UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO-UFPE
Centro Acadêmico do Agreste – CAA
Núcleo de Formação Docente – NFD
Curso de Matemática-Licenciatura

INVESTIGANDO AS RELAÇÕES ENTRE CONCEITOS DE LIMITE DE FUNÇÃO REAL COM O AUXÍLIO DOS MAPAS CONCEITUAIS

LUAN DANILO SILVA DOS SANTOS

CARUARU - 2016

LUAN DANILO SILVA DOS SANTOS

INVESTIGANDO AS RELAÇÕES ENTRE CONCEITOS DE LIMITE DE FUNÇÃO REAL COM O AUXÍLIO DOS MAPAS CONCEITUAIS

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Licenciado em Matemática.

Área de Concentração: Ensino (Matemática)

Orientadora: Prof.ª Dra. Kátia Calligaris Rodrigues
Co-orientadora: Prof.ª Me. Elizabeth Lacerda Gomes

CARUARU – 2016

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier CRB/4 – 1242

S237i Santos, Luan Danilo Silva dos.
Investigando as relações entre conceitos de limite de função real com o auxílio dos mapas conceituais. / Luan Danilo Silva dos Santos. – 2016.
56f.: il. ; 30 cm.

Orientadora: Kátia Calligaris Rodrigues.
Coorientadora: Elizabeth Lacerda Gomes
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, 2016.
Inclui Referências.

1. Funções. 2. Mapas cognitivos. 3. Avaliação. 4. Cálculo. I. Rodrigues, Kátia Calligaris. (Orientadora). II. Gomes, Elizabeth Lacerda (Coorientadora). III. Título.

371.12 CDD (23. ed.) UFPE (CAA 2016-370)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO-UFPE
Centro Acadêmico do Agreste
Núcleo de Formação Docente
Curso de Matemática-Licenciatura

INVESTIGANDO AS RELAÇÕES ENTRE CONCEITOS DE LIMITE DE FUNÇÃO REAL COM O AUXÍLIO DOS MAPAS CONCEITUAIS

LUAN DANILO SILVA DOS SANTOS

Monografia submetida ao Corpo Docente do Curso de MATEMÁTICA – Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco e **aprovado** em 09 de dezembro de 2016.

Banca Examinadora:

_____
Prof.ª Kátia Calligaris Rodrigues
(Orientadora)

_____
Prof. Elizabeth Lacerda Gomes
(Coorientador(a))

_____
Prof. José Ayron Lira Anjos
(Examinador(a) Interno(a))

DEDICATÓRIA

Dedico-o aos meus pais e ao meu irmão que deram e dão o apoio necessário e suficiente para a conclusão de mais um degrau desta escada ilimitada superiormente.

AGRADECIMENTOS

- ✓ Agradeço aos meus pais e ao meu irmão que sempre me incentivaram a buscar e ser o melhor que eu poderia ser. Por toda a paciência, carinho e respeito que me proporcionam. Guardá-lo-eis sempre comigo.

- ✓ Agradeço à confiança e paciência - às vezes sem mesmo merecer - da minha orientadora Profª Drª Kátia Calligaris Rodrigues em todos esses anos em que participamos de projetos de pesquisas, estudos direcionados e afins. Seu apoio foi fundamental e seus ensinamentos vão além do âmbito acadêmico. Uma verdadeira Mãe Acadêmica. Obrigado!

- ✓ À grande Professora Elizabeth Lacerda pela coautoria e também por toda sua calma, carinho, atenção aos mínimos detalhes, às sugestões, ajustes, paciência, humildade... Enfim... Por ela ser tão amável com todos à sua volta mostrando-nos o que, de fato, é ser um profissional competente, dedicado e honesto com a profissão! Valeu, Liz!

- ✓ Aos meus "irmãos de universidade" que sempre dividiram os fardos e as alegrias comigo.

- ✓ Aos que participaram direta e indiretamente deste trabalho com contribuições sempre significativas (Obrigado pela força, Kevin Lucena).

- ✓ Aos Professores com "P" maiúsculo que sempre transcendiam a vida acadêmica para por toda a vida.

- ✓ Às cobranças que de certa forma contribuíram para um amadurecimento pessoal e profissional.

- ✓ Aos integrantes do Grupo de Estudo sobre Mapas Conceituais que sempre que puderam me ajudaram em análises, discussões sobre o tema e possibilidades. Obrigado pela força!

- ✓ Por fim um agradecimento do tamanho do carinho que sinto por ela. Àquela que sempre me ajudou e que, com certeza, tem participação fundamental neste trabalho com as infinitas correções, aprimorando, sempre que possível, com as discussões sobre aquilo que seria mais adequado, com a paciência e com uma dedicação imensa. Mais do que uma companheira, uma Parceira! Amo você, Yrailma Sousa!

RESUMO

A presente pesquisa, de caráter qualitativo, tem por objetivo analisar quais os conceitos de e a partir de Limite de Função Real que os discentes apresentam no componente curriculares de Cálculo Diferencial e Integral (Cálculo 1) ofertado pelo CAA, baseando-se na problemática de como estão sendo estruturados e como podem afetarem estudos posteriores. Para isto, realizamos uma intervenção que contou com um conjunto de 5 discentes do 4º período do curso de Licenciatura em Matemática, recém egressos da componente Cálculo 1, que construíram individualmente um mapa conceitual, apresentando conceitos raízes incluindo Limite e alguns derivados das ideias. Os mapas serviram de base para uma avaliação quanto às proposições adequadas e inadequadas, possíveis reconciliações integrativas e diferenciações progressivas. Para avalição das unidades semânticas, fez-se o uso da ferramenta da Tabela de Clareza Proposicional (TCP), classificando-as em nível 1 para as proposições inadequadas a nível 5 para as adequadas. Como resultados, em geral, podemos constatar que os alunos não conseguem reconciliar os conceitos de Continuidade, Derivadas e/ou de Integrais com o conceito de Limite e, em alguns casos, não conseguem diferenciar progressivamente alguns destes.

Palavras-chaves: Limite de Função Real; Mapas Conceituais Manipuláveis, Avaliação.

ABSTRACT

This qualitative research aims to analyze the concepts of Limits of Real Functions, which are presented to the students as curricular contents at the course of Differential and Integral Calculus (Calculus 1), offered by CAA, and it is based on the matter of how these concepts are being organized and how they could affect a subsequent study. For this, we accomplished an intervention that involved an amount of 5 students of the 4th semester of the faculty of Mathematics Licentiate, who recently attended to the course of Calculus 1 and built individually a conceptual map, in which are presented conceptual roots that include Limits and some derived ideas. The maps were the base of an evaluation of the appropriate and inappropriate propositions, possible integrative reconciliations and progressive differentiations. For the evaluation of the semantic units, it was used the Table of Clarity's tool (TCP), and the units were classified by level 1 for those inappropriate propositions and level 5 for the appropriate ones. As results, in general, we can realize that the students are not able to reconcile the concepts of Continuity, Derivatives and/or Integrals with concepts of limit and, in some cases, they aren't able to differentiate some of these.

Key-Words: Limit of a Real Function, Manageable Conceptual Maps, Evaluation.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAA – Centro Acadêmico do Agreste

CDI – Cálculo Diferencial e Integral

MC – Mapas Conceituais

NFD – Núcleo de Formação Docente

TCP - Tabela de Clareza Proposicional

UFPE – Universidade Federal de Pernambuco

US - Unidade Semântica

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Organização das unidades semânticas 22
Figura 2 - Organização de um mapa conceitual por meio de um mapa 23
Figura 3: Exemplificação das cores nas proposições 26
Figura 4 - Mapa Conceitual de A1. 30
Figura 5 - Indicações das Diferenciações Progressivas do Mapa de A5 32
Figura 6 - Mapa Conceitual de A2 32
Figura 7 - Indicações das Diferenciações Progressivas do Mapa de A2 34
Figura 8 - Mapa Conceitual de A3 34
Figura 9 - Indicações das Diferenciações Progressivas do Mapa de A3 36
Figura 10 - Mapa Conceitual de A4 37
Figura 11 - Indicações das Diferenciações Progressivas do Mapa de A4 39
Figura 12 - Mapa Conceitual de A5 39
Figura 13 - Indicações das Diferenciações Progressivas do Mapa de A5 41
Figura 14-MCM de A1 54
Figura 15- MCM de A2 54
Figura 16 - MCM de A3 55
Figura 17 - MCM de A4 55
Figura 18 - MCM de A5 56

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Tutorial para a Construção da TCP no Microsoft Excel 2010 28
Quadro 2- Recorte das Proposições Nível 1 da TCP de A1 31
Quadro 3 - Recorte das Proposições Nível 1 da TCP de A2 32
Quadro 4 - Recorte das Proposições Nível 1 da TCP de A3 35
Quadro 5 - Recorte das Proposições Nível 1 da TCP de A4 37
Quadro 6 - Recorte das Proposições Nível 1 da TCP de A5 40
Quadro 7. TCP do A1 46
Quadro 8. TCP de A2 48
Quadro 9. TCP de A3 50
Quadro 10 - TCP de A4 52
Quadro 11 - TCP do A5 53

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO **13**
2. OBJETIVOS **15**
2.1. Objetivo Geral **15**
2.2. Objetivos específicos **15**
3. REFERENCIAL TEÓRICO **16**
3.1. Alguns aspectos históricos que levam ao conceito formal de Limites **16**
3.1.1. As contribuições de Newton **16**
3.1.2. As contribuições de Leibniz **17**
3.1.3. As contribuições de Cauchy e Weierstrass **18**
3.2. Mapas Conceituais **21**
3.2.1. Mapas Conceituais - viés técnico **21**
3.2.2. Mapas Conceituais - viés metodológico **23**
4. ASPECTOS METODOLÓGICOS **26**
5. RESULTADOS E DISCUSSÃO **29**
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS **42**
7. REFERÊNCIAS **44**
8. APÊNDICES **46**
9. ANEXOS **54**

1. INTRODUÇÃO

O estudo do Cálculo Diferencial e Integral de Variáveis Reais (CDI) se tornou e ainda é uma necessidade real para o desenvolvimento científico em diferentes áreas. E vemos, seja por meio de trabalhos publicados ou até mesmo da própria experiência como aluno que, o CDI, nos seus respectivos componentes curriculares de diferentes cursos de graduação, é responsável por uma forte presença de reprovações e assimilação de conceitos de forma mecânica desde o começo do curso quando é apresentado ao alunado as ideias iniciais de Limite.

Alguns pesquisadores tais como: Abreu (2011), Zuchi (2005) e Vieira (1991) focam seus estudos para o Limite alegando que o mesmo, apesar de aparecer por último no contexto histórico do desenvolvimento do CDI, é o conceito fundamental para a compreensão e a utilização formal dos outros componentes que tratam do conceito.

Cornu (1991) alega que a compreensão de Limite é complexa, portanto, facilmente torna-se confusa para quem o estuda. São muitas definições, simbologias e ideias unificadas em pouco tempo de assimilação, muitas vezes vistas de uma forma isolada, sem conexão entre ideias, que acabam atrapalhando o desenvolvimento do conceito e isto, em geral, faz com que o aluno reproduza fórmulas e definições verbalmente decoradas, tornando o conhecimento de tal área como estático, superficial e favorável à aprendizagem memorística que, por sua vez, vai contra a ideia de termos uma aprendizagem significativamente real e utilizável. Ou seja, os conceitos vistos com esse enfoque memorístico, centrado em fórmulas e sem um caráter de utilidade fora daquele contexto da sala de aula, se aplicados fora do mesmo, não fazem sentido nenhum. Há muito tem ocorrido isso e provavelmente continuará ocorrendo.

Alguns pesquisadores da Educação Matemática Superior tentam buscar aproximações de respostas para o ocorrido e por muitas vezes os trabalhos indicam que é a falta de base ou relações errôneas entre conceitos que geram a incompreensão.

Sendo assim, buscamos a resposta para a pergunta:

"*Como estão estruturados/organizados os conceitos e relações no que concerne Limite de Função Real no cognitivo dos discentes do Centro Acadêmico do Agreste e como eles podem influenciar na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral no decorrer das disciplinas que envolvem este conceito?"*

Para tal, abordamos algumas considerações sobre Mapas Conceituais, segundo alguns autores, tais como: Cañas e Carvalho (2005), Moreira (1986) Novak e Gowin (1984), Correia (2010), S. Moreira (2011), Ruiz-Moreno et al. (2007) os quais julgam os MC como sendo uma potencial ferramenta para avaliar a estrutura de como o conceito é formado na estrutura cognitiva do aluno. Portanto, seguindo o foco do trabalho, usaremos o viés de Mapas Conceituais no seu sentido de Avaliação (MOREIRA, 1984), incluindo uma nova possibilidade da utilização dessa ferramenta, a qual denominamos de Mapa Conceitual Manipulável (MCM), onde o mesmo foi hierarquizado através de cores e pré-estabelecido, pelos mesmos motivos apresentados por S. Moreira (2011).

Utilizamos também do apoio das Tabelas de Clareza Proposicional (TCP), dando-nos a possibilidade de nos debruçarmos exclusivamente às unidades semânticas (US) e poder categorizá-las em inadequadas e adequadas, através de níveis variando de 1 a 5, dentro do contexto de CDI e levamos em consideração as diferenciações progressivas e reconciliações integrativas que aparecem, nas construções.

De início, realizamos uma abordagem breve do histórico quanto à construção do CDI, perpassando desde a Grécia antiga até o estudo formal de Limites, buscando entender a construção de tal conceito e o real sentido ou pelo menos uma aproximação, daquilo que motivou, inicialmente à descoberta e posteriormente ao desenvolvimento.

Diante do exposto, segue abaixo os nossos objetivos.

2. OBJETIVOS

2.1. Objetivo Geral

Usar Mapas Conceituais para analisar como os licenciandos em Matemática do CAA estruturam os conceitos de CDI a partir do conceito de Limite de Função de uma Variável Real

2.2. Objetivos específicos

- Investigar a estrutura cognitiva dos alunos no que concerne Limite de Função Real e conceitos gerados por eles em mapas conceituais;
- Identificar e classificar proposições em adequadas e inadequadas quanto ao sentido das mesmas dentro dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral de uma Variável Real.
- Identificar reconciliações integrativas e diferenciações progressivas nos mapas elaborados.

