



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

MATHEUS ALVES PEREIRA

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO NA SOLUÇÃO DE
ESTRUTURAS EM SITUAÇÃO DE INCÊNDIO**

Recife

2021

MATHEUS ALVES PEREIRA

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO NA SOLUÇÃO DE
ESTRUTURAS EM SITUAÇÃO DE INCÊNDIO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Ancelmo de Carvalho Pires.

Recife

2021

Catálogo na fonte
Bibliotecária Margareth Malta, CRB-4 / 1198

P436a Pereira, Matheus Alves.
 Aplicação do método dos elementos de contorno na solução de
 estruturas em situação de incêndio / Matheus Alves Pereira. - 2021.
 75 folhas, il., gráfs., tabs.

 Orientador: Prof. Dr. Tiago Ancelmo de Carvalho Pires.
 Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG.
 Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2021.
 Inclui Referências.

 1. Engenharia civil. 2. Método dos elementos de contorno. 3. Método
 da reciprocidade dual. 4. Análise térmica. 5. Seções de aço. 6. Seções de
 concreto. 7. Alvenaria de concreto. 8. Alvenaria de gesso. 9. Situação de
 incêndio. I. Pires, Tiago Ancelmo de Carvalho (Orientador). II. Título.

UFPE

624 CDD (22. ed.)

BCTG/2021-158

MATHEUS ALVES PEREIRA

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO NA SOLUÇÃO DE
ESTRUTURAS EM SITUAÇÃO DE INCÊNDIO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas.

Aprovado em 25 / 02 / 2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Tiago Ancelmo de Carvalho Pires (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Jaime Joaquim da Silva Pereira Cabral (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. José Jeferson do Rêgo Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

*Dedico e agradeço o presente trabalho
a DEUS, o criador de todas as coisas
e nosso salvador.*

AGRADECIMENTOS

A DEUS por ser o princípio de todas as coisas, por estar comigo todos os instantes de minha vida sendo meu baluarte e a torre inexpugnável em que me refugio e por ter enviado à Terra seu filho Jesus Cristo - ao lado de quem sempre quero estar, cuja morte me deu vida e mediante o qual obtenho a salvação.

À minha mãe pelo amor, pela força que sempre me passou e sobretudo pela incessante fé em DEUS que apresenta diante de qualquer adversidade.

Ao meu irmão pela amizade, companheirismo e pela motivação que sempre me passou em todos os momentos até aqui.

Aos meus familiares por constituírem a minha base, pelo estímulo e a força que sempre me passaram.

Aos meus eternos, ilustres e agradabilíssimos amigos da graduação Bruno e Felipe.

À minha amiga Renata pela amizade e pela agradabilíssima companhia, principalmente nos corredores da Área II da UFPE, em que ministrávamos disciplinas juntos.

Ao professor orientador Dr. Tiago Ancelmo de Carvalho Pires e ao professor Dr. José Jeferson do Rêgo Silva pela amizade, atenção, disponibilidade e todo o empenho para realização deste trabalho.

Aos meus irretocáveis professores do programa de pós-graduação em Engenharia Civil da UFPE Bernardo Horowitz, Pablo Yanez e Paulo Marcelo, com quem tive o prazer de conviver.

À FACEPE pelo fomento pecuniário, sem o qual o desenvolvimento deste trabalho seria dificultado ou até impossibilitado.

A todos os brasileiros que de certa forma contribuem com seus tributos para o fomento da pós-graduação pública, gratuita e federal deste país.

RESUMO

A segurança contra incêndios é uma tema cuja discussão tem vindo à tona ultimamente, principalmente em virtude da últimos incêndios que acometeram a humanidade e aos quais inúmeras perdas estão realacionadas. Neste contexto, o papel da resistência de elementos estruturais e não estruturais é essencial à segurança das edificações; os primeiros (estruturais) para segurança global da estrutura e os segundos para contenção do incêndio em compartimentos. Portanto, uma análise de condução térmica bidimensional de seções de aço, seções de concreto, alvenaria de concreto e alvenaria de gesso é proposta com o Método dos Elementos de Contorno, em alternativa ao Método dos Elementos Finitos. A equação diferencial parcial não linear da condução de calor é linearizada usando a transformação de Kirchhof; o termo não homogêneo da supracitada equação é aproximado por uma série de funções de base radial variáveis, a fim de se controlar o condicionamento da matriz de interpolação do Método da Reciprocidade Dual, método utilizado neste trabalho. Além disso, condições de contorno para troca de calor por convecção e radiação são introduzidas no modelo, de modo a simular trocas de calor quando seções são sujeitas ao incêndio padrão. Finalmente, a fim de validar o modelo construído, primeiramente são mostradas algumas aplicações de casos cuja solução analítica é conhecida, a fim de avaliar a exatidão numérica do modelo. Em seguida, mostram-se respectivamente aplicações à seção de aço, à seção estrutural de concreto, à alvenaria de concreto e à alvenaria de gesso.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno; análise térmica; seções de aço; seções de concreto; alvenaria de concreto; situação de incêndio.

