UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
CURSO DE DOUTORADO

ROSINALDA AURORA DE MELO TELES

IMBRICAÇÕES ENTRE CAMPOS CONCEITUAIS NA MATEMÁTICA ESCOLAR: UM ESTUDO SOBRE AS FÓRMULAS DE ÁREA DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS

RECIFE

2007

ROSINALDA AURORA DE MELO TELES

IMBRICAÇÕES ENTRE CAMPOS CONCEITUAIS NA MATEMÁTICA ESCOLAR: UM ESTUDO SOBRE AS FÓRMULAS DE ÁREA DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Educação.

ORIENTADORA: PROFª. DRª PAULA MOREIRA BALTAR BELLEMAIN

RECIFE

2007

Teles, Rosinalda Aurora de Melo
Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas / Rosinalda Aurora de Melo Teles. – Recife : O Autor, 2007.
297 folhas : il. ; tab., graf., quadros.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CE, 2007.

Inclui bibliografia e anexos.

1. Educação matemática . 2. Educação matemática – Campos conceituais. 3. Fórmulas de área . 4. Livro didático I. Título.

37	CDU (2.ed.)	UFPE
372.7	CDD (22.ed.)	CE2007-002

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
CURSO DE DOUTORADO EM EDUCAÇÃO

IMBRICAÇÕES ENTRE CAMPOS CONCEITUAIS NA MATEMÁTICA ESCOLAR: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas

COMISSÃO EXAMINADORA

PMBaltar
Profª Drª Paula Moreira Baltar Bellemain
1º Examinador/Presidente

Prof. Dr. Jorge Tarcísio da Rocha Falcão
2º Examinador

VGFerreira
Profª. Drª Verônica Gitirana Gomes Ferreira
3º Examinador

Marilena Bittar
Profª Drª Marilena Bittar
4º Examinador

Rute E S RBorba
Profª Drª Rute Elizabete De Souza Rosa Borba
5º Examinador

RECIFE, 31 de janeiro de 2007.

DEDICATÓRIA

A

Ronaldo, meu amado,

Com carinho.

Quem anda sozinho pode ir mais rápido,

Mas nem sempre vai mais longe

Temos aprendido que é melhor serem dois, do que um.

É bem melhor serem dois.... Com Jesus

Porque um cordão de três dobras

Não se pode romper.

Concluindo ou começando?????

Não sei se com este trabalho encerro ou começo uma fase da minha vida. Concluir um doutorado significa na minha história um capítulo muito especial. Capítulo que representa a coroação de muitas batalhas.

Quando entrei no mestrado em 2000, lembro da fala de um dos professores que dizia: *"A história da nossa vida é construída nos encontros que vamos tendo ao longo do caminho"*. Concordo com ele.

O encontro mais importante em minha caminhada foi com Jesus Cristo, que assumiu a direção e me conduziu em seus braços até aqui. Outro encontro essencial foi com um moço chamado Ronaldo Teles, há quase 15 anos atrás. Através deste encontro cheguei ao Recife, onde se abriram muitas outras possibilidades de estudo além do curso de graduação em Matemática que havia cursado em Garanhuns. O encontro com uma informação abriu o caminho para a Especialização no Ensino da Matemática. Que belo encontro! O encontro com a pesquisa em Educação Matemática. Junto com a Especialização veio minha primeira produção: Ronaldinho, meu primogênito querido. Veio também a primeira apresentação em evento científico e a idéia de tentar a seleção para o Mestrado em Educação. O que gostaria de estudar? Como professora há mais de 10 anos, tinha muitas hipóteses, como escrevê-las em forma de projeto? O Prof. Marcelo Câmara exerceu papel importante neste momento da minha história. Final de 1999: vários encontros importantes: a doença do meu pai, sobrecarga de trabalho na escola estadual onde tinha 350 horas aulas, filho ainda muito pequeno, mas o desejo foi maior. Estudava no hospital enquanto meu pai estava na UTI. Estudava no domingo a tarde quando meu esposo saía para passear com Ronaldinho, e orava. Veio a seleção: como responder aquelas questões de modo científico? Escrevi. Escrevi articulando as leituras que tinha conseguido fazer e as experiências de vida, que sempre aproveitei em tudo. Lembrei da visita que tinha feito com minha cunhada a uma escola da Zona Rural de Terezinha. Aquela visita foi o mote para falar, por exemplo, sobre evasão nas escolas de zona rural. Os quase quatro anos de trabalho numa escola de zona rural em Brejão também balizaram aspectos como avaliação, reprovação, condições de trabalho e salário, etc.

A vida então me preparou outro maravilho encontro: a professora Paula Baltar. Quando as aulas já haviam começado, nos encontramos na escadaria do CE, nos cumprimentamos e ela me disse que seria a minha orientadora. Que maravilhoso encontro!!!! Paula é uma das pessoas melhores que já conheci: ética, correta, amiga, ... É também uma profissional excelente, tem um potencial incrível, nestes quase 7 anos aprendi muito.

Aprendi coisas que vão muito além da construção de uma dissertação ou uma tese. Aprendi tanto para vida profissional, como para a vida pessoal. Durante o período do Doutorado tivemos muitos assuntos em comum: nossas produções acadêmicas e nossas produções pessoais. Ela produziu Loïc e eu Rebeca, minha caçula querida e desejada anos a fio. Foi gerada num período de intenso trabalho. Às vezes gostaria de controlar o tempo, poder terminar esta batalha e ainda participar da infância da minha filha. Mas voltando a Paula..... Especialmente nestes últimos dias, Paula abraçou comigo uma grande batalha, por "excelentes" questões, precisei concluir esta Tese muito antes do prazo. Ela tem gastado suas horas vagas, seus finais de semana, o tempo que deveria ser de Loïc e também de Clara, que está chegando, comigo. Nem precisa fazer isto, só amigos de verdade agem assim. Por isso, começando uma nova etapa ou encerrando uma outra, gostaria de expressar minha gratidão a Deus, por ter possibilitado estes três encontros: com Jesus, o Filho d'Ele; com Ronaldo, meu querido esposo companheiro de todas as horas, todas mesmo! E com Paula, minha amiga e orientadora.

Ronaldo foi uma pessoa essencial nesta conquista. Assumiu muitas vezes o papel de pai, mãe, dona de casa, para me ajudar. Ajudou Ronaldinho a aprender a ler e agora está empenhado em ensinar as quatro operações. Discordamos um pouco nas metodologias e na escolha dos conteúdos, mas "profeta não tem honra em sua própria terra" e "casa de ferreiro, espeto de pau". Até Rebeca atualmente já acorda chamando "Painho". Estes últimos dias, apesar de não ser da área acadêmica, Ronaldo tem estado mais presente do que nunca, madrugadas a fio fica ao meu lado, constrói tabelas, corrige referências bibliográficas, imprime coisas. Ele disse que esta minha tese tem que ser tão importante para a Educação como a invenção da engrenagem foi para a mecânica. Se vai ser assim eu não sei, mas que será muito importante para nossa família será. Esta tese abriu a possibilidade de ingressar na universidade como professora e começar, a partir deste ano, um novo capítulo da minha história. Por isso não sei se estou concluindo ou começando..........!

AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas contribuíram para esta conquista.

Começo agradecendo àqueles que torceram de longe. Em especial, minha família.

É honroso lembrar Brejão, minha pequenina cidade natal, no interior de Pernambuco, e os grandes amigos que tenho lá. Também é uma honra lembrar como meu pai e minha mãe se esforçaram para me manter a vida inteira numa mesma escola pública: Escola Ismênia Lemos Wanderley. Lembrar como precisei trabalhar cedo aos 16 anos para pagar o transporte e poder fazer o Curso de Licenciatura em Matemática na UPE de Garanhuns.

Minha gratidão ao meu Pai RONALDO, minha mãe LIA, meus irmãos ROSIVALDO, ROSICLEIDE e RUBINHO que compartilham comigo esta vitória.

Dois torcedores, em especial, estiveram "imbricados" na produção desta tese: RONALDINHO e REBECA, meus filhos. Espero que compreendam e perdoem minha ausência em tantos momentos. Para sempre serei grata pela existência deles. São milagres da vida, milagres da criação, minhas melhores e gratificantes produções.

Há aqueles que torceram de perto: ROGÉRIO, do Colégio de Aplicação, suporte nas novas tecnologias; me emprestou livros e sempre, apesar das suas muitas ocupações, esteve disponível para me ajudar. NICOLE, menina inteligente e esforçada, também me ajudou, entre outras coisas, com os desenhos, com os protocolos dos alunos. Minha amiga, Doutora GLEIDE e seu esposo JORGE, torcedores entusiasmados em momentos importantes desta caminhada.

Agradeço também aos Prof. JORGE TARCÍSIO DA ROCHA FALCÃO e VERÔNICA GITIRANA GOMES FERREIRA, que me acompanham e contribuem comigo desde o Mestrado, sugerindo leituras e participando de todas as bancas.

Ao Prof. PAULO FIGUEIREDO LIMA, pelo importante papel que desempenha nos estudos do Grupo Pró-Grandezas, a nível estadual, nacional e internacional, como também pela revisão do teste diagnóstico que utilizamos neste trabalho.

Ao Prof. ANTONIO CARLOS MONTEIRO, do Departamento de Matemática da UFPE, pela participação na banca de qualificação e a disponibilidade em orientar um estudo sobre a construção do conceito de área do ponto de vista matemático.

Ao Prof. MAURÍCIO FIGUEIREDO, pelas valiosas horas de estudo e trabalho que passamos eu, ele e Paula sobre o tema números racionais. E também pelo seu apoio e incentivo.

Às profas. RUTE BORBA e GILDA GUIMARÃES, mulheres amigas, competentes e responsáveis, com as quais tive o privilégio de aprender muito quando ministrei a Disciplina Metodologia do Ensino da Matemática como professora substituta na UFPE. E também na organização do SIPEMAT. Acreditaram em mim, me incentivaram e agora, com muito prazer, seremos novamente colegas de trabalho.

Aos membros da banca examinadora, Profª. MARILENA BITTAR, Prof. JORGE FALCÃO, Profª. VERÔNICA GITIRANA e Profª. RUTE BORBA, por terem aceitado participar da banca em condições tão especiais.

Aos colegas de curso de Doutorado, em especial GLAUCO, ROSS, PEDRO, DORA, GLEIDE, ANA CLAUDIA E IOLANDA do Núcleo de Didática de Conteúdos Específicos, pelos momentos de estudo e incentivo mútuo.

Aos colegas de trabalho da FACIG, em especial JORGE DUARTE, no qual sempre encontrei apoio e bibliografia disponível.

Agradeço também a todos os professores do Programa de Pós-graduação em Educação da UFPE e à Direção do CE, na pessoa dos Profs. SÉRGIO ABRANCHES e Profª. VERÔNICA GITIRANA.

À CAPES pelo apoio financeiro nos últimos dois anos do curso de Doutorado em Educação.

Aos funcionários da secretaria do mestrado, em especial SHIRLEY, MORGANA E JOÃO, pela disponibilidade e carinho com que sempre me trataram, não esquecendo ALDA que esteve presente durante o Mestrado e no início do Doutorado.

Aos COLEGAS professores de Matemática e às Direções das Escolas que contribuíram com a coleta de dados e que por razões éticas não posso nomear aqui.

Aos ALUNOS que contribuíram de maneira essencial para realização deste trabalho como sujeitos do nosso experimento.

Sobretudo, ao nosso Deus que, na sua infinita e renovadora misericórdia, mantém suas mãos estendidas sobre mim, me abençoando dia a dia. Para Ele seja a honra, a glória e o louvor para sempre.

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1. LISTA DE FIGURAS

1. 1. LISTA DE FIGURAS DO CAPÍTULO 2:

1.2. LISTA DE FIGURAS DO CAPÍTULO 3:

1.3. LISTA DE FIGURAS DO CAPÍTULO 4:

1.4. LISTA DE FIGURAS DO CAPÍTULO 5:

1.5. LISTA DE FIGURAS DO CAPÍTULO 8:

1.6. LISTA DE FIGURAS DO CAPÍTULO 9

2. LISTA DE QUADROS

3. TABELAS:

4. LISTA DE GRÁFICOS:

RESUMO

A Teoria dos Campos Conceituais constituiu-se no marco teórico central desta pesquisa, cujo objetivo geral foi investigar imbricações entre os campos conceituais das grandezas, da geometria, numérico, algébrico e funcional na Matemática Escolar, na formulação e no tratamento de problemas envolvendo as fórmulas de área do retângulo, do quadrado, do paralelogramo e do triângulo.

Os estudos teóricos, as análises documentais e a aplicação de testes se entrelaçam, a fim de estudar as fórmulas de área como conceito - caracterizado como um tripé de situações que lhe conferem significado, invariantes operatórios e representações simbólicas – e situado simultaneamente nos vários campos conceituais supracitados.

Tomam-se inicialmente as fórmulas de área como componentes do campo conceitual das grandezas e discute-se a revisão de literatura referente a esse campo. Segue-se a análise da construção do significado das fórmulas de área em duas coleções de livros didáticos para o ensino fundamental. Esses dois estudos mostram a necessidade de considerar outros campos conceituais: o da geometria, o numérico, o algébrico e o funcional. A revisão da literatura relativa a esses campos evidencia imbricações importantes entre os cinco campos conceituais focados. Segue-se a análise dos tipos de usos das fórmulas de área em livros didáticos para o ensino fundamental e médio, assim como em exames de vestibular. Finalmente, discute-se a elaboração, análise teórica e análise de resultados de testes diagnósticos, nos quais são propostos problemas envolvendo os tipos de usos das fórmulas, identificados nos capítulos anteriores. Os testes, aplicados com 259 alunos de 2ª série do Ensino Médio, de cinco escolas do Recife e Região Metropolitana permitiram investigar a mobilização de invariantes operatórios e representações simbólicas, nos procedimentos de resolução de alunos e confirmar a pertinência da hipótese de tomar as imbricações entre campos conceituais como foco de interpretação do processo de aquisição e uso das fórmulas de área.

O desenho teórico-metodológico da pesquisa permitiu lançar um olhar novo e esclarecedor sobre o ensino-aprendizagem das fórmulas de área e abriu uma via original de análise dentro da Teoria dos Campos Conceituais: o estudo de imbricações entre campos conceituais, como elemento que, pela variedade de abordagens possíveis, amplia as possibilidades de compreensão dos sujeitos aprendizes e ao mesmo tempo, pela amplitude, explica a complexidade de processos de aprendizagem de conteúdos matemáticos.

PALAVRAS CHAVE: imbricações entre campos conceituais, área como grandeza, fórmulas de área.

RESUMÉ

La théorie des champs conceptuels constitue la base théorique de cette recherche dont l'objectif central étudie les imbrications entre les champs conceptuels des grandeurs, de la géométrie, numérique, de l'algèbre et des fonctions des mathématiques scolaires, dans la formulation et le traitement de problèmes impliquant les formules d'aire de rectangle, carré, parallélogramme et triangle.

Les études théoriques, les analyses de documents et l'application de tests se complètent afin d'étudier les formules d'aire comme concept – caractérisé comme un triplet de situations que lui donnent du sens, invariants opératoires et représentations symboliques – et situé simultanément dans les champs conceptuels cités ci-dessus.

Les formules d'aire sont d'abord prises comme composant conceptuel des grandeurs et la révision de littérature relative a ce champs est discutée. L'analyse de la construction du sens des formules d'aire dans deux collections de manuels scolaires pour le collège. Ces deux études montrent la nécessité de considérer d'autres champs conceptuels: ceux de la géométrie, du numérique, de l'algèbre et des fonctions. La revue de littérature relative à ces champs met en évidence des imbrications importantes entre les cinq champs conceptuels focalisés.

Suit l'analyse des types d'utilisation des formules d'aire dans des manuels scolaires pour le collège et le lycée comme dans des examens d'entrée à l'Université (vestibular). Finalement, sont discutées l'élaboration, l'analyse théorique et l'analyse des résultats de tests diagnostiques dans lesquels sont proposés des problèmes impliquant les différents types d'utilisation des formules identifiés dans le chapitre antérieur. Les tests appliqués à 259 élèves de la première en cinq écoles de Recife et de sa région métropolitaine ont permis d'explorer la mise en oeuvre d'invariants opératoires et représentations symboliques, dans les processus de résolution des élèves, ce qui confirme la pertinence de l'hypothèse de prendre les imbrications entre champs conceptuels comme centre de l'interprétation du processus d'acquisition et d'utilisation des formules d'aire.

Le parcours théorique et méthodologique de la recherche ont permis un regard éclairant sur l'enseignement et l'apprentissage des formules d'aire et ouvrent une voie originale dans la théorie des champs conceptuel : l'étude des imbrications entre champs conceptuels, comme élément que, par la diversité des approches possibles, amplifie les possibilités de compréhension des sujets apprenants et, par son amplitude, explique la complexité des processus d'apprentissage de contenus mathématiques.

MOTS-CLES: Imbrications entre champs conceptuels, aire en tant que grandeur, formules d'aire.

INTRODUÇÃO

"Melhor é o fim das coisas do que o princípio delas".
Eclesiastes, 7:8

Esta pesquisa aborda questões relativas ao ensino e à aprendizagem de conteúdos matemáticos na escola básica e defende a perspectiva que o ensino deve contribuir para transformação dos indivíduos e da sociedade. Mesmo assumindo paradigmas impulsionados pelas demandas da sociedade do conhecimento e da informação, o ensino de Matemática deve ter entre suas metas a formação de cidadãos aptos para inserir-se e permanecer no mercado de trabalho, dar continuidade aos estudos ou simplesmente mobilizar os conhecimentos adquiridos em sua vida diária.

Um grande desafio está posto: como elaborar situações que em sala de aula cumpram este papel? Como professora do Ensino Fundamental e Médio, e mais recentemente como pesquisadora, tenho me interessado em encontrar justificativas para erros que os alunos cometem em Matemática, para contribuir com respostas para esta questão.

A elaboração de situações adequadas em sala de aula requer do professor tanto o conhecimento sobre os conteúdos da Matemática, quanto o conhecimento sobre como o aluno desenvolve sua compreensão de conceitos matemáticos, quais as dificuldades que enfrenta e quais as características das concepções que desenvolve. Neste trabalho, investigamos um conteúdo específico, por uma via até então inédita: imbricações entre campos conceituais.

Inicialmente pretendíamos investigar os tipos de situações que podem ser situadas nos limites entre os campos conceituais da álgebra e das grandezas e medidas, que permitam articular estes dois campos, e possam ser tratadas no Ensino Fundamental. A tentativa de mapear estas situações desestabilizou o que pensávamos sobre "*limites*" entre os campos conceituais e trouxe-nos indícios relativos a "*imbricações*" entre estes campos. De acordo com o dicionário Aurélio, o termo imbricação é definido como "*Disposição que apresentam certos objetos quando se sobrepõem parcialmente uns aos outros, como as telhas de um telhado ou as escamas do peixe*". Com esse termo gostaríamos de caracterizar um tipo de relação em que os campos se sobrepõem mutuamente, se articulam e a partir dessa "interconexão dinâmica" são gerados novos significados para os conteúdos matemáticos em foco. Procuramos pensar nas imbricações entre campos conceituais, articulando as dimensões epistemológica, cognitiva e didática. O tratamento de situações nas quais estão envolvidas fortes imbricações, exige que os sujeitos naveguem de um campo conceitual para outros e que articulem seus conhecimentos para tratar de maneira pertinente os problemas postos. Não há como entender plenamente o telhado sem pensar as telhas, mas também a maneira como elas se sobrepõem, para formar um todo qualitativamente diferente da simples junção de seus componentes.

A revisão de literatura e os estudos empíricos preliminares conduziram a ampliar o leque de campos conceituais. Além dos campos conceituais das grandezas e da álgebra, tornou-se necessário olhar também as imbricações com o campo conceitual da geometria, numérico e funcional. Desta forma, nosso foco é a análise das imbricações entre campos conceituais nas situações subjacentes às fórmulas de área do retângulo, do quadrado, do paralelogramo e do triângulo.

O texto está organizado em 10 capítulos. No primeiro, situamos nossa problemática, iniciando com uma brevíssima discussão sobre Educação, Educação Matemática, Didática da Matemática e Teoria dos Campos Conceituais.

No segundo, tecemos considerações sobre o campo conceitual das grandezas, apresentamos nosso ponto de vista sobre o conceito de área como grandeza e situamos as fórmulas de área do retângulo, do paralelogramo e do triângulo como componentes deste campo.

No Capítulo 3, apresentamos nosso primeiro estudo empírico sobre a construção do significado das fórmulas de área em livros didáticos. É um capítulo que abre muitas questões. Uma delas refere-se a quais aspectos dos campos conceituais da geometria, numérico, da álgebra e das funções relacionam-se às fórmulas de área. Em busca de algumas respostas, discutimos no capítulo seguinte as contribuições destes outros campos conceituais para o estudo das fórmulas de área. A revisão de literatura realizada no Capítulo 4 possibilitou a construção da noção de fórmula como conceito; assim, finalizamos o capítulo indicando situações, invariantes operatórios e representações simbólicas subjacentes às imbricações entre os campos conceituais ligados à construção do conceito de fórmula de área. Este estudo teórico reforçou a necessidade de aprofundar o papel das fórmulas na aprendizagem do conceito de área. Além disso, evidenciou a necessidade de abordar múltiplas situações.

No Capítulo 5, discutimos outro estudo empírico. Desta vez sob a ótica dos campos conceituais, fizemos o mapeamento de situações, invariantes operatórios e representações simbólicas subjacentes às situações utilizadas em livros didáticos e provas de vestibulares, envolvendo fórmulas de área do retângulo, do quadrado, do paralelogramo e do triângulo.

Apoiados nesta construção, elaboramos e analisamos teoricamente os testes diagnósticos que são apresentados no Capítulo 6. Foram elaborados 5 testes diferentes, cada um com quatro questões. As condições de aplicação e a análise quantitativa dos 259 testes são discutidas no Capítulo 7. A partir das questões que se abrem na leitura quantitativa dos dados, construímos os Capítulos 8 e 9, nos quais fazemos uma leitura qualitativa dos dados. No Capítulo 8 discutimos invariantes operatórios e representações simbólicas mobilizados pelos alunos que caracterizam a fórmula como um conceito. No Capítulo 9, discutimos alguns resultados relativos às imbricações entre os campos.

Finalmente, no Capítulo 10, tecemos considerações finais e situamos algumas perspectivas de pesquisas futuras abertas a partir deste estudo.

CAPÍTULO 1
CONSTRUÇÃO DA PROBLEMÁTICA DA PESQUISA

Neste primeiro capítulo expomos o que entendemos por Educação e qual o papel da Escola no projeto de Educação que defendemos. Também discutimos brevemente a Teoria dos Campos Conceituais que adotamos como referencial e apresentamos a construção da nossa problemática.

1.1 EDUCAÇÃO, EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, DIDÁTICA DA MATEMÁTICA, TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

No senso comum, "ser educado" ou "ter educação" são expressões que significam que um indivíduo tem um comportamento polido e moldado pelas convenções sociais. Há subjacente uma forte idéia de conformidade e subentende-se que os comportamentos "adequados" são únicos e independentes do tempo e da cultura. Em contraposição a essa visão, partimos de uma idéia que "portar-se bem" depende das normas de um certo grupo social e em um determinado momento histórico.

As várias correntes da Filosofia e da Sociologia da Educação discutem amplamente o sentido que se pode atribuir à Educação como ciência e como prática social. Ora focaliza-se o aspecto da manutenção do *status quo*, ora o processo de transformação da sociedade.

Neste trabalho, compreendemos Educação como uma

> Estratégia de estímulo ao desenvolvimento individual e coletivo gerada pelos grupos culturais (famílias, tribos, sociedades, civilizações), com a finalidade de se manterem como tal e de avançarem na satisfação de necessidades de sobrevivência e transcendência (D'AMBROSIO, 2003, p.23).

Essa tomada de posição resgata a característica cultural da Educação, situa conjuntamente as dimensões individual e coletiva e articula os aspectos de manutenção das culturas ao mesmo tempo em que busca a transformação do que não é considerado pelos grupos como satisfatório.

Vivemos um momento histórico profundamente marcado pelas desigualdades entre indivíduos, entre classes sociais, entre regiões e entre países do mundo. As desigualdades são o produto de um longo processo histórico que envolve fatores econômicos e políticos. A

Educação, como prática social, pode contribuir para manter essa situação ou para transformá-la. Compartilhamos da crença na possibilidade da Educação contribuir para a superação das desigualdades e focamos nosso interesse na escola enquanto instituição que pratica e pensa a Educação com essa meta. É, portanto, papel da escola dar acesso aos saberes socialmente construídos e fornecer condições para que os sujeitos desenvolvam uma visão crítica sobre esses saberes. Concordamos, portanto, com a visão defendida nos Parâmetros Curriculares Nacionais de que é objetivo da escola contribuir para a formação de um aluno (homem) que seja capaz de posicionar-se de maneira crítica, responsável e construtiva nas diferentes situações sociais, utilizando o diálogo como forma de mediar conflitos e de tomar decisões coletivas (BRASIL, 1998).

Dentre os saberes socialmente construídos, o saber matemático contém elementos que ajudam o indivíduo a se ver no mundo, a compreender a realidade natural e social na qual está inserido e a se colocar de forma ativa nas relações sociais. A apropriação dos conhecimentos matemáticos é útil para o exercício pleno da cidadania, para a inserção e manutenção no mundo do trabalho, para a continuidade nos estudos, para o aprendizado das demais disciplinas, para a modelagem de fenômenos naturais e sociais e juntamente com outras disciplinas contribui para o desenvolvimento do raciocínio. Como destacam Campos e Nunes (1994), o saber matemático tem importância capital no desenvolvimento e no uso de tecnologias, as quais têm funcionado como um fator no estabelecimento e na manutenção de desigualdades. A superação das desigualdades e o exercício pleno da autonomia e da soberania exigem, portanto, a apropriação democrática dos conhecimentos matemáticos.

As avaliações de rede mostram baixos desempenhos dos alunos nesta apropriação; muitas crianças e jovens se sentem incapazes de aprender Matemática e têm verdadeira aversão a essa disciplina; os professores, de todos os níveis, queixam-se da falta de base e de interesse de seus alunos, sentem-se desmotivados e desmunidos de meios para contribuir efetivamente para reverter esse quadro (LIMA, BELLEMAIN e TELES, no prelo).

Dentre as tentativas para reverter este quadro situam-se, a partir dos anos 80, estudos em psicologia cognitiva. Estes estudos tecem reflexões sobre como a criança desenvolve a compreensão de conceitos matemáticos dentro e fora da escola, quais as dificuldades que enfrenta e que caminhos favorecem oportunidades para a aquisição e desenvolvimento desse conhecimento (COLL et al., 2000).

Com a influência destes e de outros estudos estabelece-se há aproximadamente 25 anos a *"Educação Matemática"*, vindo a tornar-se um campo de pesquisa específico nos Estados Unidos, na Inglaterra, na França, na Holanda, na Alemanha e em muitos outros países. A *Educação Matemática*, de acordo com Pais (2001), é um grande campo da pesquisa educacional, cujo objeto de estudo é a compreensão, interpretação e descrição de fenômenos referentes ao ensino e à aprendizagem da matemática, nos diversos níveis da escolaridade, quer seja em sua dimensão teórica ou prática. Educação Matemática também pode ser entendida no plano da prática pedagógica, conduzidas pelos desafios do cotidiano escolar.

Dentre as tendências da Educação Matemática, neste trabalho nos apoiamos na Didática da Matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em termos experimentais da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica (PAIS, 2001).

A Didática da Matemática tem três eixos principais de interesse: o epistemológico do conhecimento matemático, o da gênesis e da aquisição do conhecimento matemático por estudantes, e o da construção de gênesis artificiais em situações na escola.

A Didática da Matemática ressalta a importância da especificidade dos conhecimentos matemáticos para a compreensão dos processos de ensino e aprendizagem destes conhecimentos. Conseqüentemente, defende que a elaboração de situações adequadas em sala de aula requer do professor tanto o conhecimento sobre os conteúdos da Matemática, quanto o conhecimento sobre como a criança desenvolve sua compreensão de conceitos matemáticos, quais as dificuldades que enfrenta e quais as características das concepções que desenvolve.

Dentre as teorias da Didática da Matemática nos apoiamos mais especificamente na Teoria dos Campos Conceituais. É uma teoria desenvolvimentista multidimensional da conceitualização, que procura identificar as filiações e as rupturas entre as diversas formas de conhecimento em via de aquisição pelo indivíduo (MAIA, 1999).

1.2 TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais, elaborada pelo professor e pesquisador francês Gérard Vergnaud e seus seguidores, é uma teoria cognitivista, que visa fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, mais particularmente, daquelas que pertencem ao domínio científico e tecnológico (VERGNAUD, 1990).

Enquanto teoria de referência, o modelo teórico de Vergnaud alerta para a necessidade de se levar em conta a *especificidade dos conteúdos* a serem ensinados e também o fato de que um simples conceito não se refere apenas a um tipo de situação, assim como uma situação não pode ser analisada através de um único conceito.

Segundo Vergnaud (1986, 1990), um objetivo prioritário na pesquisa didática é investigar, analisar e classificar, tão exaustivamente quanto possível, as situações-problema que conferem significação e função a um conceito. Além disso, é um trabalho do pesquisador desvendar as conceitualizações subjacentes às condutas dos alunos, aos procedimentos que utilizam, aos erros que cometem. Isto permite, em primeiro lugar, recorrer no ensino a uma maior variedade de relações e problemas; em segundo lugar, aprofundar sua epistemologia e principalmente identificar a sua função (a que problemas responde) e a sua radicação (em quais outros conceitos se apóia), para compreender o desenvolvimento e a apropriação do conhecimento.

A tese subjacente à Teoria dos Campos Conceituais é a de que a elaboração de situações didáticas potencialmente ricas do ponto de vista da aprendizagem baseia-se necessariamente no conhecimento da dificuldade relativa das tarefas cognitivas, dos obstáculos habitualmente enfrentados, do repertório de procedimentos disponíveis, das representações simbólicas possíveis e dos esquemas formados anteriormente pelo sujeito.

Um *Campo Conceitual* é caracterizado como um espaço de problemas ou situações problema cujo tratamento envolve conceitos e processos de vários tipos em estreita conexão. E, também, um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas firmemente unidas (VERGNAUD, 1990).

A constatação de que a maior parte das situações necessita do concurso de mais de um conceito, e cada conceito é aplicável a um determinado conjunto de situações, conduz a defender o interesse teórico em se falar de campo conceitual, notadamente no caso dos conceitos matemáticos.

Os conceitos são considerados por Vergnaud (1990) como um tripé de três conjuntos:

> $C = (S, I, \zeta)$
>
> S: conjunto das situações que dão sentido ao conceito (a referência);
> I: conjunto de invariantes nos quais se apóia a operacionalidade dos esquemas (o significado);
> ζ: conjunto das formas de linguagem (ou não) que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante) (VERGNAUD, 1990, p. 145).

Estes três aspectos dos conceitos não são independentes, mas interligados. No entanto, uma separação temporária para o estudo e comparação de conceitos é extremamente útil.

Os invariantes operatórios podem ser agrupados em três grupos distintos: proposições, funções proposicionais e argumento (VERGNAUD, 1990). Neste trabalho nos interessamos pelos invariantes do tipo proposições e do tipo funções proposicionais.

- Os invariantes do tipo *"proposições*" – podem ser verdadeiros ou falsos. Os teoremas-em-ação são invariantes deste tipo. Teoremas-em-ação são relações lógicas sofisticadas que possuem relações matemáticas correspondentes que os alunos usam implicitamente ao tentar resolver situações que facilitam o desenvolvimento de novos esquemas.

Os teoremas em ação não são teoremas no sentido convencional do termo, porque a maioria deles não é explícito. Seu âmbito de validade é normalmente menor que o âmbito dos teoremas (MAGINA, CAMPOS, NUNES e GITIRANA, 2001).

- Os invariantes do tipo "*funções proposicionais*" – não são susceptíveis de serem verdadeiros ou falsos, mas constituem elemento indispensável para a construção das proposições.

Os conceitos são raramente explicitados pelos alunos, neste caso são construídos e utilizados por eles na ação: são os conceitos-em-ação, ou as categorias-em-ação. Eles podem ser pertinentes ou não em uma dada situação.

A relação entre funções proposicionais e proposições é uma relação dialética: "não se pode falar em proposição sem falar em funções proposicionais, como também não se pode falar em funções proposicionais sem falar em proposições" (VERGNAUD, 1990, p. 143).

Conceitos em ação e teoremas em ação são construídos em estreita interação.

Vergnaud (1990) esclarece que na Teoria dos Campos Conceituais, o termo situação designa tarefas. Toda situação complexa pode ser analisada como uma combinação de sub-tarefas mais elementares. Busca-se então compreender a natureza e a dificuldade próprias de sub-tarefas elementares como meio de aprofundar a análise das situações complexas. Duas idéias importantes são colocadas no centro da discussão:

1) A idéia de variedade – existe uma grandeza variedade de situações num campo conceitual, e a variedade de situações é um meio de gerar sistematicamente o conjunto das classes possíveis.
2) A idéia da história – os conhecimentos dos alunos são elaborados em situações que eles enfrentaram e dominaram progressivamente, sobretudo para as primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e procedimentos que se pretende ensinar-lhes.

A Teoria dos Campos Conceituais permite analisar as relações entre conceitos enquanto conhecimentos explícitos e invariantes operatórios implícitos nas condutas dos sujeitos. Por tratar-se de uma teoria que investiga o processo de conceitualização do sujeito, contribui para a análise dos livros didáticos e também dos erros e acertos dos alunos, no processo ensino aprendizagem da matemática por meio, por exemplo, da interpretação dos procedimentos de resolução.

1.3.CONSTRUÇÃO DA PROBLEMÁTICA DA PESQUISA

O atual ensino de Matemática no Brasil, como se sabe, passa por uma considerável mudança de paradigma. As avaliações institucionais como PROVA BRASIL, a nível nacional, e SAEPE, a nível estadual, fornecem um diagnóstico que por sua vez pode conduzir a mudanças nas metodologias, nos currículos e nas concepções de aprendizagem. Os Parâmetros Curriculares Nacionais, documento de referência nacional, têm o mérito de ter incorporado em suas orientações muitas contribuições do campo de pesquisa em Educação Matemática. A versão deste documento para o 3º e o 4º ciclos do Ensino Fundamental já é do conhecimento das escolas desde 1998. Ano após ano vem se tornando conhecido dos professores, o que ainda não garante efetivamente seu uso por estes; percebe-se que aquilo que se afirma nos PCNs sobre propostas curriculares anteriores está se repetindo com ele próprio:

> as propostas curriculares nacionais mais recentes são ainda bastante desconhecidas de parte considerável dos professores, que, por sua vez, não têm uma clara visão dos problemas que motivaram as reformas. O que se observa é que idéias ricas e inovadoras, veiculadas por essas propostas, não chegam a eles, ou são incorporadas superficialmente, ou ainda recebem interpretações inadequadas, sem provocar mudanças desejáveis (BRASIL, 1998, p. 21).

Uma das idéias veiculadas neste documento de referência nacional é a divisão dos conteúdos em blocos: números e operações; espaço e forma; grandezas e medidas e tratamento da informação, destacando a variedade de conexões que podem ser estabelecidas entre eles. Defende-se nesse documento a articulação entre múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, bem como a idéia de que os conteúdos não se esgotam em si mesmos, são inter-relacionados e interdependentes, o que conduz a uma organização curricular que rompe com a linearidade.

Os PCNs (BRASIL, 1998) apresentam o bloco de conteúdo grandezas e medidas caracterizando-o por sua forte relevância social devido a seu caráter prático e utilitário, e pela possibilidade de variadas conexões com outras áreas do conhecimento.

Segundo Bellemain e Lima (n/p), a medida de grandezas e a quantificação das relações entre grandezas constituíram-se durante séculos em um fundamento e um motor do avanço da matemática e da construção dos números, porém, a Matemática atualmente, conforme Perrin-Glorian (2001) é fundada diretamente nos conjuntos e nos números sem referência às grandezas. O esquecimento da noção de grandeza fecha a Matemática sobre si mesma. No sentido contrário, a exploração do universo das grandezas constitui-se no ponto de partida da exploração matemática da diversidade do mundo (CHEVALLARD, BOSCH e GASCÓN, 2002). O tema das grandezas e medidas, segundo Bellemain e Lima (2002), está situado na confluência de muitos domínios conceituais, e tem sido difícil encontrar seu lugar próprio no seio das disciplinas escolares. Os autores apontam três elementos básicos que compõem o campo conceitual das grandezas: os objetos físicos ou abstratos; as grandezas, que são atributos associados a esses objetos e as medidas dessas grandezas, que são números.

Assim as grandezas constituem um amplo campo conceitual, que envolve conceitos, intimamente articulados entre si: quantidade, medição, unidade e medida, por exemplo. Também fazem parte deste campo conceitual grandezas físicas (velocidade, tempo, massa, densidade, etc.); grandezas geométricas (comprimento, perímetro, área, volume, ângulo) e outros tipos (monetária, etc). Neste trabalho nos interessamos por grandezas geométricas, especificamente a grandeza área e suas fórmulas para polígonos.

A GRANDEZA ÁREA

Dos esticadores de corda no Egito, passando pelo método da divisão (ou da decomposição), conhecido por Euclides há mais de 2 mil anos, até a axiomatização da função área, formalizada por Hilbert no século XIX, quantificar áreas, obter regras gerais para expressar áreas, em função de comprimentos, comparar áreas e construir figuras de mesma área sempre foram motivos de interesse para a humanidade.

Conforme Baltar (1996), o conceito de área é uma noção matemática que permite comparar e medir a parte ocupada pelas superfícies; as figuras planas e os sólidos servem de suporte ao cálculo numérico e literal. Baltar (1996), citando programas franceses de matemática, destaca que as competências exigidas dos alunos em relação às grandezas geométricas são essencialmente do tipo calculatórias.

Neste trabalho, adotamos a abordagem de área como grandeza e assumimos os pressupostos de Douady e Perrin-Glorian (1989), segundo os quais é necessário distinguir três quadros: o geométrico, o da grandeza e o numérico. Em Bellemain e Lima (2002), é acrescentado: o quadro algébrico – funcional. Esses autores reforçam como hipóteses didáticas básicas que no ensino das grandezas geométricas é necessário **distinguir e articular** os quadros supracitados e defendem que as fórmulas são componentes do quadro algébrico funcional.

Quando nos interessamos pelas fórmulas de área de figuras planas uma série de questões teóricas e empíricas se abrem e norteiam a construção desta tese.

Questões “inocentes”, como “o que é uma fórmula?”, ou “qual a importância de uma fórmula de área?”, quando regadas por estudos teóricos, crescem e geram outras questões menos inocentes como “qual o papel das fórmulas na construção do conceito de área?”; “que dificuldades os alunos enfrentam na compreensão e na resolução de situações problema envolvendo fórmulas de área?”.

A revisão de literatura nos mostrou que as fórmulas também podem ser vistas sob múltiplos olhares, dependendo dos usos e dos sentidos que lhes atribuímos. Do ponto de vista da linguagem comum, no Houaiss de Língua Portuguesa[1], “**FÓRMULA”** é a expressão concisa e rigorosa, constituída em geral de símbolos, que resume um certo número de dados ou uma forma precisa e convencionada que se usa para exprimir uma idéia, enunciar uma regra ou expor um fato. O mesmo dicionário apresenta como definição matemática para fórmula: “expressão que define com rigor tanto as relações fundamentais entre os termos que entram na composição de um todo, como as regras estabelecidas por tipo de operação”.

Do ponto de vista da Educação Matemática, de acordo com Sfard, Linvchevski (1994), a fórmula pode denotar um determinado número (embora desconhecido) ou representar uma função, mas em ambos os casos, são entidades permanentes que, por um lado, são um produto de operações aritméticas e, por outro, pode servir como uma entrada para um procedimento algébrico.

Especificamente, as fórmulas de área e perímetro, conforme Baltar (1996), são representações simbólicas das relações entre as grandezas geométricas, comprimento e área. Elas permitem exprimir as relações de dependência entre os comprimentos que caracterizam

---

[1] HOUAISS, Antonio e VILLAR, Mauro de Salles. *Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa.* Instituto Antonio Houaiss de Lexicografia e Banco de Dados da Língua Portuguesa S/C Ltda. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001 (p. 1375).

as superfícies usuais. Numa leitura sobre os usos e sentidos, por exemplo, da fórmula A(P) = b x h, Baltar (1996) destaca três aspectos:

- Pode ser um meio de calcular o valor numérico da área de um paralelogramo, dados os comprimentos de um lado tomado como base e da altura relativa a ele;
- ou a expressão algébrica da qual se pode deduzir, por exemplo, que $h = \dfrac{A(P)}{b}$, o que permite calcular o comprimento de uma altura do paralelogramo dados a sua área e o comprimento da base relativa a ela;
- ou é uma representação simbólica que permite exprimir a relação de dependência entre a área de um paralelogramo e o comprimento de um lado tomado como base e da altura correspondente a este lado.

Neste trabalho, ao olharmos “fórmulas de área de figuras geométricas planas” sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, podemos vê-las como um elemento do campo conceitual das grandezas geométricas e também como um elemento que articula vários outros campos conceituais. São elementos do campo das grandezas geométricas, pois expressam relações entre comprimentos de figuras geométricas planas e, entre outros aspectos, desempenham papel importante na aprendizagem do conceito de área. Baltar (1996) frisa que um estudo das fórmulas de área e perímetro de superfícies usuais efetuado em relação com os invariantes geométricos das figuras favorece a construção da noção de área enquanto grandeza bidimensional.

As fórmulas de área funcionam também como elemento de articulação entre vários campos conceituais: uma fórmula, enquanto representação algébrica de uma relação entre variáveis pressupõe aspectos algébricos e funcionais; a área de uma figura é uma grandeza; figuras geométricas planas pertencem ao campo geométrico; o resultado obtido por meio da aplicação de uma fórmula para calcular a área de uma figura, dada a unidade de área, é um número resultante de operações.

Dentre as figuras geométricas planas, elegemos o retângulo, o quadrado, o paralelogramo e o triângulo, por tratar-se de figuras freqüentes na modelização do mundo físico e básicas nas abordagens escolares que utilizam a decomposição e recomposição de figuras para construção dos significados das fórmulas de área. Sendo assim, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, propomos a análise de situações envolvendo fórmulas de área das figuras geométricas planas: retângulo, quadrado, paralelogramo e triângulo tomando como foco as imbricações entre campos conceituais na Matemática Escolar.

Na Matemática Escolar, os livros didáticos, os Parâmetros Curriculares Nacionais e as Propostas Pedagógicas são referências no sentido de selecionar os conteúdos que deverão ser ensinados, a forma como deverão ser organizados, as estratégias que serão utilizadas.

O livro didático de Matemática, assim como os de outras disciplinas curriculares, tem tido grande influência na determinação do saber escolar culturalmente valorizado (MEC, 1999).

De acordo com Gerard e Roegiers (1998), um livro didático pode desempenhar diferentes funções, que variam de acordo com o contexto em que o livro é elaborado, o utilizador e a disciplina. Para o aluno, um livro didático pode preencher determinadas funções ligadas à aprendizagem: transmissão de conhecimentos, desenvolvimento de capacidades e de competências, consolidação e avaliação das aquisições. Com relação ao professor, são funções de formação: informação científica e geral, formação pedagógica, ajuda nas aprendizagens e na gestão das aulas.

A análise dos livros didáticos subsidiará a reflexão sobre como são construídas as fórmulas de área e quais os usos das fórmulas nestes livros, pois embora as fórmulas, conforme Bellemain e Lima (2002), façam inevitavelmente parte do ensino dos conceitos de área e perímetro, na maioria das pesquisas sobre o ensino-aprendizagem desses conceitos, elas são ora evitadas, ora consideradas com um "mal necessário". Os autores, citando Perrin-Glorian (1992), afirmam que o uso das fórmulas parece preponderante, desde a sua introdução, e em geral não se observa um trabalho conceitual que permita aos alunos construir seu significado.

Neste trabalho, apesar de estudarmos um pequeno recorte do saber matemático: "*fórmulas de área do retângulo, do quadrado, do paralelogramo e do triângulo*", formulamos questões que dão margem à construção de um modelo de estudo, sob a ótica das imbricações entre Campos Conceituais, aplicável a outras temáticas. Estão entre as questões que propomos: qual a importância das fórmulas de área? Qual o papel das fórmulas na construção do conceito de área? Como se constrói o significado de uma fórmula de área na matemática acadêmica e nos livros didáticos? Quais são os usos para as fórmulas de área nos livros didáticos? Que conhecimentos dos outros campos fazem parte do estudo das fórmulas de área? Quais dificuldades os alunos enfrentam na compreensão e na resolução de situações problema envolvendo fórmulas de área? Qual a origem dessas dificuldades em relação aos outros campos, ou seja, que dificuldades dos outros campos conceituais intervêm? Que procedimentos, invariantes, representações simbólicas são mobilizados pelos alunos na resolução de problemas de área?

Buscando respostas para algumas destas questões e outras que formulamos no caminho, realizamos um trabalho de pesquisa que teve os seguintes objetivos:

OBJETIVO GERAL

Investigar imbricações entre os campos conceituais das grandezas, da geometria, numérico, algébrico e funcional na matemática escolar, na formulação e no tratamento de problemas envolvendo as fórmulas de área do retângulo, do quadrado, do paralelogramo e do triângulo.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Analisar em coleções de Livros Didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental a introdução e os tipos de uso das fórmulas de área do retângulo, do quadrado, do paralelogramo e do triângulo.

2. Mapear e classificar situações envolvendo fórmulas de área que evidenciam as imbricações entre os campos conceituais das grandezas, da geometria, numérico, algébrico e funcional na matemática escolar.

3. Identificar conhecimentos oriundos dos diversos campos conceituais em foco, assim como suas imbricações no tratamento de situações envolvendo fórmulas de área do retângulo, do quadrado, do paralelogramo e do triângulo.

4. Mapear invariantes operatórios e representações simbólicas referentes às fórmulas de área do retângulo, do quadrado, do paralelogramo e do triângulo subjacentes aos procedimentos de resolução de alunos do ensino médio.

CAPÍTULO 2
CONSIDERAÇÕES SOBRE O CAMPO CONCEITUAL DAS GRANDEZAS

"Já ouvi falar em área lá na minha comunidade: *área verde*!"[2]

Cotidianamente ouvimos expressões do tipo: "Minha mãe está lavando roupas na área de serviço"; "Gravei o arquivo na área de trabalho"; "Cuidado! Esta é uma área de risco". Elas refletem usos da palavra área na língua portuguesa. Mas o que é área no sentido matemático? O que entendemos por "área" nesse trabalho? Inicialmente a área precisa ser "área de alguma coisa". O que nos interessa aqui é área de figuras geométricas planas. Essa área é um atributo de uma região ou superfície plana, é uma grandeza que pode ser medida ou comparada.

Vamos então ao longo deste capítulo discutir a área e as fórmulas de área do retângulo, do paralelogramo e do triângulo como componentes do campo conceitual das grandezas geométricas.

2.1. CONCEITO DE ÁREA – UMA PRIMEIRA VISTA

Uma primeira vista sobre o conceito de área nos leva a situá-lo no campo conceitual das grandezas geométricas. Trata-se de uma grandeza geométrica e contínua, e como todas as outras grandezas, congrega as noções de conservação, invariância e equivalência.

Adotamos nessa pesquisa a abordagem do conceito de área proposta por Douady & Perrin-Glorian (1989), segundo a qual é necessário distinguir três quadros: o geométrico, o da grandeza e o numérico. O quadro geométrico refere-se às superfícies planas (triângulos, quadrados, figuras com contornos curvilíneos); o quadro numérico refere-se às medidas da área das superfícies, interpretadas como números reais positivos; e o quadro das grandezas refere-se ao estabelecimento de classes de equivalência formadas por figuras de mesma área. Mas o que significa considerar a área como uma grandeza? Inicialmente, trata-se de distinguir área e figura (pois figuras distintas podem ter mesma área) e também área e número (pois se medimos a área de uma figura com diferentes unidades, obtemos números diferentes para expressar a medida de área e obviamente a área não se altera).

---

[2] Depoimento de um dos alunos do 2º ano do Ensino Médio que participou do teste diagnóstico na versão piloto.

Diversos trabalhos, dentre os quais Barros (2002), Duarte (2002), Barbosa (2002), Oliveira (2002), Brito (2003) e Silva (2004), vêm sendo desenvolvidos apoiando-se neste modelo como ferramenta teórica para organizar os fenômenos didáticos no campo das grandezas geométricas, inclusive estendendo essa abordagem às grandezas geométricas comprimento e volume.

A análise de erros observados por Douady & Perrin-Glorian (1989) as conduziu a caracterizar dois tipos de concepção de área: as concepções numéricas e as concepções geométricas.

As concepções numéricas são freqüentemente fortalecidas pela abordagem do tema na escola, que privilegia o aspecto computacional relacionado à aplicação das fórmulas. Desse ponto de vista, a área é um número que se calcula e há pouca ênfase nos aspectos geométricos do conceito. Isso leva, por exemplo, a produzir fórmulas de área errôneas, uma vez que o significado das fórmulas necessita do suporte de conhecimentos geométricos e a atribuir pouca importância às unidades de medida utilizadas.

Sob a ótica das concepções geométricas, o sujeito confunde a área e a figura. Assim, qualquer modificação da figura leva necessariamente a alterações em suas propriedades, tais como sua área e seu perímetro. Além disso, de acordo com esse tipo de concepção, quando se afirma que a área de uma figura aumenta, subentende-se que a figura é ampliada, ou seja, há semelhança entre a figura antiga e a nova. Assim, área e perímetro variam necessariamente no mesmo sentido. As concepções geométricas são reforçadas pelos usos do termo "área" nas práticas sociais, nas quais freqüentemente se associa a área a um determinado espaço ocupado, como por exemplo, na expressão "área de serviço".

A proposta de abordar a área como grandeza vem responder à necessidade de superação das concepções geométricas e numéricas. A força das concepções numéricas também motiva a hipótese didática formulada e investigada nas pesquisas de Douady e Perrin-Glorian segundo a qual é preciso retardar a associação da área a um número, a fim de favorecer a distinção entre as diversas grandezas em jogo (em particular área e perímetro).

No próximo tópico discutimos a construção de uma teoria matemática da área compatível com essa abordagem didática defendida por Douady & Perrin-Glorian (1989), uma vez que permite dar sentido à idéia de área como grandeza, no caso de regiões poligonais, sem precisar utilizar o campo numérico..

2.1.1 CONSTRUÇÃO DE UMA TEORIA DA ÁREA DO PONTO DE VISTA MATEMÁTICO

Alguns aspectos são importantes para a construção de uma teoria da área do ponto de vista da matemática. Apoiados na geometria euclidiana e na axiomática de Hilbert, matemáticos, como Hartshorne (1997) e Moise (1990), se deram esta tarefa e fizeram uma construção que tem conseqüências sobre a forma de olhar a abordagem da área na escola.

Neste trabalho consideramos *"região plana*", *"superfície plana"* e *"figura plana"* como sinônimos que designam subconjuntos limitados do plano euclidiano. Ou ainda modelos matemáticos de faces planas de objetos do mundo físico. São essas figuras que serão comparadas e medidas com relação ao atributo área. Assumimos a definição de região poligonal apresentada por Moise (1990):

> uma região poligonal é uma figura plana que possa ser expressa como a união de um número finito de regiões triangulares, de tal maneira que se duas das regiões triangulares se cruzarem, sua interseção é uma borda ou um vértice de cada uma delas (MOISE, 1990, p. 184).

Euclides montou e realçou o trabalho de muitos matemáticos antes dele, como Apolônio, Hipócrates, Eudoxus. Seu livro texto resultante, *Os Elementos*, foi usado sem alterações por 2000 anos, fazendo dele o livro didático mais famoso na história (LANG e MURROW,1983). Euclides baseava sua teoria da área na adição e subtração de figuras congruentes. Esta noção é formalizada pela definição de Hilbert de *"área igual*".

Na geometria de Euclides, apresentada por Hartshorne (1997), duas figuras P e P' são *equidecomponíveis*

> se for possível escrevê-las como uniões quase-disjuntas de triângulos
> $$P = T_1 \cup \ldots \cup T_n$$
> $$P' = T_1' \cup \ldots \cup T_n'$$
> Onde para cada i, o triangulo T_i é congruente ao triangulo T_i'.
> Duas figuras P, P' (são iguais) têm igual conteúdo se houver outras figuras Q e Q' tais que:
> 1) P e Q são quase disjuntos[3]
> 2) P' e Q' são quase disjuntos.
> 3) Q e Q' são equidecomponíveis, e

[3] Diz-se que dois polígonos são quase disjuntos se têm, no máximo, pontos de fronteira em comum, ou seja, não têm pontos no interior em comum.

4) $P \bigcup Q$ e $P' \bigcup Q'$ são equidecomponíveis (HARTSHORNE, 1997, p. 147).

Na escola, a noção familiar de área é um número que se relaciona a cada figura. Assim a área de um retângulo cujas medidas dos comprimentos dos lados são a e b é dada pelo produto a x b. A área de um triângulo também é um número, obtido por meio da expressão $\frac{bxh}{2}$ onde b é a medida do comprimento de qualquer um de seus lados e h a medida da altura correspondente. Na geometria de Euclides, não há nenhum número, por isso não podemos explicar seu conceito de área desta maneira.

Conforme Hartshorne (1997), Euclides introduz uma nova noção da igualdade entre figuras, que corresponde ao que chamaríamos "figuras de mesma área". Ele assume que:

1. Figuras congruentes são "iguais".
2. As somas de figuras "iguais" são "iguais".
3. As diferenças de figuras "iguais" são "iguais".
4. As metades de figuras "iguais" são "iguais".
5. O todo é maior que a parte
6. Se os quadrados forem “iguais", seus lados são iguais (HARTSHORNE, 1997, p. 196).

Essa noção elementar de “figuras de mesma área” é aprofundada por Hilbert no século XIX, e ainda retomada por Hartshorne em 1997, assumindo características cada vez mais rigorosas para a construção de uma teoria da área de regiões poligonais.

Hartshorne (1997) analisa a noção mais estrita de figuras equidecomponíveis apresentando o problema prático da “*decomposição*”[4]*:* dadas duas figuras encontrar, se possível, uma decomposição eficiente da primeira como uma união quase disjunta de figuras menores, não necessariamente triângulos, que podem ser remontados para obter a segunda. Tal decomposição existe se, e somente se, as duas figuras são equidecomponíveis. Neste caso, diz-se que as figuras são *equivalentes por decomposição.*

A construção de uma função medida área no plano de Hilbert, assumindo o axioma de Zolt (Z)[5], permite articular a teoria da área baseada no conceito de equidecomposição e a noção familiar de medida de área como número. O domínio dessa função é o conjunto das regiões poligonais. Sua imagem pode ser, conforme proposto por Moise, o conjunto dos reais positivos.

[4] No texto de Hartshorne, o termo utilizado é “dissection”.

[5] Axioma de Zolt: Se Q é uma figura contida em outra figura P, e se P – Q tem um interior não vazio, então P e Q não têm a mesma área.

A função área satisfaz aos postulados A-1 a A – 5. Discutimos inicialmente os axiomas A-1 a A – 4.

A-1. α é uma função cujo domínio é o conjunto das regiões poligonais e o contradomínio é o conjunto dos números reais, ou seja, define-se α: $\Re \to$ ☑, onde $\Re$ é o conjunto de todas as regiões poligonais e ☑ é o conjunto de todos os números reais.

A-2. Para cada região poligonal R, α(R)>0.

A-3. *O Postulado da Congruência.* Se duas regiões triangulares são congruentes, então têm mesma área.

A-4. *O Postulado da Aditividade*. Se duas regiões poligonais se interceptam somente nas bordas e nos vértices (ou não se interceptam), então a área da união dessas regiões é a soma de suas áreas.

Tais postulados correspondem também à caracterização da função área proposta por Douady e Perrin-Glorian (1989) e adotada por Bellemain e Lima (2002), definida num conjunto **S** de superfícies e assumindo valores no conjunto dos números reais não negativos. Tal função deve possuir três propriedades julgadas essenciais para caracterizar a grandeza área:

- Positividade – uma figura que possua interior não vazio tem área positiva;
- Aditividade – se duas figuras A e B que têm em comum no máximo pontos de suas fronteiras, então a área da figura A ⊗ B (união de A e B), é a soma da área de A com a área de B;
- Invariância por isometrias – se uma figura plana A é transformada em outra, B, de modo que a distância entre dois pontos quaisquer de A fica inalterada em B, então, A e B têm a mesma área.

A questão que se coloca em seguida é a definição do domínio **S** da função f, noutros termos, quais superfícies são **mensuráveis** pela função **f.** Deseja-se assegurar que as figuras planas da Matemática escolar sejam mensuráveis.

Voltando à axiomatização proposta por Moise (1990), precisa-se ainda de um postulado que, de fato, escolha uma unidade de medida que descreva uma conexão entre a área e a "distância".

Para isto, Moise (1990) compreende por *região quadrada* a união do quadrado e seu interior. As regiões retangulares são definidas da mesma maneira. Qualquer uma das seguintes indicações, se feito exame como um postulado, é suficiente para determinar a unidade de área.

(1) se uma região quadrada tiver lados de comprimento 1, então sua área é 1.

(2) Área da região retangular é o produto de sua base pela sua altura.

Para Moise (1990), a indicação (2) é um postulado absurdamente forte; podendo-se derivar a fórmula para a área de uma região retangular da fórmula para a área de uma região quadrada. Por outro lado, (1) é absurdamente fraco: conduz a uma prova difícil da fórmula para a área de uma região quadrada de lado *a*. Rompendo-se a diferença, usa-se a seguinte:

A-5. Se a região quadrada tem lados do comprimento *a*, então sua área é a^2.

Considerando que nem todo polígono pode ser decomposto como união de um número finito de regiões retangulares, tanto Moise quanto Hartshorne optam por tomar as regiões triangulares como ponto de partida. Esta escolha é coerente com a própria definição de região poligonal.

Começa a construir a função medida da área indicando, como uma definição, que para todo ΔABC a área é dada por

$$\alpha(ABC) = \frac{1}{2}bh,$$

onde b é a medida do comprimento de qualquer lado tomado como base e h a altura correspondente. Vale salientar que o produto *bh* depende somente do triângulo, e não depende da escolha da base.

Sendo assim, a área de uma região poligonal, decomposta em um número finito de regiões triangulares quase disjuntas, será dada pela soma das áreas das regiões triangulares.

Ao definir a área da região como a soma das áreas dos triângulos, há, entretanto, uma dificuldade: toda a região poligonal pode ser decomposta em regiões triangulares de infinitas maneiras. Conseqüentemente, para definir a área de uma região poligonal como a soma das áreas das regiões triangulares, é necessário provar que esta soma depende somente da região que tomamos como ponto de partida e é independente da maneira em que a decompomos[6] (HARTSHORNE, 1997).

Assim temos na equidecomposição um elemento que permite falar em área sem número; em conseqüência, a construção desta teoria matemática mostra que não é necessário começar a abordar área a partir do aspecto numérico, que é absolutamente coerente com a proposta didática de Douady e Perrin-Glorian. Sendo assim a equidecomposição ajuda a fortalecer o conceito de área como grandeza sem precisar passar pelo aspecto numérico. A partir disto, achamos importante olhar, via abordagem dos livros didáticos, se na escola aspectos relacionados à equidecomposição estão sendo favorecidos ou não.

[6] A prova desse resultado pode ser encontrada em Hartshorne (1997, p. 207 –211).

2.2. GRANDEZAS GEOMÉTRICAS E SUAS MEDIDAS

O campo conceitual das grandezas inclui as situações cuja apropriação requer o conceito de grandeza e outros correlatos tais como medida. As grandezas são entendidas como propriedades dos objetos. As medidas quantificam as grandezas e são essenciais para a interpretação de fenômenos do mundo físico e social. As grandezas podem ser físicas ou geométricas, discretas ou contínuas.

O conceito de grandeza é considerado por Bellemain e Lima (2002) como um conceito primitivo, tomado numa estrutura axiomática de organização do campo conceitual das grandezas. Esses autores adotam o ponto de vista no qual se concebe uma distinção e, simultaneamente, uma estreita articulação entre os objetos do mundo físico e os objetos matemáticos. Os primeiros, perceptíveis pelos sentidos, observados pelos variados instrumentos produzidos nas culturas humanas. Os segundos, entes de razão, construídos por raciocínio lógico, inter-relacionados apenas por vínculos não-materiais.

Para construir de maneira formal o conceito de grandeza, conforme Bellemain e Lima (2002), é necessário remeter-se à busca de tornar logicamente preciso o conceito vago de "atributo A de elementos de um conjunto". Em Matemática, o caminho usual para isso tem sido definir uma relação de equivalência entre dois elementos do referido conjunto e, em seguida, considerar o conjunto das classes induzido por essa relação; cada uma dessas classes passando a ser, então, "o atributo A".

O modelo axiomático apresentado por eles toma o conjunto dos racionais estritamente positivos para valores das medidas, apenas indicando o que pode ser feito para estender tais medidas para o conjunto dos números reais[7]. Também neste sentido, Perrin- Glorian (2001) destaca que o trabalho sobre grandezas, em particular sobre as grandezas contínuas, demanda a extensão do domínio numérico e do sentido das operações.

As grandezas e medidas, conforme os PCNs (BRASIL, 1998), estabelecem conexões entre diversos temas, proporcionando um campo de problemas para a ampliação e consolidação do conceito de número e aplicação de conceitos geométricos. Dentre estas conexões, podemos destacar no campo numérico a construção histórica dos números racionais. Como se sabe, os números racionais têm sua origem com a necessidade de comparar grandezas e no ensino têm seu significado ampliado e consolidado em situações de medida, por exemplo, os números decimais e sua estreita relação com o sistema métrico decimal.

[7] Para descrição do modelo axiomático, vide Bellemain e Lima (2002).

A medida das grandezas e a quantificação de relações entre grandezas têm sido ao longo dos tempos um modo de avançar na matemática e na construção dos números (PERRIN-GLORIAN, 2001). Desde a introdução das primeiras operações aritméticas engaja-se uma dialética fecunda e complexa entre números e grandezas.

Neste trabalho nos interessamos pelas grandezas geométricas, que incluem comprimento, área, volume e ângulo.

O conceito de ângulo é fundamental para a compreensão da maioria das propriedades das figuras e das relações geométricas que o ensino formal pretende que as crianças aprendam na escola; porém, a palavra "ângulo", no senso comum, está ligada a idéias como quina, esquinas ou giros. Esta é a noção de ângulo que os alunos trazem para a escola. O conceito de ângulo enquanto grandeza pode ser visto como um atributo do afastamento entre duas retas que têm um ponto comum.

Quanto ao volume, numa abordagem intuitiva próxima do senso comum, volume de um sólido geométrico é a quantidade de espaço por ele ocupado; a comparação de volumes é feita de diversas formas, em particular pela medição com unidades padronizadas ou não (BARROS, 2002). Para Vergnaud (1983), o volume pode ser concebido sob dois aspectos: como uma grandeza que pode ser medida diretamente (caso dos recipientes), portando propriedades que são inerentes às grandezas unidimensionais; ou a medida do volume pode ser calculada por uma combinação de informações das grandezas de uma outra natureza (comprimentos e áreas), o que implica mais que a simples utilização das fórmulas, requerendo uma concepção tridimensional de volume.

Podemos medir através da comparação direta com uma unidade de mesma espécie do atributo que se deseja medir ou pelo produto de medidas lineares, como é o caso da área e do volume (BRASIL, 1998). Barbosa (2002) também enfatiza que essa medida (da grandeza) é um número, nos casos mais simples, significando o número de vezes que a unidade cabe na grandeza a medir e que, conseqüentemente, resulta desse fato a última relação existente, ao longo da evolução do pensamento, entre grandeza e número. No caso da medida de área, por exemplo, quando contam-se as superfícies unitárias numa malha quadriculada, trata-se de uma medida direta, onde prevalece o aspecto unidimensional.

Em outras situações, a comparação direta não é possível ou é pouco prática. Intervém então o aspecto bidimensional da área em relação ao comprimento (para calcular a área de uma figura, utilizam-se comprimento de lados, arestas, etc). A inclusão das relações entre área e comprimento conduz a considerar também o quadro algébrico funcional.

- **COMPRIMENTO E PERÍMETRO:**

Comparar o comprimento de caminhos ou de linhas, comparar distâncias entre dois pontos são, sem dúvidas, operações bastante primitivas, realizadas pelo homem nas várias culturas, desde épocas imemoráveis. Como exemplo de possíveis situações práticas, em sociedades primitivas que podem ter favorecido o surgimento da noção de perímetro, destacam-se a confecção de cestos de palha, peneiras, redes de pesca e outros objetos (BARBOSA, 2002).

Para Barbosa (2002), o perímetro é uma instância da grandeza comprimento, por sua vez, participante do campo conceitual da grandeza área. Perímetro de uma figura geométrica plana pode ser tomado como o comprimento da linha ou como o comprimento do contorno da região plana definida pela linha (BARBOSA, 2002 e BRITO, 2003). Diferentes linhas podem possuir o mesmo comprimento.

Brito (2003), apoiando-se no jogo de quadros de Douady, considera o comprimento como uma grandeza e destaca os seguintes quadros:

- Geométrico – linhas abertas ou fechadas; contorno de uma figura plana;
- Numérico – medidas de comprimento usando diferentes unidades;
- Grandeza – comprimento – propriedade da linha ou do contorno.

Perrot (1998) destaca que o processo de construção das grandezas geométricas, geralmente é trabalhado nas escolas de forma extremamente insatisfatória, gerando nos alunos algumas dificuldades conceituais de aprendizagem. Com relação ao conceito de comprimento e perímetro, por exemplo, muitas vezes os alunos fazem confusão entre perímetro e área, e também entre contorno e superfície; fazem confusão entre grandezas e medidas da grandeza; sabem calcular medidas, usando fórmulas, sem saber o que eles calculam; acham que somente os segmentos de reta têm um comprimento; acham que somente os polígonos “particulares”, os que têm um nome e fórmulas, têm também um perímetro e uma área (BARBOSA, 2002).

2.3. ÁREA COMO COMPONENTE DO CAMPO CONCEITUAL DAS GRANDEZAS GEOMÉTRICAS

Discutimos nessa sessão aspectos importantes para a construção do conceito de área como grandeza geométrica: a conservação de área; a dissociação área e perímetro; a medida de área; as unidades de medida e cálculo numérico.

i) ÁREA COMO GRANDEZA E CONSERVAÇÃO DE ÁREA

A abordagem de área como grandeza articula-se do ponto de vista do desenvolvimento cognitivo com a idéia de conservação.

A conservação de área permite ao sujeito admitir que figuras qualitativamente diferentes possam ser equivalentes quanto ao tributo área. Segundo Kordaki (2003), a compreensão desse conceito exige a articulação entre representações visual, numérica e simbólica.

Para Kordaki (2003), a área, como um espaço dentro de uma figura, e o conceito de conservação da área, são conceitos preliminares para a compreensão do conceito e da medida da área. A área é um atributo estável – uma dimensão mensurável definitiva das superfícies planas incluídas por figuras. Uma área pode ser conservada quando a forma de sua figura for alterada:

> A conservação da área significa que uma área inteira - que é composta das sub-áreas organizadas, pode permanecer invariante apesar do rearranjo de suas peças e do todo. A habilidade de analisar uma área inteira desta maneira é pré-requisito à medida da área porque ao medir uma área supomos, como fazemos para toda a medida, que as unidades parciais estão conservadas e podem ser compostas em uma variedade de maneiras para dar forma a um todo invariante (KORDAKI, 2003, p. 179).

A noção de conservação de área, posta desta forma, articula-se com a idéia de equidecomposição de polígonos e permite falar em área enquanto grandezas.

Kordaki (2003) evidencia em seu trabalho entraves provocados pela abordagem precoce da medida e das fórmulas na matemática escolar, reforçando os resultados das pesquisadoras francesas Douady e Perrin-Glorian (1989).

Em sua revisão bibliográfica, Kordaki (2003) destaca que dificuldades dos estudantes a respeito da medida da área são relacionadas à sua introdução prematura à abordagem quantitativa da área usando fórmulas da área, ao negligenciar uma abordagem qualitativa que enfatiza o conceito de conservação da área sem o uso dos números. Uma abordagem qualitativa reconhece a necessidade de possibilitar aos estudantes a construção do conceito de conservação da área através da decomposição e composição de áreas, inclusive com unidades de medidas diferentes, que possibilita construir a idéia que dependendo da unidade utilizada os valores numéricos correspondentes à área podem modificar, mas a área permanece a mesma. Kordaki (2003) relaciona este aspecto à construção do significado das fórmulas.

O trabalho de Kordaki (2003) referencia, assim como a construção matemática da função medida área, a noção de área como grandeza defendida em nossa pesquisa. Reforça ainda a hipótese que se pode abordar o conceito de área na escola, sem focalizar de imediato os aspectos numéricos. Por outro lado, aspectos relacionados à conservação da área sinalizam para imbricações entre o campo conceitual da geometria e das grandezas.

ii) DISSOCIAÇÃO ENTRE ÁREA E PERÍMETRO

Outro aspecto importante na construção do conceito de área é a dissociação entre área e perímetro.

Baltar (1996) classificou a distinção entre área e perímetro de acordo com quatro pontos de vista:

- Topológico, pelo qual os conceitos de área e perímetro correspondem a objetos geométricos distintos, sendo a área associada à superfície e o perímetro a seu contorno;
- Dimensional, evidencia que uma superfície e seu contorno são objetos matemáticos de naturezas distintas, no que diz respeito às dimensões, o que traz conseqüências imediatas sobre o uso das unidades adaptadas à expressão das medidas de área e perímetro;
- Computacional, que corresponde à aquisição das fórmulas de área e perímetro de figuras usuais;
- Variacional, consiste na aceitação de área e perímetro que não variam necessariamente no mesmo sentido, e que figuras de mesma área podem ter perímetros distintos e vice-versa.

O pesquisador paulista Perrotta (2001), apoiando-se nos estudos de Baltar (1996), investigou, utilizando uma "abordagem manipulativa", como alunos constroem os conceitos de área e perímetro e conseguem dissociá-los entre si, isto é, analisou se entenderam que modificações no perímetro não implicam necessariamente em mudanças na área e vice-versa. Dentre os aspectos destacados em seu estudo, Perrota (2001) evidenciou que a ausência de figuras influenciou nos procedimentos adotados pelos alunos. O autor também identificou algumas categorias de erros, dentre elas: erros de cálculo ("erro nas quatro operações aritméticas"); erros conceituais (utilização do procedimento do cálculo de área para o de perímetro e vice-versa; confusões entre as unidades de área e perímetro), o que também foi observado por Baturo e Nason (1996). Desta forma, Perrota (2001) confirma pesquisas anteriores ao evidenciar que mesmo depois da execução de uma seqüência que explorou e enfatizou a dissociação entre perímetro e área, apesar do significativo aprendizado, alguns alunos ainda pareciam não ter dominado os conceitos de área e perímetro e suas relações, o que, a nosso ver, destaca a complexidade do tema e a importância de elaborar situações didáticas mais eficientes. Por outro lado, os resultados de Perrota (2001) reforçam nossa hipótese que imbricações entre campos conceituais precisam ser consideradas em situações de ensino aprendizagem.

iii) MEDIDA DE ÁREA

Baturo e Nason (1996) em sua revisão de literatura destacam que estudos indicam que muitas crianças e professores têm dificuldades com a medida da área. Tais dificuldades podem freqüentemente estar relacionadas a uma noção limitada do atributo da área. A área necessita ser considerada sob duas perspectivas: *estática* ou *dinâmica*.

Uma outra fonte de dificuldade emana da forma da prática cultural para o cálculo das medidas de área. A forma praticada culturalmente não é aplicar unidades de área às áreas que serão medidas. Em vez disso, usam-se duas medidas de comprimento nas fórmulas que dão um resultado na unidade de área.Entretanto, este procedimento de multiplicar as duas grandezas lineares (por exemplo, comprimento pela largura) desloca-se conceitualmente da noção de área. Conseqüentemente, a medida resultante é vista como não tendo relacionamento ao que está sendo medido. Sendo assim uma unidade da medida linear é usada em vez de uma unidade da medida da área, por exemplo, 6 cm x 4 cm = 24 cm ao invés de 24 cm^2 (BATURO e NASON, 1996).

Outro aspecto importante destacado por Perrota (2001) é a possibilidade de interferência do livro didático na compreensão dos conceitos de área e perímetro. Ele verificou, por meio da análise de alguns livros didáticos, que a introdução dos conceitos de área e perímetro no 2º ciclo do Ensino Fundamental (3ª e 4ª séries) já é feita mediante o emprego de fórmulas, ou então utilizando a idéia de ladrilhamento, mas em nenhum foi observado o aspecto histórico relativo aos conceitos estudados, como sugerem os PCNs. No estudo de Perrota (2001), os grupos que usaram somente o livro didático como material pedagógico apresentaram mais dificuldades em situações não padronizadas, isto é, situações que não foram trabalhadas anteriormente. Conforme o autor,

> Esta constatação dá a impressão que os alunos somente memorizaram as fórmulas e não se apropriaram dos conceitos.... Também as situações envolvendo relações e dissociações entre área e perímetro apresentaram índice de acerto menor para estes grupos (2001, p. 146).

O indicativo de Perrota (2001) confirma os estudos de Baturo e Nason (1996), que destacaram que, em alguns casos, as dificuldades que os estudantes têm com cálculo de área podem ser oriundas das experiências de aprendizagem fornecidas em nossas escolas. Infelizmente, frisam Baturo e Nason (1996), há uma tendência que predomina entre os professores que é focalizar no aspecto do número mais do que no desenvolvimento conceitual do processo de medição. Assim, para muitos estudantes, a maioria de suas experiências com cálculo de área foi a memorização e a aplicação rotineira de fórmulas da área. Porque estes alunos foram privados de experimentar a medição concreta, como o recobrimento de uma região inteira com as unidades de medida, eles tendem a ter noções pobres do atributo área tais como a "área é o que você obtém quando multiplica o comprimento pela largura". Naquelas escolas onde os professores fornecem aos estudantes experiências concretas para desenvolver a noção da área e suas medidas, é feita freqüentemente de forma apressada e desconectada ou, se feita conscienciosamente, tende a focalizar quase exclusivamente a perspectiva estática da noção de área, em detrimento da perspectiva dinâmica da área.

iv) AS UNIDADES DE MEDIDA E O CÁLCULO NUMÉRICO

A confusão entre as unidades de medida, entre outros aspectos, pode ser conseqüência da confusão entre medida dos comprimentos de uma superfície e a medida da área desta mesma superfície (BATURO e NASON, 1996).

Segundo Bellemain e Lima (2002), os erros cometidos com mais freqüência estão ligados à expressão da medida de área de uma superfície, cujos comprimentos dos lados são dados em metros e a resposta em metros ou mesmo em centímetros, ao invés de metros quadrados, ou seja, mantém a unidade de comprimento para expressar a unidade de medida de área.

A pesquisa de Facco (2003) focalizou, entre outros aspectos, estratégias dos alunos para o cálculo da medida de área. A pesquisadora paulista observou que as estratégias estão centradas na multiplicação da medida do comprimento pela medida da largura da figura em estudo, sem considerar a unidade de medida utilizada no problema proposto. Em seu trabalho, ela também mobilizou diferentes representações para os números racionais e evidenciou dificuldades dos alunos neste campo numérico. Facco (2003), confirmando pesquisas anteriores, apontou algumas dificuldades enfrentadas pelos alunos: a construção de um triângulo não retângulo dificultou o cálculo da medida de área; confusão entre área, unidade de medida de área e perímetro; dificuldades para registrar a unidade de medida de área; dificuldades para calcular a medida de área do quadrado em posições diferentes.

Baturo e Nason (1996) também apontaram, numa situação onde os alunos deveriam calcular a área de um retângulo, que apesar de demonstrarem conhecimento computacional apropriado, muitos não obtêm a resposta correta por causa de dificuldades relacionadas ao campo numérico. Para muitos estudantes, a medida da área calculada provavelmente não tem relação com o que era medido. Isto é, o conhecimento computacional não foi conectado ao conhecimento conceitual. Confirma a hipótese que os alunos não levam em consideração o aspecto bidimensional da área

> Quando perguntados se a área do retângulo é maior ou menor que um metro quadrado, todos os estudantes disseram que era mais de 1 metro quadrado com exceção de dois. Justificaram que há 100 cm em um metro. Estas respostas emprestam uma sustentação adicional a nossa inferência sobre a falta de compreensão dos estudantes acerca da conexão entre a medida da área calculada e o que era medido (BATURO e NASON, 1996, p. 249).

Conforme Baturo e Nason (1996), estes estudantes mostraram claramente pouca compreensão de como as medidas da área evoluem das medidas lineares quando uma fórmula para calcular uma área é aplicada. Isto sugeriu que suas experiências instrutivas tinham sido pobres e tinham adquirido conseqüentemente um conhecimento cultural matemático limitado no domínio da medida da área.

2.4 AS FÓRMULAS DE ÁREA DO RETÂNGULO, DO PARALELOGRAMO E DO TRIÂNGULO COMO COMPONENTES DO CAMPO CONCEITUAL DAS GRANDEZAS GEOMÉTRICAS.

Os tópicos anteriores evidenciam a necessidade de construir o significado das fórmulas de área relacionado às noções de equidecomposição (HARTSHORNE, 1997), conservação de área (KORDAKI, 2003), como também abordar no ensino a evolução da medida da área em relação às medidas lineares quando a fórmula é aplicada (BATURO e NASON, 1996). Estas evidências fortalecem nossas hipóteses sobre a fórmula como conceito pertencente ao campo conceitual das grandezas geométricas e ao mesmo tempo elemento que articula vários campos conceituais.

i) AQUISIÇÃO DA SIGNIFICAÇÃO DAS FÓRMULAS

Baltar (1996) confirma a hipótese oriunda das pesquisas de Douady e Perrin-Glorian (1989): “O desenvolvimento do ensino do conceito de área enquanto grandeza permite aos alunos estabelecer as relações necessárias entre os dois quadros geométrico e numérico”.

A autora fez seu estudo sob os pontos de vista *estático* e *dinâmico*. O primeiro refere-se ao ambiente papel e lápis e o segundo a atividades com o software de geometria dinâmica Cabri-geomètre. O estudo das fórmulas de área e perímetro foi feito do ponto de vista dos **invariantes geométricos** em jogo nas deformações de paralelogramos e triângulos.

A autora levantou a hipótese que a aquisição da significação das fórmulas de área se relaciona aos vários níveis que correspondem à disponibilização delas nos diferentes tipos de situações problema:

1º nível: consiste em favorecer o tratamento das situações de cálculo de área das figuras geométricas usuais.

2º nível: corresponde a interpretar a fórmula como uma forma de expressar a relação entre comprimentos característicos da figura (invariantes geométricos e a área).

Este nível corresponde à disponibilidade das fórmulas nas **situações não numéricas**, como a comparação das áreas de paralelogramos e triângulos, a produção de superfícies de mesma área e o estudo das variações da área e do perímetro por conseqüência das deformações do paralelogramo, como ilustradas nas figuras abaixo[8].

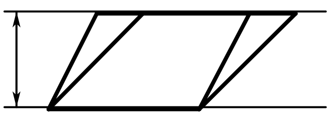


Figura 1A

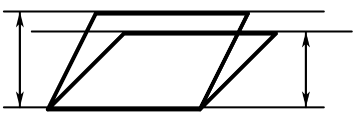


Figura 1B

Para favorecer a apropriação deste segundo nível, Baltar (1996) usa o ponto de vista dinâmico.

[8] Note-se que na figura 1 A, representando o deslizamento de um lado sobre sua reta suporte, a área é conservada e o perímetro varia e na figura 1B, representando a articulação de um lado em torno de um vértice, a área varia e o perímetro é constante.

A utilização mecânica das fórmulas refere-se ao fato dos alunos calcularem áreas aplicando fórmulas, sem saber o que estão fazendo de fato, por não compreenderem o conceito de área, por exemplo, ou não compreenderem o significado das fórmulas. Souza e Neto (2004) desenvolveram uma pesquisa sobre o ensino – aprendizagem das fórmulas de área de polígonos convexos com alunos de 8ª série do Ensino Fundamental de uma escola pública em Natal/RN. Neste estudo, verificaram como o aluno compreende o caráter funcional das variáveis na fórmula para área do retângulo. Conforme os autores, as observações feitas durante a realização de uma intervenção metodológica (seqüência didática) e a análise de dados obtidos num pós-teste, ambas de caráter qualitativo, mostraram, entre outros aspectos, o uso incorreto, por parte dos alunos, da sintaxe da álgebra como, por exemplo, manipulações algébricas incorretas das fórmulas de área e a falta de parênteses e desconhecimento da utilização das propriedades da igualdade nas fórmulas.

Uma outra fonte de dificuldade aparece em conseqüência da prática cultural formal para o cálculo de área ser baseada na noção da disposição da multiplicação. Infelizmente, muitos estudantes têm somente uma compreensão da representação linear de uma dimensão da multiplicação como a adição repetida. Assim, são incapazes de perceber o sentido das medidas da área calculadas pelas fórmulas (BATURO e NASON, 1996).

As análises do teste aplicado por Baturo e Nason (1996) destacam que as respostas indicaram claramente: (a) o conhecimento substancialmente inadequado em termos computacionais e principalmente o conhecimento conceitual, (b) conhecimento inadequado do discurso nos termos da consciência dos métodos para verificar a compreensão de seus cálculos da área, e (c) falta do conhecimento sobre como as fórmulas de área são construídas (isto é, conhecimento cultural matemático).

ii) PRINCÍPIOS RELACIONADOS À COMPREENSÃO DA FÓRMULA DA ÁREA DO RETÂNGULO.

Em Perrin-Glorian (2001), a análise de pesquisas australianas sobre o conceito e cálculo de área mostra que mesmo no caso da superfície conter um número inteiro de unidades a área demanda uma relação entre os quadros geométricos e numéricos e demanda a conexão e conhecimentos espaciais concernentes ao ladrilhamento, e também conhecimentos numéricos, em particular concernentes à numeração.

A medida da área do retângulo coloca em jogo alguns princípios. Perrin-Glorian (2001), citando pesquisas australianas:

1) o retângulo deve ser inteiramente recoberto e não deve haver sobras;
2) os quadrados unitários precisam ser congruentes e alinhados;
3) o número de unidades de cada linha e cada coluna pode ser determinado a partir das dimensões do retângulo.

Um quarto princípio necessário para compreensão da fórmula do retângulo:

4) o número de unidades de uma representação retangular é o produto do número de unidades de cada linha pelas unidades de cada coluna.

Baturo e Nason (1996) também evidenciam dificuldades relacionadas ao domínio numérico em atividades que envolvem fórmulas de área do retângulo e do quadrado.

Na pesquisa de Baturo e Nason (1996), como eles já previam, todos os estudantes souberam calcular a área de um quadrado de lado 2,8 m, embora, surpreendentemente, muitos usassem a fórmula 'comprimento vezes largura', em vez da fórmula usual 'lado vezes lado'. Entretanto as computações eram mal sucedidas devido a: (a) aplicação defeituosa do algoritmo da multiplicação; (b) a dificuldade em colocar o ponto decimal na resposta.

Assim, embora não sendo o foco destas pesquisas, as constatações evidenciam a necessidade de refletir sobre imbricações entre campos conceituais no estudo das fórmulas.

iii) ÁREA DO PARALELOGRAMO E DO TRIÂNGULO.

A construção do significado e a manipulação eficiente das fórmulas de área. de paralelogramos e triângulos demandam a compreensão de propriedades geométricas, como a invariância da área em relação a um lado tomado como base.

Para caracterizar uma figura "prototípica" do paralelogramo, por exemplo, considera-se a posição relativa dos lados, que podem estar na horizontal, na vertical ou ambos os lados em posição oblíqua. Outros critérios são a inclinação da figura e o comprimento dos lados. Esta discussão torna evidente a imbricação entre o campo da geometria e o campo das grandezas na construção do significado da fórmula da área do paralelogramo.

A figura prototípica do paralelogramo, apresentada numa coleção de livros didáticos analisada por Santos (2005), possui o lado de maior comprimento predominantemente na posição horizontal. Segundo a autora, isto pode influenciar de certa forma na idéia de base e altura que são centrais na aplicação da fórmula de área do paralelogramo. Com relação à inclinação do paralelogramo, prevalece a direita.

Nas questões em torno do **tratamento da figura,** Baltar (1996) apoiou seu estudo sobre a necessidade, para construir o conceito de área, de estabelecer as relações entre as fórmulas de área e de perímetro e os **invariantes geométricos da figura.** A autora destaca a necessidade de um trabalho geométrico sobre o tratamento das figuras em caso não prototípico.

Ainda quanto à independência da área em relação à escolha da base destaca-se a origem de algumas dificuldades, entre elas, a base é para os alunos o lado horizontal ou o de maior comprimento e a dificuldade de identificar altura exterior nos triângulos.

Baltar (1996), a propósito da construção do conceito de área, destaca a importância das variáveis ligadas "à forma e à posição" da figura. A autora chega a propor o prolongamento do seu trabalho com uma maior ênfase em variáveis deste tipo. Um destes trabalhos é o de Santos (2005) que investigou a relação entre a abordagem da área do paralelogramo em uma coleção de livros didáticos para as séries finais do ensino fundamental e os procedimentos utilizados pelos alunos. Em suas questões[9], a autora verificou, por exemplo, quanto à idéia de base e altura, que os alunos desenham a figura do paralelogramo com um dos lados na posição horizontal, tomando-o como o de maior comprimento com o intuito de determinar o comprimento da altura relativa ao lado BC. A maioria dos alunos traçou a altura dada no interior do paralelogramo.

Também já foi amplamente discutida, em pesquisas anteriores (DOUADY e PERRIN-GLORIAN, 1989; BALTAR, 1996; SANTOS, 2005; por exemplo), a extensão indevida da fórmula área do retângulo para o cálculo da área do paralelogramo. Os alunos ao mobilizarem a fórmula bxh para calcular a área do paralelogramo tomam como valores para a altura a medida do comprimento de um dos lados.

CONCLUINDO OU COMEÇANDO..........

Recentemente vários pesquisadores têm realizado investigações sobre a didática das grandezas geométricas - comprimento, área, volume, dentre eles, Baltar (1996), Lima (1999), Perrota (2001), Barbosa (2002), Lima e Bellemain (2002), Duarte (2002), Barros (2002), Oliveira (2002). Brito (2003), Facco (2003), Kordaki (2003), Silva (2004) e Baturo e Nason (2006). Conforme Bellemain e Lima (2002), a complexidade desse campo conceitual gera uma grande dificuldade na análise dos erros cometidos pelos alunos do Ensino Fundamental e na investigação das origens possíveis destes erros. Ainda conforme os autores, muitas das

[9] Por exemplo: "Seja um paralelogramo ABCD tal que o lado AB mede 6 dm e o lado BC mede 4 dm. Sabendo que a altura relativa ao lado AB mede 3 dm, é possível determinar o comprimento da altura relativa ao lado BC? Justifique sua resposta".

dificuldades conceituais podem ser relacionadas ao domínio numérico, ao domínio geométrico ou às relações algébricas e funcionais entre grandezas de diferentes dimensões. Outra fonte de erros é a necessidade constante de relacionar conhecimentos oriundos de diversos campos na resolução de situações-problema em torno das grandezas geométricas.

Segundo os autores, há uma profunda imbricação da geometria, dos sistemas numéricos e das operações, incluindo uma forte relação com outros campos conceituais tais como o das estruturas aditivas, o das estruturas multiplicativas e o da álgebra.

Embora este tema seja, como já dissemos, amplamente estudado nas pesquisas em Educação Matemática, não identificamos em nossa revisão de literatura trabalhos específicos focalizando as fórmulas de área de figuras geométricas planas sob a perspectiva das imbricações entre campos conceituais.

CAPÍTULO 3
UM BREVE ESTUDO SOBRE A CONSTRUÇÃO DO SIGNIFICADO DAS FÓRMULAS DE ÁREA EM LIVROS DIDÁTICOS

A revisão de literatura apresentada no capítulo anterior evidenciou que a construção do significado das fórmulas de área de figuras geométricas planas está intimamente relacionada às noções de equidecomposição (HARTSHORNE, 1997) e conservação de área (KORDAKI, 2003). Também sinalizou para a possibilidade da interferência das abordagens dos Livros Didáticos no processo de construção de área como grandezas (PERROTA, 2001).

A equidecomposição ajuda a fortalecer o conceito de área como grandeza sem precisar passar pelo aspecto numérico. Será que a escola está trabalhando efetivamente este aspecto? Como isto é abordado nos Livros Didáticos?

Dentre os aspectos matemáticos, a perspectiva apresentada por Hartshorne (1997) para definição das fórmulas de área toma como elemento básico para decomposição das figuras o triângulo. Do ponto de vista matemático essa escolha se justifica pela possibilidade de estabelecer uma partição de qualquer região poligonal em triângulos. A área de uma região poligonal é dada pela adição das áreas dos triângulos. Um resultado importante é que se são realizadas diferentes triangulações de uma mesma região poligonal, a área da região poligonal independe da triangulação. E na escola que elemento básico é tomado e por que?

Um dos caminhos para verificar a abordagem escolar é via análise de livro didático, pois conforme o MEC (1999), o livro didático de Matemática, assim como os de outras disciplinas curriculares, tem tido grande influência na determinação do saber escolar culturalmente valorizado. Assim, no presente capítulo, a observação de como as fórmulas de área de figuras planas usuais são abordadas em duas coleções de livros didáticos de matemática para o Ensino Fundamental ajuda a destacar aspectos relacionados aos avanços incorporados nos livros didáticos a partir das Pesquisas em Educação Matemática e da avaliação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), e ao mesmo tempo elaborar alguns questionamentos relativos aos limites e possibilidades das abordagens, e também relativos à nossa problemática.

Oferece, ainda subsídios para fazer conjecturas sobre a articulação entre vários campos conceituais: das grandezas, da geometria, da álgebra, das funções e o campo conceitual numérico. Que situações (comparação, medida, produção ou outras) são utilizadas para tratar as fórmulas de área de figuras planas usuais e que teoremas em ação e conceitos algébricos, geométricos, numéricos ou funcionais podem estar implícitos nas abordagens adotadas pelos autores.

3.1. PROCEDIMENTO METODOLÓGICO

Mapeamos, sob o ponto de vista da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), conhecimentos que dão suporte às fórmulas de área do retângulo, do quadrado, do paralelogramo e do triângulo em duas coleções de livros didáticos para o Ensino Fundamental, escolhidas em função de possuírem boa avaliação no PNLD, por sua contribuição para o Ensino da Matemática e por serem utilizadas em Escolas Públicas e Privadas do Estado de Pernambuco:

- DANTE, Luiz Roberto. *Tudo é Matemática*. São Paulo: Editora Ática, 2002.
- IMENES, Luiz Márcio Pereira e LELLIS, Marcelo. *Matemática* São Paulo: Scipione, 1997.

Optamos por coleções de 5ª a 8ª série, por compreendermos que nelas encontra-se uma apresentação mais formal das fórmulas, pois conforme as orientações dos PCN nas séries iniciais deve-se trabalhar a construção do conceito, não necessariamente utilizando fórmulas, enquanto no ensino médio esperam-se situações de aplicação das fórmulas, uma vez que já foram apresentadas no ensino fundamental. Não temos a intenção de generalizar, mas abrir questões que vão subsidiar a construção do nosso instrumento de coleta de dados.

Através da análise das atividades relacionadas à área e das explicações dadas nos livros didáticos, identificamos aspectos relacionados à construção do significado das fórmulas de área do retângulo, do quadrado, do paralelogramo e do triângulo, tomando como referencial a abordagem de área como grandeza (PERRIN-GLORIAN, 1989; BALTAR, 1996). Em decorrência da concepção de área como grandeza, algumas questões nortearam esta análise:

- Em que conhecimentos apóia-se a construção do sentido das fórmulas de área do quadrado, do retângulo, do paralelogramo e do triângulo nos livros didáticos analisados? Para responder esta questão identificamos a definição de área e estratégias utilizadas nas duas coleções, a nomenclatura utilizada para designar figuras geométricas planas, a seqüência de apresentação das fórmulas para área de figuras geométricas planas.

