 x + 2b_0^T x \quad (3.8a)$$

$$\text{sujeito a: } x^T A_i x + 2b_i^T x + c_i \geq 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}. \quad (3.8b)$$

Podemos homogeneizar o problema, a partir de uma mudança de variáveis:

$$\min_{y \in \mathbb{R}^{n+1}} y^T Q_0 y \quad (3.9a)$$

$$\text{sujeito a: } y^T Q_i y \geq -c_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (3.9b)$$

$$y^T Q_\alpha y = 1 \quad (3.9c)$$

em que

$$y = \begin{bmatrix} \alpha \\ x \end{bmatrix}, \quad Q_i = \begin{bmatrix} 0 & b_i^T \\ b_i & A_i \end{bmatrix}, \quad Q_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha^2 = 1. \quad (3.10)$$

Proposição 3.5.1. O traço $\text{Tr} : S_n \mapsto \mathbb{R}$ é um operador cíclico: $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA)$.

Em consequência da Proposição 3.5.1, temos: $y^T Q y = \text{Tr}(y^T Q y) = \text{Tr}(Q y y^T) = \langle Q, y y^T \rangle$. Assim, (3.9) é equivalente a:

$$\min_{y \in \mathbb{R}^{n+1}} \langle Q_0, y y^T \rangle \quad (3.11a)$$

$$\text{sujeito a: } \langle Q_i, y y^T \rangle \geq -c_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (3.11b)$$

$$\langle Q_\alpha, y y^T \rangle = 1. \quad (3.11c)$$

Um fato importante é o seguinte caso particular de 2.1.3:

Proposição 3.5.2. $X \in S_n, X \geq 0$ e $\text{rank}(X) = 1 \iff \exists x \in \mathbb{R}^n \mid X = x x^T$.

Portanto, o problema (3.11) pode ser reescrito para uma variável $Y \in \mathbb{S}_{n+1}$:

$$\min_{Y \in \mathbb{S}_{n+1}} \langle Q_0, Y \rangle \quad (3.12a)$$

$$\text{sujeito a: } \langle Q_i, Y \rangle \geq -c_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (3.12b)$$

$$\langle Q_\alpha, Y \rangle = 1 \quad (3.12c)$$

$$\text{rank}(Y) = 1 \quad (3.12d)$$

$$Y \geq 0. \quad (3.12e)$$

A condição de *rank* unitário é o que impede (3.12) de ser um problema convexo. Relaxação semidefinida consiste em desconsiderar esta restrição. Assim, resolve-se o problema convexo relaxado, cuja solução fornece uma cota inferior para o problema original. Dizemos que a relaxação é exata quando a solução do problema relaxado possuir *rank* unitário. Neste caso, a solução do problema original pode ser recuperada de $Y = yy^T$. O problema relaxado é semidefinido e pode ser resolvido por métodos PDPI. É importante observar que estes algoritmos tendem a convergir para soluções de máximo *rank*. Isto é uma dificuldade em relação à exatidão. Ainda assim, é comum a obtenção de exatidão da relaxação semidefinida para problemas práticos.

A convexidade do problema semidefinido garante que as soluções alcançadas são globais. Desta forma, soluções globais podem ser obtidas para muitos problemas *QCQP*. Aplicações ao FPO podem ser consultadas em [31], [32] e um estudo detalhado desta relaxação aplicado ao FPO foi conduzido em [33], [34].

3.5.2 Hierarquia de Relaxações SOS

Consideramos agora o problema de otimização polinomial restrito da forma:

$$\begin{aligned} \rho &= \inf_{x \in \mathbb{K}} p(x) \\ \mathbb{K} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0, i \in \{1, 2, \dots, m\}\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

O problema pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \rho &= \sup \gamma, \quad \text{sujeito a: } p(x) - \gamma \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{K} \\ &= \sup \gamma, \quad \text{sujeito a: } p(x) - \gamma > 0, \quad \forall x \in \mathbb{K} \\ \mathbb{K} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0, i \in \{1, 2, \dots, m\}\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Buscamos um certificado de positividade para $p(x) - \gamma$ sobre $\mathbb{K}$. Podemos usar os teoremas de Schmüdgen e Putinar para formular um problema equivalente a (3.14) quando $\mathbb{K}$ satisfaz as hipóteses

dos teoremas. O *positivstellensatz* de Schmüdgen fornece o problema equivalente:

$$\begin{aligned} \rho &= \sup \gamma \\ \text{sujeito a: } p(x) - \gamma &\in PO(g_1, \dots, g_m) \end{aligned} \quad (3.15)$$

A relaxação *SOS* consiste em resolver o problema para um grau limitado dos polinômios na expressão geradora dos elementos do pré-ordenamento ou módulo quadrático, o que equivale a um problema de PSD. Denotemos:

$$PO_k(g_1, \dots, g_m) = \left\{ \sum_{J \in \{1, \dots, m\}} s_J g_J \in \mathbb{R}[x] \mid s_J \in \Sigma[x], g_0 = 1, g_J = \prod_{i \in J} g_i, \text{gr}(s_J g_J) \leq k \right\} \quad (3.16a)$$

$$MQ_k(g_1, \dots, g_m) = \left\{ \sum_{i=0}^m s_i g_i \in \mathbb{R}[x] \mid s_i \in \Sigma[x], g_0 = 1, \text{gr}(s_i g_i) \leq k \right\} \quad (3.16b)$$

Note que $PO_k(g_1, \dots, g_m) \subset PO(g_1, \dots, g_m) \cap \mathbb{R}_k[x]$ e $MQ_k(g_1, \dots, g_m) \subset MQ(g_1, \dots, g_m) \cap \mathbb{R}_k[x]$. A relaxação de ordem k via Schmüdgen *positivstellensatz* consiste no seguinte problema:

$$\begin{aligned} \rho_k &= \sup \gamma \\ \text{sujeito a: } p(x) - \gamma &\in PO_k(g_1, \dots, g_m) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Analogamente, temos a relaxação de ordem k baseada no *positivstellensatz* de Putinar:

$$\begin{aligned} \rho_k &= \sup \gamma \\ \text{sujeito a: } p(x) - \gamma &\in MQ_k(g_1, \dots, g_m) \end{aligned} \quad (3.18)$$

A solução de 3.17 ou 3.18 apresentará um limite inferior para solução do problema original: $\rho_k \leq \rho$. Caso o problema semidefinido seja inviável, este limite será $-\infty$. A relaxação é exata quando fornece uma solução para o problema original, situação identificada a partir de condições satisfeitas pelos *ranks* das matrizes do problema dual semidefinido. A hierarquia de relaxações consiste em aumentar sucessivamente o valor do grau máximo dos polinômios, obtendo uma sequência de cotas inferiores, que converge para solução de (3.13): $\rho_k \uparrow \rho, k \rightarrow \infty$. A dificuldade perdura nos casos em que a ordem da relaxação é alta, uma vez que a dimensão do problema semidefinido cresce rapidamente: $\binom{n+k}{k}$. É inevitável que isto ocorra para alguns casos, pois o problema é de natureza NP-difícil. Apesar disto, o resultado é alcançado após uma quantidade finita de relaxações em muitos casos e exatidão é obtida frequentemente para relaxações de pequena ordem.

3.6 POSITIVSTELLENSATZ E COMPLEXIDADE

Os certificados de Putinar e Schmüdgen fornecem relaxações *SOS* diferentes para o problema de otimização. A hipótese do teorema de Putinar exige que o módulo quadrático associado ao conjunto viável seja arquimediano, o que é compensado com um certificado de positividade e problemas semidefinidos mais simples. Como já mencionado, a hipótese adicional é facilmente contornada pela adição de uma restrição a $\mathbb{K}$. Por outro lado, é possível que relaxações baseadas em Schmüdgen resolvam o problema para ordens de relaxação inferiores quando comparado a Putinar. Os seguintes teoremas fornecem avaliação da complexidade dos certificados de Schmüdgen e Putinar. Para análise detalhada, consultar [35], [36].

Precisamos definir a seguinte norma no espaço vetorial $\mathbb{R}[x]$:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{\alpha \in I} a_{\alpha} x^{\alpha} \in \mathbb{R}[x] \\ |\alpha| &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \\ x^{\alpha} &= x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \\ \|f\| &= \max_{\alpha \in I} \frac{|a_{\alpha}|}{\binom{|\alpha|}{\alpha}} \end{aligned}$$

Teorema 3.6.1 (Complexidade de Schmüdgen). Dado $S(g_1, \dots, g_m)$ semialgébrico básico compacto, não vazio e contido no hipercubo $(-1, 1)^n$. Existe $c \geq 1$ (dependendo dos g_i s), tal que $\forall f \in \mathbb{R}[x]$ de grau d com:

$$f^* = \min_{x \in S(g_1, \dots, g_m)} f(x) > 0,$$

tem-se:

$$f \in PO_k(g_1, \dots, g_m), \quad \text{com } k \leq cd^2 \left(1 + \left(d^2 n^d \frac{\|f\|}{f^*} \right)^c \right).$$

Teorema 3.6.2 (Complexidade de Putinar). Dado $S(g_1, \dots, g_m)$ semialgébrico básico compacto, não vazio, contido no hipercubo $(-1, 1)^n$ e tal que $MQ(g_1, \dots, g_m)$ é arquimediano. Existe $c \geq 0$ (dependendo dos g_i s), tal que $\forall f \in \mathbb{R}[x]$ de grau d com:

$$f^* = \min_{x \in S(g_1, \dots, g_m)} f(x) > 0,$$

tem-se:

$$f \in MQ_k(g_1, \dots, g_m), \quad \text{com } k \leq c \exp \left(d^2 n^d \frac{\|f\|}{f^*} \right)^c$$

Os teoremas fornecem cotas para os graus dos polinômios *SOS* nos certificados de positividade sobre conjuntos semialgébricos básicos fechados, compactos. Não se sabe se existem limites mais estreitos, podendo haver limites iguais para ambos os casos. O fato é que estas cotas conhecidas

indicam que o grau da relaxação necessária para solução de problemas via putinar *positivstellensatz* pode ser maior do que o necessário para schmüdgen *positivstellensatz*, o que está de acordo com a diferença entre as estruturas algébricas de pré-ordenamento e módulo quadrático. A quantidade de termos geradores dos elementos de um pré-ordenamento varia de forma exponencial em relação à quantidade de geradores de um módulo quadrático, o que contrasta com a cota exponencial no Teorema 3.6.2.

3.7 SOSTOOL

O pacote SOSTOOL [37], programado em MATLAB e disponível gratuitamente, permite a solução de diversos problemas de programação *SOS*, utilizando computação algébrica simbólica. Este software realiza a conversão do problema *SOS* para o equivalente PSD, utiliza outros pacotes gratuitos para solução do problema semidefinido e, então, converte a solução PSD para a solução do problema original. A ferramenta permite o uso de diversos *solvers* de PSD. Utilizaremos o *default*, que é o pacote SeDuMi.

SOSTOOL foi desenvolvido com base no certificado de positividade de Schmüdgen. Outros pacotes utilizam teoremas equivalentes ao *positivstellensatz* de Putinar, a partir da linguagem do problema dos momentos, conforme descrito no capítulo subsequente. As aplicações existentes da hierarquia de relaxações semidefinidas ao FPO utilizam softwares desenvolvidos pela abordagem da relaxação dos momentos. Utilizaremos computação algébrica para o FPO, além do problema dos momentos. Como veremos, as duas metodologias são duais e, portanto, equivalentes. A principal diferença diz respeito ao *positivstellensatz* utilizado. Explorar as duas abordagens permite uma visão mais completa e é vantajoso.

Capítulo 4

O PROBLEMA DOS MOMENTOS E A HIERARQUIA DE LASSERRE

4.1 O PROBLEMA DOS MOMENTOS

Considere um conjunto $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ e uma sequência $(y_a)_{a \in \mathbb{N}^n}$ de números reais. O problema dos momentos consiste em identificar os casos de existência e unicidade de uma medida de Borel μ com suporte contido em $\mathbb{K}$, satisfazendo:

$$y_a = \int_{\mathbb{K}} x^a d\mu, \quad \forall a \in \mathbb{N}^n \quad (4.1)$$

Se uma medida satisfaz (4.1), dizemos que ela é uma medida representativa da sequência. Quando a medida representativa é única, dizemos que ela é determinada. É desejável a identificação de uma tal medida para os casos de existência. O problema dos momentos apresenta muitas aplicações importantes e alguns casos particulares são o problema do hambúrguer, o problema de Stieltjes e o problema de Hausdorff, diferindo pelo espaço mensurável no qual o conjunto $\mathbb{K}$ está definido e os

valores assumidos pela sequência $(y_a)_{a \in \mathbb{N}^n}$. O problema dos momentos truncados considera o caso de uma sequência finita $(y_a)_{a \in \mathbb{N}_r^n}$.

Como veremos adiante, caracterizar medidas suportadas¹ em $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ definidas por sequências de números reais representando seus momentos é o problema dual ao de certificar positividade de polinômios sobre $\mathbb{K}$ [38], [30]. Este é um resultado da dualidade clássica da análise convexa. A identificação entre os dois problemas estará mais clara no decorrer deste capítulo.

Associamos à sequência $(y_a)_{a \in \mathbb{N}^n}$, o funcional linear de Riesz:

$$L_y : \mathbb{R}[x] \mapsto \mathbb{R}, \quad p(x) = \sum_{a \in \mathbb{N}^n} p_a x^a, \quad L_y(p(x)) = \sum_{a \in \mathbb{N}^n} y_a p_a \quad (4.2)$$

Teorema 4.1.1 (Riesz-Haviland). Seja $(y_a)_{a \in \mathbb{N}^n} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$, fechado. Existe uma medida de Borel finita suportada em $\mathbb{K}$ satisfazendo (4.1), se e somente se:

$$L_y(f) \geq 0, \quad \forall f \in \mathbb{R}[x] \mid f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{K} \quad (4.3)$$

O teorema evidencia que a dificuldade do problema dos momentos está diretamente relacionada à caracterização de polinômios positivos. Assim como para certificar positividade, existem vários teoremas de representabilidade de uma sequência por uma medida considerando diferentes hipóteses sobre $\mathbb{K}$. Novamente, consideremos o vetor $v_r(x)$ de dimensão $s_n(r) = \binom{n+r}{n}$ com os elementos da base canônica de $\mathbb{R}_r[x]$, ordenado seguindo a ordem lexicográfica:

$$v_r(x) = [1 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \ x_1^2 \ x_1 x_2 \ \dots \ x_n^2 \ \dots \ x_n^r]^T \quad (4.4)$$

Dada uma matriz A , $L_y(A)$ representa a matriz resultante da aplicação de L_y elemento a elemento.

Definição 4.1.1. Seja uma sequência $(y_a)_{a \in \mathbb{N}^{s(2r)}} \subset \mathbb{R}$ e um polinômio $u \in \mathbb{R}[x]$.

1. A matriz dos momentos $M_r(y) \in \mathbb{S}_{s(r)}$ é definida por: $M_r(y) = L_y(v_r(x)v_r(x)^T)$
2. A matriz de localização $M_r(u, y) \in \mathbb{S}_{s(r)}$ é definida por: $M_r(u, y) = L_y(u \cdot v_r(x)v_r(x)^T)$. Evidentemente, $M_r(y) = M_r(1, y)$.