ABSTRACT

Fire safety is a topic that has been debated for a long time, mainly due to the last fires that have affected humanity and to which countless losses are related. In this context, the role of the resistance of structural and non-structural elements is essential to the security of buildings; the first (structural) for overall safety of the structure and the second for containment of fire in compartments. Therefore, an analysis of two-dimensional thermal conduction of steel sections, concrete sections, concrete masonry and plaster masonry is proposed with the Boundary Element Method, as an alternative to the Finite Element Method. The non-linear partial differential equation for heat conduction is linearized using the Kirchhof transformation; the non-homogeneous term of the aforementioned equation is approximated by a series of variable radial based functions, in order to control the conditioning of the Dual Reciprocity Method interpolation matrix, method used in this work. In addition, boundary conditions for heat exchange by convection and radiation are introduced in the model, in order to simulate heat exchanges when sections are subjected to standard fire. Finally, in order to validate the built model, firstly, some applications of cases whose analytical solution is known are shown, in order to evaluate the numerical accuracy of the model. Next, applications to the steel section, the concrete structural section, concrete masonry and plaster masonry are shown respectively.

Keywords: Boundary Elements Method; thermal analysis; steel sections; concrete sections; concrete masonry; fire situation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Incêndios no mundo em 2016.	16
Figura 2 – Incêndios em Pernambuco.	17
Figura 3 – Configuração do domínio.	27
Figura 4 – Modificação do contorno.	34
Figura 5 – Ângulo interno.	36
Figura 6 – Discretização do contorno.	37
Figura 7 – Elemento de contorno constante.	38
Figura 8 – Elemento de contorno linear.	39
Figura 9 – Funções de interpolação Linear.	39
Figura 10 – Representação da aplicação de sub-regiões.	43
Figura 11 – Esquema do domínio de validação discretizado.	52
Figura 12 – Solução da Equações (iii) e (iv) no tempo para o nó 49.	55
Figura 13 – Discretização das seções de aço testadas	56
Figura 14 – Evolução da temperatura no tempo para a seção de aço 2 com calor específico variável.	57
Figura 15 – Isotérmicas de temperatura geradas pelo BEM para as seções transversais de concreto.	59
Figura 16 – Parede de blocos de concreto analisada.	61
Figura 17 – Esquema da parede de concreto analisada.	62
Figura 18 – Corte da parede com dimensões em metros (domínio analisado).	62
Figura 19 – Evolução da temperatura no tempo para a seção de parede de concreto no ponto 6.	63
Figura 20 – Evolução da temperatura no tempo para a seção de parede de concreto no ponto 7.	64
Figura 21 – Evolução da temperatura no tempo para a seção de parede - média dos três pontos médidos.	64
Figura 22 – Evolução da temperatura no tempo para a seção de parede com revestimento na face exposta ao fogo - média dos três pontos médidos.	65
Figura 23 – Evolução da temperatura no tempo para a seção de parede com revestimento na face exposta ao fogo - ponto 3.	66
Figura 24 – Evolução da temperatura no tempo para a seção de parede com revestimento na face exposta ao fogo - ponto 7.	66
Figura 25 – Evolução da temperatura no tempo para a seção de parede com revestimento na face exposta ao fogo - ponto 6.	67
Figura 26 – Esquema das paredes de gesso analisadas.	68
Figura 27 – Evolução da temperatura no tempo para a seção de parede de gesso 50G. . .	68
Figura 28 – Evolução da temperatura no tempo para a seção de parede de gesso 100G. .	69

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Equações diferenciais parciais.	53
Tabela 2 – Condições de contorno e iniciais.	53
Tabela 3 – Resultados para Equação de Laplace e Poisson com elemento linear.	54
Tabela 4 – Resultados para Equação da difusividade linear e não linear com elemento linear para o nó 49.	54
Tabela 5 – Seções de aço e concreto testadas.	56
Tabela 6 – Resultados da temperatura para as duas seções testadas considerando o calor específico variável.	58
Tabela 7 – Resultados da temperatura para as duas seções de concreto testadas.	60
Tabela 8 – Tipos de bloco testados.	67