3. REFERENCIAL TEÓRICO

3.1. Alguns aspectos históricos que levam ao conceito formal de Limites

Queremos deixar claro, de antemão, que neste tópico do nosso trabalho, não discutiremos das desavenças que ocorreram entre Newton e Leibniz quanto a autoria do desenvolvimento do Cálculo como relatam textos de alguns autores. Tal disputa não nos interessam mais do que os resultados. Estamos interessados naqueles obtidos pré e pós Newton e Leibniz, descrevendo como foi dando-se tal desenvolvimento, quais os principais matemáticos que trouxeram significativas contribuições e quais os problemas geradores das ideias. Pretendemos com isso argumentar o uso atual do Cálculo Diferencial e Integral (Cálculo) com todo o seu rigor, organizando ideias dentro de um processo histórico.

Abaixo seguem algumas contribuições de Newton quanto às ideias precursoras, Leibniz enquanto notações, simbologias, e termos e Cauchy e Weierstrass enquanto a formalização rigorosa do conceito de Limite.

3.1.1. As contribuições de Newton

Para justificar o uso de Limite como conceito protagonista neste trabalho, achamos conveniente trazer uma breve explanação sobre o processo histórico que perpassa os estudos do Cálculo e por qual motivo o Limite de Função merece destaque dentre os demais conceitos dos quais destacamos a Continuidade, a Derivada e a Integral; falando um pouco sobre os trabalhos que os apontam e, por fim, as importâncias que alguns matemáticos tiveram no desenvolvimento dessa ferramenta poderosa para o avanço científico.

De início, o próprio nome *Cálculo Diferencial e Integral* nos leva a alguns dos principais problemas que na época serviram para impulsionar os estudos dos matemáticos.

Como expressa Garbi (2009, p. 218) em seu livro intitulado “A Rainha das Ciências”, eram três os problemas que estavam atuais na época. Os mesmos resumiam-se a: o traçado analítico de tangentes às curvas, as quadraturas de curvas e as séries infinitas. Alguns matemáticos se interessavam por estes problemas, entre eles John Wallis (1616 - 1713), Pierre de Fermat (1601 – 1665), René Descartes (1596 - 1650), Isaac Barrow (1630 - 1677) e Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647), que realizavam estudos sobre tais questões. Ainda segundo Garbi (2009, p. 218) Wallis escreveu sobre os três problemas, contribuindo ao estudo das séries, Fermat e Descartes com o estudo do traçado analítico de tangentes, Barrow

pesquisou tangentes e quadraturas, contribuindo com evidências sobre relações entre os dois conceitos e Fermat, Cavalieri, Wallis e outros com estudos intuitivos sobre áreas sob curvas.

Embora tais contribuições fossem de suma importância para o desenvolvimento daquilo que hoje conhecemos sobre o conceito, nenhum deles conseguiu alcançar formulações precisas do que viria ser o nosso Cálculo Diferencial e Integral como fizeram dois expoentes dessa área, Newton e Leibniz. Todos esses trabalhos pré Newton e Leibniz podem ser chamados de, como aponta Bardi (2010, p. 25), "casos isolados de diferenciação e integração".

Isaac Newton (1642 – 1726), contemporâneo da nata de matemáticos descrita acima e tantos outros não descritos, influenciado por grandes nomes, logo se interessou pelos três problemas, iniciando os estudos daquilo que seria o seu grande, dentre incontáveis feitos: o Cálculo.

Na famosa época de reclusão à sua propriedade em 1665, pesquisando o traçado das tangentes, deu início ao que conhecemos atualmente pelo nome de Cálculo Diferencial ao desenvolver seu Método das Fluxões e em seguida, após idas e vindas, o Método Inverso das Fluxões, pesquisando quadraturas e percebendo que ambas são operações inversas uma da outra como aponta Garbi (2009).

Todas essas descobertas, como dizem muitos autores que focam sobre história da Matemática, entre eles Garbi (2009), Bardi (2010), falam que Newton nunca teve interesse em publicar seus feitos. Foi esse o causador pioneiro de uma "brutal batalha pública na qual cada um defenderia seu próprio direito de reivindicar a autoria do Cálculo Diferencial e Integral" (BARDI, 2010, p. 11). O outro exponente com o qual Newton divide o grande feito é Leibniz.

Abaixo segue um resumo de quem foi e de como tudo isso aconteceu, baseado em alguns relatos.

3.1.2. As contribuições de Leibniz

De acordo com alguns textos, o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), "jurista, diplomata, estudioso político, filólogo, filósofo, historiador, lógico, geólogo, teólogo, inventor de uma máquina de calcular e matemático de altíssimo nível" (GARBI, 2009, p. 224), contribuiu em alguns conceitos matemáticos, tais como Geometria Analítica, Função, estudos dos "Indivisíveis" de Cavalieri; formulando simbologias e sistematizações para a "Exaustão" de Eudóxio, etc.

Diferentemente de Newton que se preocupou no movimento mecânico, Leibniz focou seus estudos nos "incrementos cada vez menores" como aponta (ABREU, 2011, p. 23). A notação que não havia em nenhum trabalho anterior, de forma simples e eficaz, Leibniz traz para a sua obra, tornando-a acessível e muito bem apreciada. Segundo Garbi (2009), a palavra "Cálculo" foi Leibniz que citou pela primeira vez, as simbologias dx, dy e $\frac{dy}{dx}$ também foi invenção dele; o nome "Cálculo Diferencial"; descobriu que o traçado das tangentes e as quadraturas de curvas são operações inversas no seu trabalho denominado "*Calculus Summatorius*", iniciando o uso do símbolo ∫, empregando assim o termo "Cálculo Integral" facilitando toda uma análise do conceito.

Leibniz publicou tais ideias em 1684 no Jornal *Acta Eruditorum Lipsienium* (Atas dos Eruditos de Leipzig) com o seu trabalho intitulado: "Um novo método para máximos e mínimos e também tangentes, que não é obstado por quantidades fracionárias ou irracionais, e um notável tipo de cálculo para eles" (GARBI, 2009, p. 226).

Em geral, é impensável realizar o estudo de Cálculo hoje em dia sem levar em consideração as contribuições de Newton com todas as suas ideias pioneiras e as inúmeras contribuições de Leibniz enquanto as indispensáveis notações, simbologias e termos, para uma análise algébrica, comumente chamando, de "ponto a ponto".

Mesmo assim, o Cálculo de Newton e Leibniz, desenvolvido a partir dos "casos isolados" citados acima, não completa o nosso Cálculo atualmente usado. Ainda falta rigor, principalmente em questões do "infinitamente pequeno" e do "infinitamente grande", por exemplo.

Concluindo nossa visão do CDI quanto às contribuições mais atuais, segue as de Cauchy e Weierstrass ao tratarem do formalismo e rigor matemático envolvendo o conceito de Limite e, em geral do próprio CDI.

3.1.3. As contribuições de Cauchy e Weierstrass

Ao se tratar da falta de rigor e formalismo nas obras de Newton e Leibniz, Brito e Cardoso (1997, p. 138) apontam que:

> Foram debatidos dois aspectos problemáticos do Cálculo: um com relação aos conceitos e princípios fundamentais e outro referente ao fato de o Cálculo conduzir a erros. No primeiro aspecto, discutia-se a falta de rigor lógico dos conceitos, destacando a falta de fundamentação do infinitamente pequeno e do infinitamente grande (principalmente para os diferenciais de

> ordem superior); os diferenciais de Leibniz, segundo Rolle (1652 – 1719), podiam ser interpretados tanto como quantidades não nulas determinadas, quanto como zero. Rolle sustentava que no Cálculo o todo era igual à parte, pois uma grandeza x somada ao seu diferencial dx era igual a ela própria; e que, além disto, os diferenciais eram manipulados diferentemente conforme as necessidades para se atingir a solução do problema (a solução já era conhecida anteriormente). Varignon (1654 – 1722), com base no método Newtoniano, respondeu a essas críticas de Rolle; porém, não satisfatoriamente, pois usou apenas um jogo de palavras que não esclareceu nada. (Grifo nosso).

Se pararmos para observar, o Método da Exaustão de Arquimedes que, exposto, segundo Abreu (2011, p. 23), "consistia em inscrever e circunscrever polígonos em uma circunferência aumentando o número de lados destes polígonos obtendo assim, por aproximações sucessivas, valores que "convergiam" para a área do círculo*",* e Zenão com os seus paradoxos, é um sinal de que o Limite esteve entrando em foco, pois além de envolver quadraturas – áreas sob curvas – envolve pequenos diferenciais, cada vez menores.

Reis (2001, p. 54) cita Zenão junto com Arquimedes nos aspectos históricos do Cálculo quanto à introdução desse novo conceito, quando fala que:

> Ao tentar descrever, mesmo que sucintamente, as origens e principais contribuições ao desenvolvimento do Cálculo tomam-se quase que obrigatório iniciar por Zenão. Zenão viveu por volta de 450 a.C. e seus paradoxos dividem os historiadores em relação à sua interpretação e influência sobre a matemática grega. Outro grego importante foi Arquimedes (287 – 212 a.C.), cujo problema do traçado da reta tangente à espiral desencadeou a busca por métodos gerais de traçado de tangentes à curvas.

Provavelmente havendo a necessidade de formular de uma maneira mais rigorosa tais ideias ainda não maduras do conceito de Limite, surgem no meio desses nomes citados, os matemáticos Louis Cauchy (1789 – 1857) e Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897), que trabalharam as ideias de Newton e Leibniz de uma forma mais rigorosa, encorpando o conceito de Limite.

Cauchy na época conseguiu dar uma definição para Limite bem próxima da atual. Como nos mostra Reis (2001, p. 59), ainda em seu trabalho

> Após ser nomeado para o corpo docente da *École Polytechnique* de Paris em 1816, como professor da nova cátedra de Análise Matemática, Cauchy inicia um movimento de refinamento da teoria de limites e utiliza-a como base de uma nova e ampla disciplina ordenada rigorosamente, desenvolvida através de um conjunto consistente de definições e teoremas apresentados formal e logicamente, com uma notação coerente ao longo do texto de seu *Cours d'analise* (1821).

> Uma das principais contribuições de Cauchy foi uma definição de limite quase tão precisa quanto a que se tem hoje. [...] Mas, talvez, a maior contribuição de Cauchy não esteja no rigor da definição de limite. A diferença fundamental em relação a muitos matemáticos anteriores é que estes concebiam o infinitésimo enquanto um número fixo, ao passo que Cauchy define-o claramente como uma variável dependente.

Em geral em relação à citação de Reis (2001) acima, Cauchy conseguiu o feito de formalizar tudo o que os matemáticos pensavam, evitando confusões ao incluir o formalismo e o rigor, que de fato havia quando se falava em "*infinitamente grande", "infinitamente pequeno*", etc.

Com o *Cours d'analise* de Cauchy conseguiu-se unir todas as ideias de Newton, com seus métodos geralmente geométricos e os métodos de Leibniz, com suas importantes simbologias algébricas, com todas as contribuições no formalismo de Limite, entendendo, analisando detalhadamente e progredindo as ideias anteriores de Newton e Leibniz.

Vindo também nessa perspectiva, aparece Karl Wilhelm Weierstrass com suas formalizações dos ε e δ e suas contribuições para a construção dos números Reais conforme é apontado como a "refundamentação da análise", sendo um professor totalmente original em suas ideias e conhecido pelo *rigor weierstrassiano* (BARONI E OTERO-GARCIA, 2014).

Suas ideias contribuíram muito com aquilo que vemos hoje nos cursos de Análise Real (uma perspectiva do CDI vista com certa formalidade e rigor). Além da construção dos Números Reais, ele estudou convergências uniformes, funções e séries, tornando mais formal, ainda segundo os autores, até mesmo as ideias de seus antecessores, incluindo Cauchy de função contínuas e o uso mais adequado dos ε e δ, por exemplo.

Veja a citação que Weierstrass faz, ainda mostrada no trabalho de Baroni e Otero-Garcia (2014, p. 81)

> Se $f(x)$ é uma função de x, e x é um valor definido, então a função mudará para $f(x+h)$ quando x for trocado por $x+h$. A diferença $f(x+h)-f(x)$ é chamada de mudança que a função sofre quando x é trocado por $x+h$. Agora, se é possível determinar um limite δ, tal que para todos os valores de h, com valor absoluto menor do que δ, $f(x+h)-f(x)$ torna-se menor do que qualquer quantidade arbitrariamente pequena ε então dizemos que mudanças infinitamente pequenas no argumento correspondem a mudanças infinitamente pequenas da função. De fato, se o valor absoluto de uma quantidade pode se tornar menor do que uma quantidade arbitrariamente pequena, então dizemos que ela pode se tornar infinitamente pequena. Quando uma função é de tal natureza que mudanças infinitamente pequenas do argumento correspondem a mudanças infinitamente pequenas da função,

> então dizemos que é uma função contínua do argumento ou que varia continuamente com o argumento.

Podemos notar que são basicamente ideias usadas atualmente, com todas as formalizações que foram construídas desde a Grécia com Arquimedes e Eudoxo, passando por Newton e Leibniz e seus influenciadores, até Cauchy.

Visto o breve histórico que traz à tona um pouco da explicação de como o CDI é estudado usualmente, nos livros a respeito do assunto, seguem conceitos relacionados aos Mapas Conceituais.

3.2. Mapas Conceituais

Joseph Novak e Bob Gowin na obra "*Learning How to Learn*" publicada em 1984 estavam em busca de entender, em sua essência, como é ocorrida a assimilação de novos conceitos e proposições a conceitos e proposições já existentes do aprendiz, baseados, por sua vez, nos estudos de David Ausubel em relação à teoria da Aprendizagem Significativa.

Entretanto, havia a necessidade de representação e organização dos dados tal que os mesmos pudessem oportunizar análises futuras. Foi aí que, introduzida por Novak em meados dos anos 70, a *Teoria dos Mapas Conceituais* abriu as portas para que tivéssemos uma ferramenta capaz de inferir de maneira aproximada as relações conceituais estabelecidas nas assimilações dos estudantes.

Para que o uso seja realmente eficaz, precisamos saber como funciona a construção de um Mapa Conceitual e como analisá-los a ponto de chegarmos aos objetivos que propõem Novak e Gowin.

A fim de termos tal resposta, apresentamos dois vieses sobre Mapas Conceituais que são: a parte técnica (como são estruturados) e a parte metodológica (quais as possibilidades de uso dos mapas).

3.2.1. Mapas Conceituais - viés técnico

Mapas conceituais são estruturas que representam uma aproximação da estrutura cognitiva de quem o desenvolve, referente a algum conhecimento, em específico, submetido a uma pergunta focal.