Segue um exemplo para fixar notação:

Exemplo 4.1.1. $r = 1, n = 2, s_2(1) = \binom{3}{2} = 3, (y_a)_{a \in \mathbb{N}^2} \subset \mathbb{R}, u(x) = 1 + x_1^2 - x_1 x_2$.

$$v_1(x)v_1(x)^T = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_1^2 & x_1 x_2 \\ x_2 & x_1 x_2 & x_2^2 \end{bmatrix}$$

¹ Medidas cujo suporte é um subconjunto de $\mathbb{K}$.

$$M_1(y) = L_y(v_1(x)v_1(x)^T) = \begin{bmatrix} y_{00} & y_{10} & y_{01} \\ y_{10} & y_{20} & y_{11} \\ y_{01} & y_{11} & y_{02} \end{bmatrix}$$

$$M_r(u, y) = L_y(u \cdot v_r(x)v_r(x)^T) = \begin{bmatrix} y_{00} + 3y_{20} - y_{11} & y_{10} + 3y_{30} - y_{21} & y_{01} + 3y_{21} - y_{12} \\ y_{10} + 3y_{30} - y_{21} & y_{20} + 3y_{40} - y_{31} & y_{11} + 3y_{31} - y_{22} \\ y_{01} + 3y_{21} - y_{12} & y_{11} + 3y_{31} - y_{22} & y_{02} + 3y_{22} - y_{13} \end{bmatrix}$$

Os teoremas a seguir apresentam as versões duais dos Teoremas 3.3.2 e 3.3.3.

Teorema 4.1.2 (Dual de Schmüdgen). Seja $\mathbb{K} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0, i \in \{1, 2, \dots, m\}\}$ semialgébrico básico fechado, compacto, $(y_a)_{a \in \mathbb{N}^n} \subset \mathbb{R}$ com funcional linear de Riesz: $L_y : \mathbb{R}[x] \mapsto \mathbb{R}$. Então, $(y_a)_{a \in \mathbb{N}^n}$ tem medida finita de Borel representativa com suporte contido em $\mathbb{K}$, se e somente se:

$$M_r(g_J, y) \geq 0, \quad \forall J \subset \{1, \dots, m\} \text{ e } \forall r \in \mathbb{N}$$

em que $g_J = \prod_{i \in J} g_i$ e $g_\emptyset(x) = 1$.

Teorema 4.1.3 (Dual de Putinar). Seja $\mathbb{K} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0, i \in \{1, 2, \dots, m\}\}$ semialgébrico básico fechado, compacto, tal que $MQ(g_1, \dots, g_m)$ é arquimediano e $(y_a)_{a \in \mathbb{N}^n} \subset \mathbb{R}$ com funcional linear de Riesz: $L_y : \mathbb{R}[x] \mapsto \mathbb{R}$. Então, $(y_a)_{a \in \mathbb{N}^n}$ tem medida finita de Borel representativa com suporte contido em $\mathbb{K}$, se e somente se:

$$M_r(g_i, y) \geq 0, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, m\} \text{ e } \forall r \in \mathbb{N}$$

em que $g_0(x) = 1$.

É possível perceber semelhanças com o problema de certificar positividade sob um semialgébrico básico fechado. De fato, a existência de uma medida de Borel finita com suporte contido em $\mathbb{K}$ faz exigência de positividade semidefinida de uma família de matrizes relacionadas aos polinômios que definem o conjunto semialgébrico. A analogia com os *positivstellensatz* ocorre pela existência de matrizes positivas semidefinidas (polinômios *SOS*) associadas aos elementos geradores do pré-ordenamento ou módulo quadrático relacionado a $\mathbb{K}$.

O seguinte teorema fornece uma condição suficiente para o problema dos momentos truncado (sequência finita de reais), que pode ser verificada por métodos numéricos:

Teorema 4.1.4 (Momentos Truncado). Seja $\mathbb{K} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0, i \in \{1, 2, \dots, m\}\}$ semialgébrico básico fechado, em que cada polinômio g_i tem grau $2v_i$ ou $2v_i - 1$. Seja $(y_a)_{\mathbb{N}_{2r}^n}$ sequência finita de reais e $v = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} v_i$. Então a sequência tem medida representativa $\text{rank}(M_{r-v}(y))$ -atômica² com suporte contido em $\mathbb{K}$, se e somente se as duas condições são verificadas:

² Uma medida p -atômica é uma combinação linear de p medidas de Dirac (átomos).

$$1. M_r(y) \geq 0, M_{r-v}(g_i, y) \geq 0, i = 1, \dots, m$$

$$2. \text{rank}(M_r(y)) = \text{rank}(M_{r-v}(y))$$

Mais ainda, a medida possui $\text{rank}(M_r(y)) - \text{rank}(M_{r-v}(g_i, y))$ átomos $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $g_i(x) = 0$, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.

A condição 2 do Teorema 4.1.4 fornece uma maneira de assegurar exatidão para a relaxação dos momentos apresentada na próxima seção. Além disto, o teorema permite a obtenção da solução ótima do problema de otimização a partir dos átomos da medida representativa da sequência.

4.2 HIERARQUIA DE LASSERRE E OTIMIZAÇÃO POLINOMIAL GLOBAL

A abordagem dos momentos pode ser aplicada diretamente ao problema de otimização polinomial global. De fato, o problema (3.13) é equivalente a:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{mom}} &= \inf_{\mu \in M(\mathbb{K})_+} \int_{\mathbb{K}} p d\mu \\ \text{sujeito a: } &\mu(\mathbb{K}) = 1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Este é um problema linear, portanto convexo, em um espaço de dimensão infinita.

Teorema 4.2.1. Se ρ e ρ_{mom} são soluções para (3.13) e (4.5), então $\rho = \rho_{\text{mom}}$.

Esta formulação justifica a preocupação que dispndemos ao problema dos momentos. Se $p = \sum_{a \in I} p_a x^a$, temos:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{mom}} &= \inf_{\mu \in M(\mathbb{K})_+} \sum_{a \in I} p_a \int_{\mathbb{K}} x^a d\mu \\ \text{sujeito a: } &\mu(\mathbb{K}) = 1. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Em vez de medidas, buscamos sequências que possuem medidas representativas:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{mom}} &= \inf_{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}} \sum_{a \in I} p_a y_a \\ \text{sujeito a: } &y_0 = 1 \\ &y_a = \int_{\mathbb{K}} x^a d\mu. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Seja $i \geq i_0 = \max\{\lceil \text{gr}(p)/2 \rceil, \max_{j \in \{1, \dots, m\}} \{v_j = \lceil \text{gr}(g_j)/2 \rceil\}\}$. Consideremos o problema:

$$\rho_i = \inf_{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_{2i}^n}} L_y(p) \quad (4.8a)$$

$$\text{sujeito a: } y_0 = 1 \quad (4.8b)$$

$$M_i(y) \geq 0 \quad (4.8c)$$

$$M_{i-v_j}(g_j, y) \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, m\}. \quad (4.8d)$$

Esta é a relaxação semidefinida de ordem i para o problema (4.5), em que as restrições semidefinidas sobre as matrizes dos momentos e de localização são condições necessárias para a sequência $(y_a)_{a \in \mathbb{N}_{2i}^n}$ possuir medida de Borel finita representativa suportada em $\mathbb{K}$. Cada solução ρ_i é uma cota inferior para a solução de 4.5 e a sequência de soluções $(\rho_i)_{i \geq i_0}$ converge monotonicamente para ρ_{mom} , se $\mathbb{K}$ é semialgébrico básico compacto com módulo quadrático arquimediano. Esta é a hierarquia de Lasserre de relaxações semidefinidas e possui convergência finita em muitos casos [39], [38], [21]. Quando a condição de *rank* do Teorema 4.1.4 é verificada, a sequência ótima possui medida representativa e a relaxação é exata, caso em que $\rho_i = \rho_{\text{mom}}$. A relaxação semidefinida (4.8) é baseada no Teorema 4.1.3 de Putinar. Uma hierarquia de relaxações baseadas em Schmüdgen (Teorema 4.1.2) pode ser obtida de maneira análoga.

Novamente, a metodologia consiste em resolver a hierarquia de relaxações semidefinidas com intuito de alcançar exatidão para uma determinada ordem. As dificuldades e recomendações relacionadas à complexidade e à dimensão do problema semidefinido são as mesmas.

Quando a relaxação é exata, é possível, a partir da sequência $(y_a)_{a \in \mathbb{N}_{2i}^n}$, extrair uma medida representativa e todas as soluções globais do problema polinomial (3.13) utilizando um algoritmo prático e eficiente. Detalhes do algoritmo podem ser consultados em [38]. A computação necessária está limitada a uma fatorização Cholesky, escalonamentos, multiplicações de matrizes e uma decomposição de Schur.

4.3 HIERARQUIA DE LASSERRE E OTIMIZAÇÃO RACIONAL GLOBAL

Aplicamos a formulação do problema dos momentos e a hierarquia de Lasserre ao problema de otimização com função objetivo racional:

$$\rho = \inf_{x \in \mathbb{K}} \frac{p(x)}{q(x)} \quad (4.9)$$

$$\mathbb{K} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \geq 0, \quad j \in \{1, 2, \dots, m\}\}.$$

Suponha que $q(x) > 0$. Pode ser demonstrado que (4.9) é equivalente a [38]:

$$\begin{aligned} \rho &= \inf_{\mu \in M(\mathbb{K})_+} \int_{\mathbb{K}} p d\mu \\ \text{sujeito a: } &\int_{\mathbb{K}} q d\mu = 1. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Para $i \geq i_0 = \max\{\lceil \text{gr}(p)/2 \rceil, \max_{j \in \{1, \dots, m\}} \lceil \text{gr}(g_j)/2 \rceil\}$. A relaxação semidefinida de ordem i para (4.10) é:

$$\rho_i = \inf_{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_{2i}^n}} L_y(p) \quad (4.11a)$$

$$\text{sujeito a: } M_i(y) \geq 0 \quad (4.11b)$$

$$M_{i-v_j}(g_j, y) \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, m\} \quad (4.11c)$$

$$L_y(q) = 1. \quad (4.11d)$$

Similarmente, resolvemos a hierarquia de relaxações semidefinidas aumentando a ordem da relaxação para alcançar exatidão ou cotas inferiores.

4.4 HIERARQUIA DE LASSERRE E OTIMIZAÇÃO POLINOMIAL GLOBAL ESTOCÁSTICA

Otimização paramétrica consiste em uma família de problemas de otimização dependendo de certos parâmetros. Quando os parâmetros são VAs, temos um problema de otimização estocástica. Apresentamos aplicações do problema dos momentos e da hierarquia de Lasserre ao problema de otimização polinomial global estocástica. A ideia é obter diretamente aproximações para o valor médio das soluções globais dos problemas, sem a necessidade de uma abordagem do tipo Monte Carlo por amostragem das VAs.

Sejam $f(y, x), g_j(y, x) \in \mathbb{R}[y, x]$, $j \in \{1, \dots, m\}$, $\mathbb{K} = \{g_j(y, x) \geq 0, j \in \{1, \dots, m\}\} \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{K}_y = \{g_{jy}(x) \geq 0, j \in \{1, \dots, m\}\} \subset \mathbb{R}^n$ para cada $y \in Y \subset \mathbb{R}^p$ conjuntos semialgébicos básicos compactos, com $g_{jy}(x) = g_j(y, x)$. Dado ϕ uma medida de probabilidade de Borel sobre Y , absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue. Consideramos o problema de otimização polinomial estocástica:

$$\begin{aligned} &\inf_{(y, x) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n} f(y, x) \\ \text{sujeito a: } &(y, x) \in \mathbb{K} = \{g_j(y, x) \geq 0, j \in \{1, \dots, m\}\} \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \\ &P(y \in B) = \phi(B) = \int_Y \chi_B d\phi, \quad B \in \sigma(Y) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Para cada $y \in Y$, há um problema de otimização polinomial determinístico:

$$\begin{aligned} J(y) &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f_y(x) \\ \text{sujeito a: } x &\in \mathbb{K}_y = \{g_{jy}(x) \geq 0, j \in \{1, \dots, m\}\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Analogamente ao que fizemos anteriormente, associamos a (4.12) um problema linear de dimensão infinita sobre o espaço das medidas:

$$\begin{aligned} \rho &= \inf_{\mu \in M(\mathbb{K})_+} \int_{\mathbb{K}} f(y, x) d\mu \\ \text{sujeito a: } \pi\mu &= \phi. \end{aligned} \quad (4.14)$$

A restrição significa que ϕ é a medida marginal de μ sobre $\mathbb{R}^p$. [40] provou que a medida ótima codifica todas as informações a respeito das soluções globais de (4.12) quando $y \in Y$. Particularmente, $\rho = \int_{y \in Y} J(y) d\phi(y)$.

Uma vez que $\mathbb{K}$ é semialgébrico básico compacto e μ é medida de probabilidade, portanto finita, μ é completamente determinada pelos seus momentos. Então, a restrição em (4.14) pode ser substituída pelas restrições de igualdade linear:

$$\int_{\mathbb{K}} y^a d\mu(y, x) = \int_{\mathbb{K}_y} y^a d\phi(y), \quad \forall a \in \mathbb{N}^p. \quad (4.15)$$

O Teorema 4.1.3 e a equação (4.15) permitem a formulação de uma sequência de relaxações semidefinidas para obtenção de cotas para (4.14), convergindo para a solução.

Para $i \geq i_0 = \max\{\lceil \text{gr}(p)/2 \rceil, \max_{j \in \{1, \dots, m\}} \{v_j = \lceil \text{gr}(g_j)/2 \rceil\}\}$. A relaxação semidefinida de i -ésima ordem para (4.14) é:

$$\begin{aligned} \rho_i &= \inf_{z \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^n)_{2i}}} L_z(f) \\ \text{sujeito a: } M_i(z) &\geq 0 \\ M_{i-v_j}(g_j, z) &\geq 0, \quad j \in \{1, \dots, m\} \\ L_z(y^b) &= \gamma_b, b \in \mathbb{N}_{2i}^p \end{aligned} \quad (4.16)$$

em que $(\gamma_b)_{b \in \mathbb{N}_{2i}^p}$ representa os momentos da VA até a ordem $2i$. Novamente $\rho_i \leq \rho$ e $\rho_i \uparrow \rho, i \rightarrow \infty$. A sequência de relaxações é resolvida para obtenção de cotas convergindo para o valor médio das soluções globais. É importante observar que a VA é melhor aproximada quanto maior for a ordem da relaxação e o problema sempre apresentará uma cota, uma vez que perdemos informações da VA ao aproximá-la por uma sequência de momentos truncada.

4.5 DUALIDADE

Dualidade em programação cônica linear consiste em associar um problema de otimização dual ao problema original (primal) em espaços vetoriais duais algébricos, com restrição cônica substituída pela restrição ao cone dual e restrição afim substituída pela restrição associada utilizando operadores adjuntos. A ideia é baseada no *emparelhamento* dos espaços vetoriais com respectivos duais utilizando formas bilineares para construção de uma função lagrangeana que permite manipulações algébricas para formulação do problema dual. A teoria é bastante geral e inclui espaços vetoriais topológicos localmente convexos arbitrários [41]. Por simplicidade, iremos apenas observar a dualidade existente entre os cones dos polinômios não negativos e *SOS* e os cones das sequências que possuem medida representativa e cuja matriz dos momentos é positiva semidefinida.