- Que procedimentos vinculados à abordagem de área como grandeza estão subjacentes à introdução dessas fórmulas? Decomposição? Recomposição? Mudança de unidade?
- A invariância da área do paralelogramo e triângulos em relação à escolha do lado tomado como base é explicitada?
- A equidecomposição está sendo favorecida?
- Qual elemento básico é tomado para decomposição e recomposição das figuras? Qual a unidade de área? Qual a superfície unitária?

3.2. ANÁLISE

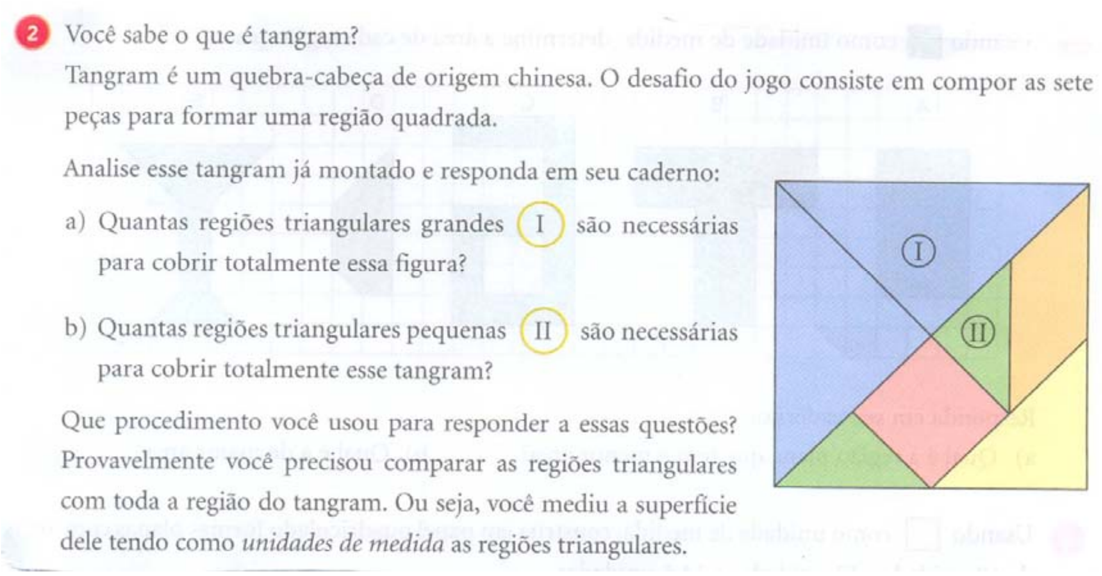
Com relação aos conhecimentos sobre os quais se apóia a construção do sentido das fórmulas de área, a análise das atividades relacionadas à área e das explicações dadas nas duas coleções mostrou que os autores definem área principalmente como “a medida de uma superfície”; “a área de uma região plana é igual ao número de unidades necessárias para cobrir essa região” (DANTE, 2002, p. 268, v.6). E destacam a importância de sabermos calcular a área de uma superfície, pois, por exemplo, para pintar uma casa, para colocar um carpete nos cômodos, o orçamento é feito com base no cálculo de áreas. Sendo assim evidencia-se nas definições apresentadas a articulação entre o quadro geométrico e o quadro numérico.

Conforme os autores, “para medir uma região do plano ocupada por uma figura qualquer F, comparamos F com uma unidade de área. O resultado dessa comparação é um número - a área de F – que indicará quantas vezes F contém a unidade de área” (DANTE, 2002, p. 204, V. 8ª série). A área neste caso é concebida como um número, embora se possa interpretar que trata-se, na verdade, de um par “número unidade”, o que de acordo com a abordagem adotada nesta pesquisa, designa uma grandeza.

Ao analisarmos como os autores fazem para introduzir o conceito de área, identificamos no volume da 5ª série da coleção de Imenes e Lellis a noção de área introduzida através da comparação de superfícies quadriculadas – área de um piso coberto de lajotas. No volume da 7ª série, desta coleção, a idéia apresentada inicialmente é que “a área aproximada de qualquer figura pode ser calculada contando-se o número de quadradinhos” (IMENES e LELLIS, 1997, p. 186).

Na apresentação da definição de área, prevalece a idéia de medida, ora entendida como número, ora como par “número unidade”. Essa escolha pode ter efeitos negativos na conceptualização da área como grandeza. Apesar disso, há outros momentos na abordagem desse conceito em que se trabalha a distinção entre área e figura por meio de atividades, possibilitando a compreensão que figuras distintas podem ter mesma área e também a distinção entre área e número, por meio da mudança de unidades. Esse trabalho é importante para a construção do sentido e o uso das fórmulas de área.

Por exemplo, a construção do conceito de área como grandeza é abordada em Dante (2002) no volume da 5ª série (p. 233) quando sinaliza para a distinção entre a área e o número, ao propor atividades que levam o leitor a concluir que “o número que expressa a área de uma superfície depende do tamanho da unidade considerada”.


2 Você sabe o que é tangram?

Tangram é um quebra-cabeça de origem chinesa. O desafio do jogo consiste em compor as sete peças para formar uma região quadrada.

Analise esse tangram já montado e responda em seu caderno:

a) Quantas regiões triangulares grandes (I) são necessárias para cobrir totalmente essa figura?

b) Quantas regiões triangulares pequenas (II) são necessárias para cobrir totalmente esse tangram?

Que procedimento você usou para responder a essas questões? Provavelmente você precisou comparar as regiões triangulares com toda a região do tangram. Ou seja, você mediu a superfície dele tendo como *unidades de medida* as regiões triangulares.

FIG.3.1 - DISTINÇÃO ÁREA E NÚMERO (DANTE, 2002, 5ª SÉRIE, P. 233).

Com relação às propriedades das figuras geométricas tratadas na abordagem das fórmulas de área, Dante (2002), no volume da 7ª série, no qual apresenta as principais fórmulas de área, revisa propriedades do paralelogramo: os lados opostos têm mesmo comprimento; os ângulos opostos têm medidas iguais; as diagonais cortam-se ao meio; todo paralelogramo apresenta simetria central. Também a altura do triângulo é explorada por Dante (2002) no volume da 6ª série (pág. 318) e por Imenes e Lellis (1997) no volume da 7ª série. Esta referência às propriedades das figuras, intimamente ligadas ao campo conceitual da geometria, nos remete a questionar que outros aspectos deste campo poderiam pertencer às situações que envolvem fórmulas de área.

Com relação à nomenclatura utilizada, de forma geral, as duas coleções utilizam as nomenclaturas região e superfície como sinônimos para polígonos e seguem praticamente a mesma seqüência para apresentação das fórmulas de área, diferindo apenas na quantidade de figuras escolhidas para serem abordadas em cada série. Por conta desta constatação adotaremos em nosso texto a seqüência: retângulo – quadrado - paralelogramo – triângulo.

O quadro abaixo resume a seqüência de apresentação das fórmulas para área de figuras geométricas planas que estão em foco em nosso trabalho nas duas coleções:

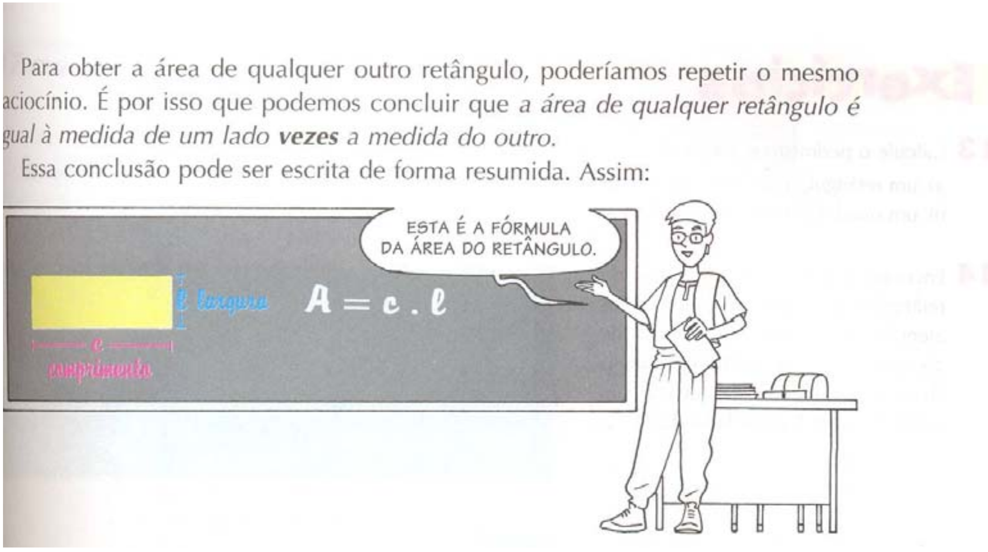
coleção	**5ª série**	**6ª série**	**7ª série**	**8ª série**
DANTE	Retângulo Quadrado (caso particular)	Retângulo Paralelogramo Triângulo qualquer	Quadrado Paralelogramo Triângulo	Quadrado Retângulo Paralelogramo Triângulo
IMENES E LELLIS	Retângulo Quadrado (caso particular)	Não trabalha fórmulas de área	Retângulo Paralelogramo Triângulo	Área do triângulo eqüilátero

Quadro 3.1 - SEQÜÊNCIA DE APRESENTAÇÃO DAS FÓRMULAS DE ÁREA NOS DOIS LIVROS DIDÁTICOS ANALISADOS

Para calcular área, os autores dizem que podemos usar vários processos, por exemplo, quadricular superfície ou medir alguns de seus elementos e efetuar operações.

Para a área da região retangular, Dante (2002) chama à memória a informação que “a área de qualquer região retangular é dada pelo produto da medida do comprimento pela medida da largura” (DANTE, 2002, p. 269 – 6ª série). Imenes e Lellis dizem que “a área de qualquer retângulo é igual à medida de um lado vezes a medida do outro” (IMENES e LELLIS, 5ª série, pág. 225), mas na ilustração apresentada também calculam comprimento x largura.As duas coleções utilizam a idéia da configuração retangular das estruturas multiplicativas de Vergnaud. Numa das situações aparece um comprimento não inteiro (4,5 cm), porém, visualmente por contagem de quadradinhos facilmente se calcula a área da região. O quadrado é tratado como um caso particular do retângulo.

Já no volume da 5ª série da coleção de Imenes e Lellis aparece a primeira referência à representação simbólica da fórmula de área do retângulo: $A = cx\ell$, onde a letra A representa a área do retângulo, c representa a medida de um lado e ℓ representa a medida do outro. Vale ressaltar que a figura aparece numa posição prototípica, ou seja, com o lado maior paralelo ao quadro (pág. 225).


Para obter a área de qualquer outro retângulo, poderíamos repetir o mesmo aciocínio. É por isso que podemos concluir que *a área de qualquer retângulo é gual à medida de um lado* ***vezes*** *a medida do outro.*

Essa conclusão pode ser escrita de forma resumida. Assim:

FIGURA 3.2 - FÓRMULA DA ÁREA DO RETÂNGULO (IMENES E LELLIS, 1997, 5ª SÉRIE, P. 225)

Segundo estes autores, a fórmula da área do retângulo também serve para obter a área do quadrado, porque o quadrado é um caso especial de retângulo – o quadrado é um retângulo com todos os lados iguais. Novamente as atividades sugerem procedimentos numéricos. Isto conduz a pensarmos sobre quais conjuntos numéricos estão em jogo a cada momento. Quais aspectos do campo conceitual numérico relacionam-se às situações envolvendo fórmulas de área? Por outro lado, tanto Douady e Perrin-Glorian (1989) quanto Kordaki (2003) destacam que os alunos enfrentam dificuldades relacionadas à introdução prematura da abordagem quantitativa da área usando fórmulas de área negligenciando uma abordagem qualitativa que enfatize o conceito de conservação. Esta dificuldade reflete uma imbricação entre os campos conceituais das grandezas e da geometria.

Dante (2002, p. 204, V. 8ª série) destaca que "Os matemáticos provaram que, mesmo que a medida do lado (l) de uma região quadrada seja um número real (racional ou irracional) não inteiro, essa fórmula é válida"; ou "Com relação a área de uma região retangular ele diz que em vez de contar quantas unidades de área estão contidas na região retangular, basta multiplicar a medida do comprimento pela medida da largura" e que os matemáticos também já concluíram que, "se a medida do comprimento (c) e a medida da largura (ℓ) forem números reais não inteiros, é válida a fórmula $A = c.\ell$." O autor parte do conhecimento já institucionalizado sobre a fórmula para calcular a área de uma região quadrada e propõe a demonstração abaixo para fórmula da área da região retangular. Nos outros volumes da coleção a fórmula de área do quadrado era sempre obtida a partir do retângulo, neste volume aparece o contrário: a partir da fórmula do quadrado obtêm-se a fórmula de área do retângulo, a partir desta a do paralelogramo e a do triângulo.

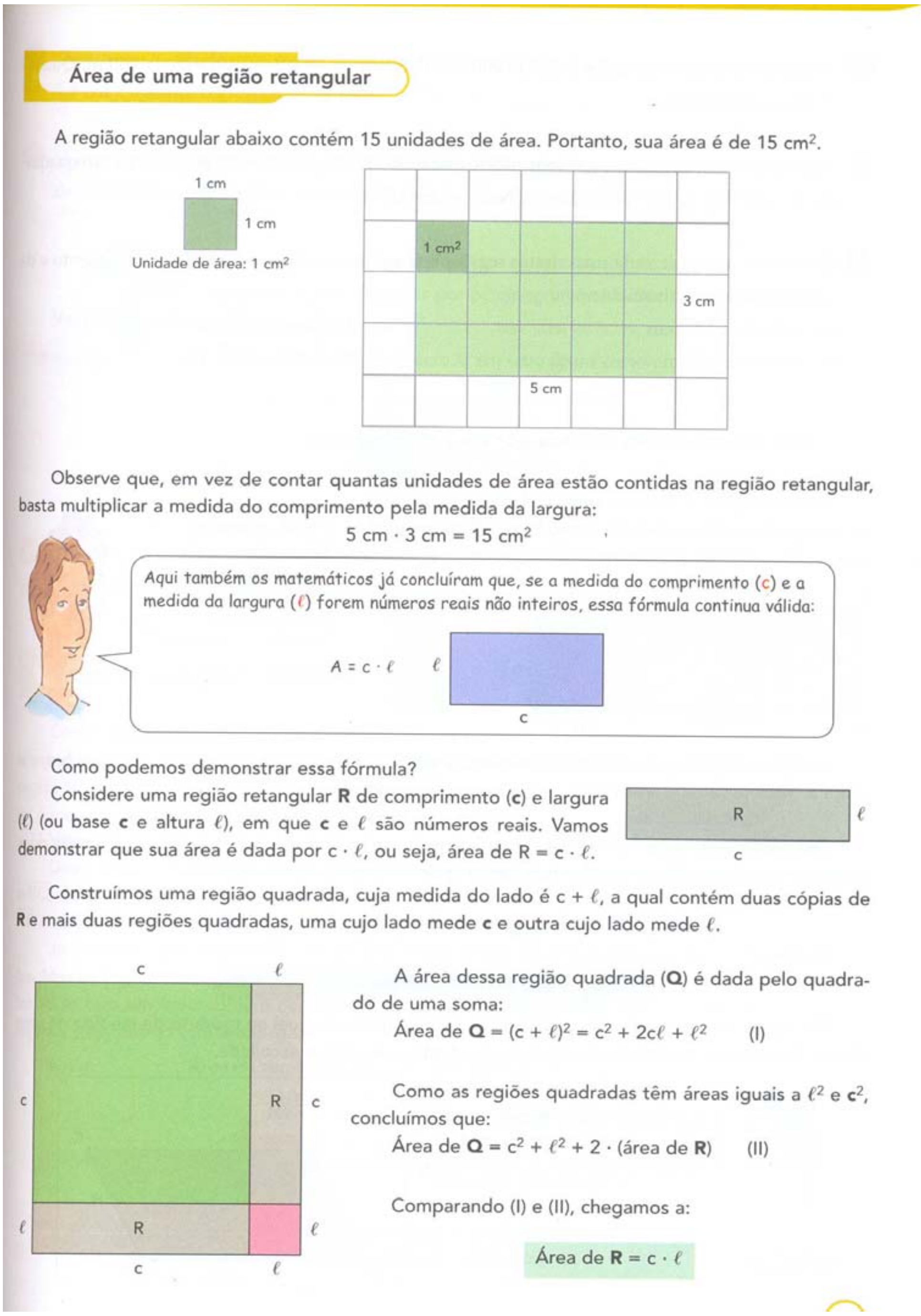
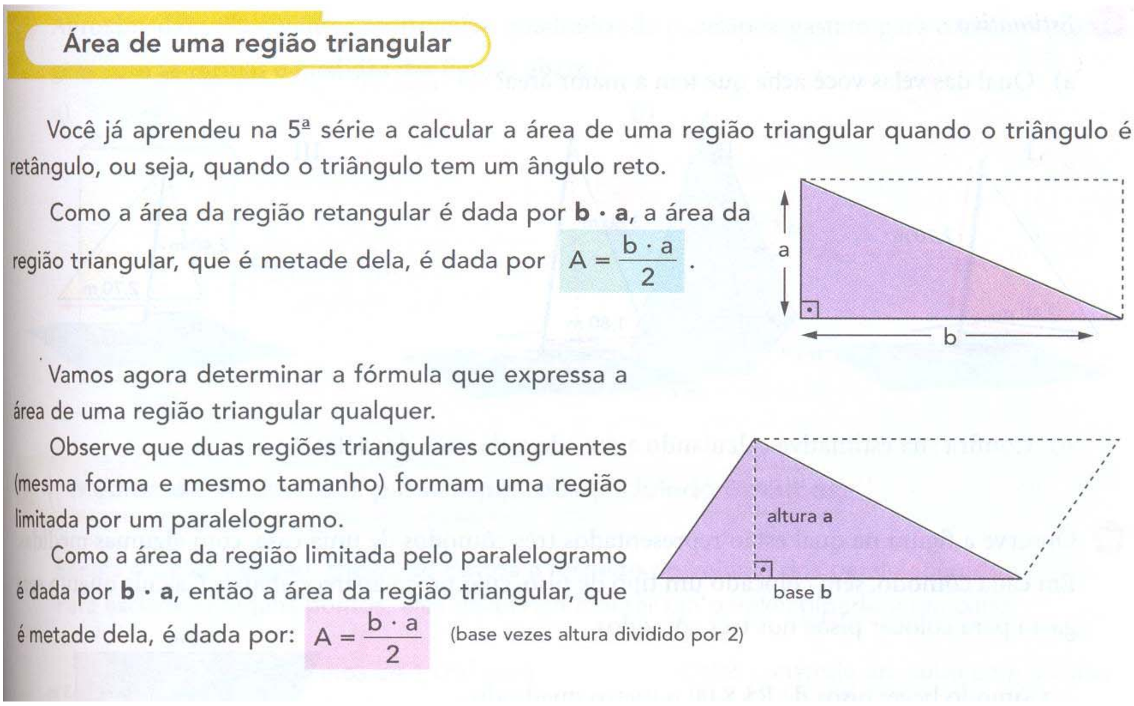


FIGURA 3.3. ÁREA DE UMA REGIÃO RETANGULAR (DANTE, 2002 – 8ª SÉRIE, P. 205)

Para apresentar a área de uma região triangular qualquer, no volume da 6ª e da 7ª série, Dante (2002) apóia-se no conhecimento adquirido na 5ª série: calcular a área de uma região triangular quando o triângulo é retângulo. Neste caso, a altura é facilmente identificada. Já numa região triangular qualquer, o autor recorre à figura do paralelogramo formada a partir do desenho de regiões triangulares congruentes.



Área de uma região triangular

Você já aprendeu na 5ª série a calcular a área de uma região triangular quando o triângulo é retângulo, ou seja, quando o triângulo tem um ângulo reto.

Como a área da região retangular é dada por **b · a**, a área da região triangular, que é metade dela, é dada por $A = \frac{b \cdot a}{2}$.

Vamos agora determinar a fórmula que expressa a área de uma região triangular qualquer.

Observe que duas regiões triangulares congruentes (mesma forma e mesmo tamanho) formam uma região limitada por um paralelogramo.

Como a área da região limitada pelo paralelogramo é dada por **b · a**, então a área da região triangular, que é metade dela, é dada por: $A = \frac{b \cdot a}{2}$ (base vezes altura dividido por 2)

FIGURA 3.4: FÓRMULA DA ÁREA DE UMA REGIÃO TRIANGULAR (DANTE, 2002, 6ª SÉRIE – P. 273)

Neste procedimento, identificamos a presença de imbricações entre o campo conceitual geométrico das grandezas e também algébrico. Ao mesmo tempo em que precisa, mobilizar conhecimentos referentes às propriedades e características das figuras, também mobiliza o conceito de área e manipulações simbólicas necessárias para a escrita das fórmulas.

Ao analisarmos procedimentos vinculados à abordagem de área como grandeza, subjacentes à introdução das fórmulas, identificamos alguns aspectos que indicam esta idéia, por exemplo, nas estratégias utilizadas nos livros didáticos para apresentar as fórmulas de área de figuras planas. Imenes e Lellis (1997) desenvolvem algumas atividades com o conceito de área sem medição na 5ª e na 6ª série, explorando a comparação de áreas sem medida, por inclusão, superposição e corte-colagem. Dante (2002) no volume da 5ª série destaca através dos exercícios, dos exemplos apresentados ou dos textos para leitura, a possibilidade de figuras diferentes terem mesma área. Assim, evidencia-se nestes procedimentos que contribuem para a construção pelo aluno da área como grandeza.

Outras estratégias também foram identificadas. Dante no volume da 7ª série faz a comparação entre duas estratégias para determinação da área de uma região quadrada: quadriculando-a e contando os quadradinhos – destacamos o aparecimento de quadradinhos não inteiros (0,5 e 0,25 para comprimentos dos lados) - ou aplicando a fórmula b x h - mobiliza a multiplicação de números decimais. Não identificamos nos textos dos livros didáticos analisados como os autores justificam a validade das fórmulas para qualquer domínio numérico. Por exemplo: como é construída a extensão dos naturais para os racionais, na validade da fórmula de área do retângulo? Dante (2002), no volume da 8ª série, faz uma tentativa neste sentido, apoiando-se na álgebra (figura 3.3).

Como observamos nas duas coleções e em outros estudos, a estratégia principal para cálculo da área do retângulo é a multiplicação das medidas dos comprimentos dos lados. Há neste ponto, uma forte presença do aspecto numérico, ora utilizando os recursos da estrutura multiplicativa de Vergnaud, decompondo a figura em quadradinhos, ora aplicando "tecnicamente" a fórmula base vezes altura. Neste segundo caso, como as medidas são facilmente identificáveis, a leitura e a interpretação da figura, ou seja, o aspecto geométrico não se sobressai. Há, porém, a formulação de algumas situações nas quais as medidas são dadas em função de outras, o que pode conduzir a um procedimento algébrico e/ou funcional ou simplesmente recair sobre a resolução de equações.

A equidecomposição está sendo favorecida nas abordagens dos livros didáticos, por exemplo, com relação à construção do significado da fórmula da área do paralelogramo. Nas duas coleções, a fórmula da área de uma região determinada por um paralelogramo é justificada por meio de **corte-colagem**, focando a equivalência de áreas.

Também, para iniciar a discussão sobre a área da superfície limitada por um triângulo retângulo, Dante (2002) sugere a decomposição da "região retangular" em dois triângulos retângulos, apoiando-se na propriedade do retângulo – 4 ângulos retos, ou seja, a área da região triangular é igual à metade da área da região retangular; não escreve formalmente: (b x h) / 2. Há ênfase em medidas inteiras.

Ainda, em Dante (2002 – 7ª série), partindo-se de uma figura retangular, usando recorte e colagens, montam-se outras 4 figuras com a mesma área da primeira e propõe-se que os alunos façam quatro diferentes. Também por meio da equidecomposição, destacada na 5ª série, evidencia-se a possibilidade de figuras diferentes terem mesma área.

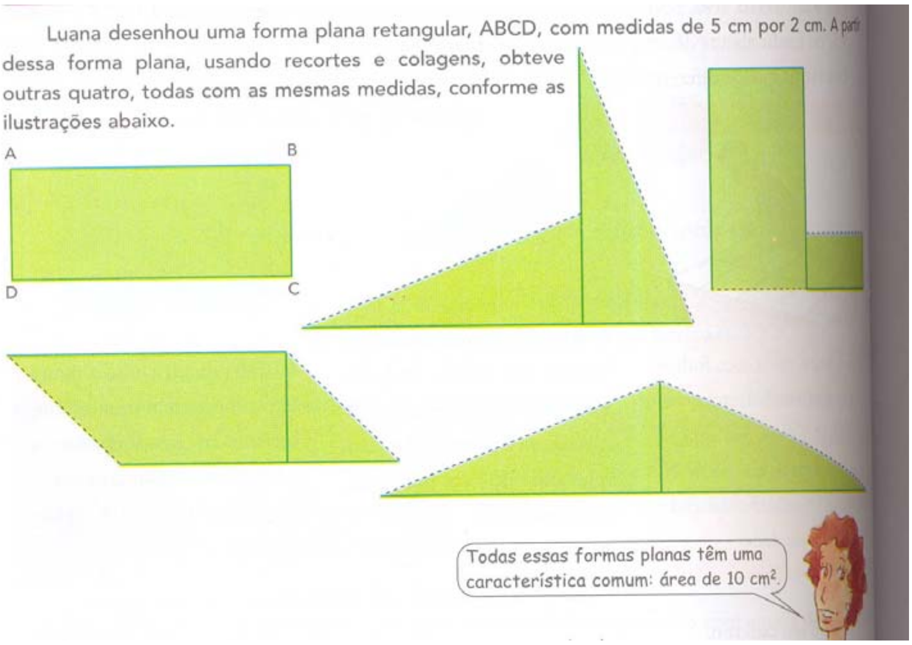


FIGURA 3.5: EQUIVALÊNCIA DE ÁREAS (DANTE, 2002, 7ª SÉRIE, P. 230)

Com relação à explicitação da invariância da área de paralelogramos e triângulos em relação à escolha do lado tomado como base, destacamos a abordagem de Dante (2002, v.6) ao propor a determinação da área de um paralelogramo, através da transformação deste numa região retangular; usa a decomposição e recomposição de figuras, partindo do pressuposto que o aluno já identifica, no paralelogramo, a altura relativa ao lado tomado como base, como também a invariância da área neste procedimento. A figura utilizada na situação é prototípica, conforme caracteriza Santos (2005), ou seja, a base escolhida está na posição horizontal e a inclinação é para direita. Na figura destacam-se os ângulos retos, indicando o perpendicularismo da altura em relação à base, mas não aparece de forma discursiva no texto.

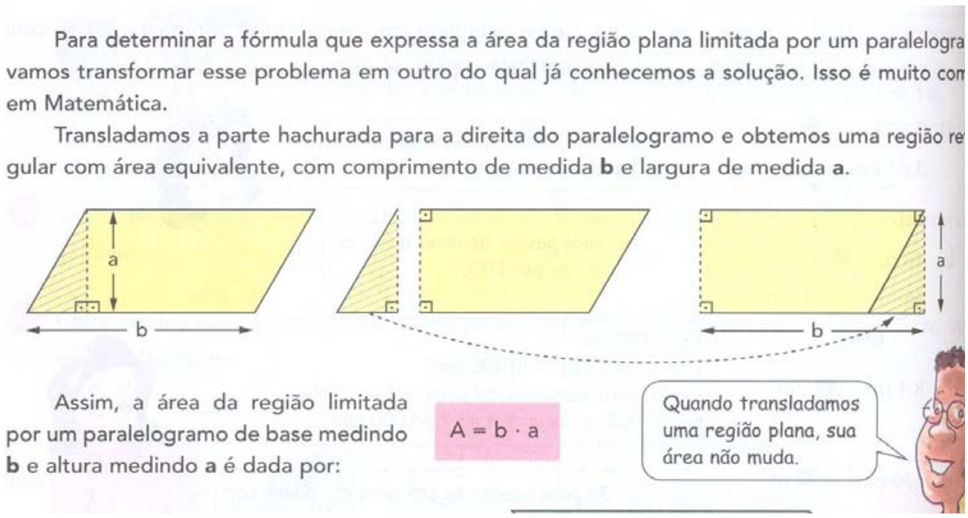


FIGURA 3.6.: FÓRMULA DA ÁREA DO PARALELOGRAMO (DANTE, 2002 – 6ª SÉRIE, P. 272)

Para construir o conceito de área, conforme Baltar (1996), é preciso estabelecer relações entre as fórmulas de área e de perímetro e os invariantes geométricos da figura. A autora destaca ainda a necessidade de um trabalho geométrico sobre o tratamento das figuras em caso não prototípico. Não identificamos em nenhum momento nas duas coleções a construção das fórmulas com figuras não prototípicas.

No estudo das fórmulas da área dos retângulos, paralelogramos e triângulos, tanto em Dante (2002) quanto em Imenes e Lellis (1997), a "base" é quase sempre o lado horizontal da figura. Esta constatação nos ajuda a questionar sobre quais conhecimentos e procedimentos que poderão ser mobilizados numa situação envolvendo fórmulas de área se as figuras forem apresentadas em posições não prototípicas, e até mesmo se elas não forem apresentadas e os alunos precisarem representá-las.

Ao refletirmos sobre o elemento básico tomado para decomposição e recomposição das figuras, a figura ou a região fundamental para construção do significado das fórmulas nas duas coleções analisadas é o retângulo, o que difere da perspectiva apresentada por Hartshorne (1997) para definição das fórmulas de área, que toma o triângulo como elemento básico para decomposição das figuras. As duas coleções analisadas para a fórmula do paralelogramo propõem a transformação desta região numa região retangular, e na fórmula de área do triângulo, a recomposição de uma região retangular formada por triângulos congruentes.

3.3. CONCLUINDO OU COMEÇANDO.......?

Este capítulo, muito mais que oferecer respostas, abre questões.

Na perspectiva de contribuir para o processo de ensino aprendizagem da matemática e sem a pretensão de sermos exaustivos, esta análise nos mostra que livros didáticos notoriamente antenados com os estudos em Educação Matemática são passíveis de elogios e questionamentos. Elogios no sentido de destacar os avanços incorporados em suas abordagens com relação ao conceito de área enquanto grandeza, por exemplo, ao focar a construção do significado das fórmulas a equivalência de área através da decomposição e recomposição. Através de corte-colagem os autores fazem da decomposição, recomposição de figuras uma estratégia que enfatiza a equivalência de área. É um procedimento de caráter geométrico, que trata área como grandeza, sem abordar essencialmente o aspecto numérico.

Outro avanço refere-se à dissociação entre área perímetro, tratada em questões onde, por exemplo, o aluno precisa produzir figuras de área diferentes a partir de um perímetro fixo.

Os questionamentos gerados referem-se, por exemplo, à opção por medidas inteiras. Com exceção da utilização de medidas não racionais por Imenes e Lellis, no volume da 8ª série, esporádicas situações propõem medidas não inteiras; quando isto acontece, o problema é resolvido por aproximação, ou as medidas são ½, ¼, etc. sempre de fácil visualização. Isso nos remete a uma reflexão sobre a importância dos domínios numéricos explorados nas situações.

Ou ainda questionamentos relativos às justificativas dadas à validade da fórmula da área do retângulo: vale para qualquer domínio numérico? Que tipos de medida são adotados: naturais, inteiras, racionais, irracionais? Como se dá a extensão dos naturais para os racionais? Será que esta abordagem tomando sempre como ponto de partida as estruturas multiplicativas, com medidas naturais, está favorecendo a aprendizagem dos alunos? O que precisaria do ponto de vista da Educação Matemática para entender a construção e os usos das fórmulas?

Finalmente, este estudo confirmou a necessidade de aprofundar a revisão de literatura sobre outros campos conceituais que podem estar relacionados ao estudo das fórmulas. O campo geométrico por tratar das propriedades e características das figuras geométricas planas; o campo numérico por conta dos domínios numéricos que podem intervir na situação; o campo algébrico pelas manipulações simbólicas subjacentes às situações e o campo funcional onde se exploram relações que são estabelecidas entre as grandezas em jogo nas situações.

Assim, sob a ótica dos campos conceituais, este estudo reforçou a necessidade de investigar radicações e filiações no estudo das fórmulas de área de figuras geométricas planas, que precisam apoiar-se, por exemplo, nas equidecomposições, na invariância da área, na extensão dos conjuntos numéricos.

No próximo capítulo discutimos as contribuições de outros Campos Conceituais para o estudo das fórmulas de área.

CAPÍTULO 4
AS FÓRMULAS COMO ELEMENTOS DE IMBRICAÇÕES ENTRE VÁRIOS CAMPOS CONCEITUAIS

Ao iniciarmos nosso estudo tínhamos a pretensão de caracterizar o que era próprio do campo conceitual da álgebra e o que era próprio do campo das grandezas em situações envolvendo fórmulas de área de figuras geométricas planas. Os estudos teóricos reconduziram a discussão em dois sentidos: primeiro, a dificuldade de caracterizar o que é próprio de cada campo nos levou a voltar nosso interesse para a questão das "imbricações" e não das "separações". Por outro lado, estudos experimentais preliminares (TELES e BELLEMAIN, 2006a), estudos teóricos sobre o Campo Conceitual das Grandezas e análises de livros didáticos conduziram à ampliação do nosso espectro de campos conceituais. Situações simples como as que utilizamos em nosso experimento subentendem inter-relações entre diversos campos conceituais: grandezas, geométrico, numérico, algébrico e funcional, o que reforça o ponto de vista defendido pelos PCN ao afirmar em relação aos blocos de conteúdos, que apesar de estarem divididos devem ser trabalhados integrados e inter-relacionados.

No presente capítulo, buscamos em pesquisas anteriores relativas aos campos conceituais supracitados subsídios para caracterizar as fórmulas de área de figuras geométricas planas como elementos de imbricações entre vários campos conceituais, apontando situações, invariantes operatórios e representações simbólicas subjacentes aos campos conceituais em foco e as suas inter-relações. Inicialmente do ponto de vista histórico, identificamos imbricações entre os campos conceituais na própria construção do conhecimento matemático. Num segundo momento, identificamos nas contribuições das pesquisas sobre ensino aprendizagem nesses vários campos conceituais elementos para melhor compreender o processo de apropriação das fórmulas de área por alunos da escola básica.

4.1 IMBRICAÇÕES TOMANDO COMO FOCO O ASPECTO HISTÓRICO:

De acordo com Bento de Jesus Caraça (1952), em seu clássico "Conceitos Fundamentais da Matemática", o homem, na sua necessidade de lutar contra a Natureza e no seu desejo de a dominar, foi levado, naturalmente, à observação e ao estudo dos fenômenos, procurando descobrir as suas causas e o seu encadeamento. Os resultados desse estudo, lentamente adquiridos e acumulados, vão constituindo o que, no decurso dos séculos da vida consciente da Humanidade, se pode designar pelo nome de Ciência.

O objetivo final da Ciência é, portanto, a formação de um quadro ordenado e explicativo dos fenômenos naturais, fenômenos do mundo físico e do mundo humano, individual e social. Qual o papel então da Matemática na formação desse quadro ordenado e explicativo? Como os estudiosos conseguiram encontrar os métodos de investigação que permitem fazer o estudo da realidade que está em permanente evolução?

Os conceitos matemáticos surgem quando são postos problemas de interesse capital, prático ou teórico.

Olhar as imbricações do ponto de vista histórico significa olhar para os problemas que deram origem aos conceitos e como foram tratadas estas questões práticas ou teóricas; olhar para as continuidades e rupturas no processo de construção do conhecimento; olhar a necessidade gerando a evolução das representações simbólicas, ou ainda olhar para a relação entre mundo sensível e mundo abstrato.

4.1.1 ASPECTOS HISTÓRICOS RELACIONADOS AO CAMPO CONCEITUAL GEOMÉTRICO

Historicamente, podemos situar a Geometria como um dos ramos do Conhecimento Matemático que primeiro se estabeleceu pela humanidade. A origem da palavra vem do grego: geo provém de gaia/terra e metria de métron/medida e reforça a idéia que ela tenha surgido da agrimensura. Ela é comumente definida como ciência das figuras e do espaço.

No tocante à origem da geometria, conforme Vitrac (2006), a explicação mais aceita foi proposta pelo historiador Heródoto de Halicarnasso, no segundo dos nove livros de sua Enquête (século V a.C.). Ele narra as guerras entre os gregos e os bárbaros[10] e investiga suas causas próximas e longínquas, o que lhe permite descrever os costumes e as instituições dos povos. O livro II é dedicado ao Egito. Ele traz a mais antiga menção da palavra grega "geometria" (dita por Heródoto) a ter chegado aos nossos dias.

> Os sacerdotes egípcios contaram a Heródoto que o rei Sesóstris dividia o solo entre todos, atribuindo um lote igual a cada um e prescrevendo que cada detentor passaria a lhe dever um tributo anual com base nessa repartição. Contudo, vez por outra o Nilo lhes arrancava parte de um lote. O proprietário prejudicado ia então ao encontro do soberano, que averiguava quanto do

[10] Os povos do Império Persa.

> terreno diminuíra para então providenciar um abatimento proporcional no tributo a ser pago, dando origem assim a geometria (VITRAC, 2006, p. 33).

O grego Tales de Mileto teria medido a altura da grande pirâmide. Segundo Vitrac (2006), historicamente combina-se a idéia de que a geometria é de origem egípcia, como queria Heródoto, com a afirmação de que Tales seria o primeiro sábio grego, como sustentam os aristotélicos, e a sugestiva tese de que há uma ligação entre a geometria e determinação indireta das distâncias inacessíveis.

Há ainda, conforme o autor, outras explicações da origem da geometria. Geometria seria, para Aristófanes, a medida de toda a terra habitada, e não do pequeno território distribuído em lotes em uma colônia. Há, portanto, duas maneiras de pensar no desenvolvimento da geometria:

> sua modesta origem empírica, a agrimensura, e ao mesmo tempo a sua implicação nas pesquisas mais especulativas de uma pesquisa da natureza - estrutura (Geométrica) do Cosmo, descrição e mapeamento do mundo habitado (VITRAC, 2006, p. 34).

A geometria Euclidiana plana[11] teve início na Grécia antiga, no século III a.C. Conforme Mankiewicz (2000), a obra mais importante da Matemática grega é incontestavelmente “Os Elementos” de Euclides. Como todos os manuais, uma boa parte dos Elementos não contém nenhum trabalho original, mas devemos a Euclides o fato de ter reunido resultados provenientes de fontes diversas e tê-los apresentados no seio de uma estrutura que se tornou um modelo de um sistema lógico dedutivo unindo teoremas e demonstrações.

Podemos dizer que a geometria surgiu como uma ciência empírica; depois vieram esforços de teorização e um momento culminante com a publicação dos Elementos de Euclides. A geometria euclidiana constituiu-se na primeira axiomatização na história da matemática, sendo durante muitos séculos, um modelo para o resto da matemática e inclusive para o resto das ciências.

Desde seu aparecimento foi saudada como o mais completo, mais organizado dos sistemas matemáticos. Ela era o arquétipo do sistema lógico dedutivo axiomático. Entretanto,

---

[11] Euclides (300 a.C) foi um dos mais jovens alunos de Platão. Seus primeiros estudos em Matemática deram-se em Atenas, através de discípulos de Platão, pois a maioria dos geômetras e matemáticos com quem ele conviveu pertencia a essa escola. Em Alexandria, no tempo de Ptolomeu I (306 a.C. – 283 a.C.), Euclides pôde desenvolver seus trabalhos sobre Geometria. O grande trabalho de Euclides, Elementos, tornou-se um clássico logo após a publicação. Desde o tempo de Arquimedes são feitas referências a essa obra, que é considerada um texto básico no campo da Geometria.

este monumento tinha um pequeno “defeito”, conforme Mankiewicz (2000), um pequeno inconveniente que incomodava os matemáticos. Seu quinto postulado dizia:

> se uma reta que corta duas retas forma de um mesmo lado ângulos inferiores a dois ângulos retos, as duas retas prolongadas indefinidamente se encontrarão do lado onde estes dois ângulos são inferiores que dois retos”. Este postulado das paralelas diz simplesmente que se duas retas não são paralelas elas se encontrarão um dia (MANKIEWCZ, 2000, p. 126).

Ainda conforme Mankiewicz (2000), ninguém poderia negar a verdade deste postulado, mas ele parecia muito complicado para que se pudesse afirmar sem contestação que era um axioma, um ponto de partida dos Elementos. Várias gerações de matemáticos tentaram então demonstrar que na verdade ele era um teorema suscetível de ser deduzido dos outros axiomas. Quando pensava ter demonstrado o postulado das paralelas percebia-se que havia introduzido novas hipóteses que eram essencialmente reformulações do V postulado. O processo de construção das Geometrias não-euclidianas faz intervir profundas rupturas com a visão que se tinha de geometria. Dentre os matemáticos que deram contribuições significativas nesse processo destacam-se Saccheri, Bolyai, Lobatchevski e Riemann. Os dois últimos tentaram demonstrar a necessidade do V postulado de Euclides por redução ao absurdo, construindo corpos teóricos coerentes – a idéia de que a geometria plana é o único modelo possível do espaço físico sucumbe, e os físicos começam a aproveitar os novos modelos, que parecem adequar-se melhor à descrição de fenômenos que têm lugar em escala astronômica. A crise das geometrias não-euclidianas no século XIX permite distinguir a geometria abstrata, ou pura, da geometria física e avançar na resolução do difícil problema da ligação entre geometria e realidade (HOUDEMENT e KUZNIAK, 1999).

Matemáticos posteriores a Euclides conferiram à geometria características de rigor e abrangência. Por exemplo, Hilbert formulou os axiomas euclidianos e valorizou o sistema dedutivo e Hartshorne apoiando-se nos trabalhos de Euclides e Hilbert apresentou em 1997 uma teoria ainda mais consistente para área.

Outro marco importante na história da geometria foi o casamento entre a álgebra e a geometria. Desde a antiguidade grega a matemática se dividia em dois ramos fundamentais: Geometria e Aritmética. O primeiro tratava das grandezas e o segundo dos números. Nunca havia, entretanto, fronteira nítida entre os dois e algumas culturas privilegiavam às vezes um, às vezes outro, em função de suas preocupações próprias (MANKIEWICZ, 2000).

A ruptura com a abordagem puramente geométrica foi consumada com a aparição da geometria de Descartes. Com seu discurso, Descartes queria fundar uma filosofia da Ciência que levasse a uma interpretação correta do universo material. Uma descrição correta do universo em linguagem matemática exigia portanto, segundo (MANKIEWICZ, 2000), que essa linguagem repousasse ela própria em fundamentos sólidos.

Assim, no século XVII, Descartes e Fermat substituíram os pontos de um plano por pares de números e as curvas por equações. Desta forma, o estudo das propriedades das curvas foi substituído pelo estudo das propriedades algébricas das equações correspondentes.

Esse procedimento liberou a álgebra da obrigação da homogeneidade das dimensões, condição que impunha que todos os termos de uma equação tivessem a mesma dimensão. A possibilidade de poder estudar curvas x^n para qualquer potência **n** foi uma ruptura tão profunda que nem pensamos hoje em dia que x^2 representa uma figura quadrada. A álgebra de Descartes não causa incômodo ao leitor moderno, uma vez que as notações usadas por ele são muito próximas daquelas que se usa hoje em dia.

Também no século XIX, Chasles e Poncelet incorporam os sistemas de transformações como método fundamental da geometria com a finalidade de dotá-la da generalidade, flexibilidade e fecundidade da geometria analítica.

Finalmente, Klein constrói a síntese das geometrias, baseando-se na noção de grupo de transformações, que lhe permite introduzir distinções precisas entre os diferentes tipos de geometrias existentes.

Esse sobrevôo histórico evidencia a profunda articulação entre geometria e álgebra, e a necessidade de representações simbólicas. Ainda outra imbricação que tem como referencial o próprio objeto de estudo: historicamente a geometria tratava de problemas envolvendo grandezas.

4.1.2 ASPECTOS HISTÓRICOS RELACIONADOS AO CAMPO CONCEITUAL NUMÉRICO

Os números são uma grandiosa invenção da humanidade, pois levaram a descobertas e conceitos que conduziram os homens a novas habilidades e impulsionaram o desenvolvimento da humanidade.

Ao aprender a contar abstratamente e agrupar toda sorte de elementos segundo o princípio de base, o homem aprendeu a estimar, avaliar e medir grandezas diversas (pesos, comprimentos, áreas, volumes, capacidade, etc). De igual maneira, ele aprendeu a atingir e conceber números cada vez maiores antes mesmo de conseguir dominar a idéia do infinito. Ele foi, assim, capaz de elaborar inúmeras técnicas operatórias mentais, concretas ou, mais tarde, escritas e de estabelecer os primeiros rudimentos de uma aritmética que será inicialmente praticada antes de se tornar abstrata e de conduzir a álgebra (IFRAH, 1996).

Sabe-se que por volta do século V, na Índia, os Hindus já conheciam símbolos mais simples para representar os números, inclusive o zero. Eles utilizavam dez símbolos e por ser um sistema posicional escreviam qualquer valor usando apenas os dez símbolos. Al-khowaizmi, considerado o maior matemático árabe de todos os tempos, compreendeu que os matemáticos hindus haviam descoberto. Com esse sistema de numeração todos os cálculos seriam feitos de um modo mais rápido e seguro. A partir do século VII, os Árabes expandiram-se por toda a região do mediterrâneo e com eles o Sistema de Numeração Decimal, que utilizamos atualmente.

Os problemas que geraram a necessidade do número, como vimos, foram inicialmente práticos, mas depois problemas de ordem teórica fizeram com que o conjunto dos naturais precisasse ser estendido. A passagem do domínio numérico dos números naturais para outros domínios gera discussões de ordem epistemológica, psicológica e didática.

O número racional é historicamente relacionado à noção de medida de grandeza. Conforme Lima (1988), a medida foi uma resposta às relações do indivíduo com o Estado que cobrava imposto com base na propriedade da terra. As exigências de medição impuseram a criação de padrões de medida ou unidades. Estas unidades, por outro lado, levantaram o fato de que é raro a unidade (ou padrão) caber um número inteiro de vezes na grandeza a medir. O mais freqüente é aplicar-se algumas vezes a unidade sobre a grandeza a ser medida e sobrar uma parte inferior à unidade considerada. Os medidores de então reconheceram que o instrumento numérico conhecido – números inteiros positivos – era insuficiente para exprimir bem as medidas, isto é, o mais aproximado possível do real. Para obter uma maior aproximação da medida real da grandeza (comprimento, área, etc) foi forçoso subdividir a unidade num certo número de partes iguais. Tem-se aí frações de unidade (LIMA, 1988).

De acordo com Caraça (1952), a criação do novo campo numérico repousa em alguns princípios:

1- princípio da extensão - leva-nos a criar novos números por meio dos quais se possa exprimir a medida dos segmentos;

2 – impossibilidade da divisão (exata) em números inteiros, quando o dividendo não é múltiplo do divisor;

3 – princípio da economia – com os novos números criados deve-se abranger todas as hipóteses de medição e os novos números se reduzem aos números inteiros sempre que no caso da medição o dividendo é múltiplo do divisor.

Há diversas formas de representação dos números racionais: representação fracionária, decimal ou percentual.

As inscrições hieroglíficas egípcias, encontradas na Pedra de Rosetta, descoberta pela expedição de Napoleão Bonaparte ao Egito em 1799, indicam que os egípcios já usavam a fração por volta de 2000 a.C. para operar com seus sistemas de pesos e medidas e para exprimir resultados. Eles utilizavam apenas frações unitárias, isto é, com numerador um.

Sabe-se, portanto, que o uso das frações vem de remota Antiguidade. Sua teoria, porém, é muito mais recente, e só nos tempos modernos foram elas tidas por verdadeiros números.

Já as representações decimais para os números racionais são mais recentes. A abordagem mais antiga de utilização das representações decimais de frações era de domínio dos árabes. Al-Uqlidisi, por exemplo, já era conhecido por uma cópia de suas obras – as seções sobre cálculo indiano. Esse manuscrito data de 1157, embora a obra tenha sido escrita por volta de 952, e é considerado um dos mais importantes textos árabes que chegaram até nós.

Na segunda metade do século XVI, difundiu-se na Europa a escrita de frações em forma decimal. Em 1586, o engenheiro e matemático holandês Simon Stevin (1548 – 1620), apresenta uma exposição completa do cálculo dos *numeri rupti,* extensão das operações fundamentais já praticadas sobre os inteiros. Em seu livro denominado *La disme* (O décimo), Stevin explica claramente o sistema decimal. Mostrou como resolver operações com frações utilizando números semelhantes a números inteiros. Pouco conhecidas na Europa até então, as representações decimais eram amplamente utilizadas no mundo islâmico, como mostra o livro *A chave aritmética,* escrito pelo árabe Al Kashi por volta de 1430 (BOYER, 1974).

Com relação ao nosso objeto de pesquisa, esta breve discussão evidencia a relação entre a extensão dos domínios numéricos, os números racionais e as grandezas, e ao mesmo tempo, o papel das representações simbólicas na evolução do saber matemático relativo aos números e operações.

4.1.3 ASPECTOS HISTÓRICOS RELACIONADOS AO CAMPO CONCEITUAL ALGÉBRICO

O desenvolvimento tardio da Álgebra, registrado na história da Matemática e na própria estruturação do saber científico, parece dar indícios para o estudo em Educação

Matemática da existência de dificuldades conceituais importantes, subjacentes à construção deste campo do conhecimento matemático.

Teles (2002) discute em sua problemática, através de um breve estudo histórico, como o desenvolvimento da álgebra, da sua notação e como os bloqueios e rupturas observados na própria história do conhecimento sinalizam para possíveis dificuldades no ensino-aprendizagem dos processos de resolução de equações.

Teles (2002) parte de aproximadamente 1600 anos antes de Cristo, quando vivia no Egito um escriba chamado Aahmesu, conhecido nos meios científicos como Ahmes. Nos problemas tratados no **Papiro de Ahmes**[12] o número procurado era sempre representado pela mesma palavra: **montão.** Tratava-se da "Álgebra Retórica" (BOYER, 1974).

Na Grécia, aproximadamente 400 anos antes de Cristo, Diofante de Alexandria[13], freqüentemente chamado "pai da Álgebra", foi o primeiro matemático a fazer uso sistemático de símbolos algébricos, isto é, de abreviações nos problemas e nas operações com os números. Os símbolos de Diofante marcam a passagem da **Álgebra retórica**, em que as expressões são escritas totalmente em palavras, para a **Álgebra sincopada,** na qual algumas expressões vêm escritas em palavras e outras são abreviadas (STRUIK, 1989).

Ainda na Grécia, na Álgebra de Euclides as quantidades desconhecidas eram representadas por figuras geométricas. Nos **Elementos**, Euclides realizava todas as construções utilizando somente régua não graduada e compasso, não fazia cálculos nem estabelecia medidas. Por meio de enunciados longos e confusos, preocupava-se apenas com as relações que podia obter geometricamente[14]. A Álgebra geométrica antiga não era um instrumento ideal, mas era eficaz (BOYER, 1974 e STRUIK, 1989).

No século VIII da nossa era, al-Khowarizwi escreveu dois livros sobre aritmética e álgebra que tiveram papéis muito importantes na história da matemática. O livro mais famoso dele chama-se **Hisab al-jabr wa-almuqãbalah,** literalmente, "ciência da redução e da confrontação" (STRUIK, 1989), ou seja, **Livro sobre as operações al-jabr e qabalah.** Do termo **al-jabr,** vem "álgebra" que significa **restauração** e refere-se à transposição de termos para o outro lado de uma igualdade; o termo **qabalah** significa **redução** ou **equilíbrio** e refere-se ao cancelamento de termos semelhantes em lados opostos de uma equação.

---

[12] O Papiro de Ahmes está guardado no Museu Britânico. Com 5,5 metros de comprimento por 32 centímetros de largura, contém oitenta problemas, todos resolvidos.

[13] Diofante (325-409), grande matemático, viveu e trabalhou na Alexandria no século IV a.C. Após a destruição do museu de Alexandria, restaram apenas seis livros da sua coleção Aritmética. A coleção traz uma variedade muito grande de problemas, extremamente criativos e complexos, que desafiaram a inteligência e a imaginação de grandes matemáticos durante séculos.

[14] Exemplo: "...e se do lado vezes uma constante subtrairmos a área do quadrado, o resultado será uma constante determinada".

Al-Khowarizmi resolvia as equações de modo semelhante ao que usamos hoje. Ele utilizava apenas três elementos: **raízes, quadrados e números.** Apesar de sua genialidade, ele, assim como outros grandes matemáticos de diversas épocas, não foi capaz de expressar as equações totalmente em símbolos, sem usar nenhuma palavra. A expressão de equações totalmente em símbolos só aconteceria mais de 700 anos depois, como conseqüência das profundas mudanças por que passou a Europa na transição da Idade Média para a Idade Moderna.

Ao longo dos séculos e superando muitas dificuldades, os matemáticos foram lentamente aprendendo a substituir as palavras por letras e pequenos sinais: =, +, -, :, etc., criando as condições para a próxima etapa do desenvolvimento da Álgebra - as equações expressas totalmente em símbolos como as conhecemos hoje: a **Álgebra simbólica**.

Um advogado e matemático francês, François Viète (1540-1603), introduziu o uso sistemático das letras para indicar números desconhecidos e dos símbolos nas operações, da forma como são utilizados até hoje. Foi o primeiro a escrever as equações e a estudar suas propriedades através de expressões gerais. Graças a ele, pela primeira vez na história da Matemática, os objetos de estudo passaram a ser não mais problemas numéricos sobre o preço do pão ou da cerveja, sobre a idade das pessoas ou os lados de figuras, mas sim as próprias expressões algébricas.

Além de Viète, outros matemáticos da mesma época contribuíram para aperfeiçoar a linguagem simbólica da Álgebra. Um deles foi o inglês Robert Record (1510-1558) que criou o sinal de igualdade (=). Este sinal foi usado por outro matemático inglês, Thomas Harriot (1560-1621), nas equações de Viète. Ele conseguiu eliminar as poucas palavras que restavam na Álgebra de Viète (BOYER, 1974 e WAERDEN, 1985).

A passagem para a Álgebra simbólica foi completada pelo grande matemático e filósofo francês René Descartes (1596-1650), que aperfeiçoou a Álgebra de Viète, criando a notação que usamos até hoje para os expoentes.

O surgimento da álgebra abstrata no século XIX, considerado a Idade Áurea da Matemática, século no qual se libertou das limitações sugeridas por observações da natureza, trazem consigo as geometrias não-euclidiana de Lobachevsky; a Matemática do Infinito (análise) de Cantor e muitas outras contribuições revolucionárias para o "savoir savant" matemático, tais como a álgebra formal de pares de números complexos de Hamilton, as contribuições de Boole e dos ingleses Cayley e Sylvester, que foram responsáveis pelo uso de determinantes e o estudo das matrizes, o aparecimento da álgebra moderna e da teoria dos invariantes algébricos. A percepção moderna da Matemática passa a pregar que a Matemática lida com funções proposicionais e não com proposições. O estudo da álgebra de matrizes e outras álgebras não comutativas foram em toda parte um dos principais fatores no desenvolvimento de uma visão cada vez mais abstrata da álgebra, especialmente no século XX (SANTOS, 1977).

Em suma, até o século XVII, a álgebra era uma generalização da aritmética. No início do século XIX, a álgebra estende-se a elementos que não são mais "números" e a operações que não são necessariamente as quatro operações da aritmética. A álgebra dita "moderna" começa com a teoria dos grupos, devida em parte a Gauss, e, sobretudo, a Evariste Galois.

Na segunda metade do século XIX, a álgebra tem como principal objeto o estudo das estruturas algébricas abstratas; surgem a teoria dos corpos, devida a Kjummer; e a noção de ideal de um anel, devida a Dedekind. Uma nova etapa é transposta por volta de 1925 com os trabalhos de Emy Noether e de F. Artin sobre a estrutura da álgebra e sobre a síntese das idéias anteriores. Desde o fim do século XIX, a álgebra teve numerosas aplicações em análise, em geometria, em mecânica, em física teórica (CHAMBADAL, 1978).

Dentre as rupturas identificadas na história, a passagem da aritmética para a álgebra, representada pelo desenvolvimento da linguagem algébrica na idade média, se produz como resposta à busca de sistemas de representações que permitissem a resolução generalizada dos problemas clássicos gregos (GARCIA, 1997).

4.1.4 ASPECTOS RELACIONADOS AO DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DO CAMPO CONCEITUAL FUNCIONAL

Historicamente, os problemas que ocupavam os matemáticos, em cada época, exerceram forte influência na elaboração do conceito de função.

Neste quadro, havia necessidade, por exemplo, de expressar a regularidade de um determinado fenômeno. Esta regularidade precisava ser representada por uma lei quantitativa, Lei esta que seria uma forma de correspondência de dois conjuntos. O conceito de função surge então no campo matemático, de acordo com Caraça (1952), como instrumento próprio para o estudo destas leis. Um instrumento matemático cuja essência é a correspondência (unívoca), representado por tabelas que expressavam a dependência de uma grandeza em relação à outra, por exemplo, o deslocamento de um móvel no decurso do tempo.

De acordo com Gomes Ferreira (1997), a história da matemática mostra que o estudo das funções foi diferentemente enfatizado ao longo dos tempos.

> Os primeiros estudos da funcionalidade juntamente com a evolução de sua definição refletem essas mudanças de ênfase mostrando como funções eram percebidas. O conceito de função foi desenvolvido de um ponto de vista geométrico no século XVII, passou por uma abordagem algébrica no século XVIII para assumir uma perspectiva baseada na teoria dos conjuntos na contemporaneidade (GOMES FERREIRA, 1997, p. 14).

Muitos matemáticos contribuíram para a evolução da idéia de função. Dentre eles, Galileu Galilei, ao introduzir o tratamento quantitativo nas suas representações gráficas. Nessa época, o aprimoramento dos instrumentos de medida propiciou a busca de resultados inspirados na experiência e na observação (ZUFFI, 2001; ÁVILA, 1993). Porém, a palavra "*função*" foi introduzida por Leibniz em 1673, justamente para designar qualquer das várias variáveis geométricas associadas com uma dada curva. Só aos poucos é que o conceito foi-se tornando independente de curvas particulares e passando a significar a dependência de uma variável em termos de outras. Mas mesmo assim, por todo o século XVIII, o conceito de função permaneceu quase restrito à idéia de uma variável (dependente) expressa por alguma fórmula em termos de outra ou outras variáveis (independentes). "Continuidade" significava então permanência da mesma expressão analítica que definia a função, ao passo que "descontinuidade" significava não a ruptura do gráfico da função, mas da expressão analítica ou lei que definisse a correspondência entre a variável dependente e a variável independente. (ÁVILA, 1993).

Os historiadores atribuem a discriminação entre variáveis dependentes e independentes a Descartes que utilizou equações em x e y para introduzir uma relação de dependência entre quantidades variáveis de modo a permitir o cálculo de valores de uma delas a partir dos valores da outra As primeiras definições do conceito de função revelam um certo encantamento pela álgebra, onde a função é dada por uma expressão algébrica (ZUFFI, 2001).

Conforme Zuffi (2001), citando (SIERPINSKA, 1992, p. 30), é de Bourbaki[15] a definição de função usada atualmente nos meios matemáticos e científicos, e que foi proposta em 1939:

> uma função é uma tripla ordenada (X, Y, f), onde X e Y são conjuntos e f é um subconjunto de X (Y, tal que, se (x,y) (f e (x,y')(f, então y =y'.

É uma definição mais geral – na qual o conceito de função pode ser definido de uma maneira simbólica formal e quase que sem usar palavras da linguagem comum.

---

[15] Pseudônimo de um grupo de matemáticos do qual participavam André Weil e Jean Dieudonné.

A maioria das classificações que estudam a abordagem do conceito de função numa perspectiva moderna, utilizando o conceito de Dirichlet-Bourbaki, define uma função enquanto um tipo especial da correspondência (ou relação) entre dois conjuntos A e B. Esta correspondência atribui a cada elemento em A (o elemento do domínio) um e somente um em B (o co-domínio ou a imagem). A relação "um a muitos" não é aceita como função, mas a relação "muito – a – um" poderia ser uma definição moderna de função. Logo, a função não requer uma regra explícita ou óbvia da correspondência, a regra da correspondência pode ser completamente arbitrária (LEINHARDT, 1990).

Leinhardt et alli (1990) também discutem as relações funcionais, expondo duas maneiras preliminares de definir funções: como uma co-variação entre duas variáveis e como uma correspondência entre dois conjuntos.

A idéia de dependência entre grandezas teve um papel importante nos primórdios da noção de função mas pode se constituir, em seguida, como um entrave para a apreensão do significado contemporâneo desse conceito, uma vez que no significado atual, há funções nas quais não há necessariamente uma relação de dependência entre grandezas.

SÍNTESE DAS IMBRICAÇÕES ENTRE OS CAMPOS CONCEITUAIS DO PONTO DE VISTA HISTÓRICO:

Ao olharmos as imbricações entre os campos, tomando como referencial o estudo das fórmulas de área, podemos destacar alguns aspectos.

Historicamente o próprio processo de contagem abstrata e o agrupamento de todo tipo de elementos, segundo o princípio de base, fez com que o homem aprendesse a estimar, avaliar e medir grandezas diversas, evidenciando imbricações entre o campo numérico e das grandezas.

A relação entre os números racionais e a noção de medida de grandezas, como também a necessidade de ampliação das representações simbólicas para representar medidas não inteiras, evidencia imbricações históricas importantes entre o campo numérico e das grandezas.

O fato da geometria historicamente tratar grandezas evidencia imbricação histórica entre o campo das grandezas, ao qual pertencem as fórmulas de área e o campo geométrico ao qual pertencem às figuras.

A substituição dos pontos de um plano por pares de números e as curvas por equações representou um grande passo na evolução da linguagem simbólica. A álgebra de Descartes e a

Geometria analítica representam imbricação histórica entre os campos conceituais da álgebra e da geometria.

Com relação ao campo conceitual algébrico, em cada um dos momentos da evolução da linguagem algébrica, representada pelas passagens da álgebra retórica, sincopada, geométrica, simbólica e abstrata, podemos observar imbricações entre os campos conceituais. Na álgebra retórica do **Papiro de Ahmes** há forte imbricação com ao campo numérico, já que as equações eram resolvidas por tentativas numéricas. Na álgebra geométrica de Euclides a imbricação com o campo das grandezas e também geométrico, já que os objetos que ele tratava eram pontos e retas ou áreas e volumes. Na álgebra simbólica de Descartes as equações substituem figuras e fazem a união completa da Geometria com álgebra.

No campo funcional a origem da palavra "função", introduzida por Leibniz em 1673, evidencia imbricação com o campo geométrico, pois ele a usava justamente para designar qualquer das várias variáveis geométricas associadas com uma dada curva. A relação de dependência entre quantidades variáveis, introduzida por Descartes, também evidencia imbricação com o campo algébrico com relação às representações simbólicas envolvidas.

Assim, do ponto de vista histórico, as imbricações se refletem na própria organização do conhecimento. Em todos os campos, geométrico, numérico, algébrico ou funcional, o conhecimento se organiza num primeiro momento num processo empírico, quando são postos problemas de ordem social. Num momento posterior organiza-se com mais rigor, acentuando o papel das representações simbólicas.

4.2 CONTRIBUIÇÃO DE CADA CAMPO CONCEITUAL PARA O ESTUDO DAS FÓRMULAS

Podemos compreender "*fórmula de área*" como um elemento do campo conceitual das grandezas geométricas e suas medidas, mas também como um elemento que articula vários outros campos conceituais. Estas compreensões não são excludentes.

A expressão *"fórmula de área"* suscita várias idéias. Ao compreender a fórmula como uma representação simbólica, a relacionamos ao campo algébrico, e ao mesmo tempo ao funcional, pois expressa uma relação entre as grandezas comprimento e área. Por outro lado, a expressão *"figuras geométricas planas"* leva-nos a pensar no campo conceitual da geometria do qual fazem parte as figuras planas. Mas ainda podemos pensar no que se obtém através das fórmulas, na maioria das vezes números resultantes de operações, levando-nos a pensar também no campo conceitual numérico.

Neste tópico discutimos do ponto de vista didático e cognitivo a contribuição de cada um destes campos conceituais para o estudo das fórmulas de área de figuras geométricas planas.

4.2.1 CONTRIBUIÇÃO DO CAMPO CONCEITUAL GEOMÉTRICO

A Geometria, ostensivamente presente nas formas naturais e construídas, é essencial à descrição, à representação e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços. Por exemplo, o desenho e a construção de todo tipo de objetos físicos (desde produtos e máquinas industriais até prédios, cidades e estradas), elaboração de mapas, o cálculo de distâncias astronômicas, etc (PCN +- Ensino Médio, 2002).

Fazem parte do campo conceitual geométrico as figuras geométricas planas e suas propriedades, e também as transformações geométricas (isometrias, homotetias) e os conceitos de semelhança e congruência.

A Geometria nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) é tratada num bloco chamado "*espaço e forma*". Este bloco contempla não apenas o estudo das formas, mas também as noções relativas à posição localização de figuras e deslocamentos no plano e sistemas de coordenadas. Destacam também a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades e percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes. Além disso, é fundamental que os estudos de espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

De acordo com os PCNs (BRASIL, 1998, p. 51),

> os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Básico, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. É um campo fértil de situações-problema que favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações.

Como campo de problemas, o estudo do espaço e das formas envolve, conforme os PCN (BRASIL, 1998), três objetos de natureza diferente, aos quais correspondem três questões relativas à aprendizagem:

- O espaço físico, ele próprio – ou seja, o domínio das materializações: envolve o desenvolvimento das habilidades de percepção espacial. Dentre as atividades humanas que requerem o controle das relações espaciais, destacam-se desenho e construção de todo tipo de objetos físicos, elaboração de mapas e cálculo de distâncias astronômicas.
- A geometria, concebida como modelização desse espaço físico – domínio das figuras geométricas: envolve a elaboração de um sistema de propriedades geométricas e de uma linguagem que permitam agir nesse modelo.
- O(s) sistema(s) de representação plana das figuras espaciais – domínio das representações gráficas: envolve a codificação e a decodificação de desenhos.

Desta forma, uma das contribuições do Campo Conceitual Geométrico para nossa problemática consiste no fato de muitas situações que envolvem fórmulas de área de figuras geométricas planas exigirem uma modelização do real, através de propriedades e representações geométricas que, como dissemos acima, permitam agir nesse modelo.

Conforme Búrigo (2005), o olhar da geometria para o espaço físico caracteriza-se, fundamentalmente, pela atenção às relações que podem ser estabelecidas entre os objetos que constituem esse espaço, abstraindo as particularidades que os caracterizam e concentrando o foco nas formas, nas grandezas e nos movimentos. Desse olhar específico da geometria para o espaço físico decorre a capacidade, na atividade concreta e mental, de classificar, comparar e operar com figuras e sólidos.

O pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas; as figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades.

A geometria parte do mundo sensível e o estrutura no mundo geométrico. No primeiro momento, o espaço se apresenta para a criança de forma essencialmente prática: ela constrói suas primeiras noções espaciais por meio dos sentidos e dos movimentos. Sendo assim o conhecimento dos objetos resulta de um contato direto com eles – **espaço perceptivo**. Na fase egocêntrica no desenvolvimento infantil, a criança é incapaz de considerar qualquer outro elemento que não o seu próprio corpo, como ponto de referência. Lorenzato (1995) aponta dificuldades que as crianças manifestam no domínio do espaço perceptivo, entre elas a crença que a forma de uma figura ou objeto varia em função da posição que esse objeto ocupa no espaço. A passagem do espaço perceptivo para o **espaço representativo** – onde a criança é capaz de evocar os objetos em sua ausência - só será possível através de experiências sobre os objetos do espaço em que vive, permitindo ao sujeito agir, antecipar, ver, explicar o que se passa no espaço sensível, reforçando o aspecto experimental, tão presente na própria história da construção do conhecimento geométrico. O domínio do espaço pela criança se apresenta na seguinte ordem:

- Topológico (onde as linhas desenhadas ressaltam o dentro/fora e o aberto/fechado);
- Projetivo (onde as propriedades espaciais invariantes são valorizadas);
- Euclidiano (onde surge a métrica).

As relações topológicas permitem a constituição de uma geometria do objeto, em singular, enquanto as relações projetivas permitem a constituição de uma geometria do espaço exterior ao sujeito, que o contempla de certa distância (GALVEZ, 1996).

Conforme Lorenzato (1995), se as fronteiras entre essas “etapas” de desenvolvimento geométrico não estão bem definidas, em compensação suas características se apresentam claramente nas crianças, embora com variações de tempo.

Houdment e Kuzniak (1999) descrevem um quadro conceitual que permite organizar a geometria em torno de três modos de conhecimento: a intuição, a experiência e a dedução. A intuição aparece como um receptor interpretativo de nossas sensações, ela estrutura o pensamento em termos de evidências. A intuição pode evoluir com o sujeito graças a um conjunto de experiências e, portanto, de conhecimentos a posteriori. A experiência permite aproximar a geometria como remanescente próximo da ação e de uma certa realidade física. A natureza da experiência geométrica vai depender dos objetos sobre os quais ela é exercida. Assim, pode-se desenvolver o pensamento dedutivo relacionado aos fatos geométricos a partir da experimentação. A dedução permite atingir novas informações a partir daquelas já adquiridas, sem recorrer à experiência ou a outro recurso exterior. Podemos, por exemplo, generalizar a relação entre base, altura e área do triângulo observando que as decomposições e composições pelas quais obtemos um retângulo com mesma base e metade da altura não dependem das medidas do triângulo (LINDQUIST e SHULTE, 1994).

Nos dois níveis seguintes estão aqueles alunos que constroem demonstrações e que comparam sistemas axiomáticos.

De acordo com Galvez (1996), os psicólogos soviéticos comprovaram há várias décadas que os alunos incluem aspectos não-essenciais das figuras geométricas ao conceitualizá-las, em função das condições em que tem lugar sua aprendizagem.

> Assim se os lados de um quadrado não são paralelos às margens do papel ou quadro – negro em que é desenhado, a figura corre o risco de ser vista como um losango, devido a que a orientação tenha adquirido o papel de atributo básico (GALVEZ, 1996, p. 246).

Como também Brousseau, citado por Galvez (1996), observou que mesmo depois dos alunos estudarem as figuras geométricas elementares durante vários anos na escola primária, não desenvolveram uma linguagem para descrever as características das figuras, não sendo capazes de selecionar um conjunto de características pertinentes (necessárias e suficientes) para sua reprodução. Neste mesmo sentido, os PCN (BRASIL, 1998) apontam a dificuldade dos alunos em encontrar articulações entre as propriedades que eles conhecem e a maneira de organizar o conjunto do desenho.

Carral (1995) apresenta as seguintes características para as figuras planas que focamos neste trabalho:

– O paralelogramo é um quadrilátero cujos lados são paralelos dois a dois.

Esta definição é equivalente às seguintes:

- quadrilátero convexo que possui ângulos opostos congruentes;
- quadrilátero convexo que possui lados opostos congruentes;
- quadrilátero convexo cujas diagonais se interceptam em seus pontos médios.

O retângulo é definido como um quadrilátero que possui quatro ângulos internos retos. Portanto seus ângulos opostos são congruentes, de onde se deduz que todo retângulo é um paralelogramo. Conseqüentemente os lados opostos de um retângulo são congruentes.

Do ponto de vista do ensino, ao fazer uma retrospectiva do ensino de geometria, Pires et al (2000) destacam que no período de 1955 a 1965 o trabalho com perímetros, áreas e volumes era apoiado na memorização de fórmulas a serem aplicadas, sem justificativas. As figuras eram apresentadas como objetos isolados e não como pertencentes a uma classe de figuras em função de características dadas; assim, um quadrado era sempre um quadrado e jamais apresentado como um retângulo. Algumas posições praticamente únicas de exibir figuras acabavam constituindo esteriótipos; quadrados e retângulos, por exemplo, sempre apareciam com suas bases paralelas à borda da página do livro ou do caderno.

Algumas destas características ainda predominam no ensino de Matemática atualmente. Santos (2005) chama estas figuras estereotípicas de “figuras prototípicas”. Linguagem que também adotamos em nosso trabalho.

As discussões relacionadas a este campo conceitual também destacam aspectos importantes à nossa problemática, como na conceituação das figuras geométricas, a inclusão de aspectos não essenciais das figuras geométricas (GALVEZ, 1996). Assim, uma das nossas hipóteses diz respeito ao uso inadequado das fórmulas em decorrência desta inclusão.

Outro aspecto refere-se à utilização da linguagem para descrever características das figuras, a incapacidade de selecionar um conjunto de características pertinentes (necessárias e suficientes) para a reprodução e dificuldade de encontrar articulações entre as propriedades que o sujeito conhece e a maneira de organizar o conjunto do desenho. Se o aluno for solicitado a desenhar e calcular a área de um paralelogramo, por exemplo, que comprimentos julga necessário para esta tarefa? Será que identifica corretamente características como altura correspondente ao lado escolhido para base?

Como todos os objetos que povoam o espaço são as fontes principais do trabalho de exploração das formas, o campo conceitual da geometria contribui possibilitando a modelização do real através de propriedades e representações geométricas. Como os alunos mobilizam estas propriedades e representações envolvendo fórmulas?

4.2.2 CONTRIBUIÇÃO DO CAMPO CONCEITUAL NUMÉRICO

O recorte do Campo Conceitual Numérico destaca aspectos que se relacionem ao nosso estudo: fórmulas de área tomando como foco as imbricações entre campos conceituais. Assim, nos interessamos pelos números naturais e a sua passagem para o domínio dos racionais, como também as operações fundamentais pelo viés das estruturas aditivas e multiplicativas, tomando como aspecto importante o fato dos valores numéricos envolvidos na situação demandarem níveis de complexidade diferenciada, conforme sejam naturais ou racionais.

O número, de acordo com Piaget, é uma síntese de dois tipos de relações que a criança elabora entre os objetos (por abstração reflexiva). Uma é a ordem e a outra é a inclusão hierárquica (KAMII, 1992).

Já um **sistema de numeração** é um conjunto de símbolos e de regras por meio dos quais escrevemos diferentes números. O nosso é chamado indo-arábico, por que foi criado pelos hindus e divulgado pelos árabes.

O conceito de número racional, por ser bastante complexo do ponto de vista matemático, gera uma série de dificuldades no processo ensino-aprendizagem, cuja superação tem motivado a realização de pesquisas (SILVA, 2000).

Diferentes significados e diferentes representações contribuem para o conceito de número racional romper com idéias válidas no domínio numérico dos números inteiros.

Pesquisas, dentre elas Silva e Borba (2000) e NEPEM (2004), apontam que o campo conceitual dos números racionais é constituído por diferentes sub-construtos ou, como se referem os PCN (BRASIL, 1988), diferentes significados associados aos números racionais.

O NEPEM (2004), apoiando-se nos estudos de Kieren (1976, 1981) e Behr et al (1983), discutem significados associados ao número racional. Conforme o NEPEM (2004), Kieren (1976, 1981) apontam cinco construtos para o número racional: relação parte-todo; medida, quociente, razão e operador que são redefinidos por Behr et al (1983), que os subdivide, denominando-os subconstrutos e obtendo sete: medida fracionária (relação parte-todo); coordenada linear; quociente; razão, taxa de número racional, decimal do número racional e operador. Em nosso trabalho assumimos a perspectiva dos PCN (BRASIL, 1988), que apresenta cinco significados para os números racionais, os quais passamos a discutir abaixo:

- relação parte/todo - fundamental para compreensão dos demais significados, depende diretamente da habilidade de repartição por igual de uma quantidade contínua ou de subdivisão de um conjunto em sub-coleções de tamanhos idênticos (SILVA, 2000). *A soma das unidades é igual ao valor do todo.*

A relação parte/todo se apresenta quando um todo (unidade) e se divide em partes equivalentes. A fração, por exemplo, indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes; é o caso das tradicionais divisões de uma figura geométrica em partes iguais.

Para o NEPEM (2004), o subconstruto parte-todo aplicado em quantidades contínuas e discretas constitui a base fundamental para a construção do conceito de número racional. Possui subjacente a idéia de medida. Modelos de regiões geométricas (noções de área) e retas numéricas (noções de unidade de medida de comprimento). Para Behr (1983, in: NEPEM, 2004), a reta é um subconstruto independente denominado "coordenada linear do número racional", portanto, os números racionais são interpretados como pontos sobre uma reta numérica.

- quociente de um inteiro por outro – baseia-se na divisão de um natural por outro;
- índice comparativo entre duas quantidades – razão – expressa a relação entre duas quantidades de uma mesma espécie. Inclui probabilidade, porcentagem, escala. Esta idéia relaciona-se diretamente à proporcionalidade, conhecimento importante para análise de deformações/transformações em figuras geométricas.
- operador – quando o número racional desempenha um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica. Conforme NEPEM (2004), citando Behr (1983),

está relacionado à idéia de função, como uma transformação. Trata-se da noção amplia – encolhe. Esse subconstruto impõe ao número racional *p/q* uma interpretação algébrica, significando uma função que, quando aplicada em figuras geométricas, transforma-as em figuras semelhantes; quando aplicadas a um conjunto discreto atua como um multiplicador – divisor. Em geometria, um exemplo disto é o coeficiente de variação *k* nas ações de ampliação e redução de figuras.

Há diversas formas de representação dos números racionais: representação fracionária, decimal ou percentual.

Do ponto de vista psicológico**, as representações fracionárias** pressupõem uma discussão sobre quantidade extensivas e intensivas (NUNES, CAMPOS, MAGINA e BRYANT, 2002).

Quantidade extensiva baseia-se na comparação de duas quantidades da mesma natureza e na lógica parte-todo "*quando juntamos duas quantidades extensivas, o todo é igual a soma das partes*", pressupondo um raciocínio aditivo. A representação de medidas extensivas é feita por um número. Quando as quantidades são extensivas descontínuas *medir* e *contar* são exatamente a mesma coisa.

Na quantidade intensiva as medidas são baseadas na relação entre duas quantidades diferentes, por exemplo, reais por quilo, quantidade de açúcar em relação à quantidade de suco. Tem-se que usar dois valores para representar uma quantidade intensiva; esses números podem estar organizados em forma de *razão*, um x para cada dois y, ou em forma de *frações*, x dividido por y, pressupondo um raciocínio multiplicativo. Portanto, na introdução da notação fracionária é importante estabelecer uma relação entre o raciocínio multiplicativo e as frações, isto é, trabalhar a conexão entre a linguagem das razões e a linguagem das frações, uma vez que elas são baseadas no mesmo raciocínio multiplicativo.

Conforme Cunha e Magina (2004), o **número decimal** é em geral trabalhado apenas quanto ao seu aspecto operacional em detrimento ao aspecto conceitual, ou seja, desvinculado da noção de medida. Desta forma os números racionais não são corretamente interpretados ou associados como resultado de medida discreta ou contínua, por exemplo, 8,4 m; 8º 24'; 8 h 36 min não são interpretados como sendo medida de comprimento, de tempo. Instrumentos importantes no processo de ensino aprendizagem, os livros didáticos relacionam a representação decimal com a divisão entre dois inteiros, denominando-os, em alguns casos, "*números com vírgula*".

Conforme as autoras os alunos parecem entender número decimal como números naturais separados por vírgula, porém o não entendimento da representação decimal não impede ao aluno a operacionalização com número decimal.

Outro aspecto importante destacado por Cunha e Magina (2004) é o fato do entendimento do número decimal pelas crianças ser função do contexto, por exemplo, o contexto da MEDIDA, onde o racional tem sua origem histórica.

A partir destas leituras levantamos a hipótese que dificuldades relacionadas à compreensão dos números racionais na forma decimal podem interferir na resolução de problemas envolvendo área de figuras geométricas planas, mas por outro lado o contexto do cálculo de área ser facilitador do entendimento do conceito de número racional na forma decimal.

Uma explicação para as dificuldades encontradas possivelmente deve-se ao fato de que a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com as idéias construídas para os números naturais e, portanto, demanda tempo e uma abordagem adequada.

Muitas pesquisas têm focado esta discussão. Uma síntese das dificuldades enfrentadas pelos alunos pode ser encontrada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998).

Sabe-se que o estudo do número racional é geralmente desenvolvido pela escola de forma fragmentada. Não há ênfase no conceito de número racional enquanto "relação". As diversas formas de representação são estudadas separadamente.

Pesquisas mostram o intenso trabalho com o subconstruto relação parte-todo no Ensino Fundamental. O trabalho ocorre simultaneamente com quantidades discretas e contínuas, sendo ponto de partida sempre grandezas contínuas, por exemplo, área; temos assim uma imbricação histórica e conceitual entre o cálculo de áreas e a idéia parte-todo dos números racionais.

Conforme o NEPEM (2004), pelo fato de utilizarmos sistemas de medidas e sistema monetário em bases decimais, o subconstruto decimal do número racional deveria ser amplamente trabalhado no ensino fundamental, até mesmo precedendo os estudos dos números racionais e sua representação fracionária. Ao nosso ver, as situações que envolvem fórmulas de área de figuras planas são um excelente contexto para explorar significado, representações e operações com números racionais.

Por outro lado, as idéias relacionadas às representações fracionárias são essenciais para compreensão do conceito de número racional e historicamente estão relacionados aos problemas de medida na antiguidade. Por isso na abordagem dos números racionais, a exploração de problemas históricos envolvendo medidas oferece bons contextos para mostrar a insuficiência dos números naturais e a necessidade de estender o sistema numérico. As representações fracionárias também são importantes para resolução de determinados problemas nos quais a representação decimal da fração seja uma dízima periódica ou um número irracional. Também referem-se à aplicação das frações ordinárias no contexto da construção civil (parafusos, pregos, canos e conexões). Desta forma, pensamos que o mais adequado é um trabalho simultâneo com as várias formas de representação como também com as várias idéias (significados) relacionadas ao número racional. É fato a amplitude conceitual do número racional. O trabalho pedagógico deve ocorrer, conforme o NEPEM (2004), em situações contextualizadas para que o aluno possa compreender tal amplitude e distinguir os diferentes significados com que esse tipo de número possa se manifestar.

OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS:

Deste ponto em diante teceremos alguns comentários sobre as operações fundamentais: adição, subtração, multiplicação e divisão. Assumimos em nosso trabalho o referencial teórico da teoria dos Campos Conceituais. Nesta teoria uma idéia básica relacionada aos problemas envolvendo as operações fundamentais é que os problemas não se classificam em função unicamente das operações a eles relacionadas a priori, e sim em função dos procedimentos utilizados por quem os soluciona. Neste caso há estreitas conexões entre situações aditivas e subtrativas, como também entre situações multiplicativas e as que envolvem divisão. Sendo assim, discutiremos as operações numéricas em dois campos denominados por Vergnaud *estruturas aditivas* e *estruturas multiplicativas*.

A compreensão das operações inclui três aspectos importantes: diante de um certo problema, o estudante precisa saber que operação dever ser realizada; precisa saber efetuar estas contas; deve conhecer e saber usar as propriedades das operações. Portanto, o trabalho a ser realizado deve se concentrar: na compreensão dos diferentes significados de cada uma delas; nas relações existentes entre elas; no estudo do cálculo (exato e aproximado, mental e escrito) (BRASIL, 1998).

Partimos do pressuposto que os domínios numéricos tratados em cada situação demandam complexidades diferentes, tratando-se de problemas relacionados ao cálculo de área – grandeza geométrica – temos dois domínios numéricos possíveis: o dos números naturais e o dos números racionais, variando a complexidade em função das ordens de grandeza adotadas.

Faremos um recorte nas operações com números naturais e com números racionais na forma decimal.

De forma geral, em relação à operação de **adição** relacionam-se idéias intuitivas de juntar, reunir e acrescentar. É uma operação bastante natural – as crianças identificam sem muita dificuldade, as situações que envolvem adição.

Com relação à **subtração** identificam-se três idéias relacionadas à subtração: de retirar, de comparar e de completar. Estas idéias relacionadas às operações de adição e subtração, mas os diferentes domínios numéricos que podem ser utilizados no problema, e ainda os diferentes contextos, propriedades e relações entre outros aspectos vão constituir o que Gèrard Vergnaud chamou de campo conceitual das estruturas aditivas.

Magina et al (2001) discutem a classificação para as estruturas aditivas proposta por Vergnaud[16], segundo a qual consideram-se quatro tipos de problemas: Problemas de composição; problemas de transformação; problemas de comparação e problemas mistos.

O campo conceitual das **Estruturas multiplicativas** consiste em todas aquelas situações que podem ser analisadas seja como problemas simples, ou de múltiplas proporções, ou ainda aquelas que precisam normalmente multiplicar ou dividir.

A análise das estruturas multiplicativas é profundamente diversa da das estruturas aditivas. As relações de base mais simples não são ternárias e, sim, quaternárias visto que os mais simples problemas de multiplicação e divisão implicam a proporção simples de duas variáveis, uma em relação à outra. A conexão entre a multiplicação e adição não é conceitual. A relação que existe entre multiplicação e adição está centrada no processo de cálculo da multiplicação: o cálculo da multiplicação pode ser feito usando-se a adição repetida porque a multiplicação é distributiva em relação à adição (NUNES, 2002).

Um dos aspectos importantes relacionados à operação de multiplicação é que o aluno deve ser capaz de diferenciar a idéia aditiva (soma de parcelas iguais) da idéia multiplicativa (correspondência entre quantidades) (CANOAS, 1997). O raciocínio aditivo envolve apenas uma variável, são situações que podem ser analisadas a partir de um axioma básico: *o todo é igual à soma das partes,* enquanto o raciocínio multiplicativo envolve duas variáveis, ou seja, envolve duas quantidades em relação constante entre si (NUNES, 2002).

Vergnaud define as estruturas multiplicativas como um conjunto de problemas que envolvem: isomorfismo de medidas; produto de medidas e proporções múltiplas.

[16] Para maiores detalhes consultar: MAGINA, S., CAMPOS, T., NUNES, T. e GITIRANA, V. Repensando Adição e Subtração. São Paulo: PROEM Editora, 2001.

Dentre as estruturas multiplicativas, aquela que é central para nosso trabalho é o produto de medidas, uma vez que os problemas que envolvem a relação entre comprimento e área são característicos dessa estrutura.

O produto de medidas é uma estrutura que consiste de uma composição cartesiana de duas medidas espaciais em uma terceira. Esta forma de relação consiste em uma relação ternária entre três quantidades, onde uma é o produto das duas outras, às vezes no plano numérico e outras vezes sobre o plano dimensional. Vergnaud descreve como produtos de medidas os problemas referentes a área, volume, produto cartesiano, trabalho e muitos outros conceitos da Física. O produto de medidas permite distinguir duas classes de problemas: multiplicação, que consiste em procurar a medida do produto conhecendo as medidas elementares; divisão - que consiste em encontrar uma das medidas elementares, conhecendo a outra e o produto dessas medidas. De acordo com Vergnaud (1983), há ainda várias subclasses que podem ser distinguidas em função dos valores numéricos utilizados (inteiros, decimais, números grandes, números inferiores a um), como também em função dos conceitos que envolvem. No nosso caso, as grandezas envolvidas são contínuas. Um exemplo de problema deste tipo é o seguinte: "Um retângulo tem uma superfície de 18, 66 m^2 e uma largura de 3,2 m. Qual é o seu comprimento?".

Em matemática, **dividir** um número por outro significa dividir em partes iguais, de forma que sobre o menor resto possível; é a chamada "*divisão euclidiana*".

As divisões efetuadas no universo dos números naturais são de dois tipos: divisões que deixam resto (resto não nulo) e divisões exatas (ou que têm resto zero). Há também duas idéias relacionadas à divisão:

- Partição – temos uma quantia dada conhecida e queremos reparti-la num certo número de grupos. A pergunta básica é: "quantos em cada grupo?".
- Quotição – queremos saber quantas vezes uma quantidade cabe em outra. A pergunta agora é: "quantos grupos?".

Sabe-se que questões relacionadas à multiplicação e à divisão, como: qualquer número multiplicado por zero é igual a zero; qualquer numero multiplicado por 1 é igual a ele mesmo; qualquer número dividido por ele mesmo é igual a; não é possível dividir por zero; como interpretar o resto numa divisão? Que significado é atribuído ao resto de uma divisão euclidiana? São fontes de dificuldades importantes no processo de ensino aprendizagem destas operações.

Algumas concepções enraizadas: multiplicar sempre aumenta; dividir sempre diminui; dividir significa distribuir em partes iguais e multiplicar significa somar parcelas iguais também merecem atenção especial.

OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS:

Na aprendizagem do cálculo numérico relativo às operações com números racionais escritos na forma decimal, é preciso apoiar-se amplamente na compreensão do sistema numérico decimal, como exploram Freitas e Bittar (2004), em um texto destinado à formação de professores para os ciclos iniciais do ensino fundamental. Essa constatação leva a considerar aspectos de continuidade na passagem dos números naturais para os racionais.

Esta continuidade também é observada historicamente, como destaca Brousseau (1983), ao ilustrar um artigo sobre obstáculos epistemológicos, com o caso dos decimais. Ele diz que na edição de 1784 de determinada enciclopédia sobre matemática, o Padre Bossut apresenta os decimais como um número natural: "*ce sont des entiers avec une virgule servant à représenter les mesures*". O aspecto fração decimal é relegado a um "apêndice". Uma quebra anuncia-se entre as frações decimais e os "decimais populares". Têm-se algoritmos tão extraordinariamente simples que vão permitir popularizar totalmente a compatibilidade comercial do sistema métrico decimal (BROUSSEAU, 1983).

No entanto, a concepção de número decimal como um par de números inteiros separados por uma vírgula conduz a numerosos erros como: 3,7 + 2,8 = 5,15 ou então: "*o sucessor de 3,7 é 3,8*" (BROUSSEAU, 1981).

É preciso, portanto, na construção do significado dos números racionais, trabalhar simultaneamente e de maneira cuidadosa e equilibrada com os aspectos de continuidade e de ruptura.

O **campo conceitual numérico** contribui com aspectos relacionados à extensão do domínio natural para o racional, como aqueles relacionados aos algoritmos das operações. Com relação ao número racional, destacamos o fato de ser historicamente fortemente articulado à noção de medida de grandeza, e na escola o trabalho com a representação dos racionais em forma decimal nem sempre ser trabalhada vinculada à noção de medida.

4.2.3 CONTRIBUIÇÃO DO CAMPO CONCEITUAL ALGÉBRICO

Algumas visões coerentes e complementares têm sido formuladas em torno do Campo Conceitual Algébrico.

Para Lins e Gimenez (1997), a álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdades e desigualdades. Segundo Garcia (1997), a álgebra revoluciona por ser uma ferramenta a serviço da resolução de problemas e ser um objeto matemático em si, um ramo autônomo das Matemáticas, de que todas as disciplinas científicas se nutrem para estabelecer melhores e mais cômodas vias de comunicação entre elas e com o exterior.

Segundo Souza e Diniz (1996), a álgebra é a linguagem da Matemática utilizada para expressar fatos genéricos. Como toda linguagem, a álgebra possui seus símbolos e suas regras. Estes símbolos são as letras e os sinais da aritmética, enquanto as regras são as mesmas regras da aritmética que nos permitem manipular os símbolos assegurando o que é permitido e o que não é.

Há também no campo algébrico assim como no funcional uma discussão subjacente aos conceitos de incógnita x variável. Não há consenso sobre o tema, mas a idéia que predomina é que INCÓGNITA está relacionada ao estudo das equações e VARIÁVEL relaciona-se ao conceito de função.