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Objetivos	14
1.2	Organização do trabalho	14
2	ESTADO DA ARTE	16
2.1	Incêndios	16
2.2	Resistência ao incêndio de estruturas	17
2.3	Resistência térmica de alvenarias	19
2.4	Método dos Elementos de Contorno	22
2.5	Método dos Elementos de Contorno com Método da reciprocidade dual	23
3	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	26
3.1	Equação do problema	26
3.2	Modelos Matemáticos	27
3.3	Métodos Numéricos	27
3.4	Soluções fundamentais	29
3.4.1	Solução fundamental para o potencial	29
3.4.2	Solução fundamental para a derivada normal ao contorno	30
3.5	A equação integral de contorno	31
3.6	Discretização da equações	37
3.7	Tipos de Elemento	38
3.7.1	Elemento de contorno constante	38
3.7.2	Elemento de contorno linear	38
3.8	Sistema de equações e esquema discretizado	39
3.9	Condições de contorno	41
3.10	Cálculo do potencial e sua derivada direcional nos pontos internos ao domínio	42
3.11	Sub-regiões	43
4	MÉTODO DA RECIPROCIDADE DUAL	45
4.1	A função f	47
5	O CASO NÃO LINEAR	49
6	RESULTADOS E DISCUSSÕES	52
6.1	Validação do modelo	52
6.2	Aplicação à seção de aço	55
6.3	Aplicação à seção de concreto	58
6.4	Aplicação à parede de bloco de concreto	60
6.4.1	Parede sem revestimento	60
6.4.2	Parede revestida na face exposta ao fogo	63
6.5	Aplicação à parede de gesso	65

7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	70
7.1	Trabalhos Futuros	71
	REFERÊNCIAS	72

1 INTRODUÇÃO

Incêndios são um problema frequente nas sociedades modernas. É indubitável que a segurança contra incêndio é um tema cuja discussão tem vindo à tona ultimamente, principalmente pelos últimos incêndios que se abateram sobre a humanidade e aos quais inúmeras perdas estão vinculadas; como exemplo recente, cita-se o incêndio da Catedral de Notre-Dame, ocorrido em Abril de 2019, que resultou num considerável desgaste daquela histórica estrutura. Neste sentido, o governo britânico divulgou, em 12 de setembro de 2019, relatório, no qual é mostrado que, durante Abril de 2018 a Março de 2019, foram atendidos pelo Serviço de Incêndio e Recuperação (Fire and Rescue Services – FRSs) 73,214 incêndios primários – isto é, incêndios cujos efeitos são potencialmente mais sérios e que causam prejuízos às pessoas ou danos a propriedades –, dos quais 44,575 se deram em moradias ou outras edificações, o que representa mais de 60 % dos incêndios primários (GOV.UK, 2019).

Além disso, as consequências deste cenário tem trazido, para o Brasil, prejuízos financeiros, perdas de vidas humanas e danos irreparáveis ao patrimônio cultural, histórico e ao meio ambiente. Exemplos recentes são: o incêndio do edifício Wilton Paes de Almeida (2018), em São Paulo - SP, que culminou no seu desabamento; o da boate Kiss (2013), em Passo Fundo - RS (2013), que causou 242 mortes e feriu outros 680; e os frequentes incêndios na zona comercial do bairro do Recife - PE. Vale ressaltar que mesmo em países com elevada cultura em segurança contra incêndio, incêndios podem ocorrer e causar grandes prejuízos. Por exemplo, cita-se o incêndio da Grenfell Tower (2017), ocorrido em Londres – Inglaterra, que resultou na destruição da edificação, 79 mortos e 78 feridos e o já citado exemplo da Catedral de Notre-Dame, na França. Isto mostra a necessidade de investimentos e melhoria contínua na prevenção contra incêndios em edificações.

Em particular, no triênio 2011-2013, o Corpo de Bombeiros Militar de Pernambuco atendeu 15 mil ocorrências de incêndios no estado de Pernambuco. Destes, 32 % ocorreram em edificações o que nos dá uma frequência média de 1600 incêndios/ano em edificações no Estado. Apenas na cidade do Recife, em 2011, foram registrados 946 incêndios, sendo 313 em edificações (CORRÊA et al., 2015).