Consideremos o espaço dual $\mathbb{R}[x]^*$ dos funcionais lineares $L : \mathbb{R}[x] \mapsto \mathbb{R}$ e os cones convexos $\mathcal{P}[x] \subset \mathbb{R}[x]$ e $\Sigma[x] \subset \mathbb{R}[x]$ dos polinômios positivos e *SOS*. Identificamos um polinômio $p(x) = \sum_{a \in \mathbb{N}^n} p_a x^a$ com a sequência de seus coeficientes $(p_a)_{a \in \mathbb{N}^n} \in \mathbb{R}^\infty$, em que $\mathbb{R}^\infty$ é o subespaço de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}$ das sequências finitamente não nulas. Identificamos $L \in \mathbb{R}[x]^*$ com a sequência $y := (L(x^a))_{a \in \mathbb{N}^n} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}$, de tal modo que $L = L_y$, sendo L_y o funcional linear de Riesz, definido em (4.2). Consideremos os seguintes cones em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}$:

$$\mathcal{M} = \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n} \mid y \text{ possui medida representativa}\} \quad (4.17a)$$

$$\mathcal{M}_\succeq = \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n} \mid M(y) \geq 0\}. \quad (4.17b)$$

Aqui, $M(y)$ é uma matriz de dimensão infinita, análoga à $M_r(y)$ na Definição 4.1.1. A teoria de dualidade em análise convexa fornece a descrição dos cones duais em $\mathbb{R}[x]^*$:

$$\mathcal{P}[x]^* = \{L \in \mathbb{R}[x]^* \mid L(p) \geq 0, \forall p \in \mathcal{P}[x]\} \quad (4.18a)$$

$$\Sigma[x]^* = \{L \in \mathbb{R}[x]^* \mid L(p) \geq 0, \forall p \in \Sigma[x]\} = \{L \in \mathbb{R}[x]^* \mid L(p^2) \geq 0, \forall p \in \mathbb{R}[x]\}. \quad (4.18b)$$

O teorema seguinte estabelece a relação dual entre o problema dos momentos e a caracterização de polinômios não negativos, a partir da identificação entre $\mathbb{R}[x]^*$ e $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}$:

Teorema 4.5.1. $\mathcal{P}[x]^* = \mathcal{M}$, $\mathcal{M}^* = \mathcal{P}[x]$, $\mathcal{M}_\succeq = \Sigma[x]^*$, e $\Sigma[x] = \mathcal{M}_\succeq^*$.

Detalhes relacionados ao teorema e sua demonstração podem ser encontrados em [42], [39] e suas referências. Versões considerando conjuntos semialgébricos básicos e sequências truncadas podem ser encontradas em [43], [44] e estão diretamente relacionadas ao teorema da extensão de Riesz em análise funcional.

4.6 GLOPTIPOLY 3

GloptiPoly 3 é um software de licença pública com código em MATLAB proposto para solução do problema dos momentos generalizados a partir da hierarquia de relaxações de Lasserre, conforme discutido. O programa utiliza pacotes de PSD para resolver o problema relaxado, incluindo SeDuMi como *default*. Uma grande variedade de problemas podem ser formulados a partir da linguagem do problema dos momentos e resolvidos eficientemente utilizando GloptiPoly 3. Detalhes podem ser obtidos em [45].

Capítulo 5

FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO GLOBAL

Apresentamos aplicações dos métodos descritos ao FPO global determinístico, estocástico e a um exemplo não usual de FPO racional. As aplicações ao FPO determinístico existentes na literatura consideram apenas o teorema de Putinar aplicado ao problema dos momentos. Aqui, utilizamos as técnicas com ambos os *positivstellensatz*, formulando as hierarquias de relaxações semidefinidas a partir do problema dos momentos e da linguagem da geometria algébrica real, além do uso de um software com tratamento de esparsidade. Também, apresentamos as primeiras aplicações da hierarquia de Lasserre ao FPOE e a um problema de FPO com função objetivo racional.

5.1 FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO

O fluxo de potência (FP) ou fluxo de carga é uma ferramenta matemática para determinação do estado de operação estacionário de um sistema elétrico de potência. Consiste na aplicação das leis de Kirchhoff ao circuito que modela a rede, formulando um sistema de equações não lineares. Compreende

a modelagem, equacionamento e solução de um sistema não linear.

A versão do FPO traduz-se na busca do melhor estado de operação da rede elétrica sob um determinado objetivo. O FPO é, portanto, um problema de otimização com restrições, normalmente formulado como um problema de otimização contínua. Alguns dos objetivos são a minimização do custo de geração, minimização das perdas elétricas de potência ativa, minimização do corte do suprimento de carga sob contingências, maximização do carregamento do sistema elétrico, minimização do fluxo de potência entre duas barras, minimização da alocação de potência reativa em um determinado trecho do sistema, entre outros.

O FPO possui restrições de igualdade dadas pelas equações de balanço de potência ativa e reativa nas barras do sistema imposto pelas leis de Kirchhoff. Além disto, existem outras restrições físicas e operacionais, tais como os limites das tensões nas barras, os limites de injeção de reativos e de geração de potência ativa e reativa, restrições de fluxo de potência em determinadas linhas, limites na comutação de tapes dos transformadores, etc. As restrições físicas estão normalmente relacionadas às leis da Física e aos aspectos construtivos dos equipamentos, enquanto que as restrições operacionais referem-se aos limites estabelecidos para operação do sistema elétrico em condições normais, visando segurança e qualidade do fornecimento da energia.

Muitas formulações do FPO utilizam coordenadas polares para identificação das grandezas elétricas, associando a cada variável sua magnitude e fase. Isto se deve à prática interpretação fasorial. Para estes casos, têm-se normalmente um problema de otimização não linear que não é polinomial. Para a abordagem proposta, utilizamos coordenadas cartesianas, identificando cada variável por sua parte real e imaginária. Desta forma, formulamos um problema de otimização polinomial, permitindo a aplicação das técnicas de otimização global propostas. Alguns problemas de FPO possuem múltiplas soluções locais e os algoritmos usuais de otimização não linear convergem para algum ótimo local, que pode não ser a melhor solução. A principal vantagem da aplicação dos métodos apresentados consiste em alcançar a solução global, quando possível em um tempo não proibitivo.

O primeiro passo para formulação do problema consiste na modelagem dos componentes do sistema elétrico e na construção da matriz admitância de barra $\hat{Y}$ da rede:

$$\hat{Y} = G + jB \quad (5.1)$$

Em seguida, os nós do sistema são classificados quanto às variáveis desconhecidas. A classificação das barras em problemas de FP é usualmente:

- Barra de referência - $V\theta$: a tensão é conhecida em amplitude e fase e devem ser calculadas as potências ativa e reativa;
- Barra de tensão controlada - PV : são especificadas a potência ativa e a magnitude de tensão e devem ser calculadas a potência reativa e a fase da tensão;

- Barra PQ : as potências ativa e reativa são conhecidas e há a necessidade de obtenção da tensão em módulo e fase.

Consideramos os seguintes conjuntos de índices:

- $\mathcal{N} = \{i \mid i \text{ é uma barra do sistema}\}$
- $\mathcal{G} = \{i \mid i \text{ é barra de geração}\}$
- $\mathcal{E} = \{i \mid i \text{ é barra com alocação shunt de potência reativa}\}$
- $\Gamma = \{(i, k) \mid \text{as barras } i \text{ e } k \text{ estão conectadas}\}$
- $\Gamma_i = \{k \mid k \text{ está conectada à barra } i\}$

Representamos as tensões complexas em coordenadas cartesianas:

$$\hat{V}_i = e_i + jf_i, \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (5.2)$$

em que e_i e f_i correspondem às partes real e imaginária da tensão no nó i . Sem perda de generalidade, a barra # 1 estabelece a referência angular com $f_1 = 0$.

As equações de fluxo de potência entre os nós i e k são:

$$P_{ik} = G_{ik}(e_i e_k + f_i f_k) + B_{ik}(f_i e_k - e_i f_k) \quad (5.3a)$$

$$Q_{ik} = G_{ik}(f_i e_k - e_i f_k) - B_{ik}(e_i e_k + f_i f_k). \quad (5.3b)$$

As injeções líquida de potência ativa e reativa podem ser calculadas por:

$$P_i = \sum_{k \in \Gamma_i} P_{ik} \quad (5.4a)$$

$$Q_i = \sum_{k \in \Gamma_i} Q_{ik}, \quad (5.4b)$$

O balanço de potência nas barras é dado pela lei dos nós de Kirchhoff:

$$P_{D_i} - P_{G_i} + P_i = 0 \quad (5.5a)$$

$$Q_{D_i} - Q_{G_i} + Q_i = 0. \quad (5.5b)$$

Os índices D e G referem-se à demanda e à geração, respectivamente. O custo de geração em cada fonte é considerado como uma função polinomial da potência ativa gerada:

$$C_i = \sum_{k=0}^r a_k P_{G_i}^k \quad (5.6)$$

Segue um exemplo de formulação de FPO para minimização do custo de geração:

$$\min \sum_{i \in \mathcal{G}} C_i \quad (5.7a)$$

$$\text{sujeito a: } P_i + P_{D_i} - P_{G_i} = 0, \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (5.7b)$$

$$Q_i + Q_{D_i} - Q_{G_i} = 0, \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (5.7c)$$

$$P_i^{\min} \leq P_{G_i} \leq P_i^{\max}, \quad \forall i \in \mathcal{G} \quad (5.7d)$$

$$Q_i^{\min} \leq Q_{G_i} \leq Q_i^{\max}, \quad \forall i \in \mathcal{G} \cup \mathcal{E} \quad (5.7e)$$

$$V_i^{\min 2} \leq e_i^2 + f_i^2 \leq V_i^{\max 2}, \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (5.7f)$$

Aplicações ao FPO de relaxação semidefinida e de relaxação de segunda ordem podem ser encontradas na literatura [31], [32], [33], [34], [46]. A maior dificuldade perdura no fato de não haver garantia de exatidão para grande parte dos problemas. Existem condições que asseguram exatidão para casos específicos, principalmente relacionadas à topologia da rede elétrica, mas não há uma caracterização precisa que possa ser aplicada em geral.

Algumas condições suficientes para exatidão da relaxação semidefinida e de segunda ordem aplicada ao FPO podem ser encontradas em [34]. Há uma demanda natural por resultados que garantam exatidão para relaxações do FPO de ordem superior. Embora pareça restritivo, muitos sistemas elétricos apresentam as hipóteses das proposições que asseguram exatidão. Eventualmente, pequenas alterações podem ser efetuadas para adequar o problema a determinados casos específicos. É o caso, por exemplo, da inserção de elementos resistivos nos ramos da rede elétrica. Este é um artifício de modelagem realista e apresenta bons resultados computacionais [34]. Outras dificuldades estão relacionadas à dimensão do problema e ao custo computacional e podem ser contornadas utilizando técnicas de esparsidade e outras ferramentas, como é o caso da relaxação cordal. Problemas de FPO esparsos são frequentes, sobretudo para redes elétricas radiais.

Relaxações de ordem superior apresentam uma opção para contornar a falta de exatidão das relaxações cônicas usuais. A hierarquia de Lasserre de relaxações semidefinidas já foi aplicada ao FPO [4], [11], [12]. Estas aplicações são baseadas no certificado de positividade de Putinar e inicialmente foram tratados sistemas elétricos com poucas barras. Existem bons resultados com sistemas de maior escala [12]. Isto foi possível pelo tratamento da esparsidade e utilização de uma adaptação da hierarquia de Lasserre à formulação do problema de otimização em variáveis complexas. Aqui, apresentaremos exemplos ilustrativos simples, com aplicação de ambos os *positivstellensatz* (Schmüdgen e Putinar), a partir dos softwares SOSTOOL e Gloptypoly 3, além do uso do software SparsePOP que considera técnicas de esparsidade [47]. Adicionalmente, consideraremos problemas estocásticos e com função objetivo racional nas próximas seções.

Iniciamos com aplicações ao FPO determinístico em problemas com múltiplas soluções locais.

Utilizamos os sistemas disponíveis em <https://www.maths.ed.ac.uk/optenergy/LocalOpt/>. Estes sistemas não alcançam exatidão para relaxações semidefinidas usuais [32] e, portanto, a hierarquia de relaxações representa uma possibilidade para solução global. Apenas alguns destes sistemas foram testados em [11]. A Tabela 1 apresenta um resumo das múltiplas soluções estacionárias dos FPOs analisados.

Tabela 1 - Múltiplas soluções locais

Sistema	Nº soluções locais	Pior solução local	Solução global
WB2	2	905,73 \$/h	877,78 \$/h
WB3	2	418,14 \$/h	415,25 \$/h
LMBM3	5	9.677,11 \$/h	5.694,54 \$/h
WB5	2	1.082,33 \$/h	946,58 \$/h
WB5mod	3	1.996,19 \$/h	918,55 \$/h
case22loop	2	5.929,14 \$/h	4.538,80 \$/h
case30loop	2	3.827,67 \$/h	2.863,06 \$/h
case30loopmod	3	6.665,47 \$/h	2.861,88 \$/h

Além da solução global a partir das hierarquias de relaxações semidefinidas, buscamos soluções pelo método PDPI para programação não linear, implementado no MatPower [48], [49]. Este é um método tradicional que converge para soluções locais, eventualmente distintas da solução global. Informações detalhadas dos sistemas de testes podem ser encontradas no Apêndice A.

Os grafos que representam as redes elétricas estão simplificadaamente representados na Figura 1. Os pares de grafos WB5, WB5mod e case30loop, case30loopmod apresentam as mesmas topologias, mas os problemas são distintos, diferindo nos limites das tensões nas barras. Além disto, as cargas e geradores conectados nos nós não estão representados, assim como os circuitos Π que modelam as linhas.

As simulações foram realizadas com um notebook com processador Intel(R) Core(TM) i5-8265U CPU @ 1,60GHz, 1800Mhz, 4 Núcleos, 8 Processadores Lógicos e memória RAM de 8GB. Foram utilizadas as versões R2019b e R2016a do MATLAB. A versão R2016a foi utilizada para simulações do SOSTOOL, uma vez que este pacote utiliza funções simbólicas que foram substituídas em versões posteriores.

Há uma diferença sutil entre as ordens das relaxações semidefinidas *SOS* e dos momentos. A k -ésima relaxação *SOS* limita a k os graus dos polinômios geradores dos elementos do pré-ordenamento e a relaxação dos momentos de ordem i considera sequências truncadas indexadas por $\mathbb{N}_{2i}^n$. Uma relaxação dos momentos de ordem i é melhor comparável a uma relaxação *SOS* de ordem $2i$. Referimo-nos às ordens das relaxações desta maneira para coincidir com a notação usual e os pacotes de otimização disponíveis. Os resultados podem ser vistos nas tabelas a seguir.