No trabalho com a álgebra são fundamentais: a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis); e o conhecimento da "*sintaxe*" (regras para manipulação dos símbolos algébricos).

A álgebra, segundo diversos estudos em Educação Matemática, apresenta várias dimensões, entre elas a dimensão funcional, que se relaciona à nossa problemática, onde as letras são utilizadas para expressar relações entre grandezas ou quantidades, assumindo o papel de variáveis. O aspecto funcional é citado nos PCNs (BRASIL, 1998) no desenvolvimento de conteúdos referentes à geometria e a grandezas e medidas, onde os alunos terão oportunidades de identificar regularidades, fazer generalizações, aperfeiçoar a linguagem algébrica e obter fórmulas, como para áreas.

Há também a dimensão interpretativa e procedimental, onde as letras assumem o papel de representar simbolicamente, através de uma equação, situações envolvendo um ou mais valores desconhecidos para, em seguida, simplificá-las e resolvê-las, neste caso são incógnitas.

O aspecto procedimental foi abordado na pesquisa de Teles (2002) que trata dos erros cometidos por alunos de Ensino Fundamental e Médio na resolução de equações polinomiais do 1º grau. Da mesma maneira, a interpretação dos erros dos alunos na etapa de cálculo algébrico é focada no estudo desenvolvido por Bittar e Chaachoua (2004). Esses autores desenvolvem experimentos com o software APLUSIX[17] visando a modelização das concepções dos alunos no tratamento de problemas algébricos e defendem que ambientes informatizados podem constituir, sob certas condições, um meio para a aprendizagem dos aspectos sintáticos da álgebra.

Sabe-se que a questão do uso de representações simbólicas é central na álgebra. Pois seguindo a trajetória do desenvolvimento de um pensamento algébrico pode-se verificar que da representação algébrica retórica (apenas palavras), à sincopada (alguma notação especial, em particular palavras abreviadas) e à simbólica (apenas os símbolos e sua manipulação) haveria um correspondente desenvolvimento intelectual.

Em Matemática, segundo Garcia (1997), o simbolismo formal constitui uma verdadeira linguagem, principalmente em forma escrita, necessária para a comunicação do pensamento matemático que opera em dois níveis. O primeiro é o nível semântico: os símbolos e as notações carregam um significado em paralelo com a linguagem natural. O segundo nível é puramente sintático, em que se podem aplicar regras manipulativas, sem referência direta ao significado.

O nível sintático, elemento essencial na álgebra, ainda segundo Garcia (ibid), é a principal causa de dificuldades associadas ao uso das notações formais.

Para Da Rocha Falcão (1997), a apropriação da álgebra constitui-se numa tarefa cognitiva árdua, que abrange quatro aspectos:

1 – *Reconhecimento de determinadas funções da álgebra*: Gerar modelos, resolver determinados problemas insolúveis aritmeticamente, demonstrar;

2 – *Formalização do problema* (colocação do problema em equação): Extrair os parâmetros, variáveis e relações pertinentes do problema, e dispor dos significantes necessários a tal recodificação;

3 – *Conhecimento dos objetos algébricos*: Funções, fórmulas e equações, variáveis e incógnitas;

[17] Aplusix é desenvolvido por pesquisadores da equipe DidaTIC, do Laboratório Leibniz, em Grenoble - França.

4 – *Conhecimento do que fazer a partir de uma equação*: Mobilização de um determinado ***script-algoritmo***[18], com respeito a uma determinada sintaxe.

Dada a complexidade deste campo conceitual, para Da Rocha Falcão (1997), a tarefa global de resolução de um problema algébrico pode ser decomposta, para fins de análise, em quatro etapas:

1 – Mapeamento do problema;

2 – Escrita algébrica (colocação do problema em equação);

3 – Procedimento de resolução (cálculo algébrico no senso estrito);

4 – Retomada do sentido (formulação da resposta final).

Ainda segundo Da Rocha Falcão (1997), o trabalho em quatro etapas não reproduz necessariamente a abordagem proposta para a introdução à álgebra na maioria dos currículos escolares. Para ele, a abordagem da álgebra num contexto que respeite as etapas acima descritas favorece a exploração integrada das várias vertentes deste complexo campo conceitual, como por exemplo: conceitos de variável e parâmetro, fórmula e equação; aritmética e álgebra.

Em nosso trabalho nas situações que envolvem fórmulas de área, tendo subjacente manipulações simbólicas, analisaremos cada uma destas etapas citadas por Da Rocha Falcão (1997).

Conforme Meira (2003), é preciso também, diversificar as situações de uso da álgebra como ferramenta de modelagem e resolução de problemas. Neste contexto, o estudo das fórmulas cria situações para aprendizagem da álgebra, tais como grandezas e medidas gerando expressões algébricas, identidades e operações com expressões algébricas; ou vice - versa a álgebra cria situações para aprendizagem da geometria, por exemplo, o cálculo do perímetro do retângulo em função dos comprimentos dos lados; ou da área do retângulo em função dos comprimentos dos lados.

Outro trabalho que explora relações funcionais é o de Nakamura (2003). Pela abstração de padrões geométricos, busca-se a formulação de relações gerais de dependência entre as variáveis envolvidas no processo de generalização de padrões. A idéia de função constitui um vínculo conceitual entre cálculos numéricos e manipulações algébricas formais.

A autora, de certa forma, trabalha o cálculo de área numa interface com a álgebra, não na perspectiva da área como produto de grandezas[19]. Por um lado há ênfase no aspecto

---

[18] Na acepção dada ao termo por Vergnaud (1991), para quem um algoritmo, cujo traço escrito constitui seu script, é uma regra ou conjunto de regras que permitem, diante de qualquer problema de uma determinada classe de problemas homomorfos, achar uma solução (se existir uma) em um número finito de passos, ou demonstrar que tal solução não existe.

geométrico – observação e interpretação da figura, mas por outro a pesquisadora propõe um procedimento numérico – por exemplo, contagem de quadradinhos. Estes dois procedimentos – geométrico e numérico - geram uma expressão algébrica significativa do ponto de vista das relações funcionais.

Nakamura (2003) afirma que “diferentes padrões de formação podem levar à percepção das várias formas de decompor as figuras, **mantendo a mesma área”**. Outros estudos, no entanto, mostram que a noção de conservação de área é algo complexo, estudado, por exemplo, por Baltar (1996).

O **campo algébrico,** entre outros aspectos, contribui para o estudo das fórmulas de área possibilitando a formulação e a resolução de problemas, por meio de equações e de regras para manipulação de símbolos algébricos. Assim, podemos situar a contribuição da álgebra, no papel de ferramenta a serviço da resolução de problemas e, ao mesmo tempo, objeto matemático em si (GARCIA, 1997). A álgebra fornece também a linguagem da Matemática utilizada para expressar fatos genéricos (SOUZA e DINIZ, 1996). Há muitos estudos sobre dificuldades relacionadas ao uso destas notações formais (GARCIA, 1997). Uma das nossas questões de pesquisa diz respeito às quatro etapas para resolução de um problema algébrico propostas por Da Rocha Falcão (1997): numa situação envolvendo fórmulas de área, que aspectos relacionam-se ao mapeamento da situação? Que tipo de dificuldade o aluno enfrenta? Que dificuldades relacionadas à manipulação simbólica? Como o aluno interpreta os resultados obtidos?

Uma atividade algébrica pressupõe a representação de um problema algebricamente (LINS e GIMENEZ, 1997). Para isto é necessário utilizar ferramentas matemáticas do campo conceitual algébrico, como noção de igualdade, equivalência, variável, incógnita e também estabelecer um sistema de relações. Como o aluno mobiliza estes conhecimentos em situações que envolvem fórmulas de área?

Os conceitos de incógnita e variável também desempenham papel importante para o estudo das fórmulas. A letra como variável permite a obtenção de fórmulas, como para áreas (BRASIL, 1998). Nas situações que mobilizam o papel da letra como variável ou como incógnita, que dificuldades o aluno enfrenta?

---

[19] Grandezas: comprimento do lado tomado como base e altura relativa a este lado no caso das regiões retangulares, quadradas, triangulares e trapezoidais.

4.2.4 CONTRIBUIÇÃO DO CAMPO CONCEITUAL FUNCIONAL

O campo conceitual funcional engloba tanto o conceito matemático de função, quanto às várias idéias que o circundam (como variável, domínio, imagem).

O conceito de função é fundamental em matemática (HENRY, 2006 e SAJKA, 2003). Mas parece não existir consenso entre os diversos autores, a respeito da origem do conceito de função. Alguns, conforme Zuffi (2001), consideram que os babilônios (2000 a.C) já possuíam um "*instinto de funcionalidade*", que precedia uma idéia mais geral de função, em seus cálculos com tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas, as quais podem ser tomadas como "funções tabuladas", que eram destinadas a um fim prático. Este impasse reflete até mesmo no ensino das funções. Uma pesquisa recente de Zuffi (1999) mostrou que há uma diversidade de conceituações, para as funções, defendidas pelos professores do Ensino Médio, que variam com o contexto em que são propostas, mas também revelou que nem sempre os professores têm consciência dessas diferenças.

Zuffi (2001) diz que o conceito de função que chegou ao ensino médio, é a definição formal de Dirichlet, proposta no final do século dezenove e aceita até meados do século XX:

> se uma variável y está relacionada a uma variável x de modo que, ao se atribuir qualquer valor numérico a x, existe uma regra de acordo com a qual um único valor de y é determinado, então y é dito ser uma função de variável independente x" (SIERPINSKA, 1992, p. 46 citado por ZUFFI, 2001, p. 13).

Diversos sistemas representacionais podem ser usados para indicar uma função, estes incluem pares ordenados requisitados, equações, gráficos, e descrição verbal das relações. Janvier (1987d apud LEINHARDT et al, 1990, p. 35) chamou a atenção aos processos psicológicos envolvidos ao mover-se de uma representação para outra. Denominou estes movimentos "translações". Destaca que, mover-se de uma equação para um gráfico envolve processos psicológicos diferentes do que mover-se de um gráfico para uma equação.

Para Meira (1997), o estudo das representações algébricas de funções deve envolver a constante busca de significados para símbolos representados no papel. Este não é um objetivo simples, e pode ser atingido apenas gradualmente. É necessário, para isto, que os alunos possam discutir amplamente, em sala de aula, as relações entre símbolos algébricos e quantidades representadas em gráficos, tabelas de valores, e sistemas físicos.

O conceito e os diversos aspectos relacionados às funções são importantes devido ao crescente reconhecimento do poder organizador do conceito de funções desde a matemática do ensino fundamental a tópicos mais avançados no ensino médio e em cursos universitários (LEINHARDT, KASLAVSKY e STEIN, 1990).

A função pode ser compreendida de duas maneiras diferentes: estrutural - como um objeto, e operacionalmente - como um processo. Do ponto de vista estrutural, a função é um conjunto de pares ordenados, e do operacional é um processo computacional ou um "método para começar de um sistema a outro' (*method for getting from one system to another*). Essas duas maneiras de compreender funções, embora aparentemente excluindo-se uma da outra, devem, entretanto, constituir-se uma unidade coerente - como dois lados da mesma moeda (SFARD, 1991 in SAJKA, 2003).

O domínio matemático das funções, conforme Meira (1997), forma um campo conceitual próprio que inclui idéias, representações, problemas e atividades.

A aprendizagem do conceito de funções tem sido estudada a partir de uma grande variedade de concepções teóricas e experimentais, que apontam para complexidade do conceito de funções e para dificuldades em seu aprendizado. Para Leinhardt (1990), isto é devido a diversos fatores, incluindo os seguintes: (a) É associado freqüentemente com outros conceitos matemáticos complexos (como variável, crescimento, limite, extremidades, significado da ilustração); (b) é integrativo por natureza, puxando junto os vários subconceitos e campos da matemática; e (c) aparece sob muitas representações diferentes (DREYFUS & EISENBERG, 1982). Por causa da complexidade do conceito de função, caracterizar o pensamento funcional das crianças envolve procurar fontes múltiplas.

Dentre as muitas dificuldades que podem estar envolvidas no aprendizado sobre funções, as pesquisas destacam, entre outros aspectos, as múltiplas e também complexas conexões entre o conceito de função e suas representações e a dificuldade de compreender o conceito de variável.

Uma situação referente ao conceito de função, conforme Leinhardt et alli (1990), abrange dois aspectos: os arredores do cenário (contexto) da tarefa[20], e o contexto do problema[21].

Os estudos que incluem a contextualização da tarefa são baseados freqüentemente na suposição que é mais fácil para estudantes tratar dos problemas que constroem em situações familiares (por exemplo, situações que experimentaram ou podem se relacionar de maneira significativa) do que em situações abstratas.

---

[20] **Arredores do cenário**: O primeiro aspecto da situação é o cenário em que a tarefa é apresentada, como uma lição de matemática, um estudo social da classe, ou uma atividade no laboratório de ciência.

[21] **O contexto**: o segundo aspecto de uma situação é o contexto do próprio problema (chamado freqüentemente situação problema), que pode ser mais ou menos abstrato ou contextualizado.

Ainda conforme Leinhardt et alli (1990), uma tarefa típica da função é a classificação. São ações que envolvem:

(a) decidir se uma relação particular é uma função (a relação pode ser representada de várias formas; por exemplo, um gráfico, uma regra da álgebra, um diagrama de setas);
(b) identificação de uma função entre outras relações; ou
(c) identificação do tipo especial da função entre outras funções.

Quanto às tarefas relativas às funções, Leinhardt et alli (1990) discutem sua introdução sob quatro pontos de vista: a ação do estudante ou do aprendiz, a situação, as variáveis e sua natureza, e o foco.

Inicialmente verificam se a tarefa é de interpretação (por exemplo, leitura, ganhando o significado) ou de construção (por exemplo, traçando um gráfico de uma série de dados de, determinando uma equação de um gráfico, ou gerando um exemplo de uma função).

Situação refere-se à montagem do gráfico ou da função e pode ser mais ou menos contextualizado ou abstrato. A natureza das influências da situação a interpretação e a plausibilidade dos resultados e do tipo de variáveis usadas. Situações referem-se ao contexto do gráfico e a montagem e em que o gráfico está sendo usado - um laboratório da ciência, uma classe da matemática, ou em estudos sociais.

Variáveis são os objetos das funções e dos gráficos; são os dados, concretos ou abstratos.

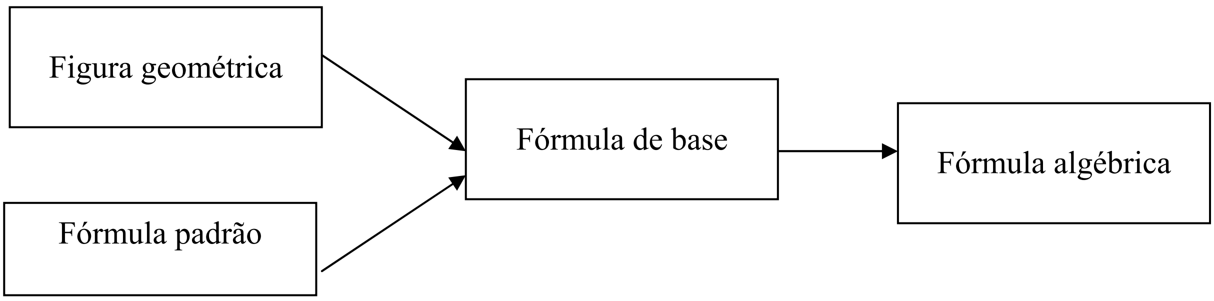
O foco é atrelado à situação e refere-se ao foco da ação à posição da atenção dentro de uma tarefa específica. O foco pode ser primeiramente interno ao sistema coordenado, isto é, no gráfico e em seus componentes; ou externo caso esteja no sistema coordenado.

Outro trabalho que investigou aspectos relacionados ao conceito de função e as fórmulas foi relatado por Germi (1997). Ao constatar que são encontradas poucas indicações para a utilização de letras em matemática nos programas de ensino e nos livros didáticos franceses, definiu como seu objeto de pesquisa a seguinte questão: "*Quais são as dificuldades dos alunos relativamente ao status das letras e em particular no que diz respeito à noção de variável?*" Para isto propõe uma seqüência de atividades.

O foco de Germi (1997) são três diferentes status possíveis para as letras numa classe de matemática: para designar, incógnita e variável. Para o autor no estudo das funções lineares a noção de variável é tocada ligeiramente pelos alunos. A utilização de tabelas e gráficos obriga a considerar as letras como números desconhecidos que não são fixos. O objetivo proposto na atividade, que interessa a nossa pesquisa sobre imbricações, é então levar os alunos a não mais considerar uma letra como definida por um valor numérico desconhecido mas como definido pelo fato de pertencer a um conjunto conhecido de números, ou seja, enquanto variável. Para isto Germi (1997) escolhe trabalhar com fórmulas de área. No trabalho sobre as fórmulas, ele propõe problemas que no meio da seqüência revelam uma classe de problemas usuais no collège, onde cada um requer: *"exprimir uma grandeza geométrica em função de outra*". Germi (1997) verificou que nesta tarefa, a maioria dos alunos começa, antes de mais nada, atribuindo a todos os pontos da figura uma letra; em seguida, utilizam prioritariamente uma fórmula conhecida. Em conseqüência desta tarefa, eles encontram uma primeira dificuldade que é a substituição das letras da fórmula disposta por sua designação em função das letras da figura.

Exprimir uma grandeza geométrica em função de outra, envolve uma distinção entre o que Germi (1997) chama de fórmula de base e fórmula algébrica.

A partir da figura geométrica e da fórmula padrão para área de figuras geométricas usuais na cultura escolar o aluno constrói a "fórmula de base", compreendida como a fórmula resultante da designação que o aluno deu às grandezas. Da fórmula de base o aluno constrói a "fórmula algébrica", que é a fórmula resultante da substituição dos elementos da fórmula pelos correspondentes algébricos. Assim:



Pensamos que a fórmula de base pode ser implícita, ou seja, o aluno mobiliza implicitamente as relações pertinentes para solução do problema ou explícitas, ou seja, quando a fórmula precisa ser escrita. Em problemas de otimização, fórmula de base é a fórmula que expressa a relação entre os comprimentos dos lados e a área do retângulo; fórmula algébrica seria a fórmula de base com os elementos substituídos pelas variáveis. Numa situação de otimização intervém o caráter de 'variável"de A (área), as letras envolvidas evoluem passando de um status de número desconhecido fixado (incógnita) para o status de número desconhecido, mas que varia em função dos elementos da figura (GERMI, 1997).

Germi (1997) não leva em conta dificuldades relacionadas ao campo das grandezas, apenas preocupa-se com o status da letra como variável. Ele identifica erros relacionados à passagem da fórmula de base para fórmula algébrica. O interesse pela fórmula algébrica repousa no fato de permitir um cálculo rápido e econômico da área para valores de x. A relação existente entre as duas grandezas é inscrita numa relação funcional na qual o status de x e de A é de variável. Mesmo Germi (1997) não tendo como foco as imbricações entre campos conceituais, identificamos em seu trabalho erros no campo algébrico relacionados à manipulação simbólica $\left[(x-5)^2 = x^2 - 25\right]$; erros no campo funcional, representados pela não compreensão da variação; erros no campo das grandezas mobilização da fórmula pertinente e no campo geométrico, identificação dos elementos da figura. E ainda no campo numérico o intervalo numérico possível para situação.

A LETRA E O STATUS DE VARIÁVEL

O conceito de função é intimamente ligado ao de variável. Conforme Leinhardt et alli (1990), **variáveis** são os objetos das funções e dos gráficos; são os dados, concretos ou abstratos. Nos gráficos dimensionais as variáveis podem estar na mesma forma ou em formas diferentes. Pela forma inferimos às propriedades da unidade, se é categórico, ordinal, intervalo, ou relação. Outra característica da variável relaciona-se ao fato de ser discreta ou contínua.

Uma noção **estática** de variável é associada geralmente com os símbolos algébricos (por exemplo, letras generalizando). Uma outra interpretação da variável tem-lhe um sentido mais **dinâmico**, que captura essencialmente a variabilidade e as mudanças simultâneas em uma variável na comparação a outra (JANVIER, 1981a). O aspecto dinâmico da variável pode ser representado de várias maneiras (por exemplo, uma notação funcional, um gráfico). Não obstante, quanto ao significado associado com a noção de variável, dá-se pouca atenção na literatura à natureza ou às formas variáveis que são conectadas às atividades (LEINHARDT et al, 1990).

Uma parte integrante da variável é seu domínio, isto é, os valores que podem lhe ser atribuídos. A natureza do domínio é influenciada pela situação. Além disso, a situação sugere a unidade apropriada, e o tipo de unidade, por sua vez, determina a forma da variável. Em nosso estudo, por exemplo, as situações de uso de fórmulas para área de figuras planas determinam um domínio estritamente positivo, haja vista que a variável representa as medidas das grandezas área e perímetro.

Uma variável também pode ser um argumento (isto é, representada por valores do domínio de uma função) ou um parâmetro (isto é, representa um número do qual dependem outros números). No contexto desta concepção, apresentada por Usiskin (1995), existem as noções de variável independente e variável dependente.

Formalmente, de acordo com Meira (1997), a relação entre variáveis dependente e independente em uma função pode ser representada em três sistemas simbólicos distintos:

- tabelas contendo listas de pares ordenados que satisfazem a dependência;
- gráficos da função no plano Cartesiano, ou diagramas de setas que estabelecem relações entre conjuntos; e
- equações em duas variáveis,

Outro aspecto refere-se a passagem do status de incógnita para variável que caracteriza a função. Henry (2006) diz que os alunos, nesta passagem, apóiam-se em conhecimentos anteriores e para dar uma nova roupagem à letra introduze-se a noção de causalidade que vai funcionar como uma dificuldade a ser enfrentada, tanto de origem epistemológica, como didática. Daí a importância para o autor de introduzir no trabalho com funções relações algébricas que não tragam tão forte a noção de causalidade, ou seja, é preciso superar, para aprendizagem das funções, algumas concepções arraigadas: para toda função tem que haver uma expressão algébrica; a idéia de causalidade.

Os alunos enfrentam dificuldades relevantes, segundo Henry (2006), que se revelam pelas resistências, hesitações e erros nas resoluções de problemas que envolvem o conceito de função. O vocabulário associado às funções não é familiar aos alunos e demanda tempo para assimilação. O próprio termo *função* induz fortemente a idéia de uma relação causal entre uma grandeza variável e uma grandeza que lhe determina.

A identificação de funções com expressões analíticas, foi um fato histórico causado pelo foco de atenção na pesquisa de instrumentos para descrever relações funcionais, que ainda se encontra presente no ensino deste conceito. É obvio que uma certa familiaridade com a álgebra é necessária para o estudo das funções. Historicamente, no século XVII e XVIII, o encantamento com a álgebra e, conseqüentemente, com a expressão analítica de função, levou à crença, ainda hoje presente no ensino de funções, de que somente relações que possam, ser descritas por fórmulas analíticas merecem o nome de função (TRINDADE e MORETTI, 2000). Ainda conforme os autores, às vezes há uma confusão entre a função e o instrumento analítico para descrever sua lei. No Brasil, da mesma forma que na Polônia, a experiência que os alunos tem é a de usar letras como incógnitas, transformar expressões algébricas com o auxílio de identidades, envolvendo produtos notáveis e resolver equações lineares simples (TRINDADE e MORETTI, 2000).

PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS:

Problemas de máximos e mínimos constituem um dos tópicos mais interessantes da Matemática do Ensino Médio, conforme Paterlini (1997). Constitui-se na aplicação de alguma técnica para encontrar o ponto extremo de funções quadráticas em problemas do tipo "*metros de tela*"[22], nos quais a tarefa principal é, com um perímetro fixo, calcular a maior área possível. Uma das maneiras mais utilizadas para o cálculo do ponto extremo de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é aplicação da fórmula $(x_{extr}, y_{extr}) = (\frac{-2b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante da função. Conforme Paterlini (1997), esse método é utilizado pela maioria dos alunos do ensino médio e também é o preferido dos livros didáticos, nos quais a fórmula do ponto extremo aparece como uma conseqüência do complemento do quadrado. Conforme o autor (ibid) esse método é muito bom para treinar os estudantes em manipulações algébricas com polinômios.

Nos problemas de máximos e mínimos, como dado um perímetro fixo, determinar a maior área possível, a estratégia funcional é a mais econômica, mas existem outras. Porém, em todas elas a compreensão e mobilização de conceitos de outros campos conceituais são necessárias.

Assim, uma contribuição importante do **campo conceitual funcional**, reside na articulação de algumas constatações dos estudos neste campo, que nos ajudam a refletir sobre as situações envolvendo fórmulas de área em nosso trabalho. As múltiplas e complexas conexões entre o conceito de função e suas representações e a dificuldade de compreender o conceito de variável nos ajudam a conjecturar sobre os tipos de situações que mobilizam o conceito de variável, e ainda sobre situações que utilizem diferentes formas de representação relacionadas às funções, como tabelas e gráficos, por exemplo. Será que em situações envolvendo fórmulas de área o aluno mobiliza corretamente o conceito de variável? Quais dificuldades enfrenta?

Também o fato de representações algébricas e funções precisar envolver a constante busca de significados para os símbolos representados no papel nos conduz a refletir sobre o significado das fórmulas, isto é, as relações implícitas e explícitas entre comprimentos característicos de uma figura que compõem uma fórmula de área.

---

[22] Ver questão do teste diagnóstico.

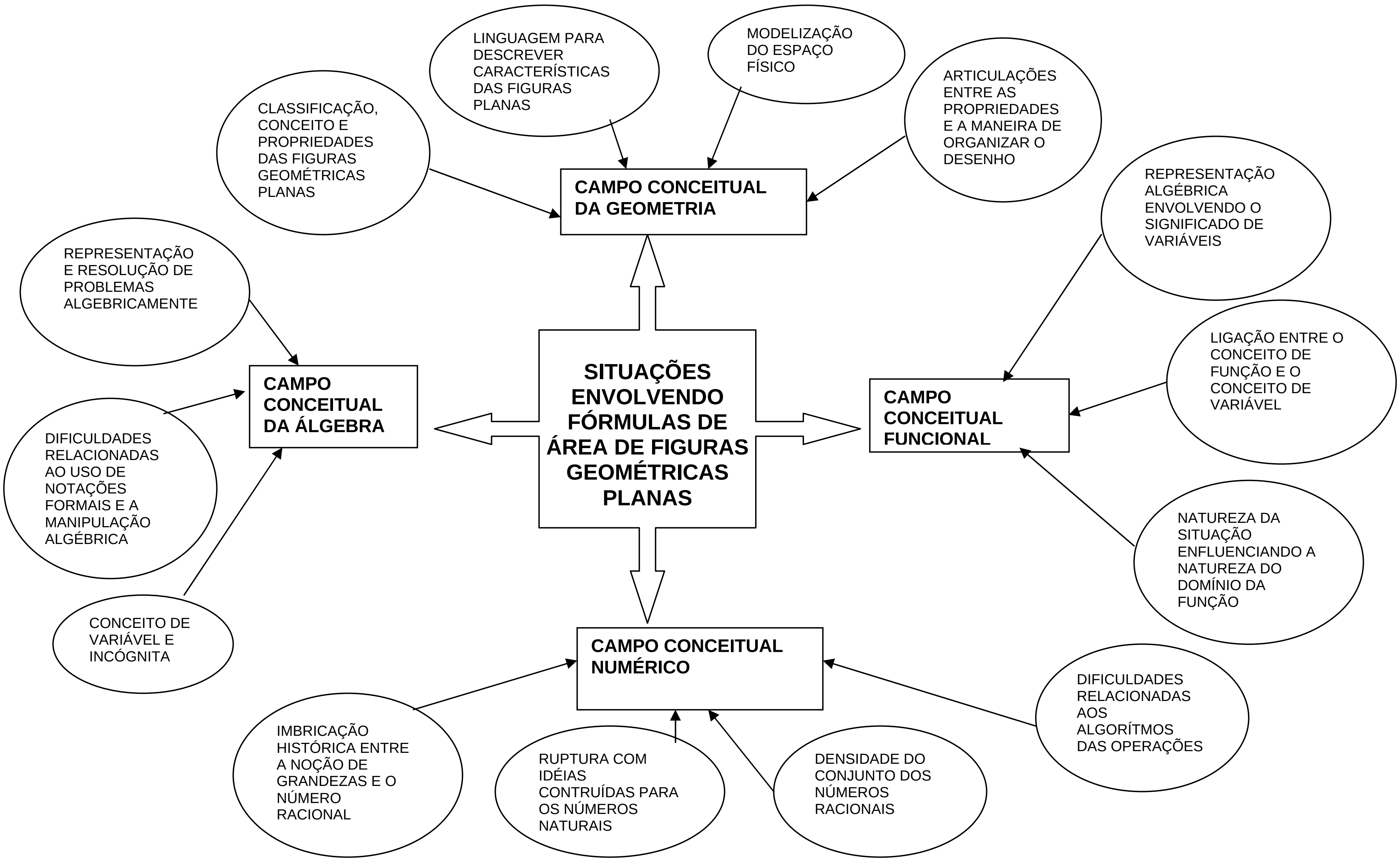
A noção de uma variável é fundamental para compreender muitas relações funcionais e representações gráficas. Em nosso trabalho nos interessamos pelas variáveis que representam área e perímetro, especialmente nas situações de otimização.

A ligação entre o conceito de função e o conceito de variável, suscita outro questionamento: que tipo de domínio prevalece nas situações que envolvem fórmulas de área de figuras geométricas planas? Que dificuldades estariam subjacentes à compreensão deste domínio? Especialmente na retomada do sentido, ou seja, interpretação de resultados obtidos em questões algébricas; quais valores decimais os alunos mobilizam?

Finalmente**,** o questionamento que as pesquisas fazem sobre a forma tradicional em que as funções são apresentadas, ou seja, em relação ao estudo analítico das funções, sem que os alunos compreendam seu significado em relação a situações reais, contribui para nossa reflexão sobre os aspectos funcionais intrínsecos nas situações que envolvem fórmulas de área. Que conhecimentos precisam ser colocados em ação para que o aluno expresse simbolicamente a área máxima de um retângulo em função de um perímetro fixo?

Sem a pretensão de sermos exaustivos, o esquema abaixo ilustra as contribuições que cada campo pode oferecer para o estudo das fórmulas de área de figuras geométricas planas, sob a ótica das imbricações entre campos conceituais:

FIGURA 4.1. ESQUEMA DA CONTRIBUIÇÃO DOS CAMPOS CONCEITUAIS PARA O ESTUDO DAS FÓRMULAS DE ÁREA DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS



SÍNTESE DO CAPÍTULO:

Sob a ótica dos campos conceituais, esta revisão de literatura permitiu identificar situações que dão sentido ao estudo das fórmulas sob a ótica das imbricações entre campos conceituais:

- Situações que exigem uma modelização do real, através de propriedades e representações geométricas que permitam agir nesse modelo.
- Situações envolvendo a idéia parte-todo dos números racionais e o cálculo de áreas de figuras planas.
- Situações que envolvem o produto de medidas, em especial os que tratam do produto contínuo x contínuo.
- Situações envolvendo a dimensão funcional da álgebra, onde as letras são utilizadas para expressar relações entre grandezas ou quantidades, assumindo o papel de variáveis.
- Situações envolvendo a dimensão interpretativa e procedimental da álgebra onde as letras assumem o papel de representar simbolicamente, através de uma equação, situações envolvendo um ou mais valores desconhecidos para, em seguida, simplifica-las e resolvê-las, neste caso são incógnitas.
- Situação referente ao conceito de função, sendo o problema contextualizado com cálculo de áreas de figuras geométricas planas.
- Situações que envolvem "exprimir uma grandeza geométrica em função de outra".

A identificação destas situações nos impulsiona a questionar sobre quais tipos são abordadas efetivamente na matemática escolar, especialmente nas abordagens dos livros didáticos? E ainda: como o aluno navega de um campo para outro numa mesma situação?
Com relação aos invariantes operatórios que podem ser mobilizados nas situações descritas acima, identificamos vários conceitos correlatos, ou seja, potenciais conceitos-em-ação. Destacam-se:

- Do campo geométrico, a caracterização das figuras geométricas em foco, ou seja, o quadrado, o retângulo, o paralelogramo e o triângulo.
- Do campo numérico, o conceito de número racional, com as continuidades e rupturas, com respeito ao conceito de número natural.
- Do campo algébrico, os conceitos de incógnita, variável e equações;
- Do campo funcional, os conceitos de função, variável, domínio e imagem.

Observam-se também várias dificuldades que podem interferir na resolução de situações problema envolvendo fórmulas de área de figuras geométricas planas.

- Os alunos incluem aspectos não – essenciais das figuras geométricas ao conceitualizá-las, em função das condições em que tem lugar sua aprendizagem (GALVEZ, 1996) – que pode ser influenciado, por exemplo, se as figuras se apresentarem em posições não prototípicas.
- Não são capazes de selecionar um conjunto de características pertinentes (necessárias e suficientes) para reprodução e não encontram articulações entre as propriedades que já conhecem e a maneira de organizar o conjunto do desenho (GALVEZ, 1996 e BRASIL, 1998).
- Dificuldade de interpretar ou associar o número decimal ao resultado de medida discreta ou contínua (CUNHA e MAGINA, 2004).
- A concepção de número decimal como um par de números inteiros separados por uma vírgula conduz a numerosos erros como: 3,7 + 2,8 = 5,15 ou então: *"o sucessor de 3,7 é 3,8"* (BROUSSEAU, 1981).
- As múltiplas e também complexas conexões entre o conceito de função e suas representações e a dificuldade de compreender o conceito de variável.
- Na tarefa de exprimir uma grandeza em função da outra, a maioria dos alunos começa, antes de mais nada, atribuindo a todos os pontos da figura uma letra; em seguida, utilizam prioritariamente uma fórmula conhecida. Em conseqüência desta tarefa, eles encontram uma primeira dificuldade que é a substituição das letras da fórmula disposta por sua designação em função das letras da figura (GERMI, 1997).
- Dificuldade na passagem do status de incógnita para variável que caracteriza a função. Os alunos, nesta passagem, apóiam-se em conhecimentos anteriores e para dar uma nova roupagem à letra introduz-se a noção de causalidade que vai funcionar como uma dificuldade a ser enfrentada, tanto de origem epistemológica, como didática (HENRY, 2006).

Tais dificuldades encontram freqüentemente sua raiz em teoremas-em-ação, construídos e mobilizados pelos alunos, o que nos conduz a questionar: Quais invariantes operatórios efetivamente os alunos mobilizam na resolução de situações envolvendo fórmulas de área? Qual a influência dos outros campos conceituais nos procedimentos dos alunos?

Com relação às representações simbólicas subjacentes aos vários campos conceituais que podem ser mobilizadas em situações envolvendo fórmulas de área, destacamos: as figuras – no campo da geometria – o sistema numérico decimal, no campo numérico; O simbolismo formal da álgebra, como linguagem da Matemática utilizada para expressar fatos genéricos, com seus símbolos letras e sinais da aritmética e suas regras Souza e Diniz (1996) e a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica, subjacente ao campo funcional.

Continuidades e rupturas também foram identificadas no estudo das fórmulas sob a ótica das imbricações entre campos conceituais:

Uma continuidade, por exemplo, pode ser identificada no entendimento do número decimal pelas crianças em função do contexto. Por exemplo, o contexto da MEDIDA, onde o racional tem sua origem histórica (CUNHA e MAGINA, 2004).

Já a ruptura deve-se ao fato das dificuldades encontradas na aprendizagem dos números racionais relacionarem-se às idéias construídas para os números naturais, ou seja, demandarem a extensão dos naturais para os racionais.

Assim, subsidiados pelos estudos elaborados até este ponto, apresentamos nos próximos capítulos, o mapeamento de tipos de situações efetivamente utilizadas nos livros didáticos para o ensino fundamental e médio e também em provas de vestibulares; a partir desta categorização elaboramos testes diagnósticos.

CAPÍTULO 5
FÓRMULA DE ÁREA COMO UM CONCEITO - categorias de usos de fórmulas de área em Livros Didáticos e Provas de vestibular

Os estudos teóricos apresentados nos capítulos anteriores reforçaram a necessidade de aprofundar o papel das fórmulas na aprendizagem do conceito de área. Além disso, evidenciaram que para a construção do significado das fórmulas é preciso abordar múltiplas situações. Que situações seriam estas? Quais os tipos de usos para as fórmulas nestas situações? Que invariantes operatórios e representações simbólicas estariam envolvidos no tratamento destas situações? Estes questionamentos conduzem a olhar a fórmula como um *"conceito"*. A análise sobre a construção do significado das fórmulas em livros didáticos notoriamente antenados com os estudos em Educação Matemática, apresentada no capítulo três, mostrou avanços incorporados em suas abordagens com relação ao conceito de área enquanto grandeza, dissociação área perímetro e um trabalho significativo com as fórmulas, mas também abriu margem para alguns questionamentos. Neste capítulo, portanto, sob a ótica dos Campos Conceituais, faremos o mapeamento de situações, de invariantes operatórios e representações simbólicas subjacentes às situações utilizadas em livros didáticos e provas de vestibulares, envolvendo fórmulas de área do retângulo, do quadrado, do paralelogramo e do triângulo, que são as figuras focadas em nosso trabalho. As situações envolvendo fórmulas de área de outras figuras planas como trapézio, círculos, outros polígonos regulares não serão foco da nossa análise. Também não serão foco outras fórmulas, como a fórmula da área do triângulo eqüilátero e a fórmula de Heron que também são tratadas nos Livros Didáticos.

Analisamos 6 coleções de livros didáticos escolhidos dentre os indicados no PNLD e utilizados em escolas das redes pública e privada do estado de Pernambuco. Examinamos quatro coleções para o **Ensino Fundamental**:

- DANTE, Luiz Roberto. Tudo é Matemática. São Paulo: Editora Ática, 2002.
- IMENES, Luiz Márcio Pereira e LELLIS, Marcelo. Matemática. São Paulo: Scipione, 1997.
- ISOLANE, Clélia Maria Martins, MIRANDA, Diair Terezinha Lima, ANZZOLIN, Vera Lúcia Andrade e MELÃO, Walderez Soares. Matemática - Ensino Fundamental. 2.ed. Curitiba: Módulo, 2002.
- PIRES, Célia Carolino, CURI, Edda e PIETROPAOLO, Ruy. Educação Matemática. 1ª Edição. São Paulo: Atual, 2002.

E duas para o **Ensino Médio**:

- DANTE, Luiz Roberto. Matemática (ENSINO MÉDIO). 1ª edição. São Paulo: Ática, 2004.
- SMOLE, Kátia Stocco e DINIZ, Maria Ignez. Matemática Ensino Médio. 3ª Edição Reformulada. São Paulo: Editora Saraiva, 2003.

No total foram analisados 22 volumes de livros didáticos de matemática. Analisamos também as provas de vestibular UFPE/UFRPE no período de 2000 a 2005.

O propósito deste estudo não é a análise da abordagem adotada nas coleções. Não apontamos como cada coleção faz. Não fazemos comparações, nem apontamos qual abordagem seria mais adequada. Mas a partir da análise das coleções construímos categorias.

Fizemos a análise de cada um dos 22 volumes, em todos os capítulos. Selecionamos cerca de 200 questões, envolvendo fórmulas de área de figuras geométricas planas, especificamente retângulos, quadrados, paralelogramos e triângulos.

Com relação ao campo conceitual da geometria consideramos aspectos relacionados à presença ou ausência da figura; articulação entre as propriedades e a maneira de organizar o desenho; a linguagem utilizada para descrever as características da figura. Com relação ao campo conceitual da álgebra verificamos a utilização de representações simbólicas no enunciado ou no processo de resolução do problema; também o papel das letras na situação. Com relação ao campo funcional observamos aspectos ligados à natureza da situação e a noção de variável. Finalmente, com relação ao campo numérico observamos o domínio numérico dos dados apresentados no problema e também da solução como também as operações numéricas necessárias.

A análise também evidenciou que nos livros didáticos, ora a fórmula é tomada como um objeto de estudo, ora como um recurso para outras temáticas.

5.1. FÓRMULA DA ÁREA COMO RECURSO PARA OUTRAS TEMÁTICAS:

O cálculo da área com a utilização de fórmulas é utilizado como recurso para explorar ou explicar outras temáticas, por exemplo:

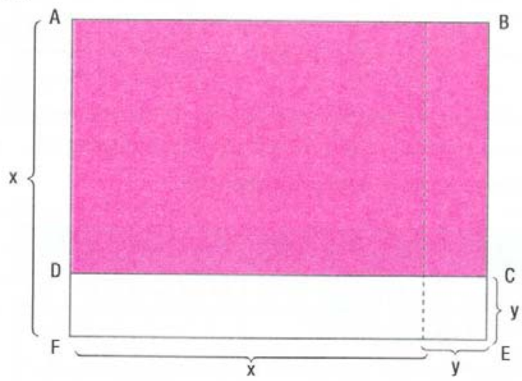
- Regularidades (decomposição de números quadrados)
- Expressões algébricas equivalentes/decomposição de figuras/ expressões algébricas
- Números irracionais/ diagonal

- Produtos notáveis
- Problemas numéricos – potenciação e raiz quadrada
- Seqüências, progressões aritméticas e geométricas;
- Funções: composta, inversa, quadrática.

Exemplo:

a)

Os produtos notáveis podem ser interpretados geometricamente, em problemas de áreas de figuras. Ao resolver o problema 2, provavelmente você observou isso. Agora vamos analisar mais uma situação de cálculo de área.



Para calcular a área do retângulo rosa ABCD, devemos multiplicar as dimensões de seus lados: $A = (x + y)(x - y)$. Outra maneira de calcular a área do retângulo rosa ABCD é calcular a área do retângulo ABEF e subtrair a área das figuras brancas da área do retângulo ABEF: $A = x(x + y) - y(x + y) = x^2 + xy - xy - y^2 = x^2 - y^2$. Daí podemos concluir que $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$.

FIGURA 5. 1 - FÓRMULA COMO RECURSO PARA PRODUTOS NOTÁVEIS:

FONTE: PIRES, Célia Carolino, CURI, Edda e PIETROPAOLO, Ruy. Educação Matemática. 1ª Edição. São Paulo: Atual, 2002. 8ª série, pág. 67

Entretanto, nosso foco é a caracterização das fórmulas como objetos de estudo. Assim apresentamos a seguir a categorização construída a partir da análise de livros didáticos:

5.2. CATEGORIAS DE SITUAÇÕES COM USO DE FÓRMULAS DE ÁREA

O conceito de área enquanto grandeza envolve diferentes classes de situações, dentre as quais Baltar (1996) destaca as de comparação, produção de superfícies e medida. A autora também apresenta tipos de usos para as fórmulas: instrumento de cálculo (campo numérico); manipulação da escrita literal-algébrica (campo algébrico); relacionada à conservação, bilinearidade e otimização (campo funcional).

Para realizar a categorização das questões identificadas nos livros didáticos e nas provas de vestibular, buscamos identificar conceitos inter-relacionados, representações simbólicas e invariantes operatórios. Classificamos os problemas em função dos usos das fórmulas em cada um, das imbricações entre campos conceituais subjacentes às contribuições de cada campo conceitual no estudo das fórmulas.

A análise das questões selecionadas permitiu a construção de três categorias:

1) **APLICAÇÃO DIRETA DA FÓRMULA** - Nesta categoria predomina o uso da fórmula para calcular. Os dados necessários, ou seja, as dimensões da figura, necessárias para utilização da fórmula são apresentadas implicitamente ou explicitamente. Assim temos outras sub-categorias:

1.1. Uso explícito da fórmula:

A) Aplicação direta da fórmula sem figura -

B) Aplicação direta da fórmula com figura –

C) generalizações com ou sem figuras

1.2.Uso implícito da fórmula:

A) Cálculo de uma dimensão da figura em função da área

B) Problemas de *“molduras*”, envolvendo operações entre grandezas.

2) **APLICAÇÃO DA FÓRMULA A PARTIR DA COMPREENSÃO DE PROPRIEDADES E/OU ELEMENTOS DAS FIGURAS** – esta categoria se caracteriza pela necessidade de mobilizar algum conhecimento subjacente às propriedades ou elementos das figuras para então aplicar a fórmula. Nesta categoria as fórmulas são usadas para comparar áreas e perímetros, para produzir áreas ou para otimizar. Temos então:

A) Utilização da fórmula articulada com outras relações.

B) Comparação de áreas

C) Escrita de uma fórmula

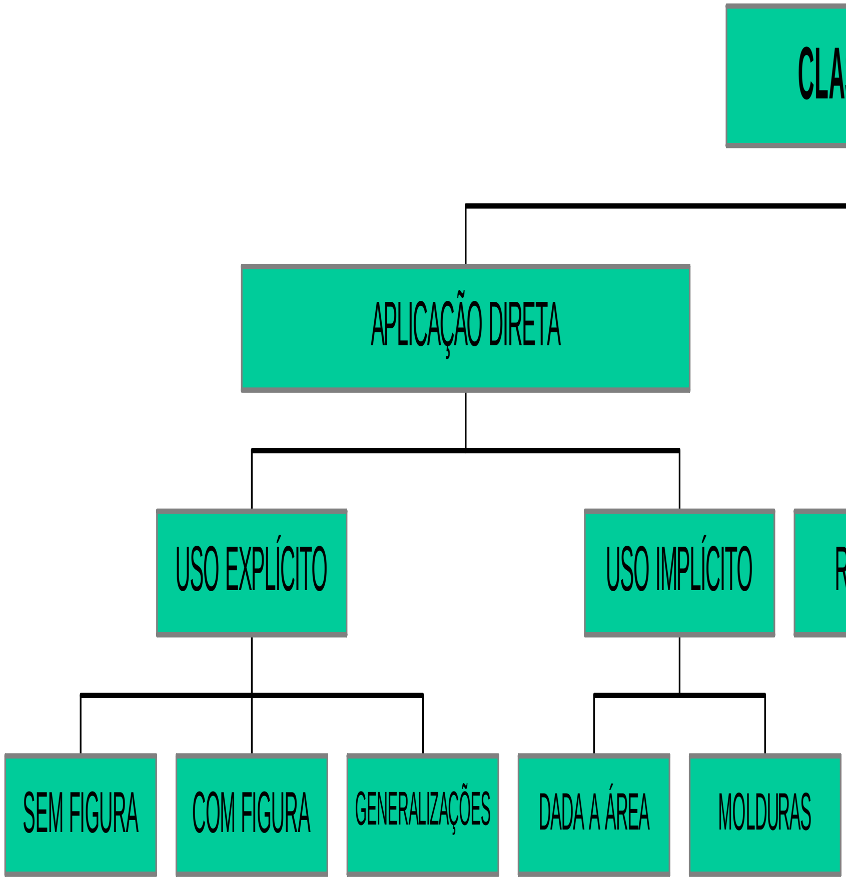
D) Aplicações do conceito de máximo e mínimo no estudo das funções,

3) **PROBLEMAS MISTOS** – são problemas que envolvem o uso da fórmula de duas ou mais categorias.

Cada uma destas categorias foi subdividida em função das representações simbólicas e dos invariantes operatórios.

O esquema abaixo ilustra de forma sintética as categorias que construímos a partir da análise dos livros didáticos:

FIGURA 5.2: CATEGORIAS DE USO DAS FÓRMULAS DE ÁREA EM LIVROS DIDÁTICOS:



1ª CATEGORIA: APLICAÇÃO DIRETA DA FÓRMULA:

Como dissemos, nesta categoria a fórmula é utilizada para calcular. Identificamos duas modalidades de uso para fórmula de área: explícito – utilização da representação simbólica e conseqüente manipulação algébrica e uso implícito – utilização das relações sem necessariamente utilizar a representação simbólica.

1.1.Uso explícito da fórmula:

A) Aplicação direta da fórmula sem figura - neste tipo de questão solicita-se o cálculo da área de figuras planas pela aplicação direta e imediata da fórmula correspondente, não exigindo, na maioria das vezes, a interpretação de elementos e propriedades das figuras geométricas. A ausência de figura pressupõe procedimentos estritamente numéricos e/ ou algébricos dependendo dos dados apresentados: valores numéricos ou expressões algébricas. Vários domínios numéricos são mobilizados, dependendo da série a qual se destina o exercício: natural, racional positivo ou irracional. Neste tipo de situação, portanto, o campo conceitual numérico desempenha papel importante.

Exemplo 1:

18) Determine em seu caderno a área de uma região quadrada cujo lado mede: a) 9 cm b) 4,5 cm c) 12 cm d) 10,5 cm

DANTE, Luiz Roberto. Tudo é Matemática. São Paulo: Ática, 2002. 5ª série, pág. 238

Exemplo 2:

31. Calcule a área do triângulo cuja base mede $4\sqrt{3}+6$ e a altura é $\sqrt{3}$. É possível calcular o perímetro desse triângulo? Explique essa resposta.

ISOLANE, Clélia Maria Martins, MIRANDA, Diair Terezinha Lima, ANZZOLIN, Vera Lúcia Andrade e MELÃO, Walderez Soares. Matemática - Ensino Fundamental. 2.ed. Curitiba: Módulo, 2002. 8ª Série, pág. 195

Nesta categoria pode-se, por exemplo, solicitar o esboço do desenho. Para esboçar o desenho, mobiliza-se conhecimentos do campo conceitual geométrico. Assim, aspectos relacionados à modelização do espaço físico, ou classificação, conceitos e propriedades das figuras geométricas planas podem intervir na resolução deste tipo de situação. Há às vezes necessidade de mobilizar conhecimentos de outras áreas, especialmente da construção civil, da marcenaria ou carpintaria. Desta forma, também coloca em jogo a compreensão de outros conceitos, sejam matemáticos como perímetro, escala ou de outros campos relacionados ao contexto real ao qual se refere a questão.

Pode-se ainda solicitar a conversão de unidades; envolver relações proporcionais entre grandezas ou questionar quanto uma área cabe dentro da outra.

Exemplo 3:

Um piso de cozinha de 3m por 4 m vai ser revestido com ladrilhos quadrados de 25 cm de lado. Quantos ladrilhos serão necessários?

DANTE, Luiz Roberto. Tudo é Matemática. Editora Ática: São Paulo, 2002. 6ª série, pág. 272.

Nesta classe, identificamos também problemas nos quais as medidas são indicadas por variáveis, trazendo implícita uma interface com o campo conceitual algébrico e com o campo funcional. Colocam-se em jogo dificuldades relativas à manipulação simbólica e compreensão do papel da letra como incógnita ou variável.

Exemplo 4:

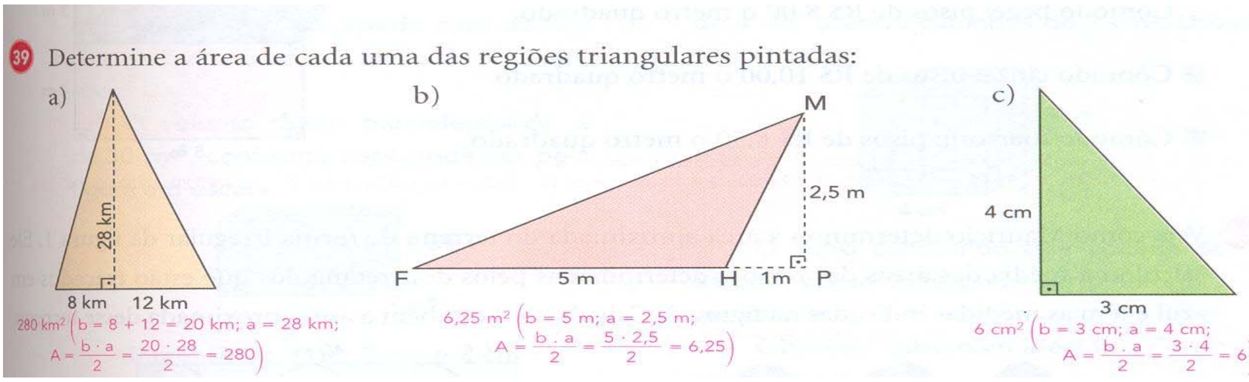
9. Dados dois segmentos de medidas m e n, calcule a área do quadrado cujo lado mede m + n.

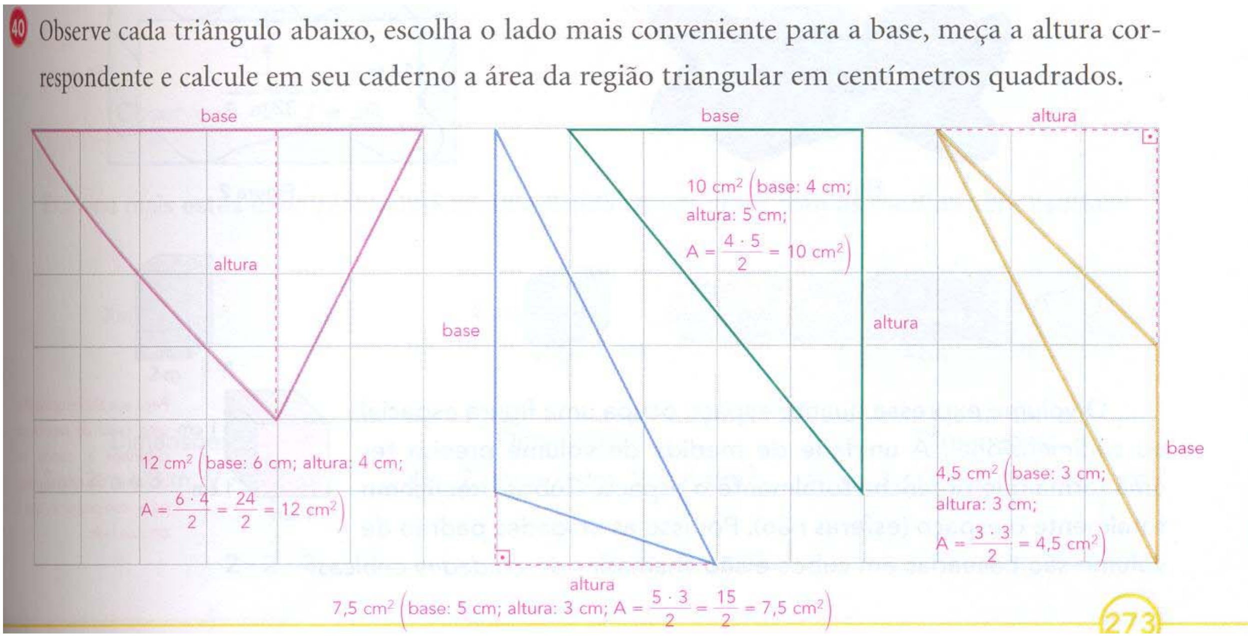
PIRES, Célia Carolino, CURI, Edda e PIETROPAOLO, Ruy. Educação Matemática. 1ª Edição. São Paulo: Atual, 2002. 8ª série, pág. 69

B) Aplicação direta da fórmula com figura –

Nesta classe solicita-se a aplicação direta da fórmula em atividades com a presença da figura, tornando-se necessária a interpretação da figura e de suas propriedades ou às vezes sua decomposição. Dentre os aspectos do campo conceitual da geometria, destacamos a identificação das alturas (internas ou externas à figura) nos paralelogramos e nos triângulos; conceito de congruência; invariância da área do triângulo em função da medida do lado tomado como base e da altura correspondente.

Exemplo 5:





FIGURAS 5.3. A E B: INVARIÂNCIA DA ÁREA DO TRIÂNGULO EM FUNÇÃO DO LADO TOMADO COMO BASE

FONTE: DANTE, Luiz Roberto. Tudo é Matemática. São Paulo: Ática, 2002. 6ª série. Pág. 273

Variam também os domínios numéricos e os recursos sugeridos (por exemplo, quadriculados). O contexto da situação pode ser do dia- a – dia ou intramatemático[23]. As dimensões podem ser representadas por letras e impõem-se algumas condições, por exemplo, calcular razões.

[23] Contexto intramatemático refere-se a objetos matemáticos como figuras geométricas, por exemplo.

Exemplo 6:

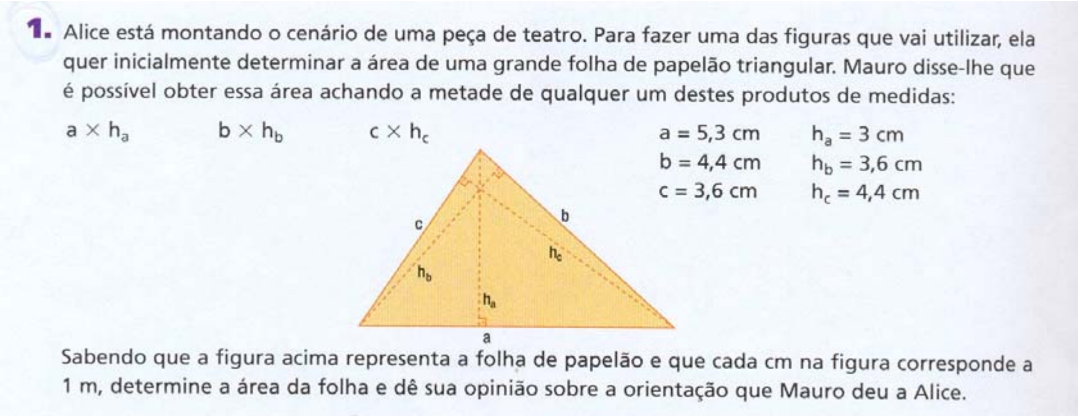


FIGURA 5.4. – ÁREA DO TRIÂNGULO EM CONTEXTO REAL

FONTE: PIRES, Célia Carolino, CURI, Edda e PIETROPAOLO, Ruy. Educação Matemática. 1ª Edição. São Paulo: Atual, 2002. 7ª série, pág. 44

Nesta classe também há problemas nos quais se lida com uma família de figuras. As medidas não constantes, e as letras que representam as medidas assumem o papel de variáveis, trazendo implícitas imbricações entre o campo conceitual da álgebra e das funções. Desta forma, coloca em jogo dificuldades relativas à compreensão das letras como variável e à manipulação simbólica.

Exemplo 7:

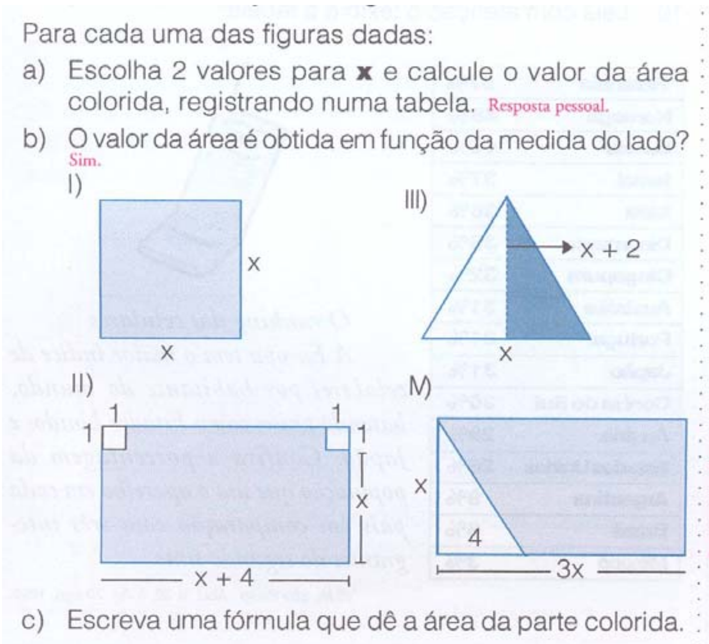


FIGURA 5.5. – LETRAS COMO VARIÁVEIS

FONTE: ISOLANE, Clélia Maria Martins, MIRANDA, Diair Terezinha Lima, ANZZOLIN, Vera Lúcia Andrade e MELÃO, Walderez Soares. Matemática - Ensino Fundamental. 2.ed. Curitiba: Módulo, 2002. 8ª Série, pág.73.

C) generalizações com ou sem figuras

Neste tipo de problema os autores utilizam as fórmulas de área para propor generalizações, por exemplo, das relações entre área e perímetro ou das relações entre grandezas, que podem ser proporcionais ou não. Ou simplesmente a generalização de uma expressão algébrica.

Exemplo 8:

Calcule o perímetro e a área de duas regiões quadradas, com o lado da segunda região medindo o dobro do lado da primeira. Depois responda:

a) O que ocorre com o perímetro de uma região quadrada quando se dobra a medida do lado?

b) O que ocorre com a área de uma região quadrada quando se dobra a medida do seu lado?

DANTE, Luiz Roberto. Tudo é Matemática. 5ª série. São Paulo: Ática, 2002. Pág. 240.

1.2.Uso implícito da fórmula:

A) Cálculo de uma dimensão da figura em função da área

Propõem-se o cálculo de uma dimensão da figura, dada ou não, em função da área. As dimensões podem ser os comprimentos dos lados ou de outros elementos como diagonais de quadrados, hipotenusas de triângulos retângulos ou alturas de triângulos quaisquer. As relações métricas no triângulo retângulo colocam em foco o campo conceitual da geometria. Uma das idéias importantes relacionadas ao cálculo aritmético é a determinação de quanto uma medida cabe dentro da outra. Utilizam-se representações simbólicas do tipo figuras, tabelas, gráficos, etc. O contexto do problema pode ser real ou geométrico.

Exemplo 9:

13. Um jardim de forma retangular tem área de 54 m².
Encontre possíveis medidas de largura e de comprimento desse jardim, sabendo que são números inteiros e que a largura é menor que o comprimento. O resultado você pode colocar em uma tabela como esta:

Largura	Comprimento
▲ 6 ▲	▲ 9 ▲
▲ 2 ▲	▲ 27 ▲
▲ 3 ▲	▲ 18 ▲

205

FIGURA 5.6. – CÁLCULO DE UMA DIMENSÃO DA FIGURA EM FUNÇÃO DA ÁREA (A)

FONTE: PIRES, Célia Carolino, CURI, Edda e PIETROPAOLO, Ruy. Educação Matemática. 1ª Edição. São Paulo: Atual, 2002. 5ª série, pág. 205

Exemplo 10:

3) A diferença entre as medidas do comprimento e da largura de um retângulo é de 8 cm. Quais são as dimensões desse retângulo, sabendo-se que sua área é de 105 cm ^{2}?

4) Calcule as medidas dos catetos de um triângulo retângulo, sabendo que sua hipotenusa mede 5 cm, seu perímetro, 12 cm, e sua área é igual a 6 cm ^{2}.

FIGURA 5.7. CÁLCULO DE UMA DIMENSÃO DA FIGURA EM FUNÇÃO DA ÁREA (B)

FONTE: PIRES, Célia Carolino, CURI, Edda e PIETROPAOLO, Ruy. Educação Matemática. 1ª Edição. São Paulo: Atual, 2002. 8ª série, pág. 206

Neste tipo de problema, a utilização de uma expressão algébrica ou da regra de uma função pressupõe a leitura e interpretação da figura; compreensão de condições impostas; escrita algébrica e resolução de inequações ou sistemas de equações, com determinação de valores possíveis, não necessariamente um valor único.

Exemplo 11:

No quintal da casa de Bruno há um espaço retangular reservado para a horta com $72m^2$. Em dois lados deste retângulo, vai ser feita uma calçada como mostra a figura. Quais são as dimensões do espaço retangular se a área da calçada será de $13m^2$? Há 2 possibilidades.

$$\begin{cases} x = 9 \text{ e } y = 8 \\ x = 4,5 \text{ e } y = 16 \end{cases}$$

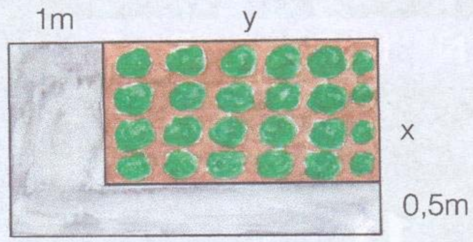


FIGURA 5.8. ESCRITA ALGÉBRICA E RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÕES

FONTE: ISOLANE, Clélia Maria Martins, MIRANDA, Diair Terezinha Lima, ANZZOLIN, Vera Lúcia Andrade e MELÃO, Walderez Soares. Matemática - Ensino Fundamental. 2.ed. Curitiba: Módulo, 2002. 8ª Série, pág. 123.

B) Problemas de "*molduras*" – operações com grandezas

Esta classe os problemas envolvendo "molduras", pressupõe o cálculo de quanto uma área cabe dentro da outra utilizando operações entre grandezas. Focaliza o cálculo dos lados de uma figura em função de variações impostas à área, podendo o aumento dado ser fixo ou o aumento variável. Os cálculos são feitos em função da área ou das medidas dos comprimentos. O contexto pode ser real ou geométrico, com desenho ou sem desenho.

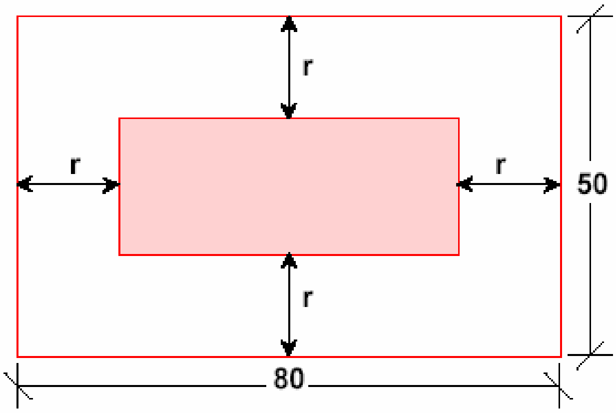
EXEMPLO 12:

17) De uma folha de papel retangular de 30 cm por 20 cm são retirados, de seus quatro cantos, quadrados de lado x. Determine a expressão que indica a área da parte que sobrou em função de x.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática (ENSINO MÉDIO). 1ª Edição. São Paulo: Ática, 2004. V.1, p. 117

Exemplo 13 (Vestibular UFPE/UFRPE 2004, M3, F2):

16. Num terreno retangular, medindo **80m x 50m**, deseja-se construir um galpão retangular, de forma que cada um de seus lados seja paralelo a dois lados do terreno, como ilustrado na figura abaixo. Se a área do galpão deve ser **1000m²**, de quantos metros deve ser o recuo r?



A) 12
B) 13
C) 14
D) 15
E) 16

Letra D
Justificativa:
A área do galpão é dada por (80 – 2r)(50-2r) = 1000 ou (40-r)(25-r) = 250. Conseqüentemente, $r^2 - 65r + 750 = 0$ e daí

$$r = \frac{65 \pm \sqrt{1.225}}{2} = \frac{65 \pm 35}{2} = \begin{cases} 50 \\ 15 \end{cases}$$

Logo r=15.

2ª CATEGORIA: APLICAÇÃO DA FÓRMULA A PARTIR DA COMPREENSÃO DE PROPRIEDADES E/OU ELEMENTOS DAS FIGURAS

A principal característica desta segunda categoria identificada nos livros didáticos e nas provas de vestibular é a aplicação da fórmula a partir da mobilização de algum conhecimento subjacente às propriedades ou elementos das figuras. Principalmente aqueles relacionados ao campo conceitual da geometria.

A) Utilização da fórmula articulada com outras relações.

Há nesta sub-categoria imbricação com o campo conceitual da geometria, por exemplo, na utilização da fórmula a partir das relações métricas no triângulo retângulo para calcular determinadas medidas dos elementos das figuras (lados, diagonais, etc). Os problemas podem apresentar figuras ou não, mas em ambos os casos, subtendem a leitura e interpretação da figura.

Coloca em jogo também conhecimentos relacionados à semelhança de triângulos; decomposição de figuras dadas.

Há interface também com o campo conceitual numérico quando aplica a fórmula após o cálculo de um elemento desconhecido, usando, por exemplo, a propriedade fundamental das proporções.

Exemplo 14

101. Use a relação de Pitágoras para determinar a área e o perímetro deste canteiro em forma de triângulo com as medidas indicadas em metros.

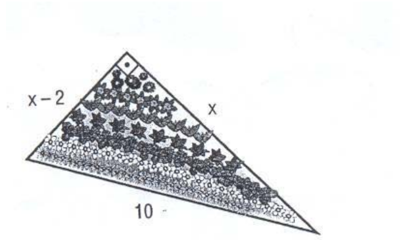


FIGURA 5.9 – UTILIZAÇÃO DA FÓRMULA ARTICULADA COM OUTRAS RELAÇÕES

FONTE: DANTE, Luiz Roberto. Matemática (ENSINO MÉDIO). 1ª edição. São Paulo: Ática, 2004. Volume 1 pág. 201.

Exemplo 15:

105. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 40 cm e a altura relativa à hipotenusa divide-a em dois segmentos cujas medidas estão na razão de 2 para 3. Calcule a área desse triângulo.

FONTE: DANTE, Luiz Roberto. Matemática (ENSINO MÉDIO). 1ª edição. São Paulo: Ática, 2004. Volume 1 pág. 202.

Identificamos um número considerável de problemas (quase todos de vestibulares, compilados por autores do Ensino Médio) que utilizam razão de semelhança, em particular a relação *"se duas figuras geométricas forem semelhantes com razão de semelhança K entre suas grandezas lineares, então suas áreas terão razão de semelhança K^2"*, é aplicada para resolver as questões.

Exemplo 16:

39. (Unicamp-SP) Um fio de 48 cm de comprimento é cortado em duas partes para formar dois quadrados, de modo que a área de um deles seja quatro vezes a área do outro.

a) Qual deve ser o comprimento de cada uma das partes do fio?

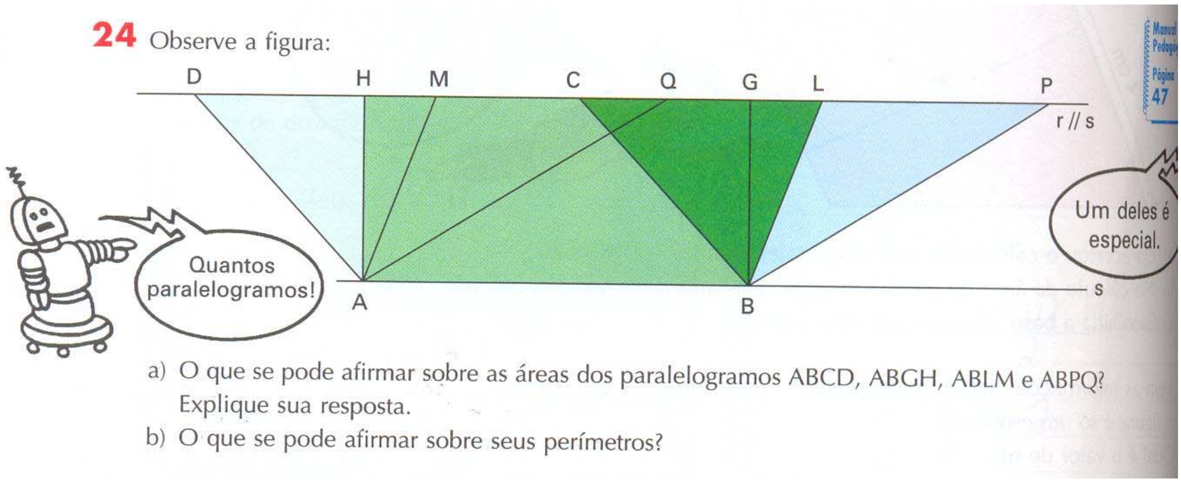
b) Qual será a área de cada um dos quadrados formados?

DANTE, Luiz Roberto. Matemática (ENSINO MÉDIO). 1ª edição. São Paulo: Ática, 2004. Volume 2 pág. 201

B) Comparação de Áreas

Nesta categoria, as fórmulas de área são utilizadas para comparar. Focaliza o aspecto dinâmico, através da deformação da figura, com ênfase em propriedades geométricas, como invariância da área do triângulo em relação à escolha da base e da altura correspondente. As fórmulas podem ser utilizadas simbolicamente ou apenas implicitamente.

Exemplo 17



e

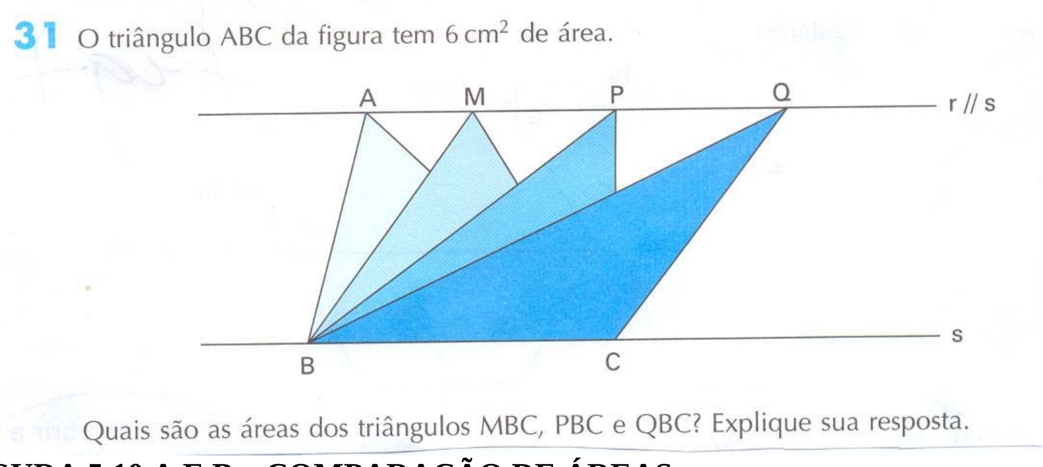


FIGURA 5.10 A E B – COMPARAÇÃO DE ÁREAS

FONTE: IMENES, Luiz Márcio Pereira e LELLIS, Marcelo. Matemática /Imenes e Lellis. São Paulo: Scipione, 1997. 7ª série, pág. 202 e 204

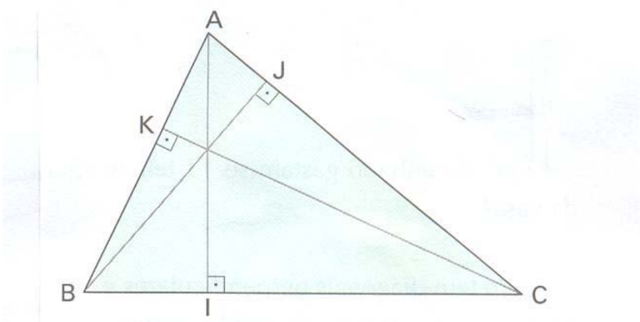
C) Escrita de uma fórmula

Nesta classe há a solicitação da escrita de uma fórmula a partir da compreensão de certos elementos, por exemplo, alturas do triângulo e do paralelogramo ou decomposição de figuras para provar a eqüidecomposição do paralelogramo e do retângulo, etc. Nesta categoria, a partir da figura geométrica e da fórmula padrão para área de figuras geométricas usuais na cultura escolar o aluno precisa construir outras fórmulas, por exemplo, considerando a invariância da área em relação à escolha do lado tomado como base.

Exemplo 18:

Um triângulo tem três alturas:

Considerando como base o lado AC, a altura correspondente é BJ e a área se calcula assim: $\alpha = \dfrac{AC \bullet BJ}{2}$



Escreva as outras duas fórmulas para calcular a área desse triângulo.

FIGURA 5.11 – ESCRITA DA FÓRMULA

FONTE: IMENES, Luiz Márcio Pereira e LELLIS, Marcelo. Matemática /Imenes e Lellis. São Paulo: Scipione, 1997. 7ª série, pág. 203

D) Aplicações do conceito de máximo e mínimos no estudo das funções –

Nesta categoria as fórmulas são utilizadas para otimizar, mobilizando o aspecto funcional ao descrever o valor e a função da área em relação a x. São problemas que predominam no Ensino Médio e no 2º ano do 4º ciclo do Ensino Fundamental, especialmente nas aplicações do conceito de máximo e mínimos no estudo das funções.

A principal tarefa desta classe é a determinação da maior área possível em função de um perímetro fixo.

Identificam-se invariantes operatórios e representações simbólicas que evidenciam imbricações entre os campos conceituais. Nas relações entre área e perímetro, por exemplo, há uma presença determinante do campo das grandezas; na escrita de representações simbólicas para estas relações, do campo algébrico; e para expressar uma grandeza em função de outra, a presença do campo funcional.

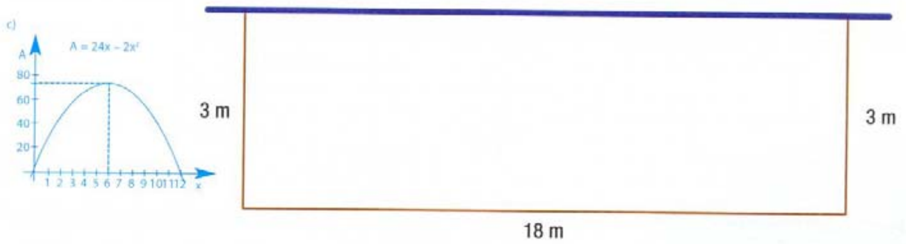
EXEMPLO 19

a)

17) Pretende-se construir um triângulo com um lado medindo 24 e a soma dos outros dois lados medindo 26. Qual é a área do triângulo de área máxima que pode ser construído? Vestibular UFPE/UFRPE – 2000 (2^a etapa)

b)

6. Dona Rosa adora flores e deseja fazer um canteiro retangular aproveitando um muro existente em seu terreno. Ela ainda não sabe quais serão as dimensões do canteiro, mas quer aproveitar todos os 24 m de tela que tem para cercá-lo. A figura abaixo mostra um exemplo de canteiro (3 m de largura por 18 m de comprimento) em que seriam usados os 24 m de tela.



Mas há outras possibilidades como o comprimento medindo 22 m e a largura 1 m ou o comprimento 21 m e a largura 1,5 m, etc.

a) Se x é a largura do canteiro, qual deverá ser seu comprimento y? (Lembre-se de que as duas larguras, adicionadas ao comprimento, devem resultar 24.) $y = 24 - 2x$

b) Determine a área A do canteiro em função de x. $A = xy = 24x - 2x^2$

c) Esboce o gráfico de A em função de x.

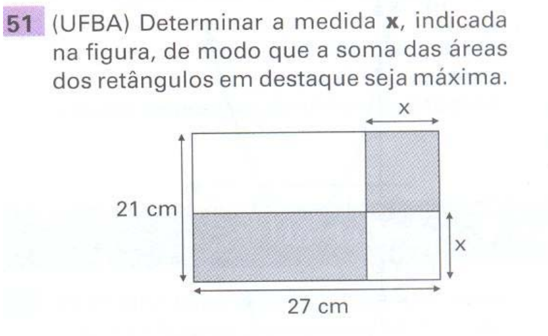
d) Dona Rosa quer que o canteiro tenha a maior área possível usando os 24 m de tela. Qual será essa área? Quanto medirão o comprimento e a largura nesse caso? $A = 72\ m^2$; $x = 6\ m$, $y = 12\ m$

182

FIGURA 5.12 - APLICAÇÃO DO CONCEITO DE MÁXIMO E MÍNIMO

FONTE: PIRES, Célia Carolino, CURI, Edda e PIETROPAOLO, Ruy. Educação Matemática. 1^a Edição. São Paulo: Atual, 2002. 8^a série, pág. 182

c)

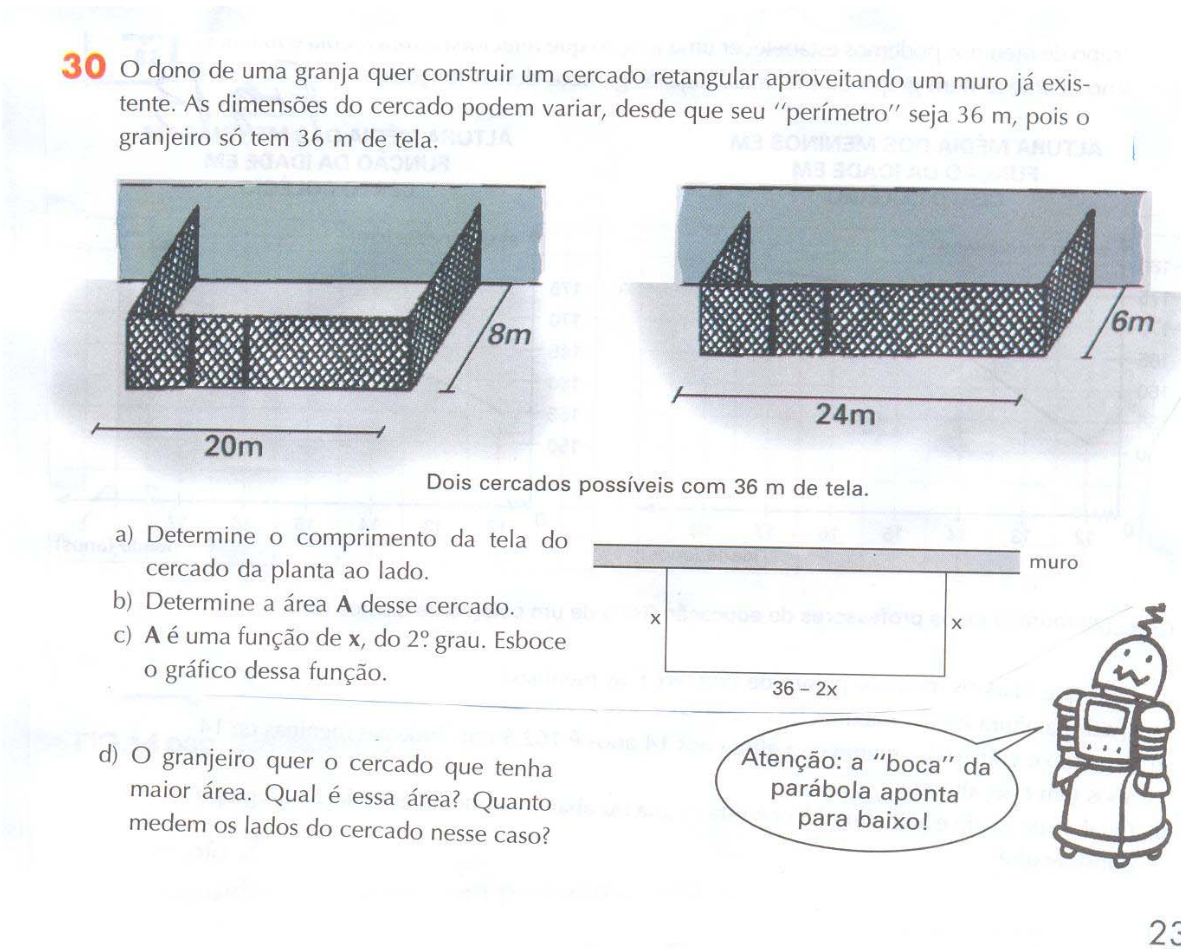


51 (UFBA) Determinar a medida **x**, indicada na figura, de modo que a soma das áreas dos retângulos em destaque seja máxima.

FIGURA 5.13 - CÁLCULO DE ÁREA MÁXIMA

FONTE: SMOLE, Kátia Stocco e DINIZ, Maria Ignez. Matemática Ensino Médio. 3ª Edição Reformulada. São Paulo: Editora Saraiva, 2003. Vol. 1, pág. 370

d)



30 O dono de uma granja quer construir um cercado retangular aproveitando um muro já existente. As dimensões do cercado podem variar, desde que seu "perímetro" seja 36 m, pois o granjeiro só tem 36 m de tela.

Dois cercados possíveis com 36 m de tela.

a) Determine o comprimento da tela do cercado da planta ao lado.

b) Determine a área **A** desse cercado.

c) **A** é uma função de **x**, do 2º grau. Esboce o gráfico dessa função.

d) O granjeiro quer o cercado que tenha maior área. Qual é essa área? Quanto medem os lados do cercado nesse caso?

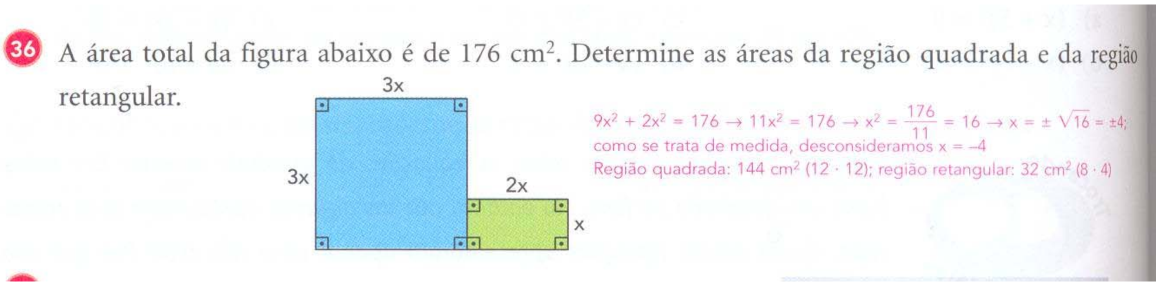
FIGURA 5.14 - CÁLCULO DE ÁREA MÁXIMA EM FUNÇÃO DE UM PERÍMETRO FIXO

IMENES, Luiz Márcio Pereira e LELLIS, Marcelo. Matemática. São Paulo: Scipione, 1997. 8ª série, pág. 239.

3ª CATEGORIA: PROBLEMAS MISTOS

Esta categoria de problemas identificados em livros didáticos caracteriza-se por apresentar aspectos pertencentes a mais de uma categoria. Por exemplo, pode-se solicitar o cálculo de dimensões da figura em função da área dada, a utilização do teorema de Pitágoras, para finalmente fazer a aplicação direta da fórmula para calcular a área da figura.

EXEMPLO 20:



36 A área total da figura abaixo é de 176 cm². Determine as áreas da região quadrada e da região retangular.

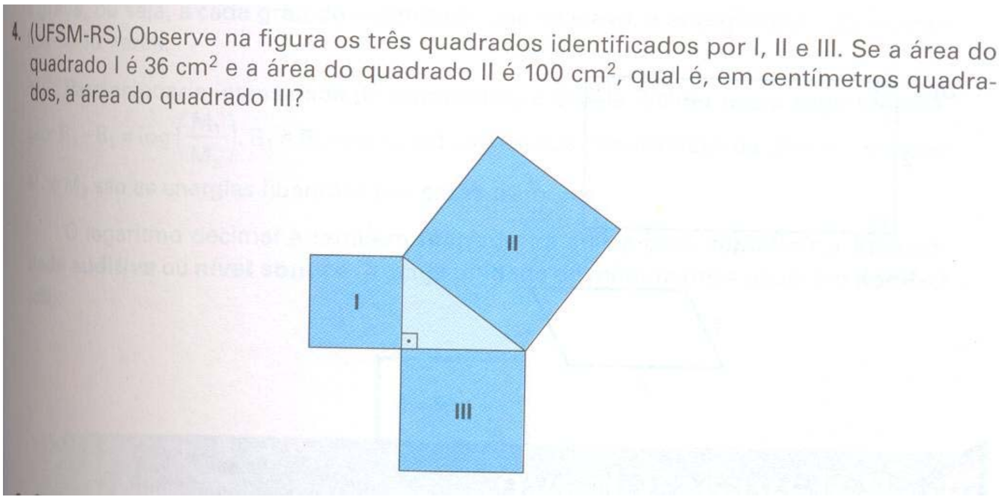
$9x^2 + 2x^2 = 176 \rightarrow 11x^2 = 176 \rightarrow x^2 = \frac{176}{11} = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$; como se trata de medida, desconsideramos $x = -4$

Região quadrada: 144 cm² (12 · 12); região retangular: 32 cm² (8 · 4)

FIGURA 5.15 - PROBLEMA MISTO

FONTE: DANTE, Luiz Roberto. Tudo é Matemática. 8ª série. São Paulo: Ática, 2002. Pág. 48.

Ou



4. (UFSM-RS) Observe na figura os três quadrados identificados por I, II e III. Se a área do quadrado I é 36 cm² e a área do quadrado II é 100 cm², qual é, em centímetros quadrados, a área do quadrado III?

FONTE: SMOLE, Kátia Stocco e DINIZ, Maria Ignez. Matemática Ensino Médio. 3ª Edição Reformulada. São Paulo: Editora Saraiva, 2003. Vol. 1, pág. 237

SÍNTESE DA ANÁLISE: CONCLUINDO OU COMEÇANDO.....?

Esta análise mostra que problemas aparentemente simples podem exigir que o aluno navegue de um campo conceitual para outro, ou seja, evidencia imbricações entre os campos conceituais em foco. Situações mais simples que envolvem a aplicação direta da fórmula, dada a figura com as medidas dos comprimentos indicadas em valores naturais, exigem que o aluno navegue, no mínimo pelo campo conceitual das grandezas, da geometria e numérico. Situações mais complexas, como as situações de otimização, possuem uma presença forte de imbricações entre todos os campos conceituais tratados neste trabalho.

Este estudo também possibilitou avançar na caracterização da fórmula de área como um conceito. Ao mapearmos situações que conferem significado ao conceito de fórmula, pudemos identificar várias classes de usos para as fórmulas:

- Calcular a área de figuras;
- Calcular comprimentos que caracterizam a figura
- Comparar áreas de figuras;
- Produzir figuras em condições dadas;
- Estabelecer relações entre grandezas;
- Otimizar;
- Operar com grandezas de mesma natureza.

Em cada uma destas categorias intervêm variáveis didáticas, com seus respectivos valores. Com relação à figura, temos, por exemplo:

- Tipo de figura: retângulo, quadrado, paralelogramo ou triângulo;
- Figura prototípica ou não
- Presença ou ausência da figura no enunciado;
- Medidas dos elementos indicadas ou não na figura, com números ou com letras
- Solicitação do desenho da figura ou não
- Mobilização de propriedades
- Elementos como altura, diagonal, traçados ou não

Com relação aos dados numéricos e às operações necessárias, destacam-se entre outros:

- Dados numéricos: necessários e suficientes; domínio dos dados ou dos resultados - natural ou racional;
- Operações em jogo – numéricas, algébricas ou entre grandezas;

Estas classes de situações podem ainda ser pensadas em relação ao seu contexto de uso, que pode ser intra matemático, quando tratamos, por exemplo, apenas da figura plana com suas características geométricas; contexto das práticas sociais: construção civil, arquitetura, agricultura, jardinagem, marcenaria, entre outros ou ainda contexto de outras disciplinas, dentro do estudo de outros temas matemáticos.

A análise também permitiu identificar possíveis invariantes operatórios subjacentes à ação dos sujeitos na resolução das situações envolvendo fórmulas de área. Por exemplo, para calcular a dimensão de uma figura em função da área[24], ou seja, utilizar implicitamente a fórmula de área, o aluno precisa mobilizar conhecimentos em ação relacionados à figura, suas características e propriedades, como base, altura, que fazem parte do campo conceitual geométrico. Também precisa do conceito de medida, ou de relações do tipo: *"a área de um triângulo é invariante em relação à escolha do lado tomado como base",* que são conhecimentos do campo das grandezas; dependendo da natureza dos dados, numéricos ou algébricos, o aluno precisa mobilizar conhecimentos aritméticos, subjacentes às operações fundamentais ou algébricos, por exemplo, resolução de equações. Estes aspectos evidenciam imbricações entre campos conceituais no processo de conceituação das fórmulas.

As formas de representação simbólicas em jogo no tratamento dessas situações evidenciam a necessidade do aluno trabalhar como múltiplas representações: figuras, números, letras, tabelas, gráficos, língua materna. Nos procedimentos de resolução precisa converter informações de um sistema para outro, por exemplo, quando dadas medidas de comprimentos que caracterizam uma figura, precisa desenhá-la, assim mobiliza conhecimentos relacionadas às características geométricas da figura e ao mesmo tempo navega no campo das grandezas. Ou quando os dados do problema são representados por expressões algébricas é necessário mobilizar conhecimentos sintáticos e semânticos no campo algébrico e ao mesmo tempo conhecimentos relacionados às grandezas. É preciso, portanto, interpretar, produzir objetos matemáticos num ou noutro campo conceitual.

Assim, tomando como referenciais estas categorias e os estudos teóricos, elaboramos testes diagnósticos, a fim de identificar nos procedimentos de resolução dos alunos candidatos a invariantes operatórios e representações simbólicas subjacente às fórmulas de área do retângulo, do quadrado e do triângulo.

---

[24] 1ª categoria – uso implícito da fórmula.