A estrutura do mapa é formada por proposições. Estas são formadas por conceitos ligados entre si por meio de uma seta indicando um sentido. Tais proposições vistas isoladamente são chamadas de Unidades Semânticas (US). Essas são formadas através de conceitos que, segundo Correia (2010) são “regularidades ou padrões percebidos em eventos ou objetos representados por uma ou poucas palavras e estas por substantivos ou até mesmo adjetivos no sentido de qualificar”.

Há um termo de ligação explicando a relação entre um conceito e outro que, ainda de acordo com Correia (2010), é a explicação de como os conceitos se relacionam perante o sentido da flecha, através de poucas palavras, objetivas e diretas, geralmente contendo algum verbo para dar o sentido de ação.

A Figura 1 explicita a breve explicação.

Figura 1 - Organização das unidades semânticas
Fonte: do autor

Normalmente, a estrutura é apresentada como uma forma hierárquica onde conceitos mais gerais aparecem no topo da estrutura e os mais específicos na base, evidenciando as relações e as hierarquias entre eles. “Não há regras fixas ou modelos rígidos para traçar um mapa conceitual”. (MOREIRA, 1986, p. 18)

Cañas e Carvalho (2005, p. 1) definem mapas de uma forma bem semelhante das apresentadas acima, como sendo:

> Mapas Conceituais são representações gráficas bidimensionais do conhecimento de uma pessoa (ou grupo de pessoas) sobre um assunto. Um mapa conceitual consiste de um conjunto de conceitos, definidos por Novak como regularidades em eventos ou objetos, ou registros de eventos ou objetos, designados por um nome. Eles são construídos de forma que os conceitos e suas inter-relações sejam claros e evidentes. Os conceitos são geralmente incluídos dentro de círculos ou caixas, ligados por arcos que especificam a relação entre os conceitos.

Ainda por Cañas e Carvalho (2005), a ideia de Mapa Conceitual, descrita acima, é apresentada na Figura 2 na forma de um MC.

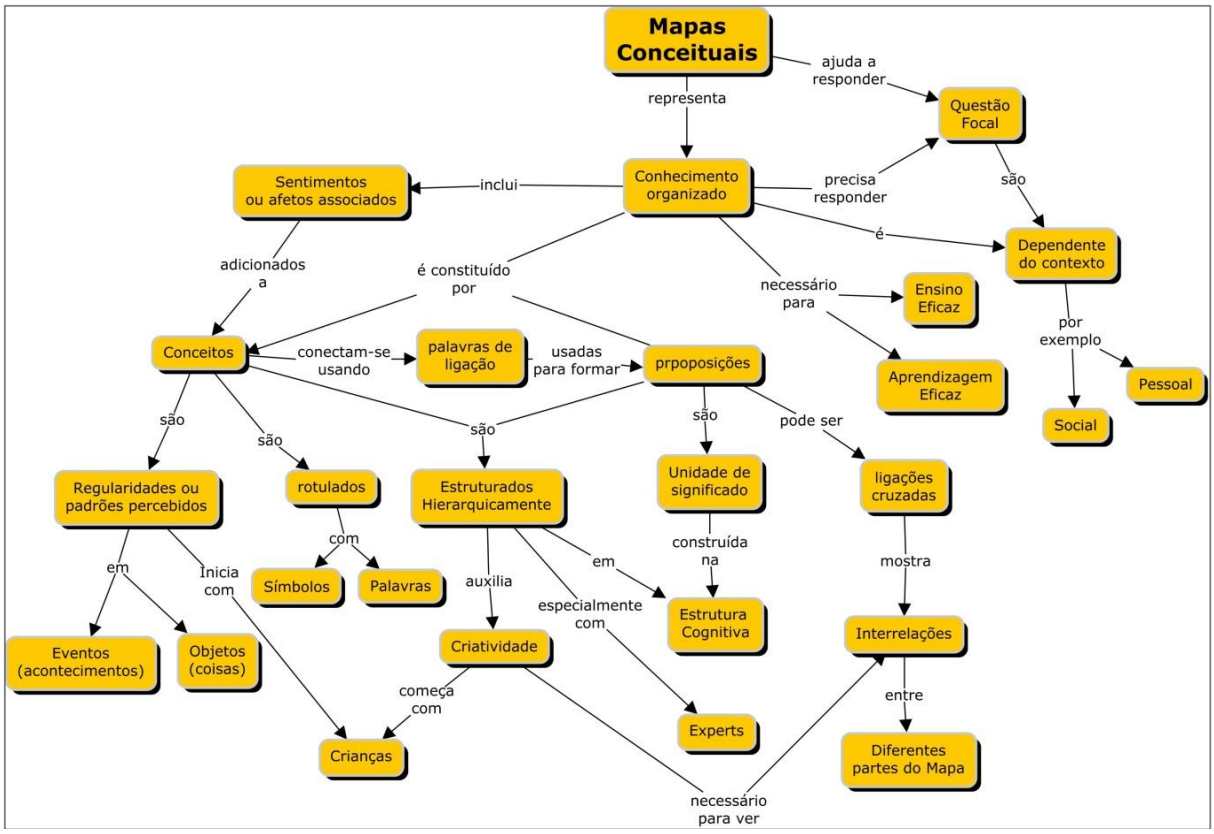


Figura 2 - Organização de um mapa conceitual por meio de um mapa
Fonte: Cañas e Carvalho (2005, p. 1, tradução nossa).

3.2.2. Mapas Conceituais - viés metodológico

Alguns autores definem e exemplificam possiblidades de uso dos mapas de forma que em geral, assemelham-se. Vamos analisá-las.

Stefanie Moreira (2011, p. 153) ao citar Novak e Gowin (1984) fala que:

> Para eles, mapa conceitual é uma ferramenta educacional para acessar os conhecimentos dos alunos já existentes em si próprios. Segundo eles, o mapa conceitual foi projetado para entrar na estrutura cognitiva do aluno e externalizar, para professor e aluno verem, o que o aluno já sabe.

Os pioneiros, Novak e Gowin (1984, p. 40), expressam-se da seguinte forma:

> Nós não afirmamos que um mapa conceitual é uma representação completa dos conceitos e proposições relevantes que um aprendiz sabe, mas nós afirmamos que é uma aproximação que funciona, de onde professores e alunos podem conscientemente e deliberadamente expandir e seguir adiante.

Dadas as definições de alguns dos principais nomes desta área do que são Mapas Conceituais, tiramos nossas próprias conclusões do que é esta ferramenta e, nos debruçando

sobre os autores, conseguimos suscitar MC como sendo: “uma representação sintética de certo conceito presente na estrutura cognitiva de um aluno”. Foi esta ideia que sustentou nossa intervenção

Ainda em Moreira (1986, p. 18), há uma parte no corpo do texto que exemplifica onde os MC podem ser usados:

> Na organização e na análise do conteúdo onde podem ser traçados para uma aula ou parte dela, para uma unidade de estudo ou para um curso inteiro. São úteis para focalizar a atenção de quem organiza o conteúdo (geralmente o próprio professor ou uma equipe de professores) na abordagem de conceitos e no planejamento de atividades instrucionais destinadas a promover a aprendizagem;
>
> No ensino onde podem ser usados para mostrar relações hierárquicas entre concepções que estão sendo ensinadas em uma única aula, em uma unidade de estudo ou em toda a matéria. São representações concisas das estruturas conceituais que estão sendo ensinadas e procuram facilitar a aprendizagem significativa (em contraposição às aprendizagens mecânica, automática, memorística) dessas estruturas;
>
> Como instrumento de avaliação onde podem ser utilizados para se ter uma imagem da organização conceitual - relações hierárquicas entre conceitos - que o aluno estabelece para um dado conteúdo. Naturalmente, essa é uma visão não tradicional de avaliação que é essencialmente qualitativa, mas que pode ser muito valiosa para o professor no sentido de guiar sua prática pedagógica.

Tendo o nosso trabalho um foco mais voltado para analisar certos tipos de estrutura mental formada na estrutura cognitiva dos alunos, diante da fala de Moreira (1986), evidentemente utilizamos MC no sentido de termos um instrumento de avaliação onde poderíamos conseguir uma imagem daquilo que se aproxima da estrutura o cognitiva dos discentes.

Mas como podemos instrumentalizar o Mapa Conceitual a fim de avaliar algo?

Conforme Ruiz-Moreno e colaboradores (2007, p. 454),

> O mapa conceitual se fundamenta em princípios teóricos da aprendizagem significativa que considera a necessidade de conhecer as ideias prévias e a estrutura de significados dos sujeitos com o propósito de estabelecer aprendizagens inter-relacionadas. Na medida em que o novo conhecimento é construído, os conceitos preexistentes experimentam uma diferenciação progressiva e, quando dois ou mais conceitos se relacionam de forma significativa, acontece uma reconciliação integradora.

“Externalizar para o professor o que o aluno já sabe” ou como sabe, “conhecer a estrutura de significados”, “analisar quais as reconciliações integrativas e diferenciações

progressivas que os conceitos sofrem", etc., evidencia aquilo que fomos à busca.

Consideraremos adequadas àquelas unidades que por si só transmita uma informação verdadeira, de acordo com o sentido do conceito, a qualquer pessoa.

Para realizar esta análise, contamos com a ajuda do método da *Tabela de Clareza Proposicional* (TCP) apresentada por Correia (2010)

Segue nossa intervenção abaixo com os detalhes de como isto ocorreu.

4. ASPECTOS METODOLÓGICOS

Nosso projeto desenvolveu-se na UFPE - CAA, na cidade de Caruaru-PE, tendo como principal objetivo analisar quais os conceitos de Limite de Função Real que os discentes estão trazendo da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Para isto, utilizamos do poderio dos Mapas Conceituais no seu sentido de avaliação de modo que as estruturas cognitivas dos discentes ficassem claras a ponto de analisar cada proposição isoladamente (unidade semântica) que envolve o conceito em estudo e se estas são ou não significativas. Ou seja, como estão organizadas as relações do conceito de Limite e daqueles ligados a este? Há falta de clareza proposicional nas US? Os discentes relacionam conceitos mais específicos aos mais gerais e vice-versa? Havendo falhas, será que estas podem atrapalhar o desenvolvimento dos estudos mais avançados envolvendo CDI?

Com base nisto, os participantes da nossa pesquisa foram formados por um conjunto de 5 discentes do curso de Licenciatura em Matemática, egressos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (Cálculo I).

Pelo motivo de estarmos interessados em analisar o que, de fato, os alunos aprenderam ao transitar pelo curso de CDI de forma regular, estes licenciandos foram escolhidos sob o critério de que nenhum tivesse sofrido retenção na disciplina de cálculo I. A quantidade adotada de discentes selecionados deu-se por acreditarmos ser uma quantidade razoável para realização da análise.

Usamos como instrumento de análise, uma possibilidade de uso dos mapas no qual denominamos como Mapa Conceitual Manipulável (MCM), no qual havia conceitos pré-estabelecidos próprios da intuição e do rigor de Limite e dos seus conceitos derivados (Continuidade, Derivada e Integral), diferindo-se em cores apenas os conceitos mais gerais. Os conceitos mais específicos foram adicionados um contorno da mesma cor com que estavam os termos mais gerais ligados a estes.

A seguir é apresentado a Figura 3 como exemplo, para facilitar o entendimento.

Figura 3: Exemplificação das cores nas proposições
Fonte: do autor

Os termos de ligação, como vistos na Figura 3, foram disponibilizados sem nenhuma cor ou contorno.

Sem desmerecer tudo aquilo que o aluno traz, disponibilizamos também algumas peças para que, em caso de necessidade, ele criasse seus próprios conceitos ou possíveis termos de ligação (apesar de que eles achavam mais conveniente escrever no próprio mapa).

Cada peça do mapa (conceitos e termos de ligação) foram impressos em papel cartão. As bases dos mapas foram compostas por *papel contact*, formando uma região plana de aproximadamente 115 cm x 90 cm sobre uma mesa.

As setas usadas para indicar o sentido de cada proposição eram feitas com lápis para quadro branco, facilitando a correção durante as construções dos mapas.

Tais conceitos e termos surgiram através da construção de um mapa conceitual geral que foi elaborado e revisitado várias vezes pelos autores deste trabalho com o uso do software *CmapTools*, para que contivesse o maior número possível de conceitos e termos. Cada um foi selecionado, exportado como imagem do próprio *CmapTools*, impresso e recortado.

Tivemos um total de 173 peças no mapa conceitual geral distribuídas entre conceitos e termos de ligação envolvendo Limite, Continuidade, Derivada e Integral.

Sempre esteve na sala algum mediador para o momento em que surgissem dúvidas quanto à estruturação do MCM.

Finalizando os seus respectivos mapas, os mesmos eram fotografados a fim de ter um registro do resultado final do que cada um conseguiu relacionar e como aconteceram.

Tais relações eram importantes para observarmos como as reconciliações integrativas e diferenciações progressivas eram estabelecidas pelos alunos. Elas foram analisadas de forma individual por meio da ferramenta TCP.

A TCP utiliza a ajuda de algum editor de planilhas disponível pela *Microsoft Office* ou *Libre Office*, por exemplo, busca, segundo Correia (2010), analisar individualmente cada uma das proposições que formam o mapa. Se cada uma delas estiver apresentar clareza, o mapa também será claro. O nível de clareza que utilizamos para cada proposição varia de 1, para aquelas proposições totalmente sem sentido e 5 para aquelas que trazem uma auto clareza.

Segue um breve tutorial abaixo de como montar uma TCP.

Quadro 1 - Tutorial para a Construção da TCP no Microsoft Excell 2010

1. Exportar e salvar o MC como arquivo de texto (.txt)	• Ir no CmapTools e clicar em “Cmap List View” (ícone verde localizado à margem superior direita da tela); • Salvar o arquivo em alguma pasta do PC.
2. Importar o arquivo em algum editor de planilhas	• No editor de planilhas, clicar na sequência: “dados” - “obter dados externos” - “dados de texto”; • Realizar a sequência: “próximo - próximo - finalizar”; • Escolher a célula e clicar em: “ok”.

Fonte: do autor

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O MCM de cada aluno foi recriado no *CmapTools* com o intuito de facilitar a leitura e deixar a visualização mais agradável, organizando assim, as proposições e promovendo a retirada dos conectivos repetidos que surgiram, ao nosso entendimento, por mera inexperiência do aluno com mapas conceituais. Devemos salientar que todas essas edições foram aprovadas por eles no momento em que cada mapa foi reavaliado.

A priori, os resultados serão apresentados de forma que, cada mapa seja esclarecido levando em consideração a busca de uma aproximação da estrutura cognitiva dos alunos no que concerne a Limite, como eles geram outros conceitos baseados neste e observando como dispuseram os blocos de conceitos, se foi de forma isolada ou não.