Pode-se perceber a força do método ao alcançar soluções globais em ordens de relaxação baixas. Mais ainda, mesmo quando a relaxação não é exata, a cota apresentada já é muito próxima da solução

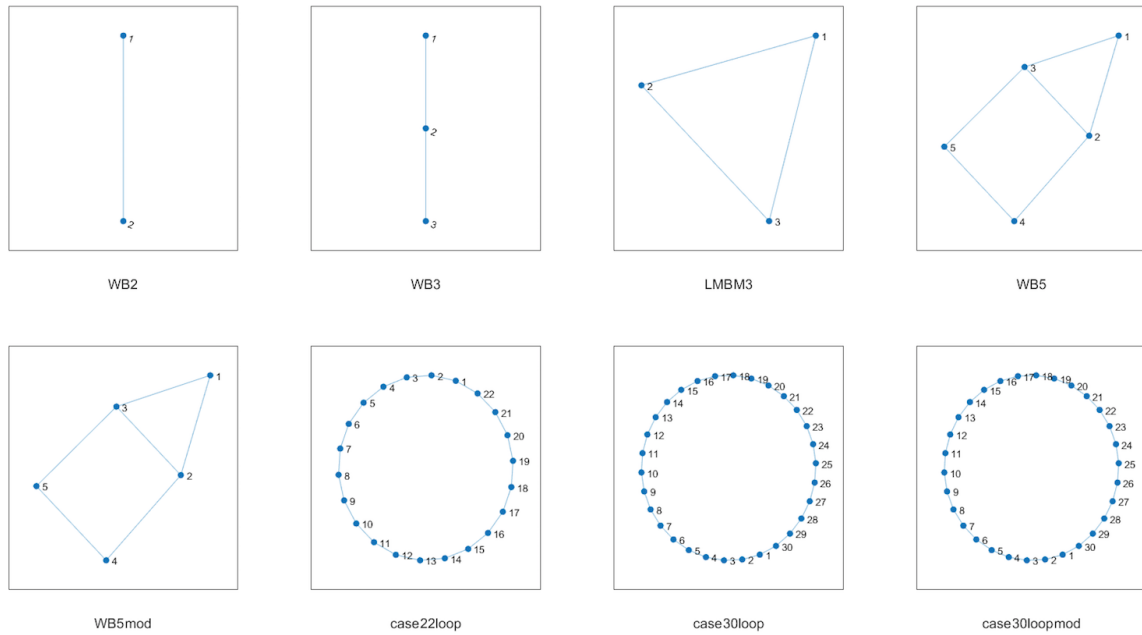


Figura 1 - Grafos dos sistemas de teste

Tabela 2 - Sistema WB2

Método	Ordem	Solução/Cota	Tempo	Exatidão
GloptiPoly 3	1	877,78 \$/h	0,1 s	Não
GloptiPoly 3	2	877,78 \$/h	0,1 s	Sim
SparsePOP	1	877,78 \$/h	2,4 s	Não
SparsePOP	2	877,78 \$/h	2,4 s	Sim
SOSTOOL	2	877,78 \$/h	1,5 s	Não
SOSTOOL	4	877,78 \$/h	20,9 s	Sim
MatPower (PDPI)	-	Não convergiu	-	-

global. A exatidão é importante porque nos permite obter o ponto de mínimo para a operação do sistema elétrico em tal condição.

O pacote SOSTOOL apresenta detalhes para representações de polinômios por soma de quadrados e é bastante vantajoso em muitas aplicações. Um exemplo interessante consiste no cálculo de expressões explícitas para funções de Lyapunov polinomiais em análise de estabilidade de sistemas dinâmicos polinomiais [5]. Por outro lado, por ser baseado em um *positivstellensatz* mais forte, apresenta problemas semidefinidos maiores e sofre com limites de memória das máquinas, além de maior tempo computacional. Técnicas algébricas permitem o tratamento de esparsidade na tentativa de superar tais dificuldades. Os polítopos de Newton dos polinômios fornecem restrições que podem ser consideradas para cálculos de certificados de positividade, por exemplo.

GloptiPoly 3 é escrito na linguagem do problema dos momentos e é baseado no certificado de

Tabela 3 - Sistema WB3

Método	Ordem	Solução/Cota	Tempo	Exatidão
GloptiPoly 3	1	415,25 \$/h	0,3 s	Não
GloptiPoly 3	2	415,25 \$/h	0,2 s	Sim
SparsePOP	1	415,25 \$/h	4,1 s	Não
SparsePOP	2	415,25 \$/h	4,2 s	Sim
SOSTOOL	2	415,25 \$/h	2,3 s	Não
SOSTOOL	4	415,25 \$/h	222 s	Sim
MatPower (PDPI)	-	Não convergiu	-	-

Tabela 4 - Sistema LMBM3

Método	Ordem	Solução/Cota	Tempo	Exatidão
GloptiPoly 3	2	5694,54 \$/h	0,3 s	Sim
SparsePOP	2	5694,54 \$/h	14,7 s	Sim
SOSTOOL	4	Problemas de Tempo/Memória		
MatPower (PDPI)	-	5694,54 \$/h	0,2 s	-

Tabela 5 - Sistema WB5

Método	Ordem	Solução/Cota	Tempo	Exatidão
GloptiPoly 3	1	946,53 \$/h	0,2 s	Não
GloptiPoly 3	2	946,58 \$/h	1,5 s	Sim
SparsePOP	1	946,53 \$/h	11,8 s	Não
SparsePOP	2	946,58 \$/h	13,5 s	Sim
SOSTOOL	2	946,53 \$/h	59,3 s	Não
SOSTOOL	4	Problemas de Tempo/Memória		
MatPower (PDPI)	-	1082,33 \$/h	0,1 s	-

positividade de Putinar. Neste caso, os problemas são menores e a exatidão é normalmente alcançada na segunda relaxação (ordem 2). A hipótese de módulo quadrático arquimediano é sempre respeitada nos exemplos e sua violação poderia ser facilmente contornada com uso de restrição adicional. O bom desempenho do GloptiPoly 3 pode ser observado e uma grande vantagem é a possibilidade da incorporação direta de restrições sob os momentos de medidas de probabilidade relacionadas ao problema, conforme apresentaremos na Seção 5.3. É interessante recordar os teoremas de complexidade dos *positivstellensatz* e observar que representações do tipo Schmüdgen também apresentaram exatidão na segunda relaxação (ordem 4) para os problemas menores das Tabelas 2 e 3.

O SparsePOP foi indispensável para solução de problemas maiores, haja vista o uso de técnicas de esparsidade implementadas no software. Além disso, utiliza o certificado de Putinar, que fornece problemas mais simples.

Em alguns casos, PDPI para programação não linear, implementado no MatPower, apresentou divergência, o que contrasta com a robustez dos métodos globais. Para o sistema WB5, MatPower

Tabela 6 - Sistema WB5mod

Método	Ordem	Solução/Cota	Tempo	Exatidão
GloptiPoly 3	1	918,54 \$/h	0,1 s	Não
GloptiPoly 3	2	918,55 \$/h	1,4 s	Sim
SparsePOP	1	918,55 \$/h	13,6 s	Não
SparsePOP	2	918,55 \$/h	13,8 s	Sim
SOSTOOL	2	918,55 \$/h	12min 6s	Não
SOSTOOL	4	Problemas de Tempo/Memória		
MatPower (PDPI)	-	918,55 \$/h	0,1 s	-

Tabela 7 - Sistema case22loop

Método	Ordem	Solução/Cota	Tempo	Exatidão
GloptiPoly 3	1	4538,78 \$/h	2,7 s	Não
GloptiPoly 3	2	Problemas de Tempo/Memória		
SparsePOP	1	4538,78 \$/h	70 s	Não
SparsePOP	2	4538,80 \$/h	128 s	Sim
SOSTOOL	2	Problemas de Tempo/Memória		
MatPower (PDPI)	-	4538,80 \$/h	0,4 s	-

Tabela 8 - Sistema case30loop

Método	Ordem	Solução/Cota	Tempo	Exatidão
GloptiPoly 3	1	2862,99 \$/h	13,2 s	Não
GloptiPoly 3	2	Problemas de Tempo/Memória		
SparsePOP	1	2863,06 \$/h	97 s	Não
SparsePOP	2	2863,06 \$/h	206 s	Sim
SOSTOOL	2	Problemas de Tempo/Memória		
MatPower (PDPI)	-	2863,06 \$/h	0,1 s	-

convergiu para uma solução local que não é global. Ainda assim, PDPI convergiu para a solução global na maioria dos casos. É difícil justificar a solução alcançada por métodos locais, uma vez que depende de vários fatores, inclusive da inicialização do algoritmo.

Em todos os casos, os problemas semidefinidos foram resolvidos pelo SeDuMi. O uso de outros pacotes de PSD é possível, mas não é o objetivo aqui. O tempo de simulação cresce consideravelmente com o aumento da ordem da relaxação, devido ao aumento da dimensão das variáveis do problema semidefinido. Os problemas PSDs formulados pelo certificado de Schmüdgen possuem grande quantidade de variáveis e, portanto, apresentam tempos de simulação significativamente maiores.

Tabela 9 - Sistema case30loopmod

Método	Ordem	Solução/Cota	Tempo	Exatidão
GloptiPoly 3	1	2861,55 \$/h	13,5 s	Não
GloptiPoly 3	2	Problemas de Tempo/Memória		
SparsePOP	1	2861,88 \$/h	89 s	Não
SparsePOP	2	2861,88 \$/h	203 s	Sim
SOSTOOL	2	Problemas de Tempo/Memória		
MatPower (PDPI)	-	2861,88 \$/h	0,1 s	-

5.2 FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO RACIONAL

Formulamos um exemplo de FPO cuja função objetivo é uma função racional. Consideramos maximização do fator de potência (fp) e modelamos as cargas como fontes de corrente. Este problema é diferente da minimização do consumo de potência reativa, o que justifica sua formulação racional. Denotemos a corrente complexa demandada pela i -ésima barra por $\hat{I}_{D_i}$. Novamente, sem perda de generalidade: $f_1 = 0$. O fp na i -ésima barra de geração é calculado por:

$$fp_i = \frac{P_{G_i}}{\sqrt{P_{G_i}^2 + Q_{G_i}^2}} \quad (5.8)$$

Uma vez que $P_{G_i} \geq 0$ e considerando $Q_{G_i} \geq 0$, maximizar fp_i é equivalente a minimizar $\frac{Q_{G_i}}{P_{G_i}}$. Assim, temos o modelo de FPO racional:

$$\min \frac{Q_{G_k}}{P_{G_k}} \quad (5.9a)$$

$$\text{sujeito a: } P_i + \Re(\hat{V}_i \hat{I}_{D_i}^*) + P_{G_i} = 0, \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (5.9b)$$

$$Q_i + \Im(\hat{V}_i \hat{I}_{D_i}^*) + Q_{G_i} = 0, \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (5.9c)$$

$$P_i^{\min} \leq P_{G_i} \leq P_i^{\max}, \quad \forall i \in \mathcal{G} \quad (5.9d)$$

$$Q_i^{\min} \leq Q_{G_i} \leq Q_i^{\max}, \quad \forall i \in \mathcal{G} \quad (5.9e)$$

$$V_i^{\min^2} \leq e_i^2 + f_i^2 \leq V_i^{\max^2}, \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (5.9f)$$

Consideremos o circuito adaptado de WB5 na Figura 2. O objetivo é maximizar o fp na barra 1. Uma tentativa natural para aumentar o fp consiste em reduzir o consumo de potência reativa. Então, resolvemos 2 FPOs distintos: a) minimização de Q_{G_1} , e b) maximização de fp_1 . Para ambos os casos, a hierarquia de Lasserre alcança soluções globais para relaxações de ordem 2. O primeiro é um problema de otimização polinomial e o segundo é um problema de otimização racional. As soluções são mostradas nas Tabelas 10 e 11.

A solução do problema racional alcança o maior fp. De fato, a solução é global. Observe a

Tabela 10 - Minimização de Q_{g1}

barra	$ \hat{V} $	θ	$P_G(MW)$	$Q_Q(MVar)$
1	1,0318	0,0000	173,40	85,79
2	0,9500	-4,1753	-	-
3	0,9653	-3,1111	-	-
4	0,9816	-30,2838	-	-
5	1,0500	-28,6974	26,73	77,36

Tabela 11 - Maximização de fp_1

barra	$ \hat{V} $	θ	$P_G(MW)$	$Q_G(MVar)$
1	1,0483	0	243,75	99,42
2	0,9500	-5,8203	-	-
3	0,9626	-4,8368	-	-
4	0,9904	-50,778	-	-
5	1,0500	-49,9499	0.00	106,33

comparação entre os fp 's para os dois problemas na Tabela 12: $0,9259 > 0,8963$.

Tabela 12 - Fator de potência - barra 1

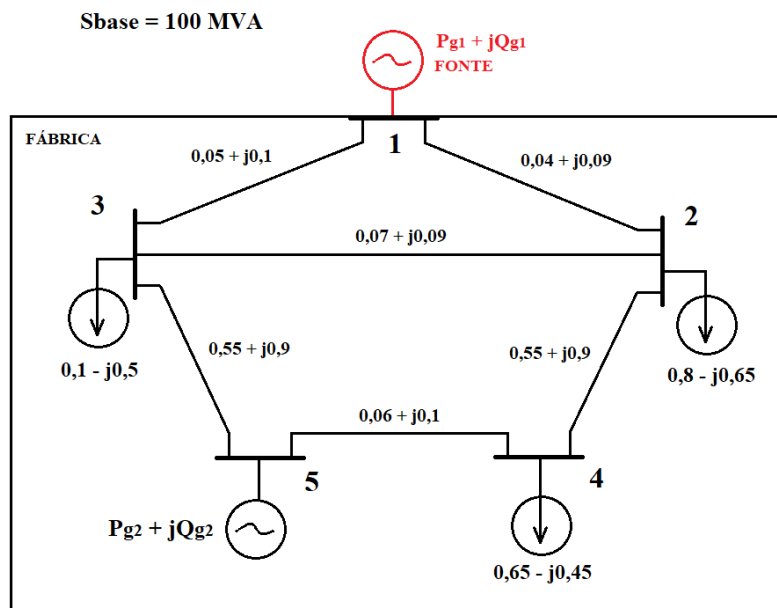
Problema	fp_1
Minimização de Q_{g1}	0,8963
Maximização de fp_1	0,9259

A solução global do problema (a) provê uma solução estacionária para (b). Os multiplicadores de Lagrange para esta solução estacionária são:

$$\begin{aligned}
 h_1 \quad P_2 + \Re(\hat{V}_2 \hat{I}_{D_2}^*) &= 0 & \lambda_{h_1} &= -0,2158 \\
 h_2 \quad Q_2 + \Im(\hat{V}_2 \hat{I}_{D_2}^*) &= 0 & \lambda_{h_2} &= 0,6349 \\
 h_3 \quad P_3 + \Re(\hat{V}_3 \hat{I}_{D_3}^*) &= 0 & \lambda_{h_3} &= -0,2348 \\
 h_4 \quad Q_3 + \Im(\hat{V}_3 \hat{I}_{D_3}^*) &= 0 & \lambda_{h_4} &= 0,5965 \\
 h_5 \quad P_4 + \Re(\hat{V}_4 \hat{I}_{D_4}^*) &= 0 & \lambda_{h_5} &= 0,0078 \\
 h_6 \quad Q_4 + \Im(\hat{V}_4 \hat{I}_{D_4}^*) &= 0 & \lambda_{h_6} &= 0,0641 \\
 g_1 \quad e_2^2 + f_2^2 - V_{2,min}^2 &\geq 0 & \pi_{g_1} &= 0,3405 \\
 g_2 \quad V_{5,max}^2 - e_5^2 - f_5^2 &\geq 0 & \pi_{g_2} &= 0,3501
 \end{aligned}$$

As outras desigualdades são inativas nesta solução, possuindo multiplicadores de Lagrange nulos.

