



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

FILIPE ALMEIDA DE ANDRADE LIMA BRITO

PROCESSO ARMA LOMAX COM ESTRUTURA NA FUNÇÃO QUANTÍLICA

Recife

2021

FILIPPE ALMEIDA DE ANDRADE LIMA BRITO

PROCESSO ARMA LOMAX COM ESTRUTURA NA FUNÇÃO QUANTÍLICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Estatística. Área de Concentração: Estatística Aplicada

Orientadora: Maria do Carmo Soares de Lima

Co-Orientador: Abraão David Costa do Nascimento

Recife

2021

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

B862p Brito, Filipe Almeida de Andrade Lima
Processo ARMA Lomax com estrutura na função quantílica / Filipe Almeida de Andrade Lima Brito. – 2021.
65 f.: il., fig., tab.

Orientadora: Maria do Carmo Soares de Lima.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Estatística, Recife, 2021.
Inclui referências e apêndices.

1. Estatística aplicada. 2. Séries temporais. I. Lima, Maria do Carmo Soares de (orientadora). II. Título.

310

CDD (23. ed.)

UFPE- CCEN 2021 - 135

FILIPE ALMEIDA DE ANDRADE LIMA BRITO

PROCESSO ARMA LOMAX COM ESTRUTURA NA FUNÇÃO QUANTÍLICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Estatística. Área de Concentração: Estatística Aplicada

Aprovada em: 22 de Julho de 2021

BANCA EXAMINADORA

Maria do Carmo Soares de Lima (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Gauss Moutinho Cordeiro
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Renata Rojas Guerra
Universidade Federal de Santa Maria - UFSM

AGRADECIMENTOS

Gostaria de iniciar agradecendo aos meus orientadores Prof^ª. Dr^ª. Maria do Carmo Soares de Lima e ao Prof. Dr. Abraão David Costa do Nascimento pela paciência e por cada passo na orientação deste trabalho e pelo tempo dedicado ao meu auxílio.

À minha família e a minha noiva por toda compreensão e acolhimento nos momentos difíceis e por todo o suporte em todas as batalhas.

Aos meus companheiros de curso, em especial André Medeiros e Ivangillys Lima pela parceria construída do primeiro ao último dia deste curso.

Aos professores do departamento que tive oportunidade de cruzar pelo caminho, pois me ajudam a me construir, transmitindo mais que conhecimento. Em especial, aos professores membros da banca examinadora por todas as contribuições.

Finalmente agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

RESUMO

Dada a ampla aplicabilidade de modelos de séries temporais, a proposta de abordagens que contemplem dados de diferentes suportes tem se tornado importante. A distribuição Lomax tem sido utilizada com sucesso para descrever fenômenos de diversas áreas de conhecimento, tais como análise de sobrevivência, confiabilidade e economia. Nesta dissertação, propõe-se um modelo de séries temporais pela abordagem de regressão com ligação na função quantílica tendo distribuição marginal Lomax para descrever preço de fechamento diário da Criptomoeda Litecoin. O novo modelo dinâmico é denominado como processo Autorregressivo e de Médias Móveis Lomax quantílico (ARMA-LQ). Inicialmente, propõe-se uma distribuição Lomax reparametrizada e algumas de suas propriedades são revisitadas. Subseqüentemente, o modelo ARMA-LQ é proposto e algumas de suas propriedades são estudadas, tais como funções score e matriz de informação observada. É proposto um procedimento de estimação por máxima verossimilhança condicional (EMVC) para os parâmetros do modelo ARMA-LQ. Através de experimentos Monte Carlo, o desempenho das estimativas de EMVC é quantificado para diferentes submodelos. Finalmente, o modelo ARMA-LQ é aplicado a dados reais a fim de descrever os dados relacionados ao preço de fechamento da Criptomoeda Litecoin, comparativamente ao modelo Gama-ARMA. Resultados sugerem que a proposta desta dissertação é um importante suposto probabilístico para lidar com dados dessa Criptomoeda.

Palavras-chave: criptomoedas; distribuição Lomax; estrutura ARMA; litecoin; séries temporais.

ABSTRACT

Based on the wide applicability of time series models, the proposal of approaches that deal with data having as support a subset of the real line has been sought. The Lomax distribution has been successfully used to describe phenomena from different areas, such as Survival Analysis, Reliability and Economy. In this dissertation, a time series model is proposed by the regression approach considering a link function in the quantile function and with the Lomax marginal distribution. Our proposal is used to describe Cryptocurrency Litecoin daily closing price. The new dynamic model is called autoregressive-moving-average (ARMA) in the Lomax quantile function (ARMA-LQ). Initially, a reparametrized Lomax distribution is introduced and some of its properties are discussed. Subsequently, the ARMA-LQ model is proposed and some of its properties are studied, such as score functions and observed information matrix. A conditional maximum likelihood estimation (EMVC) procedure for the ARMA-LQ parameters is proposed. Through Monte Carlo experiments, the performance of EMVC estimates is quantified for different submodels. Finally, the ARMA-LQ model is applied to the data related to the closing price of Litecoin Cryptocurrency, compared to the Gama-ARMA model. Results suggest that the proposal of this dissertation is an important probabilistic assumption to deal with data from this Cryptocurrency.

Keywords: ARMA structure; cryptocurrency; litecoin; Lomax distribution; time series.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Gráfico da densidade da Lomax.	18
Figura 2 – Gráfico da taxa de falha da Lomax.	20
Figura 3 – Gráfico da densidade da Lomax reparametrizada com a quantílica.	25
Figura 4 – Gráfico da taxa de falha da Lomax reparametrizada.	26
Figura 5 – Série Temporal, Auto-Correlação e Auto-Correlação Parcial para Modelo AR - $u=0.5, \phi \in \{0.1, 0.8\}$	30
Figura 6 – Série Temporal, Auto-Correlação e Auto-Correlação Parcial para Modelo MA(1) - $u=0.5, \theta \in \{0.1, 0.8\}$	31
Figura 7 – Série Temporal, Auto-Correlação e Auto-Correlação Parcial para Modelo ARMA(1,1) - $u=0.5, \phi \in \{0.1, 0.8\}, \theta \in \{0.1, 0.8\}$	31
Figura 8 – Gráfico da série observada.	42
Figura 9 – Gráficos de ACF e PACF da série observada.	44
Figura 10 – Gráfico de Box-Plot para dias da semana da série observada.	44
Figura 11 – Ajuste dos modelos AR(1) comparando o LQ com o AR(1)- Γ para os dados referentes ao Litecoin.	46
Figura 12 – Gráficos referente aos resíduos do modelo AR(1) LQ ajustado para os dados.	47
Figura 13 – Gráficos referente aos resíduos do modelo AR(1)- Γ ajustado para os dados.	47
Figura 14 – Série Temporal, Auto-Correlação e Auto-Correlação Parcial para Modelo AR(1) - $u=0.25, \phi \in \{0.1, 0.8\}$	63
Figura 15 – Série Temporal, Auto-Correlação e Auto-Correlação Parcial para Modelo AR(1) - $u=0.75, \phi \in \{0.1, 0.8\}$	63
Figura 16 – Série Temporal, Auto-Correlação e Auto-Correlação Parcial para Modelo MA(1) - $u=0.25, \theta \in \{0.1, 0.8\}$	64
Figura 17 – Série Temporal, Auto-Correlação e Auto-Correlação Parcial para Modelo MA(1) - $u=0.75, \theta \in \{0.1, 0.8\}$	64
Figura 18 – Série Temporal, Auto-Correlação e Auto-Correlação Parcial para Modelo MA(1) - $u=0.25, \phi \in \{0.1, 0.8\}, \theta \in \{0.1, 0.8\}$	64
Figura 19 – Série Temporal, Auto-Correlação e Auto-Correlação Parcial para Modelo MA(1) - $u=0.75, \phi \in \{0.1, 0.8\}, \theta \in \{0.1, 0.8\}$	65

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Revisão bibliográfica da Lomax e suas extensões.	14
Tabela 2 – Resultados da estimação ARMA(1,1) a partir da mediana, dada a variação do tamanho amostral.	33
Tabela 3 – Resultados da estimação AR(1) a partir da mediana, dada a variação do n.	35
Tabela 4 – Resultados da estimação MA(1) a partir da mediana, dada a variação do tamanho amostral.	36
Tabela 5 – Ajustes dos modelos AR(1)-LQ e AR(1)-Γ aos dados de Litecoin.	45
Tabela 6 – Estatísticas de acurácia para os ajustes dos modelos avaliados.	45
Tabela 7 – Inversa da matriz de Informação.	55
Tabela 8 – Estimação de Máxima Verossimilhança condicional para 10000 réplicas de MonteCarlo no cenário aplicado.	62

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Algoritmo de geração para uma série Lomax-ARMA(p,q) 30

LISTA DE SÍMBOLOS

$\Gamma(\cdot)$	função gama
$\mathbb{E}(\cdot)$	valor esperado de uma variável aleatória
$F_X(\cdot)$	função de distribuição acumulada de uma variável aleatória
$h_x(t)$	função taxa de falha de uma variável aleatória X
$\mathbb{P}(\cdot)$	probabilidade de uma variável aleatória
\mathbb{R}	conjunto dos números reais
ϕ	vetor de parâmetros autorregressivos
θ	vetor de parâmetros de Médias Móveis
α	parâmetro de intercepto do modelo ARMA
λ	parâmetro de escala da distribuição Lomax
κ	parâmetro de forma da distribuição Lomax
$\ell(\cdot)$	função log-verossimilhança dado x.

SUMÁRIO

1	PRELIMINARES	12
1.1	INTRODUÇÃO	12
1.2	OBJETIVOS	15
1.3	PLATAFORMA COMPUTACIONAL	15
1.4	ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	16
2	REFERENCIAL TEÓRICO	17
2.1	INTRODUÇÃO	17
2.2	REVISÃO DA LOMAX	18
2.3	PROPRIEDADES	19
2.4	ESTUDO DO PROCESSO ARMA	21
3	METODOLOGIA E RESULTADOS	23
3.1	INTRODUÇÃO	23
3.2	REPARAMETRIZAÇÃO DA LOMAX	24
3.3	PROPRIEDADES DA LOMAX REPARAMETRIZADA	26
3.4	MODELO PROPOSTO	27
3.5	METODOLOGIA DE GERAÇÃO DOS MODELOS	29
3.6	ESTUDO NUMÉRICO	32
3.7	DIAGNÓSTICO E PREVISÃO	37
3.8	MEDIDAS DE ACURÁCIA	38
4	APLICAÇÃO	41
4.1	INTRODUÇÃO	41
4.2	APLICAÇÃO A DADOS DE LITECOIN	43
5	CONCLUSÃO	49
5.1	TRABALHOS FUTUROS	49
	REFERÊNCIAS	50
	APÊNDICE A – VETOR ESCORE E MATRIZ DE INFORMAÇÃO OBSERVADA	54
	APÊNDICE B – ALGORITMO DE GERAÇÃO	60
	APÊNDICE C – SIMULAÇÃO PARA CENÁRIO DA APLICAÇÃO	62
	APÊNDICE D – ESTUDO DA VARIÁVEL u NA GERAÇÃO DE SUB- MODELOS	63

1 PRELIMINARES

1.1 INTRODUÇÃO

Uma das áreas de grande interesse da Estatística Aplicada é Análise de Séries Temporais (AST). Em linhas gerais, esta área objetiva definir uma estratégia (via processos paramétricos ou não paramétricos) capaz tanto de extrair uma estrutura de dependência de uma série observada a partir de um modelo parcimonioso e bem ajustado como de fazer previsão para uma variável de interesse em um determinado horizonte (SHUMWAY; STOFFER, 2011). A AST é requerida em diversas aplicações.

Neste contexto de série temporais, verifica-se aplicações na área de Engenharia Civil, costuma-se quantificar a avaliação do tempo entre falhas (*Time between Failures-TBF*) e tempo de reparo (*Time to Repair - TTR*) de equipamentos buscando prever tais fenômenos e evitar tempo gasto como visto em Fan e Fan (2015), assim como em Widyadana e Wee (2011). Outras aplicações podem ser observadas em fenômenos ecológicos, como o estudo do índice pluviométrico mensal na África (HUSAK; MICHAELSEN; FUNK, 2007). Nas ciências da saúde, pode-se verificar a previsão da taxa de mortalidade por *influenza* com base no histórico de mortes em CHOI e THACKER (1981), já Benvenuto *et al.* (2020) aplica modelo ARIMA para dados do COVID-19. Há ainda estudos na área de economia e ciências atuariais, como discutido por Gouriéroux (1997), analisando como se comporta a evolução dos preços de 140 títulos negociados na bolsa de valores de Paris e em M., Abdalwahab e Abdallah (2021) avaliando o impacto das importações no crescimento econômico global.

Apesar disso, a aplicação de modelos regressivos aplicados na área de séries temporais tem se destacado no meio acadêmico pela capacidade de avaliar cenários de dados reais. Como grande parte dos eventos do mundo real não ocorrem sempre de forma independente e nem sob uma única ótica, a aplicação de séries temporais em modelos estatísticos tem sido uma alternativa que fornece estudos mais aprofundados de acontecimentos do cotidiano.

Dois desses modelos são o de Médias Móveis (MA) e o Autorregressivo (AR). O primeiro tem sido utilizado atualmente no estudo da pandemia de covid-19, uma vez que é um dos modelos utilizados para acompanhamento de casos diários, como estudado em Yun-ting *et al.* (2020). Em outras áreas de aplicação temos Chan (2013) aplicando diferentes processos MA em conjunto com outros processos para estudar taxa de inflação mensal do nos EUA e Fingleton (2008) aplicando um estimador ao modelo de Médias Móveis de preço média de habitação na

Inglaterra.

Já o Autorregressivo é um processo que descreve eventos de natureza distintas das Médias Móveis estando mais relacionado a ativos financeiros. Alguns exemplos de aplicação da estrutura AR podem ser vistos em Vaz e Filho (2016), onde os autores apresentam uma aplicação de processo AR para descrição de cargas elétricas no Brasil; Davis e Song (2020) realizam aplicação desses modelos nas ciências financeiras na qual se avalia dados relacionados ao PIB dos EUA, despesas do governo norte-americano e receita total arrecadada; Yang, Giurcaneanu e Tabus (2006) aplicam o modelo Autorregressivo para estudar a codificação de áudios sem perdas de material.

Nesta dissertação busca-se inovar na área de séries temporais trazendo acréscimos científicos. Utiliza-se uma distribuição condicional reparametrizada através da quantílica e une-se características dos processos AR e MA, através do modelo ARMA (RIBEIRO, 2020).

Brockwell e Davis (1991) caracterizam o processo ARMA como um processo estacionário, que engloba tanto um processo AR de ordem p , quanto um processo MA de ordem q , conjuntos com um resíduo, que deve se comportar como uma sequência de média 0 e variância σ^2 .

Estudos recentes que são pioneiros e envolvem a estrutura ARMA podem ser vistos em Bayer, Bayer e Pumi (2017) introduzindo o modelo Kumaraswamy-ARMA aplicando-o a dados de umidade relativa do ar. Já Almeida-Junior e Nascimento (2021) propõem a comparação dos modelos \mathcal{G}_I^0 -ARMA com o Γ -ARMA para avaliar dados de radar de abertura sintética.

No que diz respeito a marginal utilizada nessa dissertação, optamos pela distribuição Lomax. Introduzida em 1954, foi inicialmente endereçada a descrever índices e variáveis de natureza econômica (LOMAX, 1954).

Para além de discussões na área de economia, a distribuição Lomax tornou-se uma lei bastante difundida no meio científico, Hassan e Al-Ghamdi (2009) e Hassan, Assar e Shelbaia (2016) estudaram o tempo ótimo de alteração de nível de stress descrito pela distribuição Lomax. Na área de regressão, a distribuição Lomax foi estudada por Altun (2020).

Além da ampla aplicação da distribuição Lomax, é possível verificar que várias extensões foram feitas sobre esta distribuição o que pode ampliar os desdobramentos futuros desta dissertação, conforme tabela 1:

Por ter propriedades matemáticas (medidas tipo momento, média, variância, curtose assimetria, momentos de probabilidade ponderados, ...) em forma fechada, domínio positivo, ser biparamétrica e ter característica de cauda pesada, é detectado as aplicações da lei Lomax à

Tabela 1 – Revisão bibliográfica da Lomax e suas extensões.

Distribuição	Autor (Ano)	Área de Aplicação
Lomax	Aguilar (2012)	Informática
Extended Lomax	Lemonte e Cordeiro (2013)	Saúde
Lomax-Poisson Exponencializada	Ramos <i>et al.</i> (2013)	Aeronaves
Lomax Generator	Cordeiro <i>et al.</i> (2014)	Economia
Weibull-Lomax	Tahir <i>et al.</i> (2014)	Aeronaves
Lomax Exponencial	El-Bassiouny, Abdo e Shahen (2015)	Aeronaves
Gamma-Lomax	Cordeiro, Ortega e Popović (2013)	Saúde
Power Lomax	Rady, Hassanein e Elhaddad (2016)	Saúde
Five-Parameter Lomax	Mead (2016)	Engenharia
Gumbel-Lomax	Tahir <i>et al.</i> (2016)	Saúde
Nova generalização Lomax	Oguntunde <i>et al.</i> (2017)	Engenharia
Half-logistic Lomax	Anwar e Zahoor (2018)	Saúde
Inverse Power Lomax	Hassan e Abdallah (2018)	Saúde
Odd Lomax	Cordeiro <i>et al.</i> (2019)	Saúde
M.O. Gumbel-Lomax	Nwezza e Ugwuowo (2020)	Aeronaves
Regressão Lomax	Altun (2020)	Seguros
Slashed Lomax	Li e Tian (2020)	Saúde
Difusão proporcional à Lomax	Nafidi, Makroz e Sánchez (2021)	Saúde

Fonte: O Autor (2021)

dados estritamente decrescentes. Inclusive em relação à família de distribuições decrescentes, a Lomax tem destaque por se tratar de uma distribuição sem descontinuidade nos reais positivos, visto que é centrada em zero (CHAHKANDI; GANJALI, 2009).

Com os cenários apresentados, deseja-se propor um modelo capaz de descrever eventos cotidianos e de absorver dados de diferentes áreas do conhecimento. Busca-se unir uma distribuição flexível a um processo de séries temporais abrangente e uma reparametrização inovadora para expandir os horizontes de trabalhos aplicados.

Deseja-se avaliar a reparametrização pela função quantílica aplicada a um modelo ARMA condicional, objetivando pontuar características desse modelo, por se tratar de conteúdo recém introduzido na literatura. Além disso, outra meta é verificar o impacto da nova reparametrização na aplicação do modelo a dados reais.

Ao longo deste trabalho, deseja-se responder a alguns questionamentos que seguem:

- Qual o efeito ao utilizar parâmetros Autorregressivos e Médias Móveis negativos na estimação por máxima verossimilhança? E um parâmetro de forma maior ou menor tem efeito aplicado?
- Existe ganho em se realizar a reparametrização da Lomax no parâmetro de escala no lugar do parâmetro de forma?

- Na realização de ensaios numéricos através de simulações de Monte Carlo, há cenários em que a mediana é melhor estimador que o valor esperado?
- Quando aplicado a dados reais, é possível realizar ajustes realísticos da série temporal, de forma que a predição e previsão representem os dados de forma semelhante?