Posteriormente identificaremos e classificaremos as proposições em adequadas ou inadequadas quanto ao grau de sentido no contexto de C.D.I. Tal análise foi baseada nos conceitos apresentados pelos livros de Hamilton Luiz Guidorizzi (2001) e James Stewart (2010) por serem os mais adotados pelos professores atualmente[i].

Em seguida, analisaremos as TCP de cada mapa e apresentaremos as US que contêm classificações nível 1 a nível 5 de clareza. Com isto, conseguimos identificar em quais blocos de conteúdo o aluno demonstrou melhor aprendizagem e em quais as confusões conceituais ficaram mais explícitas.

Por fim, vamos destacar as diferenciações progressivas e as reconciliações integrativas de cada mapa e o que a não utilização destas dão indícios da aprendizagem individual.

Após apresentação dos 5 alunos, faremos um balanço geral de quais pontos achamos importantes destacar a fim de chegarmos a nossa problemática.

[i] Resultado mostrado pela pesquisa de Santos e Cunha (2015)

Aluno A1

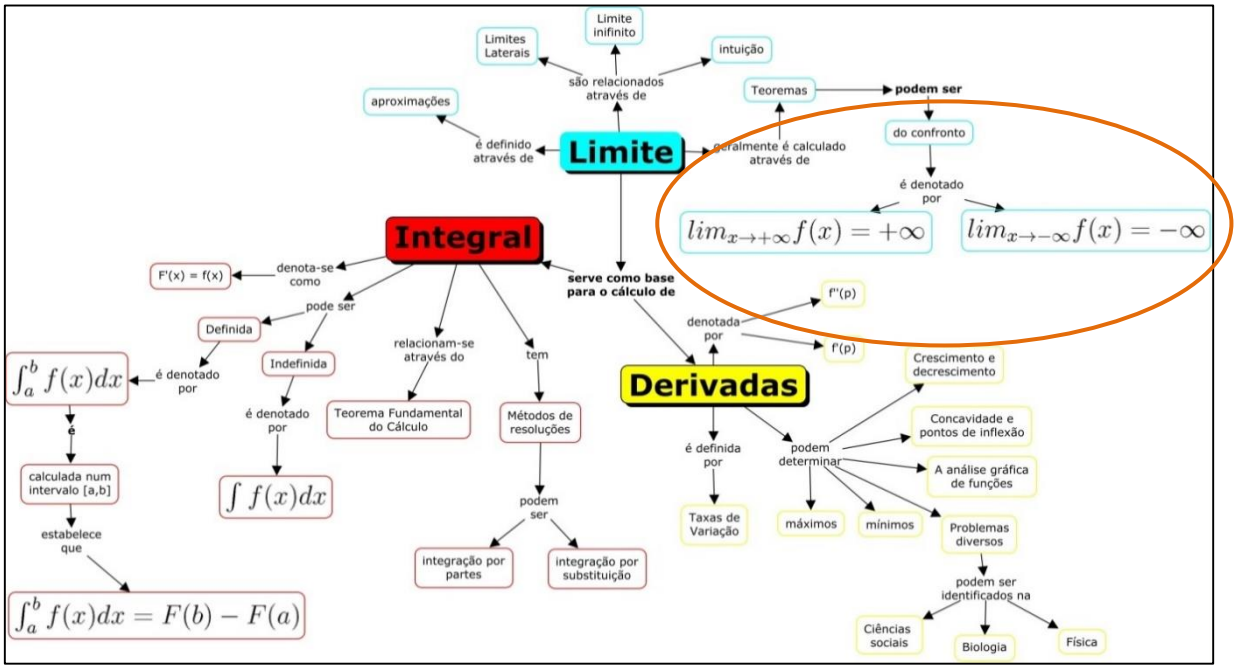


Figura 4 - Mapa Conceitual de A1.
Fonte: do autor

Observando a construção de A1, podemos constatar, de início, algumas relações adequadas, outras inadequadas, algumas diferenciações progressivas, ausência de reconciliações integrativas entre os conceitos específicos de Limite e os de Integral e/ou de Derivadas e a não inclusão do conceito de Continuidade.

Deparando-nos com o fato do não uso de reconciliações integrativas e apenas algumas diferenciações progressivas, podemos indicar a possibilidade de que o ensino e por transitividade, em sua maioria, do estudo, serem fragmentados em blocos, não havendo assim uma ferramenta de alto potencial para dar-se a relação entre conceitos de Limite e Derivada, Limite e Continuidade com todas as suas ideias de infinito, Derivadas e Integral como operações inversas, Limite e Integral, e tantas outras ligações possíveis que poderiam facilmente aparecer nos mapas.

Como proposições adequadas (clareza nível 5) que pudemos encontrar (ver Apêndice), a grande maioria era do conceito de Integral. Tomando as proposições inadequadas (clareza nível 1) observa-se que a maior quantidade delas está relacionada com o conceito de Limite.

A TCP do mapa de A1 mostra que, ao tratar da denotação do "Teorema do Confronto, A1 apresenta uma confusão conceitual (ver figura 4) na medida em que cria uma proposição que não tem nenhuma relação com a definição apresentada pelo livro de Guidorizzi, por

exemplo, Guidorizzi (2001, p.90) enuncia o Teorema do Confronto da seguinte maneira: "Sejam f, g, h três funções e suponhamos que exista $r > 0$ tal que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para $0 < |x - p| < r$. Nestas condições, se $\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x)$ então $\lim_{x \to p} g(x) = L$."

Comumente falando, se g é uma função limitada inferior e superiormente por f e h respectivamente, e se estas possuem limite igual a um valor L quando x tende a p, então g apresenta o mesmo valor L como limite quando x tende a p.

Ainda sobre, o aluno não conseguiu mostrar nenhuma relação que se aproximasse com esta afirmação, apresentando assim uma proposição inadequada indicando, a nosso ver, não saber diferenciar aquilo que ele citou na TCP daquilo que se adequa.

Os estudos posteriores podem ser prejudicados devido à falta de solidez na compreensão dos conceitos. Segue o recorte.

Quadro 2- Recorte de proposição Nível 1 da TCP de A1

do confronto	é denotado por	$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Fonte: do autor.

Segue o mesmo mapa, anteriormente apresentado, com as indicações de tais diferenciações progressivas mostrando também a não inclusão de reconciliações integrativas.

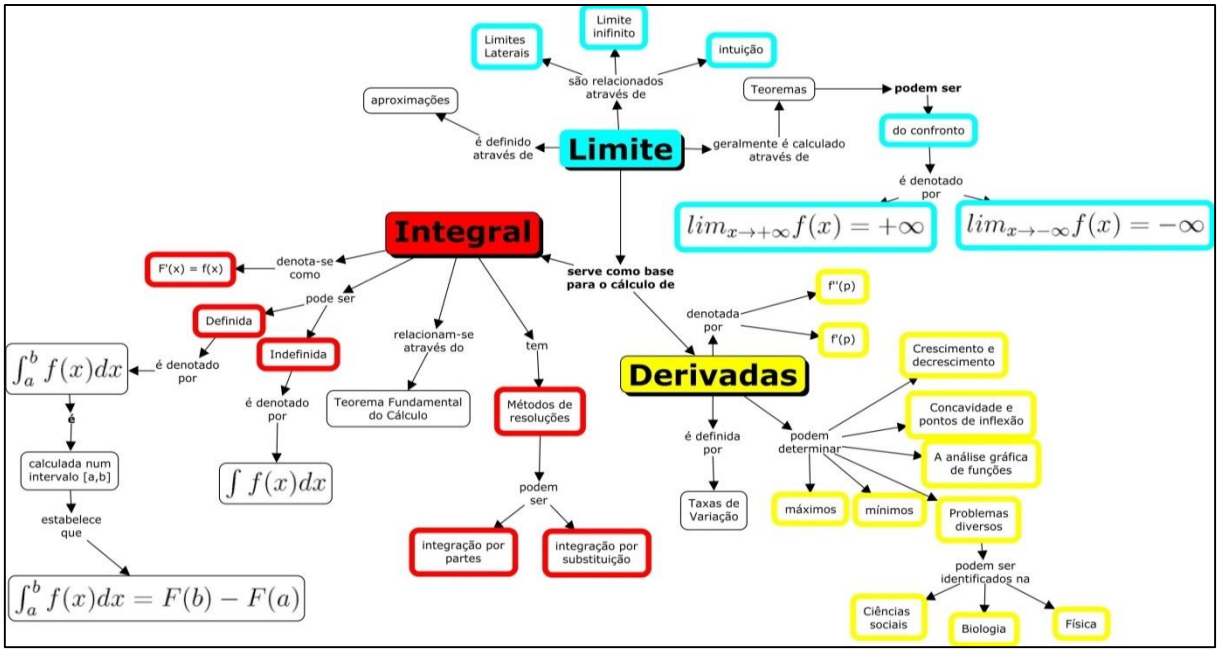


Figura 5 - Indicações das Diferenciações Progressivas do Mapa de A5
Fonte: do autor

Aluno A2

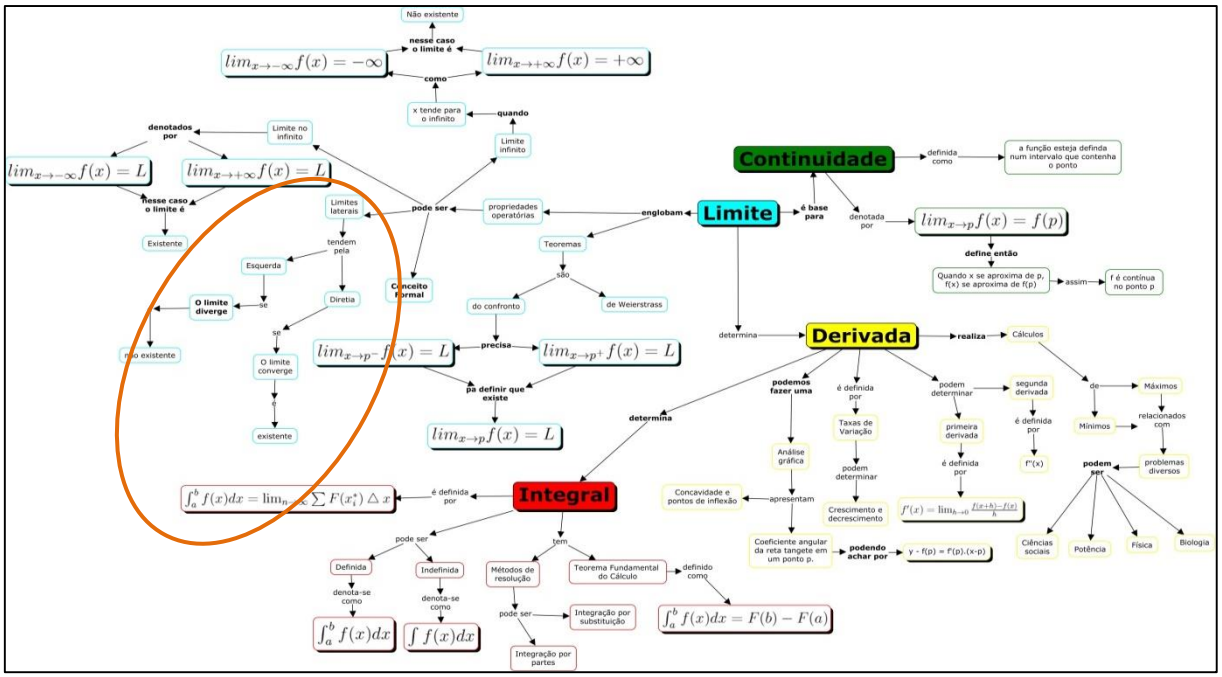


Figura 6 - Mapa Conceitual de A2
Fonte: do autor

Na construção de A2, vemos que A2 também não conseguiu realizar reconciliações significativas entre Limite e Continuidade, Derivada e/ou Integral. É fato que o aluno descreveu em uma das proposições que "Limite é base para continuidade" o que é uma proposição adequada, mas ao explicitar e não explicar a consequência da causa, cai na questão que Cañas e Novak (2006) chamam de "Mapas conceituais Descritivos" que são estes, diretamente ligados com o pensamento estático.

Em relação a A1 o discente apresentou mais diferenciações progressivas no conceito de Limite e incluiu o conceito de Continuidade. Ainda em comparação com A1, a evidência da não utilização de relações entre os conceitos vai ficando cada vez mais clara. É como se cada conceito interagisse apenas dentro de seus conceitos mais específicos. Ilhados.

Como proposições inadequadas, resolvemos trazer à tona as ideias que A2 declara nas proposições:

Quadro 3 - Recorte das Proposições Nível 1 da TCP de A2

Direita	se	O limite converge

Esquerda	Se	O limite diverge

Fonte: do autor

O recorte anterior mostra que o aluno utiliza os termos "converge" e "diverge" relacionando-os com as ideias de Limite Laterais (direita e esquerda)[ii] e que de acordo com os autores base, relacionam-se apenas quando o ponto p na equação $\lim_{x \to p^+} f(x) = +\infty$ é uma assíntota vertical.

O que torna a proposição inadequada se deve ao fato dos limites laterais poderem convergir ou divergir sem que isto esteja pré-determinado pela aproximação ser pela direita ou pela esquerda. Ou seja, de acordo como o aluno apresentou, não conseguimos enxergar relação alguma que pudéssemos classificar tais proposições como adequadas.

Limites laterais, segundo os livros de Stewart (2010) e Guidorizzi (2001) são simbolizados por $\lim_{x \to p^-} f(x) = L$ quando x tende a p por valores menores que ele e por $\lim_{x \to p^+} f(x) = L$ quando tende por valores maiores. Dizemos no primeiro caso que o x tende a p pela esquerda e no segundo que x tende a p pela direita. Os termos "converge" e "diverge" são utilizados, geralmente, para expressar quanto a existência e a não existência do limite, respectivamente.

O aluno até mostra na sua construção algumas proposições que, de certa forma, são adequadas ao envolver a ideia de limites laterais, mas que ainda não se mostram robustos na sua cognição, baseando-se em suas proposições destacadas no quadro 3.

Segue o mapa evidenciando as diferenciações progressivas.

[ii] Observar a figura 6 para entender o contexto de "direita" e "esquerda" presente na TCP (Quadro 5).