Uma tentativa de evitar a função objetivo racional seria alterar o objetivo para: $\min \lambda$ e acrescentar a restrição: $\lambda P_{G1} - Q_{G1} \geq 0$. Porém, a hierarquia de Lasserre aplicada a este problema polinomial não apresenta exatidão para as ordens 1 e 2. Para relaxações de ordens superiores, os problemas



semidefinidos apresentam instabilidade numérica e problemas de memória/tempo de simulação. Em resumo, a solução global do problema de maximização do fp só foi alcançada a partir da relaxação dos momentos aplicada diretamente ao problema com função objetivo racional.

5.3 FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO ESTOCÁSTICO

Há incertezas em problemas de análise de sistemas de potência, que podem surgir da imprecisão na modelagem ou da própria natureza do problema. Existem incertezas relacionadas aos valores dos parâmetros da rede, por exemplo, e é possível que algumas grandezas sejam VAs, como a potência demandada por consumidores, o custo de geração, a capacidade de linhas disponíveis para despacho em situações de contingência, etc. Estas situações são consideradas como um problema de FPOE [50], [51]. Podemos aplicar os métodos apresentados para obtenção de aproximações para o valor médio das soluções globais dos FPOs considerando incertezas.

Consideramos as seguintes características:

- Restrição ao fluxo estocástica;
- Incertezas nos parâmetros da rede;
- Demanda de carga estocástica;
- Custo de geração estocástico.

5.3.1 Restrição ao Fluxo Estocástica

Consideramos a restrição ao fluxo de potência no ramo (2, 3) do circuito LBBM3 como uma VA uniformemente distribuída em $[10, 60]$ MVA. Esta não é uma condição normal de operação em sistemas elétricos de potência, visto que os contratos de prestação de serviço estabelecem as capacidades disponíveis das linhas. Porém, este é um exercício que considera uma situação de contingência para avaliação das técnicas.

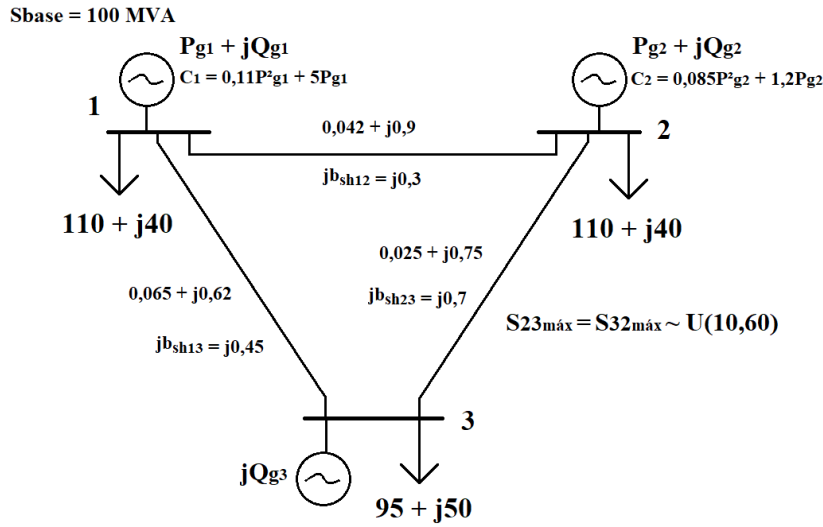


Figura 3 - LBBM3 - Restrição ao fluxo estocástica

Assim, temos o seguinte modelo de FPOE:

$$\begin{aligned}
 & \min C_1 + C_2 \\
 & \text{sujeito a: } P_3 + P_{d_3} = 0 \\
 & P_i + P_{d_i} + P_{G_i} = 0, \quad i \in \{1, 2\} \\
 & Q_i + Q_{d_i} + Q_{G_i} = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\} \\
 & Q_i^{\min} \leq Q_{G_i} \leq Q_i^{\max}, \quad i \in \{1, 2, 3\} \\
 & P_i^{\min} \leq P_{G_i} \leq P_i^{\max}, \quad i \in \{1, 2\} \\
 & V_i^{\min^2} \leq e_i^2 + f_i^2 \leq V_i^{\max^2}, \quad i \in \{1, 2, 3\} \\
 & s_{23}^2 = P_{23}^2 + Q_{23}^2 \leq (100x)^2 \\
 & s_{32}^2 = P_{32}^2 + Q_{32}^2 \leq (100x)^2 \\
 & x \sim U(0, 1, 0, 6)
 \end{aligned}$$

Uma vez que a VA x é uniformemente distribuída em $[0, 1, 0, 6]$, podemos representá-la pela sequên-

cia de momentos:

$$(1 \quad 0,35 \quad 0,1433 \quad 0,0647 \quad 0,0311 \quad 0,0156 \quad 0,008 \quad 0,0042 \quad 0,0022 \quad \dots)$$

Quanto maior a ordem da relaxação, melhor é a representação da VA pela sequência de momentos. O problema é relaxado como (4.16), considerando restrições dos momentos. A Tabela 13 resume os resultados.

Tabela 13 - Restrição ao fluxo estocástica - LMBM3

Ordem	Ordem dos Momentos	Solução	Tempo
2	4	6.131,29	0,4 s
3	6	6.602,91	10,2 s
4	8	6.609,94	6min 27,5s

Para fins de comparação, resolvemos uma família de 3000 problemas de FPO gerada por amostragem da VA, tal qual um método do tipo Monte Carlo. O valor médio obtido para as soluções globais foi de 6.627,31 e o tempo de simulação foi de 16min 17s. As soluções obtidas via relaxações semi-definidas se aproximam rapidamente do valor médio das soluções globais. É importante observar a não linearidade pelo contraste com a solução que seria obtida se utilizássemos o valor médio da VA: Solução ($\bar{s}_{23} = 35$) = 6.285,19. O resultado do Monte Carlo pode ser visualizado na Figura 4.

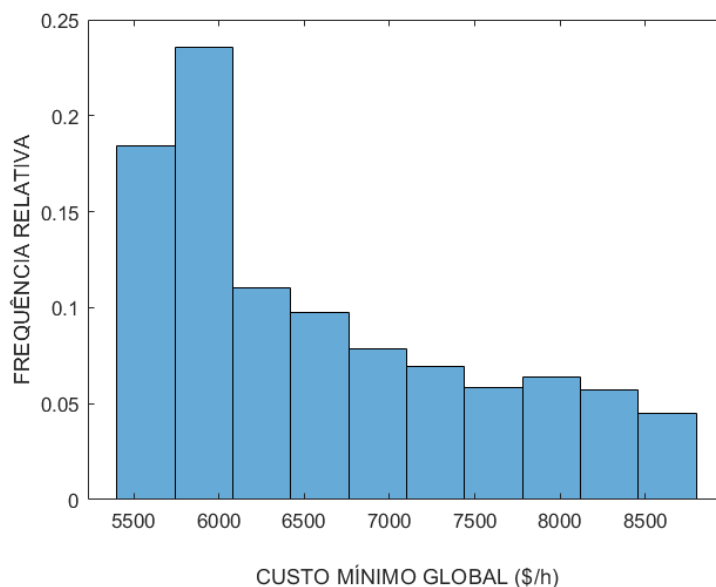
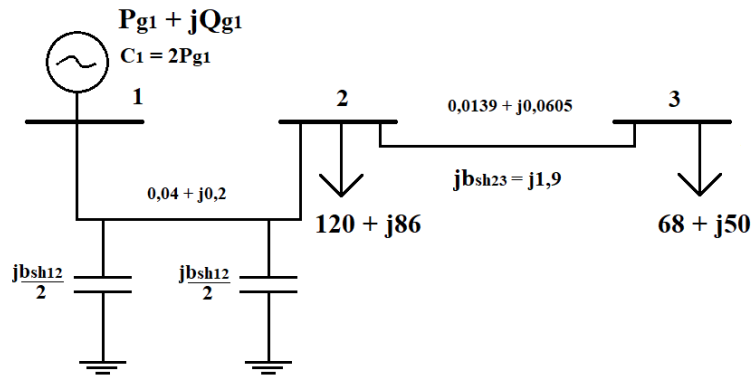


Figura 4 - Histograma - Restrição ao fluxo estocástica

5.3.2 Incertezas nos Parâmetros da Rede

Consideramos uma adaptação do circuito WB3 com incertezas na modelagem da linha (1, 2). A suposição é de que não há conhecimento dos parâmetros da rede com precisão, de modo que a admitância *shunt* do modelo é considerada uma VA uniformemente distribuída em $[0, 1, 1]$ p.u. Novamente, esta não é uma situação prática comum, mas apresenta um caminho para aplicações das técnicas em situações mais complexas.

$$S_{base} = 100 \text{ MVA}$$



$$b_{sh12} \sim U(0, 1, 1)$$

Figura 5 - WB3 - Admitância *shunt* estocástica

Temos o seguinte modelo de FPOE:

$$\begin{aligned} \min \quad & C_1 \\ \text{sujeito a: } & P_i + P_{D_i} = 0, \quad i \in \{2, 3\} \\ & Q_i + Q_{D_i} = 0, \quad i \in \{2, 3\} \\ & P_1 + P_{G_1} = 0, \\ & Q_1 + Q_{G_1} = 0, \\ & Q_1^{\min} \leq Q_{G_1} \leq Q_1^{\max} \\ & P_1^{\min} \leq P_{G_1} \leq P_1^{\max} \\ & V_i^{\min 2} \leq e_i^2 + f_i^2 \leq V_i^{\max 2}, \quad i \in \{1, 2, 3\} \\ & b_{sh12} \sim U(0, 1, 1) \end{aligned}$$

Representamos $b_{sh_{12}} \sim U(0, 1, 1)$ pela sequência de momentos:

$$(1 \quad 0,55 \quad 0,4033 \quad 0,3328 \quad 0,2928 \quad 0,2684 \quad 0,2531 \dots)$$

Os resultados podem ser visualizados na Tabela 14. Um Monte Carlo com 10.000 FPOs indicou valor esperado de 411,72 com 52min de simulações, Figura 6. A solução utilizando o valor médio $\bar{b}_{12} = 0,55$ é de 411,61.

Tabela 14 - Admitância *shunt* estocástica - WB3

Ordem	Ordem dos Momentos	Solução	Tempo
2	4	411,67	0,3 s
3	6	411,68	5,1 s

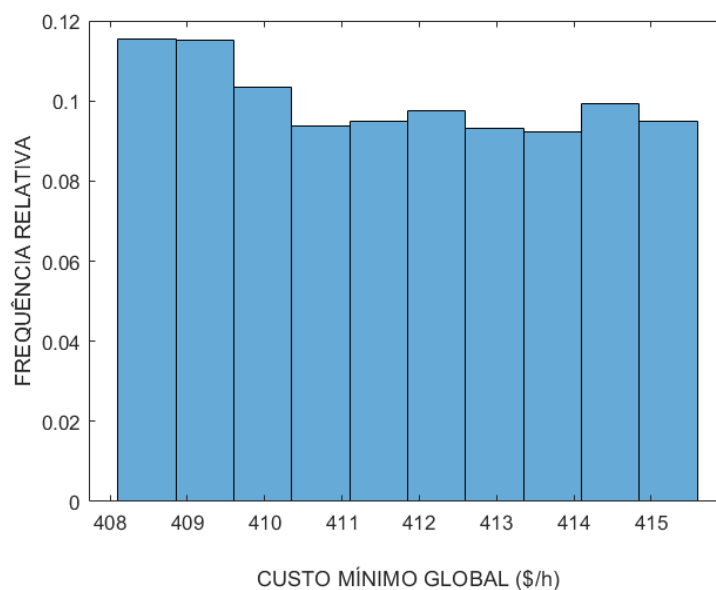


Figura 6 - Histograma - Admitância *shunt* estocástica

Por ser um problema de pequeno porte, pela dependência linear da função objetivo com a potência gerada e pela pequena influência da admitância *shunt*, a distribuição das soluções é próxima de uma distribuição uniforme. Novamente, a técnica aparenta ser muito bem sucedida.

5.3.3 Demanda de Carga Estocástica

Consideramos o circuito adaptado de WB5¹ com demanda de carga estocástica variando com uma função quadrática de uma VA uniformemente distribuída. A potência ativa demandada no nó 3 varia

¹ A impedância das linhas foram modificadas para alcançar uma melhor distribuição da potência gerada entre as duas fontes, obtendo um problema estocástico mais interessante.

entre 130 MW e 290 MW. Podemos imaginar que o consumidor possua uma fonte própria de geração alternativa (solar ou eólica, por exemplo), ou que seu consumo de energia varia com a demanda de seus clientes.

$S_{base} = 100 \text{ MVA}$

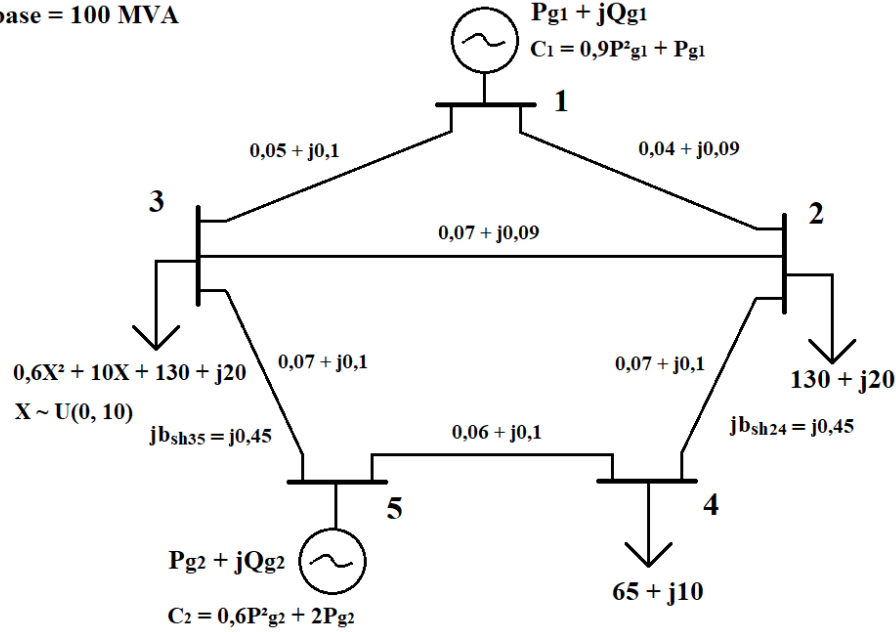


Figura 7 - WB5 - Demanda de carga estocástica

Temos o seguinte modelo de FPOE:

$$\begin{aligned}
 & \min C_1 + C_2 \\
 & \text{sujeito a: } P_i + P_{D_i} = 0, \quad i \in \{2, 3, 4\} \\
 & \quad Q_i + Q_{D_i} = 0, \quad i \in \{2, 3, 4\} \\
 & \quad P_i + P_{D_i} + P_{G_i} = 0, \quad i \in \{1, 5\} \\
 & \quad Q_i + Q_{D_i} + Q_{G_i} = 0, \quad i \in \{1, 5\} \\
 & \quad Q_i^{\min} \leq Q_{G_i} \leq Q_i^{\max}, \quad i \in \{1, 5\} \\
 & \quad P_i^{\min} \leq P_{G_i} \leq P_i^{\max}, \quad i \in \{1, 5\} \\
 & \quad V_i^{\min 2} \leq e_i^2 + f_i^2 \leq V_i^{\max 2}, \quad i \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \\
 & \quad P_{D_3} = 0,6x^2 + 10x + 130, x \sim U(0, 10)
 \end{aligned}$$

Representamos $x \sim U(0, 10)$ pela sequência de momentos:

$$(1 \quad 5 \quad 33, \bar{3} \quad 250 \quad 2000 \quad \dots)$$

O Monte Carlo utilizou 1.000 FPOs, alcançando valor médio de 651,07 em 44min 31s. A solução obtida utilizando o valor médio $\bar{x} = 5$ foi de 628,1563. A Tabela 15 resume os resultados e a solução do Monte Carlo pode ser vista na Figura 8. Podemos perceber que momentos de ordens baixas apresentam boa caracterização da medida de probabilidade, alcançando valores próximos do valor médio das soluções globais, frequentemente em tempos de simulação bastante inferiores aos obtidos a partir da solução de uma amostragem de problemas de FPO.