CAPÍTULO 6
CONSTRUÇÃO E ELEMENTOS DE UMA ANÁLISE TEÓRICA DOS TESTES

Neste capítulo apresentamos a construção e análise teórica dos testes diagnósticos que utilizamos em nosso trabalho. Os testes tiveram como objetivo caracterizar os conhecimentos oriundos dos diversos campos conceituais subjacentes aos procedimentos de resolução de situações envolvendo fórmula de área do retângulo, do paralelogramo e do triângulo e mapear situações, invariantes operatórios e representações simbólicas referentes à fórmula de área destas figuras.

O texto está organizado em quatro tópicos. No primeiro, para justificar a pertinência do nosso instrumento de coleta, discutimos qual o papel da análise teórica numa pesquisa em Didática da Matemática. No segundo, a explicitação das variáveis didáticas em jogo no teste e seus valores possíveis; no terceiro apresentamos questão por questão de cada um dos cinco testes e finalmente a composição final dos testes.

6.1 PAPEL DA ANÁLISE TEÓRICA NUMA PESQUISA EM DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

Uma análise teórica, característica dos trabalhos em Didática da Matemática, tem seu conteúdo determinado, conforme Henry (2006), pelo objeto de estudo, pelas razões pelas quais ela é conduzida e pelo público ao qual se destina.

Michel Henry faz uma discussão minuciosa sobre «análise teórica de situação didática», adotando explicitamente a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1986) como referência básica. Ele destaca que uma análise teórica é útil para pesquisa que visa experimentar uma situação didática, buscando, por exemplo, um estudo do meio que ele determina, a fim de controlar as variáveis e construir argumentos para validar esta ou aquela hipótese teórica Henry (2006).

Nosso estudo, não visa a construção e experimentação de situações didáticas. Porém, esta análise teórica pode ser tomada como ponto de partida para pesquisas que se propuserem a construir e testar situações que tenham como foco imbricações entre campos conceituais subjacentes às fórmulas de área.

Para Henry (2006) uma análise teórica é um conjunto de estudos que contribuem para: o conhecimento do saber em jogo numa situação didática (análise epistemológica); para a descrição de seu funcionamento na evolução de uma situação (análise didática) e contribui também para o estudo dos comportamentos possíveis dos alunos em sua gestão (análise pedagógica).

Há diversos caminhos que podem servir de fio condutor às análises teóricas, conforme Henry (2006): a epistemologia e a história dos conceitos presentes; o estudo dos campos conceituais; o estudo e a transposição didática e de suas evoluções passadas e presentes; os pré-requisitos, a superação dos obstáculos epistemológicos; as estratégias de resolução; a descrição das variáveis didáticas e seus domínios de variação; entre outros.

Em nosso trabalho, a análise teórica se apóia em elementos teóricos identificados nos capítulos anteriores, relacionados às fórmulas de área de figuras geométricas, tomando como foco imbricações entre campos conceituais. A partir destes elementos identificamos variáveis didáticas, seus possíveis valores, justificamos escolhas, tomando como foco a Teoria dos Campos Conceituais, antecipamos respostas corretas esperadas, bem como procedimentos corretos e errôneos esperados. A caracterização das questões dos testes diagnósticos, como já dissemos, pode servir como ponto de partida para pesquisas posteriores que queiram elaborar e testar situações didáticas relacionadas a este tema.

A análise teórica de situações didáticas, envolve inúmeros aspectos, ao nosso ver, impossíveis de serem esgotados numa única pesquisa.

Para analisar teoricamente um saber em jogo, pode-se, segundo Henry (2006), considerar três pontos de vista: análise matemática; análise epistemológica; análise da transposição didática.

De certa forma, em nossa análise incorporamos elementos da análise matemática, pois analisamos conceitos matemáticos, campos conceituais em jogo, estratégias de resolução, conhecimentos necessários para esta ou aquela estratégia subjacente às questões. Por outro lado, identificamos elementos de uma análise didática também, pois analisamos conhecimentos dos alunos, evidenciados nos invariantes operatórios que podem mobilizar, o próprio teor da questão com suas variáveis didáticas e seus valores possíveis. Para outras pesquisas deixamos a análise da ação do professor e o papel do ensino.

6.2 ESTUDO DAS VARIÁVEIS DIDÁTICAS EM FOCO

Neste tópico explicitamos as variáveis didáticas em jogo em nosso estudo sobre situações envolvendo fórmulas de área de figuras geométricas planas e seus possíveis valores. Discutiremos, a partir da fundamentação teórica a importância e a influência possível dos valores dessas variáveis. Elegemos doze variáveis relacionadas ao diversos campos conceituais. Ao campo das grandezas relaciona-se o tipo de uso das fórmulas e as unidades de medida. Ao campo geométrico: tipos de figuras; presença da figura; posição da figura. Relacionados ao campo numérico: dados numéricos; domínio numérico dos dados e dos resultados. Ao campo algébrico e ao funcional: a natureza dos dados e as operações em jogo. Outras variáveis como contexto; caráter típico ou atípico da questão e tipo de papel também foram consideradas. Os valores que as variáveis assumem em cada questão foram escolhidos tomando como base a revisão de literatura e os aspectos que nos propomos a analisar em cada questão.

VARIÁVEL 1: Tipos de uso das fórmulas de área

Nossa primeira variável refere-se ao tipo de uso para as fórmulas de área. A partir dos estudos de Baltar (1996) que apontam a fórmula como instrumento de cálculo; manipulação da escrita literal - algébrica, relacionada à conservação e bilinearidade e prestando-se a otimização, e da análise de livros didáticos e provas de vestibular, construímos as seguintes categorias de uso para as fórmulas de área:

- Calcular a área de figuras;
- Calcular comprimentos que caracterizam a figura;
- Comparar áreas de figuras;
- Produzir figuras em condições dadas;
- Estabelecer relações entre grandezas;
- Otimizar;
- Operar com grandezas de mesma natureza.

Pesquisas australianas, entre elas Baturo e Nason (1996), chamam a atenção para a introdução do uso das fórmulas sem que os alunos tenham construído satisfatoriamente o conceito de área, não dispondo de procedimentos para avaliar ou comparar áreas. Germi (1997), também destaca que o trabalho apressado com as fórmulas, sem a construção do significado, reforça o risco da confusão entre área e perímetro.

VARIÁVEL 2: Unidades de medida

Outra variável, ligada ao campo conceitual das grandezas geométricas, neste estudo são as unidades de medida. Conforme (BATURO e NASON, 1996), a confusão entre as unidades de medida também pode ser conseqüência da confusão entre a medida dos comprimentos de uma superfície e a medida da área desta mesma superfície. Esta variável pode assumir, por exemplo, os valores: metros ou centímetros para comprimentos e m^2 e cm^2 para área, ou podem não ser fornecidas. Resultados de pesquisas anteriores mostram que muitos alunos mantêm a unidade de comprimento para expressar a medida de área (BELLEMAIN e LIMA, 2002), pois para muitos destes estudantes, a medida da área calculada provavelmente não se relaciona ao que era medido.

Conforme Baturo e Nason (1996), estudantes mostraram claramente que não têm compreensão de como as medidas da área evoluem das medidas lineares quando uma fórmula para calcular uma área é aplicada, isto é, o conhecimento computacional não está conectado ao conhecimento conceitual, desta forma os alunos não levam em consideração o aspecto bidimensional da área.

Uma outra fonte de dificuldade com relação às unidades de medida aparece em conseqüência da prática cultural formal para o cálculo de área ser baseada na noção da disposição da multiplicação. Infelizmente, muitos estudantes têm somente uma compreensão da representação linear de uma dimensão da multiplicação como a adição de parcelas repetidas. Assim, são incapazes de perceber o sentido das medidas da área calculadas pelas fórmulas (BATURO e NASON, 1996).

Com relação às unidades de medida, analisaremos especificamente se os alunos confundem as unidades de área e perímetro. Optamos por não focalizar conversões de unidades que, ao nosso ver, trariam subjacentes outras dificuldades relacionadas ao Sistema Métrico Decimal.

VARIÁVEL 3: Tipos de figura

Ao campo conceitual da geometria pertencem as variáveis relacionadas às **figuras geométricas.** Esta variável pode assumir, por exemplo, os valores: retângulo, triângulo, paralelogramo, quadrado, trapézio, outros polígonos regulares, círculo e figuras irregulares. Optamos pelo estudo das fórmulas de área do retângulo, quadrado, paralelogramo e triângulo. Alguns fatores motivaram esta escolha. O retângulo é o elemento básico mais utilizado nos livros didáticos para decomposição e recomposição das figuras na construção do significado das fórmulas de área. O quadrado é um caso particular do retângulo. Nos livros didáticos que analisamos no capítulo 3 para a fórmula do paralelogramo propõe-se a transformação desta região numa região retangular, e para a fórmula de área do triângulo, a recomposição de uma região retangular formada por triângulos congruentes. Do ponto de vista intramatemático o trabalho com a decomposição e recomposição das áreas dessas figuras ajuda a construir o conceito de área como grandeza. Por outro lado, a modelagem do mundo físico freqüentemente é feita nos livros didáticos por meio destas figuras geométricas.

VARIÁVEL 4: Presença da figura

A figura pode ser dada no enunciado ou o enunciado pode solicitar o traçado da figura. Ou ainda a figura pode estar totalmente ausente. Produzir uma figura exige mobilizar propriedades geométricas pertinentes para ação. Assim a presença, ausência ou necessidade de produzir uma figura ajudará na identificação de invariantes operatórios relacionados ao campo conceitual geométrico.

Pesquisas em Educação Matemática, dentre elas Perrota (2001) evidenciaram que a ausência de figuras influenciou nos procedimentos adotados pelos alunos. Também evidenciaram na conceituação das figuras geométricas, a inclusão de aspectos não essenciais das figuras geométricas (GALVEZ, 1996). Como também dificuldades relacionadas à utilização da linguagem para descrever características das figuras, a incapacidade de selecionar um conjunto de características pertinentes (necessárias e suficientes) para a reprodução e dificuldade de encontrar articulações entre as propriedades que o sujeito conhece e a maneira de organizar o conjunto do desenho.

VARIÁVEL 5: Posição da figura

A posição da figura pode ser prototípica ou não. A figura prototípica do retângulo, por exemplo, apresenta o lado de maior comprimento na horizontal. No paralelogramo o lado de maior comprimento também é horizontal, a inclinação da figura para direita e identifica-se sempre a altura interna. Quanto ao triângulo possui sempre o lado tomado como base na posição horizontal e altura também interna. Baltar (1996), a propósito da construção do conceito de área destaca a importância das variáveis ligadas "à forma e à posição" da figura. Santos (2005), dando prosseguimento ao estudo deste aspecto, investigou a relação entre a abordagem da área do paralelogramo em uma coleção de livros didáticos para as séries finais do ensino fundamental e os procedimentos utilizados pelos alunos. Em duas questões, a autora verificou a opção dos alunos pelo desenho de paralelogramos prototípicos, ou seja, desenham a figura do paralelogramo com um dos lados na posição horizontal, tomando-o como o de maior comprimento com o intuito de determinar o comprimento da altura relativa ao lado BC. A maioria dos alunos traçou a altura dada no interior do paralelogramo. Assim, um dos aspectos importantes relacionados à posição prototípica ou não da figura é à altura das figuras, que podem ser externa ou interna; traçada ou não. Com relação às noções de base e altura, Baltar (1996) sugere um trabalho mais profundo, do ponto de vista geométrico, para construção do conceito de área e em particular a apropriação das fórmulas. Em sua pesquisa a autora constatou que no momento das atividades de introdução das fórmulas de área de um triângulo e de um paralelogramo, a base é para os alunos o lado horizontal ou o de maior comprimento.

VARIÁVEL 6: Dados numéricos

Com relação ao campo conceitual numérico, também foram consideradas algumas variáveis: dados numéricos: suficientes ou necessários e suficientes. Quando são oferecidas apenas as medidas dos comprimentos que serão utilizados na fórmula para área da figura, dizemos que estes dados são necessários e suficientes. Quando se apresentam todas as medidas dos comprimentos da figura dizemos que estes dados são suficientes. Estes dados podem estar indicados na própria figura ou apenas no enunciado.

VARIÁVEL 7: Natureza dos dados

Os dados apresentados nas questões podem ser números; grandezas ou letras assumindo o papel de incógnitas ou variáveis. Quando os dados são de natureza algébrica, ou seja, letras, pressupõe a representação de um problema algebricamente (LINS e GIMENEZ, 1997). Para isto é necessário utilizar ferramentas matemáticas do campo conceitual algébrico, como noção de igualdade, equivalência, variável, incógnita e também estabelecer um sistema de relações. Assim, entre outros aspectos, a álgebra possibilita a formulação e a resolução de problemas, por meio de equações e de regras para manipulação de símbolos algébricos.

Vários estudos têm se ocupado das dificuldades relacionadas ao uso de notações formais (GARCIA, 1997). Da Rocha Falcão (1997) propõe etapas para resolução de um problema algébrico, mapeamento do problema, escrita algébrica, resolução e interpretação do resultado.

Os conceitos de incógnita e variável também desempenham papel importante para o estudo das fórmulas (BRASIL, 1998). A ligação entre o conceito de variável e o de função são importantes para compreender relações funcionais entre área e perímetro em determinadas situações.

VARIÁVEL 8: Operações

As operações envolvidas nas questões podem ser adição, subtração, multiplicação e divisão, seja com números, grandezas ou letras.

As operações fundamentais, pelo viés das estruturas aditivas e multiplicativas, colocam como aspecto importante o fato dos valores numéricos envolvidos na situação demandarem níveis de complexidade diferenciada, conforme sejam naturais, racionais ou irracionais, assim como a compreensão das operações inclui três aspectos importantes: diante de um certo problema, o estudante precisa saber que operação dever ser realizada; precisa saber efetuar estas contas; deve conhecer e saber usar as propriedades das operações. Portanto, o trabalho a ser realizado deve se concentrar: na compreensão dos diferentes significados de cada uma delas; nas relações existentes entre elas; no estudo do cálculo (exato e aproximado, mental e escrito) (BRASIL, 1998).

VARIÁVEL 9: Domínio numérico dos dados e dos resultados

Em nosso trabalho os dados numéricos e os resultados referem-se a grandezas, assim, o domínio numérico dos dados e dos resultados pode ser restrito aos naturais; pertencentes aos racionais positivos, ou na forma decimal. Os irracionais foram evitados. Esta variável coloca em jogo aspectos relacionados à extensão do domínio natural para o racional, como também relacionadas aos algoritmos das operações. Dificuldades relacionadas ao domínio numérico foram identificadas Baturo e Nason (1996), em atividades que envolvem fórmulas de área do retângulo e do quadrado, evidenciadas em computações mal sucedidas, devido à aplicação incorreta do algoritmo da multiplicação ou dificuldade em colocar o ponto decimal na resposta.

VARIÁVEL 10: Tipo de papel

Foram também consideradas as variáveis: tipo de papel: branco ou quadriculado.

VARIÁVEL 11: Contexto

O contexto no qual a questão é formulada pode ser familiar, do cotidiano, das práticas sociais ou intramatemático.

VARIÁVEL 12: Caráter típico ou atípico da questão

O caráter típico ou atípico da questão refere-se a sua origem. Questões típicas são comuns nos livros didáticos. Questões atípicas referem-se a questões pouco usuais nos livros didáticos ou que são modificadas para fazer intervir determinados valores das variáveis, como números racionais na forma de decimal, por exemplo.

As questões foram construídas especificamente para pesquisa, extraídas ou adaptadas de livros didáticos, baseadas em provas de vestibular ou oriundas de pesquisas anteriores.

Foram elaborados cinco testes, cada um com quatro questões, sendo a primeira questão idêntica para todos os testes e as outras três seguindo uma lógica relacionada às imbricações entre os campos conceituais, refletida no tipo de uso da fórmula em cada questão, ou seja, tinha-se uma questão fixa e 15 outras que foram distribuídas em cinco tipos de testes. As fórmulas nunca foram fornecidas na questão.

Com relação à utilização das fórmulas os testes foram organizados da seguinte forma:

QUADRO 6.1: PERFIL DO TESTE DIAGNÓSTICO COM RELAÇÃO AOS USOS DAS FÓRMULAS

	Questão 1	**Questão 2**	**Questão 3**	**Questão 4**
Teste 1	Fórmula para calcular área e perímetro de um retângulo, um paralelogramo e um triângulo	Fórmula para calcular área e perímetro de um retângulo	Fórmula para comparar áreas de triângulos dada a mediana	Fórmula para otimizar Cálculo de área máxima a partir de um perímetro fixo
Teste 2	Fórmula para calcular área e perímetro de um retângulo, um paralelogramo e um triângulo	Fórmula para calcular área do quadrado em função de um perímetro dado	Fórmula para calcular e comparar	Fórmula para otimizar Cálculo de área máxima a partir de um perímetro fixo
Teste 3	Fórmula para calcular área e perímetro de um retângulo, um paralelogramo e um triângulo	Fórmula para calcular área de um paralelogramo	Fórmula para calcular comprimentos dos lados do retângulo em função do perímetro e da área	Operação com grandezas

Teste 4	Fórmula para calcular área e perímetro de um retângulo, um paralelogramo e um triângulo	Fórmula para comparar e produzir figuras em condições dadas	Fórmula para estabelecer relações entre grandezas	Fórmula para otimizar Cálculo de área máxima a partir de um perímetro fixo
Teste 5	Fórmula para calcular área e perímetro de um retângulo, um paralelogramo e um triângulo	Fórmula para calcular área do paralelogramo	Fórmula para comparar áreas de um retângulo e de um quadrado	Operação com grandezas

6.3 QUESTÃO A QUESTÃO

Nesta sessão apresentamos a análise teórica de cada uma das 16 questões utilizadas nos testes.

Incorporamos a esta análise teórica aspectos relacionados à área e ao perímetro do retângulo, do quadrado, do paralelogramo e do triângulo, em especial a construção e manipulação das fórmulas destas figuras e dificuldades identificadas na literatura. Identificaremos, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, conceitos inter-relacionados, representações simbólicas e invariantes operatórios, subjacentes a cada problema que evidenciem imbricações entre campos conceituais. Estes aspectos referem-se principalmente à confusão entre perímetro e área; a dissociação e as relações entre estes dois conceitos; a característica bidimensional da área e o reflexo na utilização das unidades de medida para área e perímetro; a construção do significado das fórmulas ou sua utilização mecânica; relação entre as fórmulas e os invariantes geométricos da figura; dificuldades relacionadas ao domínio numérico. Também o caráter funcional ou algébrico relativos à fórmula de base e fórmula algébrica, entre outros.

Para cada questão apresentamos as variáveis didáticas e os valores escolhidos a fim de explicitar e justificar o que pretendemos analisar em cada uma delas; as respostas corretas esperadas e procedimentos corretos e errôneos esperados, com base no referencial teórico, buscando antecipar o que vamos olhar sob a ótica os campos conceituais. Em todas as questões são previstas ausência de resposta.

1. QUESTÃO 1 DE TODOS OS TESTES:

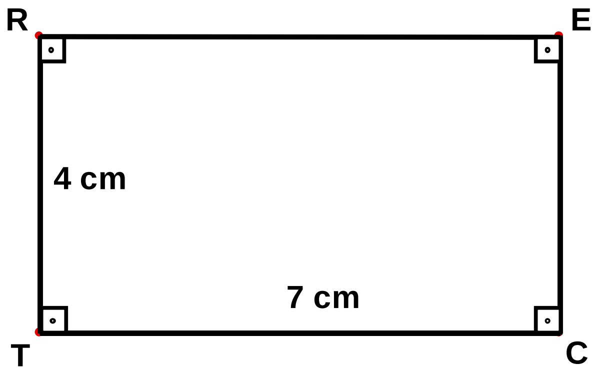
A primeira questão, utilizada por Baltar (1996) em seu pré-teste, corresponde ao uso da fórmula para calcular. Será a questão comum aos cinco tipos de testes que elaboramos. Coloca "*em jogo*" o uso de fórmulas falsas e a aquisição das fórmulas de área de um retângulo, de um paralelogramo e de um triângulo. Possui a seguinte estrutura:

- Item a) área e perímetro do retângulo
- Item b) área e perímetro do paralelogramo
- Item c) área e perímetro do triângulo

1ª questão:

ITEM A:

a) Calcule a área e o perímetro do retângulo abaixo:



a 1) A área do retângulo RECT é:

Justifique sua resposta:

a 2) O perímetro do retângulo RECT é:

Justifique sua resposta:

O retângulo é a figura geométrica plana mais utilizada nos livros didáticos para subsidiar a construção do significado das fórmulas de área e perímetro de outras figuras planas através da decomposição e recomposição. Teles e Bellemain (2006), num estudo sobre a abordagem das fórmulas em livros didáticos, constataram que a estratégia principal para cálculo da área do retângulo é a multiplicação das medidas dos comprimentos dos lados.

Havendo uma forte presença do aspecto numérico, ora utilizando os recursos da estrutura multiplicativa de Vergnaud, decompondo a figura em quadradinhos, ora aplicando “mecanicamente” a fórmula base vezes altura. Neste segundo caso, como as medidas são facilmente identificáveis, a leitura e a interpretação da figura, ou seja, o aspecto geométrico não sobressai. A fórmula da área do retângulo também serve para obter a área do quadrado, porque o quadrado é um caso especial de retângulo – o quadrado é um retângulo com todos os lados iguais.

Com relação aos conhecimentos de cada campo conceitual que poderão ser utilizados nesta questão destacamos:

- no campo das grandezas – conceito de área e perímetro;
- no campo geométrico – leitura e interpretação da figura (identificação da base e da altura)
- no campo algébrico – mobilizar a escrita da fórmula b x h
- no campo numérico – aplicação da idéia de configuração retangular da estrutura multiplicativa de Vergnaud.

As respostas corretas esperadas são: para área 28 cm^2 e para o perímetro 22 cm.

Espera-se também como resposta 28 cm e 22 cm ou apenas 28 e 22, respectivamente, que estariam parcialmente corretas. Estas últimas respostas ilustram a dificuldade de compreender o aspecto linear e bilinear do problema, ou seja, não relacionar a unidade de medida à grandeza em questão, assim A = 4 cm x 7 cm = 28 cm e não 28 cm^2.

Dentre os possíveis erros a confusão entre área e perímetro, relacionada ao campo conceitual das grandezas, levaria o aluno a apresentar como solução: área igual a 22 cm e perímetro 28 cm^2. Ou seja, A = (4 + 7) x 2 ou 4 + 4 + 7 + 7 e P= 4 x 7.

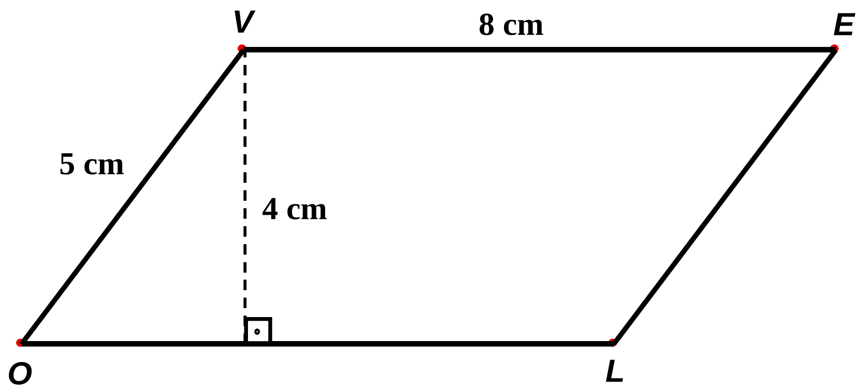
Com relação aos erros no cálculo do perímetro, o aluno pode, por exemplo, somar apenas as medidas que aparecem na figura (4+ 7 = 11). Este tipo de erro relaciona-se ao campo geométrico e corresponde a não observar uma das propriedades do retângulo que é lados paralelos iguais dois a dois.

ITEM B:

Neste item, todas as medidas necessárias e suficientes estão indicadas na figura, são naturais e o resultado obtido também. A figura apresenta-se com o lado maior paralelo à folha de papel e a altura indicada na figura corresponde a este lado maior, ou seja, esta é uma figura "prototípica". Um dos nossos objetivos neste item é verificar quais fórmulas o aluno mobiliza para calcular a área deste paralelogramo. Como dissemos anteriormente, já foi amplamente discutido, em pesquisas anteriores, a extensão indevida da fórmula da área do retângulo para o cálculo da área do paralelogramo, portanto, queremos confirmar isto e identificar outros aspectos. Perrota (2001) confirma os estudos de Baturo e Nason (1996), que destacaram que em alguns casos, as dificuldades que os estudantes têm com cálculo de área podem ser oriundas das experiências de aprendizagem fornecidas em nossas escolas. Infelizmente, frisam Baturo e Nason (1996), há uma tendência que predomina entre os professores que é focalizar no aspecto do número mais do que no desenvolvimento conceitual do processo de medição. Assim, para muitos estudantes, a maioria de suas experiências com cálculo de área foi a memorização e a aplicação rotineira de fórmulas da área.

O item tem a seguinte formulação:

b) Calcule a área e o perímetro do paralelogramo abaixo:



b 1) A área do paralelogramo VELO é:

Justifique sua resposta:

b 2) O perímetro do paralelogramo VELO é:

Justifique sua resposta:

Neste item as respostas certas esperadas para área e perímetro são respectivamente:

$$A = 8cm x 4cm \qquad P = 8cm + 8cm + 5cm + 5cm$$
e
$$A = 32cm^2 \qquad P = 26cm$$

Os conhecimentos mobilizados em cada campo conceitual estão relacionados ao procedimento de resolução utilizado pelo sujeito. Assim, no campo das grandezas destaca-se o conceito de área e perímetro e a mobilização da fórmula correta para área do paralelogramo; no campo geométrico a leitura e interpretação da figura para identificação da base e da altura; no campo algébrico a escrita da fórmula b x h e no campo numérico as operações fundamentais com números naturais.

Dentre os procedimentos corretos previstos estão aqueles que mobilizam a **decomposição do paralelogramo** em triângulos e retângulo ou a decomposição e recomposição em retângulo.

O estudo sobre a construção do significado das fórmulas de área em livros didáticos apresentado no capítulo 3 constatou que em livros didáticos antenados com os estudos em Educação Matemática, as áreas do paralelogramo e do triângulo são obtidas pela decomposição e recomposição a partir de um retângulo, ou ainda pela duplicação no caso triângulo. Por exemplo, num volume da 6ª série (DANTE, 2002) propõe-se determinar a fórmula que expressa a área de uma **região plana limitada por um paralelogramo**, através da transformação desta região numa região retangular, e no volume da 7ª série, a área de uma região determinada por um paralelogramo é apresentada através de corte-colagem, focando a equivalência de áreas.

Neste procedimento de decomposição, interferem, entre outros, aspectos geométricos referentes às propriedades das figuras que terão origem a partir do paralelogramo, como também relacionados às grandezas, pois o aluno precisa mobilizar diversas fórmulas: da área do triângulo e do retângulo. Sendo assim, é possível que apareçam alguns erros relacionados à identificação correta dos elementos que comporão a fórmula, como base e altura.

Com relação aos erros no cálculo da área do paralelogramo, a literatura aponta diversos aspectos, entre eles a extensão indevida da fórmula da área do retângulo para o cálculo da área do paralelogramo (BALTAR, 1996). Outra dificuldade correlata, amplamente destacada na literatura e confirmada por Santos (2005) refere-se ao campo geométrico: para alguns alunos base e altura correspondem à medida dos comprimentos dos lados. Assim, um dos erros possíveis para área seria calcular:

$$A = 8cmx5cm$$
$$A = 40cm^2$$

Erros relacionados ao perímetro:

- somar apenas as medidas que aparecem na figura: 5 cm + 4 cm + 8 cm, reflete o aspecto mecânico e numérico desprovido do significado conceitual;

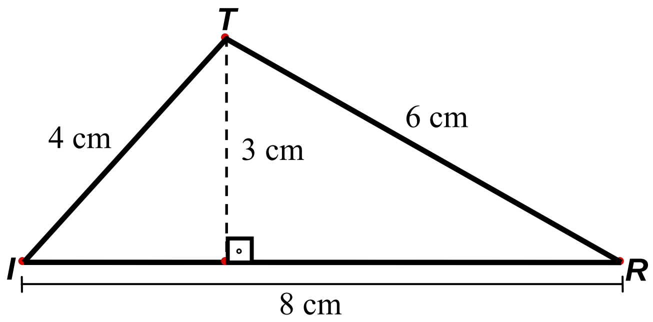
- tomar a altura como lado e somar: 4 cm + 5 cm + 8 cm + 8 cm ou
- ao decompor e recompor o paralelogramo num retângulo, calcular o perímetro da figura resultante e não da figura original: 4 cm + 4 cm + 8 cm + 8 cm

Também são esperados erros relacionados às unidades de medida, como utilizar "centímetro" ou "metro" para área ou ausência de unidades de medida para área e perímetro.

ITEM C:

Neste item todas as medidas são naturais e indicadas na figura; a altura correspondente a um lado tomado como base também é identificada.

c) Calcule a área e o perímetro do triângulo abaixo:



c 1) A área do triângulo TRI é:

Justifique sua resposta:

c 2) O Perímetro do triângulo TRI é:
Justifique sua resposta.

Com relação à área e ao perímetro do triângulo as respostas certas esperadas para área e perímetro são respectivamente:

$$A = \frac{8cmx3cm}{2}$$

$$A = \frac{24cm^2}{2} \quad \text{e} \quad \begin{array}{l} P = 4cm + 6cm + 8cm \\ P = 18cm \end{array}$$

$$A = 12cm^2$$

Com relação aos conhecimentos de cada campo conceitual destacamos:

- no campo das grandezas – conceito de área e perímetro e a mobilização da fórmula correta para área do triângulo;
- no campo geométrico – leitura e interpretação da figura (escolha de uma base e da altura correspondente ao lado tomado como base)
- no campo algébrico – mobilizar a escrita da fórmula $A = \frac{bxh}{2}$
- no campo numérico – operações fundamentais com números naturais.

A literatura aponta erros relacionados ao cálculo da área do triângulo, entre eles a extensão indevida da fórmula da área do paralelogramo, ou seja, o aluno multiplica a base pela altura, mas não divide por 2.

Assim, um dos erros possíveis para área seria calcular:

$$A = 8cmx3cm$$
$$A = 24cm^2$$

Outros erros, relacionados à leitura e interpretação da figura, também são esperados, como escolha aleatória de um lado para base, sem considerar a altura correspondente, gerando respostas do tipo:

$$A = \frac{6cmx3cm}{2} \qquad A = \frac{4cmx3cm}{2}$$
$$A = \frac{18cm^2}{2} \quad \text{ou} \quad A = \frac{12cm^2}{2}$$
$$A = 9cm^2 \qquad A = 6cm^2$$

Ou este mesmo erro acrescentado pela não divisão por 2:

$$\begin{matrix} A = 6cmx3cm \\ A = 18cm^2 \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} A = 4cmx3cm \\ A = 12cm^2 \end{matrix}$$

Dentre os erros relacionados ao perímetro, é possível:

- somar todas as medidas que aparecem na figura: 4 cm + 3 cm + 6 cm + 8 cm, reflete o aspecto mecânico e numérico desprovido do significado conceitual;

- ao decompor o triângulo TIR em dois, calcular o perímetro de cada um e somar: $T_1= 4 + x + 3$ e $T_2= 6 + (8 – x)+ 3$, desta forma, a altura 3 cm é contada duas vezes.

Também são possíveis dificuldades relacionadas às unidades de medida.

2. QUESTÃO 2:

2.1. Questão 2 do Teste 1 (Q2 –T1):

Esta questão envolve o cálculo da área e do perímetro de um retângulo. Vários aspectos relacionados aos diversos campos podem ser mobilizados por meio das variáveis e seus respectivos valores. Com relação à variável uso da fórmula, assume o valor “ calcular área”; a variável figura assume o valor retângulo; ausência da figura. A variável domínio numérico assume o valor números racionais. E as operações em jogo referem-se à multiplicação com números racionais em forma de decimal.

Possui a seguinte formulação:

Determine a área e o perímetro da região retangular cujas medidas do comprimento e da largura são, respectivamente: 23,8 cm e 12,2 cm.

Dentre os procedimentos corretos esperamos a mobilização correta da fórmula da área do retângulo que consiste em multiplicar o comprimento pela largura: $A_r = 23{,}8cmx12{,}2cm \Leftarrow A_r = 290{,}36cm^2$.

Dentre as estratégias de resolução, o aluno pode, por exemplo, esboçar o desenho do retângulo, para isto mobiliza conhecimentos do campo geométrico: é preciso identificar características da figura “retângulo” e mobilizar propriedades geométricas para desenhá-lo.

Dentre as pesquisas que estudaram a construção dos conceitos de área e perímetro e a dissociação entre eles, Perrotta (2001) destacou em seu estudo, no qual utilizou uma “abordagem manipulativa”, que a ausência de figuras influenciou nos procedimentos adotados pelos alunos.

Se optar, apenas pelo cálculo numérico, precisa mobilizar conhecimentos tanto do campo das grandezas para aplicação da fórmula b x h, como do campo numérico, relativo à multiplicação com números racionais em forma de decimal.

Assim, esperamos dificuldades relacionadas à:

- **Unidade de medida** – vários estudos, entre eles Baturo e Nason (1996), Bellemain e Lima (2002) e Facco (2003), identificaram dificuldades relacionadas à associação correta da unidade de medida para área em decorrência da utilização mecânica das fórmulas (BATURO e NASON, 1996) e da dificuldade de compreender o aspecto bilinear da área. Assim prevemos erros relacionados às unidades de medida, tais como: utilizar para unidade de medida de área apenas cm ou m^2, para o perímetro cm^2 ou m, como também ausência de unidades para ambas as grandezas.

- **Operações com números decimais** – dificuldades relacionadas às operações com números decimais também já foram identificadas em várias pesquisas anteriores. Baturo e Nason (1996), por exemplo, destacaram dificuldades relacionadas ao domínio numérico no cálculo da área de retângulos. Prevemos dificuldades relacionadas ao algoritmo da multiplicação, haja vista, que o aluno não poderá usar calculadora. Também antecipamos dificuldades com a colocação da vírgula no produto obtido.

- **Confusão área e perímetro –** aspecto amplamente estudado por Baltar (1996), Perrin-Glorian (2001) e outros, a confusão área e perímetro conduziria, por exemplo, o aluno a calcular a área somando os lados e o perímetro multiplicando-os. Porém, torna-se necessário refletir sobre a compreensão das propriedades do retângulo em jogo nesta questão: lados opostos paralelos e congruentes, que faz parte do campo conceitual geométrico.

- **Mobilização de representações simbólicas –** a nosso ver diversas representações poderão ser mobilizadas: a representação numérica; representação figurativa, que se constitui no desenho de um retângulo e também representação algébrica ao escrever a fórmula.

2.2. Questão 2 do Teste 2 (Q2 –T2):

Baseada numa questão um livro didático[25]**,** coloca em jogo as seguintes variáveis: uso da fórmula para calcular área em função de um perímetro dado; a variável tipo de figura

[25] PIRES, Célia Carolino, CURI, Edda e PIETROPAOLO, Ruy. Educação Matemática. 1ª Edição. São Paulo: Atual, 2002. 7ª série, pág. 118.

assume o valor quadrado; há ausência da figura. Com relação à variável domínio numérico - o dado oferecido na questão é inteiro e o resultado também.

Possui a seguinte formulação:

Um terreno de forma quadrada tem perímetro igual a 32 m. Qual é a sua área?

Nesta questão, dado o perímetro de um quadrado o aluno precisa inferir sobre a medida dos lados deste quadrado, o que corresponde a mobilizar um conhecimento do campo geométrico relativo à propriedade do quadrado: 4 lados iguais e ao mesmo tempo mobilizar o teorema em ação relacionado ao campo das grandezas: o perímetro do quadrado corresponde *"à soma dos comprimentos dos lados do quadrado*"; depois mobilizar conhecimentos do campo numérico dividindo 32 por 4, obtendo a medida do comprimento do lado do quadrado: 8 m. Numa segunda etapa, o aluno precisa usar a fórmula para calcular a área do quadrado.

São possíveis dois tipos de procedimentos nesta questão: **numérico**, que envolve basicamente duas operações aritméticas: 32: 4 = 8 e 8 x 8 = 64. E procedimento **algébrico**, que corresponde a mobilização de escrita simbólica e procedimento de resolução de equações:

$$p = x + x + x + x$$
$$P = 4x$$
$$P = 32, \log o \qquad A_q = lxl$$
$$4x = 32 \qquad \text{como } A_q = 8x8$$
$$x = \frac{32}{4} \qquad A_q = 64m^2$$
$$x = 8$$

Um possível erro, também já identificado em estudos anteriores, se refere às unidades de medida: os alunos podem propor como resposta para área do quadrado 64m ao invés de 64 m^2 ou simplesmente 64.

2.3 Questão 2 do Teste 3 (Q2 –T3):

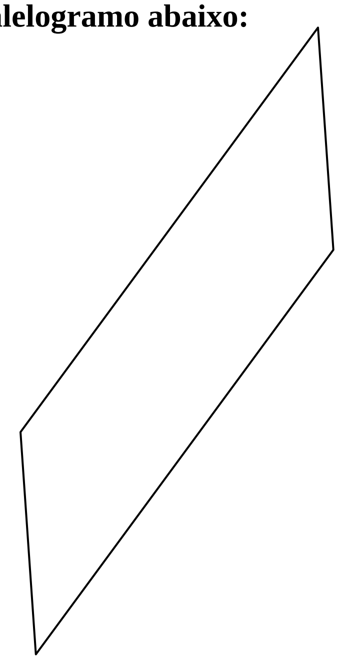
Extraída das avaliações da Associação de Professores de Matemática do Ensino Público francês APMEP, essa questão foi utilizada nas pesquisas desenvolvidas por Baltar (1996) e Santos (2005). Possui um forte aspecto geométrico, pois requer a identificação de elementos do paralelogramo.

Coloca em jogo as seguintes variáveis e seus respectivos valores: uso da fórmula para calcular; tipo de figura - paralelogramo; presença da figura; posição da figura - não prototípica; natureza dos dados – numérica; domínio numérico dos dados e do resultado -

números racionais; Operações em jogo: multiplicação com números racionais em forma de decimal; tipo de papel – branco. Instrumento de medida disponibilizado e necessário – régua.

Possui a seguinte formulação:

Observe o paralelogramo abaixo:



a) **Com uma régua, meça os comprimentos necessários para calcular a área do paralelogramo e registre os dados coletados na figura.**
b) **Qual a área aproximada até milímetros do paralelogramo? Justifique sua resposta**

O paralelogramo foi desenhado de forma a mobilizar medidas decimais diferentes de 0,5 cm (meio centímetro). O lado maior mede aproximadamente 4,2 cm; o lado menor 2,2 cm e altura correspondente ao lado maior 1,7 cm, a área é aproximadamente 7,14 cm^2. Devido à imprecisão que a medida da régua poderá apresentar, consideraremos corretos também resultados de medida com diferença de 0,2 cm para mais ou para menos.

Nesta questão a posição da figura é não prototípica, ou seja, apresenta uma inclinação não habitual e os lados não paralelos às bordas do papel, com o objetivo de verificar no campo geométrico se os alunos escolhem corretamente os dados numéricos para a resolução da questão, se a mudança na inclinação da figura influencia na maneira como alguns alunos resolvem o problema e ainda verificar qual a idéia que o aluno tem de base e altura. E, além dos já citados, verificar a mobilização da fórmula numa situação com figura não prototípica.

Com relação a este problema Santos (2005) ao analisar os procedimentos de um grupo de alunos do 4º ciclo do ensino fundamental (8ª série), indicou que, para os seus sujeitos, a inclinação da figura parece não influenciar na resolução do problema, assim como a escolha dos dados numéricos para calcular a área do retângulo não parece provocar dificuldades expressivas.

Dentre os erros identificados em pesquisas anteriores, destaca-se a área de um paralelogramo ser dada pelo produto das medidas de seus lados. Corresponde a extensão indevida da fórmula da área do retângulo.

Nesta questão os dados numéricos não são fornecidos, assim o aluno precisa utilizar um instrumento de medida graduado e expressar simbolicamente as medidas obtidas. A escrita das medidas obtidas e as respectivas aproximações decimais são aspectos relacionados ao campo conceitual numérico, bem como as operações aritméticas resultantes desta escrita.

É possível que os alunos cometam erros relacionados aos diversos campos conceituais:

- **No campo das grandezas** - mobilização do teorema-em-ação falso, segundo o qual "para calcular a área do paralelogramo os comprimentos necessários são os comprimentos dos lados". Sendo assim, no item **a** onde o aluno é solicitado a, com uma régua, medir os comprimentos necessários para calcular a área do paralelogramo e registrá-los na figura, ele apenas mede os lados do paralelogramo e conseqüentemente comete o erro de fazer a extensão indevida da fórmula de área do retângulo para calcular a área do paralelogramo.

  Outro aspecto é a ausência de unidade ou a utilização de unidade de área inadequada.
- **No campo geométrico** – a não identificação da altura correspondente ao lado tomado como base reflete ausência de conhecimento sobre os elementos e propriedades do paralelogramo. No procedimento de decompor o paralelogramo e recompor um retângulo o lado menor poderá ficar sendo a altura.
- **No campo numérico** – após efetuar a medição utilizando a régua, o aluno aproxima-as para medidas inteiras, demonstrando dificuldade no domínio numérico racional. Também pode haver dificuldades relacionadas ao cálculo numérico.

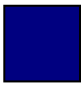
2.4. Questão 2 do Teste 4 (Q2 – T4):

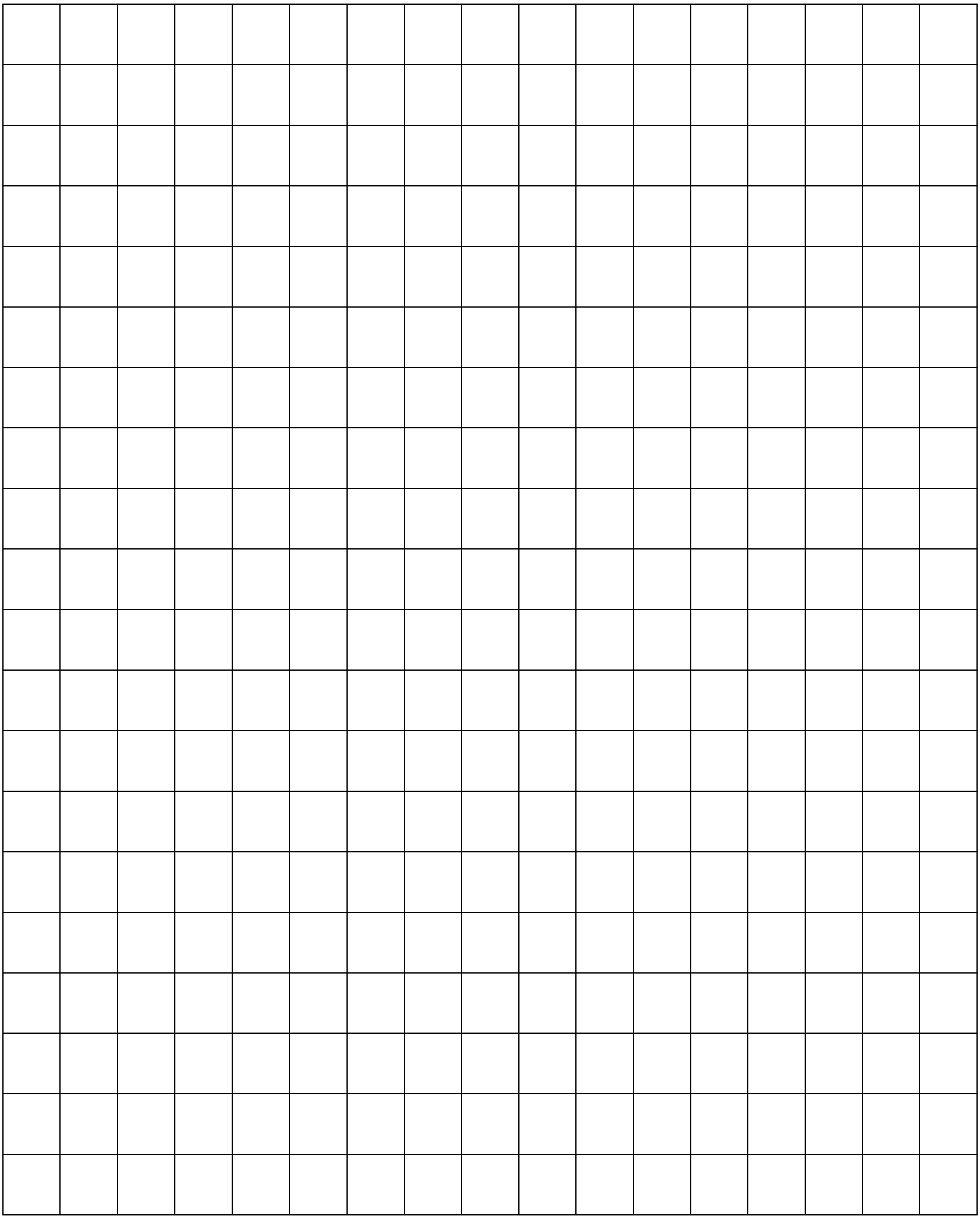
Também possui um forte aspecto geométrico.

A variável uso da fórmula assume dois valores: produzir e comparar áreas; a variável tipo de figura assume valor triângulo; com relação à presença da figura há solicitação do traçado destas. O tipo de papel - quadriculado

2ª questão:

Desenhe no papel quadriculado cinco triângulos diferentes, de maneira que cada um deles tenha 6 cm^2 de área.

1 cm^2 



Nesta questão a fórmula é utilizada para produzir e comparar áreas de triângulos usando como suporte uma malha quadriculada de lado 1 cm. O espaço com malha quadriculada, disponibilizado para o aluno, era suficiente para produção dos triângulos. Havia várias possibilidades de resposta. Estas várias possibilidades de resposta supõem a mobilização de vários invariantes operatórios relacionados ao campo conceitual geométrico, como também ao das grandezas: invariância da área em função da base; e de relações entre área e perímetro: figuras de mesma área podem ter mesmo perímetro.

Estudos anteriores apontam que alunos sentem dificuldades para encontrar articulações entre as propriedades que ele conhece e a maneira de organizar o conjunto de um desenho, como também para descrever características pertinentes (necessárias e suficientes) para reprodução de figuras (GALVEZ, 1996).

Os procedimentos previstos relacionam-se aos conhecimentos em jogo em cada campo conceitual:

- **Procedimentos numéricos** – que consiste em encontrar pares de números cujo produto dividido por 2, resultem 6, supõe a mobilização de conhecimento relativo à fórmula da área do triângulo.
- **Procedimento geométrico** – desenhar um triângulo de área 6 cm^2 requer identificar corretamente os elementos "base e altura" da figura, isto é, tomando um lado como base identificar a altura relativa a ele. É preciso ainda decidir sobre as medidas dos lados e a posição da figura, assim, os alunos podem optar, por exemplo, por desenhar apenas triângulos retângulos, cuja altura é mais fácil de identificar ou desenhar sempre triângulos isósceles ou ainda desenhar triângulos congruentes mudando apenas a posição deles na malha quadriculada. Também nos interessamos pela altura do triângulo que os alunos escolherão: interna, externa ou o lado?
- **Procedimento algébrico/funcional** – consiste em escrever simbolicamente a fórmula da área do triângulo $A = \frac{bxh}{2}$, substituir o valor 6 cm^2 para área: $6 = \frac{bxh}{2} \Rightarrow bxh = 12$, a partir desta expressão o aluno calcula $h = \frac{12}{b}$, mas precisa determinar um domínio para esta expressão, pois se tratando da grandeza área b e h só podem assumir valores em Q_+^*. Ou seja, se

$$b = 1 \rightarrow h = \frac{12}{1} \Rightarrow h = 12$$
$$b = 2 \rightarrow h = \frac{12}{2} \Rightarrow h = 6$$
$$b = 3 \rightarrow h = \frac{12}{3} \Rightarrow h = 4$$
$$b = 4 \rightarrow h = \frac{12}{4} \Rightarrow h = 3$$
$$b = 5 \rightarrow h = \frac{12}{5} \Rightarrow h = 2{,}4$$
$$b = 6 \rightarrow h = \frac{12}{6} \Rightarrow h = 2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b = 13 \rightarrow h = \frac{12}{13} \Rightarrow h = 0{,}\ldots.$$

Além das possibilidades inteiras há os racionais. Será que os alunos mobilizarão medidas decimais?

Dentre as possíveis dificuldades estão àquelas relacionadas ao campo conceitual das grandezas: mobilização de fórmulas errôneas para a área do triângulo, por exemplo, a fórmula da área do retângulo ou ao produto de dois lados. Assim a área 6 cm^2 corresponderia sempre ao produto 3 x 2, logo o aluno poderá variar a posição do triângulo e manter as medidas constantes.

2.5. Questão 2 do Teste 5 (Q2 –T5):

Baseada numa questão de livro didático[26], coloca em jogo as seguintes variáveis e seus respectivos valores: uso da fórmula para calcular; tipo de figura – paralelogramo; presença da figura – solicita o desenho no enunciado; domínio numérico dos dados e dos resultados-natural; unidade de comprimento – cm; operações em jogo: multiplicação comparativa com números naturais; tipo de papel – branco.

Propõe-se o esboço do paralelogramo baseado em informações que o enunciado oferece:

Um paralelogramo tem 18 cm de perímetro. O comprimento de um de seus lados é o dobro do comprimento do outro lado. A altura relativa ao lado maior mede 2 cm.

A) Esboce o desenho desse paralelogramo com suas medidas.

B) Calcule a área da região determinada por ele.

[26] DANTE, Luiz Roberto. *Tudo é Matemática*. São Paulo: Ática, 2002. 7ª série, pág. 239.

Para esboçar o desenho do paralelogramo e calcular sua área, o aluno precisa mobilizar conceitos relacionados aos vários campos conceituais:

- **Do campo conceitual geométrico** – distinguir a figura "paralelogramo" de todas as outras figuras geométricas planas; identificar e representar elementos e propriedades da figura, como a altura relativa ao lado maior; e lados paralelos iguais dois a dois.
- **Do campo conceitual das grandezas** – o conceito de área e perímetro. Especialmente relacionar o perímetro à soma dos comprimentos dos lados e aplicar a fórmula da área do paralelogramo; como também exprimir o resultado com a unidade de medida correspondente.
- **Do campo conceitual numérico** - a noção de dobro e a decomposição multiplicativa do 18.
- **Do campo conceitual algébrico** – a resolução de um problema que exige a escrita de uma expressão algébrica tendo como referencial o conceito de área e perímetro; a resolução desta expressão que compreende mobilização de propriedades das operações e a interpretação destas soluções, relacionando os resultados obtidos à medida dos lados da figura.

Um dos procedimentos esperados que conduzirá ao acerto consiste em esboçar o paralelogramo usando princípios geométricos como lados opostos paralelos e congruentes e representar simbolicamente as medidas dos lados, designando-os por incógnitas, por exemplo, x e y ou x e 2x, que incorpora a idéia que um é o dobro do outro.

Depois escrever simbolicamente a relação entre o perímetro dado e os comprimentos dos lados do paralelogramo:

$$
\begin{aligned}
& x + x + y + y = 18 \\
& 2x + 2y = 18 \\
& como \\
& x = 2y \\
& 2.2y + 2y = 18 \\
& 6y = 18 \\
& y = \frac{18}{6} \\
& y = 3 \\
& e \\
& x = 6
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
& P = 18cm \\
& P = 2x + 2x + x + x = 6x \\
& 6x = 18 \\
& x = 3cm
\end{aligned}
$$

A escrita e a resolução desta expressão pressupõem a execução correta de todas as etapas para resolução de um problema algébrico (DA ROCHA FALCÃO, 1997). Pode haver erros na modelagem da expressão; ou na resolução *stricto sensu*. O passo seguinte neste procedimento consiste em mobilizar conhecimento do campo das grandezas e utilizar a fórmula correta para calcular a área do paralelogramo. Assim, o aluno fará:

$$A = 6cmx2cm$$
$$A = 12cm^2$$

Nesta etapa o aluno pode cometer o erro, por exemplo, de mobilizar uma fórmula errada para o paralelogramo, como fazer a extensão da fórmula de área do retângulo para o paralelogramo, obtendo como resposta para o item **b** da questão:

$$A = 6cmx3cm$$
$$A = 18cm^2$$

Ou ainda escolher unidades de medida errôneas, como cm para área.

Outro procedimento que poderá conduzir ao acerto é o numérico – o aluno, tendo se apropriado das propriedades do paralelogramo e das relações entre a medida dos lados e o perímetro, procura por tentativas, um par de números cuja soma seja 9 e um seja o dobro do outro, encontrando facilmente o par 6 e 3. Logo em seguida aplica a fórmula de área e encontra 12 cm² para área.

3. QUESTÃO 3:

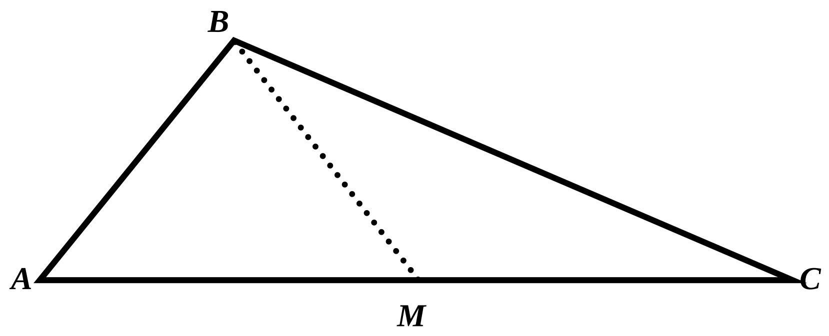
3.1. Questão 3 do Teste 1 (Q3 –T1):

Extraída da tese de Baltar (1996) possui um forte aspecto geométrico. Coloca em jogo as seguintes variáveis e seus respectivos valores: uso da fórmula para comparar; tipo de figura – triângulo; presença da figura – figura dada no enunciado; posição da figura – prototípica com altura não indicada na figura.

Pressupõe imbricações entre os campos conceituais das grandezas, da geometria, da álgebra e numérico.

Possui a seguinte formulação:

O segmento BM é a mediana do triângulo ABC, relativo ao vértice B. Compare as áreas dos triângulos ABM e BMC.



Um dos princípios presentes na questão refere ao fato dos triângulos ABM e BMC possuírem mesma base e mesma altura, portanto, mesma área.

Sendo assim os conhecimentos geométricos necessários são:

- Conceito de mediana (segmento de reta que parte de um vértice até o ponto médio do lado oposto a este vértice);
- Identificação da altura relativa a um lado tomado como base num triângulo.

Dentre as estratégias que conduzirão ao acerto está a que consiste em calcular a área dos triângulos ABM e BMC simbolicamente e compará-las, ou seja, mobilizar um conhecimento relacionado ao aspecto variável da letra. Para isto é preciso mobilizar a fórmula da área do triângulo, escolhendo bases e alturas correspondentes a elas corretamente:

Área do triângulo ABM:

$$A_{\Delta ABM} = \frac{AMxh}{2}$$

$$A_{\Delta BMC} = \frac{MCxh}{2}$$

$$como$$

$$AM \approx MC$$

$$A_{\Delta ABM} = A_{\Delta BMC}$$

Se, por exemplo, o aluno escolhe para AM e MC a representação simbólica a variável **x**, teremos:

$$A_{\Delta ABM} = \frac{x.h}{2}$$
$$A_{\Delta BMC} = \frac{x.h}{2}$$
$$\log o:$$
$$A_{\Delta ABM} = A_{\Delta BMC}$$

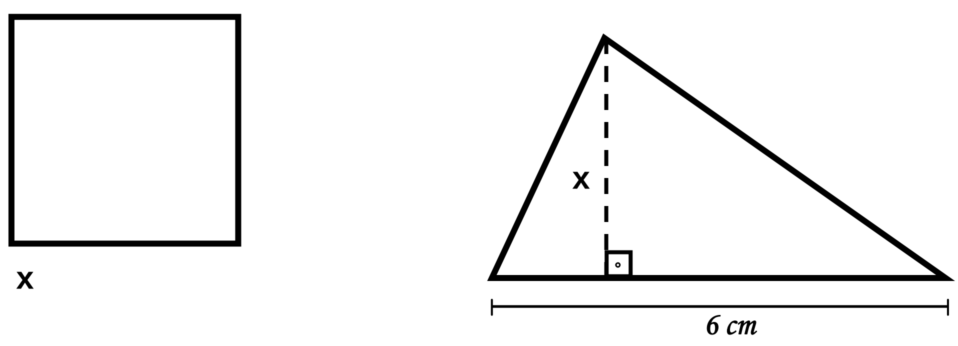
Alguns procedimentos poderão conduzir a erros, principalmente relacionados a leitura e interpretação da figura. O aluno pode, por exemplo, comparar as áreas tomando como referencial o comprimento dos lados AB e BC, assim poderá concluir que a área do triângulo BMC é maior que a do triângulo ABM por que o lado BC > AB.

3.2) Questão 3 do Teste 2 (Q3 –T2):

Extraída de um livro didático, coloca em jogo as seguintes variáveis e seus respectivos valores: uso da fórmula para calcular; tipo de figura quadrado e retângulo; presença da figura no enunciado; natureza dos dados – letras assumindo o papel de incógnitas; domínio numérico do resultado – natural; operações em jogo: operações com letras, ou seja, algébricas; contexto intramatemático.

Esta questão envolve as áreas do quadrado e do triângulo, sendo necessário igualar as áreas, escrevendo uma expressão algébrica, resolver esta expressão e interpretar os resultados obtidos:

Ache o valor de x para que o triângulo e o quadrado tenham a mesma área



(PIRES, Célia Carolino, CURI, Edda e PIETROPAOLO, Ruy. Educação Matemática. 1ª Edição. São Paulo: Atual, 2002. 8ª série, pág. 118).

Nesta questão podemos identificar aspectos relacionados aos diversos campos conceituais:

Campo geométrico – identificação das figuras geométricas planas: quadrado e triângulo, e suas respectivas propriedades geométricas: no quadrado 4 lados iguais; no triângulo a identificação da altura correspondente a um lado tomado como base. Assim podem intervir dificuldades relacionadas à seleção de características pertinentes (necessárias e suficientes) para calcular as áreas das figuras.

Campo das grandezas – mobilização da fórmula da área do quadrado e do triângulo; há implícita uma relação importante sobre invariância da área: "figuras diferentes podem ter a mesma área".

Campo algébrico – modelização e resolução da expressão algébrica que compara as áreas do quadrado e do triângulo. Neste caso intervem a dimensão interpretativa e procedimental da álgebra.

Um dos procedimentos que conduzirão ao acerto compreende a mobilização de conhecimentos destes três campos: para achar o valor de x para que o triângulo e o quadrado tenham a mesma área é preciso escrever simbolicamente as fórmulas da área de cada uma das figuras. Para o quadrado: $A = lxl \Rightarrow A = x.x$ e para o triângulo: $A = \frac{bxh}{2} \Rightarrow A = \frac{6.x}{2}$. Feito isto é preciso escrever uma expressão que represente a igualdade das áreas e resolve-la.

$$x^2 = \frac{6.x}{2}$$
$$x^2 = 3.x$$
$$x^2 - 3.x = 0$$
$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.0}}{2}$$
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9}}{2}$$
$$x = \frac{3 \pm 3}{2}$$
$$x' = \frac{3+3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$
$$x'' = \frac{3-3}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

ou

$$x^2 = \frac{6.x}{2}$$
$$x^2 = 3.x$$
$$x^2 - 3.x = 0$$
$$x(x-3) = 0$$
$$x' = 0$$
$$x'' = 3$$

Por tratar-se de uma equação do segundo grau com c = 0, vários caminhos podem conduzir a uma solução correta. A interpretação do resultado supõe escolher um dos valores: 0 ou 3? O “zero” não serve, pois se trata de uma medida. Escolhe o 3 e a verificação do resultado é feita substituindo o valor encontrado para x na figura e calculando as áreas, se forem iguais, a resposta está correta.

Também é possível encontrar a resposta correta através de um procedimento numérico que consiste em começar pela última etapa descrita acima: por tentativas, o aluno procura um número que quando substitua o x e calcule a área do quadrado e do triângulo os valores numéricos para as áreas sejam iguais. Implicitamente mobilizam-se conhecimentos do campo das grandezas, relacionados ao conceito de área e à aplicação das fórmulas.

Os erros nesta questão podem aparecer relacionados aos vários campos conceituais. Entre eles destacamos a mobilização incorreta das fórmulas de área do quadrado e do retângulo, gerando expressões algébricas errôneas. Pode haver também dificuldades relacionadas ao uso das notações formais, ou seja, à representação algébrica deste problema, como identificadas por Garcia (1997). Ou ainda erros relacionados à resolução da equação.

3.4. Questão 3 do Teste 3 (Q3 – T3):

Extraída de um livro didático, propõe o cálculo das dimensões do retângulo em função do perímetro e da área. Coloca em jogo as seguintes variáveis e seus respectivos valores: uso da fórmula para calcular; tipo de figura - retângulo; ausência da figura no enunciado; Domínio numérico - números naturais; Unidade de comprimento – cm e de área cm^2.

Uma região retangular tem 42 cm de perímetro e 104 cm^2 de área. Quais são as dimensões dessa região retangular?

Dante, Luiz Roberto. Tudo é Matemática. Editora Ática: São Paulo, 2002. 8ª série.

Neste problema o campo algébrico intervém como uma ferramenta a serviço da resolução de problemas (GARCIA, 1997), possibilitando a formulação e a resolução desta questão por meio de equações através de regras para manipulação de símbolos algébricos.

Porém, para escrever a expressão algébrica que poderá conduzir à resposta correta, é preciso também mobilizar conhecimentos do campo das grandezas geométricas: os conceitos de área e perímetro e as relações que podem ser estabelecidas entre eles e ainda conhecimentos do campo geométrico: propriedades do retângulo.

Um procedimento correto consiste em representar simbolicamente a relação entre as medidas dos lados do retângulo e o perímetro: $2x + 2y = 42$ e a relação entre as medidas dos lados e a área: $x.y = 104$. Estas duas precisam acontecer ao mesmo tempo, logo temos:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 42 \\ x.y = 104 \end{cases}$$

Após esta modelagem, resolve-se o sistema de equações com duas variáveis pelo método de substituição:

$$\text{Se } \begin{cases} 2x + 2y = 42 \\ x.y = 104 \end{cases} \text{ então } \begin{matrix} y = 21 - x \\ x.y = 104 \end{matrix}$$

Substituindo o valor de y na segunda expressão tem-se: $(21 - x).x = 104$, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração:

$$21x - x^2 = 104$$
$$-x^2 + 21x - 104 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau com a fórmula de Báskara, encontram-se dois valores para x: 13 e 8, que correspondem às dimensões da região retangular. Possivelmente alguns alunos mobilizarão a representação simbólica "desenho de um retângulo" nos procedimentos de resolução.

Pode também ser mobilizado procedimento numérico. Por tentativas o aluno procura pares de números cujo produto seja 104 e a soma 21.

Dentre os erros possíveis destacamos aqueles relacionados à mobilização errônea dos conceitos de área e perímetro no campo das grandezas e aqueles relacionados à modelização e à resolução do sistema de equações no campo algébrico.

3.4. A questão 3 do Teste 4 (Q3-T4):

Este é um problema misto, a fórmula é usada para estabelecer relações entre grandezas e também para operar com grandezas de mesma natureza. O tipo de figura é o retângulo; a figura está ausente do enunciado; o domínio numérico dos dados e dos resultados é natural. Com relação à natureza dos dados são números e também letras assumindo o papel de variáveis.

Focaliza o cálculo dos comprimentos dos lados de uma figura em função de variações impostas à área, podendo o aumento dado ser fixo ou o aumento variável. Os cálculos são feitos em função da área ou em função das medidas dos comprimentos. Foi baseado numa questão de um livro didático[27], tendo sido acrescentada a solicitação do item b.

De uma folha de papel retangular de 30 cm por 20 cm são retirados, de seus quatro cantos, quadrados de lado x.
a) Determine a expressão que indica a área da parte que sobrou em função de x;
b) Qual o valor de x para que a área restante seja igual a 200 cm^2?

Propõem-se duas demandas: escrever uma expressão algébrica no item **a** e calcular o valor da variável quando a área for 200 cm² no item **b.**

Com relação aos conhecimentos requisitados de cada campo conceitual podemos destacar:

- **No campo geométrico** – conhecimentos relativos às propriedades do retângulo e do quadrado;
- **No campo das grandezas** – conceito de área e fórmula da área do quadrado e do retângulo.
- **No campo algébrico** – interpretação do enunciado e escrita de uma expressão algébrica
- **No campo funcional** – a escrita de uma regra que relacione a variável x e a medida da área.

A ausência da figura no enunciado, provavelmente mobilizará o traçado da figura do retângulo como representação simbólica para auxiliar a resolução da questão.

Dentre os procedimentos corretos está a modelização da seguinte expressão algébrica para indicar a área da parte que sobrou depois de retirados quatro quadrados de lado x no item a.

$$A = (30x20) - 4x^2$$

Esta modelização envolve a utilização correta da fórmula da área do retângulo e do quadrado, mobilizadas a partir da compreensão da situação proposta, que provavelmente necessitará do auxílio de uma representação simbólica figurativa.

[27] DANTE, Luiz Roberto. Matemática (Ensino Médio). 1ª Edição. São Paulo. Ática, 2004. Volume 1, pág. 117.

Para calcular o valor de x para que a área restante seja igual a 200 cm² é necessário resolver uma equação do 2º grau com b= 0:

$$-4x^2 + 600 = 200$$
$$-4x^2 + 600 - 600 = 200 - 600$$
$$-4x^2 = -400$$
$$\frac{-4x^2}{-4} = \frac{-400}{-4}$$
$$x^2 = 100$$
$$x = \pm\sqrt{100}$$
$$x = \pm 10$$

Resolver esta equação envolve vários aspectos já discutidos em estudos anteriores. Teles (2002) destaca dificuldades relacionadas à utilização das operações inversas. A autora evidenciou em sua pesquisa o procedimento mecânico utilizado pelos alunos na resolução de equações, caracterizado pela técnica "*trocou de lado, troca de sinal*" que conduz a muitos erros, principalmente na aplicação da operação inversa da multiplicação quando o coeficiente de x é negativo. Outro aspecto refere-se a retomada do sentido, ou seja, interpretação do resultado obtido: 10 negativo ou 10 positivo? É preciso retomar o significado semântico da expressão, desprezando a solução 10 negativo que não pode ser considerado no campo das grandezas geométricas.

Alguns erros possíveis podem ser resultantes da dificuldade de interpretar a figura, que resultará numa modelagem errônea. Por exemplo, o aluno pode retirar o quadrado de lado x apenas de um lado da figura, ou aplicar a fórmula da área do quadrado lxl, ou seja, $x.x$, obter $2x$ ao invés de x^2, o que se constitui um erro de manipulação simbólica amplamente detectado nas pesquisas em Educação Matemática (Garcia, 1997).

3.5. Questão 3 do Teste 5 (Q3-T5):

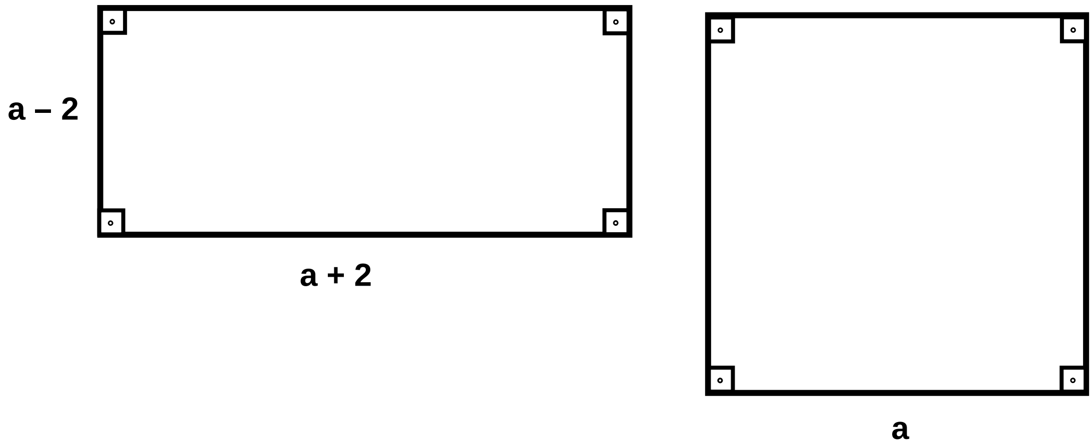
Baseada numa questão de um livro didático[28], a questão foca as seguintes variáveis e seus respectivos valores: uso da fórmula para comparar. Com relação a natureza, os dados são letras que assumem o papel de variáveis; as figuras são retângulo e quadrado e estão presentes no enunciado.

[28] SMOLE, Kátia Stocco e DINIZ, Maria Ignez. *Matemática Ensino Médio*. 3ª Edição Reformulada. São Paulo: Editora Saraiva, 2003. Volume 1, pág. 147.

Pressupõe a comparação das áreas de um retângulo e de um quadrado através da escrita e manipulação de uma expressão algébrica.

Mobiliza imbricações entre os campos conceituais das grandezas, da geometria, da álgebra e numérico:

As dimensões do retângulo (à esquerda) e do quadrado (à direita) são dadas pelas expressões indicadas, nas quais a representa um número maior do que 2 (a > 2):



a) Qual das duas figuras tem maior área? Por quê?

O contexto deste problema é intramatemático, mais especificamente da "geometria". Discute-se a comparação das áreas de duas figuras geométricas planas: o quadrado e o retângulo, tendo implícita a possibilidade de duas figuras de formas diferentes possuírem perímetros iguais e áreas diferentes. A representação simbólica **a,** neste caso, desempenha o papel de variável, pois a comparação das áreas se dará em função da comparação das expressões algébricas resultantes da mobilização das fórmulas da área do retângulo e do quadrado: $(a – 2)\ (a + 2) < a^2$.

Esta questão coloca em jogo o entendimento do aluno sobre o caráter funcional das variáveis da fórmula para área do retângulo, que já foi estudado, por exemplo, por Souza e Neto (2004) que constatou através do seu experimento o uso incorreto, por parte dos alunos, da sintaxe da álgebra como, manipulações algébricas incorretas das fórmulas de área; a falta de parênteses e desconhecimento da utilização das propriedades da igualdade nas fórmulas.

Podemos identificar diversos aspectos relacionados aos campos conceituais em foco em nosso trabalho:

- **Campo conceitual geométrico** – a leitura e a interpretação das figuras geométricas: retângulo e quadrado e suas propriedades.

- **Campo conceitual das grandezas** – mobilização das fórmulas de área do retângulo e do quadrado.
- **Campo conceitual algébrico** – modelização e manipulação simbólica das expressões geradas pela escrita das fórmulas.
- **Campo conceitual funcional** – o papel da letra como variável, caracterizado inclusive pela ausência de unidades de medida na questão, que implica em aceitar que para qualquer valor (restrito a um domínio) e para qualquer unidade vale a relação estabelecida.

A resolução desta questão envolve procedimentos que colocam em jogo, ao mesmo tempo, conhecimentos dos vários campos conceituais: Inicialmente o aluno se depara com dimensões representadas por variáveis e precisa exprimir a área do retângulo e do quadrado em função destas variáveis. Conforme Germi (1997), exprimir uma grandeza geométrica em função de outra, envolve uma distinção entre fórmula de base e fórmula algébrica. A partir da figura geométrica e da fórmula decorrente o aluno constrói a “fórmula de base”, compreendida como a fórmula resultante da designação que o aluno deu às grandezas. Da fórmula de base o aluno constrói a “fórmula algébrica”, que é a fórmula resultante da substituição dos elementos da fórmula pelos correspondentes algébricos. Assim para área do retângulo escreve: $A_r = (a-2)(a+2)$ e para área do quadrado: $A_q = a^2$. O passo seguinte consiste em calcular o produto:

$$A_r = (a-2)(a+2)$$
$$A_r = a(a+2) - 2(a+2)$$
$$A_r = a^2 + 2a - 2a - 4$$
$$A_r = a^2 - 4$$

Neste cálculo podem ocorrer alguns erros, por exemplo, erro na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, que resultaria num erro de cômputo neste produto notável.

Para o passo seguinte o aluno precisa mobilizar conhecimentos relacionados ao campo conceitual funcional, precisa comparar as duas áreas, ambas representadas por variáveis, ou seja, a comparação se dará no campo algébrico e no campo das grandezas, é preciso comparar as expressões, mas ao mesmo tempo precisa-se pensar no que ocorre com as áreas daquelas figuras para determinados valores de **a.** Neste sentido, prevemos que alguns alunos atribuirão valores numéricos para **a** e farão a comparação dos resultados numéricos obtidos, caracterizando uma dificuldade no campo funcional, representados pela não compreensão da variação (GERMI, 1997).

Para comparar as expressões algébricas $a^2 - 4$ e a^2, é preciso pensar funcionalmente: as partes literais são iguais, mas a primeira expressão está sendo subtraída em 4 unidades, então independente de qual seja o valor de **a,** a primeira expressão será sempre menor do que a segunda em 4 unidades.

4. QUESTÃO 4 –

Em nosso estudo sobre classes de problemas que envolvem fórmulas de área nos livros didáticos, identificamos a predominância de um tipo de uso da fórmula para otimizar, por isso, na quarta questão, de todos os testes, mobilizamos dois tipos de problemas que chamamos "*problema de otimização*" (com e sem figura) e problema envolvendo operações entre grandezas (com e sem figura). O primeiro, "*problema de otimização*", predomina no Ensino Médio e no 2º ano do 4º ciclo do Ensino Fundamental. A principal tarefa desta classe de problemas é a determinação da maior área possível em função da área e/ou de um perímetro fixo. Nela mobiliza-se o aspecto funcional ao descrever o valor e a função da área com relação a x. Refere-se geralmente a "**aplicações *do conceito de máximo e mínimo no estudo das funções*"**. Numa situação de otimização intervém o caráter de "variável" de **A** (área), as letras envolvidas evoluem passando de um status de número desconhecido fixado (incógnita) para o status de número desconhecido, mas que varia em função dos elementos da figura (GERMI, 1997).

O campo conceitual das grandezas aparece com as relações entre área e perímetro. Dentre os aportes teóricos para análise das questões de otimização, destacamos os estudos de Douady & Perrin-Glorian (1984, 1985, 1989) que encontraram como resultado de sua pesquisa que os alunos costumam associar modificações de área a alterações de perímetro e vice-versa, para figuras de mesma forma. Baltar (1996) também identifica como resultado de sua pesquisa a idéia de que área e perímetro de um retângulo variam num mesmo sentido.

O segundo grupo de problemas, também identificado em nossa análise de usos das fórmulas em livros didáticos, estamos chamando de "*Problemas de Molduras*". Focaliza o cálculo dos lados de uma figura em função de variações impostas à área, podendo o aumento dado ser fixo ou o aumento variável. Os cálculos são feitos em função da área ou em função das medidas dos comprimentos. O contexto pode ser do cotidiano ou intramatemático, com a figura dada no enunciado ou não.

Neste grupo de problemas temos duas idéias básicas:

1) **Cálculo de uma dimensão da figura em função da área dada -**

Nesta classe propõem-se o cálculo de uma dimensão da figura, dada ou não, em função da área. As dimensões podem ser os comprimentos dos lados ou outros elementos como diagonais de quadrados, hipotenusas de triângulos retângulos, bases ou alturas de triângulos quaisquer. As relações métricas no triângulo retângulo colocam em foco o campo conceitual da geometria. Uma das idéias importantes relacionadas ao cálculo aritmético é a determinação de quanto uma medida cabe dentro da outra.

2) E a segunda idéia refere-se ao **uso implícito da fórmula:**

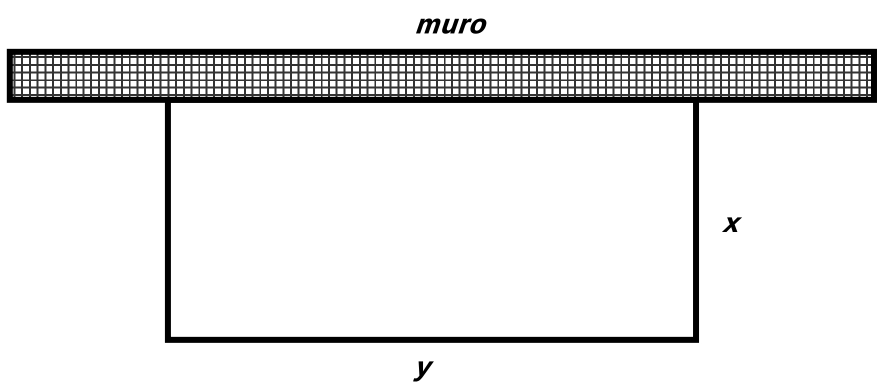
Neste tipo de problema, a utilização de uma expressão algébrica ou da regra de uma função pressupõe a leitura e interpretação da figura, compreensão de condições impostas, escrita algébrica e resolução de inequações ou sistemas de equações, com determinação de valores possíveis, não necessariamente um valor único.

A seguir apresentamos estas questões:

4.1. Questão 4 do Teste 1 (Q4 –T1):

Esta questão chamaremos **“***Metros de Tela*”, e caracteriza-se por ser um problema de otimização. Coloca em jogo as seguintes variáveis e seus respectivos valores: uso da fórmula para otimizar; o tipo da figura é o retângulo; há presença da figura no enunciado; o contexto é social, relacionado à jardinagem; o domínio numérico dos dados e dos resultados é o dos números naturais; a unidade de comprimento é o metro

Dona Rosa adora flores e deseja fazer um canteiro retangular aproveitando um muro existente em seu terreno. Ela ainda não sabe quais serão as dimensões do canteiro, mas quer aproveitar todos os 20 metros de tela que tem para cercá-lo.



Dona Rosa quer que o canteiro tenha a maior área possível usando os 20 metros de tela. Qual será essa área? Quanto medirão o comprimento e a largura nesse caso?

Neste problema o aluno é confrontado com uma situação em que figuras com perímetros iguais apresentam áreas distintas.

Nesta questão o conhecimento matemático é mobilizado numa situação de jardinagem, a primeira observação vai no sentido da própria solicitação dos problemas: com ***metros de tela*** cercar uma região retangular. A tela é um objeto do mundo real, possui duas dimensões: comprimento e largura, portanto, possui área, no entanto solicita-se que o aluno utilize-a apenas na perspectiva linear, ou seja, como comprimento. Ao canteiro é atribuído o modelo matemático do retângulo. A figura geométrica, neste caso, modeliza o que necessariamente pode não ser retangular e ainda por cima todas as dimensões indicadas implícita ou explicitamente são inteiras.

A principal solicitação do problema é distribuir os 20 metros de tela em 3 partes, sendo 2 iguais e uma diferente, isto porque, a figura é um retângulo, mas os 20 metros de tela formam uma linha poligonal aberta. Uma das propriedades do retângulo refere-se à medida dos lados paralelos serem iguais.

O domínio estritamente natural para as medidas apresentadas no problema favorece o procedimento numérico, ou seja, ir desenhando retângulos, fazendo tentativas até achar o retângulo de maior área, o que é facilitado pelo fato do número 20 possuir muitos divisores.

Utiliza o conceito de variável. Explorando a idéia que o **x** e o **y** variam dentro de um certo domínio. Vários tipos de representações podem ser utilizados: tabela, gráfico, expressão algébrica, a relação estabelecida é linear.

Um procedimento correto, nesta questão, consiste em representar simbolicamente a relação entre os 20 metros de tela e as dimensões que precisa cercar: $2x + y = 20$, a partir desta expressão deduzir o valor de **y**: $y = 20 - 2x$. Como a área do retângulo é dada pelo produto dos comprimentos dos lados: $x.y$ temos então:

$$A = x.(20 - 2x)$$
$$A = 20x - 2x^2$$

Esta expressão representa uma função do 2º grau com **a** < **0.** Assim, para calcular a área máxima basta calcular a abscissa do ponto máximo **(X_v)** e substituir na expressão anterior:

$$x_v = \frac{-20}{2.(-2)} = 5$$
$$A = 20.5 - 2.5^2$$
$$A = 100 - 50$$
$$A = 50m^2$$

O que levará a concluir que o comprimento e a largura do retângulo serão respectivamente 10 m e 5 m.

Este procedimento envolve o que Germi (1997) chamou de fórmula de base e fórmula algébrica.

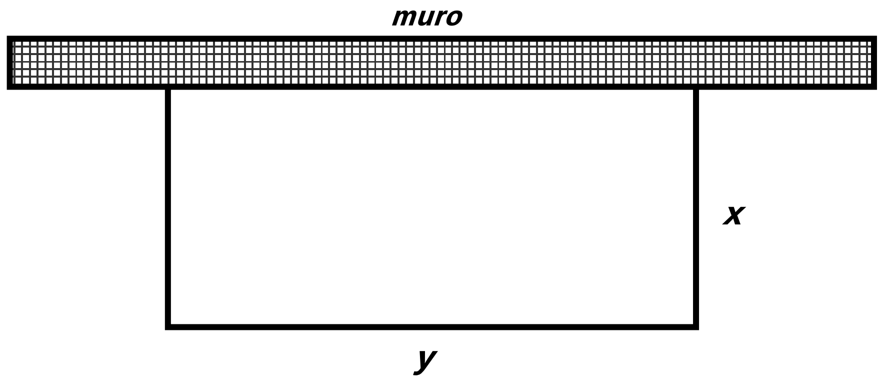
4.4. Questão 4 do Teste 4, (Q4 – T4):

Este outro problema de otimização constitui-se uma versão do problema anterior que coloca em jogo outras variáveis. Neste problema buscamos indicar, através dos itens que precisa responder, os passos para que o aluno calcule a área máxima produzida a partir de um perímetro fixo. Mobilizamos várias representações simbólicas: a representação funcional, ou seja, exprimir uma grandeza geométrica em função de outra, que envolve uma distinção entre o que Germi (1997) chama de fórmula de base e fórmula algébrica.

Nossos estudos preliminares indicaram que nos problemas de otimização, fórmula de base é a fórmula que expressa a relação entre os comprimentos dos lados e a área do retângulo; fórmula algébrica seria a fórmula de base com os elementos substituídos pelas variáveis. Numa situação de otimização intervém o caráter de ‘variável” de A (área), as letras envolvidas evoluem passando de um status de número desconhecido fixado (incógnita) para o status de número desconhecido, mas que varia em função dos elementos da figura (GERMI, 1997).

Por outro lado, a utilização de tabelas e gráficos, obriga a considerar as letras como números desconhecidos que não são fixos (GERMI, 1997). Assim, um dos objetivos nesta questão, que interessa a nossa pesquisa sobre imbricações, é identificar se o aluno compreende a letra como variável.

Dona Rosa adora flores e deseja fazer um canteiro retangular aproveitando um muro existente em seu terreno, como indica a figura abaixo. As dimensões do canteiro podem variar, desde que os 20 metros de tela que possui sejam utilizados.



a) Expresse y em função de x.

b) Determine a área A desse canteiro em função de x.

c) Complete a tabela abaixo com alguns valores possíveis de x, de y e de A.

x												
y												
A												

d) Dona Rosa quer que o canteiro tenha a maior área possível usando os 20 metros de tela. Qual será essa área? Quanto medirão x e y, nesse caso.

No **item a** o aluno precisa expressar y em função de x, ou seja, escrever uma relação funcional que envolve, entre outros aspectos, no campo das grandezas a mobilização do conceito de área e perímetro, no campo algébrico a escrita de uma expressão algébrica.

Dentre as dificuldades que podem surgir nesta etapa, na leitura e interpretação da figura, destacamos:

- No retângulo, os lados paralelos são iguais, assim, ao distribuir os 20 metros o aluno precisa mobilizar este conhecimento geométrico e ao mesmo tempo escrever simbolicamente a relação que corresponde a distribuir de forma correta os 20 metros, sendo 2 iguais e um que corresponda aos 20 metros menos as duas partes iguais que foram retiradas. Ao mesmo tempo em que precisa considerar a possibilidade de figuras de mesmo perímetro poderem ter áreas diferentes.

Para determinar a área **A** desse canteiro em função de x, **no item b**, o aluno precisa mobilizar conhecimentos relativos à fórmula da área do retângulo (b x h); relacionar base e altura comprimento e largura do retângulo. Neste momento pode haver dificuldades relacionadas à identificação da base e da altura, o aluno pode não compreender que qualquer lado do retângulo pode ser base ou altura. Gera então a expressão: **A= xy.** Como a área deve ser calculada em função de x, o aluno precisa substituir o valor de y pelo resultado obtido quando calculou o comprimento de y em função de x:

$$A = b \cdot h$$
$$A = x \cdot y$$
$$A = x(24 - 2x)$$
$$A = 24x - 2x^2$$

Neste processo podem intervir dificuldades relacionadas à aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração.

Completar a tabela com alguns valores possíveis de x e de y, no **item c**, envolve entre outras coisas, romper com o domínio estritamente natural, já que propomos mais espaços a preencher do que as alternativas inteiras possíveis para a questão.

A organização deste tipo de representação simbólica envolve substituir o x por um valor numérico e efetuar cálculos. Algumas questões intervêm neste momento: que tipo de valor numérico pode ser escolhido? Apenas natural? E os racionais positivos? Escolhido o domínio numérico, que valores são possíveis para o x? e para o y? A expressão geral é: $y = ax^2 + bx$, sendo a< 0. Neste caso algumas dificuldades relacionadas às operações com números inteiros negativos podem interferir.

Finalmente, **no item d**, o aluno é solicitado a identificar os valores de x e y para que o canteiro tenha a maior área possível.

Um dos procedimentos possíveis para determinar o canteiro de maior área por tentativas, consiste em desenhar retângulos com as várias possibilidades de distribuição dos metros de tela.

Quando fixamos um perímetro e queremos calcular a maior área possível do retângulo construído com este perímetro, utilizamos a idéia de máximos e mínimos de uma função ou mobilizamos um conhecimento do campo geométrico referente à propriedade que fixando um perímetro o retângulo de maior área possível é um quadrado.

4.2. Questão 4 do Teste 2 (Q4 –T2):

Baseada numa questão extraída de um livro didático[29] coloca em jogo as seguintes variáveis e seus respectivos valores: uso da fórmula para otimizar; tipo de figura – retângulo; figura ausente do enunciado; domínio numérico do dado é natural, mas o resultado é decimal.

Uma região retangular tem perímetro igual a 30 m. Quais devem ser as dimensões do retângulo para que a área seja máxima?

Possui um aspecto importante, que inclui conhecimentos dos vários campos conceituais: "*dado um perímetro fixo, o retângulo de maior área construído com este perímetro é um quadrado*". É necessário que o aluno caracterize geometricamente as figuras geométricas: retângulo e quadrado. Se o aluno dominar esta propriedade, pode ir diretamente à resposta da questão dividindo 30 em 4 partes iguais, já que o perímetro do quadrado corresponde à soma dos comprimentos dos quatro lados e os lados do quadrado são congruentes.

Neste problema, outro procedimento possível é a elaboração de uma tabela atribuindo valores numéricos às dimensões do retângulo e o respectivo cálculo da área. Neste procedimento, embora aparentemente estritamente numérico, o aluno precisa mobilizar conhecimentos relativos ao conceito de área e perímetro, ou seja, é necessário compreender que a soma das medidas dos quatro lados do retângulo é 30m, portanto o aluno precisa distribuir estes 30 m em partes iguais duas a duas, o que mobiliza um aspecto geométrico relacionado à propriedade do retângulo e também numérico, haja visto que, a divisão de 30 em partes iguais duas a duas resulta em um número racional provavelmente expresso de forma decimal. Feito isto, precisa mobilizar a fórmula da área do retângulo. A atribuição dos valores às variáveis também pressupõe a análise do domínio e do contradomínio da função área.

---

[29] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática* (Ensino Médio). 1ª Edição. São Paulo: Ática, 2004. Volume 1, pág. 143.

comprimento	largura	Área
1	14	14
2	13	26
......	....	.....
7,5	7,5	56,25
....	......	....
14	1	14

Uma estratégia algébrica também é prevista. O aluno escreve simbolicamente a relação entre o perímetro dado e os lados do retângulo, tendo para isto que mobilizar conhecimento referente aos campos conceituais da geometria e das grandezas: os retângulos têm lados paralelos iguais dois a dois e a área pode ser calculada multiplicando a base pela altura:

$$2x + 2y = 30m$$

$$y = \frac{30 - 2x}{2}$$

$$y = 15 - x$$

Se a área é o produto de x por y, então:

$$A = x.(15 - x)$$

$$A = 15x - x^2$$

Aplicando conhecimentos do campo funcional, calcula-se o ponto máximo da função do segundo grau que está representada pela área do retângulo:

$$X_v = \frac{-15}{-2}$$

$$X_v = 7,5$$

Então o retângulo terá as dimensões 7,5 cm em todos os lados.

Neste procedimento podem intervir dificuldades relacionadas ao campo conceitual da álgebra: erro de modelização, de manipulação simbólica e de interpretação dos resultados. Como também erros relacionados ao campo numérico.

4.3) Questão 4 do Teste 3 (Q4 –T3):

Extraída de um livro didático, é um dos *"problemas de molduras*". As variáveis e seus respectivos valores são: uso da fórmula para operar com grandezas de mesma natureza. O tipo de figura é o retângulo; a figura está ausente no enunciado, o que provavelmente demandará a utilização da representação simbólica "figura do retângulo". O domínio numérico dados e do resultado é natural.

Um papel de carta retangular tem dimensões 20 cm x 26 cm e uma margem interna desenhada em toda a volta de 2 cm de largura. Qual é a área do papel disponível para a escrita?

PIRES, Célia Carolino, CURI, Edda e PIETROPAOLO, Ruy. Educação Matemática. 1ª Edição. São Paulo: Atual, 2002. 7ª série, pág. 120

Esta questão requer a compreensão e a mobilização da fórmula da área do retângulo. A resolução mais geral, mais econômica é a algébrica, mas pode-se esperar que alguns alunos mobilizem procedimentos numéricos.

Um dos aspectos importantes é a interpretação do problema: a área disponível **(A_d)** é igual à diferença entre área total **(A_t)** e a área da margem **(A_m)**. Sendo assim é preciso mobilizar a escrita da fórmula da área total (20 x 26) e da área da margem, que é constituída por 4 quadradinhos de lados 2; 2 retângulos de lado 2 x (20 – 4) e 2 retângulos de 2 x (26 – 4). São fórmulas básicas, mas que para serem escritas necessitam da compreensão de propriedades da figura. Uma das resoluções corretas possíveis consiste em efetuar as seguintes operações:

$$A_d = A_t - A_m$$
$$A_d = (20x26) - [4x(2x2) + 2x(2x16) + 2x(2x22)]$$
$$A_d = 520 - 168$$
$$A_d = 352cm^2$$

Assim, nesta questão, estão imbricados o campo conceitual das grandezas, o campo geométrico, o algébrico e o numérico.

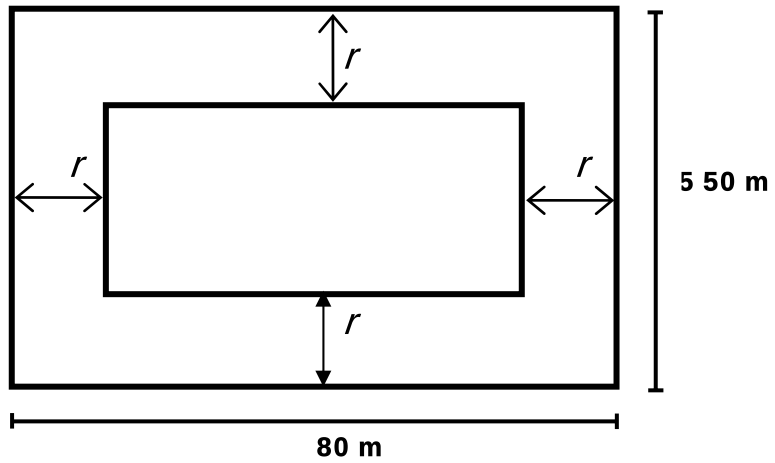
Os erros esperados nesta questão referem-se principalmente à interpretação errônea do enunciado conduzindo à modelagem da questão. O aluno pode, por exemplo, associar a margem à apenas um dos lados do papel.