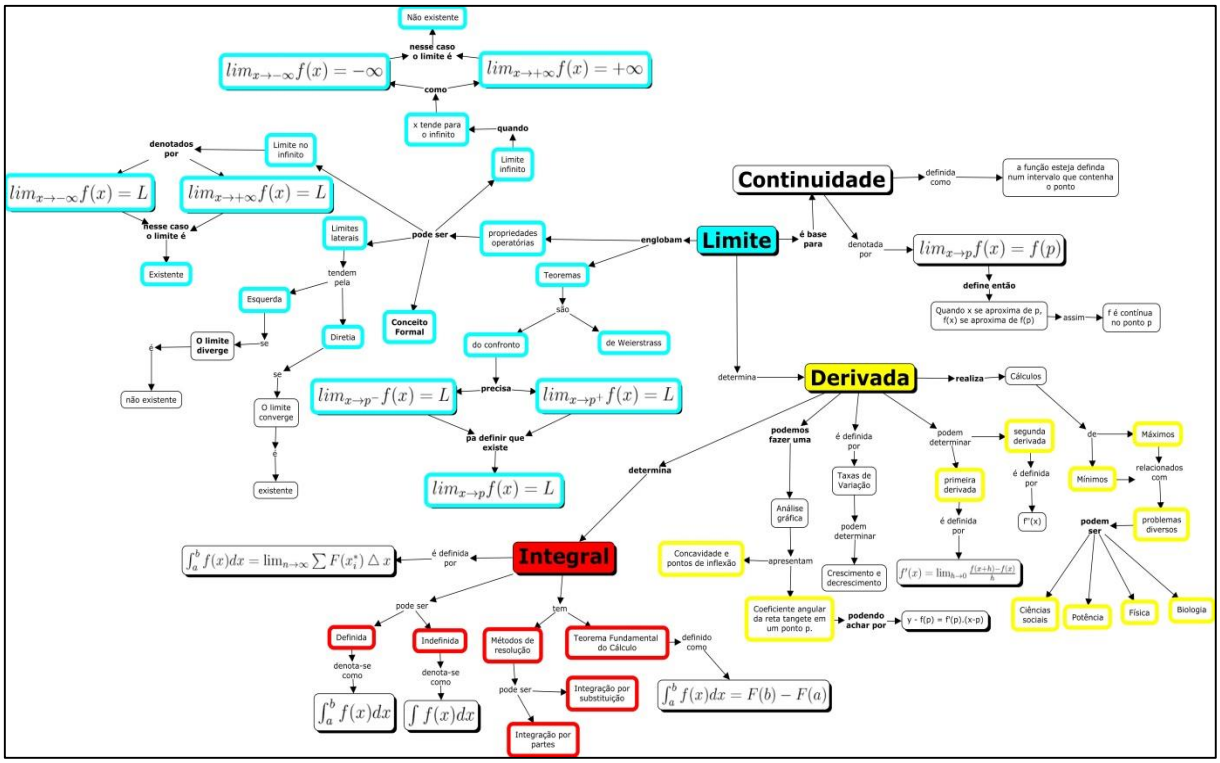


Figura 7 - Indicações das Diferenciações Progressivas do Mapa de A2
Fonte: do autor

Aluno A3

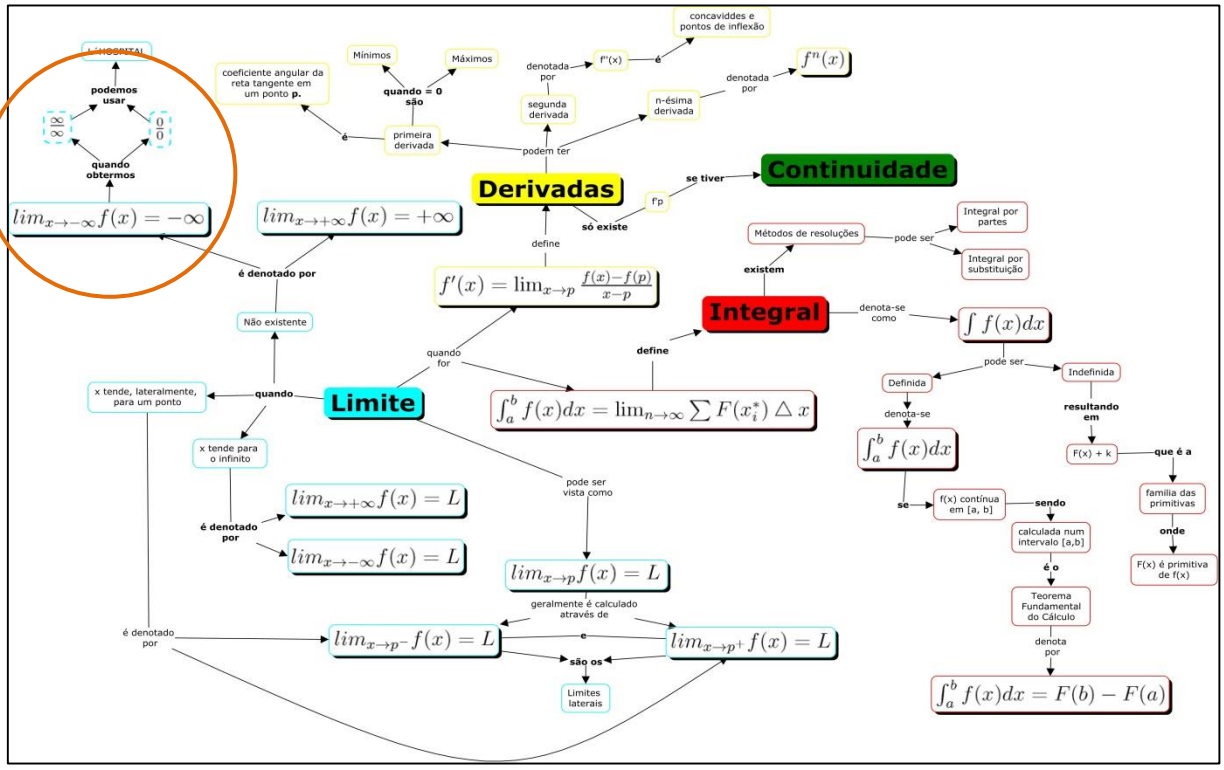


Figura 8 - Mapa Conceitual de A3
Fonte: do autor

O aluno traz uma proposição inadequada que nos chamou atenção em relação às outras. Tal proposição se resume a ideias de limites infinitos no infinito relacionados com indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ e se faz na TCP como:

Quadro 4 - Recorte das Proposições Nível 1 da TCP de A3

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	quando obtermos	$\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$

Fonte: do autor

Esses limites infinitos no infinito estão ligados a ideias que envolvem divergências e define-se, de acordo com o livro de Stewart (2010, p. 123), indica que "valores de $f(x)$ tornam-se grande quanto x se torna grande". O mesmo autor define tal tipo de limite como:

> Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ significa que para todo positivo M existe um correspondente número positivo N tal que se $x > N$ então $f(x) > M$

As mesmas proposições mostradas pelo aluno podem aparecer em $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ como mostrado acima ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ Porém, independente da forma que aparece tal limite, em nenhum se inclui critérios de indeterminações como descrito por A3.

Ao saber, indeterminações, no contexto apresentado, são "expressões que conjugam infinitésimos com infinitamente grandes, infinitésimos com infinitésimos ou infinitamente grandes com infinitamente grandes, de tal forma que não podemos aferir de imediato o valor desse limite, caso exista" [iii]. Elas, da maneira como apresentadas pelo discente, estão fora do contexto da divergência de limites.

Ao realizar tal confusão conceitual, o aluno mostra que sua compreensão, quanto a problemas de valores indeterminados, ainda não se encontra tão preparada, pois o mesmo não consegue relacionar à essência do significado que tal conceito traz consigo.

Ao seguir, podemos observar um pouco mais daquilo que observamos nos alunos anteriormente vistos, ou seja, poucas diferenciações progressivas, limitando-se apenas ao básico e a falta, quase que total, de reconciliações integrativas.

[iii] *indeterminações* in Artigos de apoio Infopédia [em linha]. Porto: Porto Editora, 2003-2016. [acesso em: 2016-11-25]. Disponível em: https://www.infopedia.pt/$indeterminacoes

Esse é um problema visto constantemente que podemos aqui enunciar como: “Os alunos veem o CDI de forma isolada. Primeiro Limite, depois Continuidade, mais adiante Derivada e logo e por fim, Integral.” E as relações entre tais? Continuam como ilhas isoladas? Há a necessidade de um enfoque investigativo que tratem dessas questões.

Segue o mapa com as indicações das diferenciações progressivas encontradas no MCM de A3.

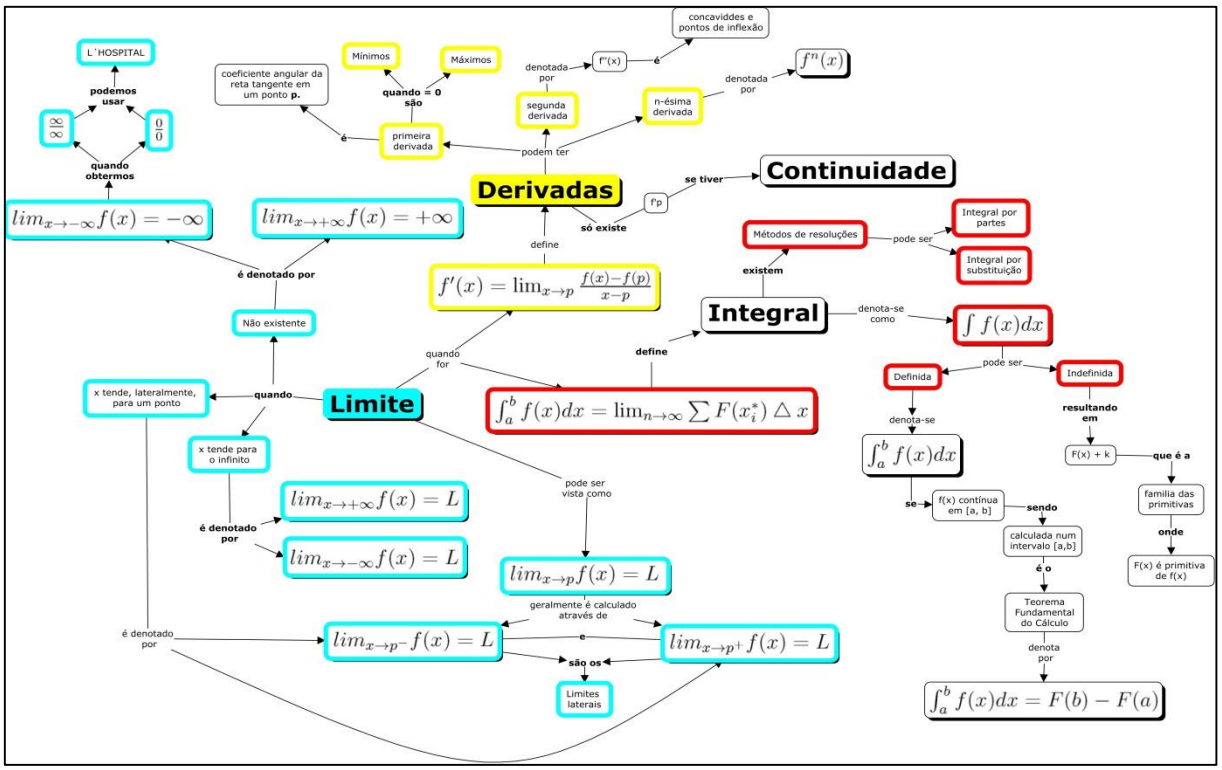


Figura 9 - Indicações das Diferenciações Progressivas do Mapa de A3
Fonte: do autor

Aluno A4

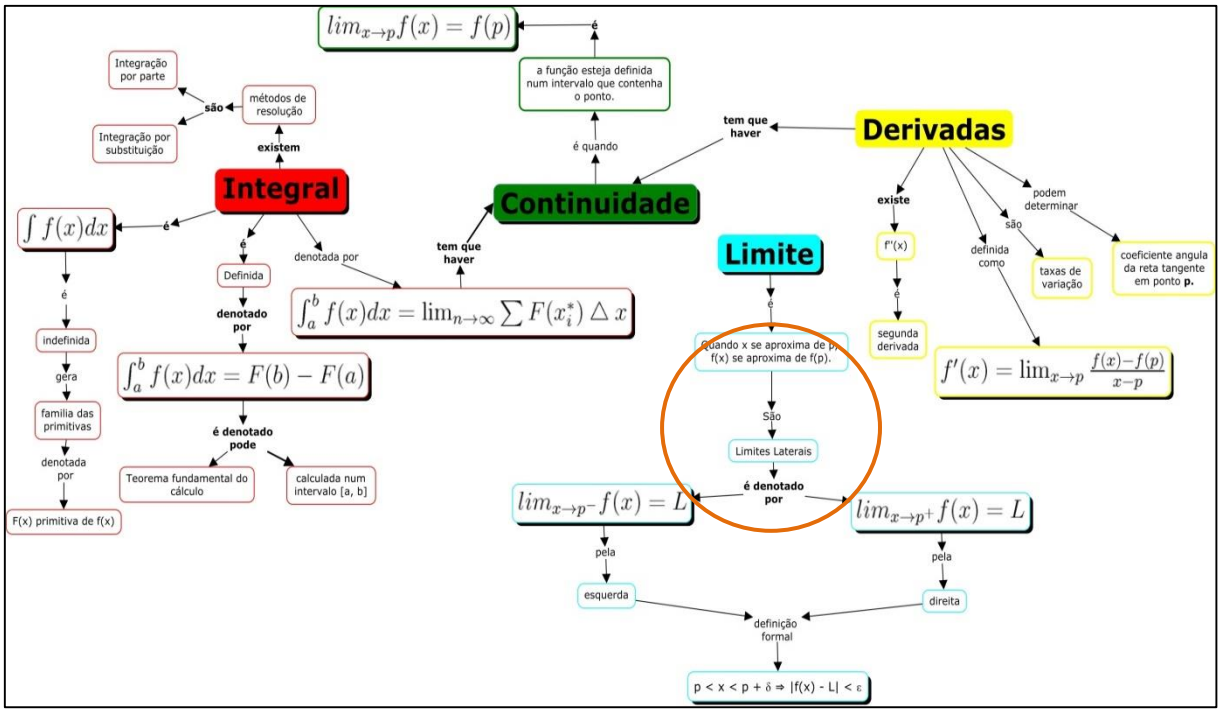


Figura 10 - Mapa Conceitual de A4
Fonte: do autor

Observando a construção de A4, podemos destacar como a proposição mais inadequada aquela onde usou a seguinte descrição:

Quadro 5 - Recorte das Proposições Nível 1 da TCP de A4

Quando x se aproxima de p, $f(x)$ se aproxima de $f(p)$.	são	Limites Laterais

Fonte: do autor

Tratando a proposição como uma unidade semântica (ver figura 1), observamos que no Conceito A, o discente traz a ideia de Continuidade indicando que a mesma é Limites Laterais.