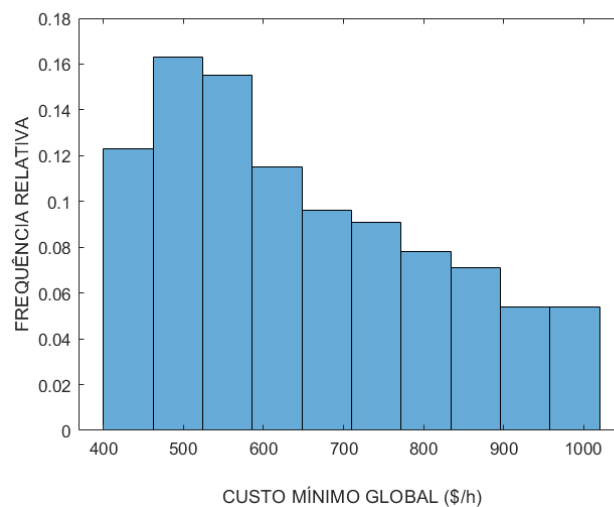


Figura 8 - Histograma - Demanda de carga estocástica

Tabela 15 - Demanda de carga estocástica - WB5

Ordem	Ordem dos Momentos	Solução	Tempo
2	4	658,2100	3 s
3	6	658,4373	1h 10min 15s

5.3.4 Custos de Geração Estocásticos

Utilizamos o circuito WB5 adaptado, com custos de geração nas barras 1 e 5 com uma parcela estocástica. Para ambas as barras, o custo é uma função quadrática da potência ativa e a parcela linear tem coeficiente aleatório. Neste caso, temos duas VAs.

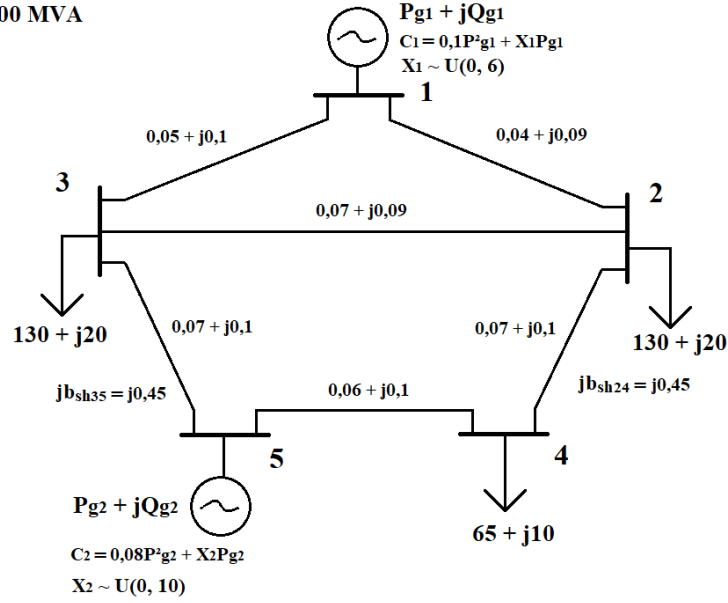


Figura 9 - WB5 - Custos de geração estocásticos

Temos o seguinte modelo de FPOE:

$$\begin{aligned} \min & 0,1P_{G_1}^2 + X_1P_{G_1} + 0,08P_{G_5}^2 + X_2P_{G_5} \\ \text{sujeito a: } & P_i + P_{D_i} = 0, \quad i \in \{2, 3, 4\} \\ & Q_i + Q_{D_i} = 0, \quad i \in \{2, 3, 4\} \\ & P_i + P_{D_i} + P_{G_i} = 0, \quad i \in \{1, 5\} \\ & Q_i + Q_{D_i} + Q_{G_i} = 0, \quad i \in \{1, 5\} \\ & Q_i^{\min} \leq Q_{G_i} \leq Q_i^{\max}, \quad i \in \{1, 5\} \\ & P_i^{\min} \leq P_{G_i} \leq P_i^{\max}, \quad i \in \{1, 5\} \\ & V_i^{\min 2} \leq e_i^2 + f_i^2 \leq V_i^{\max 2}, \quad i \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ & X_1 \sim U(0, 6) \\ & X_2 \sim U(0, 10) \end{aligned}$$

Representamos X_1 e X_2 pelos seus momentos:

$$\begin{aligned} X_1 : & (1 \quad 3 \quad 12 \quad 54 \quad 359,2 \quad 1.296 \quad 6.665,1 \dots) \\ X_2 : & (1 \quad 5 \quad 33,3 \quad 250 \quad 2.000 \quad 16.666,6 \quad 142.857,143 \dots) \end{aligned}$$

A Tabela 16 resume os resultados. O Monte Carlo com 3.000 simulações alcança a média de 6.526,63

em 1h 35min 49s e pode ser visualizado na Figura 10. A solução utilizando os valores esperados $\bar{X}_1 = 3, \bar{X}_2 = 5$ é de 6.550,9.

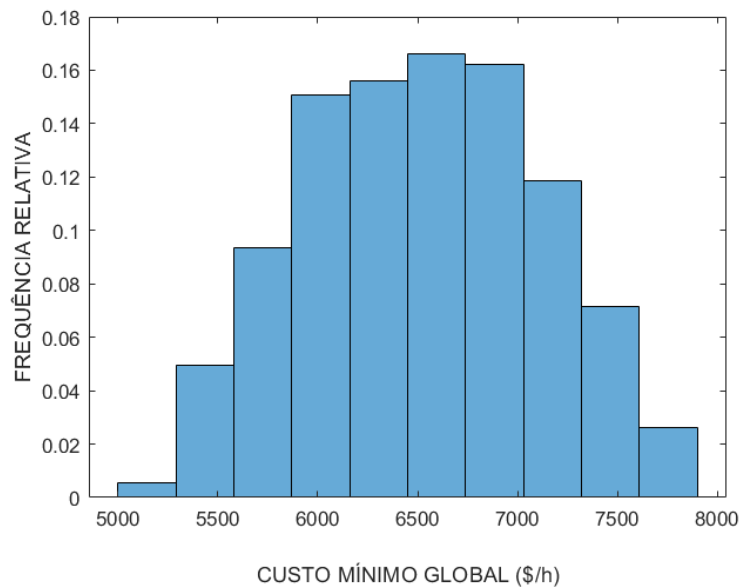


Figura 10 - Histograma - Custos de geração estocásticos

Tabela 16 - Custos de geração estocásticos - WB5

Ordem	Ordem dos Momentos	Solução	Tempo
2	4	6.523,97	9 s
3	6	6.520,54	5h 12min 22s

A hierarquia de relaxações semidefinidas apresenta resultados relativamente bons para problemas estocásticos. O tempo de simulação cresce rapidamente com o aumento da ordem da relaxação, haja vista a dimensão dos problemas semidefinidos associados. Por outro lado, a alternativa obtida pela busca de uma amostragem de soluções é bastante onerosa. Além disto, para os exemplos testados, a segunda relaxação já apresenta uma cota estreita para a solução do problema estocástico. É importante observar a propagação das incertezas pelas soluções dos FPOs de maneira não linear, o que justifica a diferença entre o valor médio das soluções e a solução do valor médio.

Capítulo 6

CONCLUSÕES

Apresentamos aplicações da hierarquia de relaxações semidefinidas dos momentos/*SOS* ao FPO global em versões determinística, estocástica e racional. Para isto, estudamos a teoria dos polinômios positivos e os certificados de positividade (*positivstellensatz*) baseados em soma de quadrados, o problema dos momentos e PSD. Destacamos as versões dos *positivstellensatz* de Schmüdgen e Putinar, além dos teoremas duais para caracterização de medidas com suporte contido em conjuntos semialgêbricos básicos compactos do $\mathbb{R}^n$.

O uso de diferentes implementações computacionais das técnicas realça os detalhes da teoria, incluindo as formulações do problema baseadas em geometria algébrica convexa e teoria da medida. As aplicações mais conhecidas ao FPO são baseadas no teorema de Putinar em sua abordagem ao problema dos momentos. A formulação algébrica torna a teoria mais completa.

Os métodos também permitem a abordagem ao FPOE, ressaltando a sua importância e abrangência. O FPOE é um problema difícil, que tem atraído bastante pesquisa recente e, em função do conhecimento baseado em pesquisa da literatura, acreditamos que esta seja a primeira aplicação da hierarquia de Lasserre ao FPOE. A solução de um FPO com função objetivo racional corrobora a versatilidade das técnicas apresentadas, acrescentando um novo problema, cuja solução global é

alcançada.

Pesquisas relacionadas a outras aplicações à engenharia elétrica e ao desenvolvimento de técnicas para abordagem de problemas de grande escala poderão ser exploradas em outras ocasiões. Algumas possibilidades são: controle ótimo e análise de estabilidade em sistemas de potência [52], [53].

Métodos de computação algébrica aplicados ao FP com formulação cartesiana representam outra perspectiva de projetos futuros e possuem estreita relação com a teoria apresentada. É de interesse também para pesquisas futuras, aplicações de PSD à teoria da informação, incluindo criptografia e computação quântica.

REFERÊNCIAS

- [1] K. Schmüdgen, “The K-moment problem for compact semi-algebraic sets,” *Mathematische Annalen*, vol. 289, pp. 203–206, 1991.
- [2] M. Putinar, “Positive polynomials on compact semialgebraic sets,” *Indiana University Mathematics Journal*, vol. 42, no. 3, pp. 969–984, 1993.
- [3] A. Ben-Tal and A. Nemirovski, *Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications*. MOS-SIAM Series on Optimization, 2001.
- [4] C. Jozs, *Application of Polynomial Optimization to Electricity Transmission Networks*. PhD thesis, University of Paris VI, Paris, França, 2016.
- [5] P. A. Parrillo, *Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization*. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, 2000.
- [6] D. Henrion, J. B. Lasserre, and C. Savorgnan, “Nonlinear optimal control synthesis via occupation measures,” in *2008 47th IEEE Conference on Decision and Control*, (Cancun, Mexico), dec 2008.
- [7] J. Carpentier, “Optimal power flows,” *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 1, pp. 3–15, Apr. 1979.
- [8] G. L. Torres and V. H. Quintana, “Optimal power flow by a nonlinear complementarity method,” *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 15, pp. 1028–1033, Aug. 2000.

-
- [9] S. Arora and B. Barak, eds., *Computational Complexity: A Modern Approach*. Cambridge University Press, 2009.
- [10] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein, *Introduction to Algorithms*. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 2009.
- [11] C. Jozs, J. Maeght, P. Panciatici, and J. C. Gilbert, “Application of the moment-SOS approach to global optimization of the OPF problem,” *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 30, pp. 463–470, Jan. 2015.
- [12] C. Jozs and D. K. Molzahn, “Multi-ordered lasserre hierarchy for large scale polynomial optimization in real and complex variables,” *SIAM Journal on Optimization*, vol. 28, no. 2, pp. 1017–1048, 2017.
- [13] R. A. Horn and J. Charles R., *Matrix Analysis*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press, 2012.
- [14] Y. Nesterov and A. Nemirovskii, *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*. SIAM, 1994.
- [15] H. Wolkowicz, R. Saigal, and L. Vandenberghe, *Handbook of Semidefinite Programming: Theory, Algorithms and Applications*. Springer, 2000.
- [16] M. X. Goemans and D. P. Williamson, “Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming,” *Journal of the Association for Computing Machinery*, vol. 42, pp. 1115–1145, Nov. 1995.
- [17] L. Lovász, “Semidefinite programs and combinatorial optimization,” in *Recent Advances in Algorithms and Combinatorics* [57], pp. 137–194.
- [18] M. Laurent and F. Rendl, “Semidefinite programming and integer programming,” *Handbooks in Operations Research and Management Sciences*, vol. 12, pp. 393–514, 2005.
- [19] V. Balakrishnan and F. Wang, *Semidefinite Programming in Systems and Control Theory*, pp. 421–441. Vol. 27 of [15], 2000.
- [20] M. Navascués, S. Pironio, and A. Acín, “A convergent hierarchy of semidefinite programs characterizing the set of quantum correlations,” *New Journal of Physics*, vol. 10, no. 1, p. 29pp, 2008.
- [21] J. B. Lasserre, “Global optimization with polynomials and the problem of moments,” *SIAM Journal on Optimization*, vol. 11, no. 3, pp. 796–817, 2001.

- [22] J. F. Sturm, “Using SeDuMi 1.02, a Matlab toolbox for optimization over symmetric cones,” *Optimization Methods and Software*, vol. 11, pp. 625–653, 1999.
- [23] K.-C. Toh, M. Todd, and R. H. Tütüncü, “Sdpt3 – a matlab software package for semidefinite programming, version 1.3,” *Optimization Methods and Software*, no. 1–4, pp. 545–581, 1999.
- [24] K. Fujisawa, M. Kojima, and K. Nakata, “SDPA (SemiDefinite Programming Algorithm) User’s Manual— Version 6.00,” *Research Reports on Mathematical and Computing Sciences: Series B: Operations Research*, 2002.
- [25] B. Borchers, “Csdp, a c library for semidefinite programming,” *Optimization Methods and Software*, vol. 11, no. 1–4, pp. 613–623, 2008.
- [26] M. Hazewinkel, “Hilbert’s 1990 icm lecture : the 23 problems.” Jan. 1990.
- [27] M. E. C. Cabral, *Archimedean Quadratic Modules: A Decision Procedure in Dimension Two*. PhD thesis, University of Konstanz, Konstanz, Germany, 2005.
- [28] S. Wagner, “Archimedean quadratic modules: A decision problem for real multivariate polynomials,” mathematics, Universität Konstanz, Konstanz, Germany, 2009.
- [29] P. Parrilo and B. Sturmfels, “Minimizing polynomial functions,” *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, vol. 60, pp. 83–99, 2003.
- [30] G. Blekherman, P. A. Parrilo, and R. R. Thomas, *Semidefinite Optimization and Convex Algebraic Geometry*. MOS-SIAM Series on Optimization, 2012.
- [31] J. Molzahn, J. Holzer, B. Lesieutre, and C. DeMarco, “Implementation of a large-scale optimal power flow based on semidefinite programming,” *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 28, pp. 3987–3998, Nov. 2013.
- [32] W. A. Bukhsh, A. Grothey, K. I. M. McKinnon, and P. A. Trodden, “Local solutions of the optimal power flow problem,” *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 28, pp. 4780–4788, Aug. 2013.
- [33] S. H. Low, “Convex relaxation of optimal power flow—Part I: Formulations and equivalence,” *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 1, pp. 15–17, Mar. 2014.
- [34] S. H. Low, “Convex relaxation of optimal power flow—Part II: Exactness,” *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 1, pp. 177–189, June 2014.
- [35] M. Schweighofer, “On the complexity of schmüdgen’s positivstellensatz,” *Journal of Complexity*, vol. 20, pp. 529–543, 2004.