1.2 OBJETIVOS

Como principal objetivo desta dissertação deseja-se: propor um modelo Autorregressivo e de Médias Móveis construído através da distribuição Lomax reparametrizada por sua função quantílica. Particularmente, objetiva-se:

- Validar o modelo através de técnicas inferenciais e diagnóstico, com base na distribuição escolhida, por ser uma distribuição com ampla aplicação;
- Deixar um legado para possíveis pesquisas futuras de interesse comum a este trabalho, tanto pela vertente da geração das séries do modelo, almejando estudar propriedades intrínsecas deste modelo, quanto pelo estudo da distribuição Lomax (ou Lomax reparametrizada), ou até pelo horizonte do modelo ARMA.

1.3 PLATAFORMA COMPUTACIONAL

Foi utilizada no trabalho a linguagem de programação R encontrada em R Foundation for Statistical Computing (2021), tanto para as simulações computacionais de geração de série temporal quanto para simulação Monte Carlo. Da mesma forma, as figuras geradas e o cálculo das estatísticas de adequação foram realizadas tomando como base esta linguagem.

A linguagem de programação R foi selecionada para ser a "linguagem-mãe" deste trabalho, devido à sua flexibilidade e por ter sido desenvolvida tendo a Estatística e as Ciência de Dados como principal foco de sua utilização, disponibilizando, assim, ferramentas mais diretas e apropriadas ao ambiente estatístico.

Foi utilizado como auxílio o livro de Cowpertwait e Metcalfe (2009) para facilitar a aplicação das funções de correlação, autocorrelação e todo o processo de construção de modelos AR, MA e ARMA na plataforma R.

1.4 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

O Capítulo 2 realiza uma revisão de literatura sobre a distribuição Lomax e suas aplicações ao longo da história, buscando avaliar propriedades e limitações para aplicação de modelo ARMA. Além disso, propõe-se uma nova reparametrização para distribuição Lomax através da função quantílica; essa etapa de desenvolvimento do modelo exige algum refinamento da distribuição utilizada como marginal, além do estudo das propriedades da reorganização da distribuição. No Capítulo 3, o modelo ARMA é proposto para a distribuição em sua nova construção e são apresentados a metodologia e os primeiros resultados, referentes a geração do modelo e do estudo numérico, através das simulações de Monte Carlo. Têm-se ainda a etapa referente ao Capítulo 4, consistindo no ajuste do modelo a dados reais, sendo etapa essencial para consolidação da relevância do modelo. Por fim, realiza-se as considerações finais do trabalho no Capítulo 5.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 INTRODUÇÃO

Distribuição biparamétrica com um parâmetro de forma e outro de escala e tendo construção centrada no zero, a distribuição Lomax tem a peculiaridade de ter sempre a mesma forma de densidade: decrescente com máximo absoluto no zero.

A distribuição Lomax, também é conhecida alternativamente como Pareto Tipo II centrada em zero. Isto ocorre por efeito prático pois, diferentemente da Pareto Tipo II, a Lomax, por estar centrada no zero, tende a ter o comportamento de densidade estritamente decrescente a partir do zero, correspondendo ao lado simétrico localizado à direita da distribuição Pareto Tipo I (JOHNSON; BALAKRISHNAN; KOTZ, 1970).

Proposta em 1954 para descrever problemas de falhas de negócios na área de economia, esta distribuição foi conhecida por anos como uma distribuição específica para aplicação em casos econômicos. A característica de estritamente decrescente para qualquer combinação de valores de parâmetros é interessante para os economistas, pois espera-se que negócios fracassados sejam descritos de forma monotonicamente decrescente, sendo a Lomax uma candidata para estudar tais casos (LOMAX, 1954).

Verifica-se que a readaptação da distribuição, a partir de outra, gera restrições sobre os valores assumidos por seus parâmetros. Encontrando os momentos da distribuição Lomax, observa-se que o parâmetro responsável pela forma é limitado em momentos de qualquer ordem.

Como um dos focos deste trabalho consiste na reparametrização da distribuição para obter uma série temporal aplicada a um parâmetro relacionado ao quantil, é importante observar que a ideia de reparametrizar não aparenta ser adequada para o parâmetro de forma, pois seriam impostas mais restrições sobre uma quantidade de parâmetros com menor controle.

Ribeiro (2020) propôs um modelo condicional construído através da quantílica, a fim de utilizar-se do valor da mediana. Motivado por essa perspectiva, constrói-se nessa dissertação um modelo baseado em uma reparametrização pela quantílica objetivando analisar o impacto causado não só com foco na mediana, mas também nos diferentes percentis.

O principal ganho desse estudo está na tentativa de minimização de *outliers* em distribuições que se comportem diferentemente de uma distribuição Normal e tenham características de concentração de dados em uma região de seu domínio. Em distribuições com cauda pesada, pode haver estimatórias deficitárias ao realizar estimação com a média, portanto utilizamos os

quantis para avaliar os principais efeitos de geração de modelos e estimação.

2.2 REVISÃO DA LOMAX

Tendo em vista sua similaridade com a distribuição Pareto, a distribuição Lomax tem função distribuição acumulada (fda) dada por

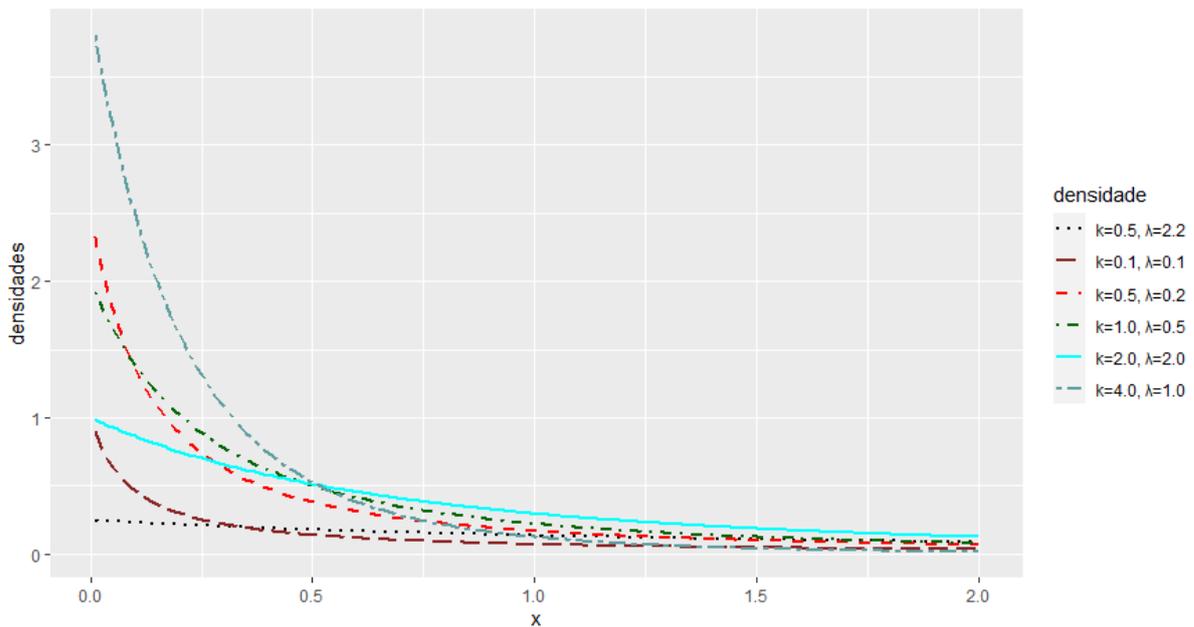
$$F_X(x; \lambda, \kappa) = 1 - \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right)^{-\kappa}, x > 0,$$

em que $\lambda, \kappa > 0$ são parâmetros de escala e forma, respectivamente. Consequentemente, a função densidade de probabilidade (fdp) é escrita como

$$f_X(x; \lambda, \kappa) = \frac{\kappa}{\lambda} \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right)^{-(\kappa+1)}.$$

Conforme dito anteriormente, a Figura 1 mostra a única forma assumida pela função densidade da distribuição Pareto Tipo II centrada em zero: forma decrescente.

Figura 1 – Gráfico da densidade da Lomax.



Fonte: O Autor (2021)

Outra característica essencial da distribuição é a função quantílica. Esta pode ser obtida através do método de inversão da distribuição acumulada. Como será observado ao longo do trabalho, a função quantílica tem papel fundamental neste trabalho e será a base da nova reparametrização. A função quantílica obtida através da inversão da função distribuição

acumulada é apresentada a seguir:

$$Q(u; \lambda, \kappa) = \lambda \left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right], u \in [0, 1]. \quad (2.1)$$

A distribuição Lomax tem se destacado dentre as distribuições, pela sua característica de ser flexível à aplicações de dados de diversas áreas e assume dentro da Estatística essa flexibilidade, tendo estudos envolvendo diferentes frentes desde séries temporais à análise de sobrevivência. No estudo de novas distribuições, uma função importante é a função taxa de falha. Para o caso da distribuição Lomax, essa função é dada por :

$$h_X(x; \lambda, \kappa) = \frac{f_X(x; \lambda, \kappa)}{1 - F_X(x; \lambda, \kappa)} = \frac{\frac{\kappa}{\lambda} \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right)^{-(\kappa+1)}}{\left(1 + \frac{x}{\lambda}\right)^{-\kappa}} = \frac{\kappa}{\lambda + x}.$$

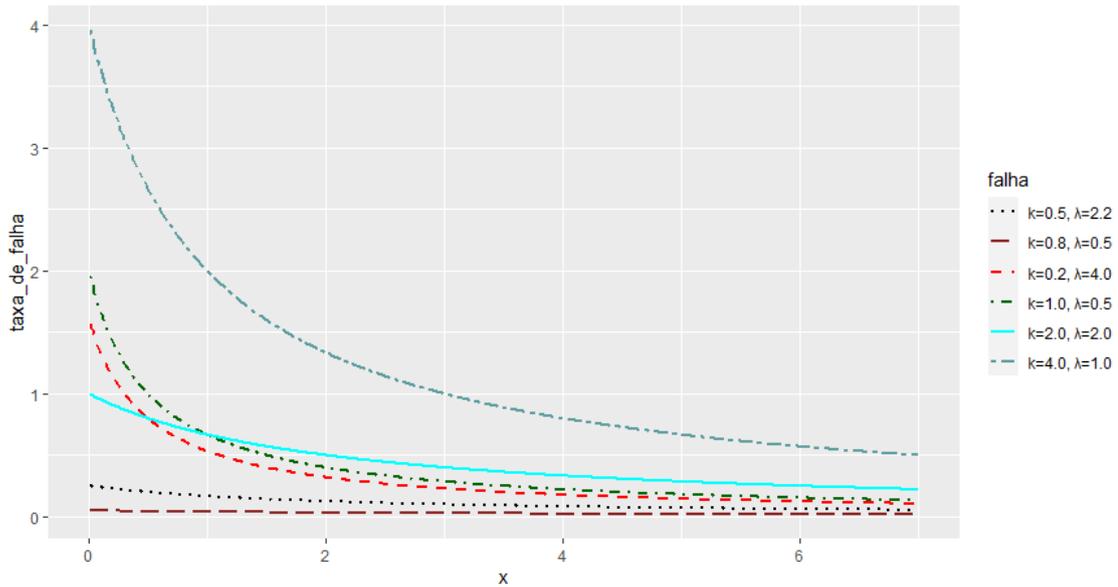
Dado x , note que $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) \rightarrow \infty$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) \rightarrow 0$. Isto é a função taxa de falha da distribuição Lomax é mais adequada para descrição de eventos em que falhas acontecem com maior probabilidade no início da vida do objeto de estudo. Dentre diversas aplicações que comprovam isto, pode-se citar Aguilar (2012), com os exemplos de tamanho de arquivos de computador e outra aplicação para estudo meteorológico de precipitação na Flórida; ambos se comportam de forma que as falhas, isto é, a probabilidade de ocorrência destes eventos dado que ainda não foram observados até aquele instante de tempo, ocorrem com maior probabilidade no início da vida do objeto de estudo.

Com a construção do gráfico da função de risco (taxa de falha), obtém-se as formas assumidas pela distribuição Lomax, que é exclusivamente decrescente, tal qual sua densidade, pois para quaisquer parâmetros, a densidade e a taxa de falha assumem formato semelhantes. Tal comportamento é apresentado na Figura 2.

O gráfico da taxa de falha ilustra o fenômeno descrito para a densidade, pois também assume apenas formas decrescentes, conforme verificado no estudo dos limites dos valores assintóticos de x para as taxas de falha.

2.3 PROPRIEDADES

Encontradas as formas de densidade e taxa de falha da Lomax, pode-se avaliar algumas propriedades importante em relação aos momentos assumidos pela distribuição. O r -ésimo momento, conforme visto em Aguilar (2012), pode ser expresso por:

Figura 2 – Gráfico da taxa de falha da Lomax.**Fonte:** O Autor (2021)

$$M(X^r) = \frac{\kappa \lambda^r \Gamma(r+1) \Gamma(\kappa - r)}{\Gamma(\kappa + 1)}, \kappa > r, r \in \mathbb{Z},$$

em que $\Gamma(\cdot)$ é a função gamma definida por $\Gamma(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1} \exp(-x) dx$.

Com essa expressão, é possível definir o valor esperado (primeiro momento central) para a Lomax reparametrizada. Portanto a expressão do valor esperado é deduzida a partir da equação dos momentos e encontra-se:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\lambda}{\kappa - 1}, \kappa > 1.$$

Enquanto a variância, caracterizada pelo segundo momento central que é deduzido da função de geração dos momentos, é expressa em função dos parâmetro κ e λ da seguinte forma:

$$Var(X) = \frac{\lambda^2 \kappa}{(\kappa - 1)^2 (\kappa - 2)}, \kappa > 2.$$

Esta expressão para a variância explicita algumas limitações no modelo, visto que a variável aleatória não tem valor esperado, nem variância definidas quando $\kappa < 1$, impedindo dessa forma a obtenção dos momentos desejados para a construção do modelo, diante dessa restrição, ocasionando problemas para desenvolvimento da reparametrização. Há ainda observações

referentes aos valores assumidos por $\kappa > 2$, pois a variância está bem definida para valores de κ nesse intervalo. Contudo, valores entre zero e um estão definidos para o valor esperado o que torna possível a construção do modelo, que apresenta valor de variância tendendo para ∞ neste intervalo. Tais resultados serão avaliados na etapa de resultados, visto que é de vital interesse para o comportamento do modelo.

Além destes fenômenos estudados para a Lomax, existem outras áreas de estudos envolvendo a distribuição como o estudo e inserção de geradores utilizando-se da Lomax, gerando novas distribuições e aplicações na análise de sobrevivência. Conforme visto anteriormente foram propostas diversas aplicações para a Lomax e algumas extensões desta distribuição. Destaca-se o trabalho de Altun (2020) que envolve a Regressão Lomax, pela proximidade com a área de séries temporais e modelos condicionais.

2.4 ESTUDO DO PROCESSO ARMA

De posse de uma distribuição acessível para aplicação de processos de séries temporais à esta marginal e realizado o estudo de algumas especificidades, é possível iniciar o trabalho de construção do modelo.

O modelo proposto é um Autorregressivo de Médias Móveis (ARMA) condicional, baseado na distribuição Lomax reparametrizada a partir da função quantílica. Esta forma de construção é novidade na área de pesquisa, conforme inovou Ribeiro (2020) para o modelo quantílico da Burr XII Unitária, visto que são mais comumente estudados processos com reorganização de parâmetros envolvendo a média.

Como um modelo composto, o processo ARMA (p,q) gera como subprodutos tanto o modelo AR de ordem p, quanto o MA de ordem q. Apesar de serem casos particulares do ARMA, tanto o Autorregressivo (AR) quanto o Médias Móveis (MA) têm bastante aplicações na área de séries temporais.

Contudo, são métodos que apresentam características distintas de desenvolvimento, de forma que, ambas têm áreas de aplicações mais distintas. Por se tratar de uma combinação de processos de séries temporais, o processo ARMA (p,q) é um modelo capaz de abordar uma maior gama de dados, visto que consegue abordar casos característicos tanto de AR(p) quanto MA(q) e ainda conseguir avaliar o caso misto, no qual abrange a mistura de ambos.

Define-se um processo ARMA como um processo estacionário composto por três parcelas, a fração autorregressiva responsável pela relação linear entre as observações anteriores

e a observação futura, a parcela de Média Móvel responsável pela avaliação ponderada das observações anteriores e a última parcela advinda do resíduo gerado pelo processo. Não suficiente a presença de tais característica, pois existem outros modelos que englobam tais parcelas, valida-se um modelo ARMA se o resíduo se comportar como um ruído branco de média 0 e variância constante (σ^2).

O primeiro dos processos derivados do ARMA é o AR de ordem p. O processo AR é amplamente utilizado para descrição de séries temporais, cujos valores passados imediatos exercem influência sobre o valor da observação atual acrescido de um erro associado (EHLERS, 2007).

Já o processo de Médias Móveis (MA) consiste em um processo ARMA com coeficiente p nulo, isto é, a parcela Autorregressiva do modelo não exerce efeito sobre o processo. Neste método, realiza-se ponderações - baseadas nos valores de θ_k - das observações anteriores a cada período de tempo, utilizando-se as unidades de tempo imediatamente anteriores como referência (MORETTIN, 2006).

A construção do modelo ARMA para a distribuição Lomax constitui-se das seguintes etapas:

- Realizar a reparametrização, partindo da função quantílica, da distribuição Lomax, isolando um dos parâmetros na função quantílica para obter novas funções de distribuição acumulada e densidade de probabilidade.
- Estudar propriedades e peculiaridades da nova forma obtida, objetivando verificar as mudanças de comportamentos e encontrar possíveis pontos de conflito para o desenvolvimento do modelo a partir da nova distribuição.
- Cálculo e apresentação da porção matemática referente a log-verossimilhança da reparametrização. Nessa fase, realiza-se dedução do vetor escore e da matriz inversa da informação observada de Fisher, a partir dos novos parâmetros estabelecidos.
- Proposição de um preditor linear baseado na função quantílica da distribuição em questão para, através deste, obter uma forma do processo ARMA.

3 METODOLOGIA E RESULTADOS

3.1 INTRODUÇÃO

Conhecendo o modelo, é necessária a realização da validação deste. O principal desafio do diagnóstico do processo proposto é a seleção adequada do método, devido à variedade de caminhos possíveis a serem tomados. Neste trabalho, destaca-se a Estimação por Máxima Verossimilhança (EMV) com auxílio de laços de Monte Carlo.

O EMV utiliza-se da função log-verossimilhança da distribuição ou do modelo escolhido para determinar o estimador ($\hat{\delta}$) capaz de maximizar a função log-verossimilhança. Deve-se notar que o valor que maximiza a função log-verossimilhança, será o mesmo que maximizará a função verossimilhança (CASELLA; BERGER, 1993).

Por não se tratar de cálculos intuitivos, necessita-se compreender o procedimento de maximização da verossimilhança. Para uma distribuição multiparamétrica que assuma forma fechada, utiliza-se o vetor escore para alcançar tal objetivo, igualando-o a zero e construindo um sistema de equações. Por ser um conjunto de derivadas com relação aos parâmetros, ao anular estes vetores, maximiza-se a função log-verossimilhança. Por outro lado, distribuições multiparamétrica que não assumam forma fechada necessitam de métodos numéricos para resolução do sistema (BOLFARINE; SANDOVAL, 2010).

Em modelos de série temporal condicional, caso deste trabalho, o método EMV é estendido ao método de Estimação por Máxima Verossimilhança Condicional (EMVC), que utiliza-se da densidade condicional do modelo proposto para maximização da função log-verossimilhança condicional. Uma forma de minimizar possíveis flutuações na Estimação por Máxima Verossimilhança é associá-la a simulações de Monte Carlo, que possibilitam a repetição extensiva do procedimento de estimação, levando a um valor mais acurado.