Este risco é agravado pela pouca cultura em segurança contra incêndio que temos no País que se restringe aos códigos estaduais, como o COSCIP-PE, os quais são muitas vezes essencialmente prescritivistas e, por muitas vezes, não traduzem suas exigências em maior segurança para as edificações; algumas poucas normas técnicas com orientações de boas práticas para o projeto e construção, tais como, as NBR 15200:2012 e NBR 14323:2013; e a capacitação técnica dos profissionais envolvidos no processo que, frequentemente, possuem limitada ou nenhuma formação específica nesta área.

A Criação da Frente Parlamentar Mista em Segurança Contra Incêndio no Congresso Nacional em 2015 mostra a preocupação da União em elaborar políticas públicas para ampliar a prevenção e o combate a incêndios nas edificações brasileiras. Dentre várias de suas determina-

ções, cita-se a Lei nº 13.425 que estabelece a obrigatoriedade de todos os cursos de graduação em Engenharia e Arquitetura, bem como os cursos de tecnologia, de incluir em suas disciplinas conteúdos relativos à segurança contra incêndio.

Neste sentido, a Indústria da Construção Civil e seus setores relacionados têm concentrado esforços para melhorar o desempenho de suas edificações e de sua cadeia produtiva como um todo. A NBR 15575:2013, recentemente revisada, é um exemplo deste esforço, na qual são apresentadas diretrizes para a melhoria da habitação brasileira. Entre as diversas exigências que compõe a norma, destaca-se o desempenho das edificações em situação de incêndio.

Neste contexto, o papel da resistência ao fogo de elementos estruturais e não estruturais (isto é, com papel divisório) é essencial à segurança das edificações. Para determinar essa resistência, é comum, devido à complexidade e a não linearidade do comportamento de estruturas em situação de incêndio, adotarem-se soluções aproximadas em FEM (Finite Element Method); Ainda para a solução deste problema, uma outra alternativa numérica é o BEM (Boundary Element Method), que, relativamente ao FEM, tem a vantagem de discretização apenas no contorno do domínio, resultando numa menor quantidade de dados de entrada (coordenadas de pontos e malha), matrizes com menores dimensão e menores tempo de processamento.

Além disso, em particular, uma simples análise térmica para seções de concreto ainda é um desafio, devido especialmente à heterogeneidade e à baixa condutividade; o método dos 500 °C (M 500°C) não traz uma solução para este problema, fazendo-se necessário a utilização de softwares avançados para tal análise. Assim, o programa aqui desenvolvido, apesar de ser uma solução aproximada, constitui uma ferramenta complementar ao M 500°C. Por outro lado, em se tratando de estruturas de aço, não se tem este problema, haja vista que o método simplificado oferece uma solução já consolidada, permitindo uma solução iterativa de simples aplicação, que, inclusive, fornece bons resultados como se demonstra neste trabalho.

Propõe-se, portanto, neste artigo, um modelo de análise para condutividade térmica linear e não linear para domínios bidimensionais gerais munidos de condições de contorno essenciais, naturais, convectivas e radioativas com BEM, alternativamente ao FEM. Utiliza-se o referido modelo em aplicação à seção de aço, à seção de concreto e à alvenarias de bloco de concreto. Há naturalmente literatura sobre o BEM com aplicações em problemas de vários campos, mais recentemente se cita Bin et al. (2020) Zhou et al. (2019). O BEM é uma alternativa técnica numérica eficiente e precisa para resolver equações diferenciais parciais (EDP).

Neste método, a EPD é convertida numa equação integral de contorno equivalente; sendo esta sua principal vantagem relativamente a outros clássicos métodos, tais como FEM e o Método das Diferenças Finitas; resultando na necessidade de discretizar apenas o domínio junto com uma alta taxa convergência. Para lidar com o termo não homogêneo das EDP, mantendo-se a discretização apenas no contorno e sem a necessidade de integrais de domínio, uma ferramenta é o método da reciprocidade dual (Dual Reciprocity Method – DRM); nesta abordagem, tal termo não homogêneo é aproximado por um série de funções simples e transformado numa equação de contorno (PARTRIDGE; BREBBIA; WROBEL, 1992). Tais funções influenciam sobre o modo a

precisão e estabilidade da solução, principalmente para problemas de grande escala (ZHOU et al., 2011); isto é tratado em mais detalhes no decorrer do trabalho.

Em se tratando da não linearidade da equação de condução de calor, usa-se a transformação de Kirchhof para linearizá-la. Depois de linearizada, a equação de condução calor é resolvida usando BEM. Aplica-se então a metodologia à seção de elementos de aço e de concreto à paredes de alvenaria de blocos de concreto; no caso das seções de aço e concreto, os resultados aqui obtidos são comparados com os resultados oriundos da metodologia apresentada nas respectivas normas, NBR 14323 e EN 1992-1-2; no caso da alvenaria de blocos de concreto, os resultados obtidos via o modelo aqui desenvolvido são comparados com dados experimentais obtidos de outro trabalho do grupo de pesquisa de segurança ao incêndio da UFPE cujo objeto de estudo é a mesma alvenaria supracitada.