- [36] J. Nie and M. Schweighofer, “On the complexity of putinar’s positivstellensatz,” *Journal of Complexity*, vol. 23, pp. 135–150, Feb. 2007.
- [37] A. Papachristodoulou, J. Anderson, G. Valmorbida, S. Prajna, P. Seller, and P. Parrillo, “SOSTOOLS Version 3.00 Sum of squares optimization toolbox for MATLAB,” *ArXiv*, vol. abs/1310.4716, 2013.
- [38] J. B. Lasserre, *Moments, Positive Polynomials and Their Applications*. Imperial College Press, 2009.
- [39] M. Laurent, *Sums of Squares, Moment Matrices and Optimization Over Polynomials*, pp. 157–270. Vol. 149 of [56], 2009.
- [40] J. B. Lasserre, “A ”Joint+Marginal” approach in optimization,” in Anjos and Lasserre [54], pp. 271–295.
- [41] A. Shapiro, “On duality theory of conic lienar problems,” in *Semi-Infinite Programming: Recent Advances* [55], pp. 135–165.
- [42] E. K. Haviland, “On the momentum problem for distribution functions in more than one dimension,” *American Journal of Mathematics*, vol. 57, no. 3, pp. 562–568, 1935.
- [43] J. W. Helton and J. Nie, “A semidefinite approach for truncated K-moment problems,” *Foundations of Computational Mathematics*, vol. 12, pp. 851–881, 2012.
- [44] M. Laurent, “Revisiting two theorems of Curto and Fialkow on moment problems,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 133, no. 10, pp. 2965–2976, 2005.
- [45] D. Henrion, J. B. Lasserre, and J. L ofberg, “Gloptipoly 3: Moments, optimization and semidefinite programming,” *Optimization Methods and Software*, vol. 24, no. 4–5, pp. 761–779, 2009.
- [46] D. K. Molzahn, *Application of Semidefinite Optimization Techniques to Problems in Electric Power Systems*. PhD thesis, University of Wisconsin-Madison, Madison, USA, 2013.
- [47] H. Waki, S. Kim, M. Kojima, M. Muramatsu, and H. Sugimoto, “Algorithm 883: Sparsepop — a sparse semidefinite programming relaxation of polynomial optimization problems,” *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol. 35, p. 15, July 2008.
- [48] R. D. Zimmerman and C. E. Murillo-Sánchez, “Matpower,” June 2019.
- [49] R. D. Zimmerman, C. E. Murillo-Sánchez, and R. J. Thomas, “MATPOWER: Steady-state operations, planning, and analysis tools for power systems research and education,” *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 26, pp. 12–19, Feb. 2011.

-
- [50] T. Yong and R. H. Lasseter, "Stochastic optimal power flow: Formulation and solution," in *2000 IEEE Power Engineering Society Summer Meeting*, (Seattle, WA, USA), pp. 1–5, July 2000.
- [51] J. S. Giraldo-Chavarriaga, J. A. Castrillón-Largo, and M. Granada-Echeverri, "Stochastic AC optimal power flow considering the probabilistic behavior of the wind, loads and line parameters," *Ingeniería, Investigación y Tecnología*, vol. 15, pp. 529–538, Oct. 2014.
- [52] J. B. Lasserre, D. Henrion, C. Prieur, and E. Trélat, "Nonlinear optimal control via occupation measures and LMI-relaxations," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 47, no. 4, pp. 1643–1666, 2008.
- [53] D. Henrion, M. Sebek, and V. Kucera, "Positive polynomials and robust stabilization with fixed-order controllers," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, pp. 1178–1186, July 2003.
- [54] M. F. Anjos and J. B. Lasserre, eds., *Handbook on Semidefinite, Conic and Polynomial Optimization*. Springer-Verlag, 2012.
- [55] M. A. Goberna and M. A. López, *Semi-Infinite Programming: Recent Advances*. Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [56] M. Putinar and S. Sullivan, *Emerging Applications of Algebraic Geometry. The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications*, vol. 149. Springer, 2009.
- [57] B. A. Reed and C. L. Linhares-Sales, *Recent Advances in Algorithms and Combinatorics*, vol. 11. Springer, 2003.

APÊNDICE - SISTEMAS DE TESTE



APÊNDICE - SISTEMAS DE TESTE

WB2

```

function mpc = WB2
%% 2 bus case in MATPOWER format
% W. A. Bukhsh, Feb 2013
%% References:
% [1] W. A. Bukhsh, Andreas Grothey, Ken McKinnon, Paul trodden, "Local Solutions of Optimal Power Flow Problem
% submitted to IEEE Transactions on Power Systems, 2013
% [2] W. A. Bukhsh, Andreas Grothey, Ken McKinnon, Paul trodden, "Local Solutions of Optimal Power Flow Problem
% Technical Report ERGO, 2011

%% MATPOWER Case Format : Version 2
mpc.version = '2';

%%----- Power Flow Data -----%%
%% system MVA base
mpc.baseMVA = 100;

%% bus data
% bus_i type Pd Qd Gs Bs area Vm Va baseKV zone Vmax Vmin
mpc.bus = [
    1 3 0 0 0 0 1 0.964 0 0 1 1.05 0.95;
    2 1 350 -350 0 0 1 1 -65 0 1 1.05 0.95;
];

%% generator data
% bus Pg Qg Qmax Qmin Vg mBase status Pmax Pmin Pc1 Pc2 Qc1min Qc2min
mpc.gen = [
    1 400 100 400 -400 0.964 100 1 600 0 0 0 0 0 0 0 0;
];

%% branch data
% fbus tbus r x b rateA rateB rateC ratio angle status angmin angmax
mpc.branch = [
    1 2 0.04 0.2 0 990000 0 0 0 0 1 -360 360;
];

%%----- OPF Data -----%%
%% generator cost data
% 1 startup shutdown n x1 y1 ... xn yn
% 2 startup shutdown n c(n-1) ... c0
mpc.gencost = [
    2 0 0 3 0 2 0;
];

```

WB3

```

function mpc = WB3
%% 3 bus case in MATPOWER format
% W. A. Bukhsh, Feb 2013
%% References:
% [1] W. A. Bukhsh, Andreas Grothey, Ken McKinnon, Paul trodden, "Local Solutions of Optimal Power Flow Problem
% submitted to IEEE Transactions on Power Systems, 2013
% [2] W. A. Bukhsh, Andreas Grothey, Ken McKinnon, Paul trodden, "Local Solutions of Optimal Power Flow Problem
% Technical Report ERGO, 2011
%% MATPOWER Case Format : Version 2
mpc.version = '2';

%%----- Power Flow Data -----%%
%% system MVA base
mpc.baseMVA = 100;

%% bus data
% bus_i type Pd Qd Gs Bs area Vm Va baseKV zone Vmax Vmin
mpc.bus = [
    1 3 0 0 0 0 1 0.95 0 0 1 1.05 0.95;
    2 1 120 86.0 0 0 1 0.95 -55 0 1 1.05 0.95;
    3 1 68.0 50.0 0 0 1 0.95 -59 0 1 1.05 0.95;
%86
%50
];

%% generator data
% bus Pg Qg Qmax Qmin Vg mBase status Pmax Pmin Pc1 Pc2 Qc1min
mpc.gen = [
    1 300 129 300 -300 1.1 100 1 5000 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
%3000 -3000
];

%% branch data
% fbus tbus r x b rateA rateB rateC ratio angle status angmin angmax
mpc.branch = [
    1 2 0.04 0.20 0.0 990000 0 0 0 0 1 -360 360;
    2 3 0.0139 0.0605 2.459 990000 0 0 0 0 1 -360 360;
%0
%2.459
];

%0.0139 0.0605 2.459
%%----- OPF Data -----%%
%% generator cost data
% 1 startup shutdown n x1 y1 ... xn yn
% 2 startup shutdown n c(n-1) ... c0
mpc.gencost = [
    2 0 0 3 0 2 0;
];

```

LMBM3

```

function mpc = LMBM3
%% case3_bernier Power flow data for 3 bus, 3 generator case.

% This test case is taken from the following paper

% Lesieutre, B.C., Molzahn, D.K., Borden, A.R., DeMarco, C.L., "Examining the
% limits of the application of semidefinite programming to power flow problems"
% 49th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing, 2011

% Please see CASEFORMAT for details on the case file format.
%% W. A. Buksh, April 2013
% w.a.buksh@sms.ed.ac.uk
%% MATPOWER Case Format : Version 2
mpc.version = '2';

%%----- Power Flow Data -----%%
%% system MVA base
mpc.baseMVA = 100;

%% bus data
% bus_i type Pd Qd Gs Bs area Vm Va baseKV zone Vmax Vmin
mpc.bus = [
    1 3 110 40 0 0 1 1.069 0 345 1 1.10 0.90;
    2 2 110 40 0 0 1 1.028 9.916 345 1 1.10 0.90;
    3 2 95 50 0 0 1 1.001 -13.561 345 1 1.10 0.90;
];

%% generator data
% bus Pg Qg Qmax Qmin Vg mBase status Pmax Pmin Pc1 Pc2 Qc1min
mpc.gen = [
    1 131.09 17.02 10000 -1000 1.069 100 1 10000 0 0 0 0
    2 185.93 -3.50 1000 -1000 1.028 100 1 10000 0 0 0 0
    3 0 0.06 1000 -1000 1.001 100 1 0 0 0 0 0
];

%% branch data
% fbus tbus r x b rateA rateB rateC ratio angle status angmin angmax
mpc.branch = [
    1 3 0.065 0.620 0.450 9999 9999 9999 0 0 1 -360 360;
    3 2 0.025 0.750 0.700 186 9999 9999 0 0 1 -360 360;
    1 2 0.042 0.900 0.300 9999 9999 9999 0 0 1 -360 360;
];

%% generator cost data
% 1 startup shutdown n x1 y1 ... xn yn
% 2 startup shutdown n c(n-1) ... c0
mpc.gencost = [
    2 0 0 3 0.110 5 0;
    2 0 0 3 0.085 1.2 0;
    2 0 0 3 0 1 0;
];

```

WB5

```

function mpc = WB5
%% 5 bus case in MATPOWER format
% W. A. Bukhsh, Feb 2013
%% References:
% [1] W. A. Bukhsh, Andreas Grothey, Ken McKinnon, Paul trodden, "Local Solutions of Optimal Power Flow Probl
% submitted to IEEE Transactions on Power Systems, 2013
% [2] W. A. Bukhsh, Andreas Grothey, Ken McKinnon, Paul trodden, "Local Solutions of Optimal Power Flow Probl
% Technical Report ERGO, 2011
%% MATPOWER Case Format : Version 2
mpc.version = '2';

%%----- Power Flow Data -----%%
%% system MVA base
mpc.baseMVA = 100;

%% bus data
% bus_i type Pd Qd Gs Bs area Vm Va baseKV zone Vmax Vmin
mpc.bus = [
    1 3 0 0 0 0 1 1.0 0 345 1 1.05 0.95;
    2 1 130 20 0 0 1 1.0 -10 345 1 1.05 0.95;
    3 1 130 20 0 0 1 1.0 -20 345 1 1.05 0.95;
    4 1 65 10 0 0 1 1.0 -135 345 1 1.05 0.95;
    5 2 0 0 0 0 1 1.0 -140 345 1 1.05 0.95;

];

%% generator data
% bus Pg Qg Qmax Qmin Vg mBase status Pmax Pmin Pc1 Pc2 Qc1min
mpc.gen = [
    1 500 50 1800 -30 1 100 1 5000 0 0 0 0
    5 0 0 1800 -30 1 100 1 5000 0 0 0 0

];

%% branch data
% fbus tbus r x b rateA rateB rateC ratio angle status angmin angmax
mpc.branch = [
    1 2 0.04 0.09 0.0 2500 2500 2500 0 0 1 -360 360;
    1 3 0.05 0.10 0.0 2500 2500 2500 0 0 1 -360 360;
    2 4 0.55 0.90 0.45 2500 2500 2500 0 0 1 -360 360;
    3 5 0.55 0.90 0.45 2500 2500 2500 0 0 1 -360 360;
    4 5 0.06 0.1 0.0 2500 2500 2500 0 0 1 -360 360;
    2 3 0.07 0.09 0.0 2500 2500 2500 0 0 1 -360 360;

];

%%----- OPF Data -----%%
%% area data
% area refbus
mpc.areas = [
    1 5;

];

%% generator cost data
% 1 startup shutdown n x1 y1 ... xn yn
% 2 startup shutdown n c(n-1) ... c0
mpc.gencost = [
    2 2 0 3 0 4.00 0;
    2 2 0 3 0 1.00 0;

];

```

WB5mod

```

function mpc = WB5mod
%% 5 bus case in MATPOWER format
% W. A. Bukhsh, Feb 2013
%% References:
% [1] W. A. Bukhsh, Andreas Grothey, Ken McKinnon, Paul trodden, "Local Solutions of Optimal Power Flow Prob.
% submitted to IEEE Transactions on Power Systems, 2013
% [2] W. A. Bukhsh, Andreas Grothey, Ken McKinnon, Paul trodden, "Local Solutions of Optimal Power Flow Prob.
% Technical Report ERGO, 2011
%% MATPOWER Case Format : Version 2
mpc.version = '2';

%%----- Power Flow Data -----%%
%% system MVA base
mpc.baseMVA = 100;

%% bus data
% bus_i type Pd Qd Gs Bs area Vm Va baseKV zone Vmax Vmin
mpc.bus = [
    1 3 0 0 0 0 1 1.0 0 345 1 1.1 0.9;
    2 1 130 20 0 0 1 1.0 -10 345 1 1.1 0.9;
    3 1 130 20 0 0 1 1.0 -20 345 1 1.1 0.9;
    4 1 65 10 0 0 1 1.0 -135 345 1 1.1 0.9;
    5 2 0 0 0 0 1 1.0 -140 345 1 1.1 0.9;
];

%% generator data
% bus Pg Qg Qmax Qmin Vg mBase status Pmax Pmin Pc1 Pc2 Qc1min
mpc.gen = [
    1 500 50 1800 -30 1 100 1 5000 0 0 0 0
    5 0 0 1800 -30 1 100 1 5000 0 0 0 0
];

%% branch data
% fbus tbus r x b rateA rateB rateC ratio angle status angmin angmax
mpc.branch = [
    1 2 0.04 0.09 0.0 2500 2500 2500 0 0 1 -360 360;
    1 3 0.05 0.10 0.0 2500 2500 2500 0 0 1 -360 360;
    2 4 0.55 0.90 0.45 2500 2500 2500 0 0 1 -360 360;
    3 5 0.55 0.90 0.45 2500 2500 2500 0 0 1 -360 360;
    4 5 0.06 0.1 0.0 2500 2500 2500 0 0 1 -360 360;
    2 3 0.07 0.09 0.0 2500 2500 2500 0 0 1 -360 360;
];

%%----- OPF Data -----%%
%% area data
% area refbus
mpc.areas = [
    1 5;
];

%% generator cost data
% 1 startup shutdown n x1 y1 ... xn yn
% 2 startup shutdown n c(n-1) ... c0
mpc.gencost = [
    2 2 0 3 0 4.00 0;
    2 2 0 3 0 1.00 0;
];