Todavia, simulações de Monte Carlo consistem em simular grandes quantidades repetidas de eventos similares, registrando-os e buscando calcular estatísticas com base nestes eventos. Geralmente, utiliza-se média e variância para avaliar os resultados das réplicas, porém é possível utilizar-se de estatística como mediana e Erro Quadrático Médio (EQM) para retirada de informações similares. Utilizando-se de réplicas com números de grandeza 10^4 ou maior, consegue-se avaliar um comportamento assintótico dos estimadores (FRERY; CRIBARI-NETO, 2005).

Este capítulo tem como principal objetivo a construção e validação do modelo

ARMA Lomax Quantílica (ARMA-LQ) e pode ser descrito como se segue:

- Construção do modelo.
- Definição do preditor linear.
- Modelagem de Vetor Escore e Matriz Observada.
- Estudo comportamental da geração de séries temporais a partir do modelo ARMA-LQ.
- Realização de simulações de Monte Carlo para validação do modelo.

3.2 REPARAMETRIZAÇÃO DA LOMAX

Para proposição do modelo do estudo, será utilizada a reparametrização da distribuição Lomax em função da quantílica, devido à flexibilidade de implementar os quartis na forma reparametrizada e introduzir um parâmetro mais controlado relacionado à quantílica.

A fim de propor o modelo ARMA para a reparametrização da Lomax através da quantílica, é necessária a utilização da função quantílica dependente de um valor arbitrário $0 < u < 1$ e de dois outros parâmetros (λ e κ) encontrada na Equação (2.1). De posse da função quantílica, isola-se o parâmetro de escala, com o objetivo de obter a distribuição Lomax reparametrizada como função da quantílica. Então encontra-se o λ através da equação da quantílica, conforme visto na equação abaixo.

$$\lambda(u; q, \kappa) = \frac{q}{\left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right]}. \quad (3.1)$$

Com a parametrização do κ dada a quantílica, λ e uma constante u , é possível encontrar a nova forma da acumulada e densidade da Lomax reparametrizada. Sendo a fda obtida com a substituição do κ na Equação (2.1):

$$F_X(x; q, \kappa) = 1 - \left\{ 1 + \frac{x}{q} \left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right] \right\}^{-\kappa}, x > 0.$$

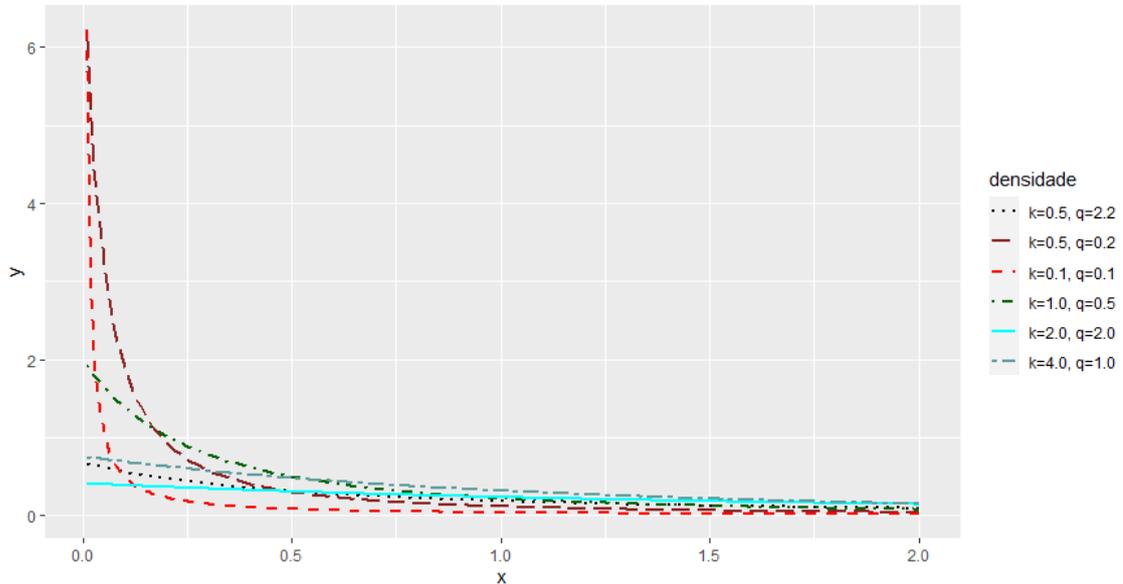
Consequentemente, da equação acima, segue que:

$$f_X(x; q, \kappa) = \frac{\kappa \left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right]}{q} \left\{ 1 + \frac{x \left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right]}{q} \right\}^{-(\kappa+1)}. \quad (3.2)$$

Se X tem densidade quantílica dada em (3.2), então escrevemos $X \sim LQ(q, \kappa)$. A partir da densidade para a Lomax-reparametrizada constrói-se o gráfico da fdp, a fim de observar

o comportamento com relação à fdp da distribuição Lomax tradicional, dados a nova constituição de parâmetros e considerando $u=0.5$, conforme Figura 3.

Figura 3 – Gráfico da densidade da Lomax reparametrizada com a quantílica.



Fonte: O Autor (2021)

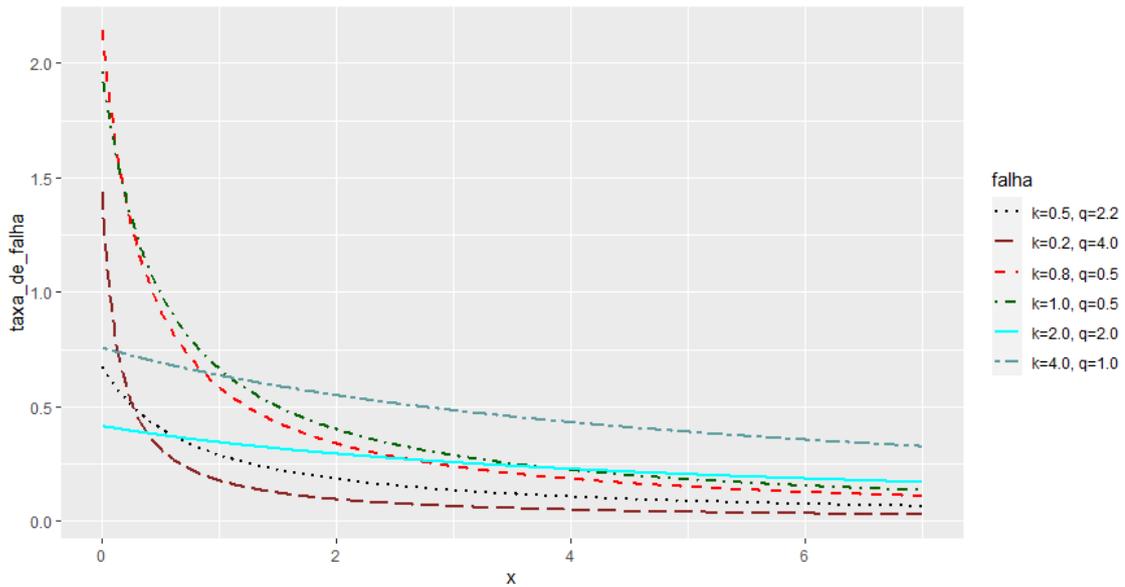
Da mesma forma que é feita para a Lomax, realiza-se a construção do gráfico da função de risco (taxa de falha) da Lomax reparametrizada pela quantílica, a fim de avaliar as formas assumidas, que devem ser semelhantes às da Lomax. Pode-se descrever a função taxa de falha para a Lomax reparametrizada como:

$$h_X(x; q, \kappa) = \frac{f_X(x; q, \kappa)}{1 - F_X(u; q, \kappa)} = \frac{\kappa \left[(1 - u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right]}{q + x \left[(1 - u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right]}$$

Interpretando x como sendo o tempo de falha, note que $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \frac{\kappa \left[(1 - u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right]}{q}$, ou seja, o ponto equivalente a $\frac{\kappa}{\lambda}$ mostrando que x a função tem o ponto zero como o ponto de máximo, pela sua característica decrescente descrita na equação e $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$. Na Figura 4 estão apresentadas as curvas para os diversos parâmetros.

Verifica-se através dos gráficos construídos para a função taxa de falha e função densidade de probabilidade que, mesmo com os diversos valores de parâmetros propostos, seguem o mesmo formato decrescente tal qual a função Lomax, comprovando que a reparametrização a partir da quantílica foi adequada.

Figura 4 – Gráfico da taxa de falha da Lomax reparametrizada.



Fonte: O Autor (2021)

3.3 PROPRIEDADES DA LOMAX REPARAMETRIZADA

Com as devidas correções da reparametrização da distribuição Lomax, pode-se avaliar algumas propriedades principais são construídas a partir da função geratriz dos momentos, que também foi reestruturada na forma:

$$M(X^r) = \frac{\kappa \left\{ \frac{q}{[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1]} \right\}^r \Gamma(r+1)\Gamma(\kappa-r)}{\Gamma(\kappa+1)}, \alpha > r, r \in \mathbb{Z}.$$

Esta formatação da função geradora de momentos implica em diversas consequências para os distintos momentos. Observa-se a limitação imposta sob o parâmetro de forma (κ) que é dependente da ordem do momento. Essa restrição sob o κ é o indicador de que a reparametrização não seria adequada neste parâmetro, pois exigiria expandir tais restrições para um parâmetro que já trás novas limitações por si só que é o quantil (q) e ainda lidar com uma outra variável limitada no u (percentil).

Assim, é possível determinar os r -ésimos primeiros momentos da distribuição reparametrizada sendo de interesse dos estudos de simulação o primeiro momento, que impõe restrições. O valor esperado por:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{q}{\left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right] (\kappa - 1)}, \kappa > 1.$$

Concluída a primeira etapa de construção do modelo, com a reestruturação da marginal selecionada, se faz necessária a aplicação da estrutura ARMA, na reparametrização realizada, através de função de ligação adequada para devida construção do modelo.

3.4 MODELO PROPOSTO

Este capítulo objetiva propor um modelo de regressão como estrutura ARMA ou um processo ARMA condicional. Inicialmente, relembramos que $\{X_t; t = 1, \dots, N\}$ é dito um processo ARMA(p,q) não condicional de média μ se X_t é estacionário e satisfaz a identidade (BROCKWELL; DAVIS, 1991)

$$(X_t - \mu) - \sum_{i=1}^p \phi_i (X_t - i - \mu) = R_t + \sum_{j=1}^q \theta_j R_{t-j},$$

em que R_t é uma sequência independente e identicamente distribuída de média zero e variância σ^2 , conhecido na literatura como ruído branco. Considera-se uma série de ruído branco quando todos os lag's do ACF são próximos a zero (TSAY, 2005).

No que segue, introduz-se um novo processo ARMA a ser discutido matematicamente e aplicado para descrever dados da Criptomoeda Litecoin.

Definição 1 *Sejam $\{X_t; t = 1, \dots, n\}$ variáveis aleatórias seguindo uma distribuição Lomax reparametrizada e $\mathcal{F}_t = \sigma(X_t, X_{t-1}, \dots)$ a σ -álgebra gerada por informações observadas ao longo do tempo. Dado o conjunto de informações anteriores \mathcal{F}_{t-1} , tem-se que a distribuição condicional quantílica $[X_t | \mathcal{F}_{t-1}]$ segue a distribuição Lomax reparametrizada, $X_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim LQ(x_t; q_t, \kappa)$, com densidade:*

$$f(X_t | \mathcal{F}_{t-1}, u; q_t, \kappa) = \frac{\kappa \left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right]}{q_t} \left\{ 1 + \frac{x_t \left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right]}{q_t} \right\}^{-(\kappa+1)}, \quad x_t > 0,$$

em que $q_t > 0$ é um quantil de X_t , $\kappa > 2$ é o parâmetro de forma, $u \in (0, 1)$ e

$$g(q_t) = \eta_t = \alpha + \mathbf{z}_t^\top \beta + \sum_{i=1}^p \phi_i [g(x_{t-i}) - \mathbf{z}_{t-i}^\top \beta] + \sum_{k=1}^q \theta_k r_{t-k}, \quad (3.3)$$

em que $g(\cdot)$ é a função de ligação estritamente monótona e duas vezes diferenciável e $r_t = g(x_t) - g(q_t)$.

Apresenta-se os momentos centrais de primeira e segunda ordem do modelo condicional:

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}, u; q_t, \kappa) = \frac{q_t}{\left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right] (\kappa - 1)}, \kappa > 1,$$

$$\text{Var}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}, u; q_t, \kappa) = \frac{q_t^2 \kappa}{\left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right]^2 (\kappa - 1)^2 (\kappa - 2)}, \kappa > 2.$$

Para a finalização do modelo ARMA proposto, deve-se definir uma função de ligação capaz de relacionar a quantílica da Lomax à estrutura. Semelhantemente à utilização de Altun (2020) para a Regressão Lomax, utilizamos a função logarítmica com as condições propostas:

$$\log(x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

Da Equação (3.3), tem-se que $\eta_t = \log(q_t)$ e, portanto, $q_t = \exp(\eta_t)$.

Agora, estamos em posição de discutir o processo de inferência pontual para o vetor de parâmetros do modelo ARMA-LQ, a saber $\gamma = (\kappa, \alpha, \beta^\top, \phi^\top, \theta^\top)^\top$. Com base na definição anterior, tem-se que a função log-verossimilhança associada é dada por:

$$\ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q}) = \sum_{t=m+1}^n \left\{ \log \left[\frac{\kappa(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - \kappa}{q_t} \right] - (\kappa + 1) \log \left[1 + \frac{x_t(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - x_t}{q_t} \right] \right\},$$

sejam $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)^\top$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^\top$ o vetor com a série observada, $m = \max\{p, q\}$ e $u \in (0, 1)$. Por questão de simplificação a função log-verossimilhança será representada por $\ell(\gamma)$.

Com base em $\ell(\gamma)$, a função escore,

$$\mathbf{U}(\gamma) = \left[U(\kappa), \mathbf{U}^\top(\beta), U(\alpha), \mathbf{U}^\top(\phi), \mathbf{U}^\top(\theta) \right] = \left[\frac{\partial \ell(\gamma)}{\partial \kappa}, \frac{\partial \ell(\gamma)}{\partial \beta^\top}, \frac{\partial \ell(\gamma)}{\partial \alpha}, \frac{\partial \ell(\gamma)}{\partial \phi^\top}, \frac{\partial \ell(\gamma)}{\partial \theta^\top} \right],$$

é deduzida no Apêndice A. As estimativas de máxima verossimilhança condicionais (EMVCs) são definidas como

$$\hat{\gamma} = \arg \max_{\gamma \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} [\ell(\gamma)]$$

ou, equivalentemente, como uma solução do sistema

$$\mathbf{U}(\gamma)_{\gamma=\hat{\gamma}} = \mathbf{0}.$$

Os componentes da matriz informação observada,

$$\frac{\partial^2 \ell(\gamma)}{\partial \gamma_j^2} \text{ e } \frac{\partial^2 \ell(\gamma)}{\partial \gamma_j \partial \gamma_k},$$

são apresentados no Apêndice A. Esses resultados são úteis para realizar várias etapas de inferência, como teste de hipótese.

3.5 METODOLOGIA DE GERAÇÃO DOS MODELOS

Nesta seção, discutiremos sobre um algoritmo de geração para os submodelos AR(1)-LQ, MA(1)-LQ e ARMA(1,1)-LQ da Definição 1. Apesar da seleção destes três cenários apresentados, existem submodelos de ordem superiores AR(p), MA(q), ARMA(p,q) com $p, q > 1$. Além destes, pode-se notar como casos particulares a regressão quantílica e o efeito de variáveis exógenas, a partir da parcela de covariáveis.

Os preditores associados a esses submodelos são dados por:

- Processo AR(1)-LQ:

$$g(q_t) = \eta_t = \alpha + \mathbf{z}_t^\top \boldsymbol{\beta} + \sum_{i=1}^p \phi_i \left[g(x_{t-i}) - \mathbf{z}_{t-i}^\top \boldsymbol{\beta} \right]$$

- Processo MA(1)-LQ:

$$g(q_t) = \eta_t = \alpha + \mathbf{z}_t^\top \boldsymbol{\beta} + \sum_{k=1}^q \theta_k r_{t-k}$$

- Processo ARMA(1,1)-LQ:

$$g(q_t) = \eta_t = \alpha + \mathbf{z}_t^\top \boldsymbol{\beta} + \sum_{i=1}^p \phi_i \left[g(x_{t-i}) - \mathbf{z}_{t-i}^\top \boldsymbol{\beta} \right] + \sum_{k=1}^q \theta_k r_{t-k}$$

De acordo com a literatura clássica de AST, os processos AR(p) e MA(q) podem ser identificados a partir do par função de autocorrelação (*autocorrelation function* - ACF) e função de autocorrelação parcial (*partial autocorrelation function* - PACF) (BUENO, 2011).

Assim, a proposta desta discussão é, a partir dos algoritmos de geração, avaliar o comportamento dos pares (ACF, PACF) das series geradas. Usualmente (na abordagem não condicional), espera-se que:

- Uma série AR(p) apresente um corte na PACF após o lag p , enquanto a ACF tenha um comportamento decrescente.
- Uma série MA(q) indique um corte na ACF após o lag q , enquanto a PACF tenha um comportamento decrescente.
- Uma série ARMA não apresente cortes no par (ACF, PACF).

Segue-se, então, as seguintes etapas para construção da geração de uma série temporal do modelo Lomax quantílico:

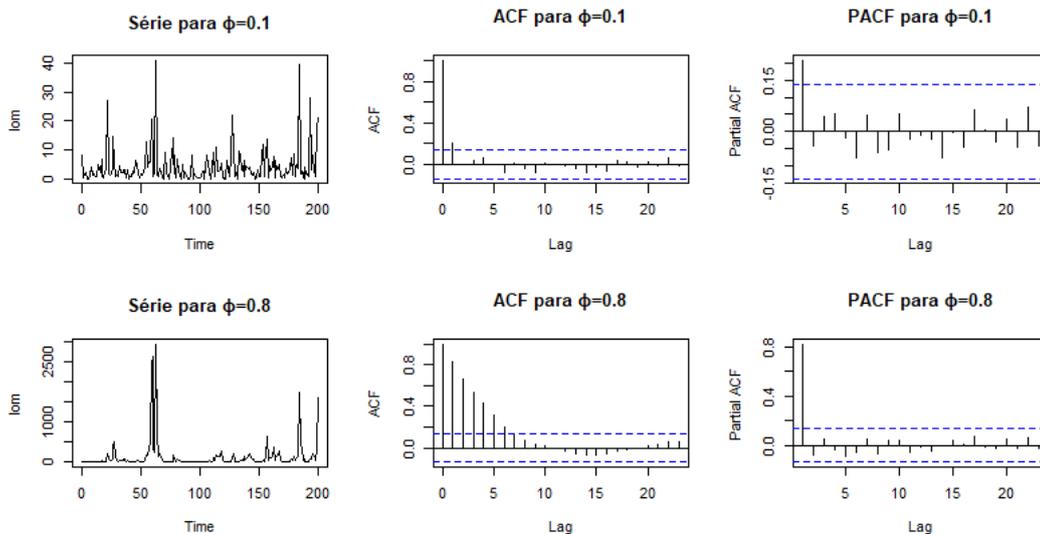
Algoritmo 1: Algoritmo de geração para uma série Lomax-ARMA(p,q)

1. Atribua valores aos parâmetros: α e ϕ_i para o AR(p), α e θ_k para o MA(q) ou α, ϕ_i, θ_k para o ARMA (p,q). Atribua também chutes iniciais para as observações de \mathcal{F}_{t-1} para $t < 1$;
 2. Calcule os valores de $\{q_t; t = 1, \dots, N\}$ de modo recursivo;
 3. Gere as observações a partir de $\{q_t\}$ obtido no item anterior.
 4. Repita os passos 2 e 3 até os n valores da série sejam obtidos.
-

Ilustra-se um exemplo da metodologia de geração no algoritmo do Apêndice B.