4.5) Questão 4 do Teste 5 (Q4 –T5):

Outro dos problemas envolvendo operações entre grandezas. Possui figura e foi baseado numa questão proposta no **Vestibular UFPE/UFRPE 2004, M3, F2.**

As variáveis e seus respectivos valores são: uso da fórmula para operar com grandezas de mesma natureza; o tipo de figura é o retângulo; há presença da figura no enunciado. O domínio numérico dos dados é natural e dos resultados decimal. O contexto é do cotidiano, relacionado à construção civil.

Num terreno retangular, medindo 80 m x 50 m, deseja-se construir um galpão retangular, de forma que cada um de seus lados seja paralelo a dois lados do terreno, como ilustrado na figura abaixo. Se a área do galpão deve ser 1375 m², de quantos metros deve ser o recuo r?



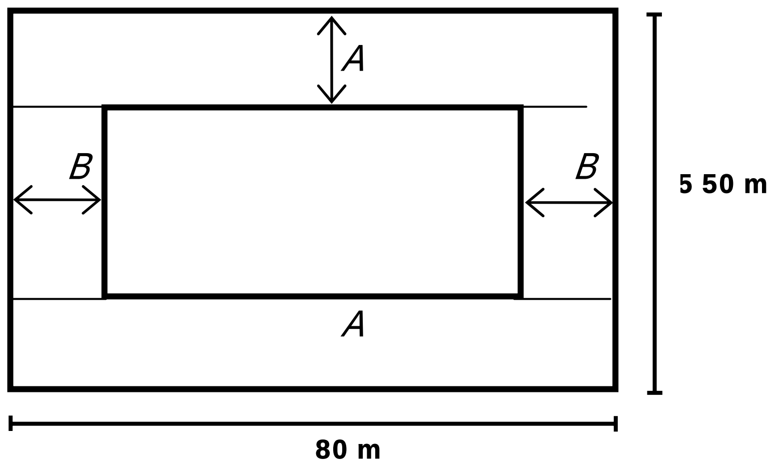
Com relação aos campos conceituais envolvidos neste problema, destacamos:

No campo geométrico, além da figura geométrica retangular, destacamos o conceito de paralelismo. Para que o aluno represente o galpão corretamente no interior do terreno é preciso que ele compreenda que o contorno do galpão deve estar sempre a mesma distância do muro do terreno, ou seja, ser paralelo significa estar a mesma distância.

No campo das grandezas, o conceito de área, podendo ser estabelecidas duas relações entre as áreas do terreno e do galpão:

a) decompondo a parte do terreno que após a construção do galpão, em retângulos menores, teríamos: dois retângulos de área A = 80 . r; dois retângulos de área B = (50 – 2 r) r. A relação pode ser a seguinte: a área dos retângulos menores mais a área do galpão é igual à área total. Simbolicamente:

2A + 2B + 1375 = 80 x 50 ou A + A + B + B + 1375 = 80 x 50



E a outra seria: área total menos área galpão é igual a soma das áreas menores, o que implica na aplicação da operação inversa da primeira relação.

(80 x 50) – 1375 = A + B + B + A

Em ambos os casos, a manipulação simbólica subjacente a resolução da equação do 2º grau que resulta da expressão, subtende várias dificuldades conceituais relacionadas ao campo conceitual da álgebra, por exemplo: a passagem da linguagem natural (que no problema contém a compreensão do conceito de área e aplicação de relações entre as dimensões da figura produzindo uma regra que dá a fórmula da área) para linguagem simbólica (DA ROCHA FALCÃO, 1997), aplicação da propriedade distributiva, redução de termos semelhantes, a própria resolução da equação e, finalmente, a retomada do sentido, haja visto que serão encontrados dois valores positivos para o *recuo (r):*

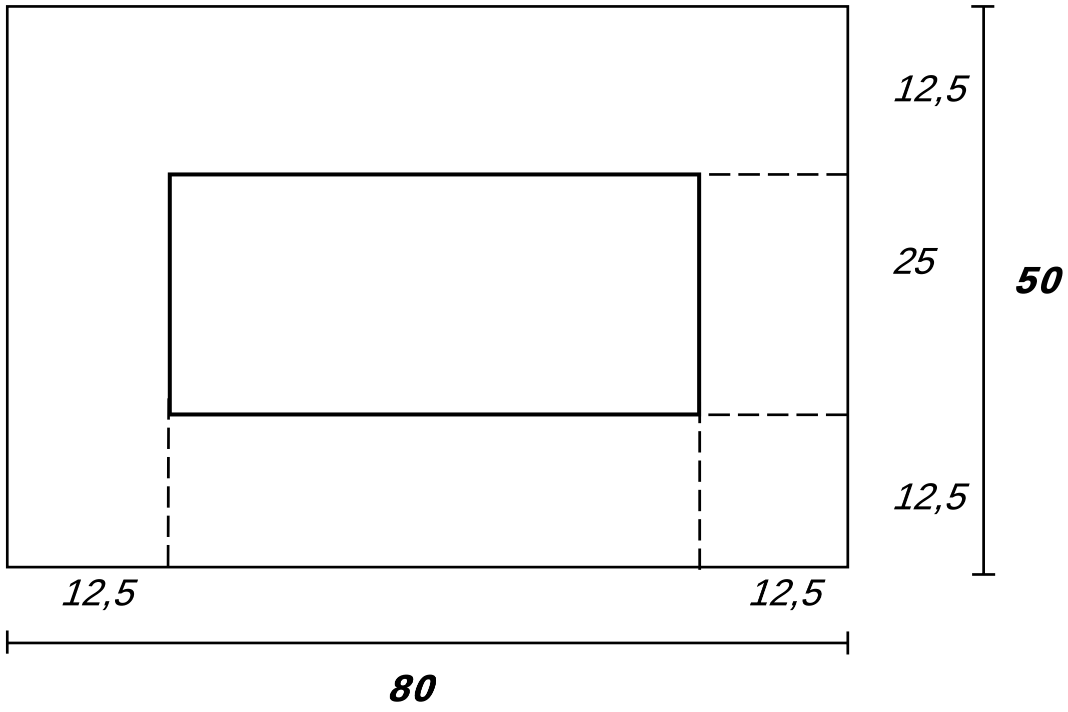
$$A + A + B + B + 1375 = 80x50$$
$$80r + 80r + (50 - 2r)r + (50 - 2r)r + 1375 = 4000$$
$$160r + 2r(50 - 2r) = 2625$$
$$160r + 100r - 4r^2 = 2625$$
$$-4r^2 + 260r - 2625 = 0$$
$$r = \frac{-260 \pm \sqrt{67600 - 42000}}{8}$$
$$r = \frac{-260 \pm 160}{-8}$$
$$r' = 12{,}5$$
$$r'' = 52{,}5$$

Na retomada do sentido o aluno precisa decidir se valor 52,5 serve ou não como resposta, pois é uma medida superior à dimensão de um dos lados, rompendo com as condições impostas no problema.

Um outro procedimento, além do algébrico, descrito acima, é o que chamaremos procedimento numérico e envolve tentativas numéricas: o aluno sabe que a área do galpão tem que ser 1 375 m^2. Procura um par de números inteiros cujo produto seja 1375, por exemplo, o par 275 x 5. Este par não pode ser por que os lados do terreno têm 80 m e 50 m, logo, o par de números deve estar compreendido entre 80 e 50, por tentativas:

Medida de comprimentos dos lados	Área em metros quadrados
70 e 30	2100 > 1375
60 e 20	1200 < 1375
50 e 10	500 < 1375
50 e 15	750 < 1375
50 e 25	1250 < 1375
55 e 25	1375 = 1375 **OK!**

Encontradas as dimensões para o galpão, o aluno encaixar os resultados de modo que a distância para a fronteira do terreno sejam iguais, mobiliza outro procedimento numérico que consiste em subtrair 25 e 55 de cada uma das dimensões do terreno e dividir o resultado por 2.



6.4 COMPOSIÇÃO DE CADA TESTE

A composição dos testes seguiu alguns critérios:

- Em todos os testes todas as variáveis com valores variados foram contempladas;
- Nível crescente de imbricações entre os campos na seqüência da apresentação das questões;

Não tínhamos a pretensão de fazer comparações teste a teste ou aluno a aluno, mas buscamos no conjunto dos testes mapear elementos que possibilitarão a identificação de invariantes operatórios e representações simbólicas subjacentes à resolução de situações envolvendo fórmulas de área de retângulos, quadrados, paralelogramos e triângulos, tomando como foco imbricações entre campos conceituais.

Assim, os testes compreenderam a seguinte estrutura:

QUADRO 6.2. PERFIL DO TESTE DIAGNÓSTICO

	Questão 1	**Questão 2**	**Questão 3**	**Questão 4**
Teste 1	Fórmula para calcular área e perímetro de retângulo, paralelogramo e triângulo "em condições ideais". Presença da figura em posição prototípica. Medidas dos comprimentos indicados na figura em cm; Dados numéricos suficientes. Operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com números naturais; Domínio numérico dos dados e dos resultados natural; Papel branco; contexto intramatemático; questão típica; Imbricação entre o campo das grandezas, geométrico, algébrico e numérico.	Fórmula para calcular área e perímetro; Retângulo Ausência da figura, Medida dos comprimentos apresentados no enunciado em cm Operação com números racionais em forma de decimal. Papel branco Imbricação entre os campos das grandezas, geométrico e numérico.	Fórmula para comparar Triângulo Presença da figura; Posição prototípica; Ausência de dados numéricos; Papel branco Imbricações entre os campos conceituais das grandezas, da geometria, da álgebra e numérico.	Fórmula para otimizar Retângulo Metros de tela (apenas um item) Imbricações entre todos os campos conceituais.

Teste 2	Fórmula para calcular "em condições ideais"	Fórmula para calcular; Calcular área do quadrado em função do perímetro Ausência da figura, Operação com números racionais em forma de decimal Imbricações entre o campo das grandezas, da geometria, numérico e algébrico.	Fórmula para calcular e comparar áreas quadrado e triângulo presença de figuras; dados de natureza algébrica e numérica operações envolvendo manipulação simbólica Imbricação entre o campo das grandezas, geométrico e algébrico.	Fórmula para otimizar (questão de otimização) Retângulo Ausência da figura Domínio numérico dos dados natural e do resultado decimal Resolução de expressões algébricas Imbricações entre todos os campos conceituais.
Teste 3	Fórmula para calcular "em condições ideais"	Fórmula para calcular área; Paralelogramo Presença da figura; Posição prototípica; Domínio numérico dos dados e dos resultados racional; Contexto intramatemático Medidas decimais Uso de instrumento de medida; operação com números racionais em forma de decimal; Imbricação entre o campo das grandezas, geométrico e numérico.	Fórmula para calcular as dimensões do retângulo em função do perímetro e da área; Ausência de figura Domínio numérico dos dados e dos resultados natural; Unidade de medida – para comprimento cm e para área cm^2 Imbricação entre o campo das grandezas, geométrico, numérico e algébrico.	Operações entre grandezas (Questão de moldura) Retângulo e quadrado Ausência de figuras Domínio dos dados e do resultado natural; Imbricação entre o campo das grandezas, da geometria, da álgebra e numérico.

Teste 4	Fórmula para calcular "em condições ideais"	Fórmula para comparar e produzir figuras em condições dadas Área do triângulo dada em cm^2 Ausência da figura malha quadriculada contexto intramatemático; questão atípica. Imbricação entre o campo das grandezas e geométrico	Fórmula para estabelecer relações entre grandezas e operar com grandezas de mesma natureza retângulo ausência de figura domínio dos dados e dos resultados natural Operações com letras – resolução de sistema de equações Imbricação entre o campo das grandezas, geométrico, algébrico, numérico e funcional.	Fórmula para otimizar Questão de otimização Retângulo Domínio numérico dos dados e do resultado natural Natureza dos dados - letras assumindo o papel de varáveis Contexto das práticas sociais Imbricação entre todos os campos conceituais
Teste 5	Fórmula para calcular "em condições ideais"	Fórmula para calcular área; paralelogramo ausência de figura domínio numérico dos dados e do resultado natural; unidade de comprimento – cm; operações – multiplicação de números naturais; papel branco. Imbricação entre o campo das grandezas, geométrico, numérico e algébrico.	Fórmula para comparar Retângulo e quadrado Presença de figuras Posição prototípica Operações com letras assumindo o papel de variáveis imbricações entre os campos conceituais das grandezas, da geometria, da álgebra e numérico.	Fórmula para operar com grandezas (Questão de moldura) Presença da figura Domínio numérico dos dados natural e dos dados racional Imbricação entre o campo das grandezas, geométrico, numérico e algébrico.

CAPÍTULO 7
CONDIÇÕES DE APLICAÇÃO DO TESTE/ANÁLISE QUANTITATIVA

Após um minucioso estudo teórico e empírico sob o ponto de vista da Teoria dos Campos Conceituais, elaboramos e analisamos a priori os testes diagnósticos descritos no capítulo anterior.

Foram aplicados 259 testes para alunos do 2º ano do Ensino Médio de 5 escolas da Região Metropolitana de Recife – PE, contemplando três redes de ensino: pública estadual, pública federal e privada. Foram escolhidas em contextos diferentes para subsidiar o mapeamento dos invariantes e representações simbólicas identificadas nos procedimentos dos alunos.

Das 5 escolas, 2 são de rede pública federal, uma de rede pública estadual, uma de rede privada e uma de convênio público-privado. Quanto à localização: duas se situam no Centro da cidade de Recife, duas em bairros de classe média do Recife e uma na região metropolitana do Recife. Duas escolas adotam o livro Gelson Iezzi, et al. Matemática e Aplicações. São Paulo: Editora Atual, 2004. As outras três adotam respectivamente: SMOLE, Kátia Stocco e DINIZ, Maria Ignez. Matemática - Ensino Médio. 3ª Edição Reformulada. São Paulo: Editora Saraiva, 2003; Matemática aula por aula de Benigno Barreto Filho, Cláudio Xavier da Silva, FTD Edição 2003 e DANTE, Luiz Roberto. Matemática (ENSINO MÉDIO). 1ª edição. São Paulo: Ática, 2004.

Com relação à quantidade de alunos por sala de aula, três delas têm mais de 40 alunos e em duas no máximo 30 alunos por sala. Em duas delas os alunos ingressam por seleção através de provas e em uma delas é feita a seleção das melhores notas obtidas na 8ª série em escolas da rede pública, como também residência próxima à escola. Em duas delas os alunos têm atividades nos dois turnos e os professores têm dedicação exclusiva. As outras duas não fazem seleção. Com relação à titulação dos professores responsáveis pelas turmas que se submeteram ao teste, 1 deles é especialista; 3 são mestres em Educação.

O teste foi aplicado individualmente, sem consulta e com a presença da pesquisadora em sala. Os alunos tiveram à sua disposição réguas graduadas. Vale destacar que as visitas da pesquisadora às escolas foram praticamente de surpresa. Em cada escola, uma ou duas turmas eram submetidas ao teste. Numa mesma turma havia a distribuição aleatória dos 5 tipos de teste, buscando uma equivalência entre as quantidades de teste de cada tipo por turma. Apesar disto, a própria dinâmica da aplicação impôs uma pequena discrepância na quantidade de cada teste por escola. Mesmo explicando nosso propósito como pesquisador, nos comprometendo a não divulgar nome de alunos, professor ou escola, em alguns casos houve resistência por parte de alguns alunos que diziam não saber o que é *"área e perímetro"*, por isso não podiam responder o teste.

A tabela abaixo apresenta uma visão geral do número de testes por escolas e alunos que responderam cada tipo de teste em determinada escola:

TABELA 7. 1: Visão geral dos testes aplicados

	ESCOLA 1	ESCOLA 2	ESCOLA 3	ESCOLA 4	ESCOLA 5	**QUANTIDADE TOTAL DE TESTES DE CADA TIPO**
TESTE 1	8	14	11	9	7	49
TESTE 2	11	14	11	10	8	54
TESTE 3	11	9	10	8	8	46
TESTE 4	11	21	10	10	8	60
TESTE 5	10	14	7	10	9	50
TOTAL DE TESTES APLICADOS POR ESCOLA	51	72	49	47	40	**259**

A opção pelo 2º ano do Ensino Médio foi conseqüência das análises de livros didáticos. De acordo com estas análises, nesta série os alunos já devem ter sido confrontados com os vários de situações que envolvem as fórmulas de área de figuras geométricas planas que focamos neste trabalho.

A organização da análise foi feita por testes e questões, sem estabelecer nenhuma comparação entre escolas, pois nos interessamos pelos procedimentos que os alunos mobilizam nas situações propostas. Os protocolos que ilustram a análise foram organizados pelo número da questão **(Q_n)**, tipo de testes **(T_n)**, e código do aluno e escola **(A_n)**, assim, o código **$Q_3T_2D_5$**, significa que o extrato do protocolo pertence à questão 3, do teste 2 respondido pelo aluno D da escola 5.

A análise quantitativa dos resultados obtidos no teste apontou aspectos importantes à nossa problemática. Ao mesmo tempo em que confirma aspectos já identificados na revisão de literatura, abre vários questionamentos, para os quais buscaremos respostas na análise qualitativa dos dados.

O resultado geral da **questão 1**, entre outros aspectos, evidenciou maior familiaridade dos alunos com o cálculo da área do retângulo e do triângulo, como pode ser visto, ao compararmos o percentual de acertos e abstenções entre as figuras. Também evidenciou dificuldades relacionadas às unidades de medida, haja vista, o percentual de acertos parciais.

RESULTADO GERAL DA QUESTÃO 1

Legenda:

C – resposta totalmente correta, inclusive com unidades de medida.

Cp – resposta parcialmente correta, ou seja, valor numérico correto e unidade de medida incorreta ou ausente.

E – resposta totalmente incorreta.

B – ausência de resposta, ou seja, questão em branco.

TABELA 7. 2: Q1 - ÁREA E PERÍMETRO DO RETÂNGULO

RETÂNGULO								
	ÁREA				PERÍMETRO			
	C	Cp	E	B	C	Cp	E	B
Total absoluto	130	98	15	16	154	53	26	26
Percentual	50,2%	37,8%	5,8%	6,2%	59,5%	20,5%	10,0%	10,0%

TABELA 7. 3: Q1 - ÁREA E PERÍMETRO DO PARALELOGRAMO

PARALELOGRAMO								
	ÁREA				PERÍMETRO			
	C	Cp	E	B	C	Cp	E	B
Total absoluto	71	36	107	45	118	36	54	51
Percentual	27,4%	13,9%	41,3%	17,4%	45,6%	13,9%	20,8%	19,7%

TABELA 7.4: Q1 - ÁREA E PERÍMETRO DO TRIÂNGULO

TRIÂNGULO								
	ÁREA				PERÍMETRO			
	C	Cp	E	B	C	Cp	E	B
Total absoluto	115	32	53	59	126	39	38	56
Percentual	44,4%	12,6%	20,5%	22,8%	48,6%	15,1%	14,7%	21,6%

A partir da leitura dos dados acima algumas questões podem ser formuladas: o que justifica a familiaridade dos alunos com a fórmula de área do retângulo ou do triângulo em detrimento ao paralelogramo? Será que em outras questões que envolvem a fórmula da área do retângulo os alunos também acertam? Em caso negativo, que características da situação podem influenciar nos procedimentos dos alunos?

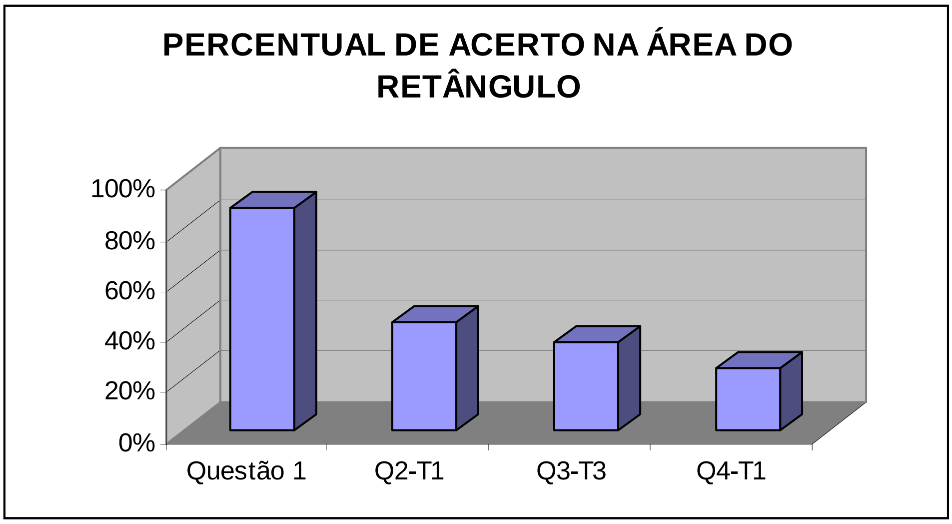
Por outro lado, a comparação do percentual de acertos no cálculo da área do retângulo na questão 1 (50,2% + 37,8% = 88%), com o percentual de acertos em outras questões que também envolviam a área do retângulo, mas em outras condições, será que a ausência da figura na Questão 2 do Teste 1 (42,9% de acerto e 24,5% de ausência de resposta), influencia no processo de resolução dos alunos? Será que a Questão 3 do Teste 3, com apenas 34, 8% de acerto e 47,8% de ausência de resposta, evidência dificuldade em “desmontar as fórmulas”? ou seja, será que estes números representam uma construção não significativa do conceito de fórmula?. Que indicativos podemos tirar dos 24,5% de acertos e 40,8% de abstenções na Questão 4 do Teste 1, que envolve a fórmula para otimizar? Será que ressaltam níveis crescentes de dificuldades relacionadas às situações envolvendo fórmulas de área?

A tabela e o gráfico abaixo ilustram nossas conjecturas:

TABELA 7.5. PERCENTUAL DE ACERTOS NO CÁLCULO DA ÁREA DO RETÂNGULO

QUESTÃO	CARACTERIZAÇÃO DA QUESTÃO	% DE ACERTO	IMBRICAÇÕES ENTRE CAMPOS CONCEITUAIS
QUESTÃO 1	Condições ideais	88%	Imbricação entre os campos das grandezas, geométrico e numérico.
Q2-T1	Fórmula para calcular área e perímetro do retângulo Ausência da figura, Medida dos comprimentos apresentados no enunciado em cm Operação com números racionais em forma de decimal.	42,9%	Imbricação entre os campos das grandezas, geométrico e numérico.
Q3-T3	Fórmula para calcular as dimensões do retângulo em função do perímetro e da área; Ausência de figura Domínio numérico dos dados e dos resultados natural; Unidade de medida – para comprimento cm e para área cm^2	34,8%	Imbricação entre o campo das grandezas, geométrico, numérico e algébrico.
Q4-T1	Fórmula para otimizar Retângulo Metros de tela (apenas um item)	24,5%	Imbricações entre todos os campos conceituais

GRÁFICO 7.1. COMPARAÇÃO DO PERCENTUAL DE ACERTOS NO CÁLCULO DA ÁREA DO RETÂNGULO



Esta análise quantitativa suscita também questões relacionadas às fórmulas errôneas e "criativas" que os alunos mobilizam para a área das figuras em foco. Que procedimentos conduzem ao acerto? Que conhecimentos dos vários campos conceituais são mobilizados nos procedimentos que conduzem ao acerto ou ao erro?

A análise quantitativa também evidenciou um número elevado de ausência de resposta. Com exceção da Questão 1, o mínimo de ausência de resposta foi 18,52%, como podemos verificar na tabela geral a seguir:

TABELA 7.6. ACERTOS E ERROS QUESTÃO A QUESTÃO

QUESTÕES	ORIGEM	% DE ACERTO	% DE ERROS	% DE RESPOSTAS EM BRANCO
Q2-T1 A (area)	Questão construída para pesquisa, mas típica de livros didáticos para o ensino fundamental	42,86	16,33	24,49
Q2-T1 B (perímetro)	Construída especificamente para pesquisa a	42,86	18,37	32,65
Q2-T2	Baseada numa questão de livro didático para 7ª série	40,74	20,37	18,52
Q2-T3 A (indicação dos dados)	Extraída de pesquisas anteriores	36,96	36,96	26,09
Q2-T3 B (area)	Extraída de pesquisas anteriores	21,74	47,83	26,09
Q2-T4	Construída especificamente para pesquisa	35,00	26,67	28,33
Q2-T5 A (desenho)	Baseada numa questão de livro didático para 7ª série	36,00	30,00	34,00
Q2-T5B (area)	Baseada numa questão de livro didático para 7ª série	22,00	36,00	34,00
Q3-T1	Extraída de pesquisas anteriores	32,65	26,53	40,82
Q3-T2	Extraída de um livro didático para 8ª série	48,15	18,52	33,33
Q3-T3	Extraída de um livro didático para 8ª série	34,78	17,39	47,83
Q3-T4 A (expressão)	Baseada num livro didático do Ensino Médio (vol.1)	28,33	31,67	40,00
Q3-T4 B(valor de x)	Baseada num livro didático do Ensino Médio (vol.1)	26,67	31,67	41,67
Q3-T5	Baseada num livro didático do Ensino Médio (vol. 1)	56,00	16,00	28,00
Q4-T1 A (area)	Baseada em livros didáticos para 8ª série e 1ª série do Ensino Médio	24,49	34,69	40,82
Q4-T1 B (dimensões)	Baseada em livros didáticos para 8ª série e 1ª série do Ensino Médio	18,37	40,82	40,82
Q4-T2	Baseada num livro didático do ensino médio (vol. 1)	7,40	55,56	37,04
Q4-T3	Extraída de um livro didático da 7ª série	36,96	39,13	23,91
Q4-T4 A (expressão)	Baseada em livros didáticos para 8ª série e 1ª série do Ensino Médio	16,67	15,00	68,33
Q4-T4 B (Área em função de x)	Baseada em livros didáticos para 8ª série e 1ª série do Ensino Médio	21,67	13,33	65,00
Q4-T4 C (tabela)	Baseada em livros didáticos para 8ª série e 1ª série do Ensino Médio	10,00	20,00	70,00
Q4-T4 D (área máxima)	Baseada em livros didáticos para 8ª série e 1ª série do Ensino Médio	11,67	26,67	61,67
Q4-T5	Baseado em prova de vestibular	16,00	44,00	40,00

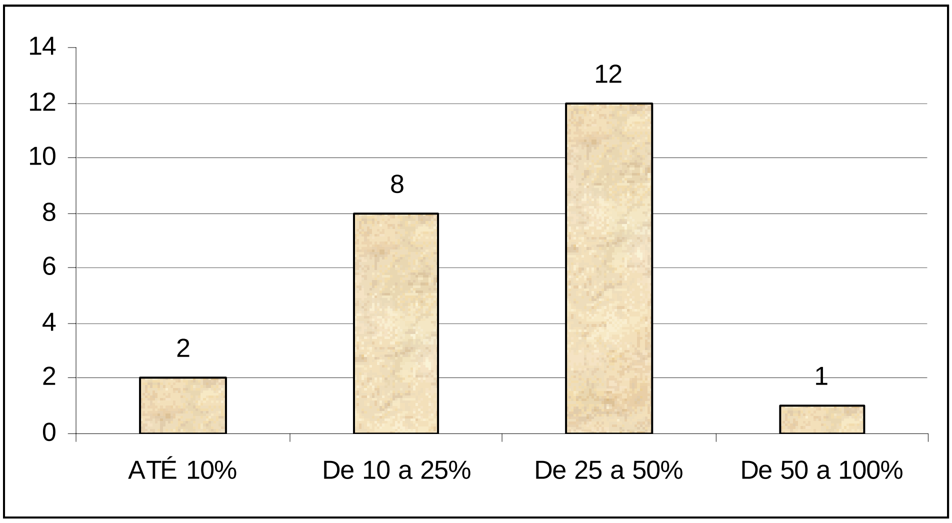
Novamente os dados quantitativos geram questões: o que justifica este percentual tão alto de ausência de resposta? A caráter típico ou atípico da questão caracterizado por sua origem? Ou a própria essência da questão, relacionada aos conhecimentos dos campos conceituais que intervêm nos processos de resolução ou nos processos de compreensão da situação?

Ao todo foram avaliados 23 itens além dos 6 específicos da 1ª questão. O cruzamento dos percentuais de acertos nestes itens reforça os questionamentos relativos à origem das questões.

TABELA 7.7. COMPARAÇÃO DOS PERCENTUAIS DE ACERTO POR QUESTÃO:

ÍNDICE DE ACERTOS	QUESTÕES
Até 10 %	Q4-T2 Q4 –T4 C
De 10 a 25 %	Q2-T3 B, Q2 –T5B, Q4-T1A, Q4-T1B, Q4-T4A, Q4-T4B, Q4-T4D, Q4-T5
De 25% a 50%	Q2-T1A, Q2-T1B, Q2-T2, Q2-T3A, Q2-T4, Q2 –T5A, Q3 -T1, Q3 –T2, Q3-T3, Q3 –T4A, Q3-T4B, Q4-T3
De 50% a 100%	Q3 – T5

GRÁFICO 7.2: PERCENTUAL DE ACERTOS POR ITENS ANALISADOS



As questões com maior percentual de ausência de respostas e de respostas erradas foram justamente aquelas que envolvem a fórmula para otimizar e como já dissemos na análise teórica apresentam maiores imbricações entre os campos conceituais. Que aspectos de cada campo intervieram nos procedimentos de resolução mobilizados pelos alunos?

Por outro lado, os dados quantitativos também mostram que a Questão 3 do Teste 5, obteve maior índice de acerto. Nesta questão a natureza dos dados é algébrica, ou seja, são letras que assumem o papel de variável, e a fórmula é utilizada para calcular e comparar, é uma questão que possui forte imbricação com o campo conceitual funcional. O que justifica então o alto índice de acerto nesta questão? Os resultados quantitativos sugerem a necessidade de analisar qualitativamente os procedimentos mobilizados pelos alunos para obter a resposta correta.

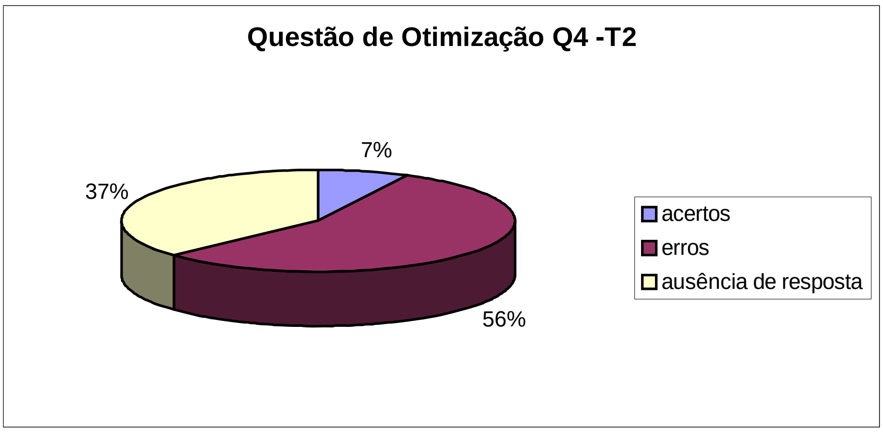
As questões Q4 –T2 e Q4 –T4 foram as que obtiveram menor índice de acerto. Que características tornam estas questões tão difíceis? O caráter típico ou atípico? O domínio numérico dos dados e dos resultados? A ausência ou presença das figuras? O maior ou menor grau de imbricações entre os campos conceituais?

Como dissemos na análise teórica a questão (T2 – Q4) **é** de otimização, sem figura: **"**Uma região retangular tem perímetro igual a 30 metros. Quais devem ser as dimensões do retângulo para que a área seja máxima?". Possui amplas imbricações entre campos conceituais, foi uma das que apresentaram maior grau de dificuldade, para os 54 alunos que responderam o Teste 2, como mostra a tabela abaixo:

TABELA 7.8. Acertos e Erros na Questão 4 do T32este 2:

	acertos	erro	Ausência de resposta
Nº de alunos	4	30	20

Gráfico 7.3. – Questão de Otimização Q4 –T2



Que procedimentos os alunos mobilizam para responder esta questão?

A partir destes e de outros questionamentos apresentamos nos dois próximos capítulos uma análise qualitativa dos dados coletados.

CAPÍTULO 8
ANÁLISE DE PROCEDIMENTOS CORRETOS E ERRÔNEOS RELACIONADOS A CADA CAMPO CONCEITUAL

Neste capítulo, com a pretensão de avançarmos na caracterização da fórmula como um conceito, identificamos invariantes operatórios e representações simbólicas mobilizadas pelos alunos na resolução das questões dos testes diagnósticos. Apontamos possíveis teoremas em ação relacionados a área e perímetro mobilizados pelos alunos nos procedimentos de resolução de questões. Também analisamos quais as fórmulas corretas ou errôneas foram mobilizadas para área das do retângulo, paralelogramo e triângulo. E finalmente, discutimos aspectos relacionados a cada um dos campos conceituais que intervêm nas questões dos testes diagnósticos.

8.1. INDÍCIOS DA CONFUSÃO ENTRE ÁREA E PERÍMETRO, NOS PROCEDIMENTOS DE RESOLUÇÃO DOS ALUNOS

A análise dos testes possibilitou a identificação de vários invariantes operatórios relacionados à área e ao perímetro. Um dos critérios que utilizamos para apontar um candidato a teorema em ação foi sua identificação em questões, testes e escolas diferentes.

Neste primeiro tópico, portanto, discutimos através de uma análise transversal em todos os testes e questões, noções dos alunos sobre área e perímetro, que apresentamos como os seguintes candidatos a teoremas em ação:

- A área de uma figura geométrica plana corresponde ao comprimento de um de seus lados ou ao comprimento de algum elemento da figura (uma altura, por exemplo);
- A área de uma figura geométrica plana é o produto de todos os comprimentos dos lados;
- A área de uma figura geométrica plana é o produto de todas as medidas que aparecem na figura.
- O perímetro de uma figura plana é dado pela área dividida por dois;

– O perímetro é a soma de todas as medidas que aparecem na figura (“é a soma dos dados”).

Além da identificação destes teoremas em ação falsos, a análise dos testes também confirmou estudos anteriores sobre a confusão entre área e perímetro. Foi possível identificar a confusão entre área e perímetro nas diversas situações envolvendo fórmulas de área de figuras geométricas planas usadas no teste diagnóstico. Tanto nas situações mais simples como nas mais complexas, seja com medidas inteiras ou decimais; com as figuras em posição prototípica ou não; com a presença ou com ausência da figura no enunciado.

8.1.2. “A área de uma figura geométrica plana corresponde ao comprimento de um dos seus lados ou ao comprimento de algum elemento da figura”

O invariante “a área de uma figura geométrica plana corresponde ao comprimento de um de seus lados ou ao comprimento de algum elemento da figura” (uma altura, por exemplo), corresponde a pensar a **área como o comprimento associado a um dos elementos da figura,** desta forma, o aluno não expressa compreensão do aspecto bilinear da área. Os extratos de protocolos abaixo, ilustram este indício em escolas diferentes e também em questões diferentes.

Fig. 8.1 - Prot. 1 – **Q2T2J$_4$** – Questão 2 do Teste 2, respondida pelo Aluno J da Escola 4.

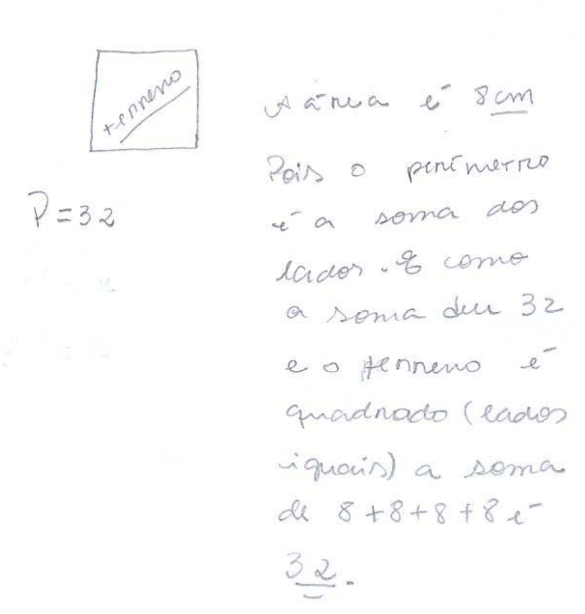
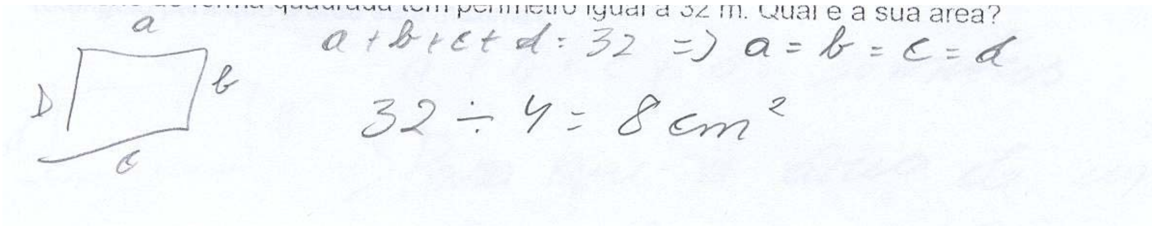


Fig. 8.2. Prot. 2. Q2T2K$_2$ – Questão 2 do Teste 2, respondida pelo Aluno K da Escola 2.



Nos dois protocolos abaixo, ilustram-se procedimentos de resolução de alunos que apresentam indícios de concepçõpes geométricas ou numéricas de área. Ao desenhar o triângulo o aluno sempre fixa um lado ou a altura de 6 cm em analogia à área 6cm². Além disso, o protocolo 3 indica que para o aluno mudando a posição muda a figura, pois quatro dos cinco triângulos traçados são idênticos, o que interpretamos como indício de concepção geométrica.

Fig. 8.3. Prot. 3 – Q2T4B$_3$ – Questão 2 do Teste 4, respondida pelo Aluno B da Escola 3.

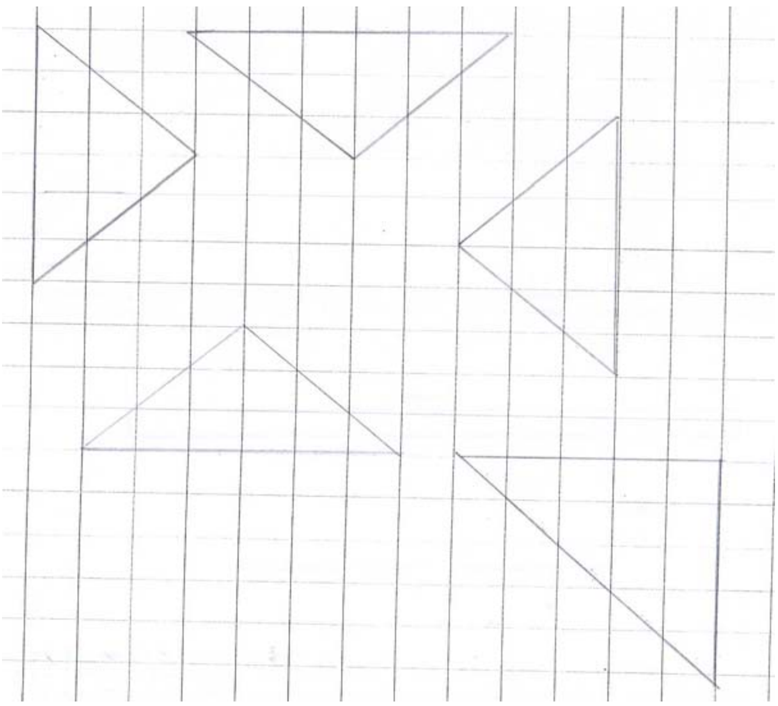
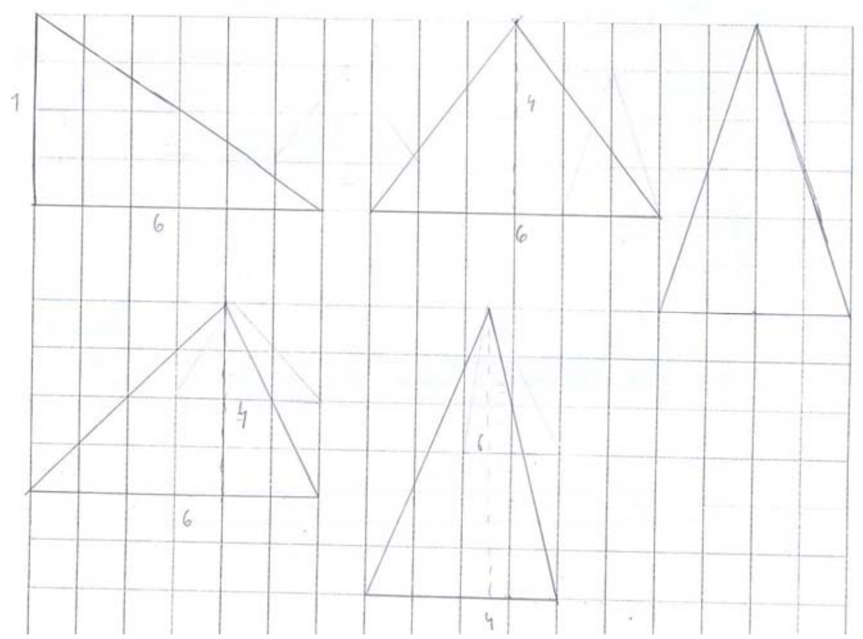


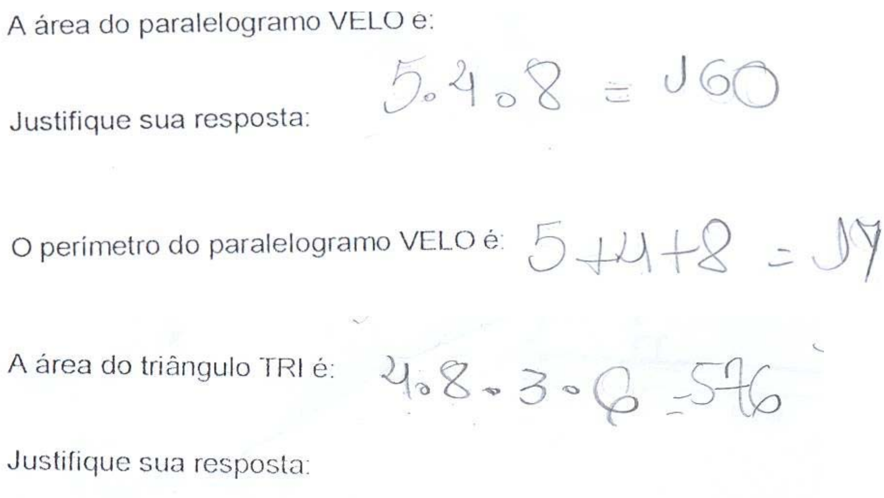
Fig.8.4 – Prot. 4 Q2T4E$_1$



8.1.3. “A área de uma figura geométrica plana é o produto de todas as medidas que aparecem na figura”

Identificamos nos procedimentos dos alunos indícios da mobilização do teorema em ação: a área de uma figura geométrica plana é o produto de todas as medidas que aparecem na figura”, confirmado pelo mesmo aluno na segunda questão. Neste teorema sugere uma concepção numérica.

Fig. 8.5. Prot. 6 - Q1 e Q2 T2E$_2$


A área do paralelogramo VELO é: 5.4.8 = 160

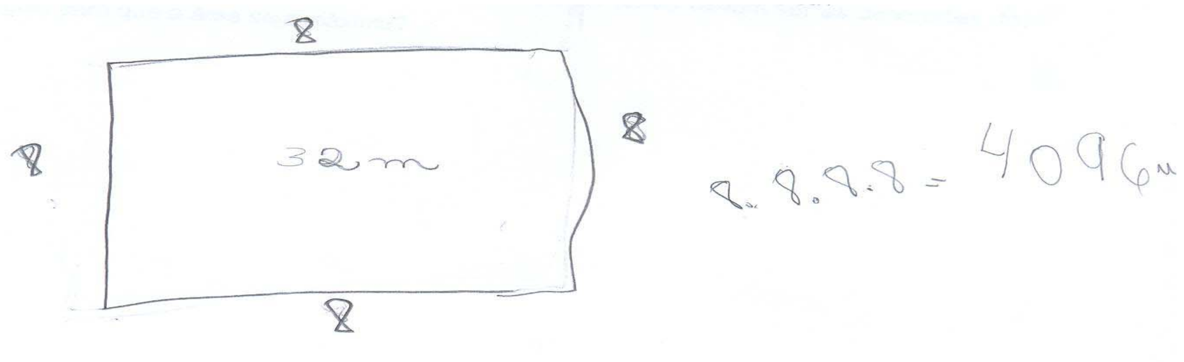
Justifique sua resposta:

O perímetro do paralelogramo VELO é: 5+4+8 = 17

A área do triângulo TRI é: 4.8.3.6 = 576

Justifique sua resposta:

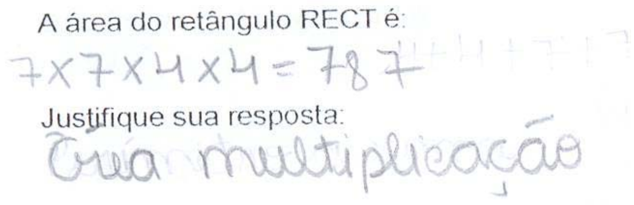
2 ª questão:



8.1.4. “A área de uma figura geométrica plana é o produto de todos os comprimentos dos lados”

O extrato de protocolo abaixo ilustra o que interpretamos como a mobilização deste invariante operatório. O aluno multiplica todas as medidas dos comprimentos dos lados do retângulo, inclusive àqueles que não estavam indicados na figura.

Fig. 8.7. Prot. 7 – Q1T4F$_2$ –Questão 1 do teste 4 respondida pelo aluno F da escola 2.



8.1.5. “O perímetro de uma figura plana é dado pela a área dividida por dois”

No protocolo abaixo ilustramos o invariante sendo mobilizado por um mesmo aluno para o perímetro do retângulo, do paralelogramo e do triângulo.

Fig 8.8. Prot. 8 - Q1T2C$_2$ – Questão 1 do Teste 2 respondida pelo Aluno C da Escola 2.

T C

A área do retângulo RECT é: $A = 7 \cdot 4 = 28$ cm.

Justifique sua resposta: multiplicando a base, vezes a altura encontrará a área

O perímetro do retângulo RECT é:

Justifique sua resposta: $\frac{7 \cdot 4}{2} = \frac{28}{2} = 16$.

O L

A área do paralelogramo VELO é: $A = 8 \cdot 5 = 40$ cm.

Justifique sua resposta:

O perímetro do paralelogramo VELO é:

Justifique sua resposta: $P = \frac{8 \cdot 5}{2} = \frac{40}{2} = 20$.

A área do triângulo TRI é: $13 \times 8 = 94$

Justifique sua resposta:

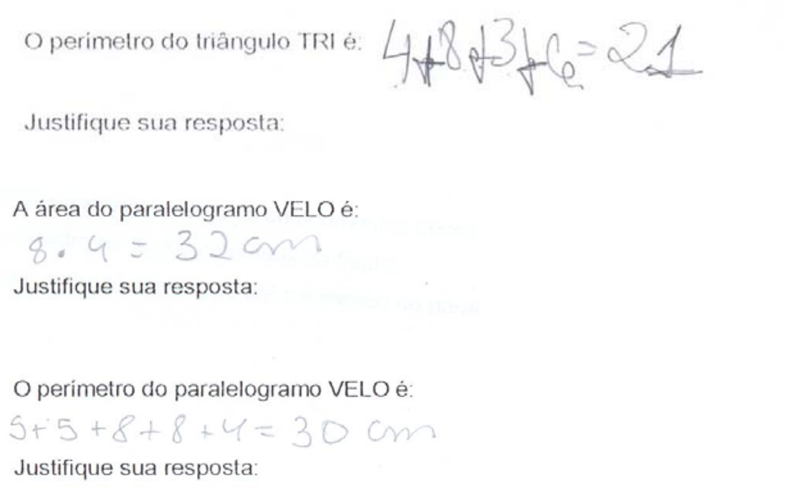
O perímetro do triângulo TRI é:

Justifique sua resposta: $\frac{13 \times 8}{2} = \frac{94}{2} = 48$ cm.

8.1.6. “O perímetro de uma figura geométrica plana é a soma de todas as medidas que aparecem na figura”

Os protocolos abaixo ilustram o que interpretamos como a mobilização desse teorema em falso. O primeiro aluno soma todos os dados que aparecem na figura do triângulo, inclusive a altura, ou seja, demonstra a não compreensão do conceito de perímetro e repete o procedimento com relação ao perímetro do paralelogramo, sendo que, evidencia compreender que os lados paralelos da figura são congruentes somando 5 + 5 + 8 + 8 + 4 = 30 cm.

Fig.8.9- Prot. 9. Q1T2E$_2$ – Questão 1 do Teste 2 respondida pelo Aluno E da Escola 2.



O perímetro do triângulo TRI é: 4+8+3+6=21

Justifique sua resposta:

A área do paralelogramo VELO é:

8 . 4 = 32 cm

Justifique sua resposta:

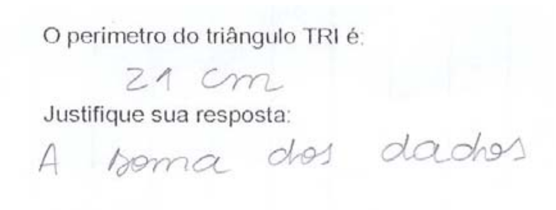
O perímetro do paralelogramo VELO é:

5+5+8+8+4=30 cm

Justifique sua resposta:

O segundo escreve explicitamente que o perímetro é a soma dos "dados".

Fig.8.10- Prot. 10 - Q1T4A$_3$



O perímetro do triângulo TRI é:

21 cm

Justifique sua resposta:

A soma dos dados

8.1.7. "Confusão entre área e perímetro"

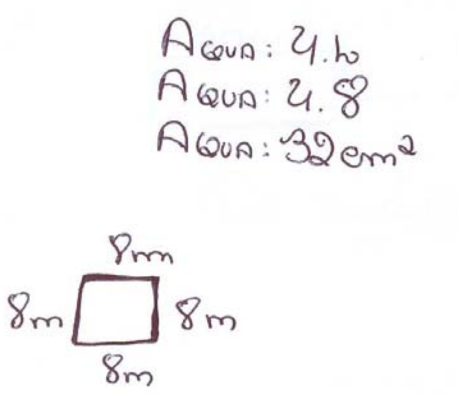
A análise dos testes possibilitou a confirmação de aspectos relacionados à **confusão entre área e perímetro**, amplamente discutida nas pesquisas em educação matemática.

Pesquisas anteriores apontam que a dissociação entre área e perímetro é um aspecto importante para construção do conceito de área como grandeza. Baltar (1996) classificou a distinção entre área e perímetro, de acordo com quatro pontos de vista: topológico, dimensional, computacional e variacional.

Os protocolos abaixo, extraídos de questões diferentes, escolas diferentes e testes diferentes, evidenciam a não distinção entre área e perímetro dos vários pontos de vista. Os alunos parecem não compreender que uma superfície e seu contorno são objetos matemáticos de naturezas distintas, no que diz respeito às dimensões, o que traz conseqüências imediatas sobre o uso das unidades adaptadas à expressão das medidas de área e perímetro. Assim, os procedimentos dos alunos evidenciam que para eles área e perímetro são "numericamente" iguais.

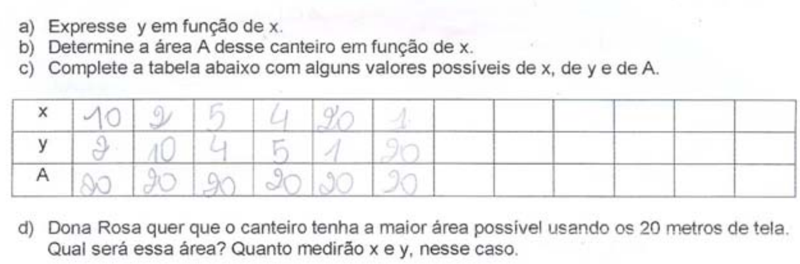
No protocolo 11 o aluno usa a fórmula do perímetro do quadrado para calcular sua área.

Fig. 8.11 - Prot. 11 – Q2T2I_2 – Q2



No protocolo 12 o aluno atribui valores às dimensões x e y do retângulo de modo que o produto seja 20 que corresponde exatamente aos metros de tela que ele precisa distribuir para construir o canteiro. Neste caso há duas hipóteses explicativas: ou aluno considera área igual à perímetro ou confunde área e perímetro.

Fig. 8.12 -Prot. 12 – Q4T4U_2 – Q4



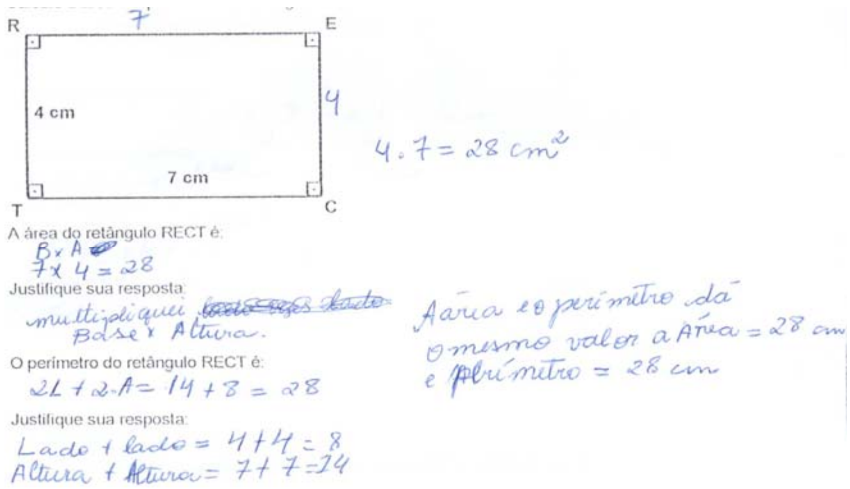
a) Expresse y em função de x.
b) Determine a área A desse canteiro em função de x.
c) Complete a tabela abaixo com alguns valores possíveis de x, de y e de A.

x	10	2	5	4	20	1						
y	2	10	4	5	1	20						
A	20	20	20	20	20	20						

d) Dona Rosa quer que o canteiro tenha a maior área possível usando os 20 metros de tela. Qual será essa área? Quanto medirão x e y, nesse caso.

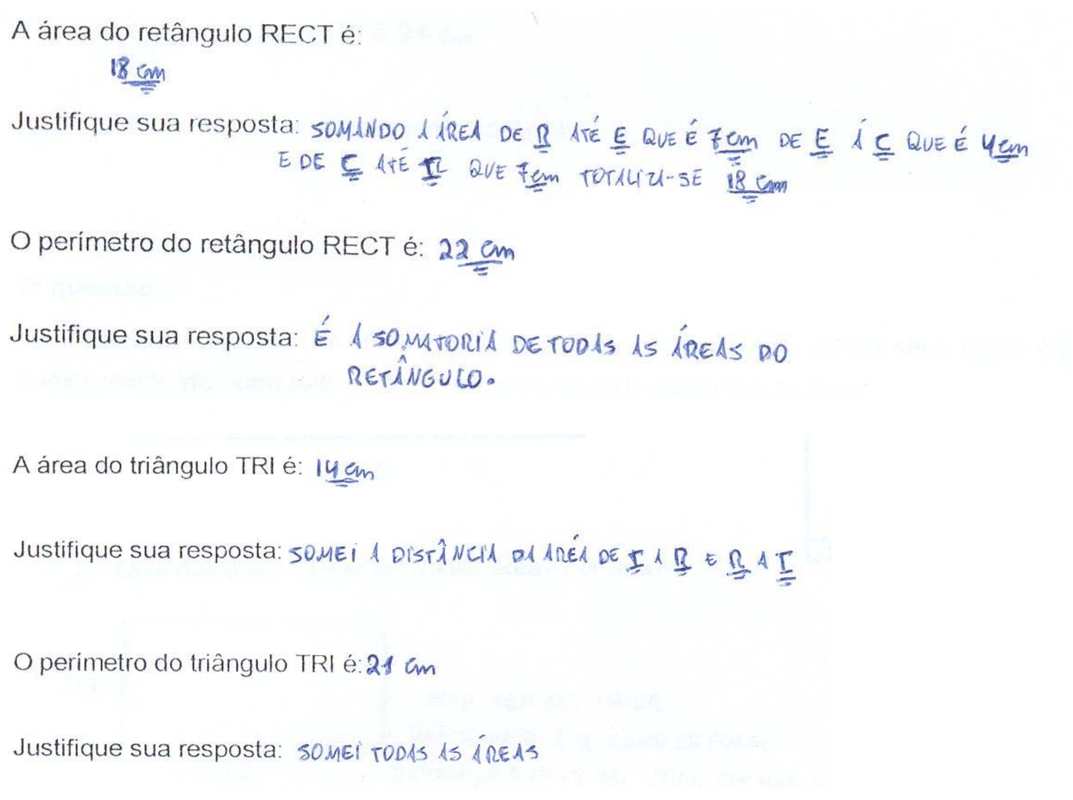
O protocolo 13 evidencia um esforço que o aluno faz para que sua idéia sobre área e perímetro seja comprovada: escolhe os dados numéricos coretos e a operação que daria a medida do perímetro correto da figura, mas “erra” no cálculo numérico e afirma que “área e perímetro dá o mesmo valor”.

Fig. 8.13. Prot.13 – Q1T2G$_5$



A idéia ilustrada no protocolo abaixo, extraído do teste de um mesmo aluno, a nosso ver pode corresponder tanto a dificuldades relacionadas ao ponto de vista topológico, quanto ao computacional. Ao confundir o conceito de área e perímetro, o aluno mobiliza o invariante operatório: **área de uma figura geométrica plana é a soma das medidas dos lados.**

Fig. 8. 14 - Prot. 14 – Q1T5C$_3$



A área do paralelogramo VELO é: 21 cm

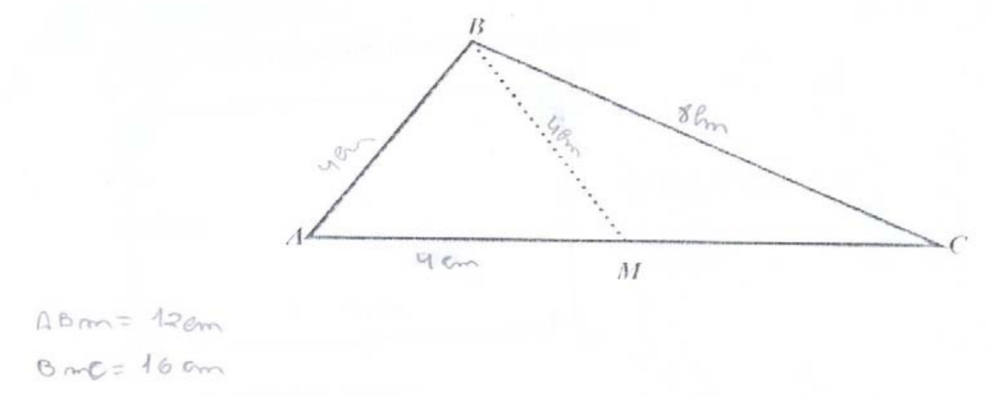
Justifique sua resposta: A MESMA JUSTIFICATIVA DA QUESTÃO ANTERIOR.

O perímetro do paralelogramo VELO é: 30 cm

Justifique sua resposta: POIS SOMEI A DISTÂNCIA ENTRE V E E E A MESMA COISA COM L AO O E SOMEI A ALTURA QUE DÁ 30 cm

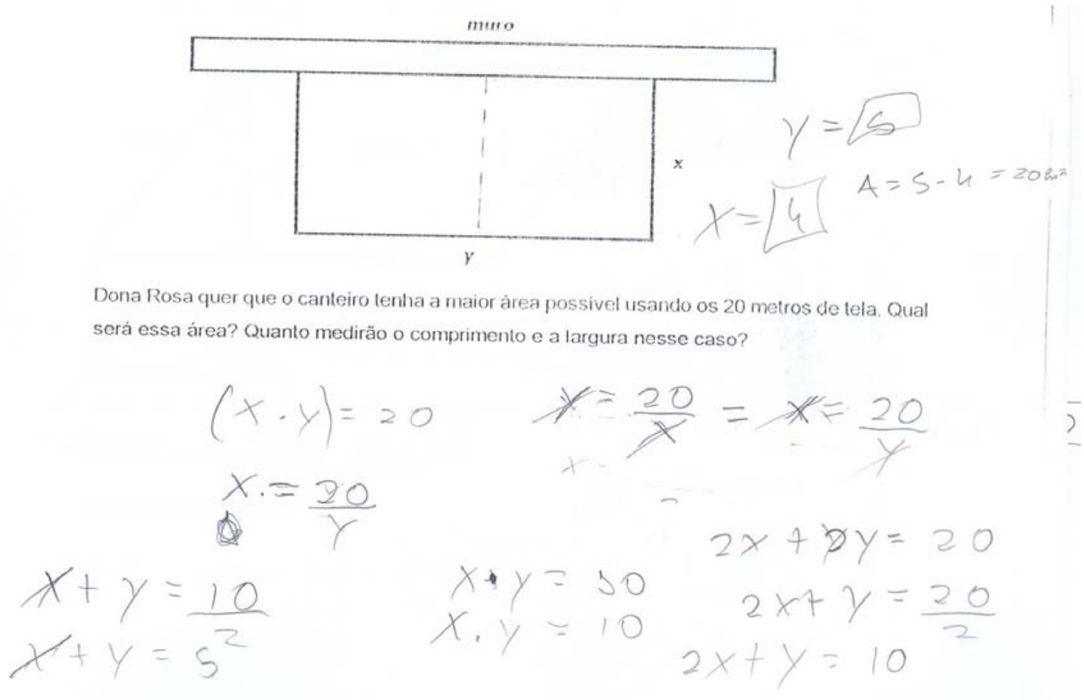
O protocolo 15 ilustra a questão 3 do teste 1, onde a tarefa do aluno era comparar as áreas dos triângulos ABM e BMC. Apesar de ser uma questão que usa a fórmula para comparar, onde aluno precisa mobilizar, entre outros, conhecimentos do campo geométrico o aluno opta por um procedimento numérico, atribuindo valores às dimensões da figura e comparando as "áreas", sendo que área para ele é a soma das medidas dos lados, ou seja, é o perímetro.

Fig. 8. 15 - Prot. 15 – Q3T1L$_3$ – Q3



Até mesmo numa questão de otimização foi possível identificar a confusão entre área e perímetro. O aluno abaixo mobiliza a fórmula da área do retângulo, mas diz que a área é igual a 20, que corresponde aos metros de tela que precisa distribuir para construir o canteiro.

Fig. 8. 16 - Prot. 16 – Q4T1D$_4$ – Q4



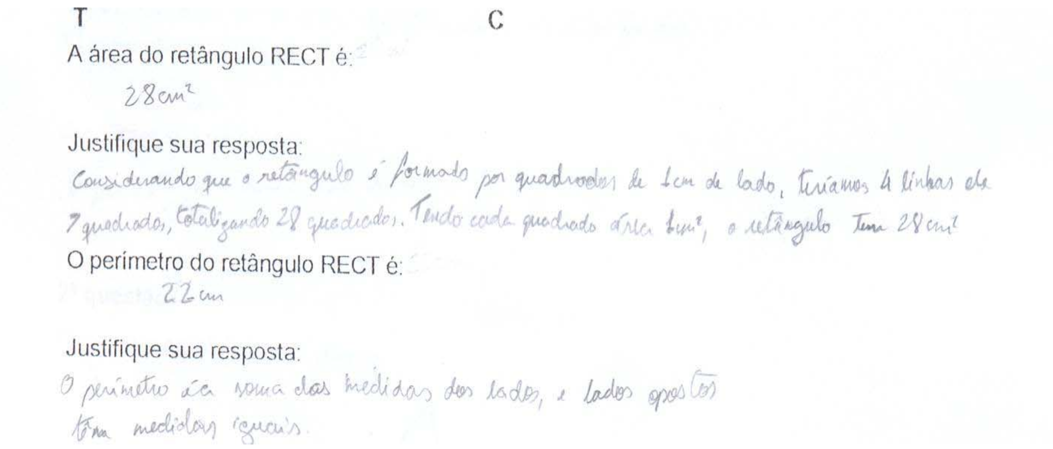
8.2 FÓRMULAS DE ÁREA E PERÍMETRO MOBILIZADAS PELOS ALUNOS

8.2.1 ÁREA E PERÍMETRO DO RETÂNGULO

Com relação às fórmulas de área e perímetro do retângulo mobilizadas pelos alunos, vários teoremas em ação puderam ser identificados. Alguns verdadeiros, como ilustramos abaixo, apoiados em conhecimentos geométricos, como ladrilhamento e outros falsos.

No protocolo abaixo, para a área do retângulo o aluno utiliza uma justificativa baseada no recobrimento da superfície retangular com quadrados unitários e para o perímetro mobiliza propriedade do retângulo:

Fig. 8.17 - Prot. 17 - Q1T3E$_1$ - Questão 1 do teste 3 respondida pelo aluno E da escola 1.


T C

A área do retângulo RECT é:

28cm²

Justifique sua resposta:

Considerando que o retângulo é formado por quadrados de 1cm de lado, teríamos 4 linhas de 7 quadrados, totalizando 28 quadrados. Tendo cada quadrado área 1cm², o retângulo tem 28cm²

O perímetro do retângulo RECT é:

22cm

Justifique sua resposta:

O perímetro é a soma das medidas dos lados, e lados opostos têm medidas iguais.

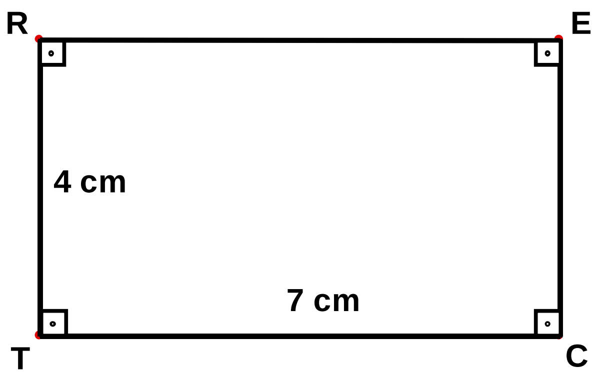
A análise qualitativa dos erros na Q1, também possibilitou a identificação de teoremas em ação falsos relacionados às fórmulas de área e perímetro mobilizadas pelos alunos. A seguir passamos a discuti-los.

i) FÓRMULAS ERRÔNEAS PRODUZIDAS PARA ÁREA E PERÍMETRO DO RETÂNGULO**:**

A mobilização de fórmulas errôneas para área e perímetro, ao nosso ver relaciona-se a dificuldades do ponto de vista computacional (BALTAR, 1996), que corresponde à aquisição das fórmulas de área e perímetro de figuras usuais.

Especificamente na questão 1, cujo enunciado para o item a é:

a) Calcule a área e o perímetro do retângulo abaixo:



1) A área do retângulo RECT é:

Justifique sua resposta:

2) O perímetro do retângulo RECT é:

Justifique sua resposta:

Como já foi dito, nesta questão a figura do retângulo é apresentada numa posição prototípica, com medidas naturais indicadas na figura. Apenas 5,8% dos 259 alunos testados erram o cálculo da área do retângulo; enquanto 10% (26 alunos) erram o cálculo do perímetro.

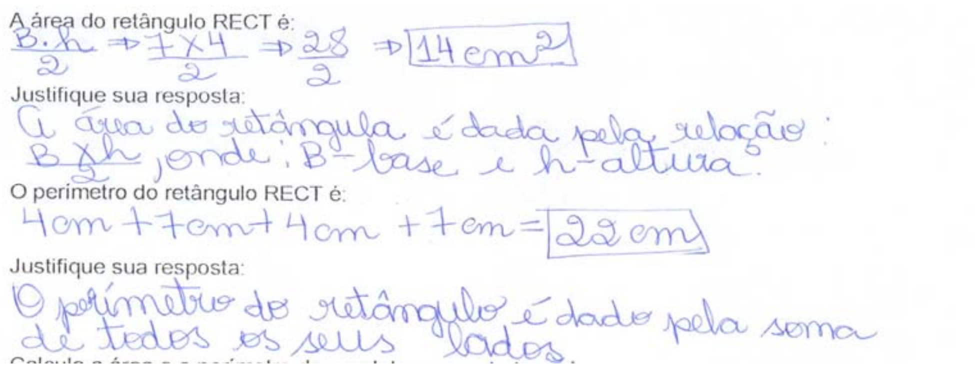
Foi possível identificar para área a produção de duas fórmulas errôneas, além da confusão área e perímetro, já analisada:

- "Aplicar a fórmula da área do triângulo", que corresponde ao teorema em ação falso: A área do retângulo é dada por $A = \dfrac{bxh}{2}$. Na questão 1, 40% dos erros (6 alunos) no cálculo da área do retângulo correspondem à mobilização da fórmula da área do triângulo para calcular a área do retângulo, o que destaca o aspecto mecânico relacionado ao ensino aprendizagem das fórmulas de área.

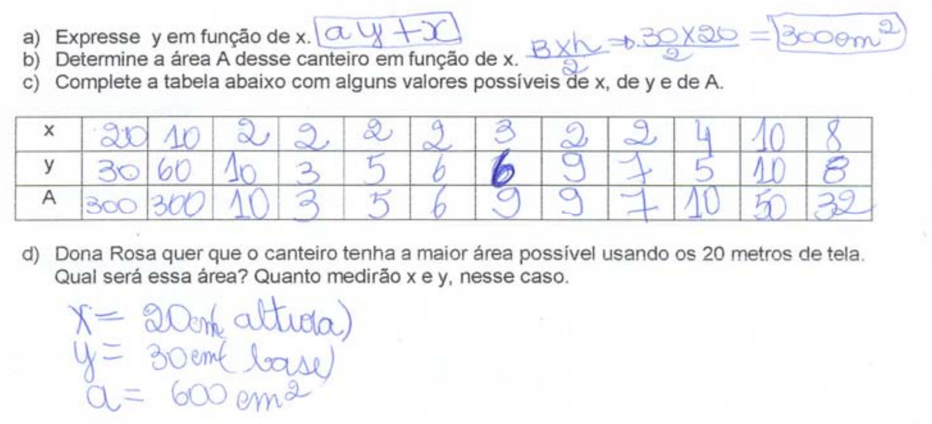
O protocolo abaixo, por exemplo, ilustra a mobilização pelo mesmo aluno da mesma fórmula em duas questões diferentes:

Fig. 8.18 – Prot. 18 - Q1e Q4T2A$_5$

Na questão 1:


A área do retângulo RECT é:
$\frac{B.h}{2} \Rightarrow \frac{7x4}{2} \Rightarrow \frac{28}{2} \Rightarrow \boxed{14\,cm^2}$
Justifique sua resposta:
A área do retângulo é dada pela relação: $\frac{Bxh}{2}$, onde: B- base e h- altura.
O perímetro do retângulo RECT é:
$4cm + 7cm + 4cm + 7cm = \boxed{22\,cm}$
Justifique sua resposta:
O perímetro do retângulo é dado pela soma de todos os seus lados.

e na questão 4:

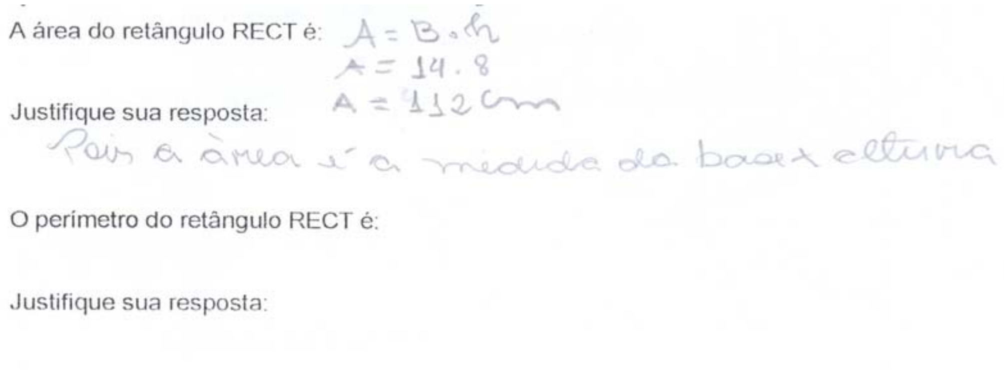

a) Expresse y em função de x. $\boxed{a\,y + x}$
b) Determine a área A desse canteiro em função de x. $\frac{Bxh}{2} \Rightarrow \frac{30x20}{2} = \boxed{300\,m^2}$
c) Complete a tabela abaixo com alguns valores possíveis de x, de y e de A.

x	20	10	2	2	2	2	3	2	2	4	10	8
y	30	60	10	3	5	6	6	9	7	5	10	8
A	300	300	10	3	5	6	9	9	7	10	50	32

d) Dona Rosa quer que o canteiro tenha a maior área possível usando os 20 metros de tela. Qual será essa área? Quanto medirão x e y, nesse caso.
X= 20cm(altura)
y= 30cm(base)
a= 600 cm²

Outro invariante operatório: "para calcular a área do retângulo somam-se os lados paralelos e multiplica-os", ou "para calcular a área do retângulo multiplica-se todos os lados". Este procedimento foi verificado em três protocolos de escolas diferentes. O aluno abaixo, por exemplo, Utiliza o mesmo procedimento tanto para a área do retângulo quanto para a área do paralelogramo:

Fig. 8.19 – Prot. 19 - Q1T4D2

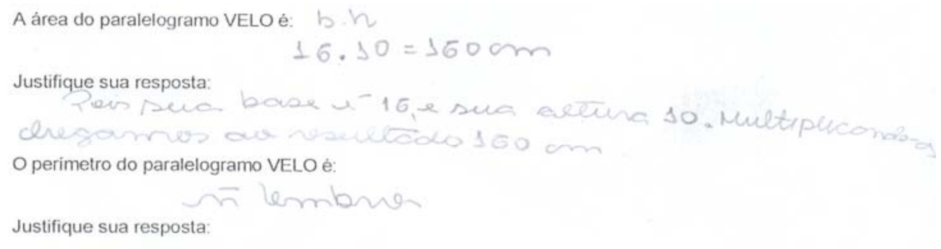

A área do retângulo RECT é: A = B . h
A = 14 . 8
A = 112 cm

Justifique sua resposta:
Pois a área é a medida da base x altura

O perímetro do retângulo RECT é:

Justifique sua resposta:

E para o paralelogramo:


A área do paralelogramo VELO é: b . h
16 . 10 = 160 cm

Justifique sua resposta:
Pois sua base é 16, e sua altura 10. Multiplicando chegamos ao resultado 160 cm

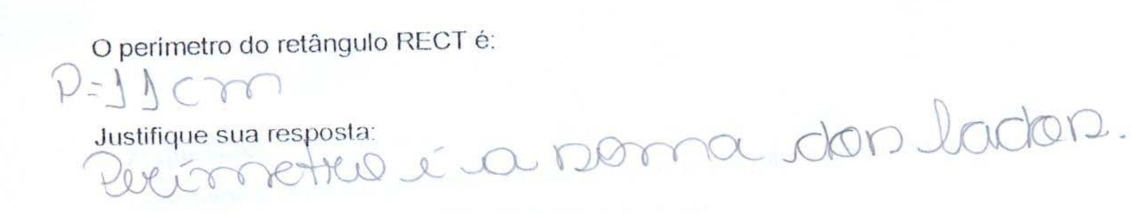
O perímetro do paralelogramo VELO é:
ñ lembro

Justifique sua resposta:

PARA O PERÍMETRO do retângulo, foi possível identificar a mobilização de 4 fórmulas errôneas, entre elas a clássica confusão área e perímetro.

- Um dos erros mais freqüentes consistiu em mobilizar o teorema em ação falso: "o perímetro do retângulo é a soma dos comprimentos de apenas 2 lados, ou seja, é a soma somente das medidas que aparecem na figura" – 42,3 % dos erros neste item correspondem a este procedimento (11 alunos). Interpretamos este erro como estando relacionado às imbricações com o campo geométrico, pois o aluno não utiliza a propriedade do retângulo que a lados iguais dois a dois. O extrato do protocolo abaixo ilustra este erro:

Fig. 8. 20 -Prot. 20 - Q1T1G$_3$


O perimetro do retângulo RECT é:
P = 11 cm

Justifique sua resposta:
Perímetro é a soma dos lados.

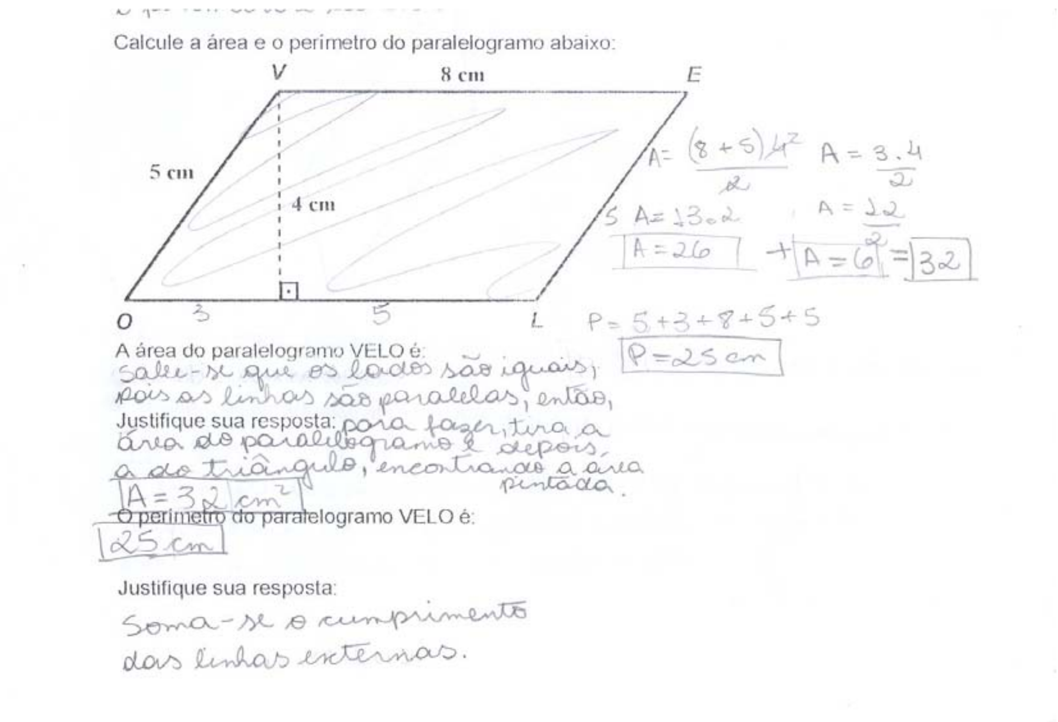
Outros teoremas em ação falsos identificados em relação ao perímetro do retângulo:

- O perímetro do retângulo é o resultado da multiplicação base x altura e a divisão do produto por 2", que corresponde a fórmula da área do triângulo.
- Para calcular o perímetro do retângulo eleva-se os comprimentos dos lados ao quadrados e soma-os.

8.2.2. ÁREA E PERÍMETRO DO PARALELOGRAMO

Um dos teoremas em ação verdadeiros mobilizados pelos alunos para o cálculo da área do paralelogramo correspondeu à decomposição do paralelogramo em trapézio e triângulo. Como apontamos no capítulo 3, os livros didáticos utilizam para a construção do significado da fórmula de área do paralelogramo no ensino fundamental a decomposição e recomposição a partir do retângulo. Assim, no protocolo abaixo o aluno mobiliza conhecimentos do campo conceitual geométrico e do campo conceitual das grandezas, mas não reproduz necessariamente a abordagem dos livros didáticos.

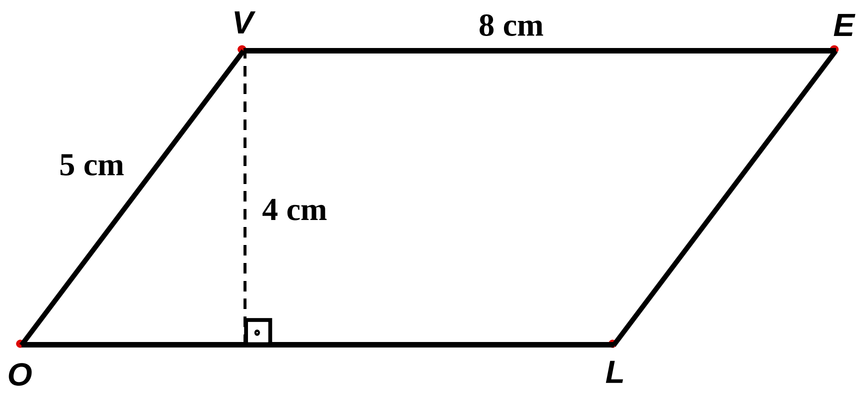
Fig. 8. 21-Prot. 21 - Q1T3D$_5$



i) FÓRMULAS ERRÔNEAS PRODUZIDAS PARA ÁREA E PERÍMETRO DO PARALELOGRAMO:

Especificamente no cálculo da área do paralelogramo da questão 1, que possui a seguinte formulação:

b) Calcule a área e o perímetro do paralelogramo abaixo:



1) A área do paralelogramo VELO é:

Justifique sua resposta:

2) O perímetro do paralelogramo VELO é:

Justifique sua resposta:

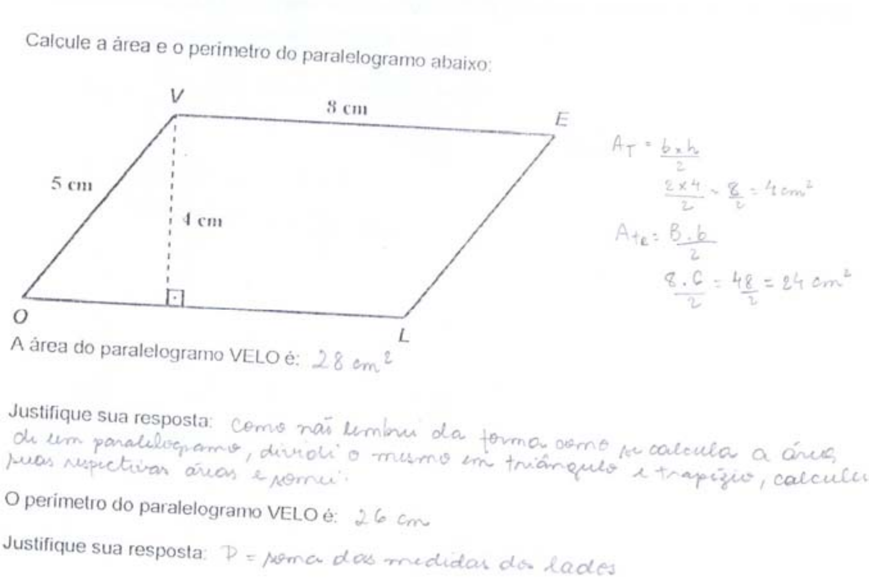
A figura é apresentada numa posição prototípica, com medidas naturais indicadas na figura. Mesmo assim para área identificamos a utilização de várias fórmulas errôneas, ressaltando a confirmação de pesquisas anteriores em relação à extensão indevida da fórmula da área do retângulo para o paralelogramo, como também a construção não significativa da fórmula de área do paralelogramo. Este procedimento foi identificado em 37 protocolos, ou seja, 34,6% dos erros neste item. Agrupamos os erros identificados por característica predominante, assim temos:

ii) ERROS RELACIONADOS À DECOMPOSIÇÃO DO PARALELOGRAMO:

Estes erros evidenciam a mobilização de procedimentos geométricos, o que significa que em questões aparentemente simples, o aluno pode mobilizar conhecimentos de outros campos conceituais, que ora conduzem ao acerto ora conduzem ao erro.

- Para encontrar a área divide o paralelogramo em 1 triângulo e 1 trapézio. O protocolo abaixo ilustra o procedimento adotado pelo aluno, porém, mobiliza uma fórmula errada para o trapézio.

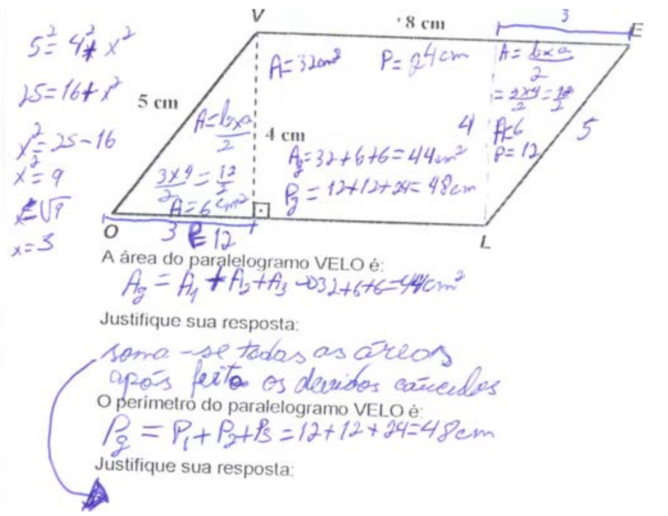
Fig. 8. 22 Prot.22 - Q1 T1C$_5$



- Decomposição do paralelogramo em 1 retângulo e 2 triângulos (que são contados duas vezes). 17 alunos utilizam esta estratégia. Selecionamos três protocolos de escolas diferentes que evidenciam esta estratégia.

No primeiro protocolo (23) o aluno decompõe o paralelogramo e mobiliza o teorema de Pitágoras, dois conhecimentos do campo geométrico. E também evidencia um teorema em ação falso que corresponde a achar que o perímetro é a soma de todos os perímetros das figuras resultantes da decomposição, já identificado por Baltar (1996).

Fig. 8. 23 - Prot. 23 - Q1T2G$_2$



No segundo protocolo (24) o aluno também decompõe o paralelogramo, mobiliza o teorema de Pitágoras, mas interpreta o retângulo obtido após a retirada dos dois triângulos como um quadrado.

Fig. 8.24 - Prot. 24 - Q1T3L$_1$

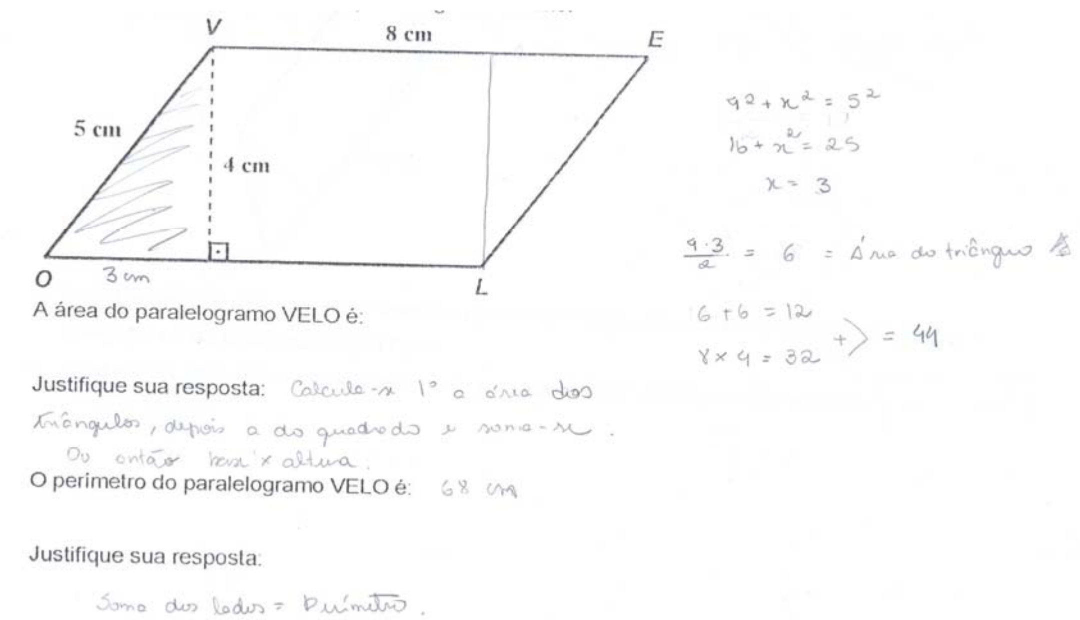
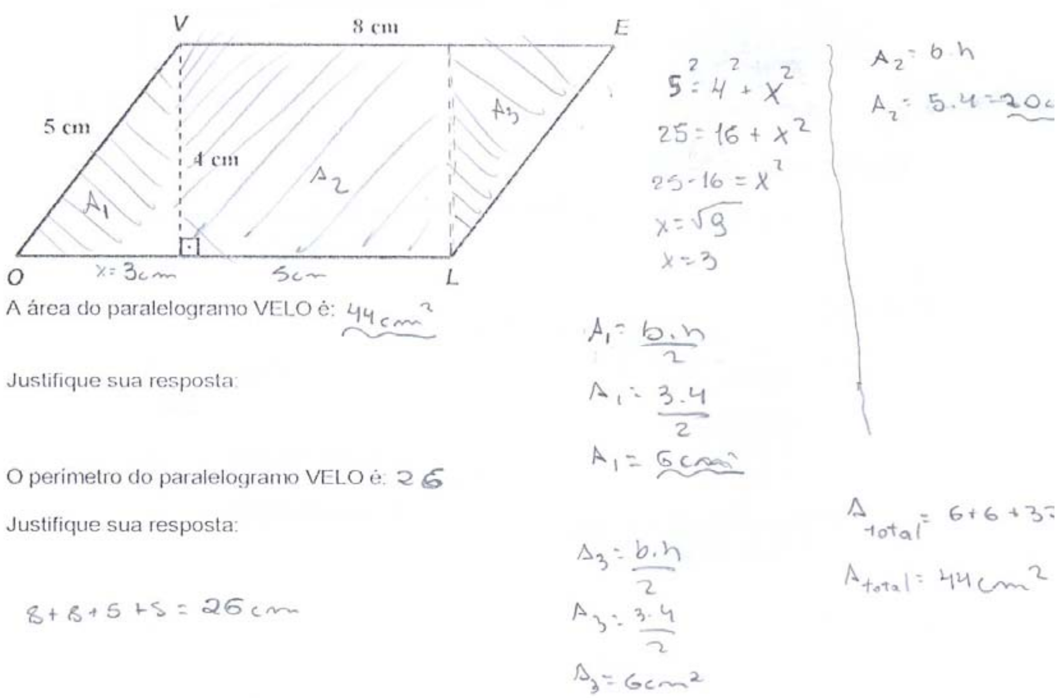


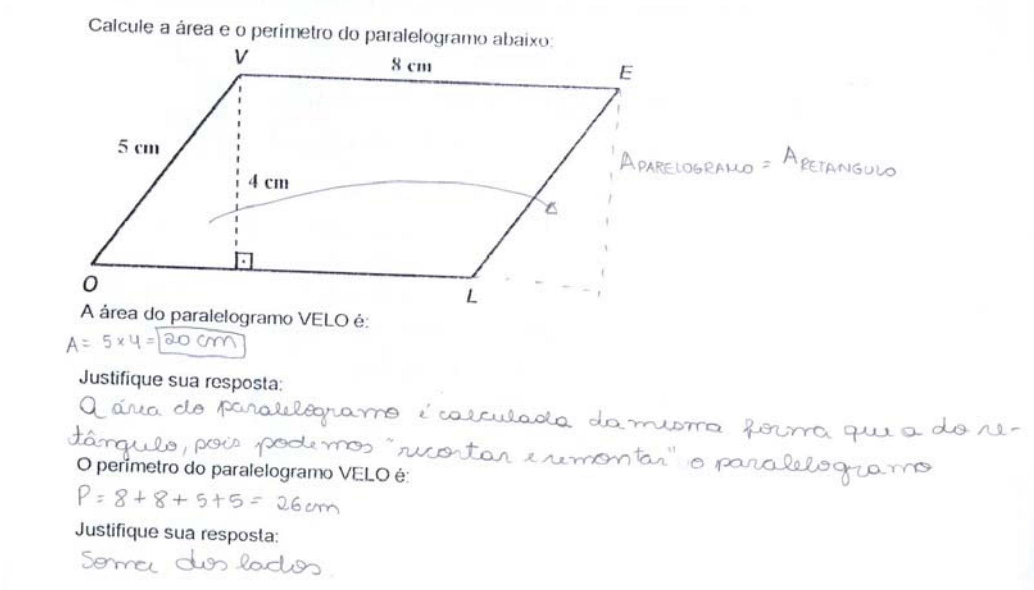
Fig. 8.25 - Prot. 25 - Q1T1I$_4$



- Outro procedimento errado, relacionado ao campo geométrico consistiu em usar 5 x 4 para área do paralelogramo, ou seja, não identifica corretamente o lado correspondente a altura - 3 alunos cometem este erro.