Tal proposição é inadequada pelo fato de que: "Uma função f é contínua em um número a se $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$ (Stewart, 2010, p. 107)" que difere da definição de Limites Laterais vista anteriormente.

Isso é uma confusão grave, pois evidencia que o aluno não consegue diferenciar tais conceitos, que por vez são importantes para o estudo inicial e aprofundado de CDI. Desta forma consideramos, ser importante que seja superada durante o curso, a fim de que consiga progredir nos seus estudos e num futuro breve não venha a ser retido em alguma das disciplinas que envolve o contexto.

Segue o mapa com as indicações das diferenciações utilizadas pelo aluno. Nele pode-se observar que o mesmo não conseguiu diferenciar bem os conceitos, mostrando uma quantidade inferior àquelas exibidas pelos outros participantes da pesquisa (mesmo que não adequadas) e não conseguiu relacionar o conceito de Limite com nenhum outro dos envolvidos (Continuidade, Derivada e Integral), mesmo aquele sendo base para estes, conforme no livro de Stewart (2010).

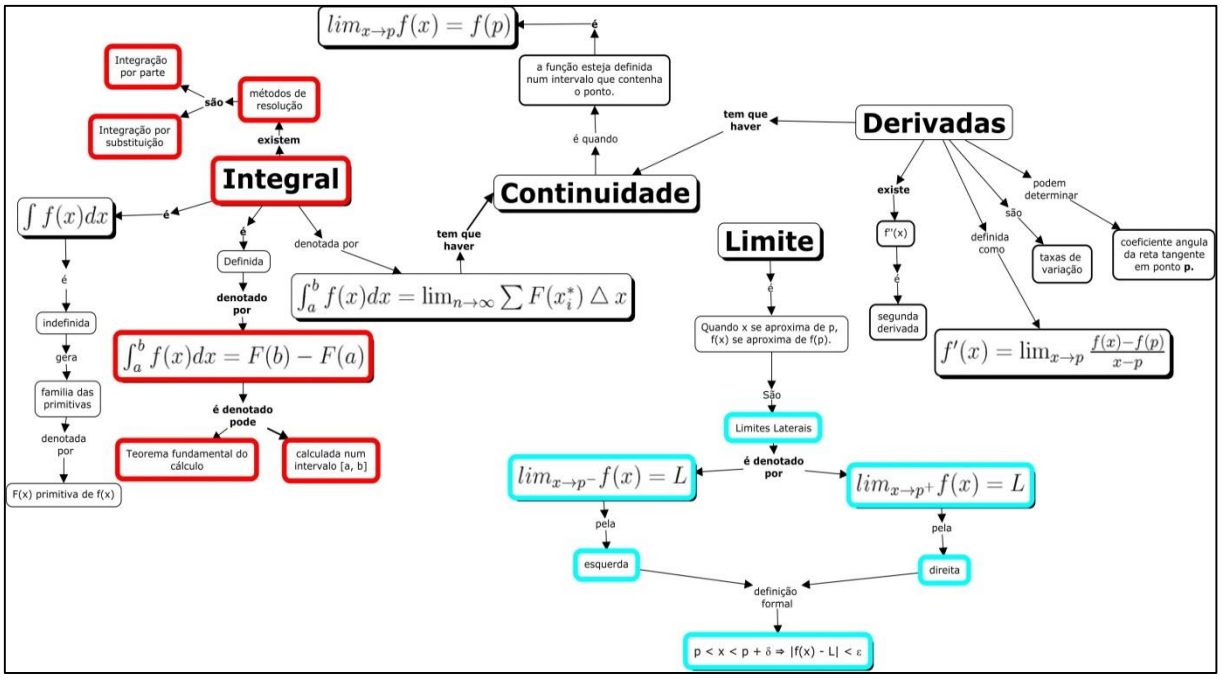


Figura 11 - Indicações das Diferenciações Progressivas do Mapa de A4
Fonte: do autor

Aluno A5

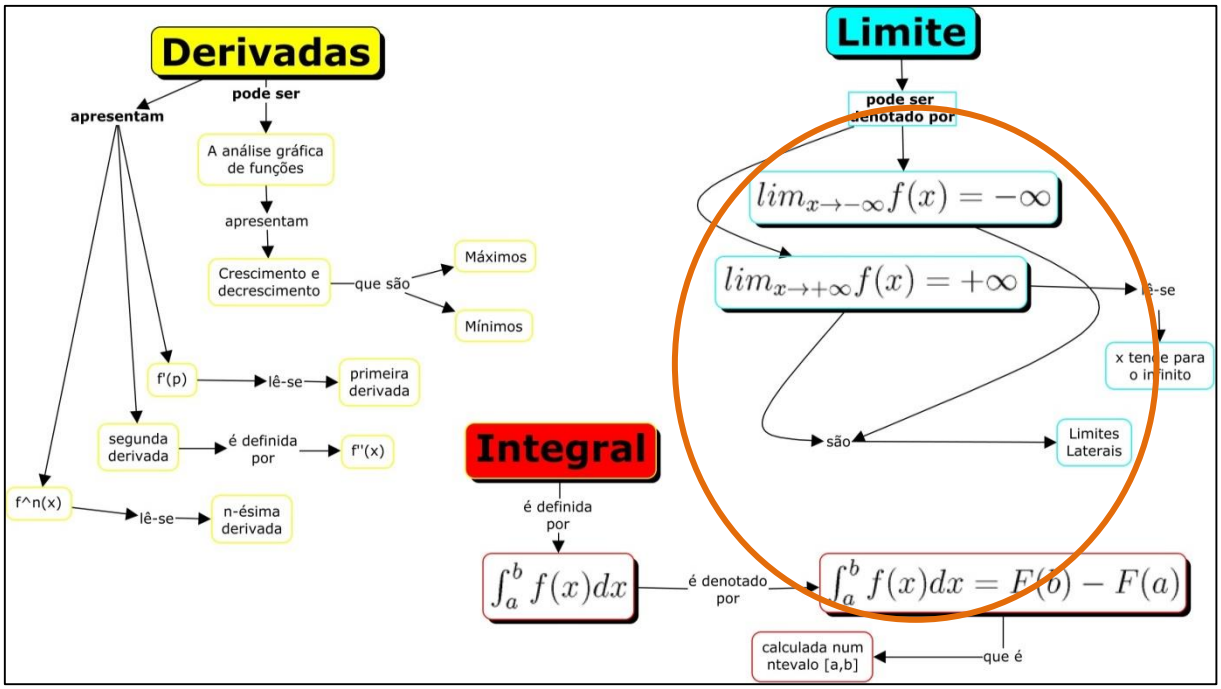


Figura 12 - Mapa Conceitual de A5
Fonte: do autor

Ao analisar a TCP de A5 junto ao seu mapa, podemos constatar uma baixa quantidade de relações significativas entre os conceitos ali expostos, além da não inclusão de Continuidade e da falta de reconciliações integrativas entre os blocos de conceitos.

A proposição que analisaremos a seguir foi a mais inadequada, segundo os autores deste trabalho.

Segue um recorte da TCP evidenciando a proposição descrita por A5

Quadro 6 - Recorte das Proposições Nível 1 da TCP de A5

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	são	Limites Laterais

Fonte: do autor

Novamente, podemos observar que há a presença de ideias envolvendo Limites Infinitos com Limites Laterais no sentido de que as condições contidas no Conceito A da unidade semântica exposta pelo quadro 6 implicam na do Conceito B.

Como vimos anteriormente em A1 e A3, tais denotações definem a divergência de limites onde, não necessariamente, são Limites Laterais. Tais limites estão intimamente ligados a ideia de se aproximar de um valor específico pela sua direita ou esquerda, o que não é possível fazer quando $x \to \pm\infty$.

Este conceito engloba muito mais do que aquilo que foi apresentado por A5, como já mostrado anteriormente em A2.

O aluno também apresenta confusões nesse ramo de estudo do CDI, não conseguindo diferenciar definições, indicando um conhecimento superficial daquilo que entendemos pelo conceito.

Segue a Figura 13 com indicações mostrando as diferenciações que progrediram durante a construção do MCM, evidenciando um conhecimento estático e impossibilitado de realizar conexões entre as partes do mapa e, até mesmo, de progredir ainda mais.

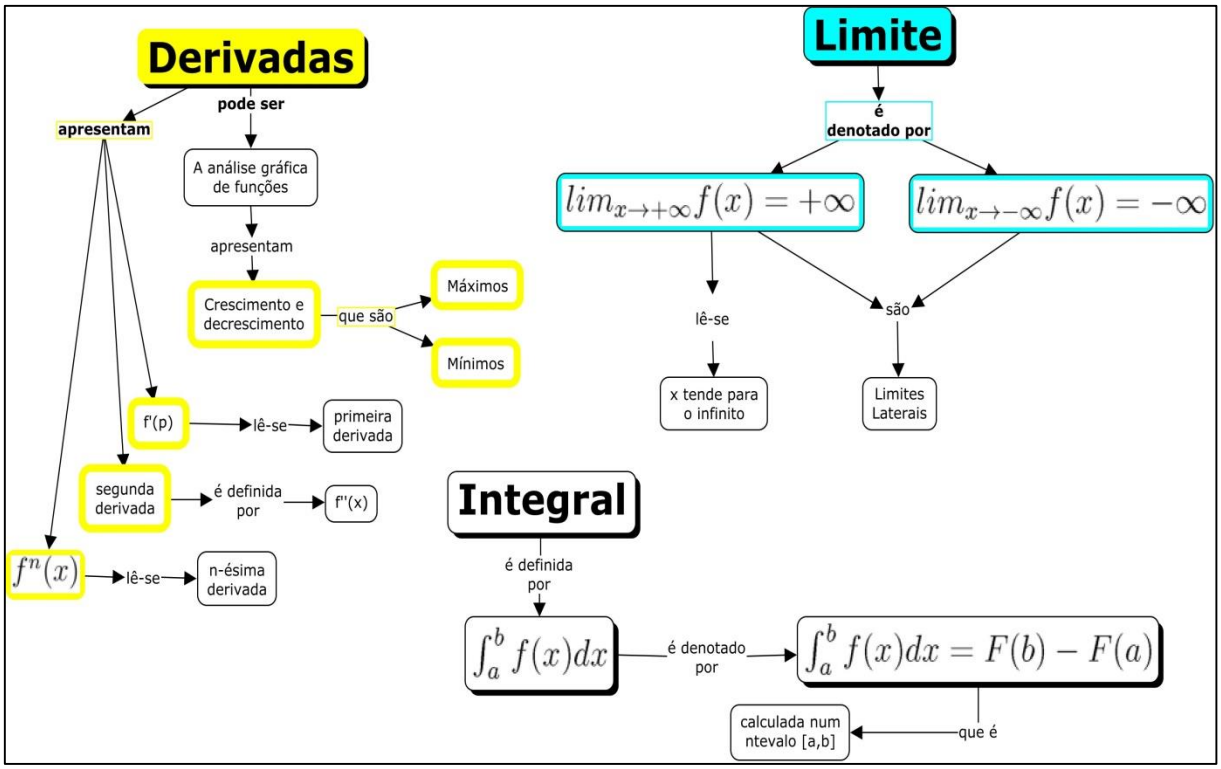


Figura 13 - Indicações das Diferenciações Progressivas do Mapa de A5
Fonte: do autor

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante dos dados obtidos, podemos notar que os alunos não conseguem estabelecer uma relação entre o Limite e os outros conceitos derivados a este. Eles, de certa forma, mostram algumas proposições adequadas, mas ainda, de forma isolada. Ou seja, na grande maioria das vezes, eles não mostram reconciliações integrativas. São blocos de conteúdo dispostos individualmente no mapa.

Se pensássemos no mapa como um plano cartesiano, é como se cada bloco de conceitos (Limite, Continuidade, Derivada e Integral) pertencessem a um quadrante.

Podemos atribuir tais resultados, como uma das n hipóteses, à forma como o conteúdo é apresentado, seja pelo professor, pelos livros didáticos ou, pelo que aponta Santos e Cunha (2015), por o ensino de CDI ser tratado priorizando listas de exercícios e uso exaustivo do livro didático, sem nenhuma reflexão sobre as causas e influências de um conceito em outro. Isso, de acordo como visto, propicia um conhecimento estático diretamente ligado a uma aprendizagem superficial de curto prazo ou seja, tudo aquilo que não queremos.

Ainda em nossa análise, notamos que os alunos cometem confusões ao tratar-se das linguagens matemáticas relativas ao Limite e os derivados a este, com todas simbologias. Isso pode causar uma certa dificuldade nos estudos de Cálculo 2, Cálculo 3 e principalmente Análise Real, onde todas as notações e linguagens, com seus símbolos, definem o estudo aprofundado do CDI. Não estamos aqui dizendo que a mudança de postura do professor em sala de aula, se mudada, passando a incluir todas as simbologias, teríamos um resultado mais satisfatório. Não é isso! Queremos apenas alertar para o equilíbrio daquilo que se ensina, da maneira como se ensina e da inclusão de diferentes óticas de um mesmo conceito.

Apesar do conceito de Limite ser o gerador para todo o estudo de CDI, como mostrado no tópicos que abordamos num viés mais histórico e até mesmo levando em consideração ao que os autores usam em seus livros didáticos, os alunos investigados não conseguem estabelecer uma relação adequada entre os conceitos que possam nos evidenciar que os conceitos estudados posteriormente são gerados a partir do conceito de Limite. Como já mostrado acima, é como entendessem os conceitos de CDI (Limites, Continuidade, Derivadas e Integral) como termos isolados, de meras aplicações de fórmulas, *macetes*, *bizus* e aprendizagem memorística a curto prazo.

Na maioria dos casos analisados, houve uma confusão conceitual entre aquilo que de fato são Limites infinitos, sendo este, muitas vezes relacionados com Teorema do Confronto,

Limites Laterais e Indeterminações; Continuidade, mesmo sendo importante, quase não e citada nos mapas dos alunos e, mesmo quando citadas, são pobres de significados.

As faltas de diferenciações progressivas e o quase não uso de reconciliações integrativas também são preocupantes, pois, conforme Moreira (2012), quando se tem um conceito bem diferenciado, ele se torna cada vez mais estável, mais claro e o aprendiz dará a ele um significado.