A Figura 5 apresenta das series geradas a partir do modelo AR(1)-LQ. Elas receberam a seguinte configuração paramétrica: chute inicial de $x_0 = 2$, $\kappa = 2.5$, $\alpha = 0.5$, $u = 0.5$ e com variação do $\phi \in \{0.1, 0.8\}$, com tamanho amostral de 200.

Figura 5 – Série Temporal, Auto-Correlação e Auto-Correlação Parcial para Modelo AR - $u=0.5$, $\phi \in \{0.1, 0.8\}$



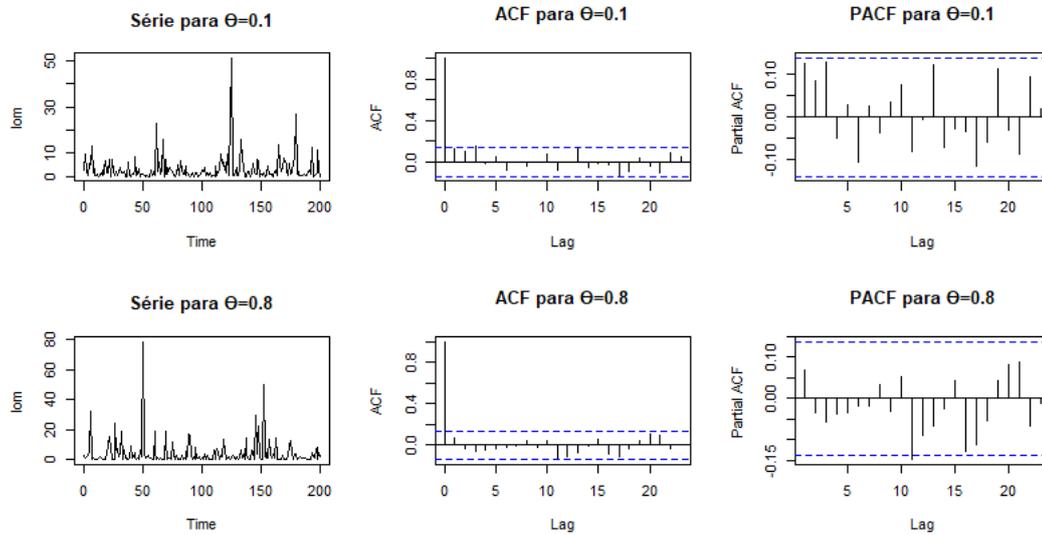
Fonte: O Autor (2021)

Na Figura 5 pode-se verificar a influência do parâmetro ϕ , sobre as séries geradas. Diante de valores de ϕ próximos a zero, o processo AR(1) tende para um ruído branco, conforme os gráficos de ACF e PACF. Para valores maiores de ϕ , como 0.8, a forma esperada para o PACF é obtida. Na ilustração da série temporal, verifica-se um aumento na magnitude dos dados, esperado pela presença do fator exponencial da função de ligação.

As séries geradas pelo modelo MA(1) estão na Figura 6 com a seguinte configuração paramétrica: valor inicial $x_0 = 2.0$, valor inicial de $q_0 = 0.5$, $\kappa = 2.5$, $u = 0.5$, $\theta \in \{0.1, 0.8\}$ e $\alpha = 0.5$, com tamanho amostral de 200.

Apesar da modificação do quantil, nota-se presença de aumento dimensional com o aumento do parâmetro θ , enquanto o par ACF/PACF descreve bem o processo Médias Móveis.

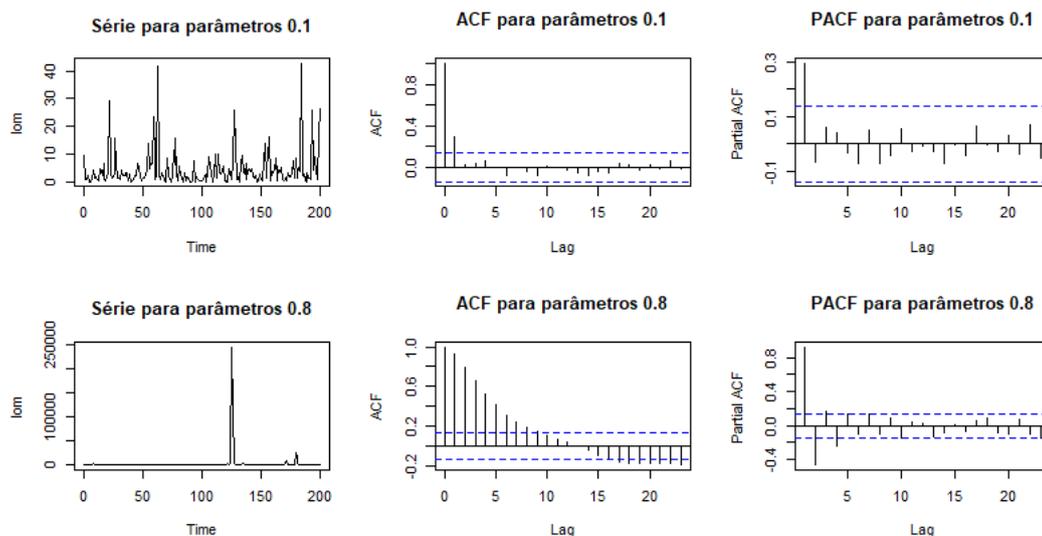
Figura 6 – Série Temporal, Auto-Correlação e Auto-Correlação Parcial para Modelo MA(1) - $u=0.5$, $\theta \in \{0.1, 0.8\}$



Fonte: O Autor (2021)

Por fim, observa-se na Figura 7 as séries geradas para a partir do processo ARMA(1,1) e seus respectivos pares ACF/PACF. Configurou-se os parâmetros: chute inicial de $x_0 = 2$, chute inicial de $q_0 = 0.5$, $\kappa = 2.5$, $u = 0.5$, $\phi \in \{0.1, 0.8\}$, $\theta \in \{0.1, 0.8\}$ e $\alpha = 0.5$, com tamanho amostral de 200.

Figura 7 – Série Temporal, Auto-Correlação e Auto-Correlação Parcial para Modelo ARMA(1,1) - $u=0.5$, $\phi \in \{0.1, 0.8\}$, $\theta \in \{0.1, 0.8\}$



Fonte: O Autor (2021)

Observa-se na Figura 7 ilustra o comportamento típico de um processo ARMA. Destaca-se isso pela característica mista dos processos AR(p) e MA(q) apresentados nos gráficos. Enquanto para valores grandes dos parâmetros o comportamento do par ACF/PACF são

semelhantes ao de um processo AR(p), para valores pequenos tendem para um processo MA(q).

Finalizando os estudos de geração das séries de sub-modelos, estuda-se o efeito da variável u sob os modelos. Conclui-se que tanto para os modelos AR(p), MA(q) e ARMA(p,q), a influência desta variável se dá na magnitude da série. Para o cenário de $u=0.25$, primeiro quartil, os sub-modelos ajustados têm maior magnitude, enquanto para os ajustados com $u=0.75$ têm menor magnitude que tanto o primeiro quanto o segundo quartis, indicando diminuição de magnitude com o aumento da variável u . Estes estudos são verificados no Apêndice D.

3.6 ESTUDO NUMÉRICO

Nesta seção, é feito um estudo de simulação de Monte Carlo para avaliar a performance das EMVCs. Para tal, consideraram-se como critérios de avaliação as medidas: mediana dos valores estimados, viés relativo e o erro quadrático médio (EQM). O efeito dos fatores tamanho de amostra ($n \in \{25, 150, 250\}$) e o valor do quartil em $u = 0.5$ (a mediana) foram considerados neste estudo. Optamos por usar a mediana ao invés da média como critério de comparação pelas seguintes razões:

- O valor esperado ser limitado pelo κ gera grande quantidade de *outliers* na estimação tanto para valores muito próximos do limitante ($\kappa > 1$) quanto de valores distantes ao limitante.
- A informação obtida pela média já é analisada através do viés relativo, o que tornaria redundante utilizar ambos os critérios.

Utiliza-se para efeito de comparação três principais resultados: a mediana dos valores obtidos, o viés relativo e o Erro quadrático médio (EQM).

Utilizaram-se os seguintes valores dos parâmetros: $\kappa \in \{1.1, 2.2\}$, $\phi \in \{0.5, 0.8\}$, $\theta \in \{0.5, 0.8\}$, $\alpha = 0.5$; o chute inicial para q_0 e x_0 foram 0.5 e 2.0, respectivamente, enquanto o valor de u escolhido corresponde à mediana (0.5), ou segundo quartil. Finalmente, 10000 réplicas de Monte-Carlo foram realizadas nesse estudo.

Esta primeira etapa consiste na simulação de diversos valores de tamanho amostral, com intuito de confirmar a validade da simulação de Monte Carlo para o modelo ARMA ($p=1$, $q=1$). Os resultados da estimação dos parâmetros através da mediana, com a variação de n estão dispostos na Tabela 2.

O principal objetivo desse estudo para o modelo ARMA(1,1) é observar a respeito das estimativas com valores de κ no qual estão definidas a esperança (para $\kappa > 1$) e a variância (para $\kappa > 2$). Além disso, procura-se utilizar 4 cenários para cada um destes parâmetros de forma,

utilizando-se de dois valores de ϕ e dois valores de θ permutados entre si.

Tabela 2 – Resultados da estimação ARMA(1,1) a partir da mediana, dada a variação do tamanho amostral.

Medidas	n	Cenários							
Parâmetro (κ)		$\kappa=1.1$				$\kappa=2.2$			
Parâmetro (ϕ)		0.5000	0.8000	0.5000	0.8000	0.5000	0.8000	0.5000	0.8000
Parâmetro (θ)		0.5000	0.5000	0.8000	0.8000	0.5000	0.5000	0.8000	0.8000
Mediana (α)	25	0.5179	0.6596	0.3619	0.4027	0.4866	0.5839	0.3360	0.3587
	150	0.5146	0.5373	0.5154	0.5385	0.5135	0.5273	0.5118	0.5240
	250	0.5109	0.5214	0.5096	0.5206	0.5088	0.5163	0.5087	0.5146
VR % (α)	25	3.5873	31.9243	-27.6220	-19.4510	-2.6807	16.7848	-32.8013	-28.2656
	150	2.9130	7.4547	3.0747	7.7029	2.7002	5.4539	2.3698	4.7994
	250	2.184	4.2734	1.9108	4.1165	1.7530	3.2596	1.7475	2.9289
EQM(α)	25	0.2583	2.6895	0.2102	0.0812	0.0209	0.5426	0.0347	0.0586
	150	0.0442	0.0852	0.0539	0.0985	0.0305	0.0554	0.0329	0.0547
	250	0.0026	0.0139	0.0064	0.0194	0.0038	0.0106	0.0074	0.0138
Mediana (ϕ)	25	0.4289	0.6981	0.4817	0.7411	0.4365	0.7071	0.4801	0.7436
	150	0.4835	0.7819	0.4850	0.7823	0.4842	0.7826	0.4868	0.7835
	250	0.4892	0.7891	0.4904	0.7893	0.4904	0.7898	0.4921	0.7903
VR % (ϕ)	25	-14.2153	-12.7422	-3.6550	-7.3588	-12.7028	-11.6180	-3.9740	-7.0512
	150	-3.3012	-2.2562	-2.9921	-2.2082	-3.1668	-2.1756	-2.6351	-2.0563
	250	-2.1055	-1.3679	-1.9096	-1.3424	-1.9252	-1.2782	-1.5802	-1.2104
EQM(ϕ)	25	1.7866	1.5618	0.0984	1.2345	1.3173	0.1330	0.7325	1.4467
	150	0.0003	0.0505	0.0002	0.0588	0.0003	0.0617	0.0003	0.0692
	250	0.0002	0.0573	0.0006	0.0759	0.0007	0.0628	0.0002	0.0852
Mediana (θ)	25	0.5698	0.5562	0.8538	0.8490	0.5628	0.5522	0.8488	0.8432
	150	0.5114	0.5094	0.8076	0.8071	0.5109	0.5094	0.8070	0.8065
	250	0.5075	0.5058	0.8045	0.8045	0.5071	0.5056	0.8044	0.8043
VR % (θ)	25	13.6234	10.9385	6.7250	6.1210	12.5689	10.4382	6.1034	5.3997
	150	2.2841	1.8782	0.9487	0.8856	2.1744	1.8829	0.8811	0.8106
	250	1.5048	1.1674	0.5685	0.5607	1.4202	1.1113	0.5539	0.5371
EQM(θ)	25	1.0114	1.8776	0.5075	0.8624	0.1511	0.1503	0.8755	0.8754
	150	0.0724	0.0542	0.4037	0.3789	0.0502	0.0419	0.3411	0.3438
	250	0.0233	0.0353	0.0161	0.0068	0.0104	0.0172	0.0345	0.0232
Mediana (κ)	25	1.4545	1.4713	1.6310	1.6559	4.1116	4.1785	4.8608	4.9742
	150	1.1332	1.1335	1.1354	1.1353	2.3354	2.3389	2.3338	2.3365
	250	1.1209	1.1198	1.1211	1.1199	2.2805	2.2799	2.2817	2.2777
VR % (κ)	25	30.8613	32.9856	45.3677	50.8333	86.8891	89.9324	120.9521	126.0995
	150	3.0192	3.0467	3.2224	3.2102	6.1526	6.3140	6.0829	6.2027
	250	1.9003	1.7970	1.9226	1.8098	3.6598	3.6304	3.7120	3.5308
EQM(κ)	25	0.7398	2.2250	0.5595	1.5878	14.7575	14.3899	25.401	26.7598
	150	0.1859	0.1532	0.1585	0.1072	2.7950	2.7397	6.0829	6.2027
	250	0.1838	0.1558	0.1562	0.0997	2.8407	2.8012	2.7370	2.6051

Fonte: O Autor (2021)

Com o intuito de facilitar a observação de resultados descritos na Tabela 2, serão separados os tópicos as conclusões acerca das simulações. As principais notas a serem tomadas são:

- As simulações descrevem bem o modelo ARMA(1,1), por apresentar características de estimador assintoticamente não-viesado para os parâmetros;

- Os altos valores de EQM para estimação do κ com $\kappa = 2.2$ ocorre pelo maior valor do parâmetro tomado, já que os valores flutuantes ao redor da mediana ainda apresentam distância relativa à mediana maior;
- O parâmetro θ apresenta a seguinte característica: o maior valor desse parâmetro ($\theta = 0.8$) apresenta uma maior precisão na estimação dos parâmetros relacionados ao modelo ARMA (α, ϕ, θ), contudo esse efeito não ocorre para o parâmetro de forma, obtendo uma estimação menos acurada;
- Já para o parâmetro ϕ é notável a melhor precisão para estimação dos valores de $\phi = 0.5$.
- Apesar da ocorrência de pequenas flutuações, o ARMA(1,1) proposto ilustra o cenário de assintoticamente não viesado, pois tanto o viés relativo quanto o EQM decrescem com o aumento do tamanho amostral.

Com a realização das simulações do modelo ARMA da Lomax quantílica, procurou-se avaliar a influência nos casos específicos, que são o AR(1) e MA(1). Além dos cenários descritos para o ARMA(1,1), ambos casos particulares têm cenários peculiares no qual se permite realizar estudos ainda mais complexos, como o de valores simétricos (inversão dos sinais) para os parâmetros característicos.

Para o modelo Autorregressivo, construído anulando a parcela de Médias Móveis do modelo ARMA(1,1). Diferentemente do ARMA(1,1) utiliza-se uma maior variação do parâmetro autorregressivo, a fim de avaliar a influência dos comportamentos na estimação. Decidiu-se por esse tipo de metodologia, devido a não presença do parâmetro θ nesta simulação, dando maior liberdade para trabalhar o parâmetro ϕ .

Selecionou-se os parâmetros para avaliar os efeitos de tamanho amostral e parâmetro Autorregressivo, com a seguinte configuração: $\alpha = 0.5$ constante e os cenários avaliados se construíram em cima de dois valores de κ , a saber: 1.1 e 2.2. A justificativa desses valores se dá na limitação da utilização deste parâmetro para o valor esperado ($\kappa > 1$) e variância ($\kappa > 2$). Enquanto o conjunto escolhido para se trabalhar os parâmetros de Autorregressivo se dá na simetria dos trabalhados para o ARMA, que são: $\phi = \{-0.8, -0.5, 0.5, 0.8\}$, trazendo a possibilidade de ilustrar cenários para valores paramétricos positivos e negativos. Resultados da simulação para o cenário AR(1) estão descritos na Tabela 3.

Nota-se que a Tabela 3 ilustra a característica de assintoticamente não-viesado do modelo AR(1) com relação aos parâmetros α, ϕ e κ , pois com o aumento do tamanho amostral, os erros, em sua maioria, tendem a diminuir para o modelo AR(1) das séries simuladas.

É possível verificar a presença de uma diferença na estimação com pequenos tama-

Tabela 3 – Resultados da estimação AR(1) a partir da mediana, dada a variação do n.

Medidas	n	Cenários							
		$\kappa=1.1$				$\kappa=2.2$			
Parâmetro (κ)									
Parâmetro (ϕ)		-0.8000	-0.5000	0.5000	0.8000	-0.8000	-0.5000	0.5000	0.8000
Mediana (α)	25	0.5038	0.5074	0.5705	0.6970	0.4987	0.5006	0.5447	0.6445
	150	0.5013	0.5012	0.5122	0.5361	0.5029	0.5026	0.5101	0.5286
	250	0.5018	0.5020	0.5089	0.5216	0.5025	0.5029	0.5070	0.5164
VR % (α)	25	0.7527	1.4875	14.0901	39.4008	0.2549	11.3050	8.9469	28.8913
	150	0.2674	0.2331	2.4383	7.2163	0.5788	0.5164	2.0159	5.7307
	250	0.3687	0.4059	1.7742	4.3221	0.5070	0.5707	1.3960	3.2893
EQM(α)	25	0.0344	0.0409	0.1375	0.1622	0.0232	0.0381	0.0963	0.1142
	150	0.0038	0.0038	0.0050	0.0166	0.0026	0.0028	0.0040	0.0108
	250	0.0017	0.0014	0.0004	0.0050	0.0017	0.0016	0.0011	0.0047
Mediana (ϕ)	25	-0.7825	-0.4998	0.4187	0.6874	-0.7824	-0.4978	0.4243	0.6941
	150	-0.7972	-0.5010	0.4864	0.7824	-0.7970	-0.5000	0.4872	0.7837
	250	-0.7980	-0.5009	0.4910	0.7893	-0.7980	-0.5007	0.4917	0.7903
VR % (ϕ)	25	-2.1929	-0.0339	-16.2500	-14.0743	-2.1944	-0.4404	-15.1496	-13.2433
	150	-0.3502	0.2061	-2.7194	-2.1961	-0.3740	0.0025	-2.5535	-2.0439
	250	-0.2472	0.1901	-1.7936	-1.3317	-0.2551	0.1411	-1.6671	-1.2116
EQM(ϕ)	25	2.2230	1.4808	0.1519	1.1845	2.1597	1.4567	0.1677	0.8188
	150	1.7642	1.0670	0.0005	0.0414	1.7376	1.0514	0.0007	0.0514
	250	1.6149	0.9411	0.0005	0.0712	1.6423	0.9590	0.0008	0.0894
Mediana (κ)	25	1.2946	1.2976	1.3095	1.3315	3.1874	3.1986	3.1709	3.2742
	150	1.1252	1.1259	1.1258	1.1262	2.3017	2.3007	2.3007	2.3055
	250	1.1162	1.1162	1.1164	1.1156	2.2598	2.2601	2.2612	2.2597
VR % (κ)	25	17.6871	17.9618	19.0462	21.0482	44.8811	45.3921	44.1331	48.8226
	150	2.2873	2.3536	2.3470	2.3839	4.6222	4.5771	4.5756	4.7953
	250	1.4767	1.4699	1.4900	1.4214	2.7186	2.7360	2.8238	2.7121
EQM(κ)	25	0.9294	0.9646	0.9009	0.9367	9.0956	9.1969	8.6949	9.4724
	150	0.6753	0.6848	0.7151	0.6616	3.8888	3.8460	4.0089	3.5279
	250	0.2987	0.2940	0.2391	0.1976	2.9260	2.9165	2.7825	2.6489

Fonte: O Autor (2021)

nhos amostrais para o valor de $\phi = 0.8$, isto é, o valor mais extremo à direita. Esse efeito é reflexo da turbulência do processo AR com o valor alto do parâmetro ϕ deste cenário, necessitando uma maior quantidade de valores capazes de suprimir o efeito dos *outliers*.