O protocolo abaixo ilustra um destes procedimentos, com uma característica geométrica. O aluno decompõe o paralelogramo e recompõe um retângulo. Outros alunos apenas multiplicam 4 x 5 ou 5 x 4.

Fig. 8.26 - Prot. 26 - Q1T2F$_1$

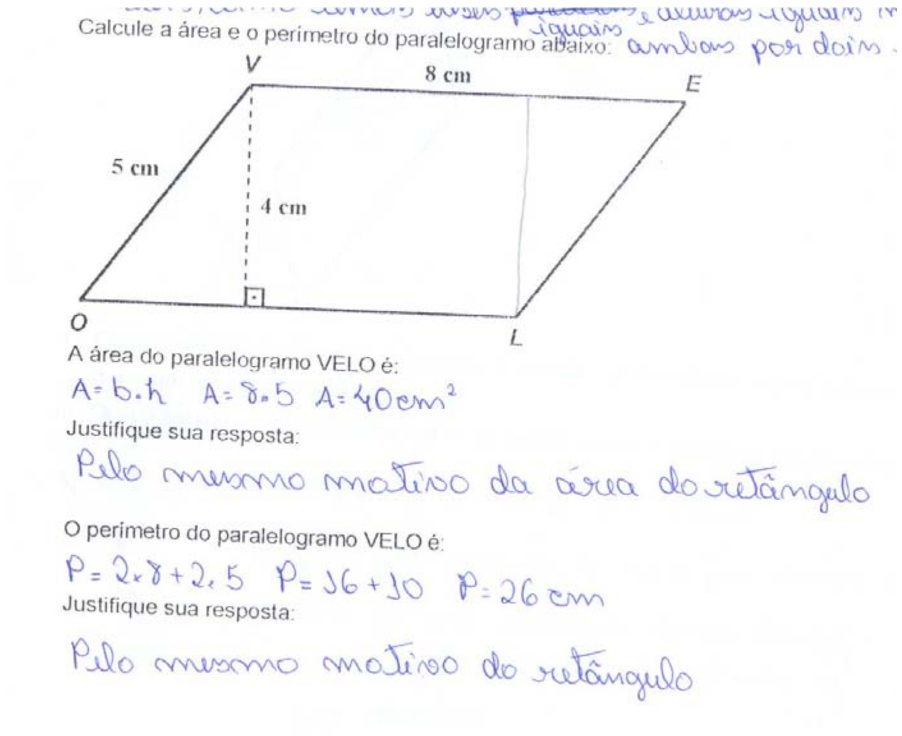


iii) ERROS RELACIONADOS À MOBILIZAÇÃO DE FÓRMULAS ERRÔNEAS:

A utilização de fórmulas errôneas corresponde também à mobilização de teoremas em ação relacionados ao aspecto computacional das fórmulas. A seguir listamos algumas delas que identificamos em nossa análise.

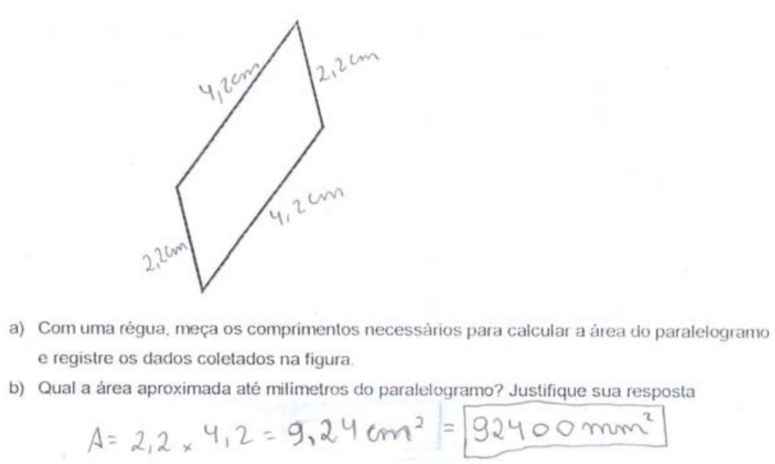
Um dos erros mais freqüentes referiu-se à mobilização do teorema em ação falso amplamente identificado na literatura: "a área do paralelogramo é o produto dos lados", que corresponde a calcular 8 x 5 para área do paralelogramo, ou seja, calcular o produto dos lados. Trinta e sete alunos cometem este erro que é recorrente em todas as escolas. A literatura também indica três interpretações possíveis para este erro: pode ser um erro de natureza algébrica, relacionado à grandeza, ou seja, para o aluno, a área do paralelogramo é $\ell x \ell$, pode ser de natureza geométrica, isto é, o aluno interpreta o lado do paralelogramo como sendo altura; ou relacionado às grandezas, o aluno supõe que as medidas da altura e de um dos lados do paralelogramo são iguais. No protocolo abaixo o erro parece relacionar-se ao campo geométrico, pois o aluno escreve a fórmula b x h, mas substitui o **b** pelo comprimento do lado tomado como base no paralelogramo e **h** pelo comprimento do lado.

Fig. 8.27 - Prot. 27 - Q1T3H_2



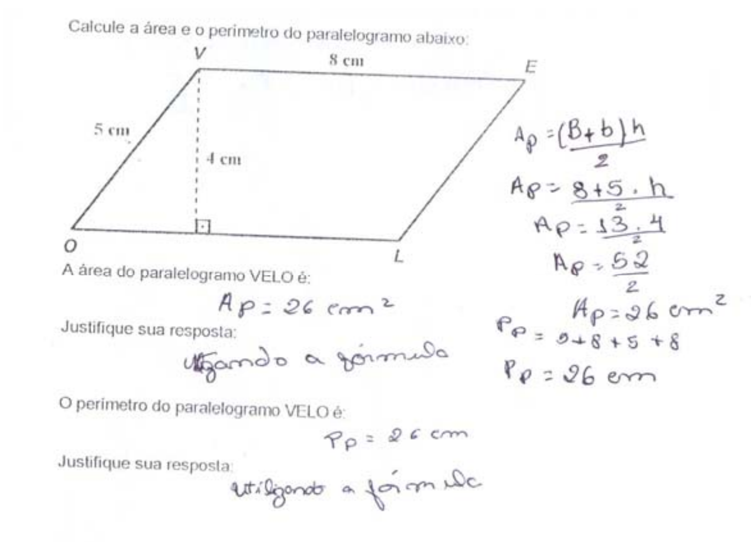
O protocolo abaixo ilustra o procedimento do aluno numa questão que solicitava que ele marcasse na figura os comprimentos que julgasse necessário para calcular a área do paralelogramo. O aluno marca exatamente as dimensões dos lados.

Fig. 8.28 - Prot. 28 - Q2T3G_4



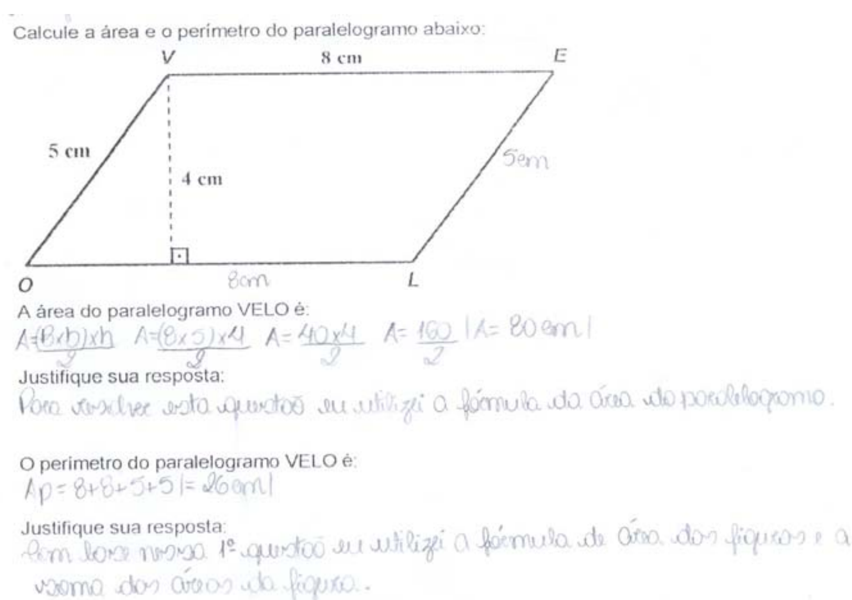
A mobilização de outras fórmulas também pôde ser identificada. Por exemplo, 17 alunos mobilizaram a fórmula da área do trapézio para calcular a área do paralelogramo. Com relação a esta formula errônea podemos levantar três hipóteses: o aluno confunde as figuras, dificuldade relacionada ao campo geométrico; o aluno confunde as fórmulas para área de cada figura, ou seja, a dificuldade é relacionada ao campo das grandezas ou ainda esta opção pode ser fruto de um contrato didático, ou seja, os alunos estudaram recentemente a fórmula do trapézio e acham que precisam usá-la em tudo. A terceira hipótese de certa forma não se sustenta, pois identificamos este procedimento em escolas e em questões diferentes.

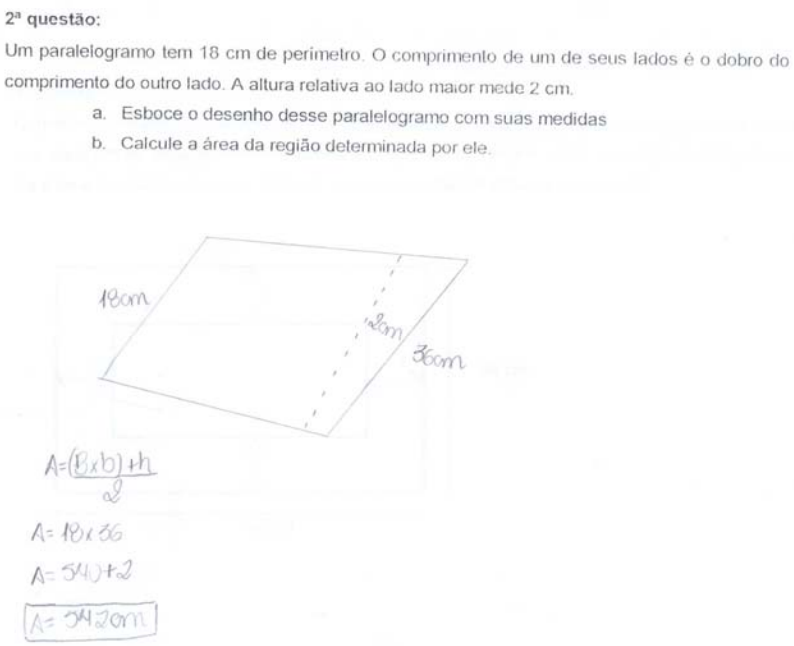
Fig. 8.29 - Prot. 29- Q1T2C$_5$



Também foi possível confirmar este procedimento, como um invariante operatório. Por exemplo, no protocolo abaixo temos um aluno que usa a fórmula da área do trapézio para calcular a área do paralelogramo na Q1 e na Q2.

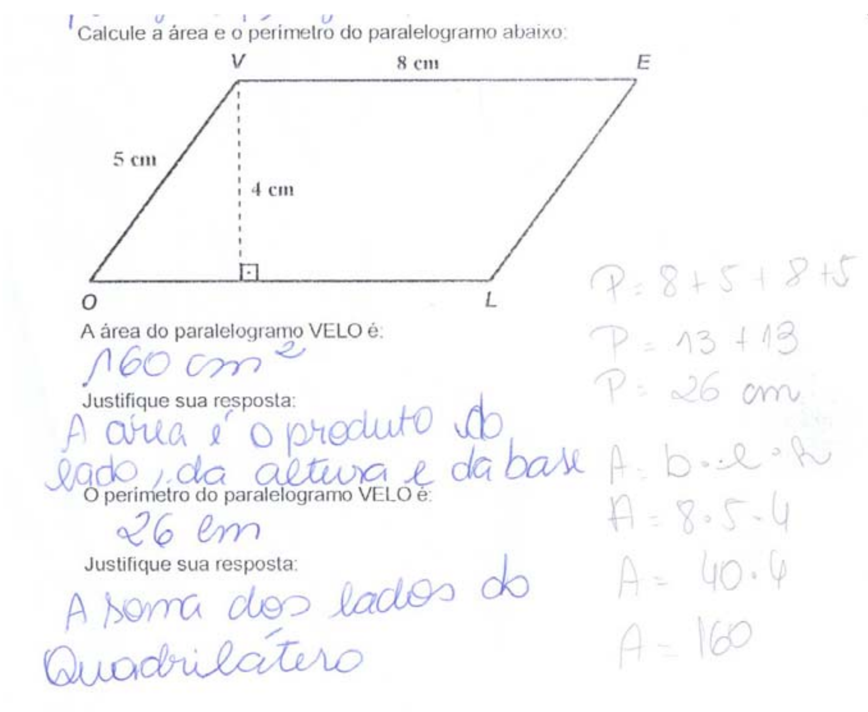
Fig. 8.30 - Prot. 30- .Q1 e Q2T5F$_4$





Outro erro freqüente correspondeu a mobilizar a fórmula errônea: para calcular a área do paralelogramo multiplicam-se os comprimentos da base x lado x altura. Sete alunos mobilizam este procedimento.

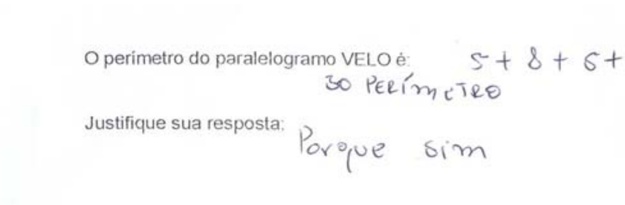
Fig. 8.31 - Prot. 31- Q1T4A$_5$



Também foi possível identificar nos protocolos outras fórmulas errôneas para a área do paralelogramo: multiplicar a soma dos lados paralelos (2 alunos) e aplicar a fórmula do triângulo para o paralelogramo.

PARA PERÍMETRO do paralelogramo o erro mais freqüente consistiu em “acrescentar a soma dos lados à altura”, 10 alunos cometem este erro, ou seja, 19,6% dos erros correspondem a esta estratégia.

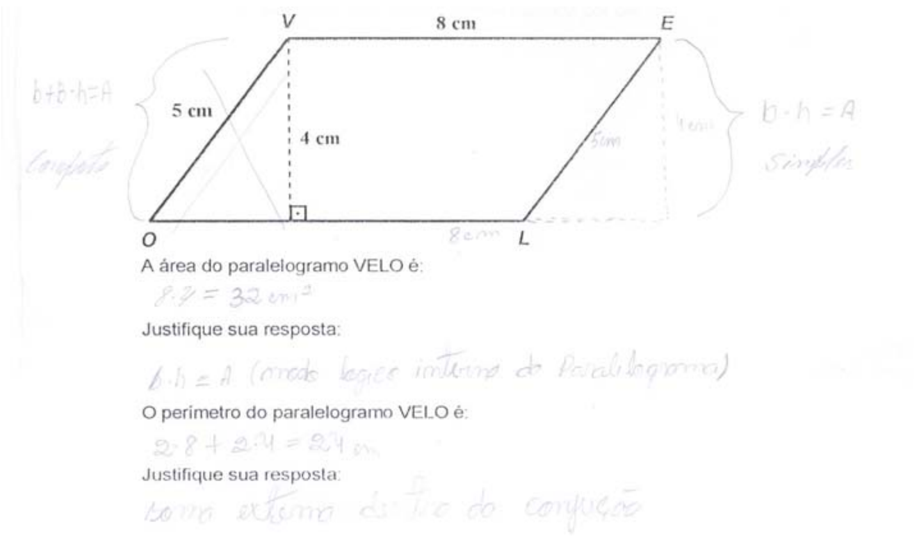
Fig. 8.32 - Prot. 32- Q1T5B$_2$



Abaixo listamos outros procedimentos, geralmente relacionados à decomposição do paralelogramo.

- Ao decompor o paralelogramo e transformá-lo num retângulo toma a altura como lado do paralelogramo. Ou seja, calcula o perímetro da figura obtida após a decomposição e não da figura original. – 10 alunos cometem este erro. Este procedimento reflete o teorema em ação: “a decomposição e a recomposição conserva o perímetro da figura”.

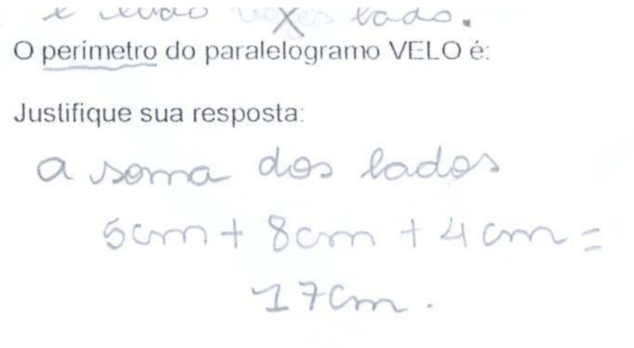
Fig. 8.33 - Prot. 33- Q1T5G$_2$



Outros invariantes operatórios falsos que foram mobilizados para o perímetro do paralelogramo:

- O perímetro do paralelogramo é soma dos comprimentos de lados e do comprimento da altura. Ou a soma das medidas marcadas na figura. Quatro alunos mobilizam este teorema que ilustramos abaixo:

Fig. 8.34 - Prot. 34- Q1T1F$_5$


O perímetro do paralelogramo VELO é:

Justifique sua resposta:

a soma dos lados
5cm + 8cm + 4cm =
17cm.

- O perímetro do paralelogramo é a soma de apenas os comprimentos de dois lados (8 + 5) ou lado e altura (4 + 5) ou 4 + 8. Três alunos mobilizam este invariante.
- Para calcular o perímetro do paralelogramo deve-se multiplicar todas as medidas que aparecem na figura por 2 e somar todos os produtos;
- Para calcular o perímetro do paralelogramo deve-se multiplicar a área pelo comprimento do lado.

8.2.3. FÓRMULA DA ÁREA E DO PERÍMETRO DO TRIÂNGULO

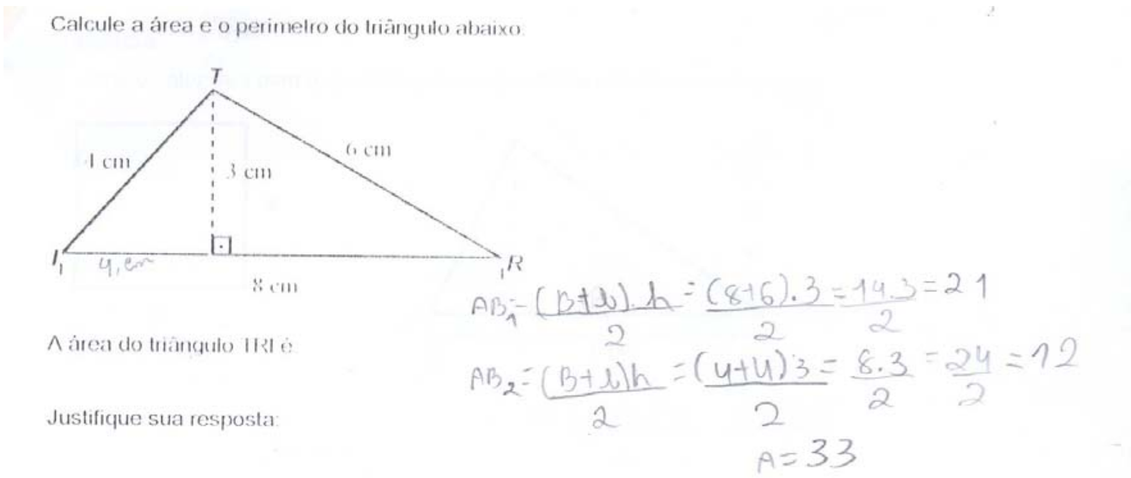
Como vimos no estudo sobre a construção do significado das fórmulas de área em livros didáticos apresentado no capítulo 3, dentre os avanços relativos à construção do conceito de área, incorporados nos livros didáticos, está a construção do significado das fórmulas de áreas de figuras geométricas planas através da decomposição e recomposição a partir de um retângulo. No caso do triângulo os livros obtêm as fórmulas ou decompondo o retângulo em dois triângulos, no caso dos triângulos retângulos, ou decompondo e re compondo um paralelogramo no caso de um triângulo qualquer. Assim, na construção do significado da fórmula da área do triângulo evidenciam-se aspectos relacionados ao campo conceitual da geometria.

i) FÓRMULAS ERRÔNEAS PRODUZIDAS PARA ÁREA E PERÍMETRO DO TRIÂNGULO:

Para área do triângulo também identificamos a mobilização de fórmulas errôneas. Destacamos erros relacionados à decomposição do triângulo, freqüentemente ligado a interpretação da altura como um segmento que divide a figura em duas. Dentre as fórmulas errôneas destacamos:

- Calcular a área de dois triângulos utilizando a fórmula de área do trapézio em cada um.

Fig. 8.35 - Prot. 35- Q1T2E$_4$



- Dividir o triângulo em dois e confundir com dois paralelogramos;

ii) EXTENSÃO DA FÓRMULA DE ÁREA DO PARALELOGRAMO:

Um dos erros freqüentes refere-se à mobilização por 18 alunos o teorema em ação falso: para calcular a área do triângulo multiplica-se base x altura e não divide por 2, ou seja, faz-se a extensão indevida da fórmula da área do paralelogramo para o triângulo. Este invariante operatório foi identificado em escolas diferentes. Os protocolos abaixo ilustram isto:

Fig. 8.36 - Prot. 36- Q1T4G$_5$

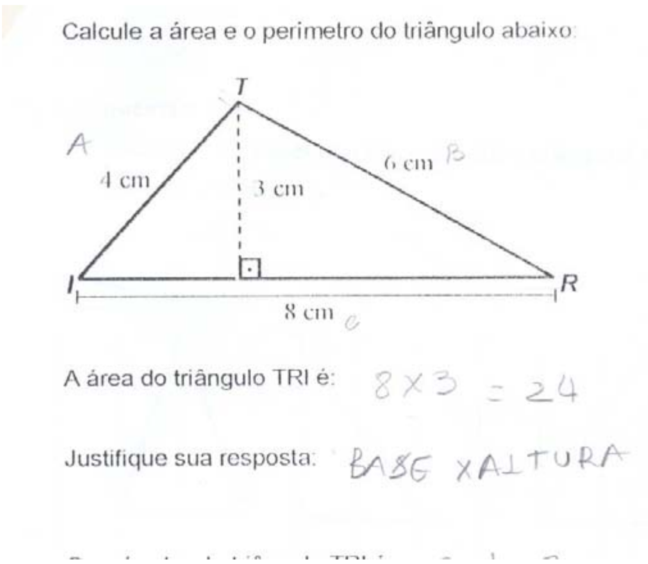
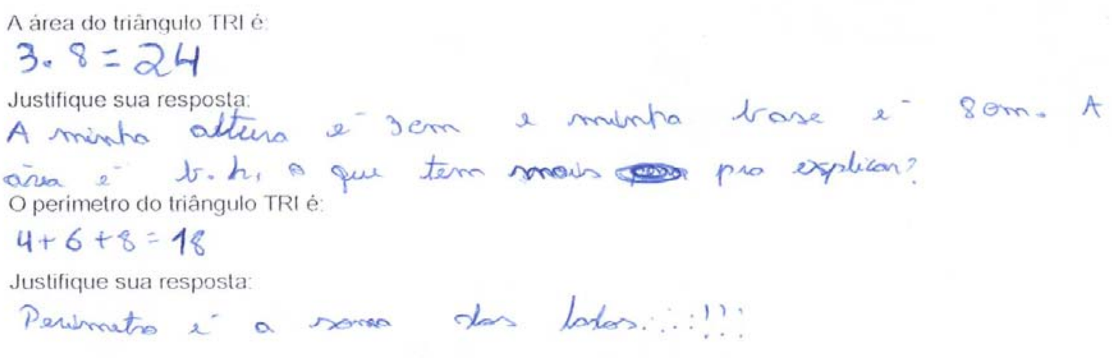


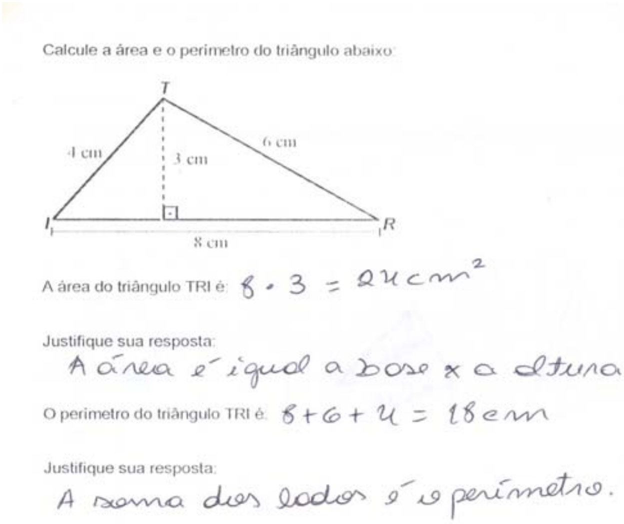
Fig. 8.37 - Prot. 37- Q1T3E$_2$


A área do triângulo TRI é:
3. 8 = 24
Justifique sua resposta:
A minha altura é 3cm e minha base é 8cm. A área é b.h, o que tem mais pra explicar?
O perímetro do triângulo TRI é:
4+6+8=18
Justifique sua resposta:
Perímetro é a soma dos lados.:..:!!:

Foi possível confirmar este tipo de procedimento no cruzamento num mesmo teste dos procedimentos dos alunos no cálculo da área do triângulo.

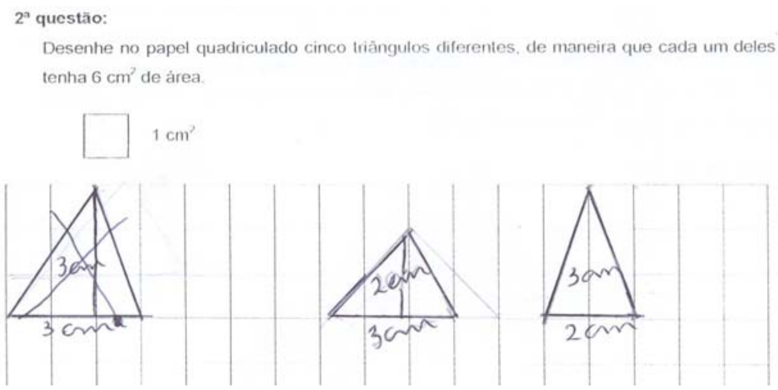
Por exemplo, ao cruzarmos as respostas obtidas no cálculo da área do triângulo na Q1 e a questão 2 do teste 4, identificamos em 3 testes a confirmação do procedimento b x h para área do triângulo. O protocolo baixo ilustra a mobilização deste invariante operatório por um mesmo aluno nestas duas questões.

Fig. 8.38 - Prot. 38 - Q1 e Q2T4S$_2$


Calcule a área e o perímetro do triângulo abaixo:

A área do triângulo TRI é: 8 · 3 = 24cm²
Justifique sua resposta:
A área é igual a base x a altura
O perímetro do triângulo TRI é: 8+6+4 = 18cm
Justifique sua resposta:
A soma dos lados é o perímetro.

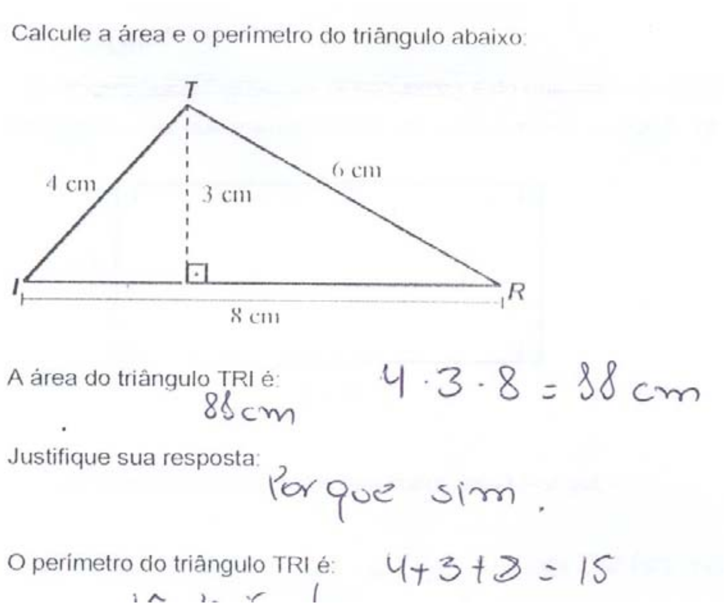
Na questão 2:


2ª questão:
Desenhe no papel quadriculado cinco triângulos diferentes, de maneira que cada um deles tenha 6 cm² de área.

Vários invariantes operatórios falsos subjacentes à mobilização de fórmulas errôneas para a área do triângulo puderam ser identificados:

- Para calcular a área do triângulo multiplica-se a medida de todos os lados do triângulo pela medida da altura, ou seja, deve-se multiplicar os comprimentos de todos os elementos da figura. Seis alunos mobilizam este invariante.
- Para calcular a área do triângulo multiplica-se um lado x altura x base. Quatro alunos mobilizam este invariante operatório ilustrado no protocolo abaixo.

Fig. 8.39 - Prot. 39 - GPT5 B

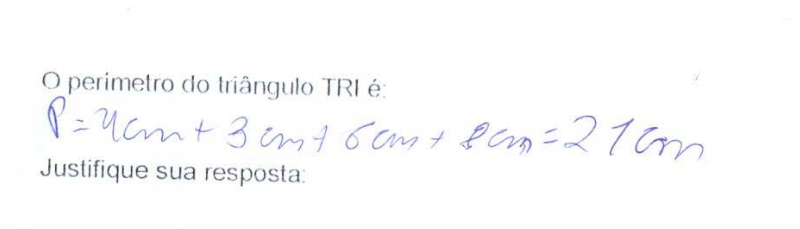


- Para calcular a área do triângulo multiplica-se a medida de todos os lados do triângulo e divide por 2
- Para calcular a área do triângulo multiplica-se a medida de um dos lados pela medida da altura e não divide por 2.
- Para calcular a área do triângulo multiplica-se a medida do lado pela medida do outro lado.
- Para calcular a área do triângulo multiplica-se a medida do lado tomado como base pela medida de um dos lados.
- Para calcular a área do triângulo usa-se a fórmula do trapézio
- Para calcular a área do triângulo multiplica-se a medida dos dois lados pela medida da base

Para o perímetro do triângulo, também foram identificados alguns invariantes operatórios:

- O perímetro do triângulo é a soma das medidas de todos os lados e da altura. Seis alunos mobilizam este invariante que ilustramos com o extrato do protocolo abaixo:

Fig. 8.40 - Prot. 40 - Q1T2 I_3


O perímetro do triângulo TRI é:
P = 4cm + 3 cm + 6cm + 8cm = 21cm
Justifique sua resposta:

- O perímetro do triângulo é a soma das medidas de dois lados do triângulo e da altura;
- O perímetro do triângulo é a soma da medida do lado tomado como base com a medida de um dos lados.

8.3. SOBRE AS UNIDADES DE MEDIDA

Em nossa revisão de literatura apontamos vários trabalhos que tratam da questão das unidades de medida em situações envolvendo fórmulas de área. Dentre eles Baturo e Nason (1996) evidenciam que a confusão entre as unidades de medida pode ser conseqüência da confusão entre medida dos comprimentos de uma superfície e a medida da área desta mesma superfície. Esta confusão foi confirmada em nossa pesquisa também. Estes autores também relacionam dificuldades no uso das unidades de medida à construção não significativa do conceito de área.

Facco (2003) observou que as estratégias estão centradas na multiplicação da medida do comprimento pela medida da largura da figura em estudo, sem considerar a unidade de medida utilizada no problema proposto. Em nosso trabalho este aspecto pôde ser evidenciado na ausência de unidades de medidas nas respostas das questões, por exemplo.

Em nossa pesquisa utilizamos o critério acertos parciais, para designar erros relacionados à utilização das unidades de medida.

Identificamos a mobilização da unidade de medida cm para área e cm² para perímetro, além da resposta numérica com ausência de unidade de medida. A análise confirma pesquisas anteriores no que se refere a mobilização das unidades correspondentes às grandezas trabalhadas.

TABELA 8. 1: ACERTOS PARCIAIS RELACIONADOS ÀS UNIDADES DE MEDIDA DE ÁREA E PERÍMETRO DO RETÂNGULO, PARALELOGRAMO E TRIÂNGULO.

UNIDADE DE ÁREA						UNIDADE DE PERÍMETRO					
Retângulo		Paralelogramo		Triângulo		Retângulo		Paralelogramo		Triângulo	
cm	aus	cm	aus	cm	aus	cm^2	aus	cm^2	aus	cm^2	aus
57	41	23	13	14	14	6	47	6	30	8	35
58%	42%	64%	36%	50%	50%	11%	89%	17%	83%	19%	81%

8.4. ASPECTOS RELACIONADOS AO CAMPO CONCEITUAL GEOMÉTRICO

Neste tópico discutimos conhecimentos certos e errados relacionados ao campo conceitual geométrico mobilizados neste estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas.

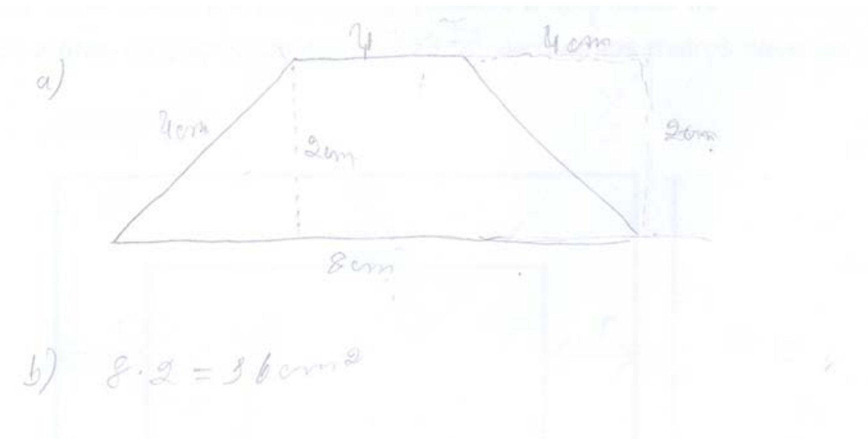
Alguns aspectos já foram discutidos em blocos anteriores, tais como aspectos relacionados à decomposição de figuras; utilização do teorema de Pitágoras; ladrilhamento do retângulo tomando como referencial a configuração retangular; a leitura e a interpretação de figuras; o traçado da altura induzindo a tomar uma partição da figura; a leitura da figura e interpretação das propriedades do retângulo não serão retomados aqui. Apontamos dois aspectos, dentre os muitos possíveis, relacionados ao campo geométrico: a confusão entre figuras geométricas e opção pela figura prototípica do triângulo.

i) Confusão entre figuras

Um dos primeiros aspectos refere-se a confusão entre figuras, por exemplo, confundir paralelogramo e trapézio. Este procedimento errôneo evidencia uma compreensão inconsistente da classificação, do conceito e das propriedades das figuras geométricas planas, importantes para construção do conceito de área e também das fórmulas de área.

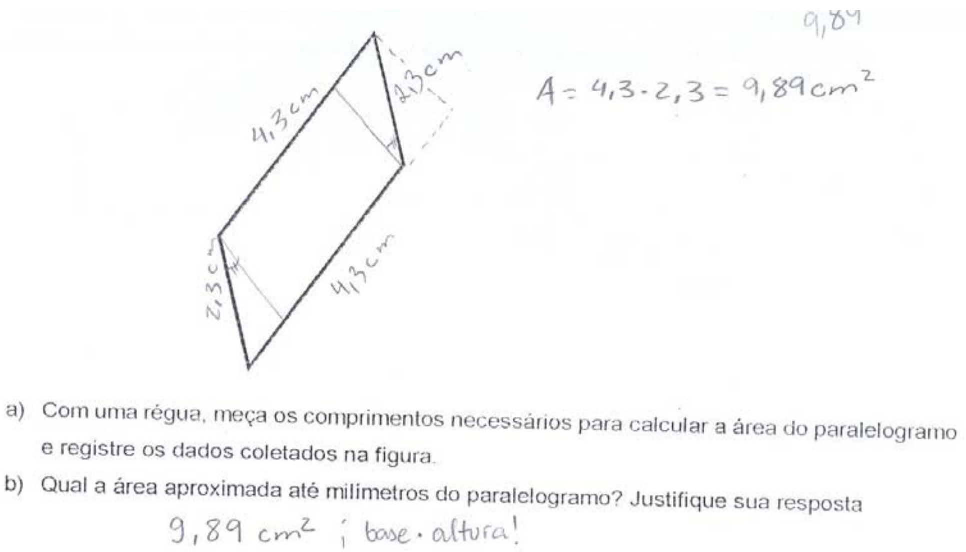
Os protocolos abaixo ilustram este erro. No primeiro, o aluno é solicitado a esboçar o desenho de um paralelogramo com o comprimento de um dos seus lados sendo o dobro do outro e a altura relativa ao lado maior medindo 2 cm. A figura resultante da tentativa do aluno é um trapézio. Este protocolo evidencia tanto a não identificação das características e propriedades da figura geométrica, quanto dificuldades relacionadas à modelagem do problema utilizando valores numéricos, ou seja, evidencia imbricação entre os campos conceituais numérico, algébrico e geométrico.

Fig. 8.41 – Prot. 41 - Q2T5G$_2$



Também foi possível identificar na questão 2 do teste 3, um procedimento relacionado à altura do paralelogramo: não identificar a altura no paralelogramo e ao decompor e recompor o paralelogramo o lado fica sendo a altura.

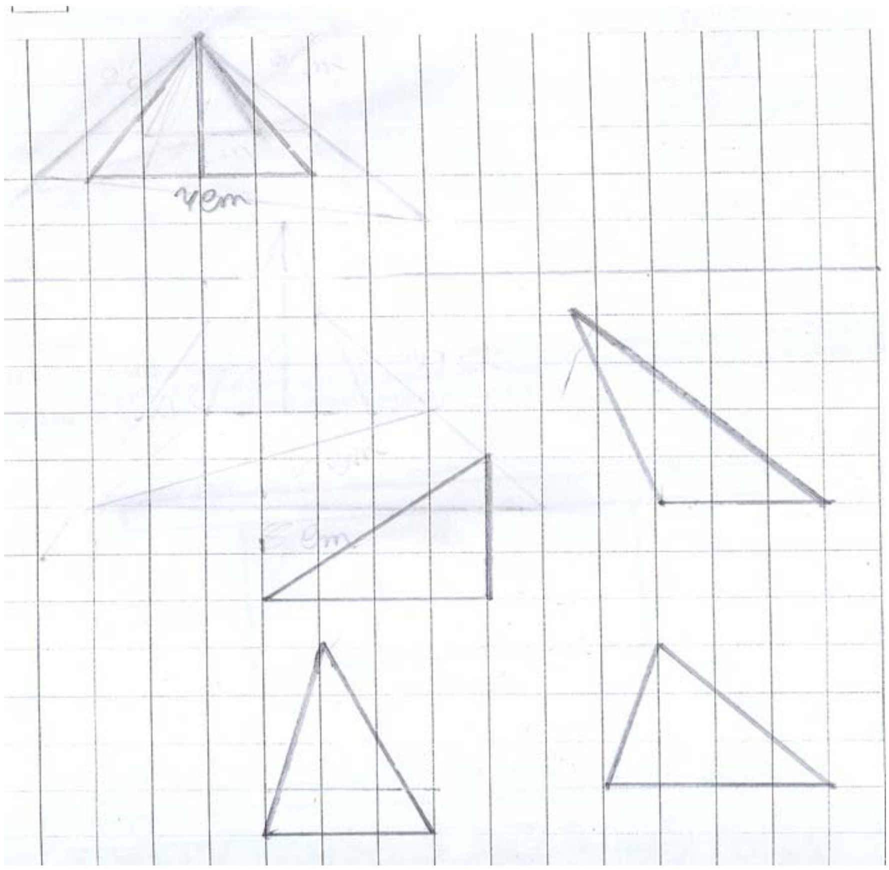
Fig. 8.42 – Prot. 42 Q2T3H$_1$.



ii) Opção por figuras prototípicas

Com relação à figura geométrica *"triângulo"* a Q2 do teste 4, respondida por 60 alunos, dentre os quais 28,33% deixaram em branco, evidenciou a total opção por triângulos retângulos e isósceles. A opção por triângulos com o lado tomado como base apoiada na horizontal, altura interna e medidas inteiras, pode ter sido influenciada pela variável papel quadriculado. Apenas 1 dos 60 alunos testados desenha um triângulo com altura externa e 3 desenham triângulos não retângulos. Outro aspecto refere-se a posição dos triângulos, os alunos parecem pensar que mudando a posição das figuras, a figura muda.

Fig. 8.43 – Prot. 43 - Q2T4H$_5$



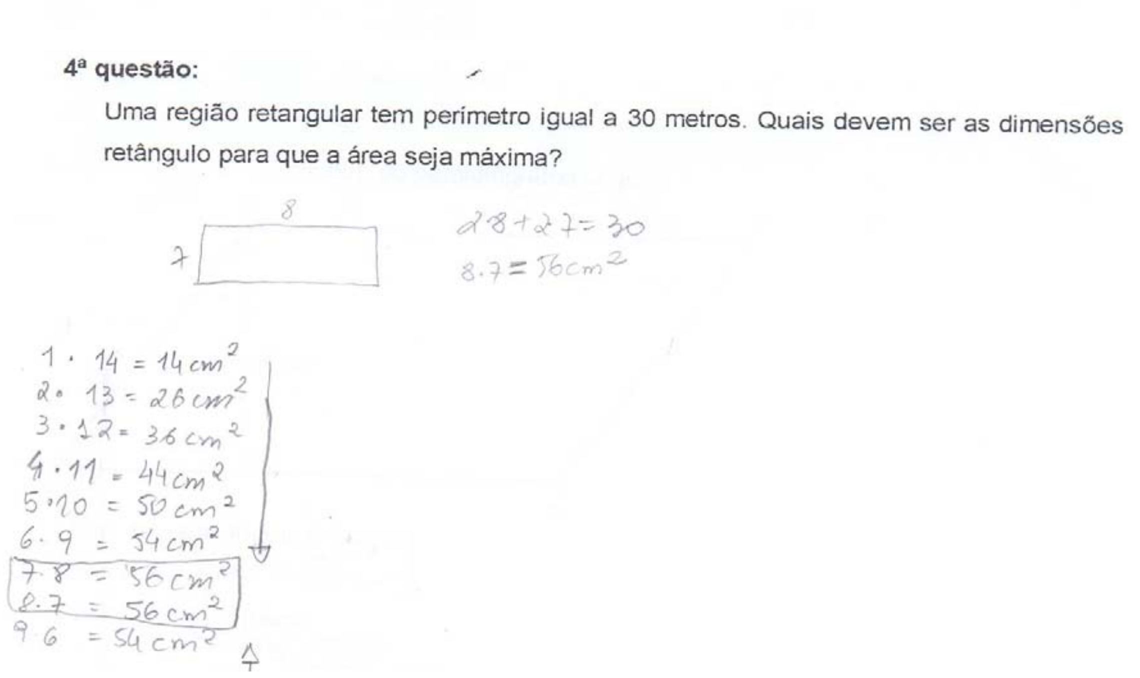
8.5.ASPECTOS RELACIONADOS AO CAMPO CONCEITUAL NUMÉRICO

8.5.1 RESTRIÇÃO AO DOMÍNIO DOS NÚMEROS NATURAIS

Embora historicamente os números decimais tenham surgido das medidas das grandezas, em nosso trabalho foi possível confirmar dificuldades relacionadas à passagem do domínio natural para o domínio dos racionais.

Escolhemos dois protocolos, de duas escolas diferentes, que ilustram esta dificuldade. Os dois alunos responderam totalmente o teste, acertando quase 100% das questões, mas se depararam com a limitação do domínio numérico restrito aos naturais, embora no segundo o aluno avance nesta direção.

Fig. 8.44 – Prot. 44 – Q4T2J$_1$


4ª questão:

Uma região retangular tem perímetro igual a 30 metros. Quais devem ser as dimensões retângulo para que a área seja máxima?

8

7

$2\cdot8+2\cdot7=30$

$8\cdot7=56cm^2$

$1\cdot14=14cm^2$

$2\cdot13=26cm^2$

$3\cdot12=36cm^2$

$4\cdot11=44cm^2$

$5\cdot10=50cm^2$

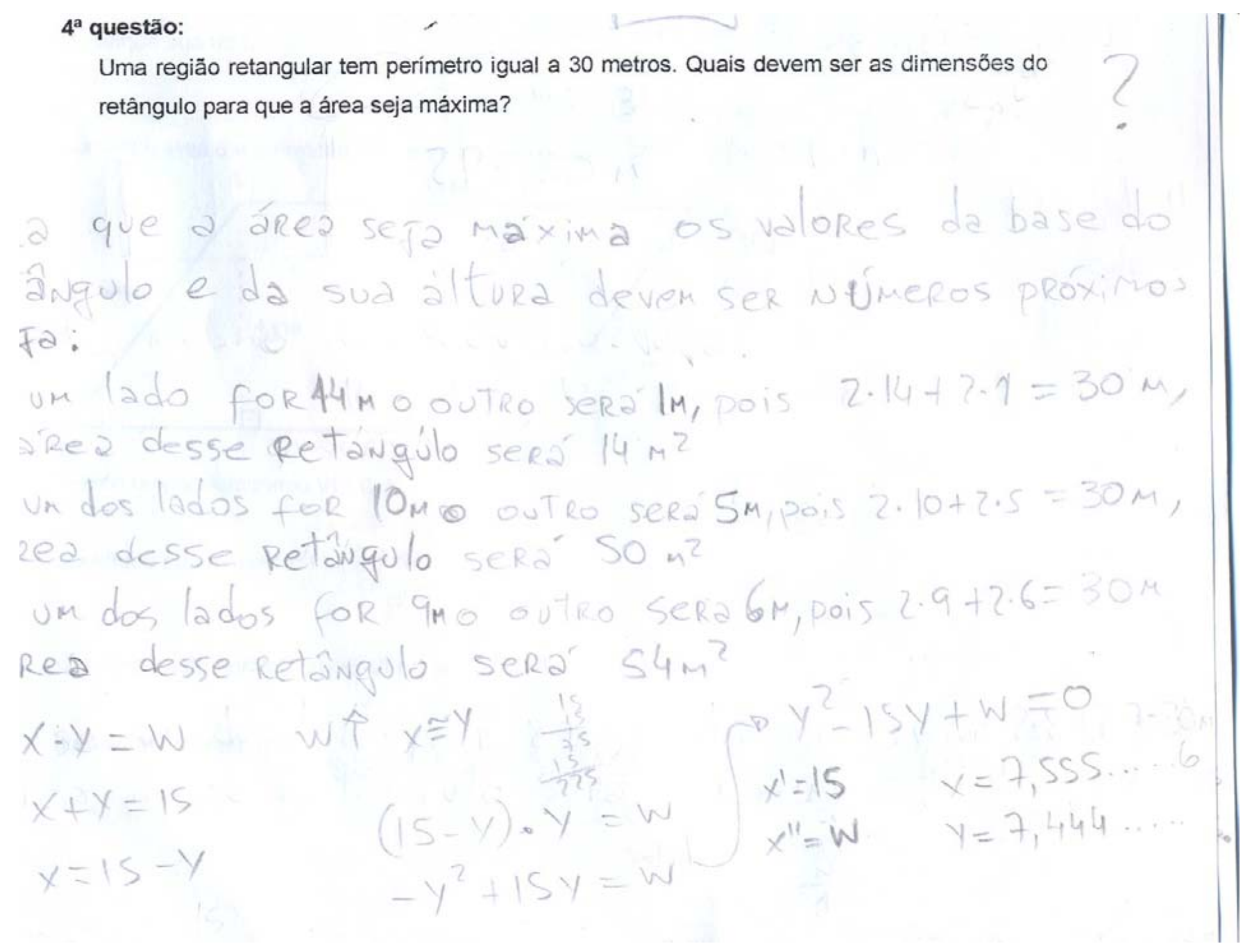
$6\cdot9=54cm^2$

$7\cdot8=56cm^2$

$8\cdot7=56cm^2$

$9\cdot6=54cm^2$

Fig. 8.45 – Prot. 45 – Q4T2F 5


4ª questão:

Uma região retangular tem perímetro igual a 30 metros. Quais devem ser as dimensões do retângulo para que a área seja máxima?

?

a que a área seja máxima os valores da base do

ângulo e da sua altura devem ser números próximos

fa:

um lado for 14m o outro será 1m, pois $2\cdot14+2\cdot1=30$ m,

área desse retângulo será 14 m²

um dos lados for 10m o outro será 5m, pois $2\cdot10+2\cdot5=30$m,

área desse retângulo será 50 m²

um dos lados for 9m o outro será 6m, pois $2\cdot9+2\cdot6=30$m

área desse retângulo será 54m²

$x\cdot y=w$ $\quad w\uparrow\ x\cong y$

$x+y=15$

$x=15-y$

$(15-y)\cdot y=w$

$-y^2+15y=w$

$y^2-15y+w=0$

$x'=15$ $\quad x''=w$

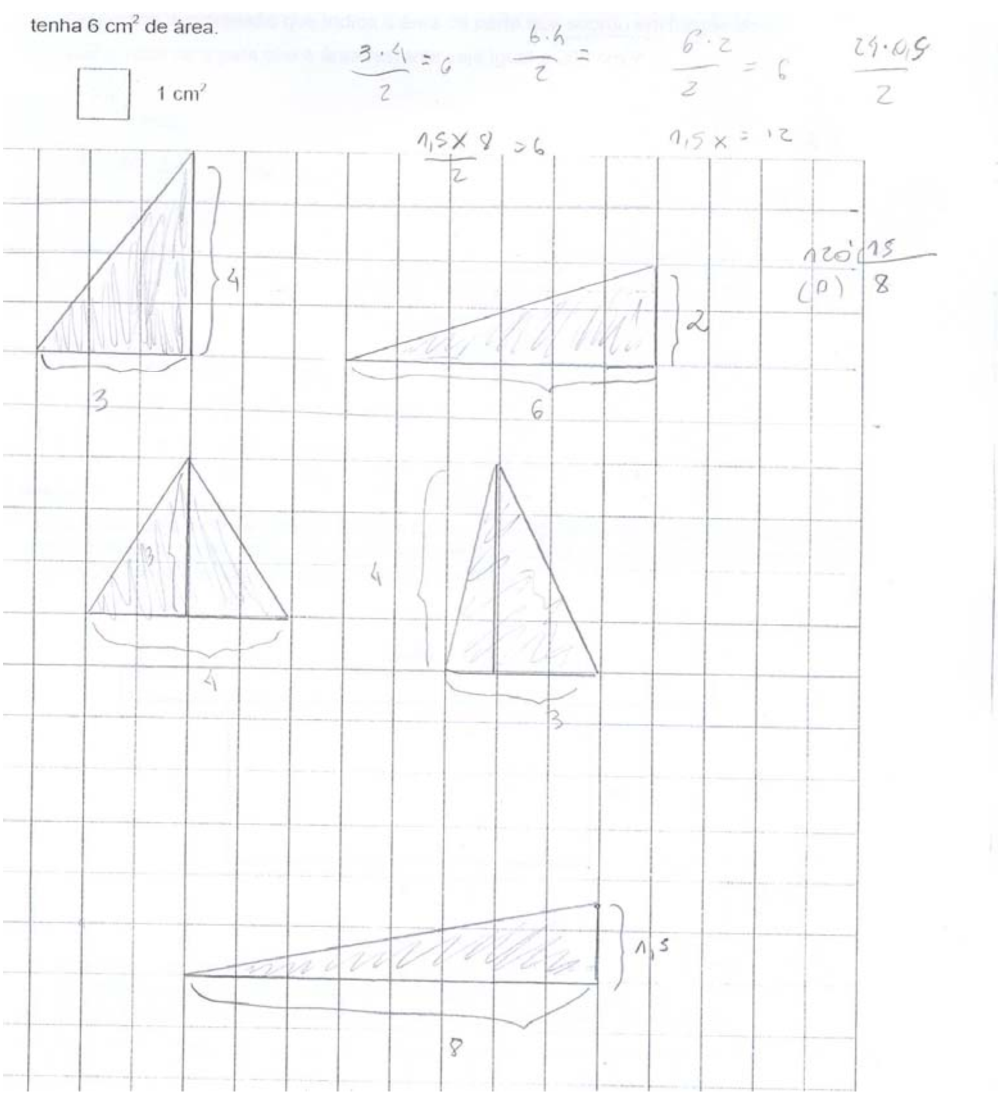
$x=7,555\ldots$

$y=7,444\ldots$

No Teste 4, questão 2 - que envolvia a produção de triângulos a partir de uma área dada -, identificamos que o procedimento predominante (43% das respostas) compreendia uma estratégia numérica restrita aos naturais: encontrar pares de números cujo produto dividido por 2 seja 6, escolher um para base e outro para altura correspondente a esta base.

Embora o papel quadriculado facilite a mobilização de medidas inteiras, 1 aluno usou medidas não inteiras.

Fig. 8.46 – Prot. 46 – Q2T4J$_1$.



8.5.2 ERROS DE CÁLCULO NUMÉRICO

Erros de cálculo numérico puderam ser identificados principalmente nas questões que envolviam o domínio dos dados ou dos resultados racional. Como também em questões onde a ordem de grandeza do número era alta.

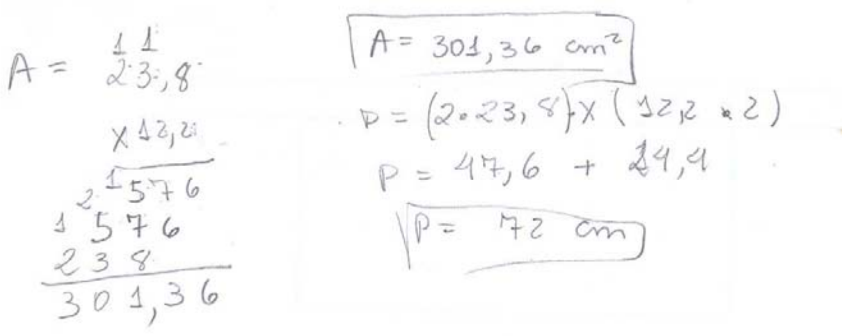
Na questão 2 do teste, por exemplo, que envolvia operações com decimais:

Determine a área e o perímetro de uma região retangular cujas medidas do comprimento e da largura são, respectivamente, 23,8 cm e 12,2 cm.

Dentre os erros identificados, 27% correspondem a erros de cálculo numérico, como ilustrado nos protocolos abaixo, confirmando dados apontados em pesquisas anteriores, entre elas, Baturo e Nason (1996). Em nosso caso, os erros referem-se a dificuldades com o agrupamento e desagrupamento do SND. Também há dificuldades com a colocação da vírgula.

No protocolo abaixo, por exemplo, o aluno comete erros relacionados ao agrupamento e desagrupamento no sistema de numeração decimal.

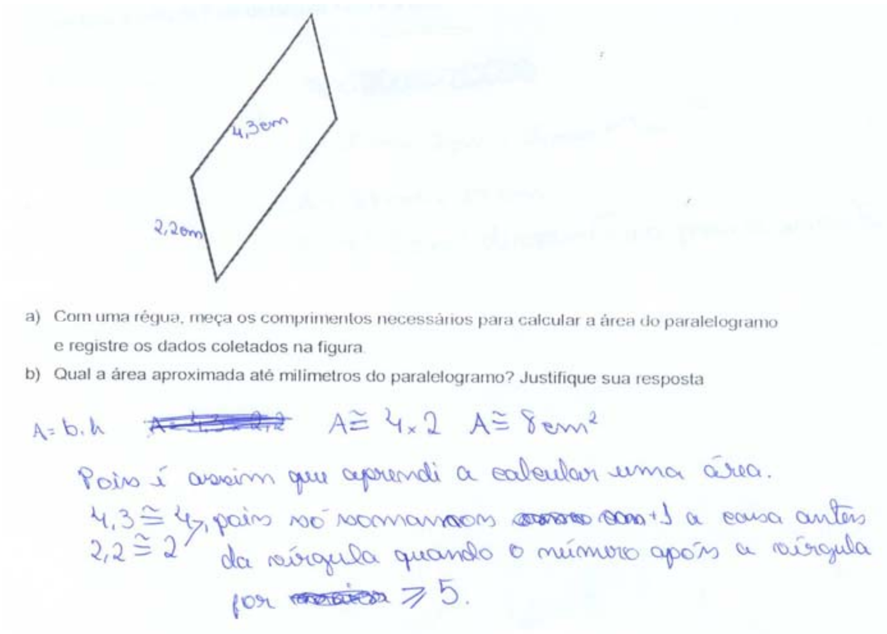
Fig. 8.47 – Prot. 47– Q2T1C$_1$



Também no Teste 3 – questão 2, apesar da questão sugerir a aproximação até milímetros quase 20% dos alunos utilizam apenas medidas inteiras. Em alguns casos o aluno registra a medida decimal, mas arredonda para efetuar os cálculos. Observam-se ainda erros relacionados ao cálculo numérico.

No protocolo abaixo, o aluno registra medidas decimais, arredonda-as e multiplica lado x lado.

Fig. 8.48 – Prot. 48 – Q2T3H$_2$



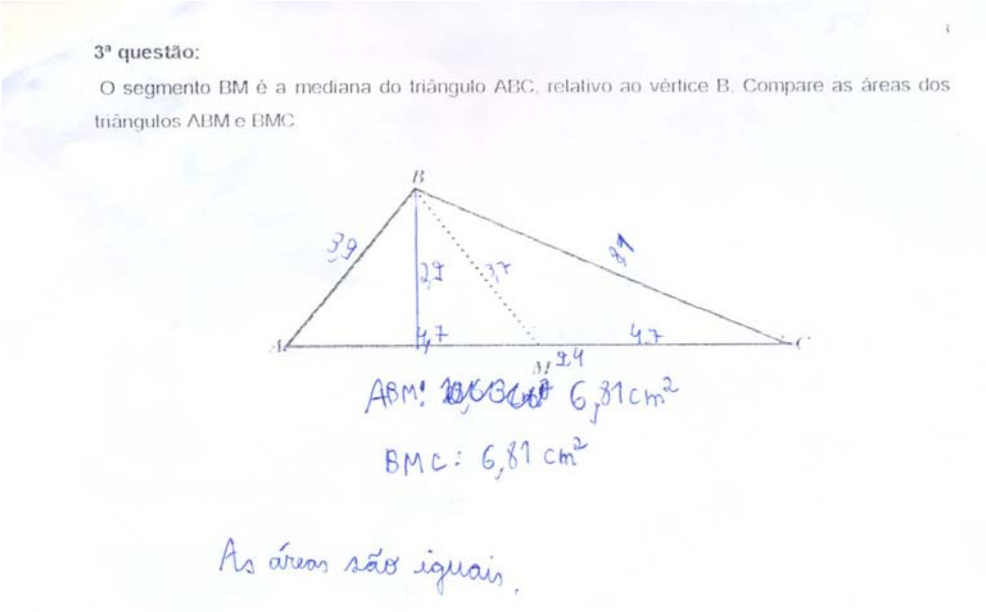
8.6. OPÇÃO POR PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS

Um dos aspectos predominantes em nossa pesquisa foi a mobilização de procedimentos numéricos para resolução de situações algébricas ou geométricas.

A questão 3 do teste 1, por exemplo, que na análise teórica, relacionamos à aplicação de princípios geométricos referentes ao fato dos triângulos ABM e BMC possuírem mesma base e mesma altura, portanto, mesma área. Necessitando, para resolução a mobilização de conhecimentos geométricos como conceito de mediana (segmento de reta que parte de um vértice até o ponto médio do lado oposto a este vértice); identificação da altura relativa a um lado tomado como base num triângulo retângulo, entre outros. Apesar disto, 28% dos alunos que responderam esta questão utilizaram procedimentos numéricos, envolvendo medir os comprimentos indicados na figura com uma régua e na maioria dos casos arredonda-las.

No protocolo abaixo a questão é resolvida numericamente por um aluno que coerentemente responde todas as questões do teste numericamente. Ele mede os comprimentos dos lados e da mediana do triângulo, traça uma altura, faz um cálculo numérico e afirma que as áreas são iguais. Neste caso não trata o triângulo genérico e sim o que está desenhado na folha de papel.

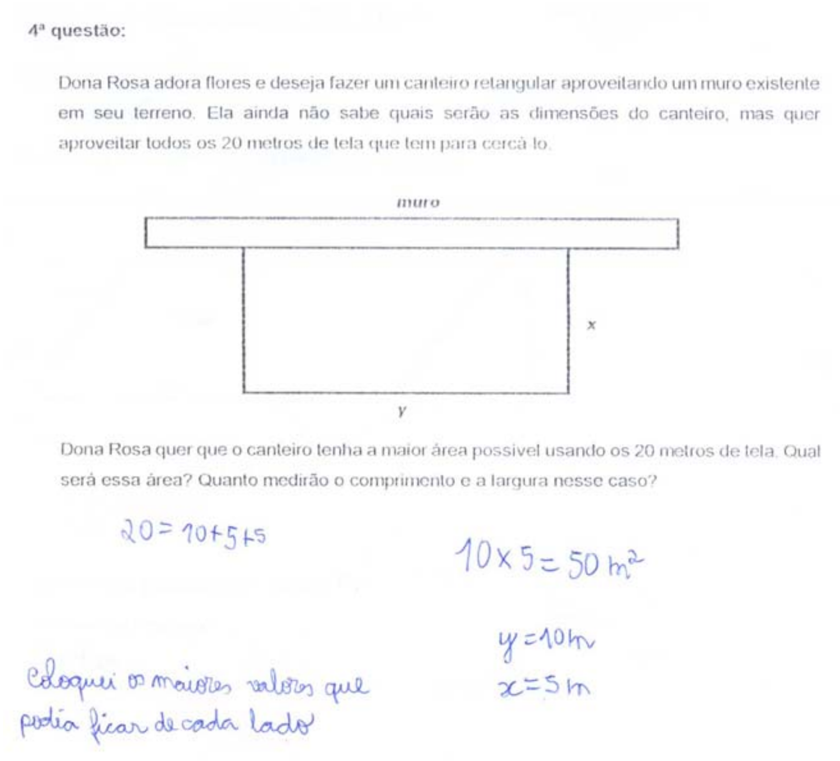
Fig. 8.49 – Prot. 49 – Q3 e Q4T1 A $_1$



3ª questão:

O segmento BM é a mediana do triângulo ABC, relativo ao vértice B. Compare as áreas dos triângulos ABM e BMC

Na quarta questão, este mesmo aluno também utiliza um procedimento numérico, por tentativa:



4ª questão:

Dona Rosa adora flores e deseja fazer um canteiro retangular aproveitando um muro existente em seu terreno. Ela ainda não sabe quais serão as dimensões do canteiro, mas quer aproveitar todos os 20 metros de tela que tem para cercá-lo.

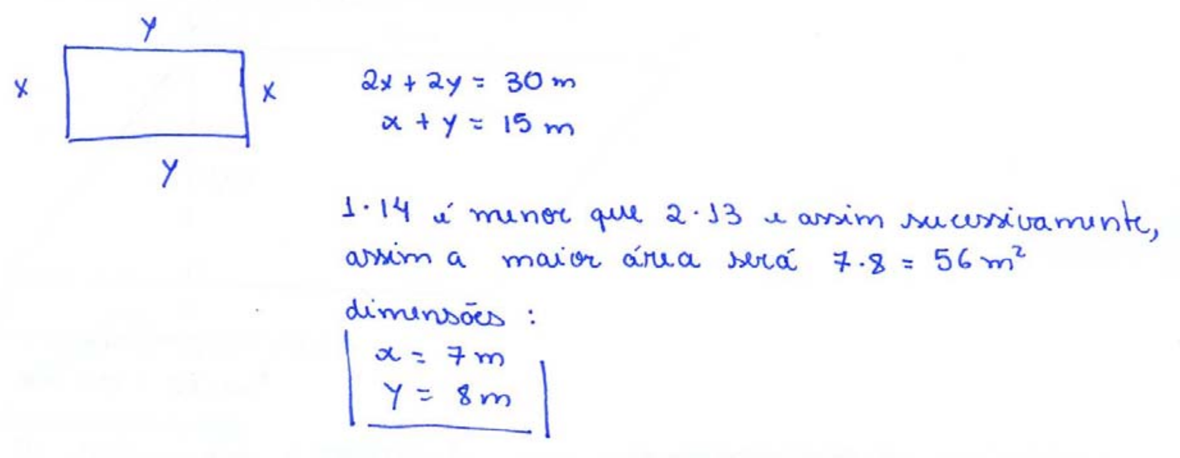
Dona Rosa quer que o canteiro tenha a maior área possível usando os 20 metros de tela. Qual será essa área? Quanto medirão o comprimento e a largura nesse caso?

Foi possível identificar a opção por procedimentos numéricos em outras questões. Por exemplo, na resolução da questão 2 do teste 2:

Um terreno de forma quadrada tem perímetro igual a 32 m. Qual é a sua área?

Dois tipos de procedimentos interligados prevaleceram: numérico e algébrico. O numérico envolve basicamente duas operações: 32:4=8 e 8x8=64. O procedimento algébrico compreende a mobilização de escrita simbólica e procedimento de resolução de equações, como no protocolo abaixo:

Fig. 8.50 – Prot. 50 Q2T2D$_1$.



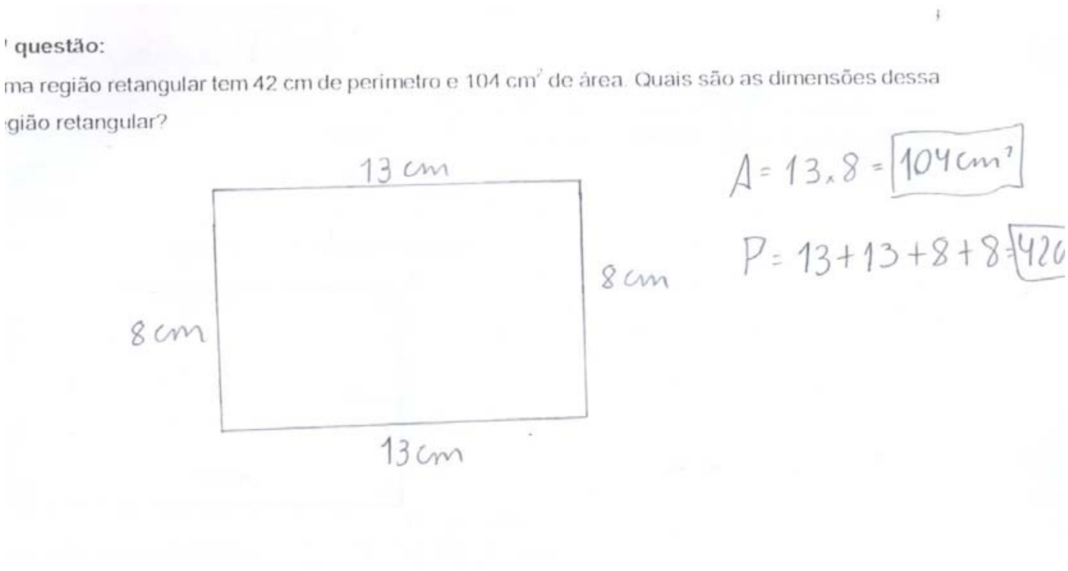
A opção por procedimentos numéricos coloca em jogo o evitamento de um procedimento geral, baseado em propriedades geométricas e a opção por um procedimento particular e sua conseqüente generalização.

Outra questão na qual também evidenciamos a preferência por procedimentos numéricos foi a questão 3 do teste 3:

Uma região retangular tem 42 cm de perímetro e 104 cm^2 de área. Quais são as dimensões dessa região retangular?

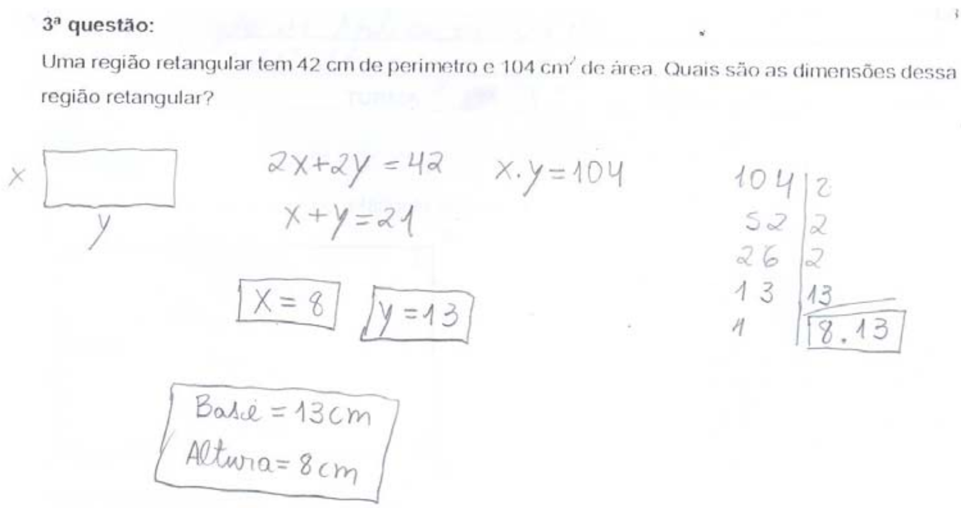
Na análise teórica dissemos que neste problema o campo algébrico contribui possibilitando a formulação e resolução de um sistema de equações com duas incógnitas. Porém, em nossa análise, 37,5% dos alunos que responderam a questão utilizaram **“procedimento numérico**”, procurando por tentativas, pares de números cujo produto seja 104 e a soma 21.

Fig. 8.51 – Prot. 51. – Q3T3G$_4$



Uma estratégia numérica interessante, ilustrada abaixo, consistiu em decompor o 104 em fatores primos.

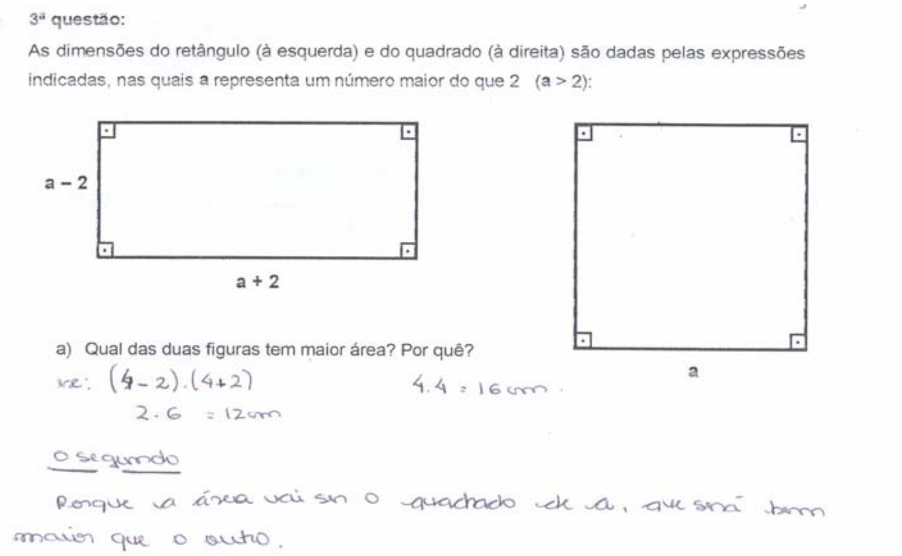
Fig. 8.52 – Prot. 52 Q3T3J$_1$



Em outros dois casos os alunos escrevem corretamente a expressão algébrica, mas optam pelo procedimento numérico, buscando o dito par de números. As tentativas restringem-se ao domínio natural.

A questão de maior índice de acerto nos testes (56 %), Questão 3 do Teste 5, que também possui um cunho algébrico, mostrou, como nas outras questões, a mobilização de procedimentos numéricos. Cerca de 22,2% dos alunos que responderam a questão optaram por este tipo de procedimento, geralmente atribuindo um valor, ou alguns valores à variável **a** e generalizando o resultado para todas as situações. No protocolo abaixo, apesar o aluno usar uma generalização abusiva ao atribuir um único valor à **a** e generalizar o resultado para todos os outros casos, chega a resposta correta.

Fig. 8.53 – Prot. 53 Q3T5J$_1$



3ª questão:

As dimensões do retângulo (à esquerda) e do quadrado (à direita) são dadas pelas expressões indicadas, nas quais **a** representa um número maior do que 2 (a > 2):

a) Qual das duas figuras tem maior área? Por quê?

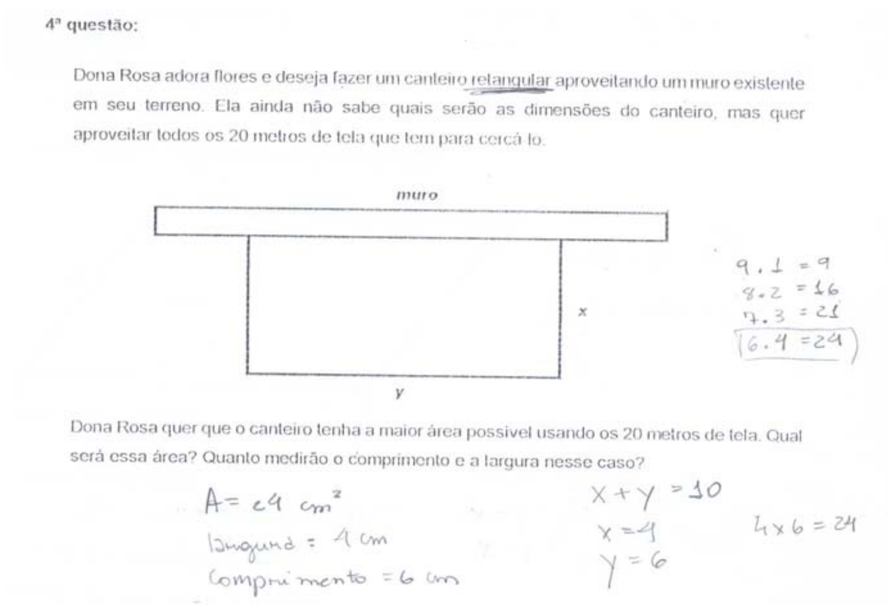
ex: (4 – 2).(4+2) 4.4 = 16cm.
2.6 = 12cm

o segundo

Porque a área vai ser o quadrado de a, que será bem maior que o outro.

Até mesmo em questões de otimização, que em nossa análise teórica relacionamos basicamente ao procedimento algébrico ou funcional, identificamos a opção por procedimentos numéricos. O protocolo abaixo de um dos 29 alunos que responderam a questão, 59% preferiram procedimento numérico. Praticamente metade acerta a questão com este procedimento. Dentre as estratégias numéricas destacamos o protocolo abaixo, onde o aluno decompõe 20 e multiplica os fatores obtidos:

Fig. 8.54 – Prot. 54 Q4T1C$_1$



4ª questão:

Dona Rosa adora flores e deseja fazer um canteiro retangular aproveitando um muro existente em seu terreno. Ela ainda não sabe quais serão as dimensões do canteiro, mas quer aproveitar todos os 20 metros de tela que tem para cercá-lo.

Dona Rosa quer que o canteiro tenha a maior área possível usando os 20 metros de tela. Qual será essa área? Quanto medirão o comprimento e a largura nesse caso?

A = 24 cm²
largura = 4 cm
comprimento = 6 cm

x + y = 10
x = 4
y = 6

4 x 6 = 24

8.7. ASPECTOS RELACIONADOS AO CAMPO CONCEITUAL ALGÉBRICO

8.7.1 ETAPAS DE RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA ALGÉBRICO

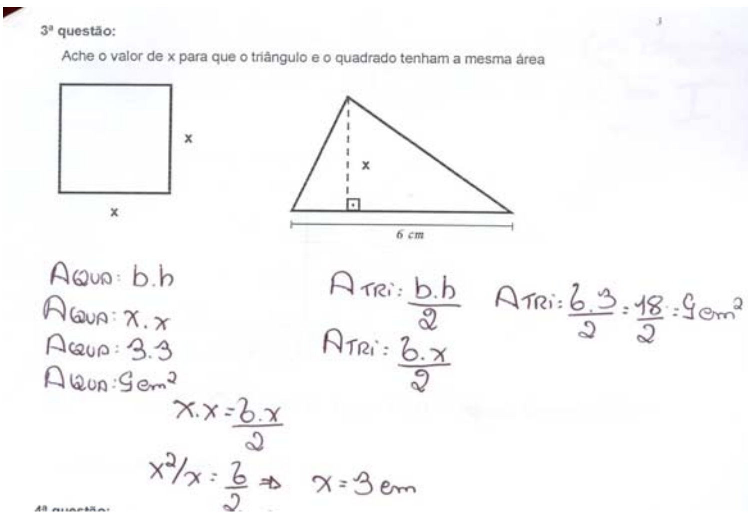
A seguir discutimos alguns aspectos relacionados especificamente ao campo algébrico, ao caracterizar procedimentos que mobilizaram conhecimentos algébricos em determinadas questões, nos deparamos com dificuldades relacionadas a escrever simbolicamente, o que conduz a procedimentos numéricos.

Na questão 3 do teste 2: "*ache o valor de x para que o triângulo e o quadrado tenham a mesma área*". Como dissemos na análise teórica, subtende o uso da fórmula para comparar. Nesta questão um dos procedimentos foi algébrico, que consistiu em escrever uma equação mobilizando a fórmula da área do quadrado e a fórmula da área do triângulo, resolver a equação e interpretar a resposta obtida. Ou seja, o aluno mobiliza as etapas para resolução de um problema algébrico propostas por Da Rocha Falcão (1997). Dentre os procedimentos de resolução da equação identificamos três estratégias predominantes:

- Resolver a equação aplicando a propriedade da equivalência em 42,3% das respostas certas obtidas. Os protocolos abaixo ilustram este procedimento.

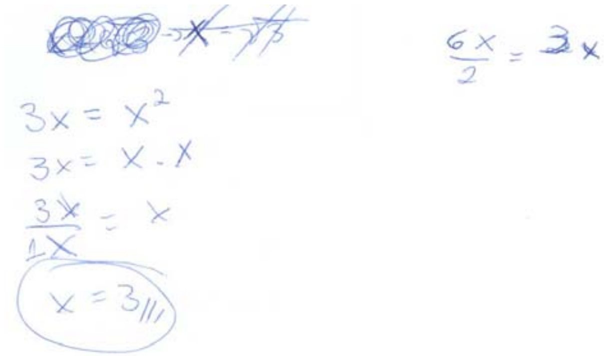
No primeiro protocolo o aluno explicita a retomada do sentido, ao substituir o valor de x encontrado nas expressões iniciais e conferir que as áreas das figuras quando x vale 3 possuem medidas iguais.

Fig 8.55 – Prot. 55 – Q3T2I$_2$



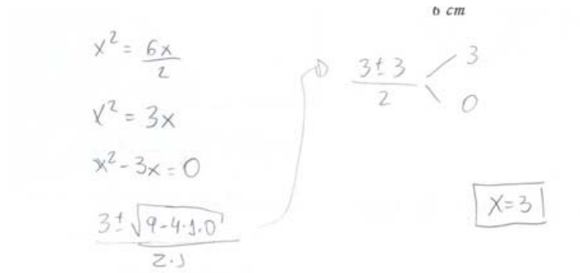
No segundo o aluno também utiliza a propriedade da equivalência, mas não retoma o sentido.

Fig 8.56 – Prot. 56 – Q3T2G$_1$



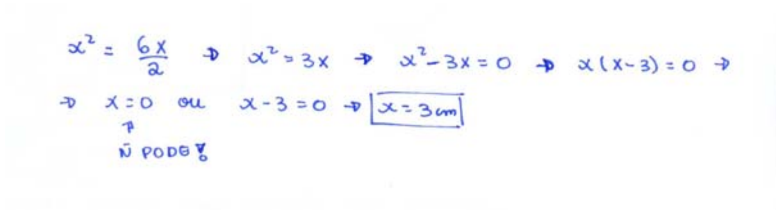
- Resolver a equação do 2º grau, utilizando a fórmula de Báskara (19,2% das respostas certas obtidas).

Fig 8.57 – Prot. 57 – Q3T2E$_5$



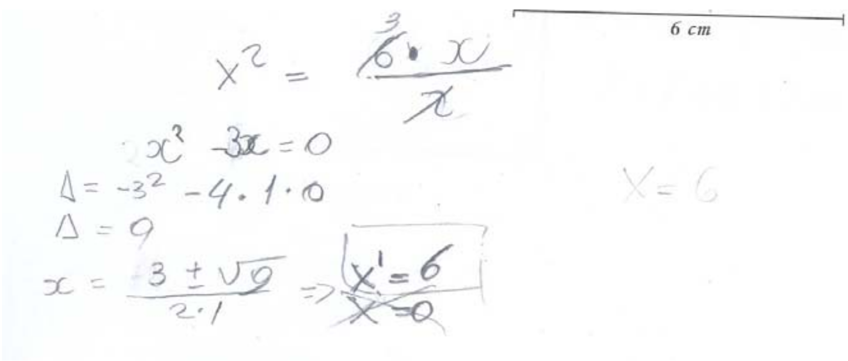
- Resolver a equação do 2º grau colocando x em evidência (5,6%):

Fig 8.57 – Prot. 57 – Q3T2D$_1$



Abaixo apresentamos uma resposta onde o aluno constrói corretamente a expressão algébrica para comparar as áreas, mas erra na resolução da equação.

Fig 8.58 – Prot. 58 – Q3T2H $_4$



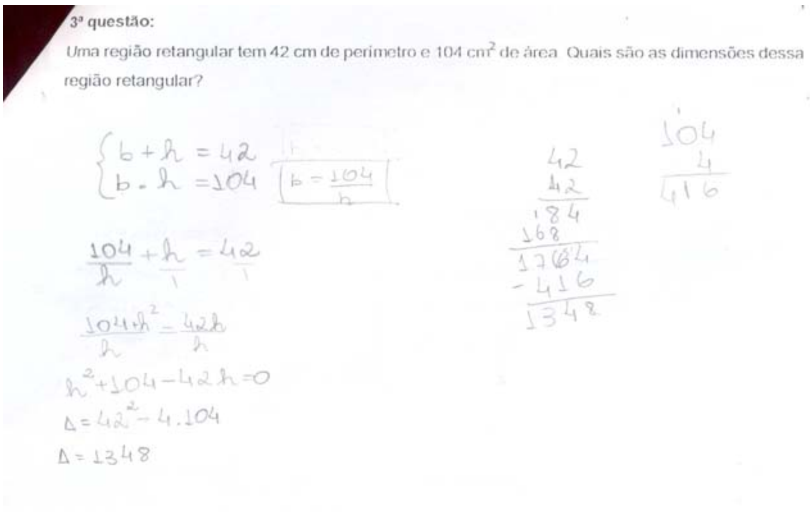
A análise das etapas para resolução do problema na Q3 do T3 - "Uma região retangular tem 42 cm de perímetro e 104 cm^2 de área. Quais são as dimensões dessa região retangular?", mostrou a preferência pelo procedimento numérico numa questão de cunho algébrico, o que, a nosso ver, sinaliza um aspecto importante relacionado à dificuldade de expressar simbolicamente uma situação geral, preferindo procedimento pontual e uma generalização forçada a partir de um exemplo numérico. Mas também foi possível identificar aspectos relacionados às etapas para resolução de um problema algébrico.

A tabela abaixo mostra, num universo de 46 alunos testados, o número de acertos e erros relacionados às etapas para resolução do problema algébrico[30].

Modelagem/escrita algébrica		resolução		interpretação	
Certo	Errado	Certo	Errado	Certo	Errado
13	1	9	5	9	5

Dentre os erros relacionados à modelagem destacamos o protocolo abaixo que evidencia a mobilização de conhecimentos corretos do ponto de vista da manipulação simbólica e das operações numéricas, mas conduzem a um resultado errôneo em decorrência de uma modelagem desconectada do conceito de perímetro.

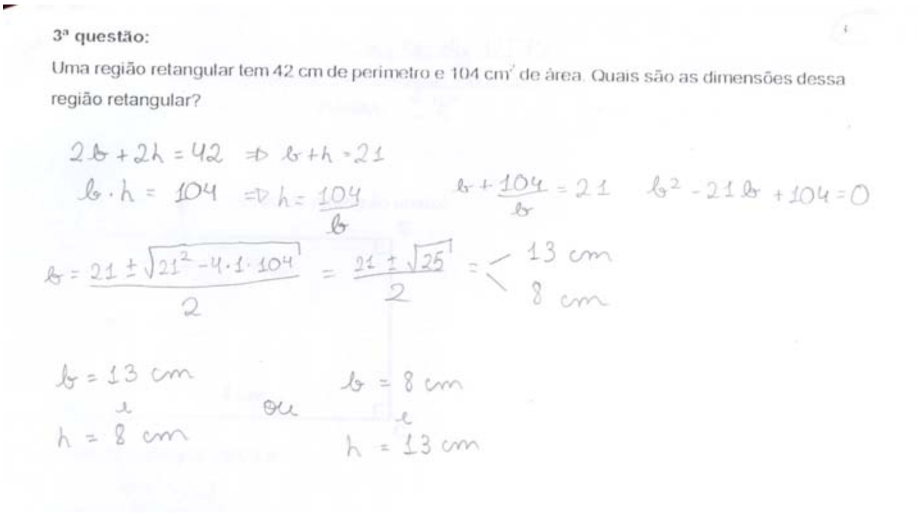
Fig 8.59 – Prot. 59 – Q3T3D$_5$



As duas expressões algébricas corretas, previstas na análise teórica, foram utilizadas pelos alunos: $2x + 2y = 42$ e $x.y = 104$. Estas expressões implicam em colocar em ação conceitos relacionados à área e perímetro e as propriedades do retângulo.

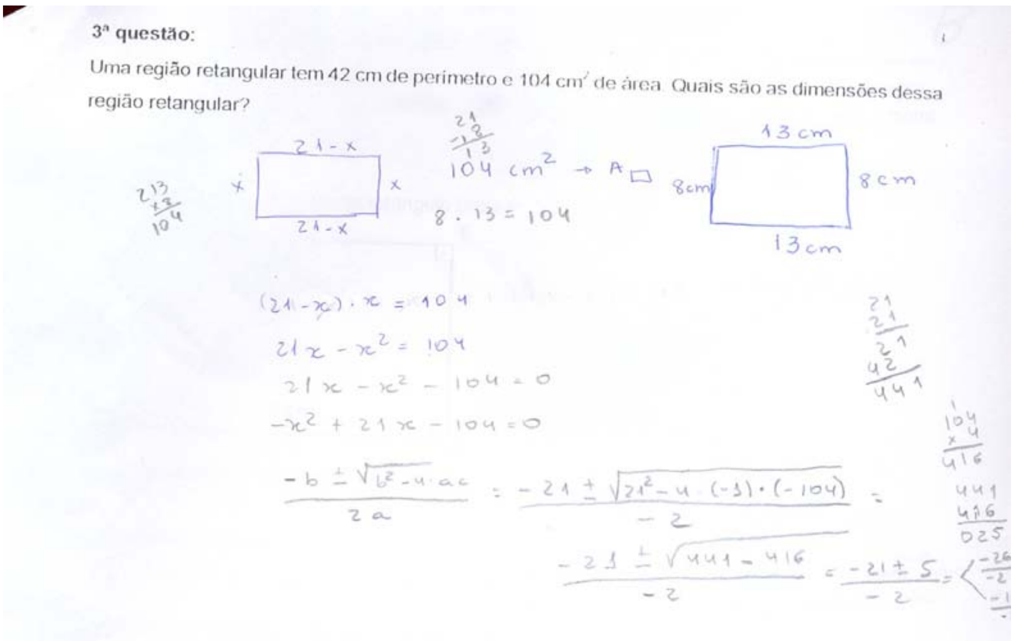
[30] A questão teve 47,83 % de ausência de resposta.

Fig 8.60 – Prot. 60 – Q3T3C$_1$



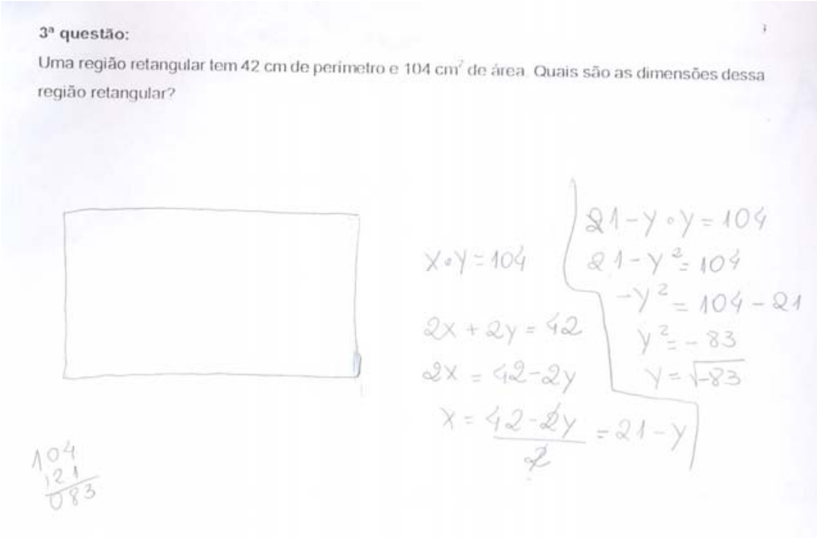
E outra expressão algébrica, que também coloca em jogo os conceitos acima e que necessita fortemente da representação simbólica em forma de figura.

Fig 8.61 – Prot. 61 – Q3T3B$_1$



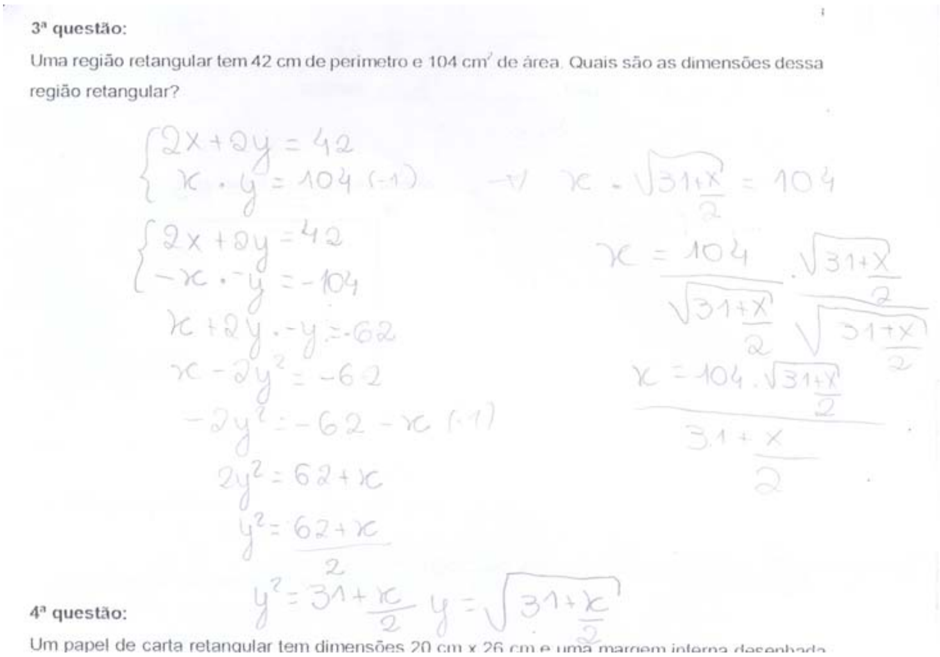
Com relação aos erros na resolução algébrica, destacamos erros de manipulação algébrica, relacionados à aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração.