```

case22loop

```

function mpc = caseloop22
%% 22 bus loop case in MATPOWER format
% W. A. Bukhsh, Feb 2013
%% References:
% [1] W. A. Bukhsh, Andreas Grothey, Ken McKinnon, Paul trodden, "Local Solutions of Optimal Power
%      submitted to IEEE Transactions on Power Systems, 2013
% [2] W. A. Bukhsh, Andreas Grothey, Ken McKinnon, Paul trodden, "Local Solutions of Optimal Power
%      Technical Report ERGO, 2011

%% MATPOWER Case Format : Version 2
mpc.version = '2';

%%----- Power Flow Data -----%%
%% system MVA base
mpc.baseMVA = 100;
mpc.bus = [
1      3      0      0      0      0      1      0.95      0.00      345      1      1.05      0.95;
2      1      95      20      0      0      1      0.95     -342.86      345      1      1.05      0.95;
3      2      0      0      0      0      1      0.95     -325.71      345      1      1.05      0.95;
4      1      95      20      0      0      1      0.95     -308.57      345      1      1.05      0.95;
5      2      0      0      0      0      1      0.95     -291.43      345      1      1.05      0.95;
6      1      95      20      0      0      1      0.95     -274.29      345      1      1.05      0.95;
7      2      0      0      0      0      1      0.95     -257.14      345      1      1.05      0.95;
8      1      95      20      0      0      1      0.95     -240.00      345      1      1.05      0.95;
9      2      0      0      0      0      1      0.95     -222.86      345      1      1.05      0.95;
10     1      95      20      0      0      1      0.95     -205.71      345      1      1.05      0.95;
11     2      0      0      0      0      1      0.95     -188.57      345      1      1.05      0.95;
12     1      95      20      0      0      1      0.95     -171.43      345      1      1.05      0.95;
13     2      0      0      0      0      1      0.95     -154.29      345      1      1.05      0.95;
14     1      95      20      0      0      1      0.95     -137.14      345      1      1.05      0.95;
15     2      0      0      0      0      1      0.95     -120.00      345      1      1.05      0.95;
16     1      95      20      0      0      1      0.95     -102.86      345      1      1.05      0.95;
17     2      0      0      0      0      1      0.95     -85.71      345      1      1.05      0.95;
18     1      95      20      0      0      1      0.95     -68.57      345      1      1.05      0.95;
19     2      0      0      0      0      1      0.95     -51.43      345      1      1.05      0.95;
20     1      95      20      0      0      1      0.95     -34.29      345      1      1.05      0.95;
21     2      0      0      0      0      1      0.95     -17.14      345      1      1.05      0.95;
22     1      95      20      0      0      1      0.95      0.00      345      1      1.05      0.95;
];

```

```

mpc.gen = [
1    95.00  20.00  20000.00    -20000.00    1.00  100    1    10000  0    0
3    95.00  20.00  20000.00    -20000.00    1.00  100    1    10000  0    0
5    95.00  20.00  20000.00    -20000.00    1.00  100    1    10000  0    0
7    95.00  20.00  20000.00    -20000.00    1.00  100    1    10000  0    0
9    95.00  20.00  20000.00    -20000.00    1.00  100    1    10000  0    0
11   95.00  20.00  20000.00    -20000.00    1.00  100    1    10000  0    0
13   95.00  20.00  20000.00    -20000.00    1.00  100    1    10000  0    0
15   95.00  20.00  20000.00    -20000.00    1.00  100    1    10000  0    0
17   95.00  20.00  20000.00    -20000.00    1.00  100    1    10000  0    0
19   95.00  20.00  20000.00    -20000.00    1.00  100    1    10000  0    0
21   95.00  20.00  20000.00    -20000.00    1.00  100    1    10000  0    0
];
mpc.branch = [
1    2    0.01000 0.05000 0.00000 2500.00 2500.00 2500.00 0.00 0.00 1    -360.00 360.00;
2    3    0.01000 0.05000 0.00000 2500.00 2500.00 2500.00 0.00 0.00 1    -360.00 360.00;
3    4    0.01000 0.05000 0.00000 2500.00 2500.00 2500.00 0.00 0.00 1    -360.00 360.00;
4    5    0.01000 0.05000 0.00000 2500.00 2500.00 2500.00 0.00 0.00 1    -360.00 360.00;
5    6    0.01000 0.05000 0.00000 2500.00 2500.00 2500.00 0.00 0.00 1    -360.00 360.00;
6    7    0.01000 0.05000 0.00000 2500.00 2500.00 2500.00 0.00 0.00 1    -360.00 360.00;
7    8    0.01000 0.05000 0.00000 2500.00 2500.00 2500.00 0.00 0.00 1    -360.00 360.00;
8    9    0.01000 0.05000 0.00000 2500.00 2500.00 2500.00 0.00 0.00 1    -360.00 360.00;
9    10   0.01000 0.05000 0.00000 2500.00 2500.00 2500.00 0.00 0.00 1    -360.00 360.00;
10   11   0.01000 0.05000 0.00000 2500.00 2500.00 2500.00 0.00 0.00 1    -360.00 360.00;
11   12   0.01000 0.05000 0.00000 2500.00 2500.00 2500.00 0.00 0.00 1    -360.00 360.00;
12   13   0.01000 0.05000 0.00000 2500.00 2500.00 2500.00 0.00 0.00 1    -360.00 360.00;
13   14   0.01000 0.05000 0.00000 2500.00 2500.00 2500.00 0.00 0.00 1    -360.00 360.00;
14   15   0.01000 0.05000 0.00000 2500.00 2500.00 2500.00 0.00 0.00 1    -360.00 360.00;
15   16   0.01000 0.05000 0.00000 2500.00 2500.00 2500.00 0.00 0.00 1    -360.00 360.00;
16   17   0.01000 0.05000 0.00000 2500.00 2500.00 2500.00 0.00 0.00 1    -360.00 360.00;
17   18   0.01000 0.05000 0.00000 2500.00 2500.00 2500.00 0.00 0.00 1    -360.00 360.00;
18   19   0.01000 0.05000 0.00000 2500.00 2500.00 2500.00 0.00 0.00 1    -360.00 360.00;
19   20   0.01000 0.05000 0.00000 2500.00 2500.00 2500.00 0.00 0.00 1    -360.00 360.00;
20   21   0.01000 0.05000 0.00000 2500.00 2500.00 2500.00 0.00 0.00 1    -360.00 360.00;
21   22   0.01000 0.05000 0.00000 2500.00 2500.00 2500.00 0.00 0.00 1    -360.00 360.00;
22   1    0.01000 0.05000 0.00000 2500.00 2500.00 2500.00 0.00 0.00 1    -360.00 360.00;
];
mpc.gencost = [
2    0    0    3    0    2    0;
2    0    0    3    0    2    0;
2    0    0    3    0    2    0;
2    0    0    3    0    2    0;
2    0    0    3    0    2    0;
2    0    0    3    0    2    0;
2    0    0    3    0    2    0;
2    0    0    3    0    2    0;
2    0    0    3    0    2    0;
2    0    0    3    0    2    0;
];
mpc.bus(:,3)=2.15*mpc.bus(:,3);
mpc.bus(:,4)=2.15*mpc.bus(:,4)

```

case30loop

```

function mpc = case30loop
mpc.version = '2';
mpc.baseMVA = 100;
mpc.bus = [
    1      3      0      0      0      0      1      0.95      0      345      1      1.05      0.95;
    2      1     95     20      0      0      1      0.95     338     345      1      1.05      0.95;
    3      2      0      0      0      0      1      0.95     326     345      1      1.05      0.95;
    4      1     95     20      0      0      1      0.95     314     345      1      1.05      0.95;
    5      2      0      0      0      0      1      0.95     302     345      1      1.05      0.95;
    6      1     95     20      0      0      1      0.95     290     345      1      1.05      0.95;
    7      2      0      0      0      0      1      0.95     278     345      1      1.05      0.95;
    8      1     95     20      0      0      1      0.95     266     345      1      1.05      0.95;
    9      2      0      0      0      0      1      0.95     254     345      1      1.05      0.95;
   10      1     95     20      0      0      1      0.95     242     345      1      1.05      0.95;
   11      2      0      0      0      0      1      0.95     230     345      1      1.05      0.95;
   12      1     95     20      0      0      1      0.95     218     345      1      1.05      0.95;
   13      2      0      0      0      0      1      0.95     216     345      1      1.05      0.95;
   14      1     95     20      0      0      1      0.95     204     345      1      1.05      0.95;
   15      2      0      0      0      0      1      0.95     192     345      1      1.05      0.95;
   16      1     95     20      0      0      1      0.95     180     345      1      1.05      0.95;
   17      2      0      0      0      0      1      0.95     168     345      1      1.05      0.95;
   18      1     95     20      0      0      1      0.95     156     345      1      1.05      0.95;
   19      2      0      0      0      0      1      0.95     144     345      1      1.05      0.95;
   20      1     95     20      0      0      1      0.95     132     345      1      1.05      0.95;
   21      2      0      0      0      0      1      0.95     120     345      1      1.05      0.95;
   22      1     95     20      0      0      1      0.95     108     345      1      1.05      0.95;
   23      2      0      0      0      0      1      0.95      96     345      1      1.05      0.95;
   24      1     95     20      0      0      1      0.95      84     345      1      1.05      0.95;
   25      2      0      0      0      0      1      0.95      72     345      1      1.05      0.95;
   26      1     95     20      0      0      1      0.95      60     345      1      1.05      0.95;
   27      2      0      0      0      0      1      0.95      48     345      1      1.05      0.95;
   28      1     95     20      0      0      1      0.95      36     345      1      1.05      0.95;
   29      2      0      0      0      0      1      0.95      24     345      1      1.05      0.95;
   30      1     95     20      0      0      1      0.95      12     345      1      1.05      0.95];
mpc.gen = [
    1      125      155      30000      -30000      0.95      100      1      300000      0      0      0      0
    3      125      155      30000      -30000      0.95      100      1      300000      0      0      0      0
    5      125      155      30000      -30000      0.95      100      1      300000      0      0      0      0
    7      125      155      30000      -30000      0.95      100      1      300000      0      0      0      0
    9      125      155      30000      -30000      0.95      100      1      300000      0      0      0      0
   11      125      155      30000      -30000      0.95      100      1      300000      0      0      0      0
   13      125      155      30000      -30000      0.95      100      1      300000      0      0      0      0
   15      125      155      30000      -30000      0.95      100      1      300000      0      0      0      0
   17      125      155      30000      -30000      0.95      100      1      300000      0      0      0      0
   19      125      155      30000      -30000      0.95      100      1      300000      0      0      0      0
   21      125      155      30000      -30000      0.95      100      1      300000      0      0      0      0
   23      125      155      30000      -30000      0.95      100      1      300000      0      0      0      0
   25      125      155      30000      -30000      0.95      100      1      300000      0      0      0      0
   27      125      155      30000      -30000      0.95      100      1      300000      0      0      0      0
   29      125      155      30000      -30000      0.95      100      1      300000      0      0      0      0

```


case30loopmod

```

function mpc = case30loopmod
mpc.version = '2';
mpc.baseMVA = 100;
mpc.bus = [
    1      3      0      0      0      0      1      0.9      0      345      1      1.1      0.9;
    2      1     95     20      0      0      1      0.9     338     345      1      1.1      0.9;
    3      2      0      0      0      0      1      0.9     326     345      1      1.1      0.9;
    4      1     95     20      0      0      1      0.9     314     345      1      1.1      0.9;
    5      2      0      0      0      0      1      0.9     302     345      1      1.1      0.9;
    6      1     95     20      0      0      1      0.9     290     345      1      1.1      0.9;
    7      2      0      0      0      0      1      0.9     278     345      1      1.1      0.9;
    8      1     95     20      0      0      1      0.9     266     345      1      1.1      0.9;
    9      2      0      0      0      0      1      0.9     254     345      1      1.1      0.9;
   10      1     95     20      0      0      1      0.9     242     345      1      1.1      0.9;
   11      2      0      0      0      0      1      0.9     230     345      1      1.1      0.9;
   12      1     95     20      0      0      1      0.9     218     345      1      1.1      0.9;
   13      2      0      0      0      0      1      0.9     216     345      1      1.1      0.9;
   14      1     95     20      0      0      1      0.9     204     345      1      1.1      0.9;
   15      2      0      0      0      0      1      0.9     192     345      1      1.1      0.9;
   16      1     95     20      0      0      1      0.9     180     345      1      1.1      0.9;
   17      2      0      0      0      0      1      0.9     168     345      1      1.1      0.9;
   18      1     95     20      0      0      1      0.9     156     345      1      1.1      0.9;
   19      2      0      0      0      0      1      0.9     144     345      1      1.1      0.9;
   20      1     95     20      0      0      1      0.9     132     345      1      1.1      0.9;
   21      2      0      0      0      0      1      0.9     120     345      1      1.1      0.9;
   22      1     95     20      0      0      1      0.9     108     345      1      1.1      0.9;
   23      2      0      0      0      0      1      0.9      96     345      1      1.1      0.9;
   24      1     95     20      0      0      1      0.9      84     345      1      1.1      0.9;
   25      2      0      0      0      0      1      0.9      72     345      1      1.1      0.9;
   26      1     95     20      0      0      1      0.9      60     345      1      1.1      0.9;
   27      2      0      0      0      0      1      0.9      48     345      1      1.1      0.9;
   28      1     95     20      0      0      1      0.9      36     345      1      1.1      0.9;
   29      2      0      0      0      0      1      0.9      24     345      1      1.1      0.9;
   30      1     95     20      0      0      1      0.9      12     345      1      1.1      0.9];
mpc.gen = [
    1     125     155    30000    -30000    0.95    100      1    300000    0      0      0      0
    3     125     155    30000    -30000    0.95    100      1    300000    0      0      0      0
    5     125     155    30000    -30000    0.95    100      1    300000    0      0      0      0
    7     125     155    30000    -30000    0.95    100      1    300000    0      0      0      0
    9     125     155    30000    -30000    0.95    100      1    300000    0      0      0      0
   11     125     155    30000    -30000    0.95    100      1    300000    0      0      0      0
   13     125     155    30000    -30000    0.95    100      1    300000    0      0      0      0
   15     125     155    30000    -30000    0.95    100      1    300000    0      0      0      0
   17     125     155    30000    -30000    0.95    100      1    300000    0      0      0      0
   19     125     155    30000    -30000    0.95    100      1    300000    0      0      0      0
   21     125     155    30000    -30000    0.95    100      1    300000    0      0      0      0
   23     125     155    30000    -30000    0.95    100      1    300000    0      0      0      0
   25     125     155    30000    -30000    0.95    100      1    300000    0      0      0      0
   27     125     155    30000    -30000    0.95    100      1    300000    0      0      0      0
   29     125     155    30000    -30000    0.95    100      1    300000    0      0      0      0

```


.