Nota-se que houve influência relevante no resultado da estimação para os parâmetros α e ϕ . A obtenção de valor menos acurado para o maior parâmetro κ , todavia, está relacionado com o aumento da variância pelos valores marginais que acontecem com maior frequência para um parâmetro maior.

Retomando questionamentos da introdução desta dissertação, observa-se que os valores negativos do parâmetro ϕ , dentre os cenários avaliados, apresentam influência sobre o EQM da estimação do parâmetro ϕ , obtendo-se EQM bastante superior aos valores positivos.

Do ponto de vista do parâmetro de forma, a mudança no valor paramétrico implicou em mudanças na estimativa do parâmetro κ , conforme esperado, pois o aumento do valor mediano aumenta os valores marginais conduzindo a um aumento do EQM.

Já para o modelo Médias Móveis (MA), derivado do modelo ARMA que é construído anulando a parcela correspondente ao autorregressivo do modelo ARMA(1,1). As simulações foram realizadas tomando como base os parâmetros: $\alpha = 0.5$, $\theta = \{-0.8, -0.5, 0.5, 0.8\}$, $\kappa = \{1.1, 2.2\}$. Os resultados obtidos para o modelo MA(1) estão dispostos na Tabela 4.

Tabela 4 – Resultados da estimação MA(1) a partir da mediana, dada a variação do tamanho amostral.

Medidas	n	Cenários							
Parâmetro (κ)		$\kappa=1.1$				$\kappa=2.2$			
Parâmetro (θ)		-0.8000	-0.5000	0.5000	0.8000	-0.8000	-0.5000	0.5000	0.8000
Mediana (α)	25	0.5675	0.5329	0.5135	0.4139	0.5447	0.5156	0.4984	0.3931
	150	0.5003	0.5014	0.5061	0.5056	0.4984	0.5008	0.5080	0.5091
	250	-0.5003	0.5013	0.5034	0.5034	0.4992	0.5006	0.5045	0.5060
VR % (α)	25	13.5001	6.5871	2.702	-17.2208	8.9459	3.1209	-0.3156	-21.3892
	150	0.0542	0.2791	1.2109	1.1124	-0.3242	0.1616	1.5972	0.0182
	250	0.0560	0.2622	0.6845	0.6832	-0.1662	0.1219	0.9013	1.1920
EQM(α)	25	0.0255	0.0251	0.1308	0.4713	0.011	0.0164	0.0158	0.0171
	150	0.0003	0.0019	0.0196	0.0389	0.0002	0.0013	0.0218	0.0127
	250	0.0001	0.0005	0.0049	0.0100	0.0001	0.0005	0.0045	0.0080
Mediana (θ)	25	-1.3442	-0.6066	0.5008	0.8292	-1.1613	-0.5931	0.5025	0.8251
	150	-0.8190	-0.5146	0.4991	0.8028	-0.8178	-0.5129	0.5001	0.8032
	250	-0.8114	-0.5090	0.4993	0.8021	-0.8102	-0.5081	0.4991	0.8020
VR % (θ)	25	68.0310	21.3160	0.1684	3.6546	45.3916	18.6238	0.5043	3.132
	150	2.3741	2.9299	-0.1714	0.3562	2.2314	2.5859	0.0143	0.0041
	250	1.4244	1.8001	-0.1438	0.2571	1.2768	1.6213	-0.1723	0.2423
EQM(θ)	25	4.8265	1.6976	0.9114	0.6349	3.4916	1.6211	0.1219	1.5717
	150	1.7183	1.0659	0.0007	0.0803	1.7145	1.0578	0.0003	0.0841
	250	1.6992	0.9879	0.0009	0.1187	1.6996	1.0048	0.0000	0.1023
Mediana (κ)	25	1.8315	1.4729	1.3303	1.4575	4.5642	3.7043	3.3621	3.7808
	150	1.1287	1.1262	1.1266	1.1259	2.3106	2.3035	2.3017	2.3033
	250	1.1163	1.1166	1.1160	1.1164	2.2599	2.2610	2.2607	2.2614
VR % (κ)	25	66.5021	33.8982	20.932	32.4995	107.4633	68.3758	52.8249	71.8566
	150	2.6048	2.3857	2.3504	2.4194	5.0250	4.7057	4.6215	0.0470
	250	1.4809	1.5058	1.4562	1.4954	2.7262	2.7724	2.7596	2.7906
EQM(κ)	25	2.2805	1.0903	1.3921	2.5231	22.1174	12.6569	11.5055	17.4625
	150	0.4527	0.5317	0.8004	0.9116	3.4322	3.5669	4.0803	4.3533
	250	0.3642	0.3430	0.2745	0.2521	3.0804	3.0483	2.8964	2.8391

Fonte: O Autor (2021)

Diferentemente do Modelo AR(1), no modelo MA(1) simulado, verifica-se que a maior dificuldade na estimação encontra-se nos valores extremos negativos ($\phi = -0.8$), dentre os estudados. Esse efeito segue, contudo, sendo relevante apenas para os menores tamanhos amostrais.

A estimação do κ continua tendo diferença devido ao aumento do parâmetro, de forma semelhante ao AR(1) e ARMA(1,1). A principal mudança ocorre nos valores de VR% e EQM, que não são variações suaves, com estimativas bastante deslocadas para os menores tamanhos de amostras.

Baseando-se nas perguntas colocadas na introdução deste trabalho, verifica-se o impacto do parâmetro θ com valores negativos na estimação do modelo. Os parâmetros negativos influenciaram principalmente na estimação do θ , que, nos cenários observados, teve divergência relevante tanto no viés relativo quanto no EQM, implicando em uma estimativa menos satisfatória que os modelos AR(1) e ARMA(1,1), quando se trata de valores negativos para o parâmetro referente ao MA(1). Este fenômeno acontecido no modelo MA(1) é previsto em Bayer, Bayer e Pumi (2017), indicando estimação mais pobre em relação a outros processos.

Conclui-se sobre os estudos de análise de tamanho amostral que para θ , ϕ , α e κ para os modelos AR(1), MA(1) e ARMA(1,1) ilustram característica de assintoticamente não-viesados, tendendo a diminuir o EQM com o aumento do tamanho amostral. Além disso, tais resultados comprovam a validade do modelo, em termos de estimação de parâmetros, a partir de cenários de simulação de Monte Carlo.

No apêndice C pode ser encontrada simulação para cenário realizado na aplicação.

3.7 DIAGNÓSTICO E PREVISÃO

Realizadas as análises de estimações de cenários, deseja-se aplicar a dados reais o modelo ARMA-LQ através de comparação a séries ajustadas de predição e previsão.

Buscando representar uma série temporal existente, a predição é definida através da função de ligação e seu preditor linear para o modelo selecionados. Levando em consideração o resíduo de quantis aleatorizados do modelo ARMA-LQ, descrito por:

$$R_t = \Phi^{-1} [F(y_t | \mathcal{F}_{t-1})],$$

em que $F(y_t | \mathcal{F}_{t-1})$ é a distribuição acumulada condicional do ARMA-LQ, avaliada através da Estimação por Máxima Verossimilhança condicional (EMVC). Nota-se, portanto, que o resíduo deve ter comportamento sem a presença de tendência notável e apresentando média zero e variância unitária.

Tendo como interesse a previsão dos quantis q_s , tomando como ponto de origem um valor de tempo conhecido da série n , no qual $n < s$. Então define-se o horizonte de previsão $h = s - n$. A partir das estimativas de $\{q_t; t = m - 1, \dots, n\}$ baseadas na EMVC, encontra-se a predição:

em que,

$$\hat{r}_t = \begin{cases} g(y_t) - g(\hat{q}_t), & \text{se } n < t \leq n \\ 0, & \text{se } t \leq m \end{cases}$$

Em contrapartida, a previsão é a aplicação do modelo preditivo para valores posteriores aos observados, tendo como finalidade prever o comportamento futuro da série temporal em questão. Considerando um horizonte h , assumindo que as observações das covariáveis z_t são conhecidas para $t = \{n + 1, \dots, s\}$ a previsão desse determinado passo no tempo $(n+h)$ é definida por:

$$\hat{q}_{n+h} = g^{-1} \left\{ \alpha + \mathbf{z}_{n+h}^\top \beta + \sum_{i=1}^p \phi_i [g(q_{n+h-i}) - \mathbf{z}_{n+h-i}^\top \beta] + \sum_{k=1}^q \theta_k \hat{r}_{n+h-k} \right\},$$

em que, para $t > n$, $\hat{r}_t = 0$ e

$$g(y_t) = \begin{cases} g(\hat{q}_t), & \text{se } n < t < n+h \\ g(y_t), & \text{se } n \leq t \leq n \end{cases}$$

Observa-se que, diferentemente da predição, a previsão se utiliza do preditor linear obtido anteriormente em face do valor da série.

3.8 MEDIDAS DE ACURÁCIA

Diante da necessidade de avaliar quantitativamente os ajustes de predição e previsão do modelo proposto e compará-los a outros modelos, utiliza-se de estatísticas específicas para modelos ajustados e que revelam o poder de acurácia de um processo.

Para a análise dos ajustes de predição e previsão utiliza-se estatísticas de adequação comumente utilizadas na Estatística com finalidade de realizar comparação de diferentes ajustes. No estudo de séries temporais, pode-se utilizar estatísticas de adequação desenvolvidas para este tipo de estudo, pois têm como principal foco uma abordagem na distribuição acumulada e as principais delas são MSE (*Mean Square Error*), MASE (*Mean Absolute Square Error*), SMAPE (*symmetric Mean Absolute Percentage Error*) e UMBRAE (*Unscaled Mean Bounded Relative Absolute Error*).

Dentre as estatísticas de adequação foram selecionadas três principais para avaliar estes cenários. A primeira delas é o MSE, definido anteriormente como erro quadrático médio para a etapa de simulação de Monte-Carlo, porém com uma abordagem diferente, a de comparar estimador com parâmetro. Neste caso, utiliza-se o MSE para comparar os dados da série original com os valores da série de predição. Considerando $\{Z_t; t = 1, \dots, n\}$ os valores da série temporal e $\{\hat{Z}_t; t = 1, \dots, n\}$ os valores obtidos pela predição através do modelo, o MSE é descrito pela seguinte equação:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^2,$$

em que $e_t = Z_t - \widehat{Z}_t$, Z_t o valor da série e \widehat{Z}_t o valor da predição. Apesar de ser medida eficaz na avaliação de ajustes para uma mesma série temporal, ao comparar com séries que se utilizam de metodologias e escalas diferentes há uma queda no desempenho da medida. Conseqüentemente, necessita-se de estatísticas que possam descrever, dissolver ou mitigar a queda de desempenho do MSE.

Nesse contexto a segunda estatística utilizada é o MASE, correspondente ao erro médio absoluto em escala, que é capaz de descrever a capacidade de previsão do modelo para os dados. Estudado em Hyndman e Koehler (2006), o MASE é uma medida que é sensível a valores *outliers* dos modelos, mas para valores que influenciem de forma pouco relevante o denominador da expressão característica, é uma estatística que reflete bem o erro relativo se utilizando do Erro Médio Absoluto (MAE) de uma previsão de referência. É descrito através de:

$$MASE = \frac{1}{n} \left(\frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |e_t|}{\frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n |e_t^*|} \right)$$

em que e_t^* é a diferença entre os valores da série separadas por um espaço de tempo consecutivo, ou seja, $e_t^* = Z_t - Z_{t-1}$.

O SMAPE, proposto em Makridakis e Hibon (2000), é também uma estatística bastante utilizada, porém tem característica de ser volátil pela sensibilidade na avaliação de valores próximos a zero, registrando picos e vales não esperados para uma medida de acurácia (CHEN; YANG, 2004). Por esse motivo, avaliou-se que não seria uma estatística ideal para se trabalhar, pois a sensibilidade dos dados utilizados poderia implicar em uma representação inadequada dos modelos.

Por fim, utiliza-se a UMBRAE, como corretiva das anteriores (MASE e MSE) e complementa-as de forma a trazer resposta à influência de *outliers*. Chen, Twycross e Garibaldi (2017) propuseram a medida a fim de retirar as restrições das estatísticas anteriormente apresentadas, sendo o fator corretivo para o problema gerado pelos *outliers*. A expressão da UMBRAE dada por:

$$UMBRAE = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|e_t|}{|e_t| + |e_t^*|}}{1 - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|e_t|}{|e_t| + |e_t^*|}},$$

em que, e_t^* é a diferença entre os valores da série separadas por um tempo espaço de tempo consecutivo, ou seja, $e_t^* = Z_t - Z_{t-1}$.

De posse das medidas de acurácia, as devidas limitações e o contexto de aplicação, realiza-se ajustes de predição e previsão com auxílio de tais estatísticas para avaliar a precisão e exatidão do modelo para os dados escolhidos.

4 APLICAÇÃO

4.1 INTRODUÇÃO

Um tema em alta no mercado financeiro é o crescimento das Criptomoedas. As moedas virtuais são tendência com a globalização da economia, pois além de terem caráter universal - serem comercializadas e reconhecidas ao redor do mundo - estão fora do mercado centralizado pelos bancos que produzem papel moeda com alto custo de comercialização.

Deve-se entender que por suas características, as Criptomoedas tendem a ser mais voláteis, isto é, ter flutuação de preço de forma muito mais rápida e sensível que a moeda física. Esse fator de volatilidade torna as moedas virtuais de difícil previsão, sendo alvos para estudos estatísticos (CIAIAN; RAJCANIOVA; KANCS, 2018).

Mesmo com o domínio de mercado do Bitcoin, outras moedas têm seu espaço de mercado. Dentre elas pode-se citar a Litecoin, que foi uma das primeiras Criptomoedas criadas (2011) e foi inspirada no Bitcoin e apesar de possuir valor menor, é mais rápida e segura, pois aperfeiçoou protocolos de velocidade de transação, confirmando mais rapidamente as transações, e segurança de criptografia a partir da experiência do Bitcoin. Ainda em comparação com o Bitcoin, o Litecoin foi projetado para ser um ativo financeiro de maior quantidade de negociação tornando-se um melhor ativo para negociações diárias, por ter 60 milhões a mais de limite de moedas mineradas em relação ao Bitcoin (84 a 21 milhões). A grande desvantagem do Litecoin é a característica de reserva de valor presente que está mais presente no Bitcoin, sendo tão mais valorizado por isso (GIBBS; YORDCHIM, 2014). O preço do Litecoin atual está na casa dos 170 dólares americanos.

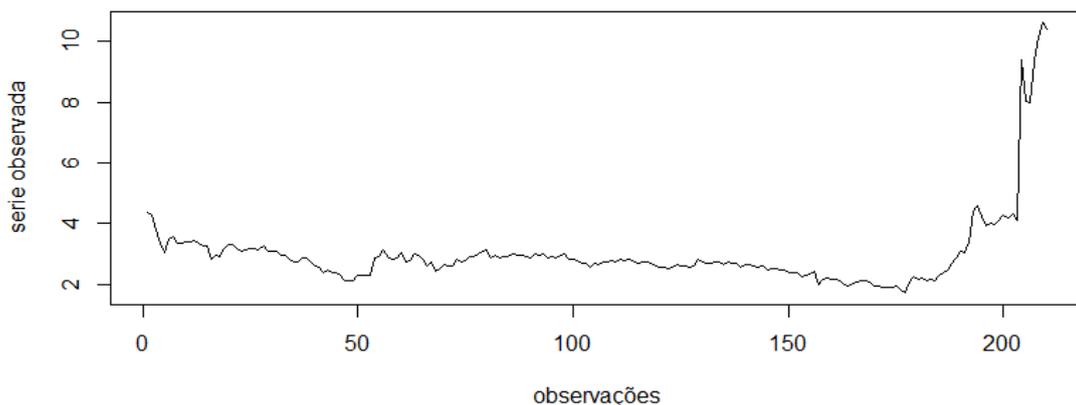
Algumas aplicações na área de séries temporais que envolvem esta moeda podem ser encontradas em Corrêa, Marçal e Flach (2019) que se utilizam do *Market Cap* das 10 maiores Criptomoedas em volume de negociação para aplicação de um modelo autoregressivo. Já Tiwari, Kumar e Pathak (2019) compara ajustes de diversos modelos GARCH e SV para avaliar preço de retorno de Bitcoin e Litecoin.

Apesar de terem sido as duas primeiras Criptomoedas do mercado, o mercado não é constituído apenas dessas moedas. Atualmente existem outros ativos financeiros descentralizados de grande popularização como a Dash (2014) que se popularizou pela característica adição de ainda mais privacidade às transações. Outra bastante conhecida é a Monero (2014), que utiliza de protocolos distintos da maioria das Criptomoedas para conferir irastreabilidade. Tem-se, ainda,

a Ethereum, criada em 2015, se destaca por sua capacidade de realizar contratos inteligentes, otimizando as negociações deste ativo. É importante notar, que já existem um grande número de Criptomoedas e esse número se expandem com criações constantes, nos mais diversos domínios e com finalidades e protocolos distintos (CHOHAN, 2017).

A aplicação em tela nesse capítulo consiste em dados relacionados ao preço, em dólares americanos, de fechamento da Criptomoeda Litecoin entre os dias 29/04/13 e 15/11/13. Restringiu-se a este intervalo, para evitar a necessidade de diferenciação dos dados, ao utilizar os dados desde essa época até os valores atuais e pela formação de blocos nos resíduos, o que exige estudos mais profundos destes fenômenos. A Figura 8 exhibe o conjunto de dados a serem avaliados, encontrados em CoinMarketCap (2021).

Figura 8 – Gráfico da série observada.



Fonte: O Autor (2021)

A variável estudada é o preço, em dólares americanos, da Criptomoeda Litecoin ao fechamento diário do mercado. O acompanhamento desta variável é capaz de mensurar o valor monetário adquirido pela moeda ao longo do tempo. Dessa forma, trabalhando-se em um cenário com possibilidade de prever este valor, é possível gerar um direcionamento aos cenários de compra e venda desse ativo.