Fig 8.61 – Prot. 61 – Q3T3A$_2$



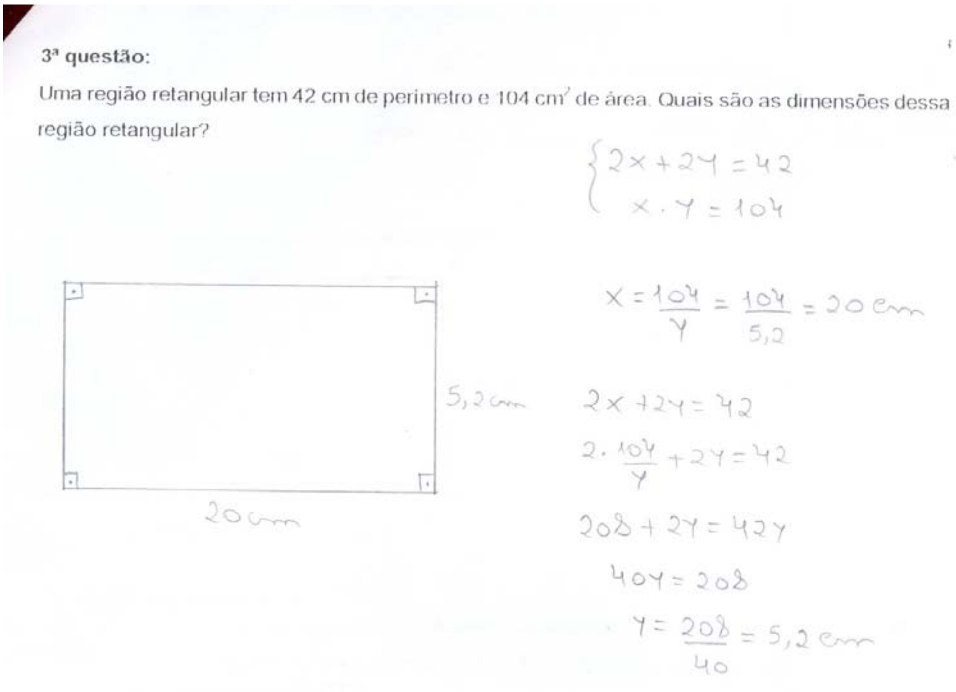
- Erro na resolução do sistema de equações

Fig 8.62 – Prot. 62 – Q3T3B$_5$



- Erro na multiplicação de um número inteiro por uma fração com denominador literal

Fig 8.63 – Prot. 63 – $Q3T3F_5$

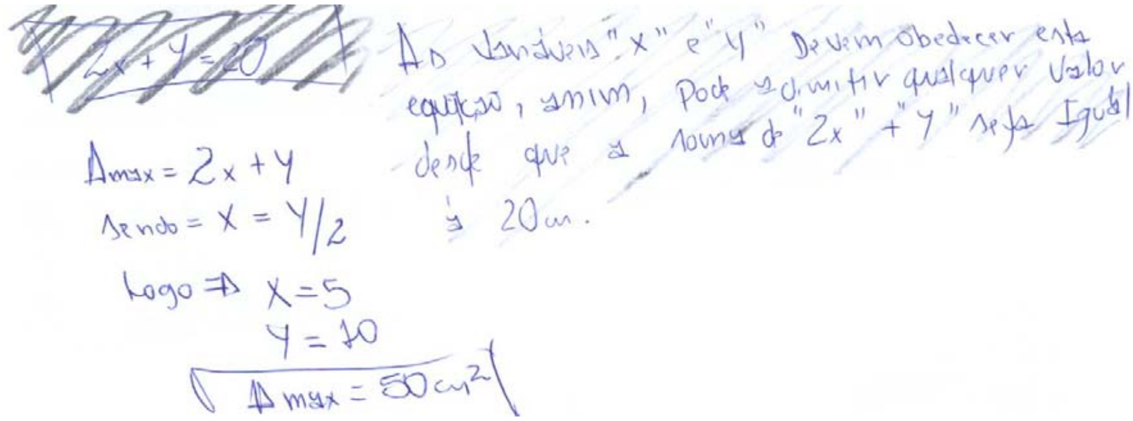


8.7.2 A DIFICULDADE DE MOBILIZAR A NOÇÃO DE VARIÁVEL

Embora em nossa análise teórica tenhamos relacionado às questões de otimização, basicamente ao procedimento algébrico ou funcional, parece-nos que dois fatores contribuíram para ausência destes procedimentos. Primeiro a ausência de respostas nas questões de otimização. Como prevíamos na elaboração dos testes, a organização das questões numa ordem crescente de dificuldades confirmou nossa hipótese sobre dificuldades em questões que mobilizavam a fórmula para otimizar. Depois a opção por procedimentos numéricos. Por exemplo, na questão 4 do teste 1, discutida acima, dos 29 alunos que responderam a questão, apenas 27,6 % optaram por procedimento algébrico.

Dentre os conhecimentos que conduzem ao acerto, nesta questão, destacamos a mobilização de **conhecimento funcional** (x e y variáveis). A rasura do aluno indica que apesar de mobilizar relações funcionais para um caso geral, não consegue para o caso específico.

Fig 8.64 – Prot. 64 – $Q4T1H_4$



~~2x + y = 20~~

As variáveis "x" e "y" devem obedecer esta equação, assim, pode admitir qualquer valor desde que a soma de "2x" + "y" seja igual à 20cm.

$A_{max} = 2x + y$

sendo $= x = y/2$

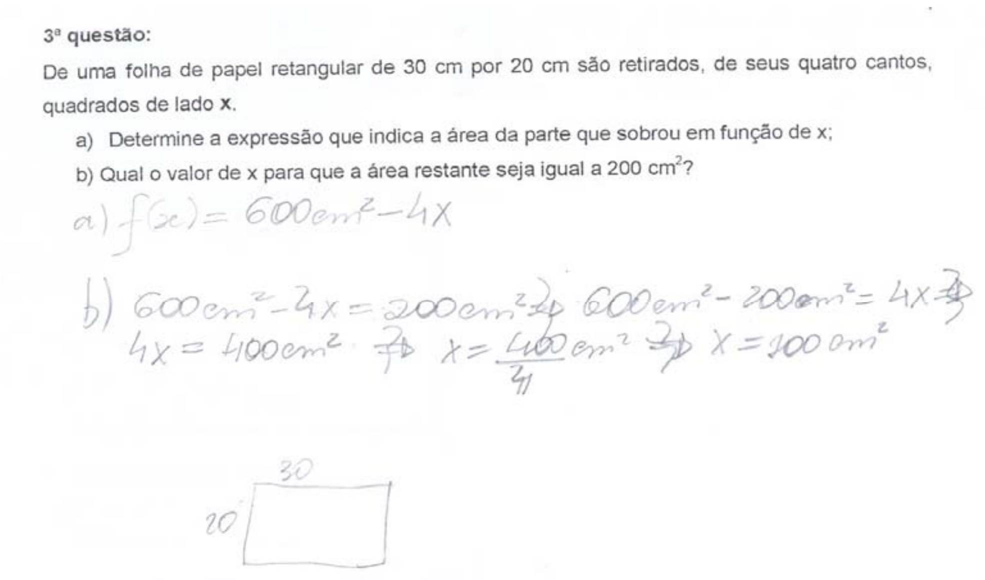
Logo $\Rightarrow x = 5$

$y = 10$

$\boxed{A_{max} = 50 cm^2}$

Num problema que exige a escrita de uma expressão algébrica, como a Questão 3 do teste 4: *"De uma folha de papel retangular de 30 cm por 20 cm são retirados, de seus quatro cantos, quadrados de lado* **x***. a)Determine a expressão que indica a área da parte que sobrou em função de x; b) Qual o valor de x para que a área restante seja igual a 200 cm*^{2}*?"*, dos 60 alunos testados, apenas 2 mobilizaram a linguagem funcional:

Fig 8.65 – Prot. 65 – $Q3T4O_2$



3ª questão:

De uma folha de papel retangular de 30 cm por 20 cm são retirados, de seus quatro cantos, quadrados de lado **x**.

a) Determine a expressão que indica a área da parte que sobrou em função de x;

b) Qual o valor de x para que a área restante seja igual a 200 cm^2?

a) $f(x) = 600cm^2 - 4x$

b) $600cm^2 - 4x = 200cm^2 \Rightarrow 600cm^2 - 200cm^2 = 4x \Rightarrow$
$4x = 400cm^2 \Rightarrow x = \frac{400}{4} cm^2 \Rightarrow x = 100 cm^2$

8.8. REPRESENTAÇÕES SIMBÓLICAS

A análise dos testes possibilitou a identificação de vários aspectos relacionados às representações simbólicas. A seguir discutiremos alguns deles:

Mesmo quando não solicitado, o desenho de uma figura geométrica foi uma das representações mais utilizadas. Por exemplo, embora a questão 2 do teste 1, não solicite o desenho da figura, 47% dos alunos utilizam o desenho como suporte para a solução do problema.

Identificamos três aspectos relacionados à figura desenhada pelos alunos nesta questão:

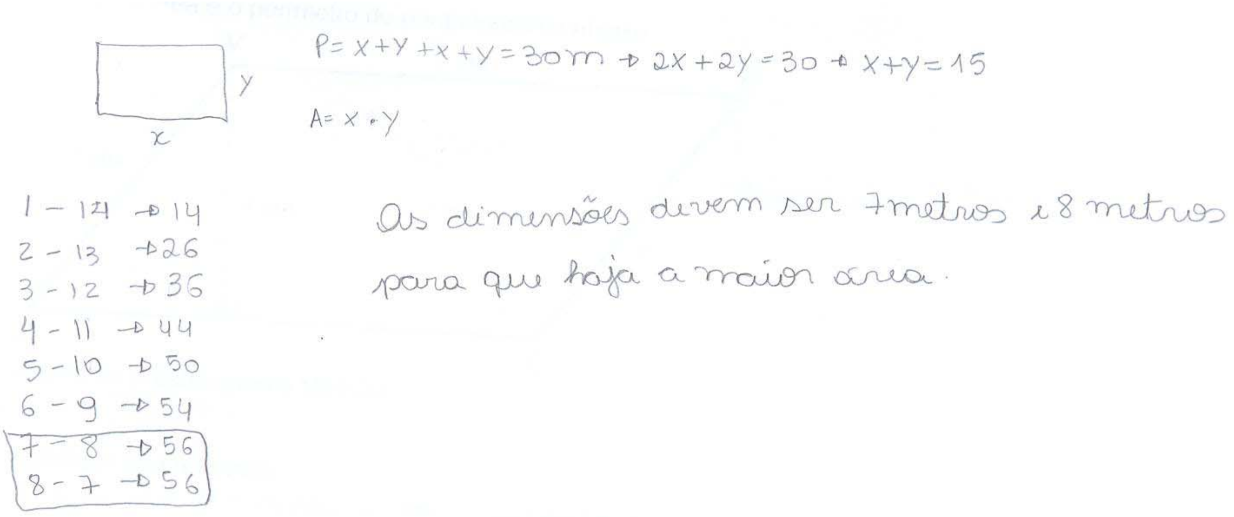
a) Esboço de figura com relativa proporcionalidade entre as medidas;

b) Esboço de uma figura geométrica, utilizando régua e identificando os ângulos retos do retângulo*;*

b) Figuras que não refletem proporcionalidade entre as medidas 23,8 cm e 12,2 cm.

Também na questão 2 do teste 2, foi possível identificar que 52% dos alunos utilizaram figuras, acompanhadas ou não de representações algébricas. Apenas 3 alunos utilizaram exclusivamente representação numérica. O protocolo baixo ilustra a mobilização de três tipos de representação na mesma situação: figura; representação algébrica e numérica.

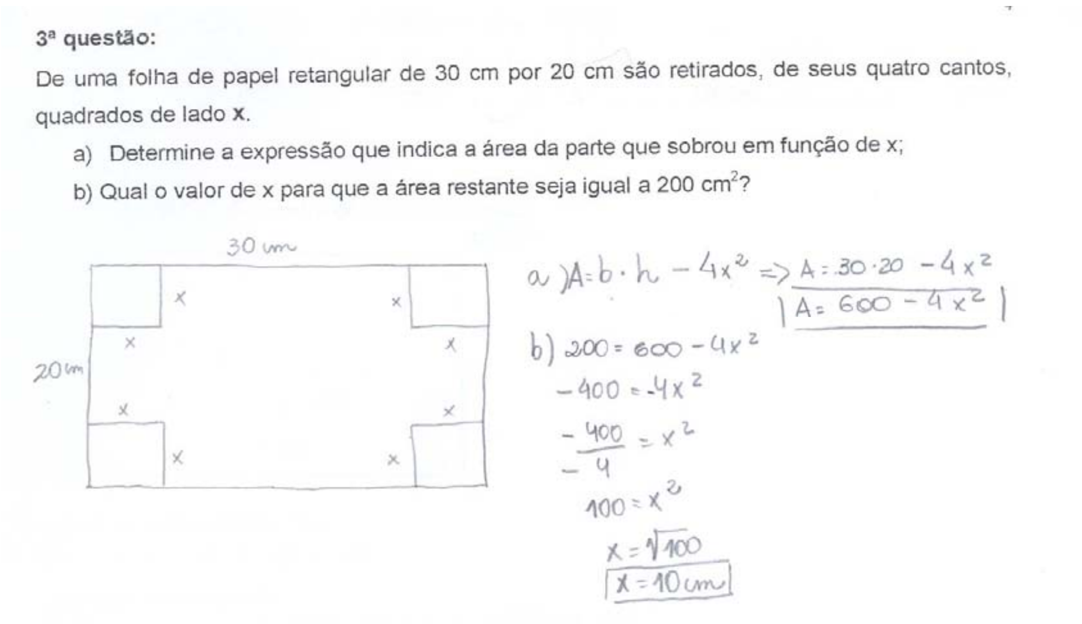
Fig 8.66 – Prot. 66 – Q4T2F$_1$



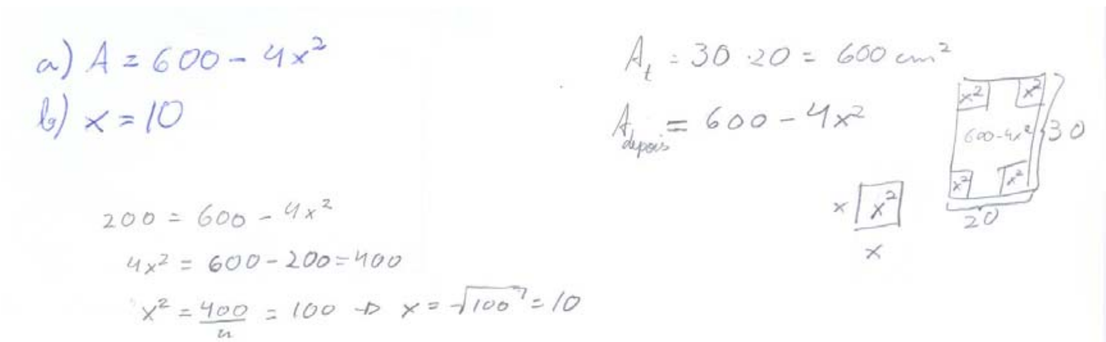
Num problema que exige a escrita de uma expressão algébrica, como a Questão 3 do teste 4: “De uma folha de papel retangular de 30 cm por 20 cm são retirados, de seus quatro cantos, quadrados de lado **x**. a)Determine a expressão que indica a área da parte que sobrou em função de x; b) Qual o valor de x para que a área restante seja igual a 200 cm^2?”, verificamos que quase 50% dos alunos que responderam a questão utilizaram a representação simbólica da figura para auxiliar a modelagem. Com relação à figura utilizada, identificamos alguns aspectos:

- Figura "correta" auxiliando a modelagem:

Fig 8.67 – Prot. 67 – Q3T4F$_1$

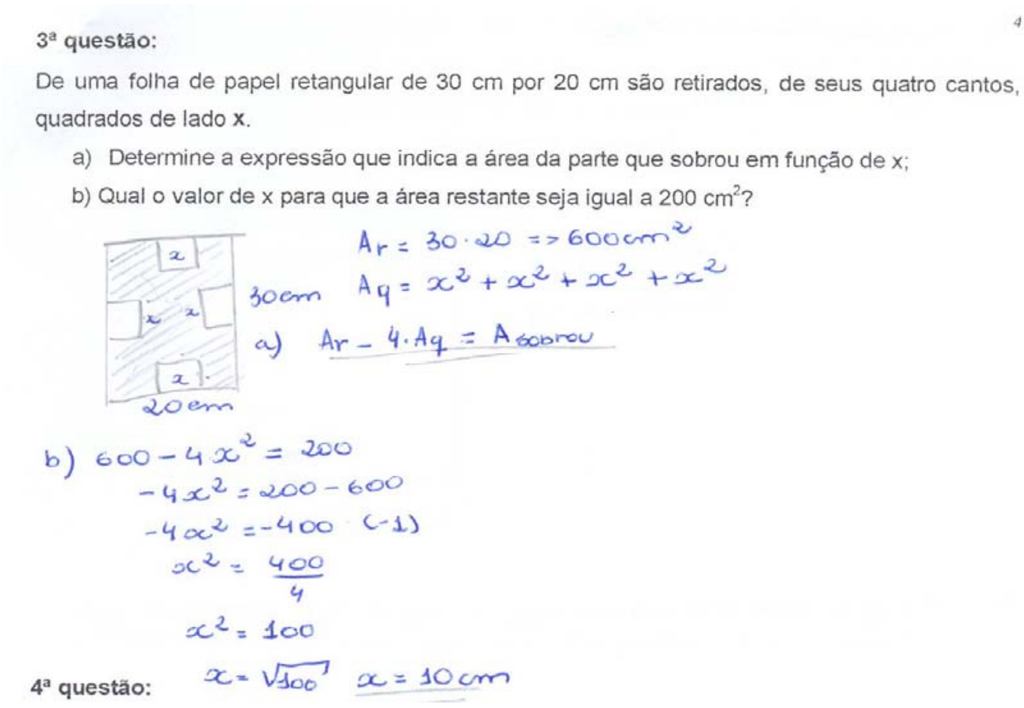


- Duas figuras – **Fig 8.68 – Prot. 68 – Q3T4H$_1$**



- A figura como elemento central no procedimento de resolução – possibilitando a escrita de uma expressão a partir da decomposição do retângulo, inclusive influenciando na representação algébrica. No protocolo abaixo, por exemplo, o aluno não retira os quadrados de lado x dos quatro cantos do papel, mas do meio de cada um dos lados da figura que desenhou:

Fig 8.69 – Prot. 69 – $Q3T4F_5$



3ª questão:

De uma folha de papel retangular de 30 cm por 20 cm são retirados, de seus quatro cantos, quadrados de lado **x**.

a) Determine a expressão que indica a área da parte que sobrou em função de x;

b) Qual o valor de x para que a área restante seja igual a 200 cm^2?

$A_r = 30 \cdot 20 \Rightarrow 600 cm^2$

$A_q = x^2 + x^2 + x^2 + x^2$

30cm

a) $A_r - 4 \cdot A_q = A_{sobrou}$

20cm

b) $600 - 4x^2 = 200$

$-4x^2 = 200 - 600$

$-4x^2 = -400 \quad (-1)$

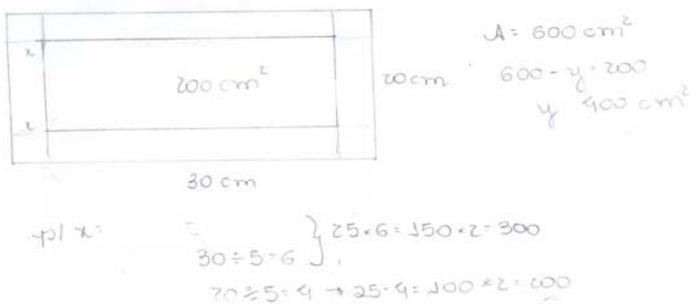
$x^2 = \frac{400}{4}$

$x^2 = 100$

4ª questão: $x = \sqrt{100}$ $x = 10 cm$

- A figura atrapalhando. No protocolo abaixo o aluno, ao invés de desenhar quadrados de lado x nos quatro cantos da figura, desenha retângulos com um dos lados medindo x e outro igual à medida do comprimento do lado do retângulo dado.

Fig 8.70 – Prot. 70 – $Q3T4F_4$



Como previsto na análise teórica, uma das questões de otimização (Q4 -T2) **"**Uma região retangular tem perímetro igual a 30 metros. Quais devem ser as dimensões do retângulo para que a área seja máxima?", que possui amplas imbricações entre campos conceituais, mobilizou vários tipos de representações simbólicas. Destacamos representações figurativas do triângulo que foram ora utilizadas para mostrar a solução ora para auxiliar a resolução. E também expressões algébricas. Os quadros mostram a quantidade destas representações mobilizadas na questão Q4 – T2.

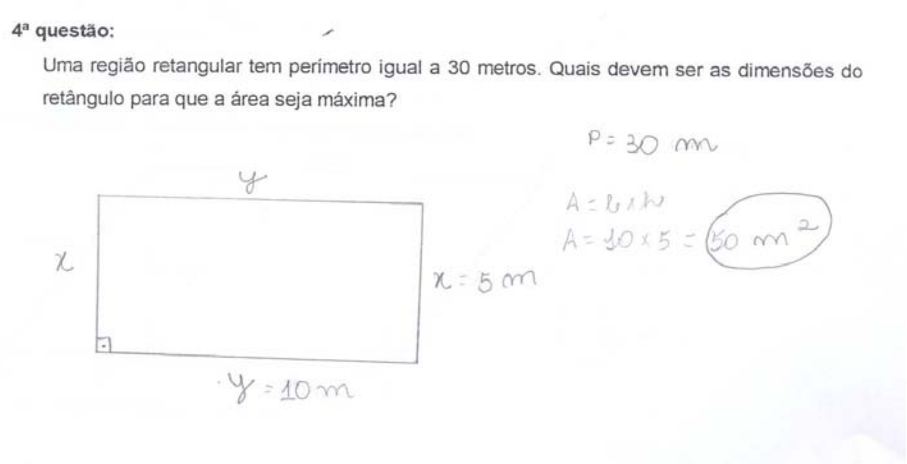
QUADROS 8.1. REPRESENTAÇÕES SIMBÓLICAS NA QUESTÃO Q4 –T2

Representações figurativas do retângulo		
Para mostrar a solução	Para auxiliar a resolução	
Retângulos com as medidas indicadas numericamente	Vários retângulos	Retângulos com as medidas indicadas por variáveis
12	7	7

Expressões algébricas	
Fórmula da área do retângulo A= B x h	Expressão algébrica para auxiliar
2	2

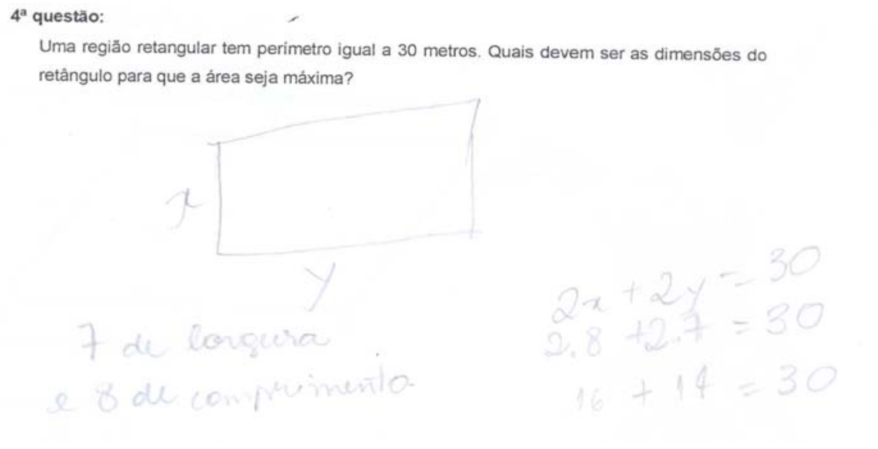
Com relação às expressões algébricas, a mobilização da fórmula da área do retângulo A= B x h, pode ser vista neste extrato de protocolo:

Fig 8.71 – Prot. 71 – Q4T2B 4



e a expressão algébrica para auxiliar neste outro protocolo:

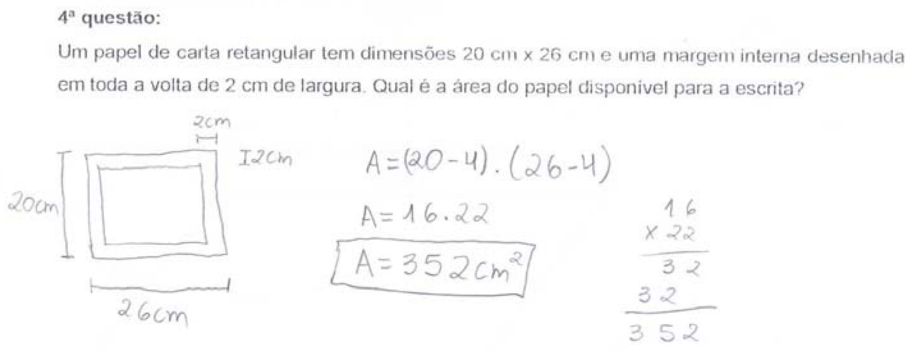
Fig 8.72 – Prot. 72 – Q4T4B 5



A análise da questão 4 do teste 3*:* "Um papel de carta retangular tem dimensões 20 cm x 26 cm e uma margem interna desenhada em toda a volta de 2 cm de largura. Qual é a área do papel disponível para a escrita?" evidenciou a mobilização de diversas representações simbólicas:

- **Figura** – mais de 50% dos alunos que responderam a questão utilizaram a representação da figura para ilustrar o enunciado.

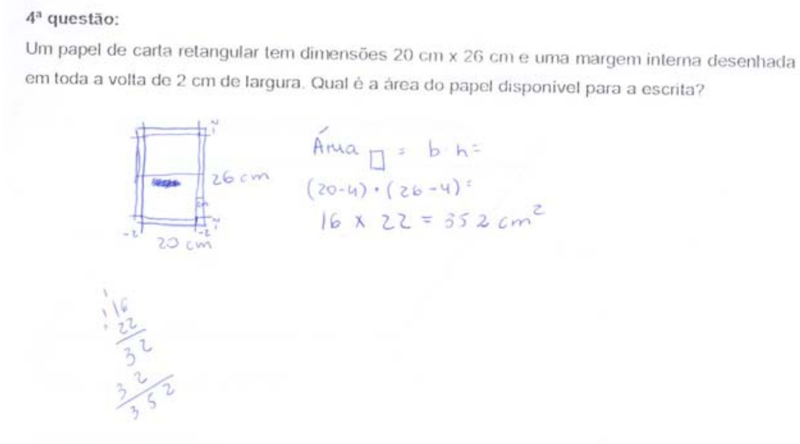
Fig 8.73 – Prot. 73 – Q4T3J 1



Destacamos ainda o uso da figura para simbolizar a resposta e o uso da figura para auxiliar a resolução.

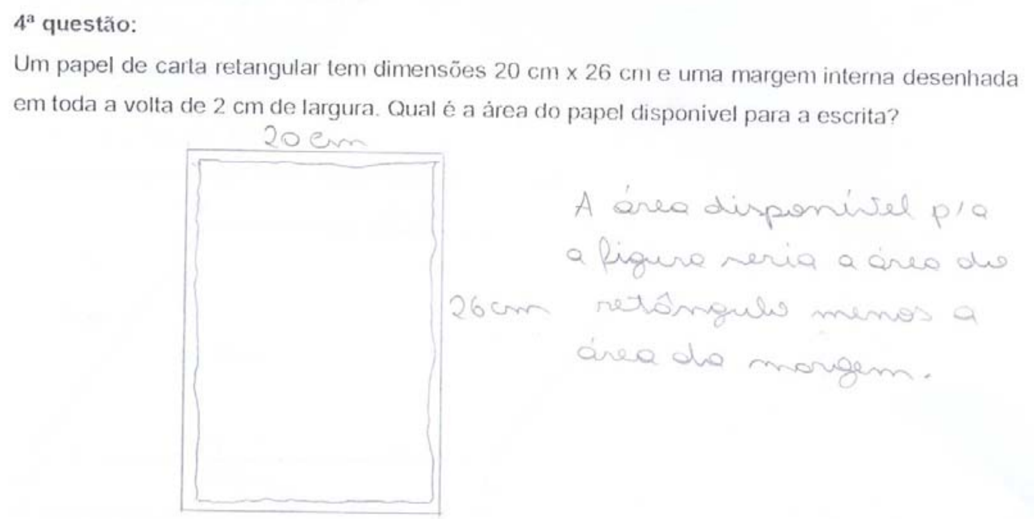
- **Representação algébrica** – cerca de 20% dos alunos utilizaram a representação simbólica b x h (fórmula da área do retângulo).

Fig 8.74 – Prot. 74 – Q4T3B 1


4ª questão:
Um papel de carta retangular tem dimensões 20 cm x 26 cm e uma margem interna desenhada em toda a volta de 2 cm de largura. Qual é a área do papel disponivel para a escrita?

- Representação em linguagem natural –

Fig 8.75 – Prot. 75 – Q4T3F 5


4ª questão:
Um papel de carta retangular tem dimensões 20 cm x 26 cm e uma margem interna desenhada em toda a volta de 2 cm de largura. Qual é a área do papel disponivel para a escrita?

8.9 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo, subsidiado pelas análises dos testes diagnósticos, buscamos avançar na caracterização da fórmula de área como um conceito. Para isto, identificamos invariantes operatórios e representações simbólicas mobilizadas pelos alunos nas situações propostas nos testes. Também analisamos quais as fórmulas corretas ou errôneas foram mobilizadas para área das do retângulo, paralelogramo e triângulo, formuladas em termos de invariantes operatórios.

E finalmente, discutimos alguns aspectos relacionados a cada um dos campos conceituais em foco neste trabalho.

A análise de procedimentos corretos e errôneos evidenciou com relação ao campo conceitual das grandezas, a mobilização de invariantes operatórios pelos alunos sobre área e perímetro. Dentre eles destacamos os seguintes invariantes: a área de uma figura geométrica plana corresponde ao comprimento de um de seus lados ou ao comprimento de algum elemento da figura (uma altura, por exemplo); a área de uma figura geométrica plana é o produto de todos os comprimentos dos lados; a área de uma figura geométrica plana é o produto de todas as medidas que aparecem na figura; o perímetro de uma figura plana é dado pela área dividida por dois; o perímetro é a soma de todas as medidas que aparecem na figura ("é a soma dos dados"). Também confirmou pesquisas anteriores que estudaram a confusão entre área e perímetro, sendo a contribuição do nosso trabalho no sentido de evidenciar esta dificuldade nos diversos tipos de situações envolvendo fórmulas de área, o que reforça a necessidade de trabalhar a construção do conceito de área enquanto grandeza e a dissociação entre área e perímetro.

Com relação à mobilização de fórmulas errôneas para as figuras geométricas planas em foco neste trabalho, foi possível identificar para a área do retângulo foi possível identificar a produção de duas fórmulas errôneas, além da confusão área e perímetro.

Para a área do paralelogramo identificamos a utilização de várias fórmulas errôneas, ressaltando a confirmação de pesquisas anteriores em relação à extensão indevida da fórmula de área do retângulo para o paralelogramo.

No cálculo do perímetro do paralelogramo o erro mais requente consistiu em "acrescentar à soma dos comprimentos dos lados a altura". Também ao decompor o paralelogramo e transformá-lo num retângulo tomar a altura como lado do paralelogramo.

Para a área do triângulo também identificamos erros relacionados à decomposição do triângulo – relacionado ao campo geométrico, pois ao nosso ver o aluno interpreta a altura como um segmento que divide a figura em duas. Este aspecto gera algumas estratégias que às vezes conduzem ao acerto outras ao erro.

Uma das estratégias mais expressivas consistiu na extensão da fórmula do paralelogramo para calcular a área do triângulo.

Para o perímetro do triângulo, um dos erros expressivos consistiu em somar todos os lados e a altura, ou seja, todas as medidas da figura.

Com relação ao campo conceitual da geometria, identificamos confusões relativas à classificação das figuras, por exemplo, confundir paralelogramo e trapézio. Também relacionados à leitura e à interpretação dos elementos das figuras, como altura do paralelogramo, por exemplo.

Com relação ao campo conceitual numérico, destacou-se o fato de, em questões de cunho algébrico e questões de cunho geométrico, os alunos mobilizaram procedimentos numéricos. A opção por procedimentos numéricos coloca em jogo o evitamento de um procedimento geral, baseado em propriedades geométricas e a opção por um procedimento particular e sua conseqüente generalização. Na resolução das questões por tentativas, o conjunto numérico utilizado restringiu-se freqüentemente ao domínio natural, o que confirma dificuldades relacionadas á passagem dos naturais para os racionais.

Mas também como previsto na análise teórica identificamos erros de cálculo numérico que interferiram na resolução de determinadas questões, tais como dificuldades com o agrupamento e desagrupamento do SND e a colocação da vírgula em produtos de números racionais em forma de decimal.

Com relação ao campo conceitual algébrico, evidenciaram-se dificuldades relacionadas a escrever simbolicamente, conduzindo a procedimentos numéricos.

Também foi possível identificar aspectos relacionados às etapas para resolução de um problema algébrico, em determinadas questões, principalmente erros relacionados à modelagem do problema. Com relação aos erros na resolução algébrica, podemos destacar, entre outros, erro de manipulação algébrica: erro na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração; erro na resolução do sistema de equações; erro na multiplicação de um número inteiro por uma fração com denominador literal.

A ausência de respostas e a opção por procedimentos numéricos nas questões de otimização, confirmaram nossa hipótese sobre dificuldades relacionadas à noção de variável e a mobilização de procedimentos algébricos e funcionais.

Com relação às representações simbólicas, mesmo quando não solicitado, o desenho de uma figura geométrica foi uma das representações mais utilizadas. Em questões que exigiam uma modelagem algébrica identificamos a utilização da representação simbólica da figura para auxiliar a modelagem.

Assim, dentre as contribuições específicas deste capítulo, podemos destacar a confirmação de estudos anteriores sobre a confusão área e perímetro. Foi possível identificar nas diversas situações: ideais com figuras, medidas inteiras, posição prototípicas, ou com ausência da figura, com medidas decimais, ou que mobilizavam a fórmula para otimizar, a confusão área e perímetro; a opção por procedimentos numéricos mesmo em questões de aspecto algébrico ou geométrico, e a confirmação de dificuldades relacionadas ao domínio numérico.

A opção por procedimentos numéricos naquelas questões que subtendem um procedimento algébrico mais geral e sofisticado, nos inquietou no sentido de refletir sobre os motivos que ajudam os alunos evitam o procedimento algébrico. Será que não dispõem de ferramentas conceituais para isto? Em nossa pesquisa foi possível verificar que, em alguns casos o procedimento numérico pode conduzir a respostas corretas, em outros não, principalmente naquelas questões onde o aspecto funcional é mais acentuado.

No próximo capítulo, analisamos resultados relativos às imbricações entre os campos conceituais em foco em situações que envolvem fórmulas de área de figuras geométricas planas.

CAPÍTULO 9
ALGUNS RESULTADOS RELATIVOS ÀS IMBRICAÇÕES ENTRE OS CAMPOS CONCEITUAIS

Os dados quantitativos possibilitaram a identificação de três indícios relativos às imbricações entre os campos conceituais: a ausência de resposta em determinadas questões que na análise teórica apontavam imbricações entre campos conceituais; o percentual de erros nas questões de otimização e a diversidade de procedimentos mobilizados em determinadas questões. Neste capítulo tomando como ponto de partida cada um desses indícios analisamos alguns resultados relativos às imbricações entre os campos conceituais em foco em situações que envolvem fórmulas de área de figuras geométricas planas.

9.1. IMBRICAÇÕES ENTRE OS CAMPOS DAS GRANDEZAS, DA ÁLGEBRA E DA GEOMETRIA NA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO Q3-T3

A questão 3 do teste 3 **(Q3-T3)**, propõe o cálculo das dimensões de um retângulo em função do perímetro e da área.

Q3 – T3:

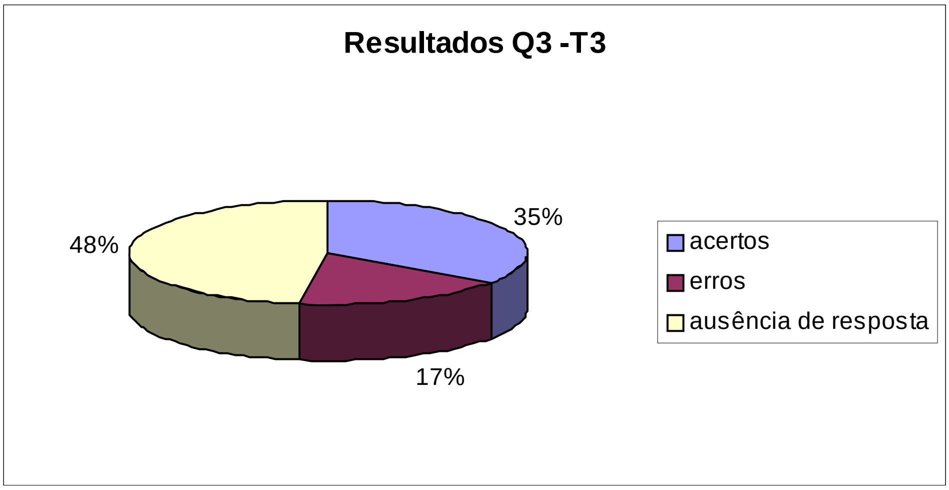
Uma região retangular tem 42 cm de perímetro e 104 cm^2 de área. Quais são as dimensões dessa região retangular?

Como antecipamos na análise teórica, os alunos mobilizaram conhecimentos dos vários campos conceituais para resolver esta questão. Ao nosso ver, a ausência de respostas (quase 50% dos alunos testados) evidenciada na análise quantitativa, pode ser pelo menos parcialmente explicada pela dificuldade de mobilizar conhecimentos importantes dos campos conceituais: das grandezas, da geometria e o da álgebra. O quadro abaixo ilustra, no universo de 46 alunos testados a quantidade de acertos, erros e ausência de resposta:

QUADRO 9.1. RESULTADOS Q3-T3:

Acertos	Erros	Ausência de resposta
16	8	22
34,8%	17,4%	47,8%

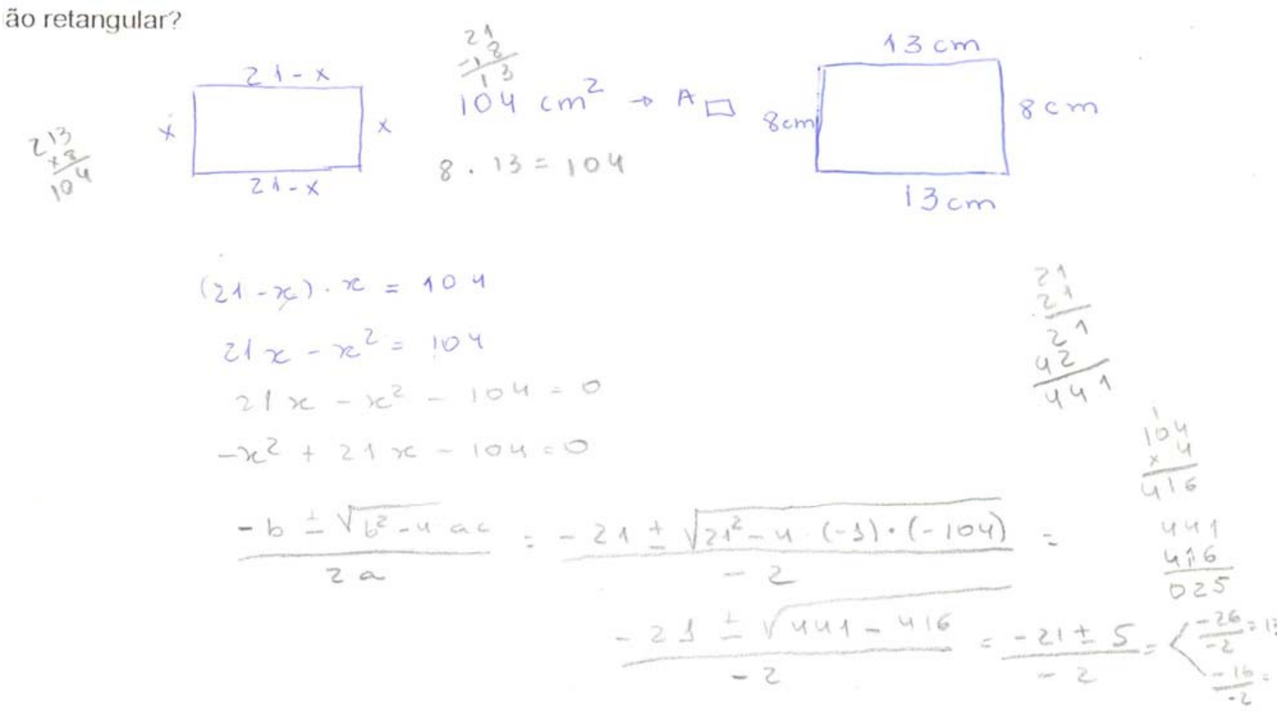
GRÁFICO 9.1: Resultados da Questão Q3 –T3



Representar simbolicamente as informações oferecidas no enunciado subtende imbricações entre o campo conceitual das grandezas, da geometria e da álgebra. O aluno precisa colocar em ação conhecimentos referentes aos conceitos de área e perímetro de um retângulo e também representar simbolicamente a relação entre estes dois conceitos. Ao traçar a figura para ilustrar a região retangular mobiliza propriedades do retângulo. Precisa modelar utilizando representação algébrica para os lados da figura e escrever a expressão algébrica resultante. Para o perímetro, precisa representar simbolicamente a adição de 4 lados, iguais dois a dois compondo 42. E a área como o produto de um dos lados tomado como base pela altura correspondente totalizando 104. Em nossa análise, 42% dos alunos que responderam a questão utilizaram a representação simbólica da figura para ajudar o raciocínio ou para confirmar os valores encontrados por tentativa.

O protocolo abaixo apresenta uma solução correta para questão. Nele o aluno mobiliza conhecimentos dos vários campos conceituais, ilustrando nossa hipótese que a ausência de resposta em determinadas questões relaciona-se a necessidade de conhecimentos variados, ou seja, as imbricações entre campos conceituais são uma explicação possível para índices elevados de ausência de resposta.

Figura 9.1. Prot. 1. Q3T3A$_1$



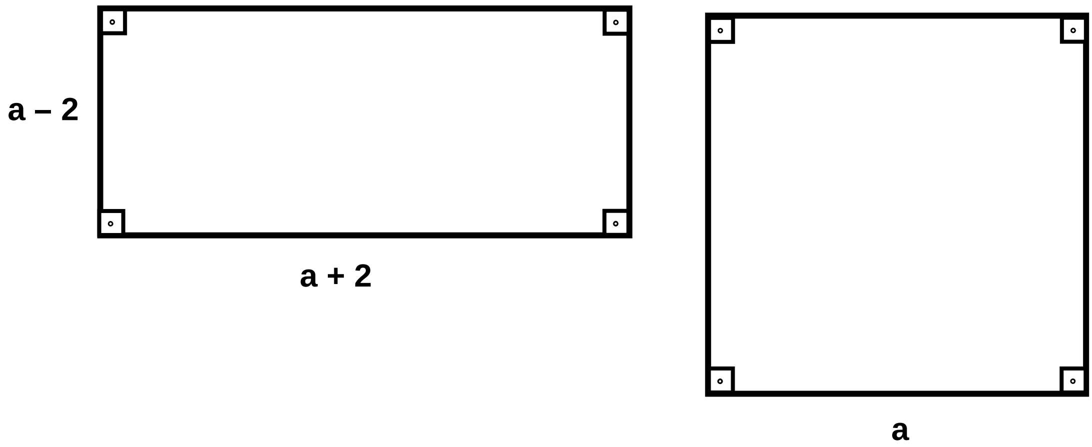
Este aluno mobiliza conhecimentos do campo geométrico para fazer articulações entre as propriedades e a maneira de organizar o desenho do retângulo. Mobiliza também conhecimentos do campo das grandezas relacionados aos conceitos de área e perímetro, ao mesmo tempo em que usa o campo algébrico para modelar o problema escrevendo simbolicamente as dimensões do retângulo.

9.2. IMBRICAÇÕES ENTRE OS CAMPOS DAS GRANDEZAS, DA ÁLGEBRA E NUMÉRICO NA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO Q3-T5

As imbricações podem ser vistas não só como fator de entrave, mas como abertura de possibilidade de resolução evidenciada na variedade de tipos de procedimento de resolução. A questão Q3 –T5 foi a que teve maior índice de acerto (56%).

Questão 3 do teste 5 (Q3 – T5)

As dimensões do retângulo (à esquerda) e do quadrado (à direita) são dadas pelas expressões indicadas, nas quais a representa um número maior do que 2 ($a > 2$):



b) Qual das duas figuras tem maior área? Por quê?

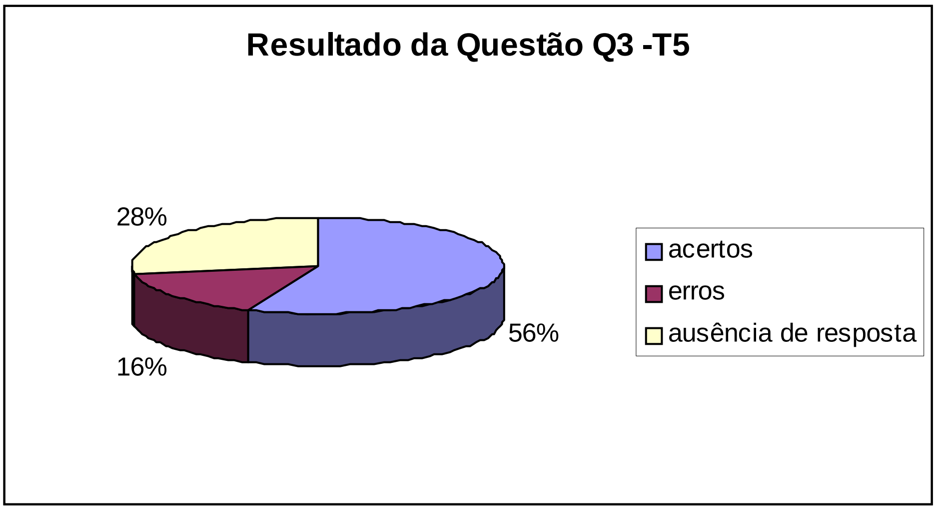
Esta questão, como dissemos na análise teórica, coloca em jogo conhecimentos dos vários campos conceituais. Do campo conceitual geométrico a leitura e a interpretação das figuras geométricas: retângulo e quadrado e suas propriedades; campo conceitual das grandezas a mobilização das fórmulas de área do retângulo e do quadrado; do campo conceitual algébrico a modelização e manipulação simbólica das expressões geradas pela escrita das fórmulas e do campo conceitual funcional – o papel da letra como variável, caracterizado inclusive pela ausência de unidades de medida na questão, que implica em aceitar que para qualquer valor (restrito a um domínio) e para qualquer unidade vale a relação estabelecida.

O quadro abaixo ilustra no universo de 50 alunos testados a quantidade de acertos, erros e ausência de resposta:

QUADRO 9.2. – RESULTADO DA QUESTÃO Q3 –T5

Acertos	Erros	Ausência de resposta
28	8	14
56%	16%	28%

GRÁFICO 9.2. – RESULTADO DA QUESTÃO Q3 –T5

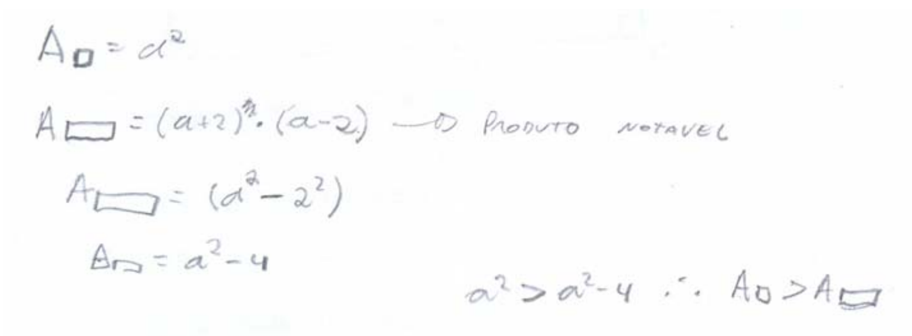


As imbricações puderam ser identificadas, nas justificativas apresentadas para "*qual das duas figuras tem maior área*" na questão 3 do teste 5, as quais classificamos em:

- Justificativa algébrica – baseada na expressão algébrica.

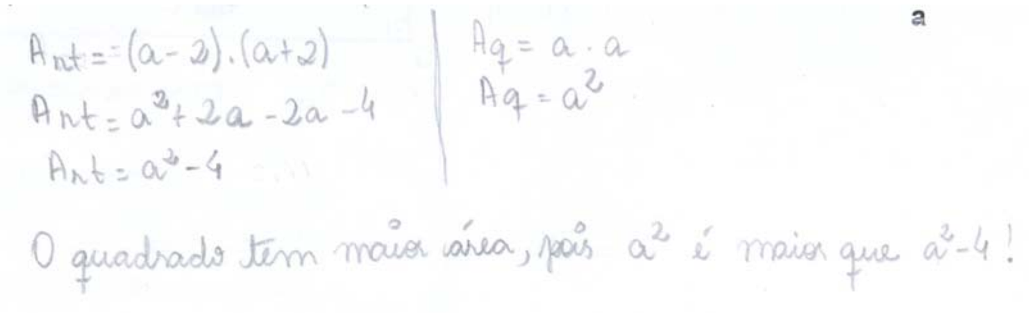
No primeiro protocolo o aluno representa simbolicamente as áreas das figuras; resolve a expressão correspondente, compara-as e explicita simbolicamente que se a primeira expressão é maior do que a outra, então a área da figura à qual corresponde aquela expressão é maior do que a outra área.

Figura 9. 2. Prot. 2 - Q3T5G$_1$



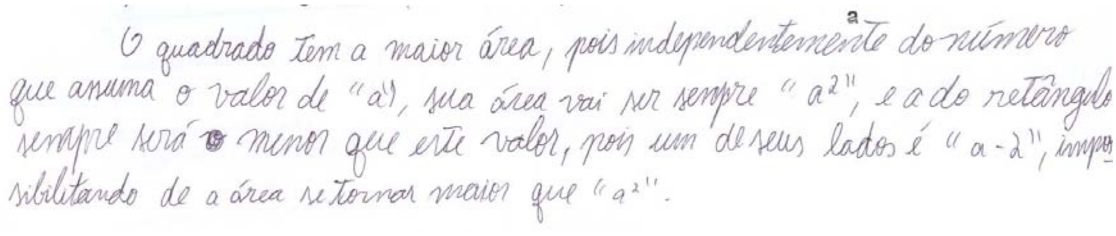
No segundo protocolo o aluno faz o mesmo procedimento, só que justifica utilizando linguagem natural.

FIG. 9.3 – Prot. 3 - Q3T5D$_5$



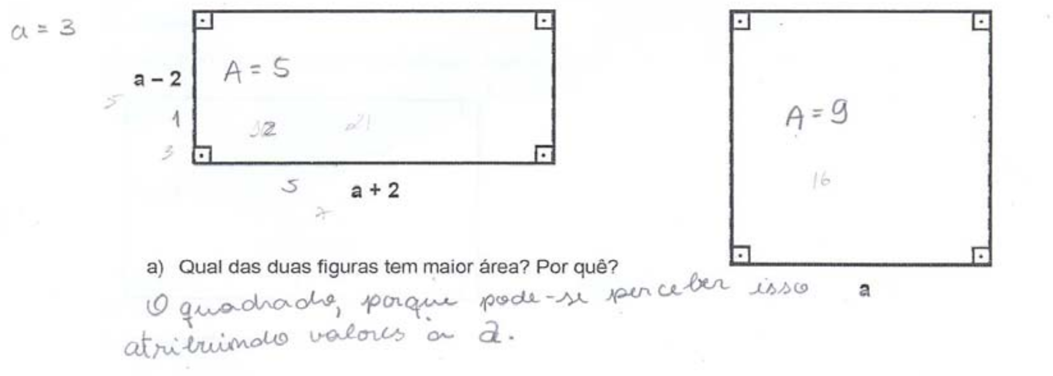
Já no protocolo abaixo o aluno apresenta uma justificativa, que embora não esteja correta, explicita aspectos relacionados ao papel da letra enquanto variável.

FIG. 9.4 – Prot. 4 - Q3T5D$_1$



- Justificativa numérica – baseada na atribuição de valores à variável **a,** como ilustra o protocolo abaixo.

FIG 9.5 – Prot. 5 - Q3T5E$_1$,



- E a justificativa relacionada às grandezas – baseada explicitamente nas áreas, ou relacionadas ao comprimento dos lados.

Nas resoluções ilustradas nos protocolos abaixo o significado das expressões algébricas a^2 e $a^2 - 4$ do ponto de vista das grandezas é explicitado pelos alunos, ou seja, referencial semântico da álgebra é resgatado por eles.

FIG. 9.6. – Prot. 6 - Q3T5B$_2$

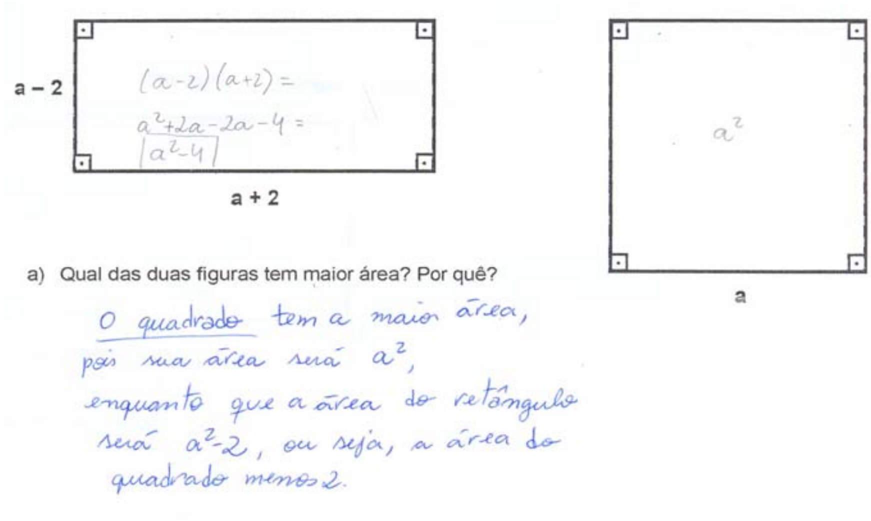
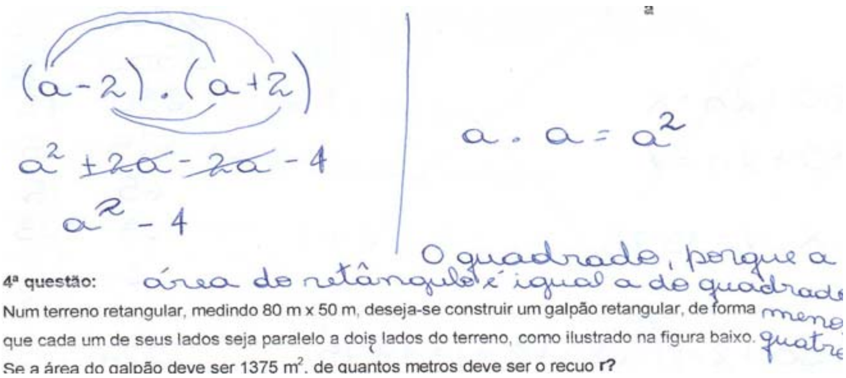
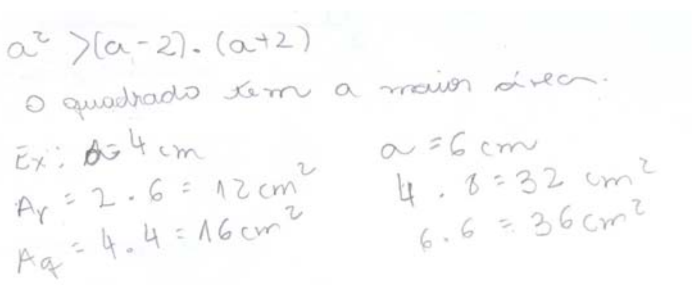


FIG.9.7. – Prot. 7 -. Q3T5B$_1$



Destacamos ainda nesta questão **(Q3 –T5),** o aspecto numérico completando o algébrico. No protocolo abaixo o aluno usa representação algébrica, mas propõe um exemplo numérico para ilustrar sua conclusão.

FIG.9.7. – Prot. 7 -. Q3T5K$_1$

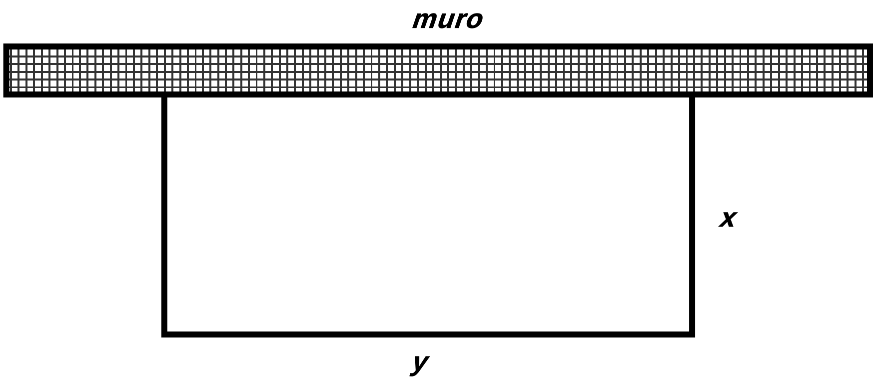


Assim, os vários procedimentos e justificativas apresentados pelos alunos nesta questão, evidenciam um modo de pensar as imbricações entre os campos conceituais: possibilidade de mobilizar variadas estratégias de resolução.

9.3 ANÁLISE DAS IMBRICAÇÕES NOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

As questões de otimização mostraram imbricações relacionadas aos erros cometidos pelos alunos para resolver, por exemplo, a questão 4 do teste 1:

Dona Rosa adora flores e deseja fazer um canteiro retangular aproveitando um muro existente em seu terreno. Ela ainda não sabe quais serão as dimensões do canteiro, mas quer aproveitar todos os 20 metros de tela que tem para cercá-lo.



Dona Rosa quer que o canteiro tenha a maior área possível usando os 20 metros de tela. Qual será essa área? Quanto medirão o comprimento e a largura nesse caso?

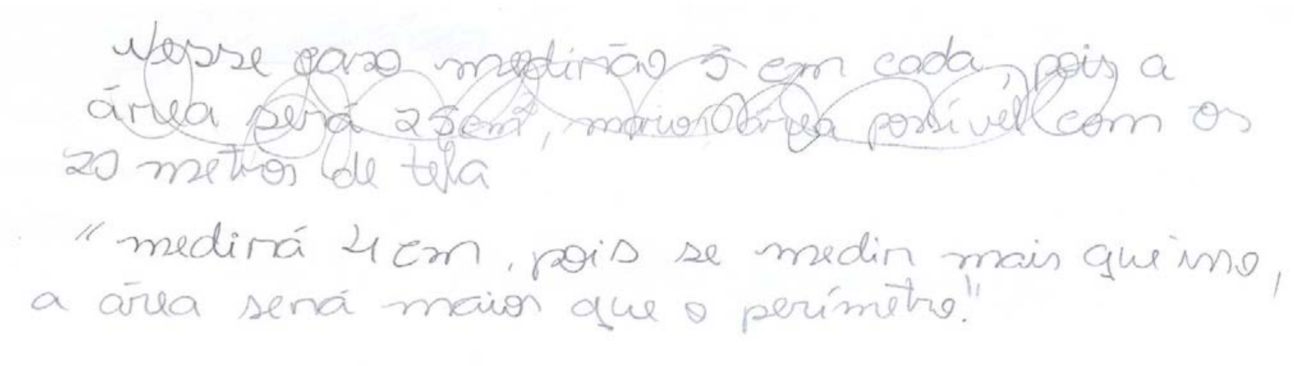
A análise das questões de otimização mostrou que os erros cometidos pelos alunos são oriundos dos vários campos conceituais. Identificamos erros relacionados à confusão entre área e perímetro pertencente ao campo das grandezas; erro que reflete dificuldade na interpretação de um modelo real por meio de uma figura geométrica, relacionado ao campo geométrico; erros na modelagem e na resolução de expressões algébricas ligado ao campo algébrico e erro que corresponde à não interpretação da letra como uma variável, relacionado ao campo funcional.

i) ERRO RELACIONADO AO CAMPO DAS GRANDEZAS

- **Erros relacionados à confusão entre área e perímetro** - Para 6 alunos área e perímetro são iguais ou mantêm a mesma proporção. ou ainda a maior área possível é 20.

No primeiro protocolo o aluno explicita que a área e o perímetro do canteiro precisam ser iguais, mobilizando um falso teorema-em-ação identificado em várias pesquisas anteriores. A comparação que o aluno faz evidencia uma concepção numérica. E reforça a necessidade de trabalhar a dissociação área e perímetro na abordagem do conceito de área.

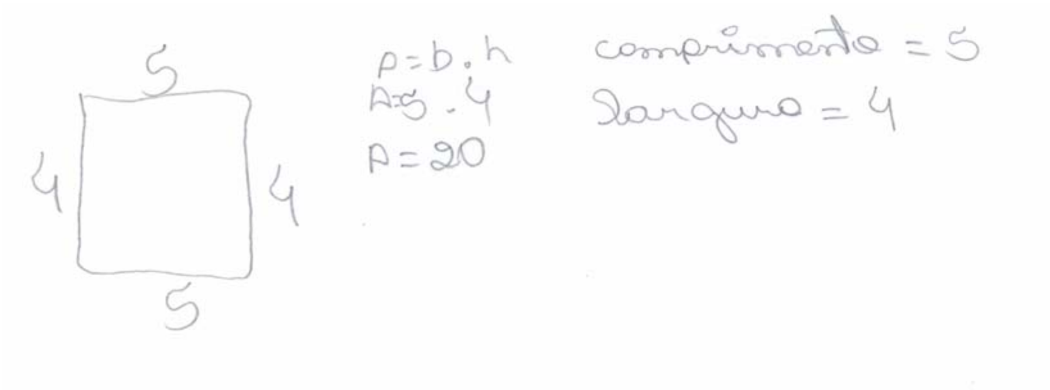
FIG. 9.8. Prot. 8 -. Q4T1F$_1$


Nesse caso medirão 5 cm cada, pois a área será 25cm², maior área possível com os 20 metros de tela

"medirá 4 cm, pois se medir mais que isso, a área será maior que o perímetro."

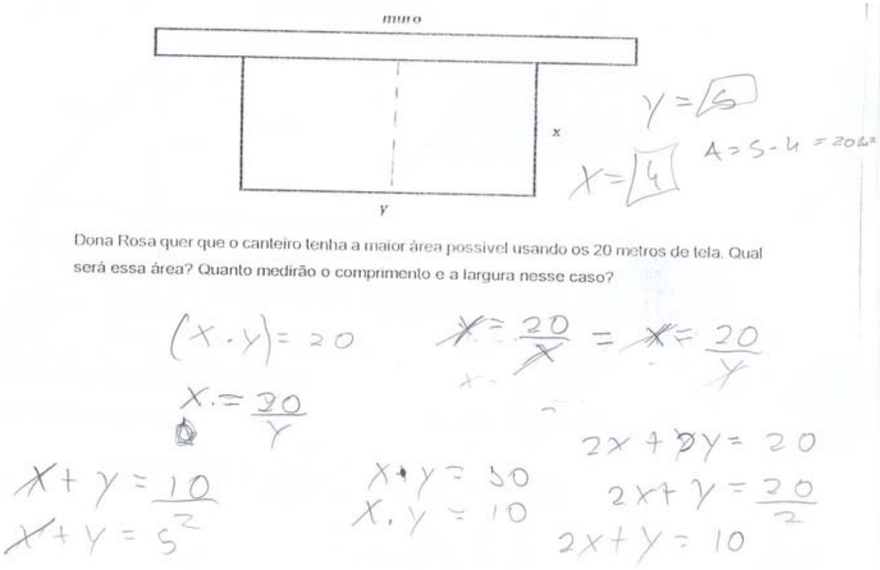
No protocolo abaixo, também explicita sua concepção, só que desta vez mobilizando a fórmula da área do retângulo para justificar sua resposta.

FIG. 9.9. Prot. 9 - Q4T1G$_2$



Neste outro protocolo, a explicitação aparece via representação algébrica. O aluno não atribui valores particulares para as dimensões do retângulo, dando indícios da mobilização da noção de variável, mas toma como ponto de partida que x. y é igual a 20, ou seja, a área é igual a medida da tela que dispõe para cercar o canteiro.

FIG. 9.10 – Prot. 10 - Q4T1D$_4$

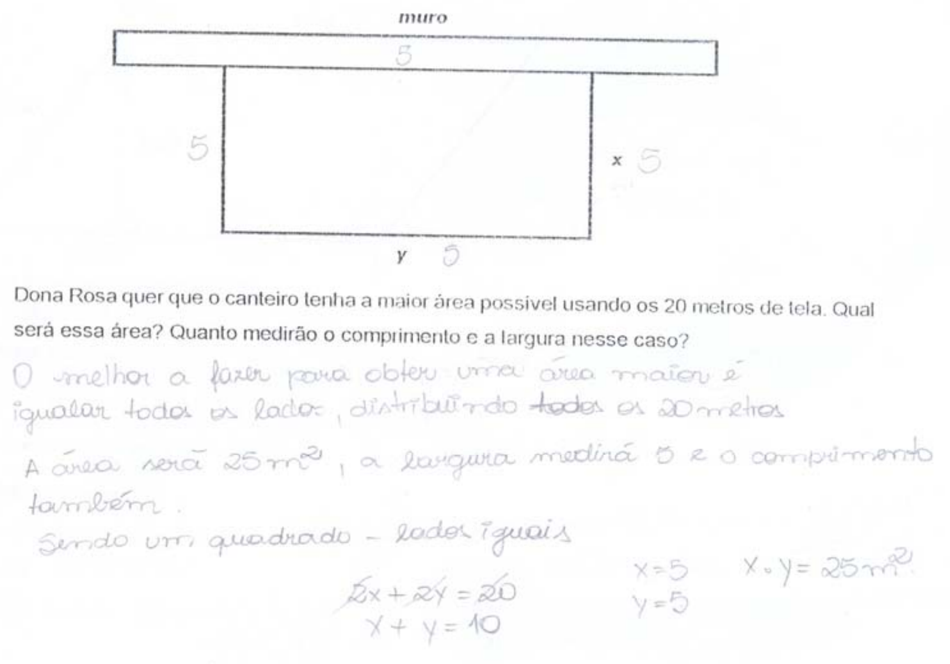


ii) ERRO RELACIONADO AO CAMPO ALGÉBRICO –

– **Erro na modelagem da questão**

Diante da dificuldade de passar da linguagem natural para linguagem simbólica que é uma das etapas para resolução de um problema algébrico (Da Rocha Falcão, 1997), ou seja, modelar a questão o aluno prefere um procedimento numérico caracterizado pela tentativa Um dos aspectos que dificulta a modelagem é esquecimento do muro. O protocolo abaixo ilustra esta dificuldade.

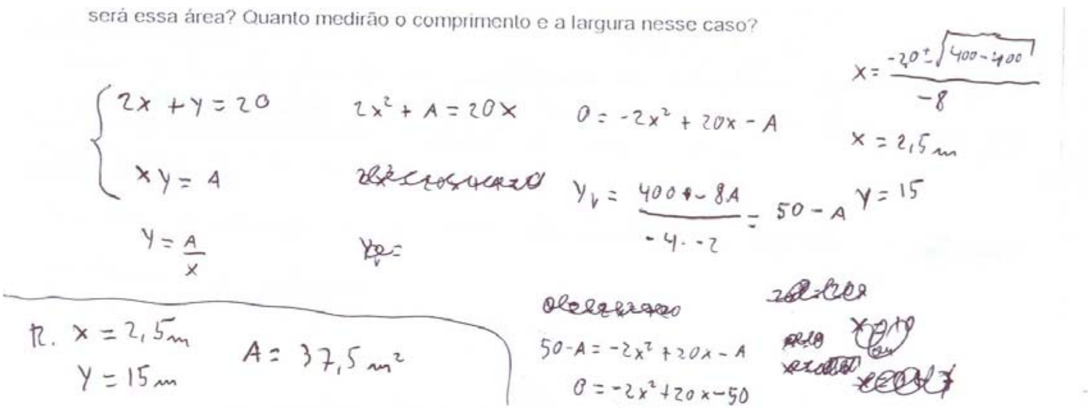
FIG.9.11 –Prot. 11 - $Q4T1B_5$



- **Erro de manipulação algébrica –**

O protocolo abaixo evidencia como um erro numa das etapas para resolução de um problema algébrico interfere na obtenção de soluções verdadeiras para problemas envolvendo fórmulas de área e reforça a importância do estudo das imbricações entre campos conceituais. O aluno modela corretamente o problema, demonstra domínio nas operações com as letras, mas um erro de sintaxe prejudicou seu resultado.

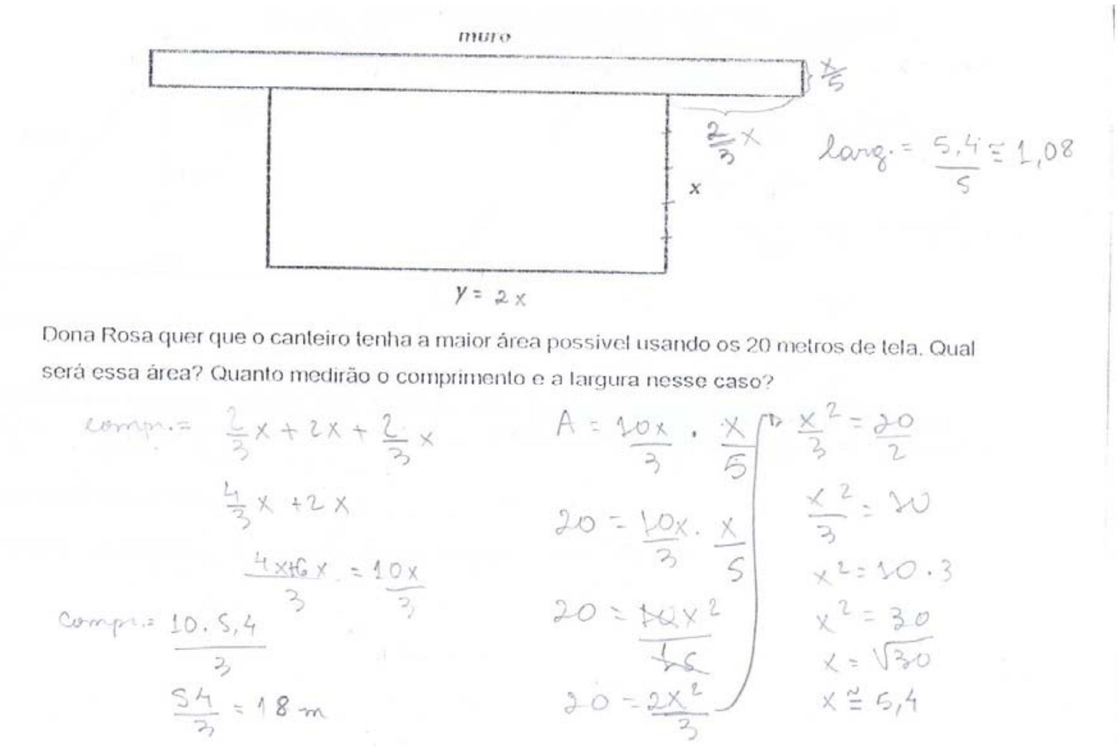
FIG. 9.12. Prot. 12 - Q4T1G$_1$ – .



iii) ERRO RELACIONADO AO CAMPO FUNCIONAL –

No protocolo abaixo o aluno ao interpretar a figura considera o muro como um retângulo do qual se precisa calcular a área também, para isto fixa uma unidade para x, ou seja, desconsidera o caráter variável da letra. O desenho é apenas uma representação do real, possuindo várias possibilidades de composições para o x e para o y.

FIG. 9.13. Prot. 13 - $Q4T1C_5$.



Como observamos no protocolo acima, o aluno exprime o valor de x e y incorporando a "área" do muro (inclusive mobiliza corretamente a fórmula da área do retângulo). Não interpreta corretamente o problema, inclusive confundindo área e perímetro, ou seja, num mesmo procedimento de resolução é possível identificar características dos vários campos conceituais, evidenciando o papel das imbricações como entrave para resolução de determinadas situações.

O campo conceitual da geometria que possibilita a modelização do real através de propriedades e representações geométricas que permitam agir neste modelo (BRASIL, 1998), está presente em todos os procedimentos, pois nesta questão temos um contexto real, relacionado à jardinagem que precisa ser compreendido como uma figura geométrica, assim erros na interpretação da figura, refletem a mobilização de conhecimentos errôneos deste campo, por exemplo, relacionados aos lados do retângulo serem iguais dois a dois.

A análise de outra questão rica do ponto de vista das imbricações, a questão 4 do teste 4 **(Q4 –T4):** "*Dona Rosa adora flores e deseja fazer um canteiro retangular aproveitando um muro existente em seu terreno, como indica a figura abaixo. As dimensões do canteiro podem variar, desde que os 20 metros de tela que possui sejam utilizados*", também confirmou nossa hipótese sobre dificuldades relacionadas às imbricações entre os campos conceituais. A questão propunha 4 demandas:

a) expressar y em função de x;

b) determinar a área A desse canteiro em função de x;

c) completar uma tabela;

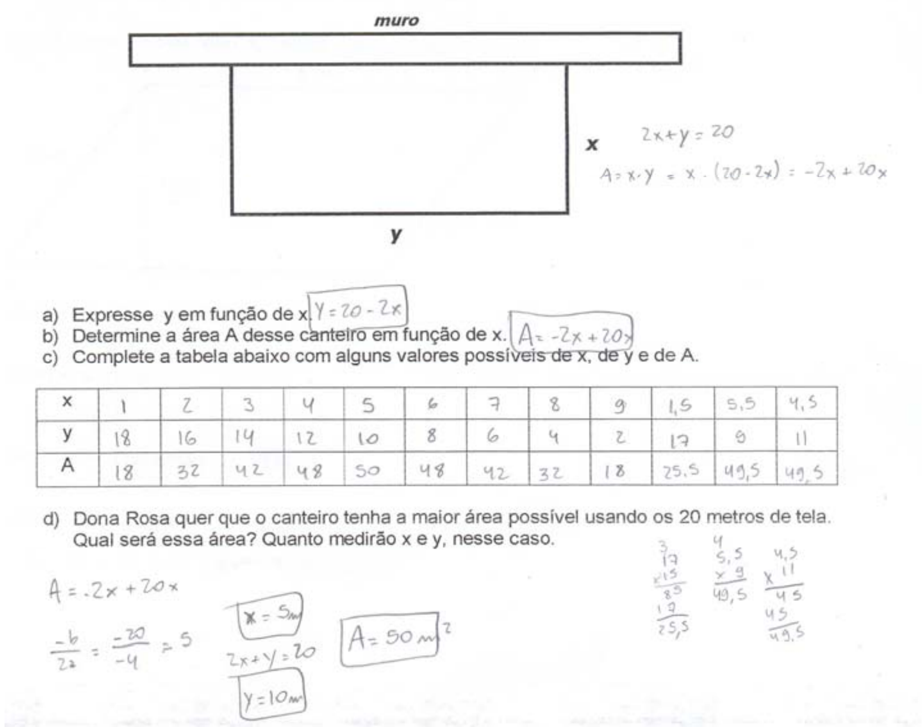
d) determinar as dimensões para que o canteiro tivesse área máxima.

Sessenta alunos responderam o teste 4, destes apenas 27 (45%) responderam total ou parcialmente a questão 4 e os 55% (33 alunos) deixaram totalmente em “branco”. A tabela abaixo ilustra os erros, acertos e ausência de respostas em cada uma das etapas, referentes aos 27 alunos.

a) y em função de x			**b) área em função de x**			**d) Área máxima**		
Certo	Errado	Ausente	Certo	Errado	Ausente	Certo	Errado	Ausente
13	8	6	10	9	8	7	16	4

Dentre as respostas corretas obtidas para a área máxima destacamos o protocolo abaixo, onde apesar do aluno errar na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração, gerando uma expressão errada para A em função de x, acerta a medida da maior área, pois o procedimento escolhido (calcular o ponto máximo da função independe do expoente de x).

FIG. 9.14 – Prot. 14 - Q4T4A$_1$


muro

x

$2x+y=20$

$A=x \cdot y = x \cdot (20-2x) = -2x+20x$

y

a) Expresse y em função de x. $\boxed{y=20-2x}$

b) Determine a área A desse canteiro em função de x. $\boxed{A=-2x+20x}$

c) Complete a tabela abaixo com alguns valores possíveis de x, de y e de A.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1,5	5,5	4,5
y	18	16	14	12	10	8	6	4	2	17	9	11
A	18	32	42	48	50	48	42	32	18	25.5	49,5	49,5

d) Dona Rosa quer que o canteiro tenha a maior área possível usando os 20 metros de tela. Qual será essa área? Quanto medirão x e y, nesse caso.

$A=-2x+20x$

$\frac{-b}{2a}=\frac{-20}{-4}=5$

$\boxed{x=5m}$

$2x+y=20$

$\boxed{y=10m}$

$\boxed{A=50m^2}$

Os itens a e b exigem um procedimento algébrico, ou seja, modelar uma situação tomando como referencial conhecimento do campo das grandezas – área e perímetro – a ausência de respostas e a quantidade de respostas erradas sinalizam dificuldades relacionadas a esta tarefa. Dentre os erros na escrita álgebra destacamos a mobilização da relação errônea entre as dimensões do canteiro gerando a expressão $2x + 2y = 20$, que corresponde a equação equivalente $y = 10 - x$, ou seja, evidencia a erro na modelagem que conduz ao erro na questão embora os conhecimentos do campo algébrico e dos demais sejam corretamente mobilizados nas fases subseqüentes.

Inicialmente, a interpretação errada do problema, que faz parte da 1ª etapa para resolução de um problema algébrico (Da Rocha Falcão, 1997) gera uma relação funcional errada. Embora a escrita algébrica seja coerente, levar em consideração que a tela também deve cercar o muro conduz a decompor os 20 metros de tela, que correspondem ao perímetro pretendido, como sendo $x + x + y + y = 20$.

Em conseqüência, a fórmula da área em função de x, apesar da manipulação algébrica correta:

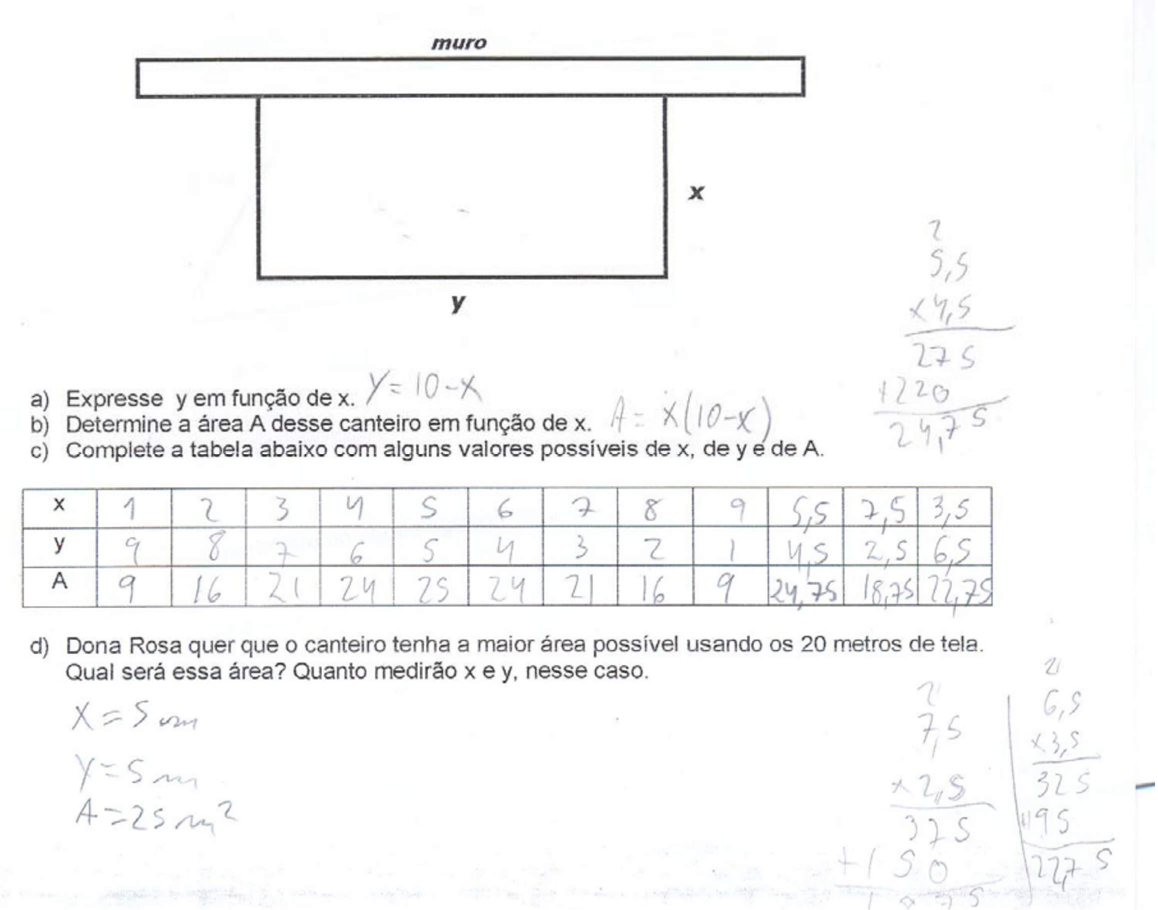
$$P = 2x + 2y = 20$$

Logo:

$y = 10 - x$, como $A = x.y$ então $A = x(10 - x) \Rightarrow A = 10x - x^2$, não produz uma resposta verdadeira, tanto por tentativas usando procedimento numérico ou calculando o ponto máximo da função num procedimento algébrico, o resultado produzido corresponde a um quadrado de lado 5, o que é, de certa forma coerente pois do ponto de vista geométrico, dado um perímetro fixo, o retângulo de maior área produzido com este perímetro é um quadrado.

O extrato do protocolo abaixo ilustra esta imbricação, vale salientar ainda que este aluno acerta todas as outras questões do testes 4.

FIG. 9.15 – Prot. 15 - Q4T4B$_1$



muro

x

y

a) Expresse y em função de x. $Y = 10 - X$

b) Determine a área A desse canteiro em função de x. $A = X(10-X)$

c) Complete a tabela abaixo com alguns valores possíveis de x, de y e de A.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	5,5	7,5	3,5
y	9	8	7	6	5	4	3	2	1	4,5	2,5	6,5
A	9	16	21	24	25	24	21	16	9	24,75	18,75	22,75

d) Dona Rosa quer que o canteiro tenha a maior área possível usando os 20 metros de tela. Qual será essa área? Quanto medirão x e y, nesse caso.

X = 5 cm

Y = 5 m

A = 25 m²

Este erro de interpretação reflete no preenchimento da tabela, os alunos preenchem de forma que $x + y = 10$, tanto no procedimento numérico, quando o aluno vai direto para tabela para indicar a área máxima, como no algébrico – o aluno escreve a expressão algébrica.

Abaixo ilustramos os procedimentos identificamos no preenchimento da tabela:

TABELA						
correta	Incompleta restrita a N	Incompleta restrita a N somando 10	Completa somando 10	Incompleta em Q decimal	Incompleta em Q fracionário	errada
7	4	3	2	2	1	8

Dentre os erros no preenchimento da tabela também foi possível indicar erros relacionadas à confusão entre área e perímetro

FIG. 9.16 – Prot. 16 - Q4T4U$_2$

x	10	2	5	4	20	1						
y	2	10	4	5	1	20						
A	20	20	20	20	20	20						

Destacamos ainda que 20 alunos, dos 27 que esboçaram alguma reposta para este item da questão, mobilizaram um procedimento numérico, porém, 17 utilizaram apenas valores inteiros e apenas 3 utilizaram decimais só até 0,5. Estes dados refletem a dificuldade de romper com o domínio numérico dos naturais e evidencia preferência por procedimentos numéricos em detrimento aos algébricos. Mas também evidenciam aspectos relacionados ao campo conceitual das funções, pois o aluno faz uma interpretação pontual das funções e não variacional no preenchimento da tabela, como ilustrado no extrato de protocolo abaixo.

.**FIG. 9. 17 – Prot. 17 - Q4T4C$_1$**

a) Expresse y em função de x. $y = 20 - 2x$
b) Determine a área A desse canteiro em função de x. $x = \frac{A}{y}$
c) Complete a tabela abaixo com alguns valores possíveis de x, de y e de A.

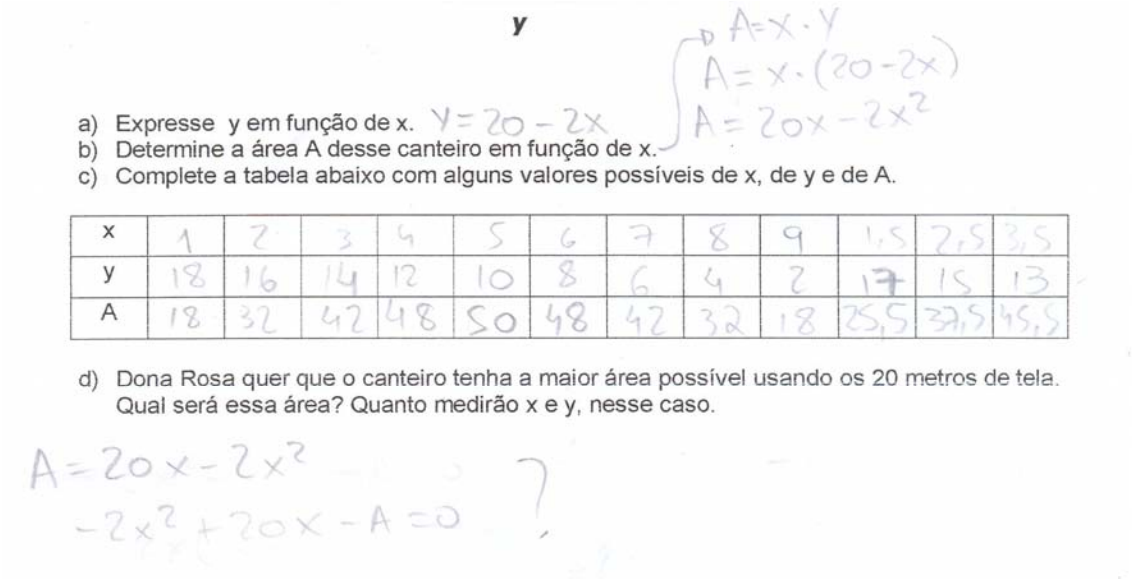
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	8,5	7,5	6,5
y	18	16	14	12	10	8	6	4	2	3	5	7
A	18	32	42	48	50	48	42	32	18	25,5	37,5	45,5

d) Dona Rosa quer que o canteiro tenha a maior área possível usando os 20 metros de tela. Qual será essa área? Quanto medirão x e y, nesse caso.

50 cm^2 / $x = 5$
$y = 10$

Por outro lado, a opção pelo procedimento numérico parece mostrar que os sujeitos pesquisados não mobilizam nesta situação conhecimento funcional suficiente para calcular a área máxima através do cálculo do ponto de máximo da função:

FIG.9.18 – Prot. 18 - Q4T4B$_5$



y

$\rightarrow A = x \cdot y$

$A = x \cdot (20 - 2x)$

$A = 20x - 2x^2$

a) Expresse y em função de x. $y = 20 - 2x$

b) Determine a área A desse canteiro em função de x.

c) Complete a tabela abaixo com alguns valores possíveis de x, de y e de A.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1,5	2,5	3,5
y	18	16	14	12	10	8	6	4	2	17	15	13
A	18	32	42	48	50	48	42	32	18	25,5	37,5	45,5

d) Dona Rosa quer que o canteiro tenha a maior área possível usando os 20 metros de tela. Qual será essa área? Quanto medirão x e y, nesse caso.

$A = 20x - 2x^2$

$-2x^2 + 20x - A = 0$?

9.4 IMBRICAÇÕES NOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO SEM FIGURA

A outra questão de otimização (Q4 - T2), utilizada no teste 2 da nossa pesquisa:

> Uma região retangular tem perímetro igual a 30 metros. Quais devem ser as dimensões do retângulo para que a área seja máxima?

Possui amplas imbricações entre campos conceituais. Foi uma das questões que apresentou maior grau de dificuldade, como foi evidenciado na análise quantitativa. Dos 54 alunos que responderam o teste 2, mais da metade (56%), ou seja, 30 alunos, não acertaram a questão. Algumas características específicas, como resultado pertencente ao domínio dos números racionais e o uso da fórmula para otimizar, parecem contribuir para esta dificuldade.

Identificamos nesta questão três tipos de procedimentos mobilizados pelos alunos que responderam a questão, em alguns casos conduzindo ao acerto e em outros ao erro.

TABELA 9.1. PROCEDIMENTOS MOBILIZADOS NA QUESTÃO (Q4 - T2):

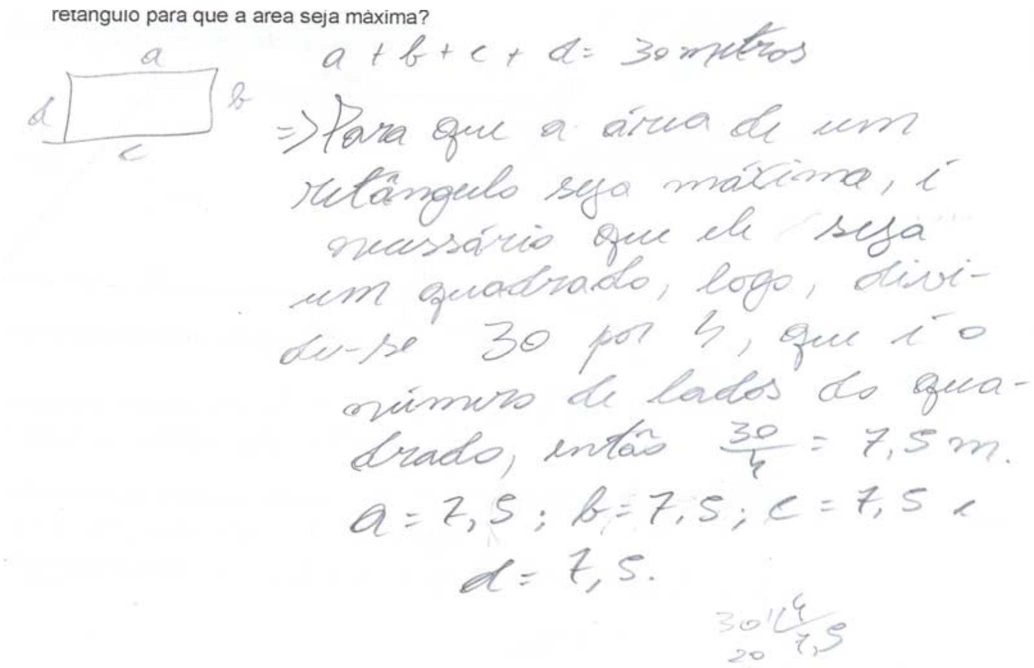
Procedimento numérico		Procedimento algébrico		Procedimento geométrico
correto	errado	correto	errado	correto
2	24	1	3	1

A diversidade de procedimentos mobilizados nesta questão também evidencia o papel das imbricações entre os campos conceituais nas situações que envolvem fórmulas de área. A seguir discutimos e ilustramos cada um destes procedimentos.