Nada pode explicar tais resultados obtidos. Temos a crença que muitos são os fatores da não apreensão de um determinado conceito, seja esse fator psicológico, interno ou externo. O que temos apenas é uma aproximação oferecida pelos MCM de estruturas cognitivas de enormes complexidades e ricas em incertezas.

Esperamos que este trabalho possa ser valioso para aqueles professores pesquisadores que buscam analisar, entender e avaliar o trabalho docente com o intuito de aprimorar cada vez mais a prática que move a grande maioria preocupada com a aprendizagem, sempre mais significativas, de conceitos da matemática do ensino superior.

7. REFERÊNCIAS

ABREU, O. H. **Discutindo algumas relações possíveis entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual no ensino de limites e continuidade em Cálculo I.** Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2011.

BARDI, J. S. **A Guerra do Cálculo.** 2 ed. Rio de Janeiro: Record, 2010.

BARONI, R. L. S.; OTERO-GARCIA, S. C. **Aspectos da História da Análise Matemática de Cauchy a Lesbegue.** São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014. Disponível em: <http://200.145.6.238/bitstream/handle/11449/126211/ISBN9788579836015.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.Acesso em: 29/10/16.

BRITO, A. J. ; CARDOSO, V. C., Uma abordagem Histórico-Pedagógica dos Fundamentos do Cálculo Diferencial: Reflexões Metodológicas. **Zetetikê: Revista de Educação Matemática**, Campinas-SP, v. 5, n. 7, p.129-144, jan/jun, 1997.

CAÑAS, A. J. ; CARVALHO, M. M., Mapas Conceituais e IA: Uma União Improvável? **Revista Brasileira de Informática na Educação**, v.13, n.1, 2005.

CORNU, B. **Limits.** In: TALL, D. **Advanced mathematical Thinking.** Dordrecht/Boston/London. Kluwer Academic Publisher, v. 11. p. 153-166, 1991.

GARBI, G. G.; **O Romance das Equações Algébricas.** 3 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

GUIDORIZZI. L. H. **Um Curso de Cálculo Vol. 1.** 5 ed. LTC, 2001.

MOREIRA, M. A. **O mapa conceitual como instrumento de avaliação da aprendizagem**. Educação e Seleção. v. 10, p.17-34, 1984.

MOREIRA, M. A. O que é Afinal, Aprendizagem Significativa? **Qurriculum: Revista de Teoria, Investigação e Prática Educativa.** La Laguna, Espanha, n. 25, p. 29-56, 2012.

MOREIRA, M. A.; Mapas Conceituais. **Caderno Catarinense de Ensino de Física,** Florianópolis, 3(1): p. 17-25, 1986.

MOREIRA, S. M., **Entre o Pensar Ser, O Pensar e o Ser. Um Estudo sobre a Pré-Disposição de Professores Prospectivos à Subversão.** Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo, 2011.

NOVAK, J. D. ; GOWIN, D. B. **Learning How to Learn**. Nova Iorque: Cambridge University Press, 1984.

O que são proposições? Direção: Paulo Correia. Tutorial, 12'56''. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=5ZV8SUu1vHI > Acesso em: 31/10/2016

Para que serve a Tabela de Clareza Proposicional (TCP)? Direção: Paulo Correia. Tutorial, 13'24''. Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=BnhzB_eq7VI > Acesso em: 25/10/2016

REIS, F. S. **A Tensão entre o Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos.** Tese de Doutorado. Faculdade de Educação. Universidade de Campinas. Campinas, 2001.

RUIZ-MORENO, L.; et al. Mapa Conceitual: Ensaiando Critérios de Análise. **Revista Ciência & Educação,** São Paulo, v. 24, n.3, p. 453-463, 2007.

SANTOS, L. D. S.; CUNHA, K. C. **Um estudo sobre o ensino e aprendizagem no conceito de limite de função a luz da Teoria de Imagem e Definição Conceitual.** In: Congresso de Iniciação Científica, 23. Recife, 2015.

STEWART, J. **Cálculo Volume 1.** 6 ed. São Paulo: Cencage Learning, 2010.

VIEIRA, D. J. C.. Ensino Aprendizagem do Conceito de Limite. **Revista Millenium** Departamento de Matemática. Universidade de Aveiro, v. 16. 1999.

ZUCHI, Ivanete. **A Abordagem Do Conceito De Limite Via Sequência Didática: Do Ambiente Lápis Papel Ao Ambiente Computacional.** Florianópolis UFSC. 2005. 254 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção.

.

8. APÊNDICES

Quadro 7. TCP do A1

CONCEITO A	TERMO	CONCEITO B	CLAREZA
do confronto	é denotado por	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	1
Teoremas	podem ser	Do confronto	5
Derivadas	podem determinar	Crescimento e decrescimento/ Concavidade e pontos de inflexão/ A análise gráfica de funções/ Problemas diversos/ Mínimos/ Máximos	5/ 5/ 4/ 2/ 5/ 5
Derivadas	é definida por	Taxas de Variação	3
Derivadas	denotada por	f'(p) / f''(p)	2
Integral	pode ser	Definida/ Indefinida	5
Problemas diversos	podem ser identificados na	Biologia/ Física/ Ciências Sociais	4
$\int_a^b f(x)dx$	é	Calculada num intervalo [a, b]	5
Calculada num intervalo [a,b]	estabelece que	$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$	5
Definida	é denotado por	$\int_a^b f(x)dx$	5
Indefinida	é denotado por	$\int f(x)dx$	5
Integral	relacionam-se através do	Teorema Fundamental do Cálculo	2
Integral	tem	Métodos de resoluções	5
Integral	denota-se como	$F'(x) = f(x)$	1
Limite	geralmente é calculado através de	Teoremas	4

Limite	são relacionados através de	Limites Laterais/ Limite infinito/ Intuição/	4/ 1/ 3
Limite	é definido através de	Aproximações	4
Limite	serve como base para o cálculo de	Derivadas / Integral	5
Métodos de resoluções	podem ser	Integração por partes / Integração por Substituição	4

Fonte: do autor

Quadro 8. TCP de A2

CONCEITO A	TERMO	CONCEITO B	CLAREZA
$\lim_{x\to p^-} f(x) = L$ e $\lim_{x\to p^+} f(x) = L$	para definir que existe	$\lim_{x\to p} f(x) = L$	4
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	nesse caso o limite é	Não existente	5
Direita	se	O limite converge	1
do confronto	precisa	$\lim_{x\to p^-} f(x) = L$ E $\lim_{x\to p^+} f(x) = L$	2
Esquerda	se	O limite diverge	1
Limite	englobam	Teoremas/ Propriedades Operatórias	5/ 5
Limite	é base para	Continuidade	5
Limite	determina	Derivada	5
Limite infinito	quando	x tende para o infinito	2
Limite no infinito	denotados por	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$	4
Limites laterais	tendem pela	Direita/ Esquerda	5/ 5
O limite converge	é	Existente	5
O limite diverge	é	não existente	5
Propriedades operatórias	podem ser	Limite no infinito/ Conceito Formal Limite infinito Limites laterais	1/ 1/ 1/ 1
Teoremas	são	de Weierstrass/ do confronto	5/ 5
x tende para o infinito	como	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	5/ 5
Análise gráfica	apresentam	Coeficiente angular da reta tangente em um ponto p./ Concavidade e pontos de inflexão	2/ 4
Coeficiente angular da reta tangente em um ponto p.	podendo achar por	$y - f(p) = f'(p).(x - p)$	4
Derivada	podem determinar	Primeira derivada / Segunda derivada	5/ 5
Derivada	determina	Integral	3
Derivada	podemos fazer	Análise gráfica	5

	uma		
Derivada	é definida por	Taxas de Variação	3
Máximos/ Mínimos	relacionados com	Problemas diversos	5/ 5
Primeira derivada	é definida por	$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h}$	5
Problemas diversos	podem ser	Física/ Potência/ Ciências Sociais/ Biologia	5/ 2/ 5/ 3
Segunda derivada	é definida por	$f''(x)$	3
Taxas de Variação	podem determinar	Crescimento e decrescimento	5
$\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$	define então	Quando x se aproxima de p, f(x) se aproxima de f(p)	5
Continuidade	denotada por	$\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$	5
Continuidade	definida como	a função esteja definida num intervalo que contenha o ponto	3
Quando x se aproxima de p, f(x) se aproxima de f(p)	assim	f é contínua no ponto p	5
Definida	denota-se como	$\int_a^b f(x)dx$	5
Indefinida	denota-se como	$\int f(x)dx$	5
Integral	é definida por	$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum F\,(x_i^*)\,\Delta x$	4
Integral	pode ser	Definida/ Indefinidas	5/ 5
Integral	tem	Teorema Fundamental do Cálculo/ Métodos de Resolução	3/ 5
Métodos de resolução	pode ser	Integração por substituição/ Integração por partes	5/ 5
Teorema Fundamental do Cálculo	definido como	$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$	5

Fonte: do autor

Quadro 9. TCP de A3

CONCEITO A	TERMO	CONCEITO B	CLAREZA
$\lim_{x \to p^-} f(x) = L$ e $\lim_{x \to p^+} f(x) = L$	são os	Limites laterais	5
$\lim_{x \to p} f(x) = L$	geralmente é calculado através de	$\lim_{x \to p^-} f(x) = L$ e $\lim_{x \to p^+} f(x) = L$	3
$\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$	podemos usar	L´HOSPITAL	3
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$	quando obtermos	$\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$	1
Limite	pode ser vista como	$\lim_{x \to p} f(x) = L$	3
x tende para o infinito	é denotado por	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$	1
x tende, lateralmente, para um ponto	é denotado por	$\lim_{x \to p^-} f(x) = L$ e $\lim_{x \to p^+} f(x) = L$	4/ 4
$f'(x) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$	define	Derivadas	5
Derivadas	podem ter	Segunda derivada/ Primeira derivada/ n-ésima derivada	5/ 5/ 5
f"(x)	é	Concavidades e pontos de inflexão	2
n-ésima derivada	denotada por	Direita/ Esquerda	1/ 1
Primeira derivada	quando = 0, são	Mínimos/ Máximos	4/ 4
Primeira derivada	é	coeficiente angular da reta tangente em um ponto p.	3
Segunda derivada	denotada por	f"(x)	5
Métodos de resoluções	pode ser	Integral por partes	5
$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum F\,(x_i^*)\,\Delta x$	define	Integral	3
$\int f(x)dx$	pode ser	Definida/ Indefinida	1/ 3
$\int_a^b f(x)dx$	se	f(x) contínua em [a, b]	2
Calculada num intervalo [a, b]	é o	Teorema Fundamental do	3

		Cálculo	
Definida	denota-se	$\int_a^b f(x)dx$	5
$F(x)+k$	que é a	Família das primitivas	5
f(x) contínua em [a, b]	sendo	Calculada num intervalo [a, b]	1
Família das primitivas	onde	F(x) é primitiva de f(x)	2
Indefinida	resultando em	$F(x)+k$	5
Integral	denota-se como	$\int f(x)dx$	3
Integral	existem	Métodos de resoluções	5
Métodos de resoluções	pode ser	Integral por substituição	5
Teorema Fundamental do Cálculo	denotado por	$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$	5

Fonte: do autor

Quadro 10 - TCP de A4

CONCEITO A	TERMO	CONCEITO B	CLAREZA
$\lim_{x \to p^-} f(x) = L$	pela	Esquerda	5
$\lim_{x \to p^+} f(x) = L$	pela	Direita	5
Direita/ Esquerda	definição formal	$p < x < p + \delta \Rightarrow \mid f(x) - l \mid < \varepsilon$	5/ 1
Limite	é	Quando x se aproxima de p, f(x) se aproxima de f(p).	1
Limites Laterais	é denotado por	$\lim_{x \to p^-} f(x) = L$ e $\lim_{x \to p^+} f(x) = L$	5
Quando x se aproxima de p, f(x) se aproxima de f(p).	são	Limites Laterais	1
Derivadas	existe	$f''(x)$	2
Derivadas	podem determinar	Coeficiente angula da reta Tangente em ponto p.	5
Derivadas	definida como	$f'(x) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$	5
Derivadas	tem que haver	Continuidade	5
$f''(x)$	é	Segunda derivada	5
A função esteja definida num intervalo que contenha o ponto.	é	$\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$	1
Continuidade	é quando	A função esteja definida num intervalo que contenha o ponto.	2
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$	é denotado por	Calculada num intervalo [a, b]/ Teorema Fundamental do Cálculo	1/ 5
$\int f(x)dx$	é	Indefinida	5
Definida	denotado por	$\int_a^b f(x)dx$	5
Família das primitivas	denotada por	F(x) primitiva de f(x)	1
Indefinida	gera	Família das primitivas	5
Integral	é	$\int f(x)dx$	3
Integral	é	Definida	3
Integral	denotada por	$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum F\,(x_i^*)\,\Delta x$	5
Integral	existem	Métodos de resolução	5
Métodos de resolução	são	Integração por parte/ Integração por substituição	5/ 5