Nota-se na Figura 8 a presença de volatilidade nos últimos valores da série. Esse fenômeno ocorreu, pois houve uma grande procura por investimentos semelhantes ao bitcoin, a partir do segundo semestre de 2013, com a explosão de preços deste. Por ser a principal alternativa à época, o Litecoin foi favorecido e teve um grande alavancamento de preços.

Para fins comparativos, consideramos a proposta desta dissertação como alternativa ao modelo ARMA- Γ definido por Kedem (2002). Ambos contêm dois parâmetros e têm suporte

definido nos reais positivos. A estrutura ARMA é aplicada no modelo ARMA- Γ no parâmetro (μ), obtido ao reparametrizar o parâmetro de escala (b), como $b = \frac{\mu}{\kappa}$, assumindo densidade:

$$f(x; \kappa, \mu) = \frac{x^{\kappa-1} \exp\left(-\frac{x\kappa}{\mu}\right)}{\left(\frac{\mu}{\kappa}\right)^{\kappa} \Gamma(\kappa)}.$$

Esse estudo será apresentado em duas etapas:

1. Predição e comparação com modelos alternativos;
2. Previsão de valores futuros.

A etapa de predição tem como foco ajustar os modelos aos dados analisando toda a questão inferencial associada. Subsequentemente, procura-se fazer uma breve análise de resíduo, procurando por um padrão de ruído branco (MORETTIN, 2006).

Uma outra abordagem dos resíduos consiste na realização de testes de auto-correlação, que avaliam o comportamento de uma série e verificam a hipótese nula de o resíduo ser um ruído branco (SALES, 2017). O teste de Box-Pierce (BOX; PIERCE, 1970) é uma técnica desenvolvida a partir de uma estatística que se utiliza das autocorrelações (ρ_k), de forma que se o resíduo se comportar como um ruído branco, a estatística $Q = n \sum_{k=1}^q \rho_k^2$ se comporta como uma χ -quadrado com q graus de liberdade.

A previsão, como complementar à etapa de predição, utiliza a adequação otimizada do modelo encontrada na etapa de predição para projetar os valores futuros, ou seja, para prever a sequência da série temporal utilizada. Como consequência dessa etapa, é possível facilitar as tomadas de decisão, visando a possibilidade de acontecimento dos próximos eventos.

Além desses estudos de comparação, a equiparação com outros modelos é importante para a validação do ajuste.

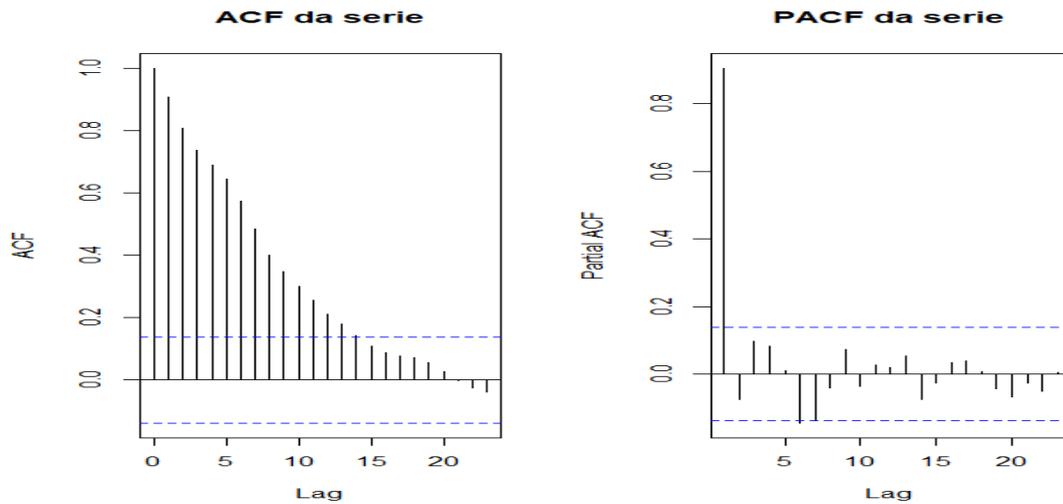
4.2 APLICAÇÃO A DADOS DE LITECOIN

Tendo posse dos dados referentes ao fechamento do valor da Criptomoeda Litecoin entre os dias 29/04 e 15/11 do ano de 2013, pode-se observar na Figura 9, o par de gráficos ACF/PACF refletindo o comportamento da série como um modelo AR de ordem p .

Realiza-se ainda estudo de possibilidade de sazonalidade dos dados da série obtida, para isso, ajustou-se gráficos de box-plot referentes a estratos de dias da semana. O resultado, exposto na Figura 10, indica a ausência de sazonalidade.

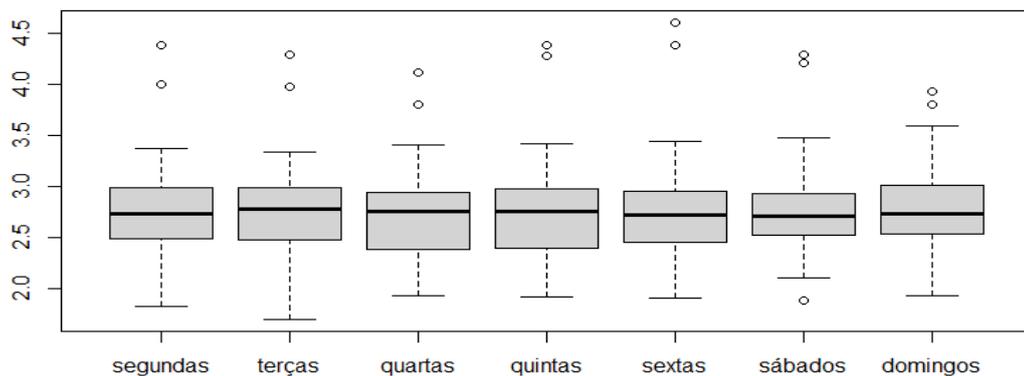
Esses resultados são confirmados através da aplicação da função *IsSeasonal* com

Figura 9 – Gráficos de ACF e PACF da série observada.



Fonte: O Autor (2021)

Figura 10 – Gráfico de Box-Plot para dias da semana da série observada.



Fonte: O Autor (2021)

metodologia "WO" da biblioteca *forecast* do R, aplicada a função para qualquer valor entre 1 e 105 valores de frequência. O teste indica retorna um operador de bool, V ou F, para a tendência de sazonalidade da série. Para a série estudada, foi confirmada a hipótese de não sazonalidade.

Diante do exposto, há uma inclinação a se acreditar que a série tem um comportamento de Autorregressivo. Logo, ajustou-se três cenários, a fim de verificar essa informação, uma série AR(1), uma série MA(1) e uma série ARMA(1,1). Tanto o ARMA(1,1), quanto o MA(1) não obtiveram bons ajustes estatísticos e, principalmente, gráficos pois tiraram o gráfico da escala perceptível para observações.

Pela definição do ajuste nesse estudo, assim como resultado obtido do par ACF e PACF, selecionou-se o modelo AR(1)- Γ do modelo ARMA- Γ para comparação com o modelo

proposto nessa dissertação. Neste processo de comparação, adotaremos a seguinte metodologia. Inicialmente, ajustam-se os modelos AR(1)-LQ e AR(1)- Γ para a série determinada pelas 200 primeiras observações. Após, a partir da ducentésima primeira observação, são feitas previsões como ambos os modelos num horizonte de tamanho 10, até a observação 210. Na Tabela 8, estão apresentadas os ajustes dos modelos distintos.

Tabela 5 – Ajustes dos modelos AR(1)-LQ e AR(1)- Γ aos dados de Litecoinin.

AR(1)- LQ			
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\phi}$	$\hat{\kappa}$
Valores iniciais	0.1000	0.9900	2.1000
Estimadores	-150.5760	0.9999	1089.1521
Erros-padrão	0.1525	0.0001	0.0755
AR(1)- Γ			
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\phi}$	$\hat{\kappa}$
Valores iniciais	0.1000	0.5000	0.5000
Estimadores	68.9490	0.9989	213.6660
Erros-padrão	0.2940	0.0003	0.5974

Fonte: O Autor (2021)

Da Tabela 8, verifica-se que os erros são inferiores a 50% dos valores estimados, indicando estimação satisfatória para os valores ajustados tanto do modelo AR(1)-LQ quanto do AR(1)- Γ . Por outro lado, na Figura 6 são apresentadas as estatísticas de acurácia comparativas, a fim de selecionar um modelo mais adequado para os dados dessa aplicação.

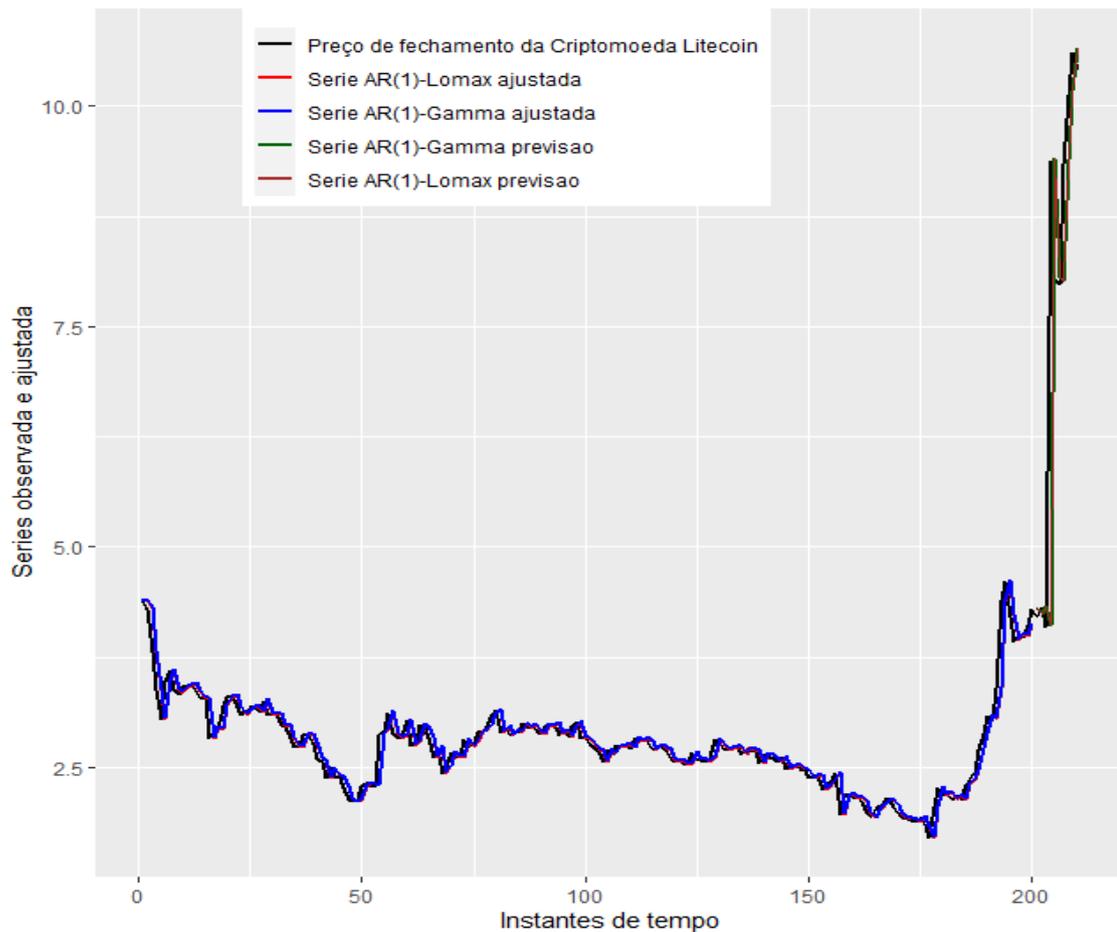
Tabela 6 – Estatísticas de acurácia para os ajustes dos modelos avaliados.

AR(1)- LQ			
	Predição	Previsão	
MSE	0.0244	3.2236	
MASE	0.0050	0.1008	
UMBRAE	0.3005	0.0845	
p-valor dos resíduos	0.4147	0.9753	10 lags
AR(1)- Γ			
	Predição	Previsão	
MSE	0.0249	3.5818	
MASE	0.0051	0.1120	
UMBRAE	0.3075	0.0948	
p-valor dos resíduos	0.3155	0.8580	10 lags

Fonte: O Autor (2021)

Em consonância com os dados da Tabela 6, pode-se verificar que o processo proposto AR(1)-LQ produziu melhores resultados do que o bem definido na literatura e amplamente usado

Figura 11 – Ajuste dos modelos AR(1) comparando o LQ com o AR(1)- Γ para os dados referentes ao Litecoin.



Fonte: O Autor (2021)

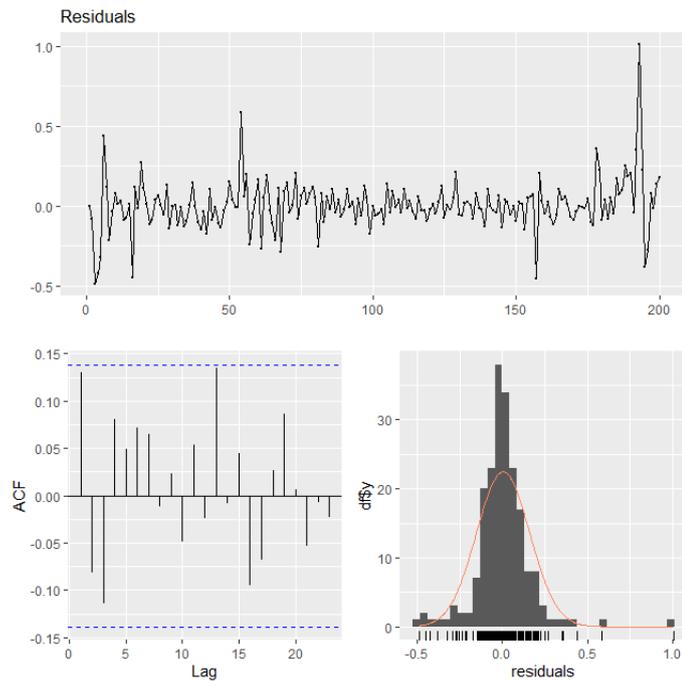
modelo AR(1)- Γ . Os melhores resultados das medidas preditivas na Tabela 6 estão destacados. Verifica-se, ainda, que os resultados obtidos para a previsão têm MSE mais elevado que a predição, mesmo com um menor número de previsões realizadas. Isso ocorre pela maior incerteza associada ao processo previsivo que envolve previsão de observações futuras da série, ou seja, desconhecidas.

Neste ponto, estamos em posição de fazer uma breve análise de resíduo. Dado que os ajustes da Figura 11 são bem feitos, espera-se que os resíduos associados comportem-se como um ruído branco. As Figuras 12 e 13 se referem aos resíduos gerados a partir do ajuste dos modelos AR(1)-LQ, e AR(1)- Γ , respectivamente.

Os resíduos decorrentes dos ajustes indicam um padrão de ruído branco tanto no ACF quanto no histograma dos resíduos.

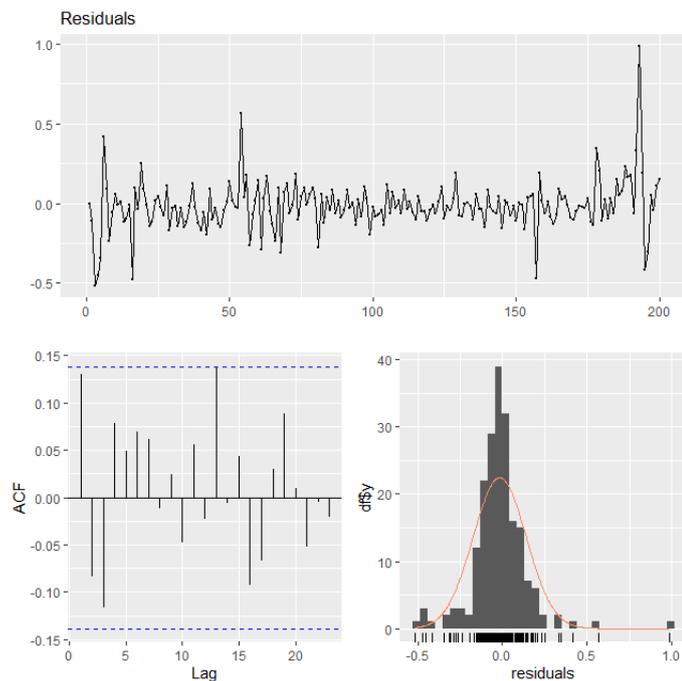
Confirmando o que foi discutido na análise gráfica, o teste de Ljung-Box foi aplicado às séries de resíduos dos modelos fornecendo os valores-p, conforme visto na tabela coerentes com a tendência de ruído branco para os resíduos dos processos autoregressivos com marginais

Figura 12 – Gráficos referente aos resíduos do modelo AR(1) LQ ajustado para os dados.



Fonte: O Autor (2021)

Figura 13 – Gráficos referente aos resíduos do modelo AR(1)- Γ ajustado para os dados.



Fonte: O Autor (2021)

LQ e Γ , respectivamente, conforme tabela 6. Ambos os casos utilizaram-se de 10 lags para avaliação dos testes, indicando que, possivelmente, se comportariam como uma χ -quadrado com 10 graus de liberdade.

Apesar da competitividade do modelo AR(1)- Γ , verifica-se que o modelo de previsão AR(1)-LQ possui melhores resultados para todas as medidas de acurácia consideradas sendo um

modelo mais adequado para dados de Litecoin.

5 CONCLUSÃO

Construiu-se um modelo Autorregressivo e de Médias Móveis (ARMA) aplicado à marginal Lomax (LOMAX, 1954) reparametrizada pela função quantílica. O modelo proposto foi denotado como ARMA-LQ e algumas de suas propriedades foram derivadas: Funções escore e matriz de informação observada. Foi constatado que o vetor escore e a matriz de informação observada são decompostos em dois fatores comuns, a parcela dependente do parâmetro de forma (κ) e a parcela dependente do parâmetro do modelo q .

No tocante a inferência pontual para os parâmetros do modelo ARMA-LQ, propomos um procedimento de estimação por máxima verossimilhança condicional. Observou-se maior dificuldade de estimação de parâmetros de valores negativos. Verificou-se perda na estimação com o aumento do parâmetro κ . Concluiu-se que o estimador proposto tem característica de assintoticament não viesado.

Quanto à aplicação a dados reais, verificou-se que o modelo ARMA-LQ se mostrou eficiente para descrever dados relacionados ao mercado de Criptomoedas, na variável preço diário de fechamento da Litecoin. Comparado ao modelo AR- Γ , que é usualmente utilizado para dados reais positivos, o modelo ARMA-LQ se mostrou mais acurado tanto na predição dos dados da série como na previsão em um horizonte de tamanho cinco.

5.1 TRABALHOS FUTUROS

A partir dos resultados numéricos e analíticos desta dissertação, espera-se os seguintes desdobramentos:

- Realizar estudo de testes de hipóteses para os parâmetros do modelo ARMA-LQ;
- Propor estimadores corrigidos para os parâmetros do modelo ARMA-LQ;
- Propor um estimador bayesiano para os parâmetros do modelo ARMA-LQ;
- Aplicar o modelo proposto na descrição de outras variáveis temporais, tais como ativos financeiros e variáveis sociais.