Procedimento geométrico – baseado no fato do retângulo de área máxima ser um quadrado.

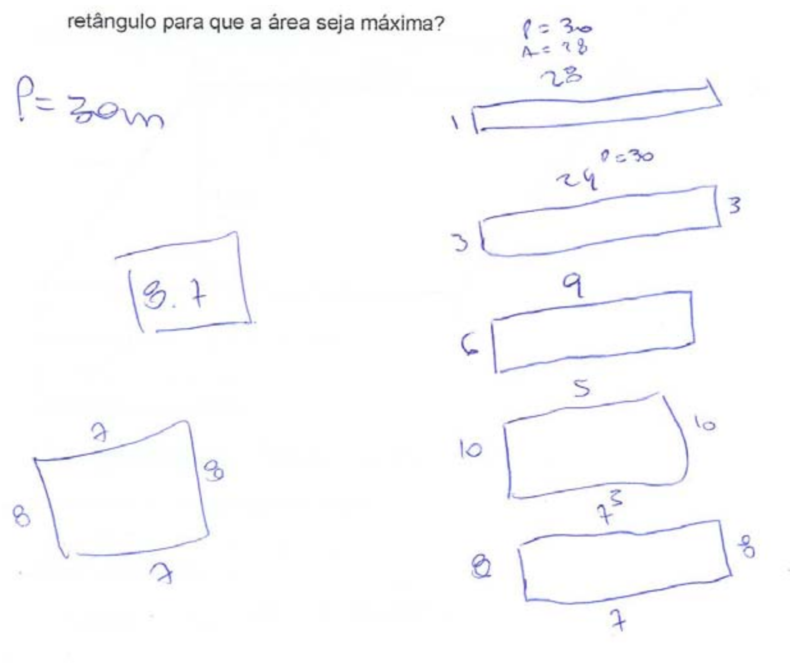
O protocolo abaixo ilustra uma resolução correta que tomou como ponto de partida esta característica do retângulo de área máxima. O aluno utiliza a representação simbólica da linguagem natural para explicitar os invariantes operatórios que mobilizou: “o retângulo de área máxima é o quadrado”.

FIG.9.19 – Prot. 19 -Q4T2K$_1$



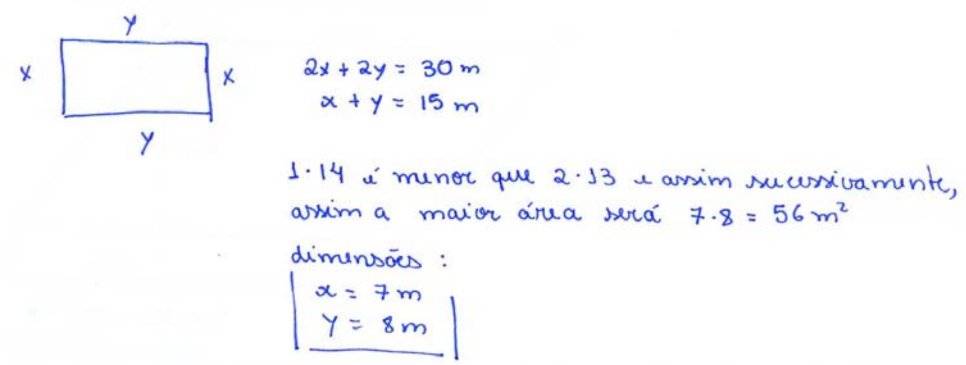
Procedimento numérico - procedimento caracterizado pela utilização de tentativa, porém, a maioria dos alunos se restringem ao domínio natural, o que possibilita um resultado apenas aproximado, como ilustramos no exemplo abaixo. O aluno mobiliza como representação simbólica figuras de vários retângulos.

FIG. 9.20 – Prot. 20 - Q4T2A$_1$



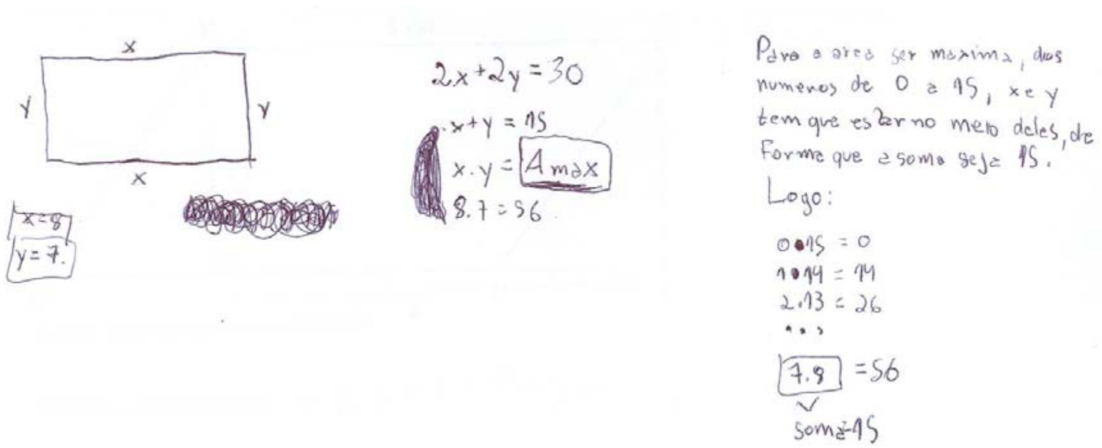
Ou escrevem as relações algébricas para o perímetro e para área da região retangular, mas optam pelas tentativas numéricas, como ilustra o protocolo abaixo. O aluno apesar de escrever corretamente a expressão que relaciona os comprimentos dos lados do retângulo e o perímetro dado, explicita o procedimento: como x + y tem que ser igual a 15, o aluno procura um par de números que somados dêem 15. A explicação do aluno parece ir no sentido de quando um comprimento aumenta o outro diminui, ou seja, conhecimento variacional, porém pontual, tomando valores numéricos específicos para as letras, que neste caso têm os seus valores atribuídos pelo aluno e não decorrentes de uma manipulação algébrica.

FIG. 9.21 – Prot. 21 - Q4T2D$_1$



O protocolo abaixo também ilustra outro caso onde o aluno mobiliza a escrita algébrica corretamente, mas opta pelo procedimento de tentativas. No protocolo abaixo, diferentemente do primeiro o aluno explicita simbolicamente que a área máxima do retângulo é obtida multiplicando-se valores específicos para x e y. Estes valores podem ser obtidos se o aluno resolver corretamente o sistema de equações que gerou. Ele desiste desta opção e procura os valores por tentativas, sempre restritas ao domínio natural.

FIG. 9.22 – Prot. 22 - Q4T2E$_1$



Mesmo num caso onde o aluno efetua um procedimento algébrico corretamente, a dificuldade de lidar com dos números racionais permite apenas uma aproximação quase perfeita.

FIG. 9. 23 – Prot. 23- Q4T2F$_5$

Para que a área seja máxima os valores da base do retângulo e da sua altura devem ser números próximo
Veja:
Se um lado for 14m o outro será 1m, pois $2 \cdot 14 + 2 \cdot 1 = 30$ m,
a área desse retângulo será 14 m²
Se um dos lados for 10m o outro será 5m, pois $2 \cdot 10 + 2 \cdot 5 = 30$m,
a área desse retângulo será 50 m²
Se um dos lados for 9m o outro será 6m, pois $2 \cdot 9 + 2 \cdot 6 = 30$m
a área desse retângulo será 54m²

$x \cdot y = w$ $\quad w \uparrow \; x \cong y$ $\quad 15 \times 15 = 225$

$x + y = 15$ $\quad (15 - y) \cdot y = w$ $\quad \to y^2 - 15y + w = 0$ $\quad x' = 15$ $\quad x = 7,555...$

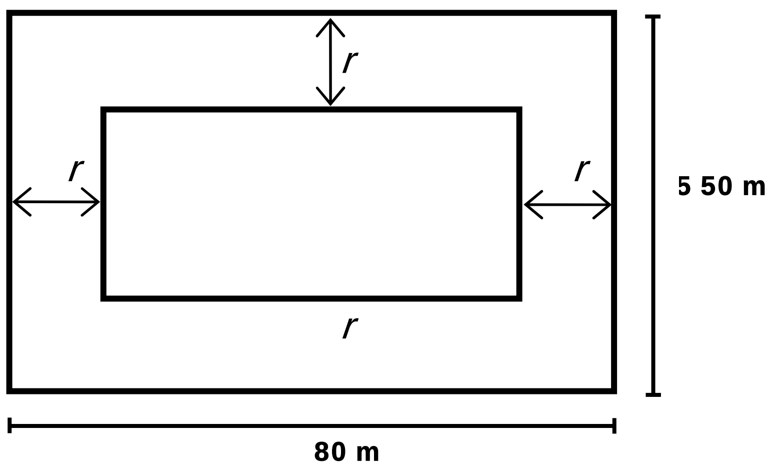
$x = 15 - y$ $\quad -y^2 + 15y = w$ $\quad x'' = w$ $\quad y = 7,444...$

Além da diversidade de procedimentos foi possível identificar que os erros relacionados ao campo conceitual numérico refletem como alguns alunos preferem eveitar procedimentos algébricos e a restrição ao domínio dos números naturais nas tentativas.

9.5 IMBRICAÇÕES NAS QUESTÕES ENVOLVENDO OPERAÇÕES COM GRANDEZAS:

A questão 4 do teste 5, que chamamos "questão de moldura com figura":

Num terreno retangular, medindo 80 m x 50 m, deseja-se construir um galpão retangular, de forma que cada um de seus lados seja paralelo a dois lados do terreno, como ilustrado na figura baixo. Se a área do galpão deve ser 1375 m^2, de quantos metros deve ser o recuo r?

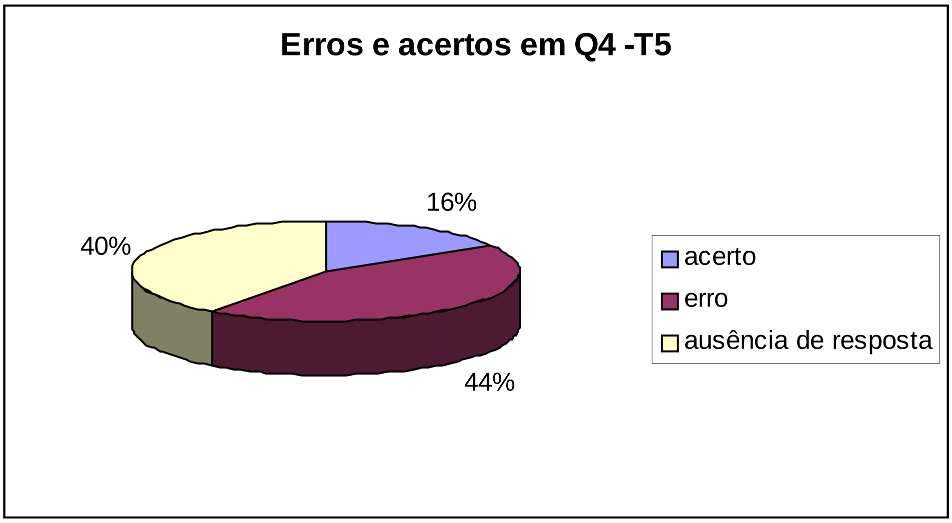


Também possibilitou a identificação de aspectos importantes do ponto de vista das imbricações. A questão foi submetida a cinqüenta alunos. Destes apenas 8 (16%) acertaram a questão, como mostramos na tabela abaixo:

TABELA 9.2: ERROS E ACERTOS EM Q4 - T5

Acerto	Erro	Ausência de resposta
8	22	20

GRÁFICO 9.2. ERROS E ACERTOS EM Q4 – T5



Apesar da ausência de 40% de respostas, foi possível identificar vários procedimentos utilizados pelos alunos para responder a questão:

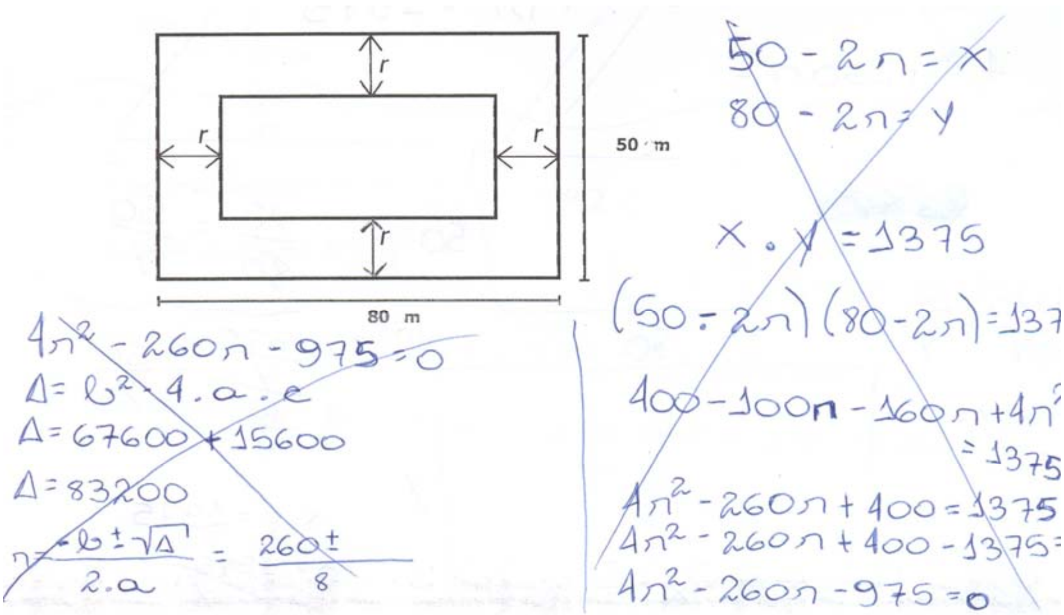
- **Procedimento algébrico** (10 alunos) – consistiu em representar algebricamente o problema, resolver a equação e interpretar os resultados. Dentre os 10 aluno (33,3% dos que responderam a questão) que usaram este procedimento, identificamos o seguinte resultado:

TABELA 9.3: Etapas da resolução do pb algébrico em Q4 -T5

PROCEDIMENTO ALGÉBRICO						
Modelagem		Cálculo			Interpretação	
Certo	Errado	Certo	Errado	Incompleto	Certo	Errado
7	3	5	1	4	3	2
70%	30%	50%	10%	40%	60%	40%

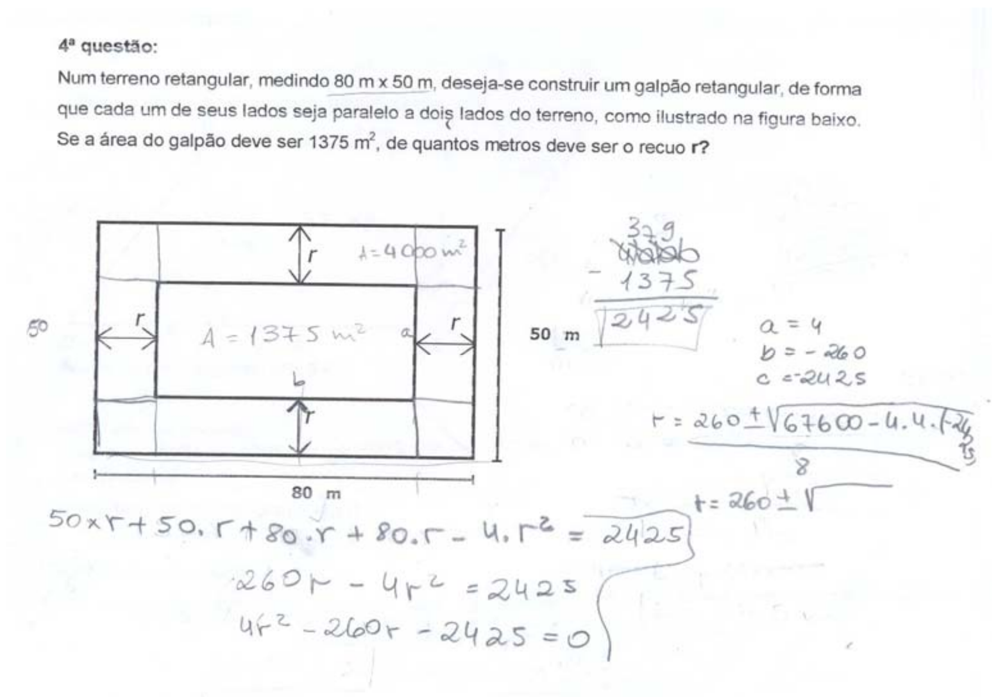
Com relação à modelagem, primeira etapa onde o aluno precisa ler e interpretar o problema posto. Nesta questão a modelagem consiste em representar simbolicamente operações entre as áreas do terreno e do recuo. Dentre as modelagens erradas destacamos o protocolo abaixo ilustra dificuldade manifestada pelo aluno na modelagem.

FIG. 9.24 – Prot. 24. Q4T5E$_5$



Dentre os erros de cálculo, destacamos erro numérico, por exemplo, na subtração 4000 – 1375.

Fig. 9.25 – Prot. 25 - Q4T5D$_1$



Na interpretação do resultado obtido, ou seja, na retomada do sentido (DA ROCHA FALCÃO, 1997), identificamos nos extratos de protocolos abaixo, alunos que acertam absolutamente tudo, mas consideram como reposta correta também, o 52,5. Este procedimento mostra aspectos importantes: relacionados ao campo algébrico: a não retomada do sentido, ou seja, o aluno não interpreta corretamente o significado dos valores obtidos como resposta: 52,5 não serve como resposta pois ultrapassa uma das dimensões do galpão.

FIG. 8.26 – Prot. 26 - Q4T5A$_1$

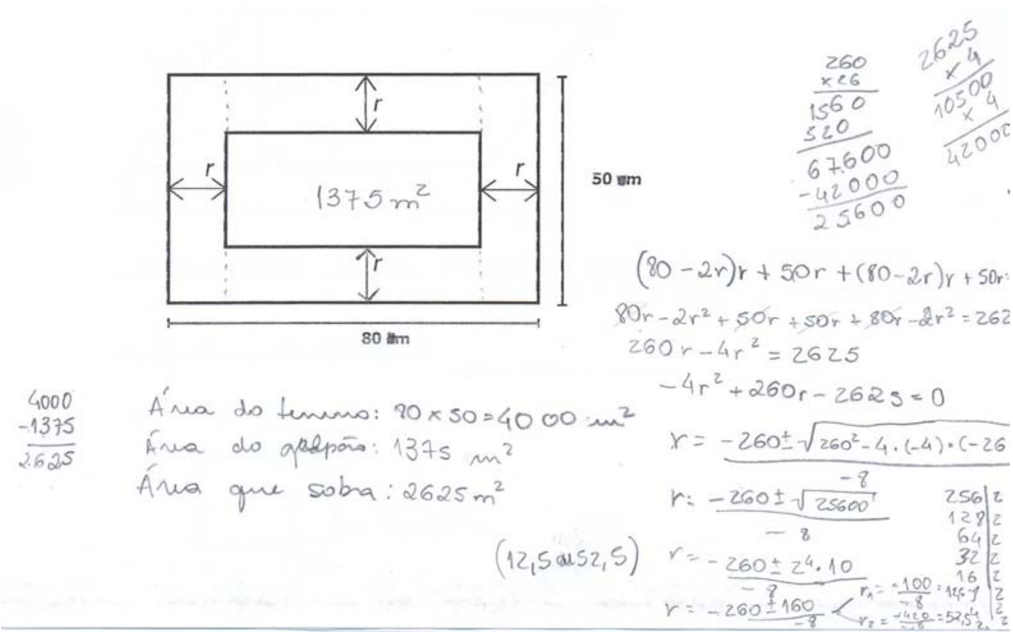
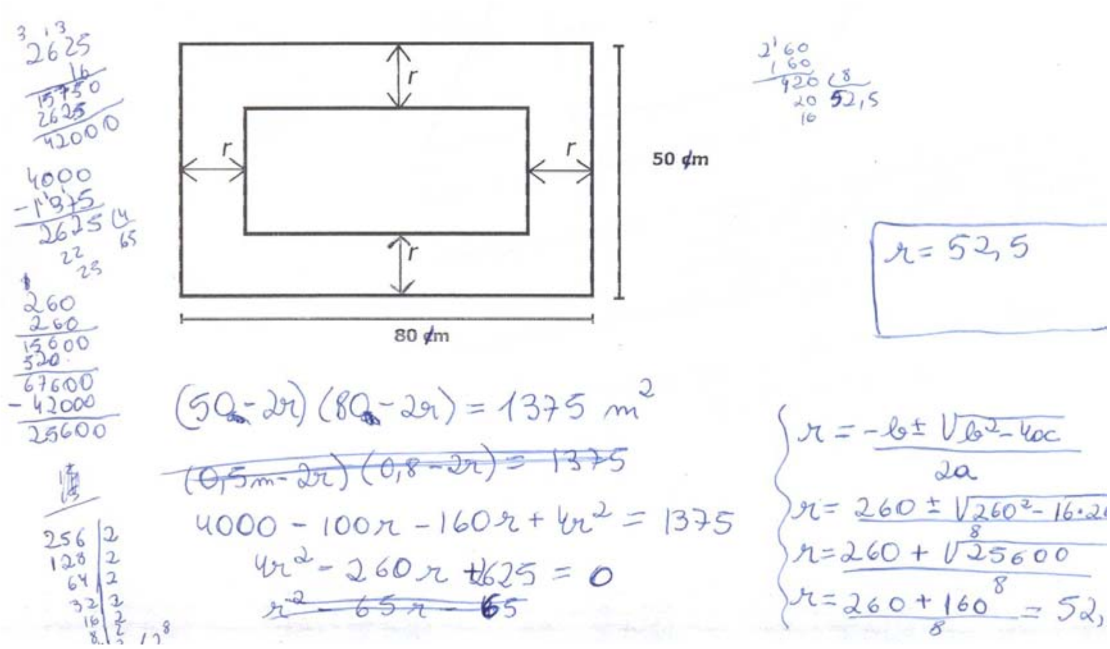
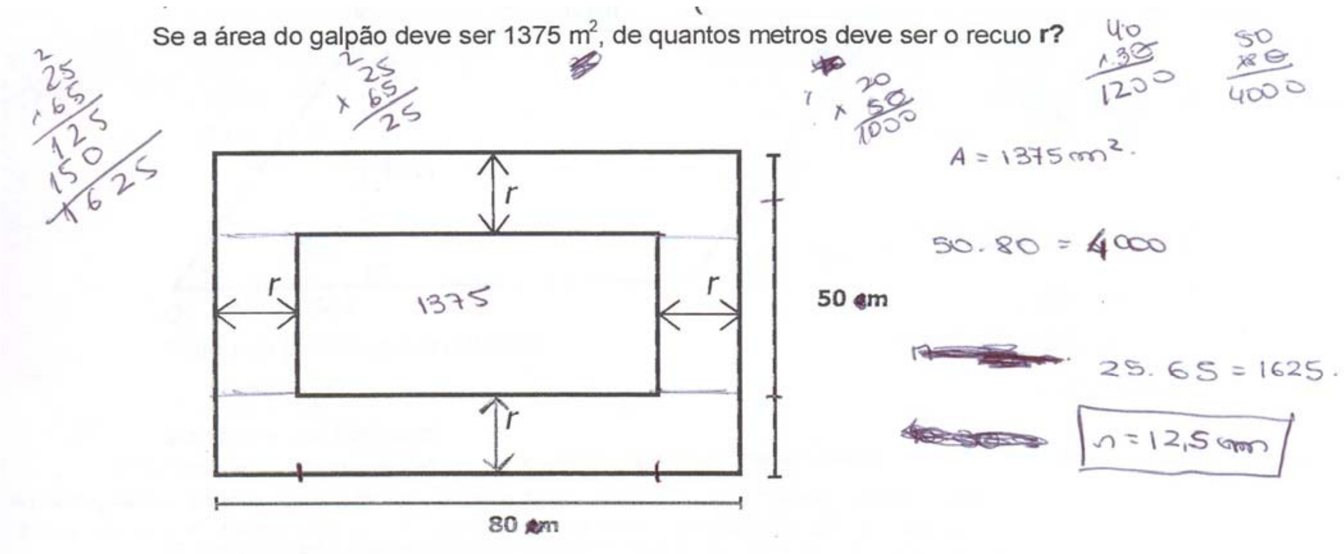


FIG. 9. 27 – Prot. 27 - Q4T5H$_1$



- **Procedimento numérico** (18 alunos) – 60% dos que responderam a questão preferiram procedimento numérico. 27,8% dos alunos que mobilizaram este procedimento acertaram a questão.

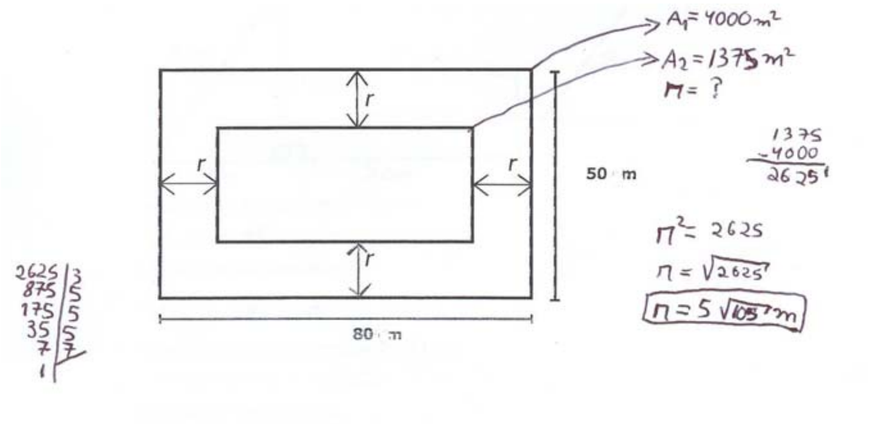
FIG. 9.28 – Prot. 28 -. $Q4T5F_1$



Enquanto 72,2% dos alunos que mobilizaram procedimento numérico não obtêm a resposta correta para questão. Evidenciando a importância de romper no ensino das fórmulas de área de figuras geométricas com situações que requeiram apenas procedimentos pontuais, e apresentar aos alunos situações onde se faça necessário a mobilização de procedimentos algébricos ou funcionais importantes para construção de estratégias mais gerais.

Um dos erros no procedimento numérico consistiu em calcular a área total, subtrair a área do galpão e dizer que o resultado 2625 é o recuo, ou seja, apesar do resultado 2625 representar o número relacionado à medida de uma área, os alunos associam este valor à dimensão do recuo que é “linear”. Esta é uma dificuldade ligada às unidades de medida – os alunos freqüentemente não associam à unidade à grandeza que estão tratando.

FIG. 9.29 – Prot. 29 -. Q4T5A$_5$



SÍNTESE DO CAPÍTULO:

Este capítulo nos ajudou a refletir sobre como as imbricações entre os campos conceituais das grandezas geométricas, da geometria, dos números, da álgebra e das funções, podem influenciar em situações envolvendo fórmulas de área de figuras geométricas planas.

Subsidiados pela análise quantitativa dos dados e pela análise teórica desenvolvidas em capítulos anteriores, pudemos relacionar a ausência de resposta em determinadas questões ao fato da questão mobilizar conhecimentos dos vários campos conceituais, ou seja, as imbricações entre campos conceituais são uma explicação possível para índices elevados de ausência de resposta.

Porém, as imbricações podem ser vistas não só como fator de entrave, mas como abertura de possibilidade de resolução evidenciada na variedade de tipos de procedimento de resolução em questões como a Q3-T2 que obteve bom índice de acertos.

A análise das questões de otimização mostrou que os erros cometidos pelos alunos são oriundos dos vários campos conceituais. Identificamos erros relacionados à confusão área e perímetro pertencente ao campo das grandezas; erro que reflete dificuldade na interpretação de um modelo real por meio de uma figura geométrica, relacionado ao campo geométrico; erros na modelagem e na resolução de expressões algébricas ligado ao campo algébrico e erro que corresponde à não interpretação da letra como uma variável, relacionado ao campo funcional.

Na questão Q4 –T5 que usa a fórmula de área para operar com grandezas, embora exija um procedimento mais geral os alunos optam por procedimentos numéricos. Porém 72,2% dos alunos que mobilizaram procedimento numérico não obtém a resposta correta para questão. Evidenciando a importância de romper no ensino das fórmulas de área de figuras geométricas com situações que requeiram apenas procedimentos pontuais.

No próximo e último capítulo desta tese, traçamos as contribuições desta pesquisa e abrimos questionamentos que podem gerar outros trabalhos.

“Melhor é o fim das coisas do que o princípio delas”

Eclesiastes 7:8

CAPÍTULO 10
CONSIDERAÇÕES FINAIS E POSSÍVEIS ENCAMINHAMENTOS

"Estamos concluindo ou começando.....?"

A pretensão principal deste trabalho foi desenvolver um estudo sobre as fórmulas de área das figuras geométricas planas: retângulo, quadrado, paralelogramo e triângulo sob a ótica das imbricações entre campos conceituais.

Área é uma grandeza geométrica contínua e como todas as outras grandezas, congrega as noções de conservação, invariância e equivalência. A proposta didática de Douady e Perrin-Glorian (1989) que adotamos neste trabalho defende que a construção do conceito de área, exige a distinção entre os quadros geométrico, das grandezas e numérico. Coerentemente, do ponto de vista matemático exposto na geometria de Euclides, revisitada por Hilbert, Moïse e Hartshorne, a equidecomposição é um elemento que permite falar em área sem número. A revisão de literatura mostrou que é necessário construir o significado das fórmulas de área relacionado às noções de equidecomposição e conservação de área, e também evidenciar, no ensino, a evolução da medida da área em relação às medidas lineares.

Um estudo sobre a construção do significado das fórmulas de área em livros didáticos para as séries finais do ensino fundamental mostrou que a abordagem desse tema, mesmo coleções notoriamente antenadas com os estudos em Educação Matemática são passíveis de elogios e questionamentos. Elogios por incorporarem elementos que favorecem a construção do conceito de área enquanto grandeza e a atribuição de significado às fórmulas, como, por exemplo, a exploração da equivalência de área, por meio da decomposição e recomposição. É importante tratar a grandeza área, sem abordar essencialmente o aspecto numérico. Outro avanço refere-se à dissociação entre área e perímetro.

A partir deste primeiro estudo, alguns questionamentos foram gerados, referentes, por exemplo, à opção por medidas inteiras. Com exceção da utilização de medidas não racionais por Imenes e Lellis, no volume da 8ª série, esporádicas situações propõem medidas não inteiras, quando isto acontece, o problema é resolvido por aproximação, ou as medidas são ½, ¼, etc. sempre de fácil visualização. O que nos remete a uma reflexão sobre a importância dos domínios numéricos explorados nas situações.

Ou ainda questionamentos relativos às justificativas dadas à validade da fórmula da área do retângulo: vale para qualquer domínio numérico? Que tipos de medida são adotados: naturais, inteiras, racionais? Como se dá a extensão dos naturais para os racionais? Será que esta abordagem tomando sempre como ponto de partida as estruturas multiplicativas, com medidas naturais, está favorecendo a aprendizagem dos alunos? O que precisaria do ponto de vista da Educação Matemática para entender a construção e os usos das fórmulas? Assim, sob a ótica dos campos conceituais, o estudo realizado evidenciou a necessidade de verificar radicações e filiações das fórmulas de área de figuras geométricas planas, que precisariam apoiar-se, por exemplo, nas equidecomposições, na invariância da área, na extensão dos conjuntos numéricos.

Buscamos então a caracterizar este conceito identificando através de uma revisão de literatura situações que dão sentido às fórmulas de área sob a ótica das imbricações entre os campos conceituais. Identificamos situações que exigem uma modelização do real, através de propriedades e representações geométricas que permitam agir nesse modelo; situações que envolvem o produto de medidas, em especial os que tratam do produto contínuo x contínuo; situações envolvendo a dimensão funcional da álgebra, onde as letras são utilizadas para expressar relações entre grandezas ou quantidades, assumindo o papel de variáveis; situações envolvendo a dimensão interpretativa e procedimental da álgebra onde as letras assumem o papel de representar simbolicamente, através de uma equação, situações envolvendo um ou mais valores desconhecidos para, em seguida, simplificá-las e resolvê-las, neste caso são incógnitas; situação referente ao conceito de função, sendo o problema contextualizado com cálculo de áreas de figuras geométricas planas; situações que envolvem "exprimir uma grandeza geométrica em função de outra". Com relação aos invariantes operatórios que podem ser mobilizados nestas situações, identificamos vários conceitos correlatos, ou seja, potenciais conceitos-em-ação relacionados a cada um dos campos conceituais.

Os estudos teóricos reforçaram a necessidade de aprofundar o papel das fórmulas na aprendizagem do conceito de área. Tomando como referencial o estudo teórico identificamos categorias de usos das fórmulas em livros didáticos, caracterizando a fórmula de área como um conceito. Assim, o mapeamento nos livros didáticos de situações que conferem significado ao conceito de fórmula, permitiu identificar várias classes de usos para as fórmulas: calcular a área de figuras; calcular comprimentos que caracterizam a figura; comparar áreas de figuras; produzir figuras em condições dadas; estabelecer relações entre grandezas; otimizar e operar com grandezas de mesma natureza.

Assumindo a fórmula como um elemento do campo conceitual das grandezas, analisamos e caracterizamos através de um teste diagnóstico, conhecimentos oriundos dos diversos campos conceituais subjacentes aos procedimentos de resolução de situações envolvendo fórmulas de área do retângulo, do paralelogramo e do triângulo. Também identificamos invariantes operatórios e representações simbólicas mobilizados pelos alunos nas diversas situações focalizadas no teste, assumindo também a perspectiva da fórmula como um “conceito”.

A análise dos testes possibilitou a identificação de procedimentos relacionados às imbricações, assim como procedimentos e erros relacionados a cada campo conceitual especificamente, confirmando pesquisas anteriores e construindo novas categorias que poderão contribuir futuramente para a elaboração de situações didáticas. Foi possível identificar imbricações entre os campos conceituais, por exemplo, na dificuldade de mobilizar conhecimentos importantes de dois campos conceituais: o das grandezas e o da álgebra, verificado pela ausência de respostas em determinadas questões; em justificativas apresentas para respostas em determinadas questões, sendo ora algébricas, apoiando-se numa expressão algébrica, ou numéricas atribuindo valores às variáveis, ou ainda geométricas, tomando como referência propriedades da figura ou relacionadas às grandezas, apoiando-se nas grandezas associadas aos comprimentos dos lados ou à área da figura.

As questões de otimização mostraram imbricações relacionadas aos erros cometidos pelos alunos na interpretação da figura, relacionado ao campo geométrico; erros correspondentes à confusão entre a área e o perímetro, ligados ao campo das grandezas; erros de manipulação algébrica, no campo algébrico; erros nos procedimentos numéricos, vinculados ao campo numérico.

A análise de procedimentos corretos e errôneos nos testes relacionados a cada campo conceitual, mostrou com relação ao campo conceitual das grandezas: concepções dos alunos sobre área e perímetro; confusão entre área e perímetro e a mobilização de fórmulas errôneas para as áreas das figuras em foco neste trabalho, que evidenciaram a construção não significativa do conceito de fórmula pelos alunos e reforçaram o aspecto mecânico relacionado à utilização das fórmulas de área na matemática escolar.

A análise específica da questão 1 ajudou a evidenciar dificuldades relacionadas às unidades de medida de área e perímetro, também já discutidas em pesquisas anteriores.

Com relação ao campo conceitual da geometria, identificamos aspectos relacionados às propriedades e elementos das figuras geométricas planas; confusões relativas à classificação das figuras, por exemplo, confundir paralelogramo e trapézio. Evidenciou-se a opção por figuras prototípicas do triângulo e também indícios de que alunos pensam que mudando a posição das figuras, características da figura, como área, por exemplo, também mudam.

Identificamos também a mobilização de conhecimentos relacionados às relações métricas no triângulo retângulo. Um dos erros freqüentes relacionados a este campo conceitual correspondeu à interpretação errônea de figuras.

Dentre os aspectos relacionados ao campo conceitual numérico destacou-se o fato de questões de cunho algébrico e questões de cunho geométrico serem resolvidas com procedimentos numéricos. A opção por procedimentos numéricos coloca em jogo que alguns alunos parecem evitar procedimentos gerais, baseados em propriedades geométricas e optam por um procedimento particular e sua conseqüente generalização. Por vezes essa generaliação é abusiva. Na resolução das questões por tentativas, o conjunto numérico utilizado restringiu-se ao domínio natural, o que confirma dificuldades relacionadas à passagem dos naturais para os racionais. Mas também, confirmando a análise teórica foram identificados erros de cálculo numérico que interferiram na resolução de determinadas questões, como dificuldades com o agrupamento e desagrupamento do Sistema Numérico Decimal Também há dificuldades com a colocação da vírgula, quando se trata de números decimais.

Ao caracterizar procedimentos que mobilizaram conhecimentos algébricos em determinadas questões, nos deparamos com dificuldades relacionadas a escrever simbolicamente, conduzindo a procedimentos numéricos.

Também foi possível identificar aspectos relacionados às etapas para resolução de um problema algébrico, em determinadas questões, principalmente erros relacionados à modelagem do problema. Com relação aos erros na resolução algébrica, podemos destacar, entre outros, erro de manipulação algébrica: erro na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração; erro na resolução do sistema de equações; erro na multiplicação de um número inteiro por uma fração com denominador literal.

A ausência de respostas e a opção por procedimentos numéricos nas questões de otimização, confirmou nossa hipótese sobre dificuldades em questões que mobilizavam a fórmula para otimizar.

Com relação às representações simbólicas, mesmo quando não solicitado, o desenho de uma figura geométrica foi uma das representações mais utilizadas. Identificamos alguns aspectos relacionados à figura desenhada pelos alunos nas questões: esboço de figura com relativa proporcionalidade entre as medidas; esboço de uma figura geométrica, utilizando régua e identificando os ângulos retos do retângulo; figuras que não refletem proporcionalidade entre as medidas. Em questões que exigiam uma modelagem algébrica identificamos a utilização da representação simbólica da figura para auxiliar a modelagem. Destacamos alguns aspectos: figura “correta” auxiliando a modelagem; figura como elemento central no procedimento de resolução – possibilitando a escrita de uma expressão a partir da decomposição do retângulo, inclusive influenciando na representação algébrica e até mesmo a figura atrapalhando.

A confirmação de estudos anteriores sobre a confusão entre área e perímetro e a confirmação de dificuldades relacionadas ao domínio numérico são importantes contribuições do nosso trabalho. Foi possível identificar nas diversas situações: ideais com figuras, medidas inteiras, posição prototípicas, ou com ausência da figura, com medidas decimais, ou que mobilizavam a fórmula para otimizar, a confusão entre área e perímetro. Já a dificuldade de romper com o domínio dos números naturais ilustra a segunda contribuição.

A opção por procedimentos numéricos mesmo em questões de aspecto algébrico ou geométrico coloca em pauta a necessidade de refletir sobre as causas e conseqüências da tendência dos alunos em evitar procedimentos algébricos, que envolvam inclusive a idéia de variável.

Neste trabalho vislumbramos campos conceituais que incluem outros campos conceituais. O campo conceitual das grandezas inclui o campo das grandezas geométricas, que por sua vez inclui o campo conceitual da grandeza área.

Em nosso trabalho, avançamos no sentido de pensar as fórmulas não apenas como representações simbólicas das relações entre as grandezas geométricas, comprimento e área, mas pensá-las sob dois aspectos: como um elemento que articula vários campos conceituais e ao mesmo tempo como um conceito, formado por um conjunto de situações que lhe dão significado, um conjunto de invariantes operatórios e um conjunto de representações simbólicas.

Assim, sob a ótica dos campos conceituais, este estudo evidenciou radicações e filiações no estudo das fórmulas de área de figuras geométricas planas, que precisam apoiar-se, por exemplo, nas equidecomposições, na invariância da área, na extensão dos conjuntos numéricos.

Neste trabalho, apesar de estudarmos um pequeno recorte do saber matemático: "fórmulas de área do retângulo, paralelogramo e triângulo", abrimos com as questões que formulamos a possibilidade de verificar a pertinência deste modelo de estudo para outras temáticas sob a ótica das imbricações entre Campos Conceituais. Ao nosso ver, as relações que se pode estabelecer entre os Campos Conceituais são outra via de pesquisa.

Finalmente, a escolha de tomar um aspecto amplo fez com que alguns focos não fossem aprofundados, mas por outro lado abriu perspectivas para pesquisas futuras. Um dos prolongamentos possíveis para este trabalho seria, por exemplo, analisar sistematicamente a influência dos valores das variáveis didáticas das questões dos testes diagnósticos, verificando se há variações estatísticas significativas.

Outra perspectiva seria fazer um estudo das concepções dos alunos sobre fórmulas de área de figuras geométricas planas a partir de outros instrumentos metodológicos: entrevistas, testes complementares para verificar a "consistência" das concepções. Ou ainda, fazer uma análise sistemática das abordagens de livros didáticos, tomando como referencial as situações que identificamos.

Ao pensarmos qual a contribuição, num aspecto mais amplo, desta pesquisa para o ensino aprendizagem da Matemática, ou como o professor pode usar essa construção teórica em sua prática, temos uma preocupação e um compromisso que ultrapassam os limites deste estudo, queremos, em longo prazo influenciar escolhas na organização curricular, nas abordagens adotadas pelos autores de livros didáticos; influenciar na elaboração de situações didáticas mais eficientes. Tudo isto por que acreditamos, que através de um ensino eficiente, que realmente cumpra seu papel na formação de cidadãos capazes de posicionar-se criticamente, de maneira responsável e construtiva nas diferentes situações sociais, dando a ele condições para entrar e permanecer no mercado de trabalho ou dar continuidade aos estudos, só assim, as desigualdades sociais podem ser minimizadas. Quando isto acontecer, também esperamos que a violência, os preconceitos, e a miséria sejam minimizadas. É um sonho, sabemos, mas este trabalho representa um pequeno esforço nesta direção que é desejada por todos os homens e mulheres deste planeta.

"Como a pedra que é dura, ajuda a construção
fica igual com a areia na mesma função[31]"

[31] Ary Fontoura no Hino Deus e a Natureza.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁVILA, Geraldo. *Cálculo I – Funções de uma variável.* 6.ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1993.

BALTAR, Paula Moreira. *Engenharia Didática. Notas de aula de Prática de Ensino de Matemática II*. s/d.

______. *Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes: une étuide de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège.* Grenoble, 1996. Tese (Doutorado em Didática da Matemática). Université Joseph Fourier, Grenoble, 1996.

BARBOSA, Pedro Ribeiro. *Efeitos de uma seqüência de atividades relativas aos conceitos de comprimento e perímetro no Ensino Fundamental.* Recife, 2002. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Pernambuco, UFPE, 2002.

BARROS, José Severino. *Investigando o conceito de volume no ensino fundamental: um estudo exploratório.* Recife, 2002. Dissertação (Mestrado em Educação), Programa de Pós-Graduação em Educação, Centro de Educação, UFPE, 2002.

BATURO, Annette; NASON, Rod. *Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement.* Educational Studies in Mathematics 31: 235 – 268, 1996.

BEHR, Merlyn J.; LESH, Richard; POST, Thomas R.; SILVER. Edward A. Rational Number Concepts. In: LESH, Richard; LLANDAU, Marsha (ed.). *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press, 1983.

BELLEMAIN, Paula M. Baltar; LIMA, Paulo Figueiredo. *Um estudo da Noção de Grandeza e Implicações no Ensino Fundamental.* Natal: SBHMata, 2002.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). *Pesquisa em educação matemática*: concepções & perspectivas. São Paulo: Editora Unesp, 1999.

BITTAR, Marilena; CHAACHOUA, Hamid. *Integração de um software para a aprendizagem da álgebra: APLUSIX.* Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. UFPE: Recife, 2004.

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática.* São Paulo: Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática, Secretaria de Educação Fundamental, Brasília. MEC/SEF, 1998.

BRITO, Alexsandra Felix. *Um estudo sobre a influência do uso de materiais manipulativos na construção do conceito de comprimento como grandeza no 2º ciclo do Ensino Fundamental*. Recife, 2003. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, 2003.

BROUSSEAU, Guy. Fondementes et méthodes de la didactique dês mathématiques. *Recherches em Didactiques dês Mathématiques,* V.7, nº 2, pp. 33 – 116. Grenoble, 1986.

______. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, Vol. 4, nº 2, pp. 165-198, 1983.

______. Problèms de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, Vol. 2, nº 1 1981.

BÚRIGO, Elizabete. Z. Para que ensinar e aprender Geometria no Ensino Fundamental? Um exercício de reflexão sobre o currículo. In: FILIPOUSKI, Ana Mariza Ribeiro; MARCHI, Diana Maria; SCHÄFFER, Neiva Otero (Org.). *Teorias e fazeres na escola em mudança.* 1. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2005, v. 1, p. 243-252.

CAMPOS, Tânia; NUNES, Terezinha. Tendências Atuais do Ensino e Aprendizagem da Matemática. *REVISTA EM ABERTO*. Brasília, ano l4, n. 62, abr/jun. 1994.

CANÔAS, Silvia Swaain. *O campo conceitual Multiplicativo na Perspectiva do Professor das Séries Iniciais (1 a 4ªsérie).* São Paulo, 1997. Dissertação (Mestrado em ensino da Matemática). PUC-SP, 1997.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática.* Lisboa, 1952.

CARRAL, Michel. *Géométrie*. Paris: Editions Ellipses, 1995.

CHAMBADAL, Lucien. *Dicionário da Matemática Moderna*. São Paulo: Editora Nacional, 1978.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Mariana; GASCÓN, Josep. *Estudar Matemáticas – o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem.* Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

COLL, César et al. *Psicologia do ensino.* Trad. Cristina Maria de Oliveira. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

CUNHA, Micheline Rizcallah Kanaan; MAGINA, Sandra Maria Pinto. *A medida e o número decimal: um estudo sobre a elaboração de conceito em crianças do nível fundamental.* Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. UFPE: Recife, 2004.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação Matemática: da teoria à prática.* 10.ed. Campinas: Papirus, 2003.

DA ROCHA FALCÃO, Jorge Tarcísio. A Álgebra como Ferramenta de Representação e Resolução de Problemas. In: SCHLIEMANN, Analúcia Dias. *Estudos em Psicologia da Educação Matemática*. 2.ed. Recife: Ed. UFPE,1997.

DANTE, Luiz Roberto. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. 12.ed. São Paulo: Editora Ática, 2002.

______. *Matemática. Ensino Médio*. São Paulo: Editora Ática, 2004.

______. *Tudo é Matemática*. São Paulo: Editora Ática, 2002.

DE FREITAS, J. L. M; BITAR, Marilena. *Fundamentos e metodologia da matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental.* Campo Grande –MS: Editora UFMS, 2004.

DOUADY, Regine; PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*. V. 20, n. 4. p. 387-424, 1989.

DREYFUS T.; EISENBERG, T. Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13 (5), 360 – 380, 1982.

DUARTE, Jorge Henrique. *Investigação de uma seqüência didática para construção do conceito de área.* Recife, 2002. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Pernambuco, 2002.

FACCO, Sonia Regina. *Conceito de área. Uma proposta de ensino-aprendizagem*. São Paulo, 2003. Dissertação (Mestrado em Educação). PUC-SP, 2003.

FREITAS, José Luiz Magalhães. Situações Didáticas. In: ALCÂNTARA MACHADO, Silvia Dias et alii. *Educação Matemática*: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

GÁLVEZ, Grécia. A geometria, a psicogênese das noções espaciais e o ensino da geometria na escola primária. In*:* PARRA, Cecília; SAIZ, Irmã (ORG.) *Didática da Matemática –* Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. Pág. 236 a 258.

GARCIA, Francisco Fernández. Aspectos históricos del paso de la aritmética al álgebra. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Número 14, ano IV, outubro de 1997. Graó, Barcelona, 1997.

GERARD, François-Marie; ROEGIERS, Xavier. *Conceber e avaliar manuais escolares – Coleção Ciências da Educação.* Portugal: Editora Porto, 1998.

GERMI, Pierre Emmanuel. *Statut des lettres et notion de variable. Petit x número 45.* Pp. 59-79. Grenoble, França: 1997.

GOMES FERREIRA, V. G. *Exploring Mathematical Functions through dynamic microworlds.* Londres, 1997. Tese (PHd em Educação). Institute of Education, University of London, 1997.

HARTSHORNE, Robin. Companion to Euclid. A course of geometry, based on Euclid's Elements and its modern descendants. Berkeley Mathematics – Lecture Notes (Volume 9). American mathematical Society. Berkely Center for Pure and Applied Mathematics, 1997.

HENRY, Michel. *Analyse Théorique de Situations Didactiques.* Simpósio Internacional de Educação Matemática. Recife: UFPE, 2006.

HENRY, Michel. *Le concept de Fonction Dans Les Problèmes de Rallye (Élèves de 12 à 15 ans).* IREM, Besançon (France). Université de France – Comte, 2005.

HOUDEMENT, Catherine; KUZNIAK, Alain. Un Exemple De Cadre Conceptuel Pour L'étude De L'enseignement De La Géométrie En Formation Des Maîtres. Educational Studies in Mathematics 40: 283–312, Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands. 1999.

IFRAH, Georges. *Os números* - história de uma grande invenção. 8.ed.. São Paulo: Ed. Globo, 1996.

IMENES, Luiz Márcio Pereira; LELLIS, Marcelo. *Matemática*. São Paulo: Scipione, 1997.

JOHSUA, S. DUPIN, J.J. *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques.* Paris: Presses Universitaires de France, 1993.

KAMII, C. *A criança e o número*: Implicações educacionais da Teoria de Piaget. Campinas: Papirus, 1992.

KORDAKI, Maria. The effect of tools of a computer microworld on student's strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics*. 52: 177 – 209, 2003.

LANG. Serge; MURROW, Gene. Geometry – A High School Course. Spring-Verlaag New York (USA): Library of Congress Cataloging in Publication Data, 1983.

LEINHARDT, Gaea; ZASLAVSKY, Orit; STEIN, Mary Kay. Functions, Graphs, and Graphing: Task, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*. Spring 1990, volume 60, number 1.

LERNER, Delia; SADOVSKY, Patrícia: O sistema de numeração: um problema didático. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irmã (Org.). *Didática da Matemática* – Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. Pág. 109-134.

LIMA, José Maurício de Figueiredo. Iniciação ao conceito de fração e o desenvolvido da conservação de quantidade. In: CARRAHER, Terezinha. *Aprender Pensando*. Petrópolis: Vozes, 1988.

LIMA, Maurício Figueiredo; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar; TELES, Rosinalda Aurora de Melo. *Reflexões sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática na Escola*: uma experiência de extensão na formação continuada de professores. No prelo.

LIMA, Paulo Figueiredo. *Considerações sobre o conceito de área.* Anais da Semana de Estudos em Psicologia da educação Matemática. Recife, 1999.

LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. *Aprendendo e ensinando geometria*. São Paulo: Atual, 1994.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI.* Campinas: Papirus, 1997.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? *A Educação Matemática em Revista*, 4. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1º sem 1995.

LUCKESI, Cipriano. *Avaliação da Aprendizagem Escolar.* São Paulo: Cortez, 1999.

MAGINA, Sandra; CAMPOS, Tânia; NUNES, Terezinha; GITIRANA, Verônica. *Repensando Adição e Subtração*. São Paulo, PROEM Editora, 2001.

MAIA, Licia Maria. A teoria dos Campos Conceituais: um novo olhar para a formação. *Revista do GEPEM*. Rio de Janeiro, no prelo.

MANKIEWICZ, Richard. *L'Histoire des Mathématiques*. Paris: Editions de Seuil, 2000.

MEC – MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. *Guia de Livros Didáticos,* Brasília, 1999.

MEIRA, Luciano de Lemos. Aprendizagem e ensino de funções. In: SCHLIEMANN, Analúcia, et al. *Estudos em Psicologia da Educação Matemática*. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1997.

MEIRA, Luciano. *Atividade algébrica e produção de significados em matemática.* Boletim TV ESCOLA, maio/2003.

MOISE, Edwin E. ELEMENTARY GEOMETRY. From an Advanced Standpoint Addison-Wesley Publishing Company, 1990.

NAKAMURA, Olga Y. Akabane. *Generalização de padrões geométricos*: Caminho para a construção de expressões algébricas no ensino fundamental. São Paulo, 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC, 2003.

NEPEM - NÚCLEO DE ESTUDOS E PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. *Números racionais no Ensino Fundamental. Subconstrutos, o papel da linguagem e dos materiais manipulativos. In*: Anais do 8º Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, 2004.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. *Crianças fazendo matemáticas.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, Terezinha; CAMPOS, Tânia; MAGINA, Sandra; BRYANT, Peter. *Introdução a Educação Matemática*. São Paulo: PROEM Editora, 2002.

OLIVEIRA, Glauco Reinaldo Ferreira. *Construção do Conceito de Volume no Ensino Fundamental*: um estudo de caso. Recife, 2002. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós Graduação em Educação, Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, 2002.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M.A.V. (Org.). *Pesquisa em educação matemática*: concepções & perspectivas. São Paulo: Editora Unesp, 1999.

PAIS, Luis Carlos. *Didática da Matemática*: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PARRA, Cecília; SAIZ, Irma. (Org.). *Didática da Matemática*: Reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

PATERLINI, Roberto Ribeiro. Técnicas de Máximos e Mínimos. *Revista do Professor de Matemática* 35. SBM, 1997, pág. 35-38.

PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne. *Problèmes Didactiques liés à l'enseignement des grandeurs. Les cas des aires.* Actes da 11ª École d'été de Didactique des Mathématiques – La Pensée Sauvage Editions. 2001.

PERROT, Gérard et al. *Módulos para o ensino-aprendizagem em geometria: relatório da primeira experimentação do primeiro módulo em Pernambuco.* IN: Seminário do Pró-Matemática 5, 1998. Recife. Projeto Brasília: MEC/SEF, 1998.

PERROTA, Roberto Camillo. *O Ensino de Área e Perímetro através de Modelagem*. São Paulo, 2001. Dissertação (Mestrado), PUC–SP, 2001.

PIRES, Célia Maria Carolino; CURI, Edda; CAMPOS, Tânia. *Espaço e Forma* - a construção de noções geométricas pelas crianças das quatro séries iniciais do Ensino Fundamental. São Paulo: PROEM, 2000.

SAJKA, Miroslawa. *A secondary School student's understanding of the concept of function – A case Study.* Educational Studies in Mathematics 53: 229 – 204, Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands, 2003.

SANTALÓ, Luis A. *Matemática para não-matemáticos.* In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irmã (org.). *Didática da Matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

SANTOS, Manoel Heleno Rodrigues. *Matemática*: Princípios e Filósofos da Matemática. Recife: Oficinas Gráficas do União Curso, 1997.

SANTOS, Marilene Rosa. *Resolução de problemas envolvendo área de paralelogramo: um estudo sob a ótica das variáveis didáticas e do contrato didático*. Recife, 2005. Dissertação (Mestrado). UFRPE, 2005.

SFARD, A.; LINCHEVSKI, I. The gains and the pitfalls of reification – The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics* 26, 1994 (p.191 – 228)

SIERPINSKA, A. *On understanding the notion of function.* In: Dubinsk & Harel (Ed.). *"The concept of function – aspects of epistemology and pedagogy*". M.A.A Notes, v.25, p. 25-58, 1992.

SILVA, Marithiça Flaviana Florentino. *Frações e Grandezas Geométricas*: um estudo exploratório da abordagem em livros didáticos. Recife, 2004. Dissertação (Mestrado em Educação), Programa de Pós-Graduação em Educação, Centro de Educação, UFPE, 2004.

SILVA, Vilma; SILVA, Ozileide; BORBA, Rute, AGUIAR, Maria Cecília e LIMA, José Maria. Uma experiência de ensino de fração articulada ao decimal e à porcentagem. *Educação Matemática em Revista*, nº 8, ano 7, junho de 2000.

SOUZA, Cristiane Fernandes; NETO, Francisco Peregrino Rodrigues Neto. *Estudo de manipulação algébrica das fórmulas de área de polígonos e dedução da fórmula da área do círculo.* Anais doVIII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM): Recife, 2004.

SOUZA, Eliane Reame; DINIZ, Maria Ignez de S. Vieira**.** *Álgebra*: das Variáveis às Equações e Funções. São Paulo: IME-USP, 1996.

STRUIK, Dirk J. *História Concisa da Matemática.* Lisboa: Gradiva, 1989.

TELES, Rosinalda Aurora de Melo; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. *Um estudo sobre a construção do significado das fórmulas de área em livros didáticos.* Encontro Pernambucano de Educação Matemática (EPEM), Caruaru: novembro de 2006.(a)

______. *Um Estudo de Imbricações Entre os Campos Conceituais das Grandezas Geométricas, da Álgebra e das Funções.* Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEMAT), UFPE: Recife, 2006.(b)

TELES, Rosinalda Aurora de Melo. *A Relação entre Aritmética e Álgebra na Matemática Escolar: Um estudo sobre a influência da compreensão das propriedades da igualdade e do conceito de operações inversas com números racionais na resolução de equações polinomiais* *do 1º grau*. Recife, 2002. Dissertação (Mestrado em Educação), Programa de Pós Graduação em Educação, Centro de Educação, UFPE, 2002.

TRINDADE, José Análio de Oliveira; MORETTI, Méricles Thadeu. *Uma relação entre a Teoria Histórico-cultural e a Epistemologia Histórico-crítica no Ensino de Funções: A Mediação.* Zetetiké – CEMPEM –FE/UNICAMP – V. 8 – nº 13/14, p. 29-50- Jan./Dez. de 2000.

USISKIN, Zalman. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. *As Idéias da Álgebra*. São Paulo: Atual, 1995.

VERGNAUD, Gérard. La théorie des champs conceptuels. *Recherches em Didactique des Mathématiques* – RDM, v. 10, nº 2, 3. Grenoble, 1990. p. 133 – 170

______. *Psicologia do Desenvolvimento Cognitivo e Didática das Matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas*. 1986.

______. *Mathematics Education*. Texto não publicado, 1997.

VITRAC, Bernard. A invenção da Geometria. *Scientific American* História.- A Ciência na Antiguidade. São Paulo: Ediouro Pinheiros, 2006. ISSN 1808-2203.

WAERDEN, B. L. van der. *A History of Algebra from al-Khowarizmi to Emmy Noether.* Zürich: Springer – Verlarg Berlin Heidelberg, 1985.

ZUFFI, Edna Moura. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. *Educação Matemática em Revista*. SBEM, Ano 8 – nº 9/10, abril, 2001.

ZUFFI, Edna Moura. *O tema funções e a linguagem matemática de professores do Ensino Médio: por uma aprendizagem de significados.* São Paulo, 1999. Tese (Doutorado em Educação, Área de concentração em Ensino de Ciência e Matemática). Faculdade de Educação, USP, 1999.

ANEXOS

ANEXO A – TESTES DIAGNÓSTICOS

ESCOLA: ____

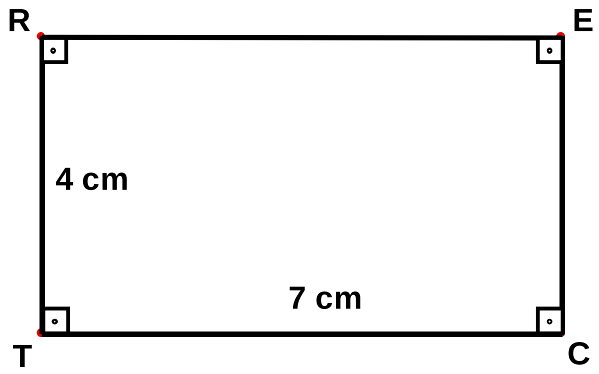
NOME: ____ IDADE: _________

SÉRIE: __________________ TURMA: _________________ DATA: ____/_______/2006.

<u>(T1)</u>

1ª questão:

Calcule a área e o perímetro do retângulo abaixo:



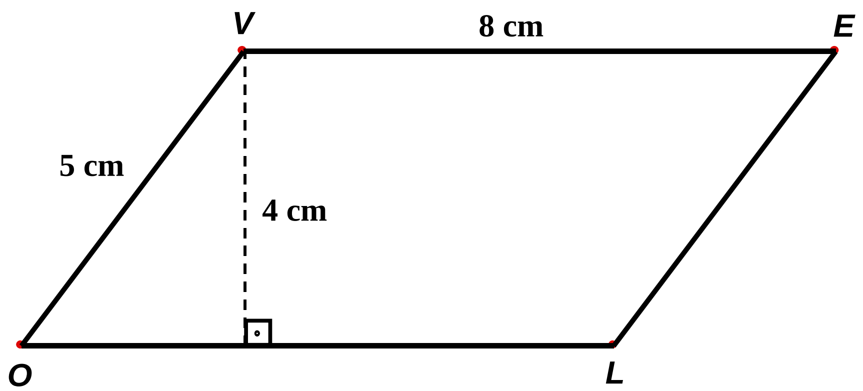
A área do retângulo RECT é:

Justifique sua resposta:

O perímetro do retângulo RECT é:

Justifique sua resposta:

Calcule a área e o perímetro do paralelogramo abaixo:



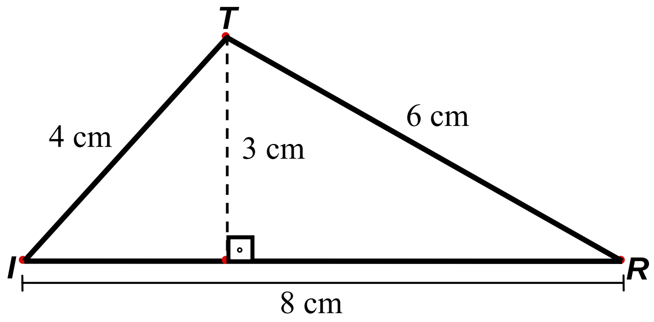
A área do paralelogramo VELO é:

Justifique sua resposta:

O perímetro do paralelogramo VELO é:

Justifique sua resposta:

Calcule a área e o perímetro do triângulo abaixo:



A área do triângulo TRI é:

Justifique sua resposta:

O perímetro do triângulo TRI é:

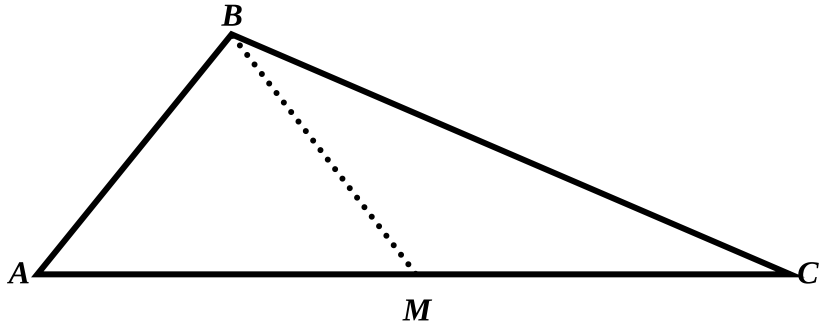
Justifique sua resposta:

2ª questão:

Determine a área e o perímetro de uma região retangular cujas medidas do comprimento e da largura são, respectivamente: 23,8 cm e 12,2 cm.

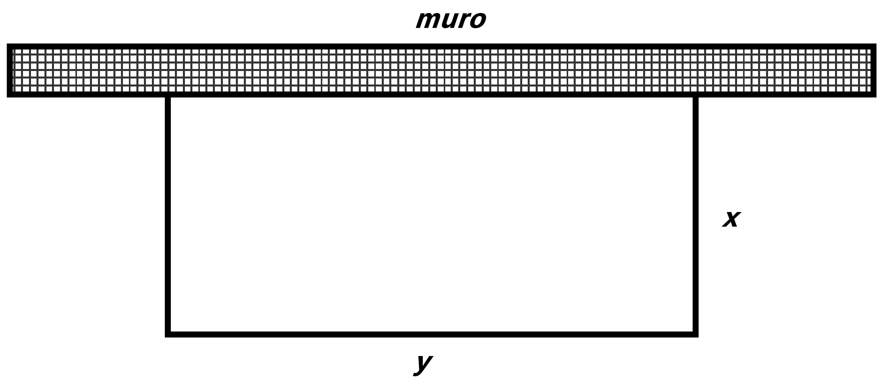
3ª questão:

O segmento BM é a mediana do triângulo ABC, relativo ao vértice B. Compare as áreas dos triângulos ABM e BMC.



4ª questão:

Dona Rosa adora flores e deseja fazer um canteiro retangular aproveitando um muro existente em seu terreno. Ela ainda não sabe quais serão as dimensões do canteiro, mas quer aproveitar todos os 20 metros de tela que tem para cercá-lo.



Dona Rosa quer que o canteiro tenha a maior área possível usando os 20 metros de tela. Qual será essa área? Quanto medirão o comprimento e a largura nesse caso?

ESCOLA: ____

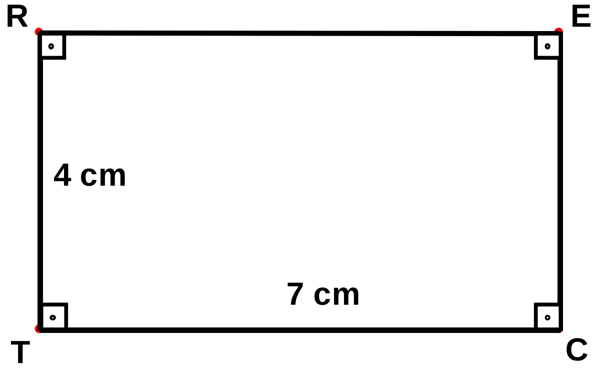
NOME: ____ IDADE: _________

SÉRIE: __________________ TURMA: _________________ DATA: ____/_______/2006.

<u>**(T2)**</u>

1ª questão:

Calcule a área e o perímetro do retângulo abaixo:



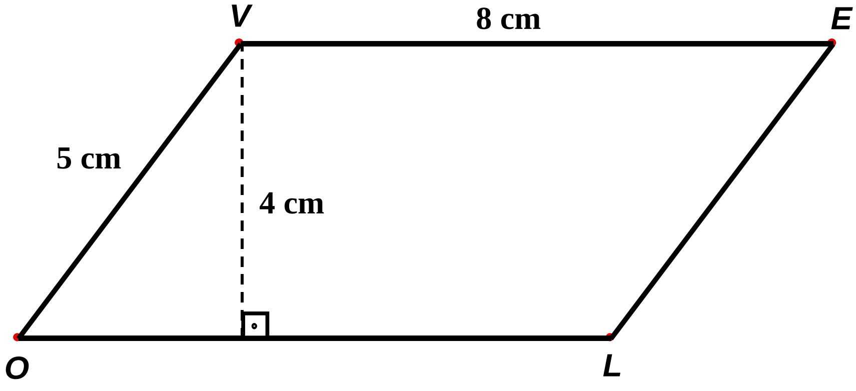
A área do retângulo RECT é:

Justifique sua resposta:

O perímetro do retângulo RECT é:

Justifique sua resposta:

Calcule a área e o perímetro do paralelogramo abaixo:



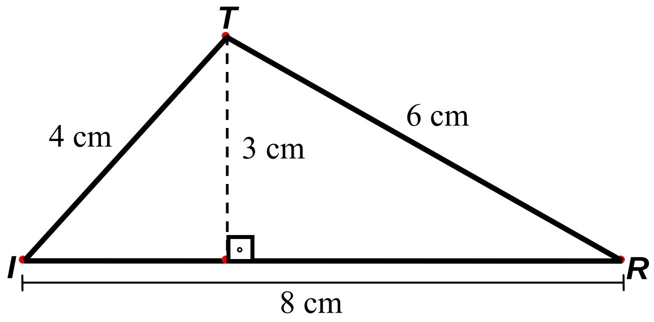
A área do paralelogramo VELO é:

Justifique sua resposta:

O perímetro do paralelogramo VELO é:

Justifique sua resposta:

Calcule a área e o perímetro do triângulo abaixo:



A área do triângulo TRI é:

Justifique sua resposta:

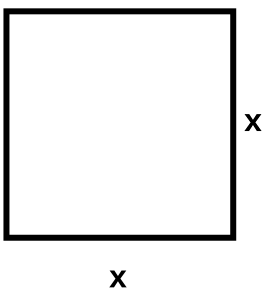
O perímetro do triângulo TRI é:
Justifique sua resposta:

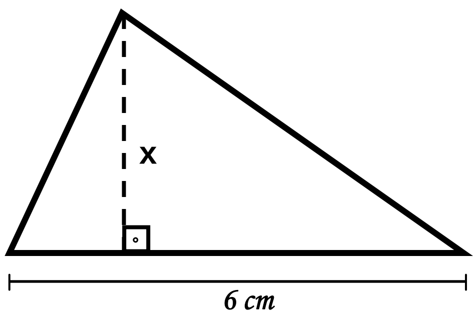
2ª questão:

Um terreno de forma quadrada tem perímetro igual a 32 m. Qual é a sua área?

3ª questão:

Ache o valor de x para que o triângulo e o quadrado tenham a mesma área.





4ª questão:

Uma região retangular tem perímetro igual a 30 metros. Quais devem ser as dimensões do retângulo para que a área seja máxima?

ESCOLA: ____

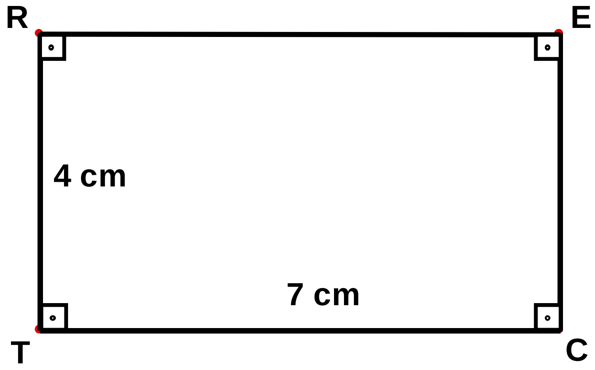
NOME: ____ IDADE: _________

SÉRIE: ___________________ TURMA: __________________ DATA: ____/_______/2006.

<u>(T3)</u>

1ª questão:

Calcule a área e o perímetro do retângulo abaixo:



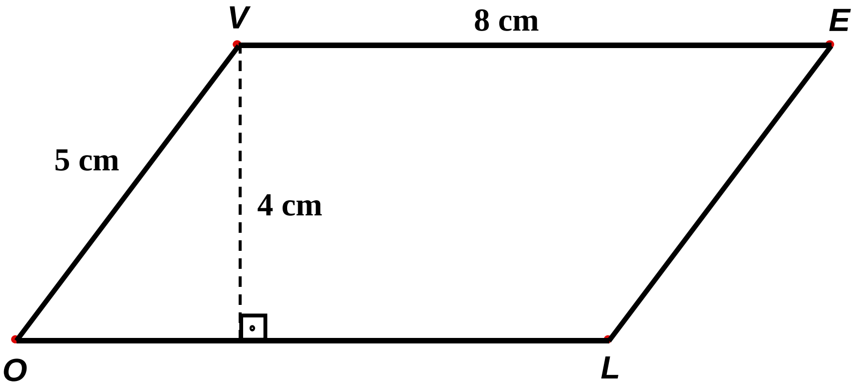
A área do retângulo RECT é:

Justifique sua resposta:

O perímetro do retângulo RECT é:

Justifique sua resposta:

Calcule a área e o perímetro do paralelogramo abaixo:

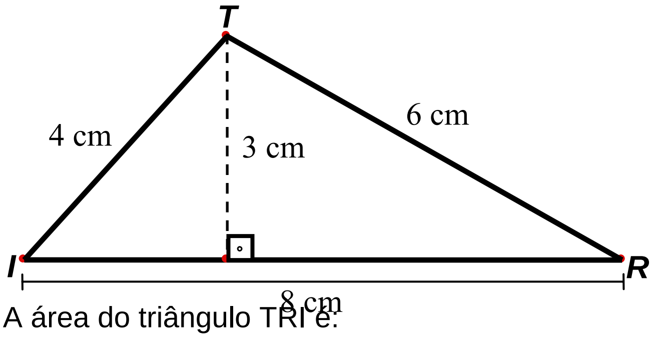


A área do paralelogramo VELO é:

Justifique sua resposta:

O perímetro do paralelogramo VELO é:
Justifique sua resposta:

Calcule a área e o perímetro do triângulo abaixo:



A área do triângulo TRI é:

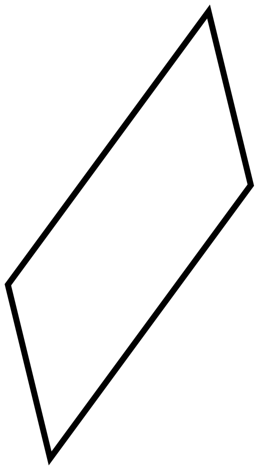
Justifique sua resposta:

O perímetro do triângulo TRI é:

Justifique sua resposta:

2ª questão:

Observe o paralelogramo abaixo:



a) Com uma régua, meça os comprimentos necessários para calcular a área do paralelogramo e registre os dados coletados na figura.
b) Qual a área aproximada até milímetros do paralelogramo? Justifique sua resposta

3ª questão:

Uma região retangular tem 42 cm de perímetro e 104 cm^2 de área. Quais são as dimensões dessa região retangular?

4ª questão:

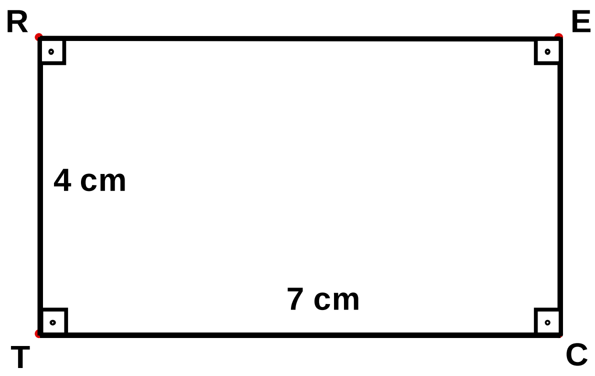
Um papel de carta retangular tem dimensões 20 cm x 26 cm e uma margem interna desenhada em toda a volta de 2 cm de largura. Qual é a área do papel disponível para a escrita?

ESCOLA: ____

NOME: ____ IDADE: _________
SÉRIE: ___________________ TURMA: __________________ DATA: ____/_______/2006.
(T4)

1ª questão:

Calcule a área e o perímetro do retângulo abaixo:



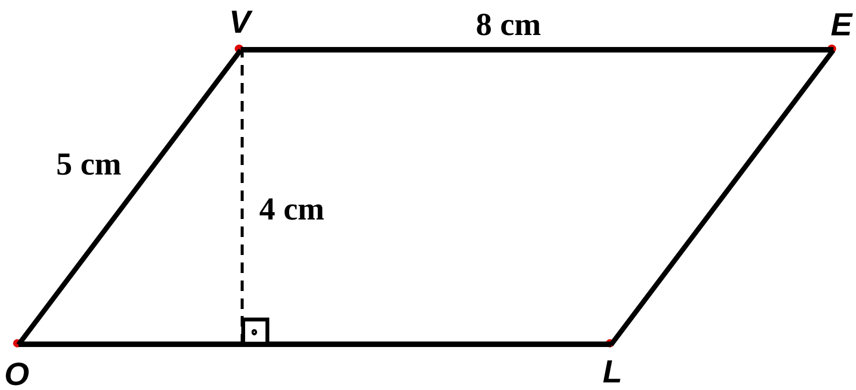
A área do retângulo RECT é:

Justifique sua resposta:

O perímetro do retângulo RECT é:

Justifique sua resposta:

Calcule a área e o perímetro do paralelogramo abaixo:



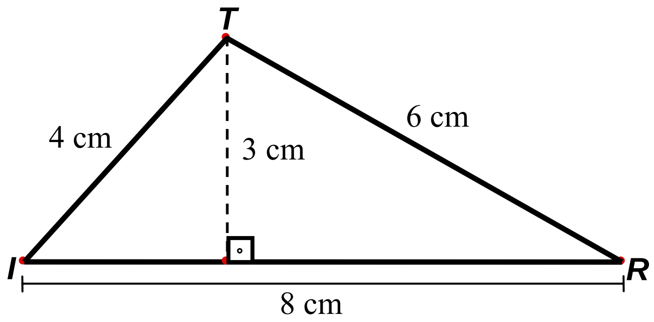
A área do paralelogramo VELO é:

Justifique sua resposta:

O perímetro do paralelogramo VELO é:

Justifique sua resposta:

Calcule a área e o perímetro do triângulo abaixo:



A área do triângulo TRI é:

Justifique sua resposta:

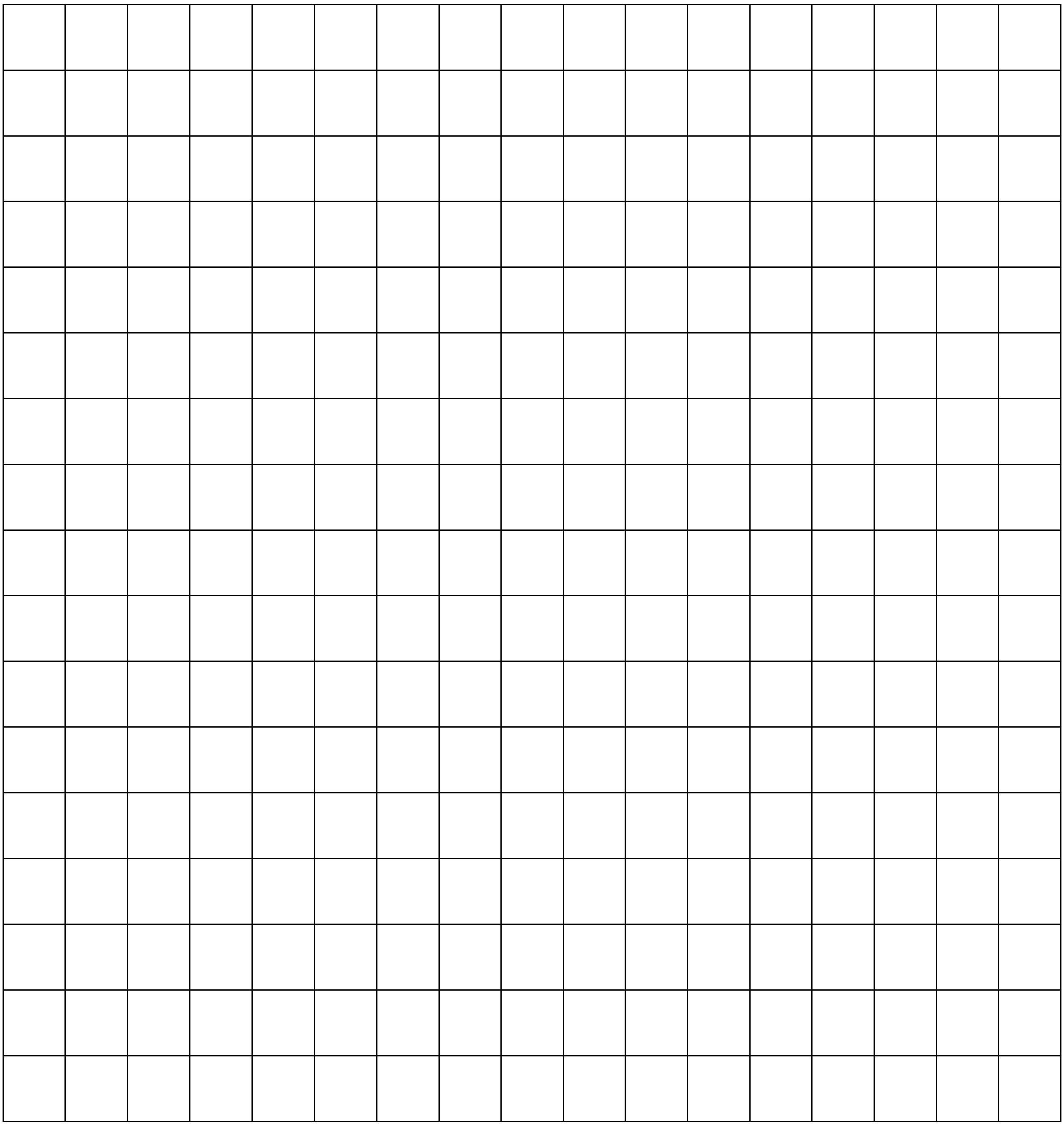
O perímetro do triângulo TRI é:

Justifique sua resposta:

2ª questão:

Desenhe no papel quadriculado cinco triângulos diferentes, de maneira que cada um deles tenha 6 cm^2 de área.

1 cm^2



3ª questão:

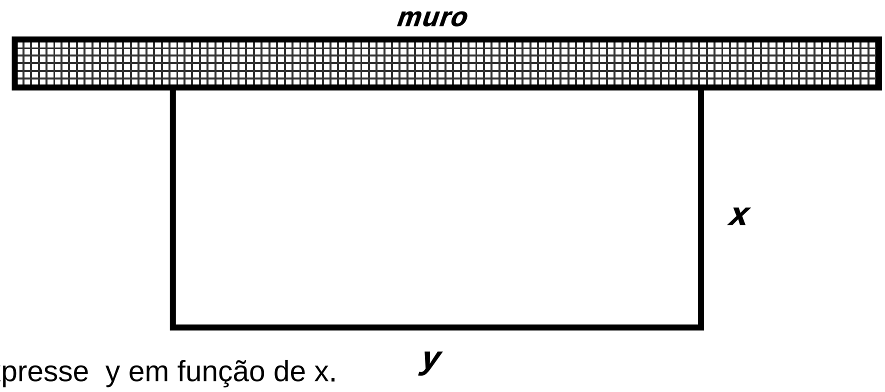
De uma folha de papel retangular de 30 cm por 20 cm são retirados, de seus quatro cantos, quadrados de lado **x**.

a) Determine a expressão que indica a área da parte que sobrou em função de x;

b) Qual o valor de x para que a área restante seja igual a 200 cm^2?

4ª questão:

Dona Rosa adora flores e deseja fazer um canteiro retangular aproveitando um muro existente em seu terreno, como indica a figura abaixo. As dimensões do canteiro podem variar, desde que os 20 metros de tela que possui sejam utilizados.



e) Expresse y em função de x.
f) Determine a área A desse canteiro em função de x.
g) Complete a tabela abaixo com alguns valores possíveis de x, de y e de A.

x												
y												
A												

h) Dona Rosa quer que o canteiro tenha a maior área possível usando os 20 metros de tela. Qual será essa área? Quanto medirão x e y, nesse caso.

ESCOLA: ____

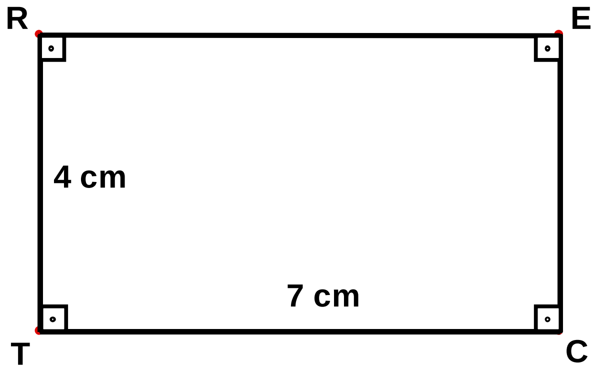
NOME: ____ IDADE: _________

SÉRIE: ___________________ TURMA: __________________ DATA: ____/_______/2006.

(T5)

1ª questão:

Calcule a área e o perímetro do retângulo abaixo:



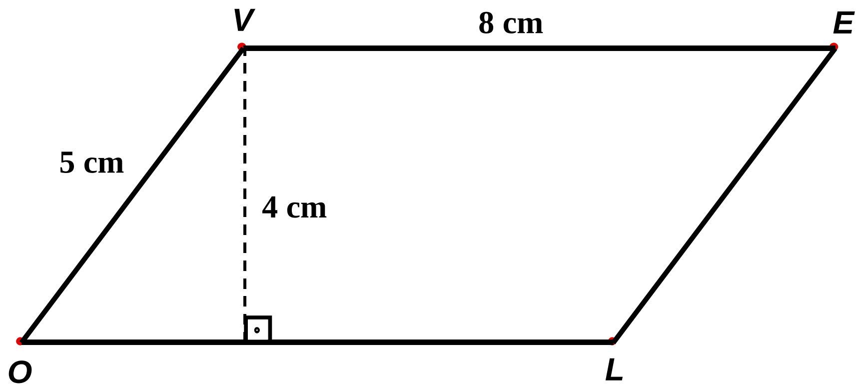
A área do retângulo RECT é:

Justifique sua resposta:

O perímetro do retângulo RECT é:

Justifique sua resposta:

Calcule a área e o perímetro do paralelogramo abaixo:

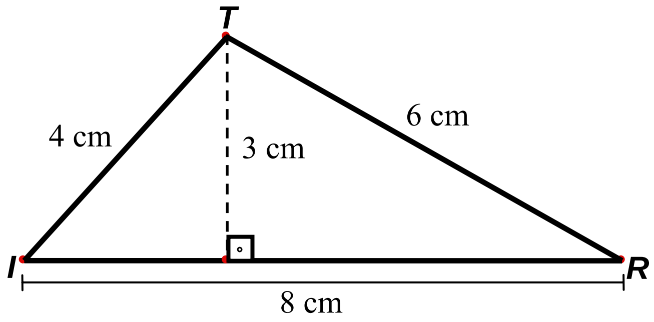


A área do paralelogramo VELO é:

Justifique sua resposta:

O perímetro do paralelogramo VELO é:
Justifique sua resposta:

Calcule a área e o perímetro do triângulo abaixo:



A área do triângulo TRI é:

Justifique sua resposta:

O perímetro do triângulo TRI é:
Justifique sua resposta:

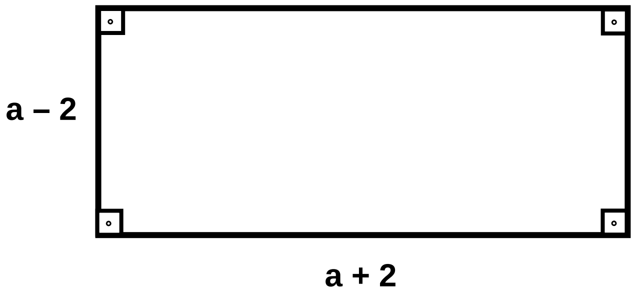
2ª questão:

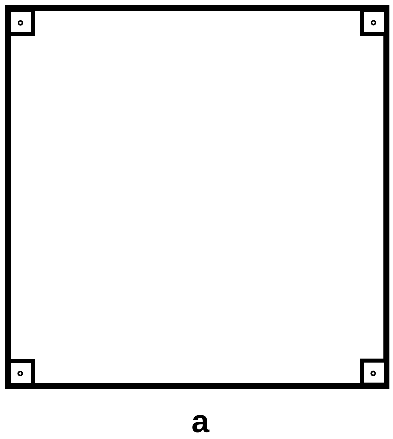
Um paralelogramo tem 18 cm de perímetro. O comprimento de um de seus lados é o dobro do comprimento do outro lado. A altura relativa ao lado maior mede 2 cm.

a. Esboce o desenho desse paralelogramo com suas medidas
b. Calcule a área da região determinada por ele.

3ª questão:

As dimensões do retângulo (à esquerda) e do quadrado (à direita) são dadas pelas expressões indicadas, nas quais **a** representa um número maior do que 2 (**a** > 2):

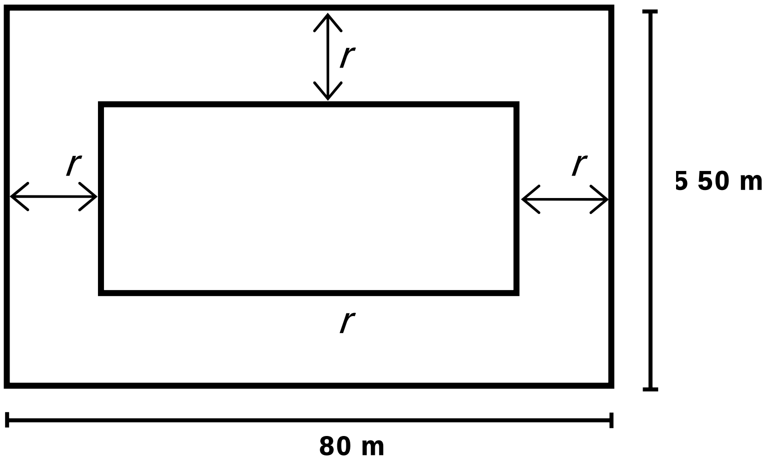




c) Qual das duas figuras tem maior área? Por quê?

4ª questão:

Num terreno retangular, medindo 80 m x 50 m, deseja-se construir um galpão retangular, de forma que cada um de seus lados seja paralelo a dois lados do terreno, como ilustrado na figura baixo. Se a área do galpão deve ser 1375 m^2, de quantos metros deve ser o recuo **r?**



ANEXO B – TABELA COM RESULTADO GERAL DOS TESTES

QUESTÕES	ACERTOS	%ACERTOS	ERROS	% ERROS	ACERTOS PARCIAIS	% DE ACERTOS PARCIAIS	AUSÊNCIA DE RESPOSTA	% AUSÊNCIA DE RESPOSTA	TOTAL DE ALUNOS POR QUESTÃO
Q2-T1 A (area)	21	42,86	8	16,33	8	16,33	12	24,49	49
Q2-T1 B (perímetro)	21	42,86	9	18.37	3	6,12	16	32,65	49
Q2-T2	22	40,74	11	20,37	11	20,37	10	18,52	54
Q2-T3 A (indicação dos dados)	17	36,96	17	36,96			12	26,09	46
Q2-T3 B (area)	10	21,74	22	47,83	2	4,35	12	26,09	46
Q2-T4	21	35,00	16	26,67	6	10,00	17	28,33	60
Q2-T5 A (desenho)	18	36,00	15	30,00			17	34,00	50
Q2-T5B (area)	11	22,00	18	36,00	4	8,00	17	34,00	50
Q3-T1	16	32,65	13	26,53			20	40,82	49
Q3-T2	26	48,15	10	18,52			18	33,33	54
Q3-T3	16	34,78	8	17,39			22	47,83	46
Q3-T4 A (expressão)	17	28,33	19	31,67			24	40,00	60
Q3-T4 (valor de x)	16	26,67	19	31,67			25	41,67	60
Q3-T5	28	56,00	8	16,00			14	28,00	50
Q4-T1 A (area)	12	24,49	17	34,69			20	40,82	49
Q4-T1 (dimensões)	9	18,37	20	40,82			20	40,82	49
Q4-T2	4	7,40	30	55,56			20	37,04	54
Q4-T3	17	36,96	18	39,13			11	23,91	46
Q4-T4 A (expressão)	10	16,67	9	15,00			41	68,33	60
Q4-T4 B (area em função de x)	13	21,67	8	13,33			39	65,00	60

Q4-T4 C (tabela)	6	10,00	12	20,00			42	70,00	60
Q4-T4 D (área máxima)	7	11,67	16	26,67			37	61,67	60
Q4-T5	8	16,00	22	44,00			20	40,00	50