Fonte: do autor

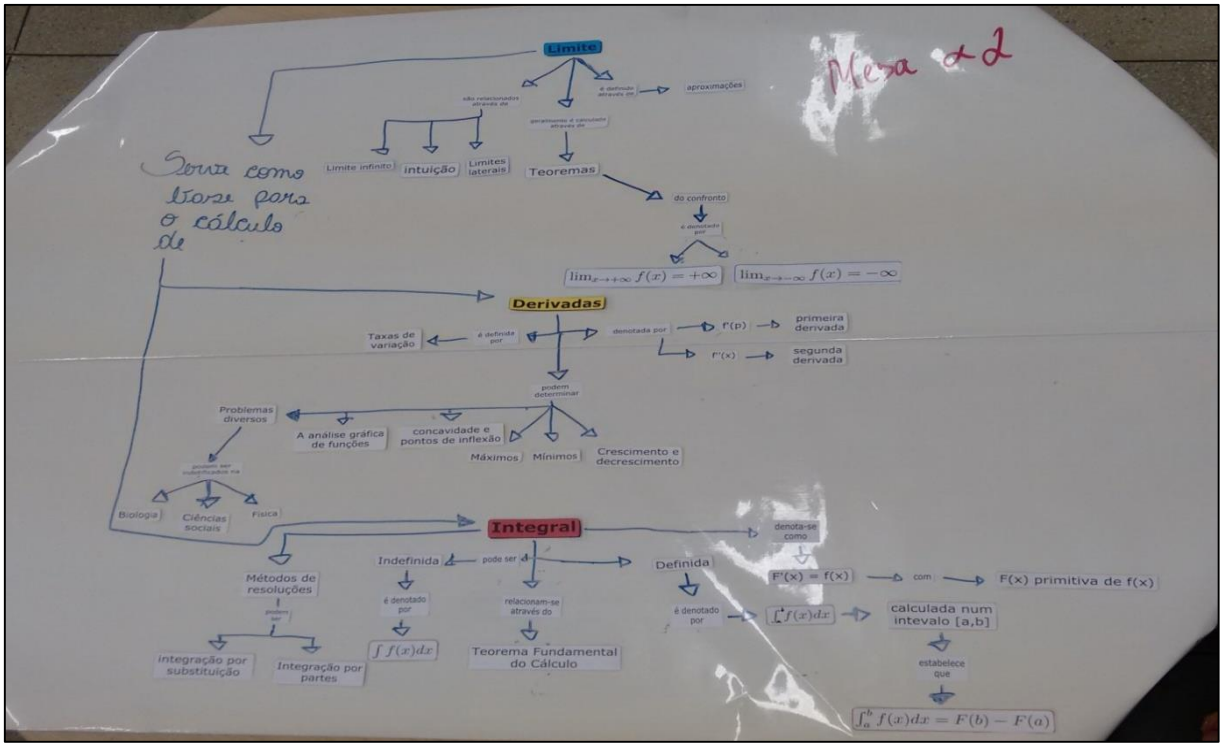
Quadro 11 - TCP do A5

CONCEITO A	TERMO	CONCEITO B	CLAREZA
Derivadas	pode ser	A análise gráfica de funções	1
Segunda derivada	é definida por	$f''(x)$	4
Derivadas	apresentam	$f^n(x)$/ $f'(p)$ Segunda derivada	3/ 3/ 3
$\int_a^b f(x)dx$	é denotado por	$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$	4
Limite	é denotado por	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	2
Crescimento e decrescimento	que são	Mínimos/ Máximos	1/ 1
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$	que é	Calculada num intervalo [a, b]	3
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	são	Limites Laterais	1
A análise gráfica de funções	apresentam	Crescimento e decrescimento	4
$f'(p)$	lê-se	Primeira derivada	5
Integral	é definida por	$\int_a^b f(x)dx$	4
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	lê-se	x tende para o infinito	3
Limite	é denotado por	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	3
$f^n(x)$	lê-se	n-ésima derivada	5

Fonte: do autor

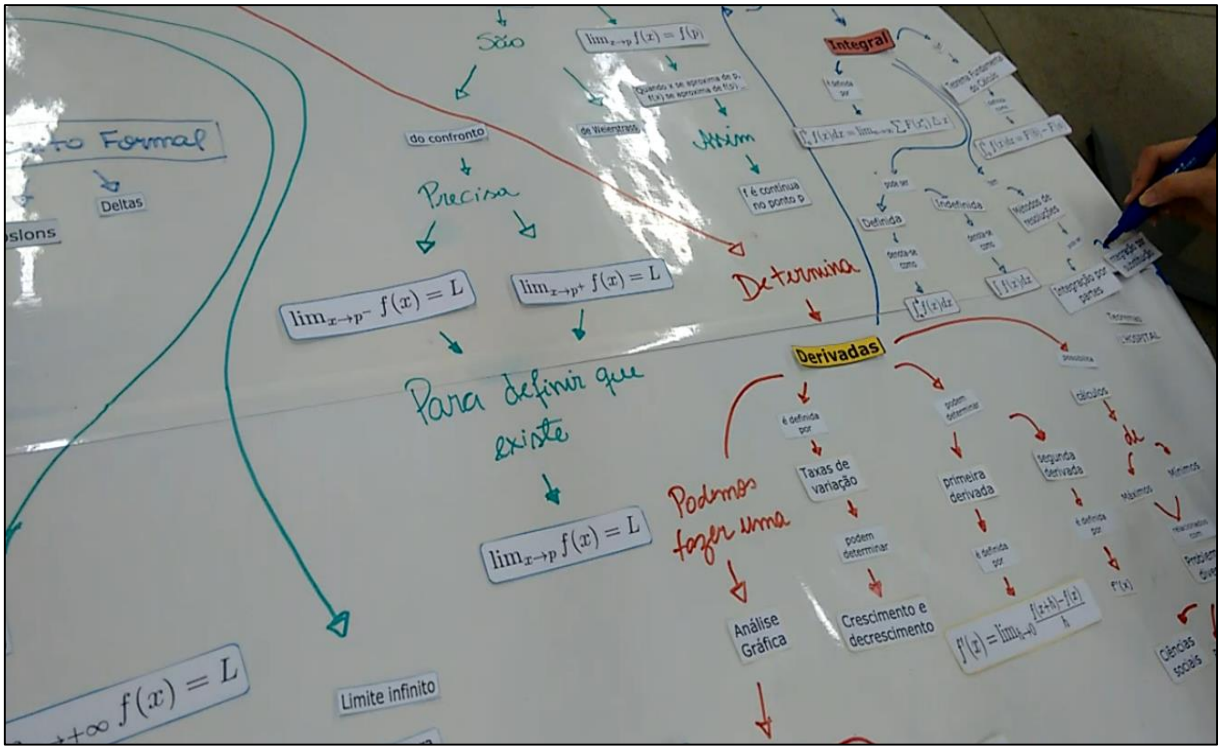
9. ANEXOS

Figura 14-MCM de A1



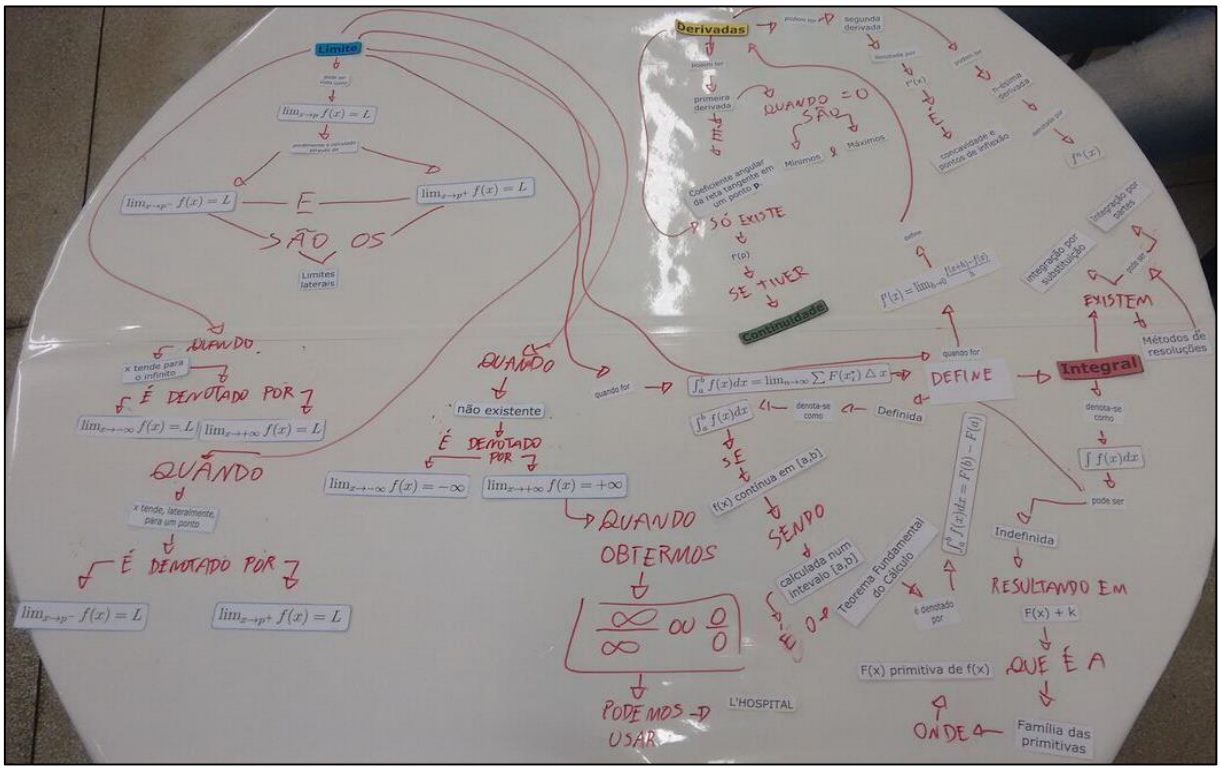
Fonte: do autor

Figura 15- MCM de A2



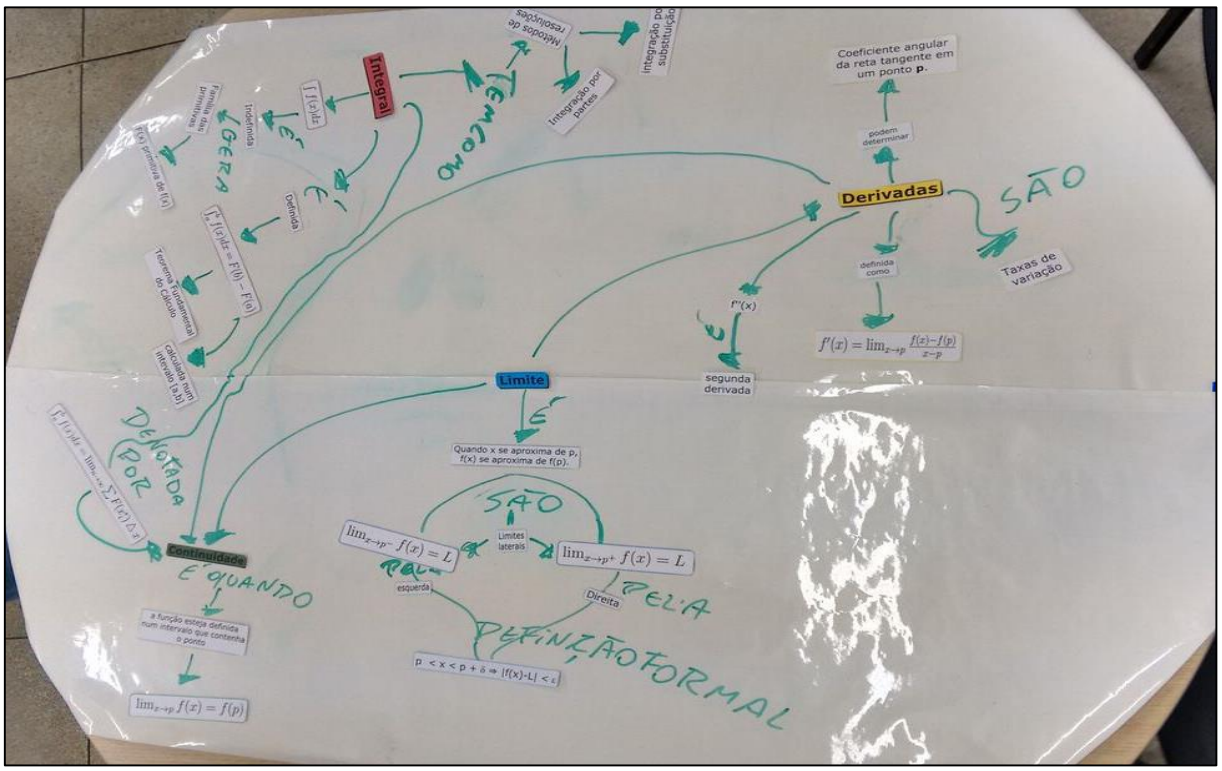
Fonte: do autor

Figura 16 - MCM de A3



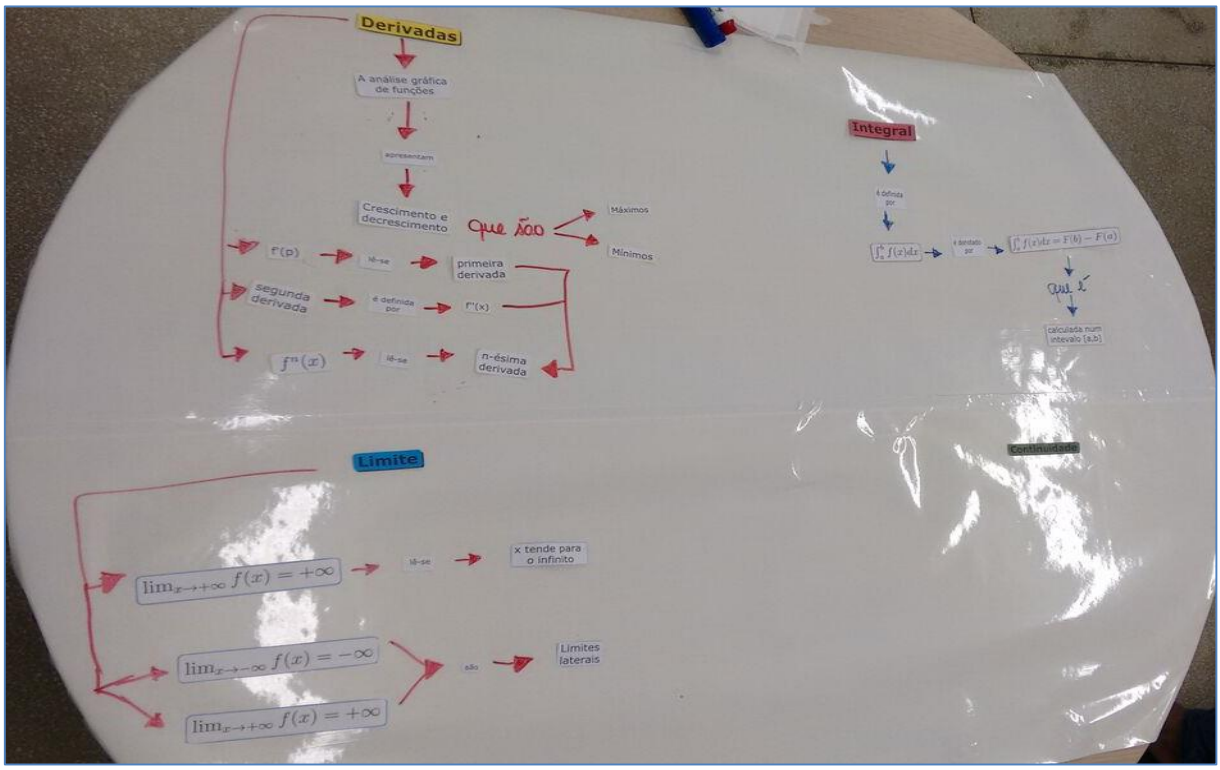
Fonte: do autor

Figura 17 - MCM de A4



Fonte: do autor

Figura 18 - MCM de A5



Fonte: do autor