REFERÊNCIAS

- AGUILAR, D. L. F. de. **Estimação Pontual e Intervalar dos Parâmetros da Distribuição Lomax**. Dissertação (Mestrado) — UFPE, 2012.
- ALMEIDA-JUNIOR, P. M.; NASCIMENTO, A. D. C. Arma process for speckled data. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, Taylor Francis, v. 0, n. 0, p. 1–29, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00949655.2021.1922688>>.
- ALTUN, E. The lomax regression model with residual analysis: an application to insurance data. **Journal of Applied Statistics**, 2020.
- ANWAR, M.; ZAHOOR, J. The half-logistic lomax distribution for lifetime modeling. **Journal of Probability and Statistics**, v. 2018, p. 1–12, 02 2018.
- BAYER, F. M.; BAYER, D. M.; PUMI, G. Kumaraswamy autoregressive moving average models for double bounded environmental data. **Journal of Hydrology**, v. 555, p. 385–396, 2017. ISSN 0022-1694.
- BENVENUTO, D.; GIOVANETTI, M.; VASSALLO, L.; ANGELETTI, S.; CICOZZI, M. Application of the arima model on the covid-2019 epidemic dataset. **Journal Data in Brief**, v. 29, p. 105340, 2020. ISSN 2352-3409.
- BOLFARINE, H.; SANDOVAL, M. C. **Introdução à Inferência Estatística**. Sbm. Rio de Janeiro: [s.n.], 2010.
- BOX, G. E. P.; PIERCE, D. A. Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models. **Journal of the American Statistical Association**, v. 65, p. 1509–1526, 1970. ISSN 0162-1459.
- BROCKWELL, P. J.; DAVIS, R. A. Stationary time series. In: **Time Series: Theory and Methods**. [S.l.]: Springer, 1991. p. 1–41.
- BUENO, R. D. L. da S. **Econometria de Séries Temporais**. 2. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2011. ISBN 978-8522111572.
- CASELLA, G.; BERGER, R. L. Statistical inference. v. 49, p. 320, 1993. ISSN 0006-341X.
- CHAHKANDI, M.; GANJALI, M. On some lifetime distributions with decreasing failure rate. **Computational Statistics Data Analysis**, v. 53, p. 4433–4440, 2009. ISSN 0167-9473.
- CHAN, J. C. C. Moving average stochastic volatility models with application to inflation forecast. **Journal of Econometrics**, v. 176, p. 162–172, 2013. ISSN 0304-4076.
- CHEN, C.; TWYLCROSS, J.; GARIBALDI, J. M. A new accuracy measure based on bounded relative error for time series forecasting. **PLoS ONE**, v. 12, p. e0174202, 2017. ISSN 1932-6203.
- CHEN, Z.; YANG, Y. Assessing forecast accuracy measures. **Technical Report, Iowa State University**, 04 2004.
- CHOHAN, U. Cryptocurrencies: A brief thematic review. **School of Business and Economics**, 2017. ISSN 1556-5068.

CHOI, K. E. E. W. H. A. N.; THACKER, S. B. An evaluation of influenza mortality surveillance, 1962–1979: Ii. percentage of pneumonia and influenza deaths as an indicator of influenza activity. **American Journal of Epidemiology**, v. 113, p. 227–235, 1981. ISSN 1476-6256.

CIAIAN, P.; RAJCANIOVA, M.; KANCS d'Artis. Virtual relationships: Short- and long-run evidence from bitcoin and altcoin markets. **Journal of International Financial Markets, Institutions and Money**, v. 52, p. 173–195, 2018. ISSN 1042-4431.

COINMARKETCAP. **Today's Cryptocurrency Prices by Market Cap**. Coin Market Cap: [s.n.], 2021. Disponível em: <<https://coinmarketcap.com>>.

CORDEIRO, G. M.; AFIFY, A. Z.; ORTEGA, E. M.; SUZUKI, A. K.; MEAD, M. E. The odd lomax generator of distributions: Properties, estimation and applications. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 347, p. 222–237, 2019. ISSN 0377-0427.

CORDEIRO, G. M.; ORTEGA, E. M.; POPOVIĆ, B. V. The gamma-lomax distribution. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, Taylor Francis, v. 85, n. 2, p. 305–319, 2013.

CORDEIRO, G. M.; ORTEGA, E. M. M.; POPOVIĆ, B. V.; PESCIM, R. R. The lomax generator of distributions: Properties, minification process and regression model. **Applied Mathematics and Computation**, v. 247, p. 465–486, 2014. ISSN 0096-3003.

CORRÊA, A. B. N.; MARÇAL, R. R.; FLACH, L. Previsibilidade no mercado de criptomoedas: uma modelagem autorregressiva com dados em painel do market cap. **Revista de Contabilidade e Gestão Contemporânea**, 2019.

COWPERTWAIT, P. S. P.; METCALFE, A. V. **Time Series Data**. 2009. 1-25 p.

DAVIS, R. A.; SONG, L. Noncausal vector ar processes with application to economic time series. **Journal of Econometrics**, v. 216, p. 246–267, 2020. ISSN 0304-4076.

EHLERS, R. S. **Análise de Séries Temporais**. Departamento de Estatística, UFPR, 2007. Disponível em: <<http://www.each.usp.br/rvicente/AnaliseDeSeriesTemporais.pdf>>.

EL-BASSIOUNY, A.; ABDO, N.; SHAHEN, H. Exponential lomax distribution. **International Journal of Computer Applications**, v. 121, p. 24–29, 07 2015.

FAN, Q.; FAN, H. Reliability analysis and failure prediction of construction equipment with time series models. **Journal of Advanced Management Science**, p. 203–210, 2015. ISSN 2168-0787.

FINGLETON, B. A generalized method of moments estimator for a spatial model with moving average errors, with application to real estate prices. **Empirical Economics**, v. 34, p. 35–57, 2008. ISSN 0377-7332.

FRERY, A. C.; CRIBARI-NETO, F. Elementos de estatística computacional usando plataformas de software livre/gratuito. In: IMPA (Ed.). Rio de Janeiro: [s.n.], 2005.

GIBBS, T.; YORDCHIM, S. Thai perception litecoin value. **International Journal of Social, Education, Economics and Management Engineering**, 2014.

GOURIÉROUX, C. Some applications of univariate arch models. In: _____. **ARCH Models and Financial Applications**. New York, NY: Springer New York, 1997. p. 67–103. ISBN 978-1-4612-1860-9.

- HASSAN, A.; ABDALLAH, M. On the inverse power lomax distribution. **Springer-Verlag GmbH**, 11 2018.
- HASSAN, A.; AL-GHAMDI, A. Optimum step stress accelerated life testing for lomax distribution. **Journal of Applied Sciences Research**, v. 5, 01 2009.
- HASSAN, A.; ASSAR, S.; SHELBAIA, A. Optimum step-stress accelerated life test plan for lomax distribution with an adaptive type-ii progressive hybrid censoring. **British Journal of Mathematics Computer Science**, v. 13, p. 1–19, 01 2016.
- HUSAK, G. J.; MICHAELSEN, J.; FUNK, C. Use of the gamma distribution to represent monthly rainfall in africa for drought monitoring applications. **International Journal of Climatology**, v. 27, p. 935–944, 2007. ISSN 0899-8418.
- HYNDMAN, R. J.; KOEHLER, A. B. Another look at measures of forecast accuracy. v. 22, p. 679–688, 2006. ISSN 0169-2070.
- JOHNSON, N. L.; BALAKRISHNAN, N.; KOTZ, S. **Continuous Univariate Distributions: Graph. Darst.** [S.l.]: Mifflin, 1970.
- KEDEM, B. **Regression models for time series analysis**. Hoboken, N.J: Wiley-Interscience, 2002. ISBN 978-0-471-26698-3.
- LEMONTE, A. J.; CORDEIRO, G. M. An extended lomax distribution. **Statistical: A Journal of Theoretical and Applied Statistics**, v. 47, p. 800–816, 2013. ISSN 0233-1888.
- LI, H.; TIAN, W. Slashed lomax distribution and regression model. **Symmetry**, v. 12, p. 1877, 2020. ISSN 2073-8994.
- LOMAX, K. S. Business failures: Another example of the analysis of failure data. **Journal of the American Statistical Association**, v. 49, p. 847–852, 1954. ISSN 0162-1459.
- M., A.-L. Z.; ABDALWAHAB, A.; ABDALLAH, G. The impact of export instability on economic growth: Evidence from jordan. **The Journal of Asian Finance, Economics and Business**, v. 8, n. 8, p. 13–19, ago. 2021.
- MAKRIDAKIS, S.; HIBON, M. The m3-competition: results, conclusions and implications. **International Journal of Forecasting**, v. 16, p. 451–476, 2000. ISSN 0169-2070.
- MEAD, M. E. On five-parameter lomax distribution: Properties and applications. **Pakistan Journal of Statistics and Operation Research**, v. 12, p. 185, 2016. ISSN 2220-5810.
- MORETTIN, P. **Análise de Séries Temporais**. Sa o Paulo: Edgard Blucher, 2006. ISBN 978-8521203896.
- NAFIDI, A.; MAKROZ, I.; SÁNCHEZ, R. G. A stochastic lomax diffusion process: Statistical inference and application. **Mathematics**, v. 9, p. 100, 2021. ISSN 2227-7390.
- NWEZZA, E. E.; UGWUOWO, F. I. The marshall-olkin gumbel-lomax distribution: properties and applications. **Heliyon**, v. 6, p. e03569, 2020. ISSN 2405-8440.
- OGUNTUNDE, P.; KHALEEL, M.; TAHA, M.; ADEJUMO, A. O.; ODETUNMIBI, O. A new generalization of the lomax distribution with increasing, decreasing, and constant failure rate. **Modelling and Simulation in Engineering**, v. 2007, p. 6, 07 2017.

R FOUNDATION FOR STATISTICAL COMPUTING. **A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2021. Disponível em: <<https://www.r-project.org>>.

RADY, E. H.; HASSANEIN, W.; ELHADDAD, T. The power lomax distribution with an application to bladder cancer data. **SpringerPlus**, v. 5, 12 2016.

RAMOS, M.; MARINHO, P. R.; SILVA, R.; CORDEIRO, G. The exponentiated lomax poisson distribution with an application to lifetime data. **Advances and Applications in Statistics**, v. 34, 01 2013.

RIBEIRO, T. F. **Essays on the unit Burr XII distribution: regression and time series models**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2020.

SALES, L. O. A. **TESTANDO A HIPÓTESE DE PASSEIO ALEATÓRIO NO MERCADO DE AÇÕES BRASILEIRO**. Dissertação (Mestrado) — Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas, 2017.

SHUMWAY, R. H.; STOFFER, D. S. **Characteristics of Time Series**. 2011. 1-46 p.

TAHIR, M. H.; CORDEIRO, G. M.; MANSOOR, M.; ZUBAIR, M. Weibull-lomax distribution: Properties and applications. **Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics**, v. 44, p. 1–1, 2014. ISSN 1303-5010.

TAHIR, M. H.; HUSSAIN, M. A.; CORDEIRO, G. M.; HAMEDANI, G. G.; MANSOOR, M.; ZUBAIR, M. The gumbel-lomax distribution: Properties and applications. **Journal of Statistical Theory and Applications**, v. 15, p. 61, 2016. ISSN 1538-7887.

TIWARI, A. K.; KUMAR, S.; PATHAK, R. Modelling the dynamics of bitcoin and litecoin: Garch versus stochastic volatility models. **Applied Economics**, v. 51, p. 4073–4082, 2019. ISSN 0003-6846.

TSAY, R. S. **Analysis of financial time series**. [S.l.]: John wiley & sons, 2005. v. 543.

VAZ, L. V.; FILHO, G. B. da S. Functional autoregressive models: An application to brazilian hourly electricity load. **Brazilian Review of Econometrics**, v. 37, p. 297, 2016. ISSN 1980-2447.

WIDYADANA, G. A.; WEE, H. M. Optimal deteriorating items production inventory models with random machine breakdown and stochastic repair time. **Applied Mathematical Modelling**, v. 35, p. 3495–3508, 2011. ISSN 0307-904X.

YANG, Y.; GIURCANEANU, C.; TABUS, I. An application of the piecewise autoregressive model in lossless audio coding. In: **Signal Processing Symposium**. [S.l.: s.n.], 2006.

YUN-TING, H.; XIAO-JIN, W.; HAO, H.; JING, Z.; BING-SHUN, W. Moving-average based index to timely evaluate the current epidemic situation after covid-19 outbreak. **medXRiv**, 2020.

APÊNDICE A – VETOR ESCORE E MATRIZ DE INFORMAÇÃO OBSERVADA

Deve-se definir, para cada um dos vetores escore, uma formatação a partir da expressão de log-verossimilhança. Após alguma álgebra, obtemos:

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \kappa} = \sum_{t=m+1}^n \left\{ -\frac{(\kappa+1)x_t(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} \log(1-u)}{\kappa^2 \left[q_t + x_t(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - x_t \right]} \right\} - \log \left\{ \frac{x_t \left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right]}{q_t} + 1 \right\} + \frac{(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} + \frac{(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} \log(1-u)}{\kappa} - 1}{\kappa \left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right]},$$

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \sum_{t=m+1}^n \left\{ \frac{(\kappa+1)x_t \left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right]}{q_t^2 \left[\frac{x_t(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}}}{q_t} + 1 \right]} - \frac{1}{q_t} \right\},$$

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \alpha} = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial q} \exp(\eta_t),$$

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial q} \exp(\eta_t) \left[\mathbf{z}_t^\top - \sum_{i=1}^p \phi_i \mathbf{z}_{t-i, j}^\top \right],$$

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\phi}} = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial q} \exp(\eta_t) \left[\sum_{i=1}^p g(x_{t-i}) - \sum_{i=1}^p \mathbf{z}_{t-i, j}^\top \boldsymbol{\beta}_j \right],$$

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial q} \exp(\eta_t) \left[\sum_{k=1}^q r_{t-k} \right].$$

Encontrado o gradiente é necessário calcular, a partir deste, a matriz de Informação de Fisher. Na verdade, deduz-se a inversa da Informação através da derivada do vetor escore com relação a cada elemento, formando uma matriz 5 x 5. A expressão dada para a matriz segue:

$$K^{-1}(\boldsymbol{\gamma}) = \mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial \boldsymbol{\gamma} \partial \boldsymbol{\gamma}^\top} \right).$$

Deve-se notar que todas as derivadas que não incluem o parâmetro κ têm em comum serem função do q . Nota-se, portanto, que o fator comum é a derivada da log-verossimilhança do parâmetro derivada (2ª ordem) com relação a q . Temos então, que precisamos de duas principais derivadas:

- $\frac{\partial}{\partial q} \left(\sum_{t=m+1}^n \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \gamma_i} \right)$

Tabela 7 – Inversa da matriz de Informação.

	α	β	ϕ	θ	κ
α	$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \alpha^2}$	$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \alpha \partial \beta_j}$	$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \alpha \partial \phi_i}$	$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \alpha \partial \theta_k}$	$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \alpha \partial \kappa}$
β	$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \beta_j \partial \alpha}$	$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \beta_i \partial \beta_j}$	$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \beta_j \partial \phi_i}$	$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \beta_j \partial \theta_k}$	$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \beta_j \partial \kappa}$
ϕ	$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \phi_i \partial \alpha}$	$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \phi_i \partial \beta_j}$	$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \phi_i \partial \phi_j}$	$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \phi_i \partial \theta_k}$	$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \phi_i \partial \kappa}$
θ	$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \theta_k \partial \alpha}$	$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \theta_k \partial \beta_j}$	$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \theta_k \partial \phi_i}$	$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \theta_k \partial \theta_j}$	$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \theta_k \partial \kappa}$
κ	$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \kappa \partial \alpha}$	$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \kappa \partial \beta_j}$	$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \kappa \partial \phi_i}$	$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \kappa \partial \theta_k}$	$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \kappa^2}$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial \kappa} \left(\sum_{t=m+1}^n \frac{\partial \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \gamma_i} \right)$$

Encontrando, assim, a base para calcular todas as derivadas dos vetores escores e possibilitando o desenvolvimento da Matriz de Informação. Considerando os elementos que se utilizam do Item 1, que se refere a dois termos do modelo ARMA, ou seja, dependentes de q , obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \alpha^2} = \sum_{t=m+1}^n \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha}$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{q_t^2} - \frac{(k+1)2x_t \left[(1-u)^{-\frac{1}{k}} - 1 \right]}{q_t^3 \left[\frac{x_t(1-u)^{-\frac{1}{k}} - 1}{q_t} + 1 \right]} + \frac{(k+1)x_t^2 \left[(1-u)^{-\frac{1}{k}} - 1 \right]^2}{q_t^4 \left[\frac{x_t(1-u)^{-\frac{1}{k}} - 1}{q_t} + 1 \right]^2}$$

Cada termo da equação será identificado por A e um índice i correspondente à ordem. Dessa forma, $A_1 = \frac{1}{q_t^2}$, $A_2 = \frac{(k+1)2x_t \left[(1-u)^{-\frac{1}{k}} - 1 \right]}{q_t^3 \left[\frac{x_t(1-u)^{-\frac{1}{k}} - 1}{q_t} + 1 \right]}$ e $A_3 = \frac{(k+1)x_t^2 \left[(1-u)^{-\frac{1}{k}} - 1 \right]^2}{q_t^4 \left[\frac{x_t(1-u)^{-\frac{1}{k}} - 1}{q_t} + 1 \right]^2}$. Obtendo a expressão final para os parâmetros de γ :

$$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \alpha^2} = A_1 - A_2 + A_3 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \beta_j \partial \beta_i} = (A_1 - A_2 + A_3) \left[x_t^\top - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i}^\top \right]^2 \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \phi_i \partial \phi_j} = (A_1 - A_2 + A_3) \left[\sum_{i=1}^p g(x_{t-i}) - \sum_{i=1}^p x_{t-i}^\top \beta_j \right]^2 \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \theta_k \partial \theta_j} = (A_1 - A_2 + A_3) \left[\sum_{k=1}^q r_{t-k} \right]^2 \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \beta_j \partial \alpha} = (A_1 - A_2 + A_3) \left[x_t^\top - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i,j}^\top \right] \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \alpha \partial \beta_j} = (A_1 - A_2 + A_3) \left[x_t^\top - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i,j}^\top \right] \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \phi_i \partial \alpha} = (A_1 - A_2 + A_3) \left[\sum_{i=1}^p g(x_{t-i}) - \sum_{i=1}^p x_{t-i,j}^\top \beta_j \right] \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \alpha \partial \phi_i} = (A_1 - A_2 + A_3) \left[\sum_{i=1}^p g(x_{t-i}) - \sum_{i=1}^p x_{t-i,j}^\top \beta_j \right] \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \theta_k \partial \alpha} = (A_1 - A_2 + A_3) \left[\sum_{k=1}^q r_{t-k} \right] \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \alpha \partial \theta_k} = (A_1 - A_2 + A_3) \left[\sum_{k=1}^q r_{t-k} \right] \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \beta_j \partial \phi_i} = (A_1 - A_2 + A_3) \left[x_t^\top - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i,j}^\top \right] \left[\sum_{i=1}^p g(x_{t-i}) - \sum_{i=1}^p x_{t-i,j}^\top \beta_j \right] \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \phi_i \partial \beta_j} = (A_1 - A_2 + A_3) \left[x_t^\top - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i,j}^\top \right] \left[\sum_{i=1}^p g(x_{t-i}) - \sum_{i=1}^p x_{t-i,j}^\top \beta_j \right] \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \beta_j \partial \theta_k} = (A_1 - A_2 + A_3) \left[x_t^\top - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i,j}^\top \right] \left[\sum_{k=1}^q r_{t-k} \right] \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \theta_k \partial \beta_j} = (A_1 - A_2 + A_3) \left[x_t^\top - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i,j}^\top \right] \left[\sum_{k=1}^q r_{t-k} \right] \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \theta_k \partial \phi_i} = (A_1 - A_2 + A_3) \left[\sum_{k=1}^q r_{t-k} \right] \left[\sum_{i=1}^p g(x_{t-i}) - \sum_{i=1}^p x_{t-i,j}^\top \beta_j \right] \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \phi_i \partial \theta_k} = (A_1 - A_2 + A_3) \left[\sum_{k=1}^q r_{t-k} \right] \left[\sum_{i=1}^p g(x_{t-i}) - \sum_{i=1}^p x_{t-i,j}^\top \beta_j \right] \quad (\text{A.16})$$

Construídos os dezesseis elementos que são dependentes de \mathbf{q} (4 parâmetros dependentes versus 4 transpostos), realiza-se a formatação das expressões dependentes de κ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{\partial \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \alpha} \right)}{\partial \kappa} &= \frac{x \left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right] \exp(\eta)}{x \left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right] \exp(\eta) + 1} + \frac{(k+1)x(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} \log(1-u) \exp(-\eta)}{k^2 \left\{ x \left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right] \exp(\eta) + 1 \right\}} \\ &\quad - \frac{(k+1)x^2 \left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right] (1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} \log(1-u) \exp(-2\eta)}{k^2 \left\{ x \left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right] \exp(-\eta) + 1 \right\}^2} \end{aligned}$$

Cada termo da equação será identificado por B e um índice i correspondente à ordem do termo.

Dessa forma, o primeiro termo é nomeado B_1 , o segundo de B_2 e o terceiro de B_3 . Obtendo a expressão final para os parâmetros com primeira derivada dependente de \mathbf{q} e segunda dependente

de κ :

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \alpha} \right)}{\partial \kappa} = B_1 - B_2 + B_3 \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \beta_j} \right)}{\partial \kappa} = (B_1 - B_2 + B_3) \left[x_t^\top - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i,j}^\top \right] \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \phi_i} \right)}{\partial \kappa} = (B_1 - B_2 + B_3) \left[\sum_{i=1}^p g(x_{t-i}) - \sum_{i=1}^p x_{t-i,j}^\top \beta_j \right] \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \theta_k} \right)}{\partial \kappa} = (B_1 - B_2 + B_3) \left[\sum_{k=1}^q r_{t-k} \right] \quad (\text{A.20})$$

O próximo conjunto de equações consiste na apresentação das expressões com primeira derivada em λ e segunda derivada em \mathbf{q} , seguindo:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \alpha} \right)}{\partial \alpha} = \frac{(k+1)x(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} \log(1-u) \exp(-\eta)}{k^2 \left\{ \left[x(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right] \exp(-\eta) + 1 \right\}}$$

$$\frac{(k+1)x^2 \left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right] (1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} \log(1-u) \exp(-2\eta)}{k^2 \left\{ x \left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right] \exp(-\eta) + 1 \right\}^2} + \frac{x \left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right] \exp(-\eta)}{x \left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right] \exp(-\eta) + 1}$$

Utilizando-se do mesmo método utilizado para os termos anteriores da matriz, define-se C_1 , C_2 e C_3 . Obtendo a expressão final para os parâmetros com primeira derivada dependente de lambda e segunda dependente de q:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \kappa} \right)}{\partial \alpha} = C_1 + C_2 - C_3 \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \kappa} \right)}{\partial \beta_j} = (C_1 + C_2 - C_3) \left[x_t^\top - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i, j}^\top \right] \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \kappa} \right)}{\partial \phi_i} = (C_1 + C_2 - C_3) \left[\sum_{i=1}^p g(x_{t-i}) - \sum_{i=1}^p x_{t-i, j}^\top \beta_j \right] \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \kappa} \right)}{\partial \theta_k} = (C_1 + C_2 - C_3) \left[\sum_{k=1}^q r_{t-k} \right] \quad (\text{A.24})$$

Por fim, o último termo calculado para a matriz de informação são os termos independentes de q, dependendo apenas do parâmetro lambda.

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \kappa} \right)}{\partial \kappa} = \frac{(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} \log^2(1-u)}{k^4 \left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right]}$$

$$\frac{(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} \log(1-u) \left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 + \frac{(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} \log(1-u)}{\kappa} \right]}{k^3 \left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right]^2}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2x(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} \log(1-u)}{k^2 q \left\{ \frac{x[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1]}{q} + 1 \right\}} + \frac{2x(k+1)(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} \log(1-u)}{k^3 q \left\{ \frac{x[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1]}{q} + 1 \right\}} \\
& -\frac{x(k+1)(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} \log^2(1-u)}{k^4 q \left\{ \frac{x[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1]}{q} + 1 \right\}} - \frac{\left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 + \frac{(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} \log(1-u)}{\kappa} \right]}{\kappa^2 \left[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right]} \\
& + \frac{x^2(k+1)(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} \log^2(1-u)}{k^4 q^2 \left\{ \frac{x[(1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1]}{q} + 1 \right\}^2}
\end{aligned}$$

Semelhantemente que para as parcelas anteriores, se identifica os elementos da expressão por D_i .

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \ell(\gamma; \mathbf{x}, u, \mathbf{q})}{\partial \kappa} \right)}{\partial \kappa} = D_1 - D_2 - D_3 + D_4 - D_5 - D_6 + D_7 \quad (\text{A.25})$$

APÊNDICE B – ALGORITMO DE GERAÇÃO

$\alpha \leftarrow 0.5; \phi \leftarrow 0.5; \theta \leftarrow 0.5; x_0 = 2; \kappa = 0.5; u = 0.5$

$i \leftarrow 2$

if AR then

$q \leftarrow \exp(\alpha + (\phi * \log(x_0)))$

$$\lambda = \frac{q}{((1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1)}$$

$x_1 \leftarrow \text{randomlomag}(\lambda, \kappa)$

for $i \leq 200$ do

$q \leftarrow \exp(\alpha + (\phi * \log(x_{i-1})))$

$$\lambda = \frac{q}{((1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1)}$$

$x_i \leftarrow \text{randomlomag}(\lambda, \kappa)$

$i \leftarrow i + 1$

end for

else

if MA then

$q_0 \leftarrow 0.5$

$q \leftarrow \exp(\alpha + (\theta * (\log(x_0) - \log(q_0))))$

$$\lambda = \frac{q}{((1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1)}$$

$x_1 \leftarrow \text{randomlomag}(\lambda, \kappa)$

for $i \leq 200$ do

$q \leftarrow \exp(\alpha + (\theta * (\log(x_{i-1}) - \log(q))))$

$$\lambda = \frac{q}{((1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1)}$$

$x_i \leftarrow \text{randomlomag}(\lambda, \kappa)$

$i \leftarrow i + 1$

end for

else

$q_0 \leftarrow 0.5$

$q \leftarrow \exp(\alpha + (\phi * \log(x_0)) + (\theta * (\log(x_0) - \log(q_0))))$

$$\lambda = \frac{q}{((1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1)}$$

$x_1 \leftarrow \text{randomlomag}(\lambda, \kappa)$

for $i \leq 200$ do

$q \leftarrow \exp(\alpha + (\phi * \log(x_{i-1})) + (\theta * (\log(x_{i-1}) - \log(q))))$

$$\lambda = \frac{q}{((1-u)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1)}$$

$x_i \leftarrow \text{randomlomag}(\lambda, \kappa)$

$i \leftarrow i + 1$

end for

end if

end if

APÊNDICE C – SIMULAÇÃO PARA CENÁRIO DA APLICAÇÃO

Tabela 8 – Estimação de Máxima Verossimilhança condicional para 10000 réplicas de MonteCarlo no cenário aplicado.

	Cenário		n=250
	α	ϕ	κ
Parâmetros	-150.5760	0.9999	1089.1521
Estimadores	-150.5490	1.0001	1197.4773
VR(%)	-0.0180	0.0329	9.9459
EQM	37.3302	0.0001	11169.7402

APÊNDICE D – ESTUDO DA VARIÁVEL u NA GERAÇÃO DE SUB-MODELOS

Figuras para os cenários de $u = 0.25$ e $u = 0.75$ do sub-modelo AR(1).

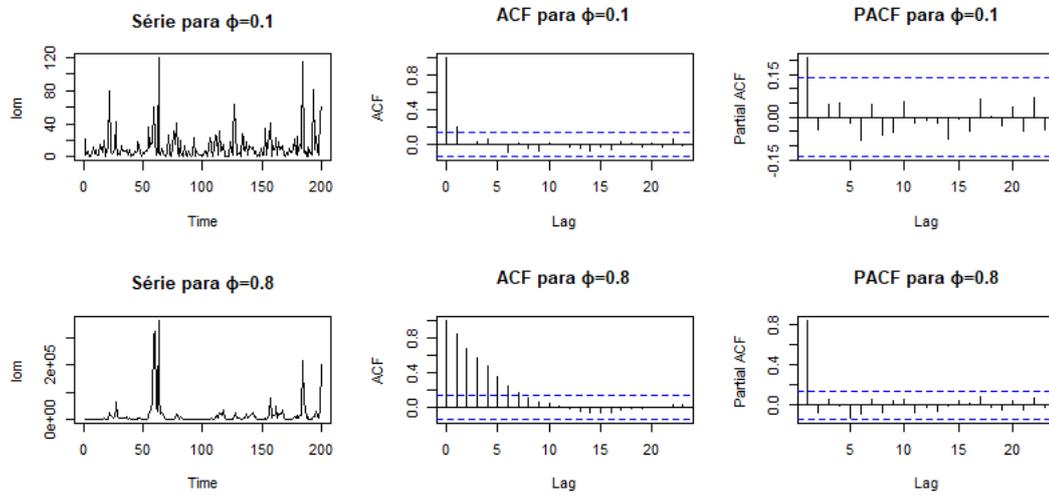


Figura 14 – Série Temporal, Auto-Correlação e Auto-Correlação Parcial para Modelo AR(1) - $u=0.25, \phi \in \{0.1, 0.8\}$

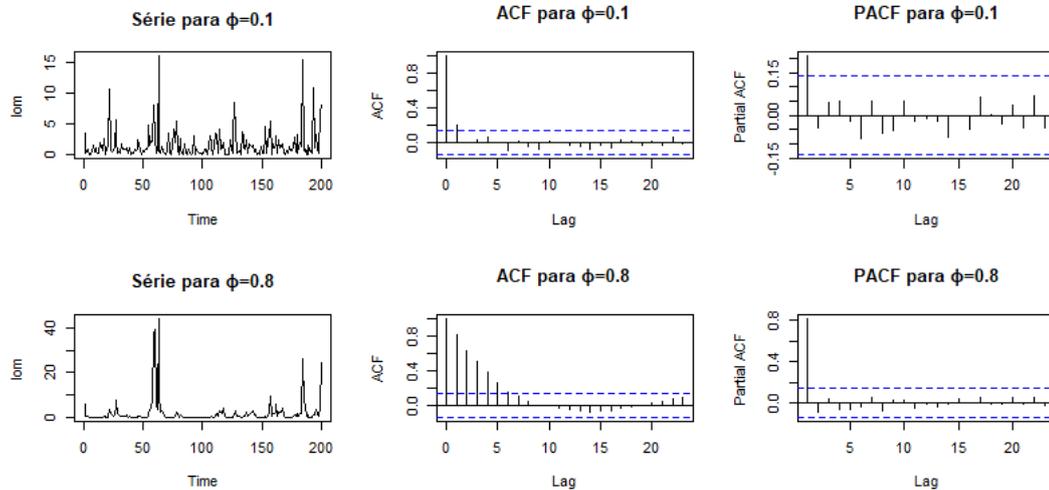


Figura 15 – Série Temporal, Auto-Correlação e Auto-Correlação Parcial para Modelo AR(1) - $u=0.75, \phi \in \{0.1, 0.8\}$

Figuras para os cenários de $u = 0.25$ e $u = 0.75$ do sub-modelo MA(1).

Figuras para os cenários de $u = 0.25$ e $u = 0.75$ do sub-modelo ARMA(1,1).

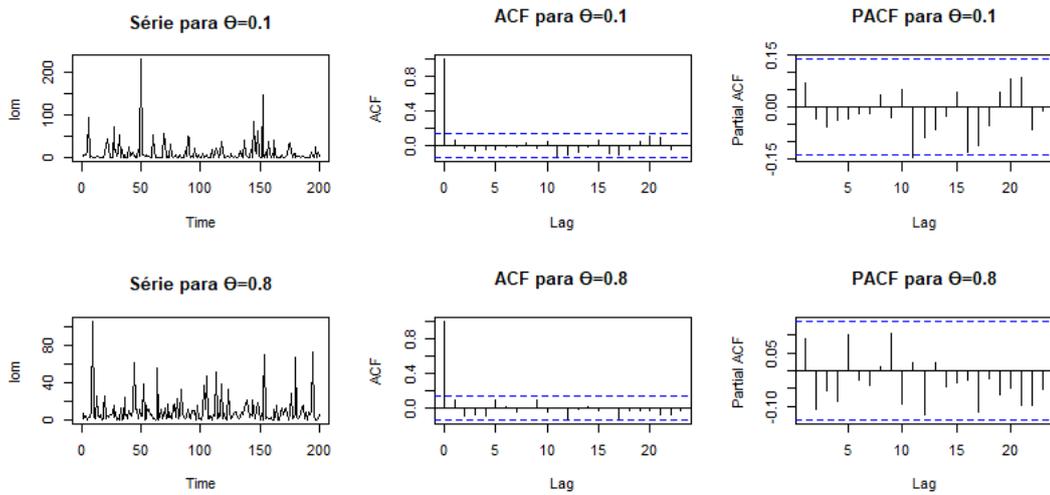


Figura 16 – Série Temporal, Auto-Correlação e Auto-Correlação Parcial para Modelo MA(1) - $u=0.25, \theta \in \{0.1, 0.8\}$

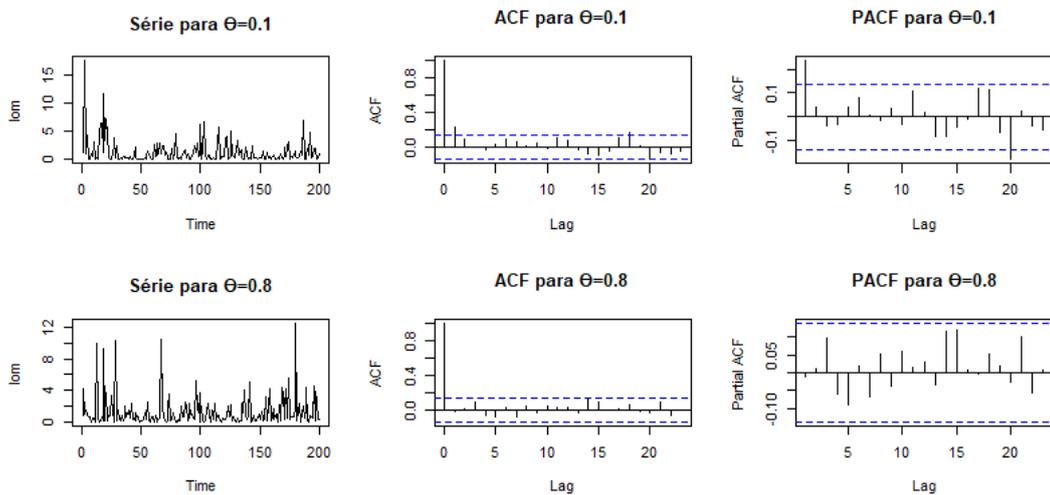


Figura 17 – Série Temporal, Auto-Correlação e Auto-Correlação Parcial para Modelo MA(1) - $u=0.75, \theta \in \{0.1, 0.8\}$

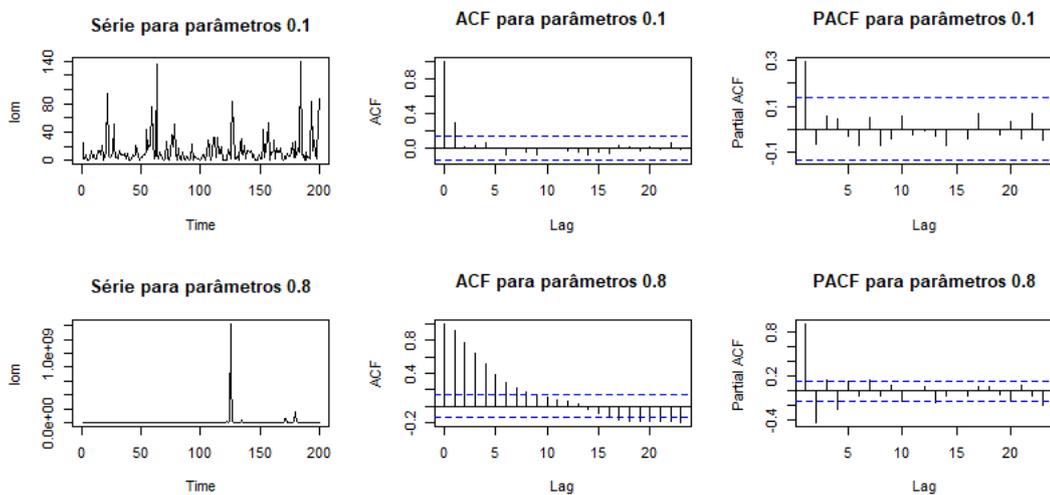


Figura 18 – Série Temporal, Auto-Correlação e Auto-Correlação Parcial para Modelo MA(1) - $u=0.25, \phi \in \{0.1, 0.8\}, \theta \in \{0.1, 0.8\}$

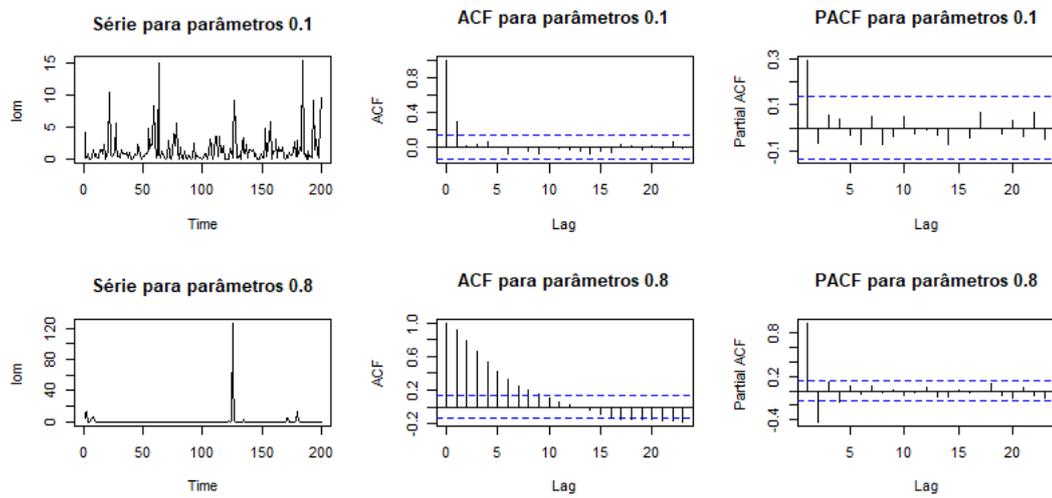


Figura 19 – Série Temporal, Auto-Correlação e Auto-Correlação Parcial para Modelo MA(1) - $u=0.75, \phi \in \{0.1, 0.8\}, \theta \in \{0.1, 0.8\}$