1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é utilizar o BEM para desenvolver um modelo de solução da condução térmica bidimensional e aplicá-lo a casos práticos concernentes à segurança contra incêndio: seções de aço, seções de concreto e seções de parede de alvenarias, comparando-se os resultados obtidos com as respectivas normas e com os resultados experimentais no último caso. Para tanto, tem-se como objetivos específicos os que se seguem:

- Desenvolver um código em MatLab utilizando BEM para a resolução da condutividade térmica bidimensional;
- Analisar e discretizar o termo não homogêneo da equação da condutividade;
- Analisar e resolver o caso da condutividade térmica não linear;
- Aplicar o modelo, obter os resultados e avaliá-los conforme o caso.

1.2 Organização do trabalho

No capítulo 2 são descritos alguns trabalhos atinentes ao tema desta obra, isto é, trabalhos que versam sobre uma visão estatística dos incêndios no Brasil no mundo, sobre resistência térmica de elementos construtivos - especialmente alvenarias -, sobre aplicações do Método dos Elementos de Contorno em casos concretos, sobre o Método da reciprocidade dual e sobre casos de análise não linear da equação de condução térmica.

No capítulo 3 é apresentada a equação diferencial da condução de calor para um domínio bidimensional, inclusive com suas peculiaridades e idiosincrasias atinentes a não linearidade e a condições de contorno essenciais, naturais e convectivas-radiativas.

No capítulo 3, encontra-se todo o desenvolvimento do Método dos Elementos de Contorno, desde a aplicação dos resíduos ponderados até a discretização da equação integral. Além

isso, tem-se, neste capítulo, um breve resumo sobre os principais métodos de solução de equações diferenciais.

No capítulo 4, mostra-se brevemente o Método da Reciprocidade Dual, que resumidamente trabalha o termo não homogêneo da equação diferencial mantendo a discretização apenas no contorno do domínio físico, principal característica do Método dos Elementos de Contorno.

No capítulo 5, apresenta-se brevemente o desenvolvimento para o caso não linear e os aspectos a ele atinentes. Lineariza-se a equação diferencial mediante a transformada de Kirchhoff, espécie do grande gênero chamado transformadas integrais.

O capítulo 6 traz as aplicações realizadas. Preliminarmente, mostram-se algumas aplicações a casos cuja solução analítica é conhecida, a fim de avaliar a exatidão numérica do modelo. Em seguida, mostram-se respectivamente aplicações à seção de aço, à seção estrutural de concreto, à alvenaria de concreto e à alvenaria de gesso.

As considerações finais são apresentadas no capítulo 7.

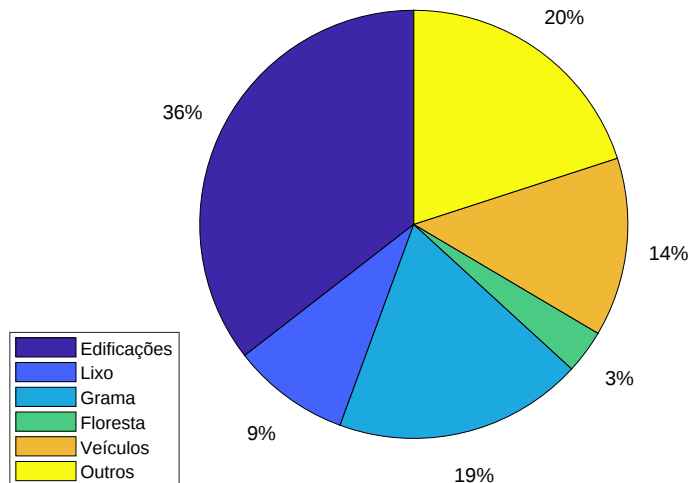
2 ESTADO DA ARTE

Neste capítulo, elencam-se alguns trabalhos que abordam resistência térmicas de alvenarias, Método dos Elementos de Contorno e Método da Reciprocidade Dual.

2.1 Incêndios

A *International Association of Fire and Rescue Services (IAFRS)*, órgão mundial reconhecido através de seu centro de estatísticas de incêndio, elaborou um relatório denominado

Figura 1 – Incêndios no mundo em 2016.



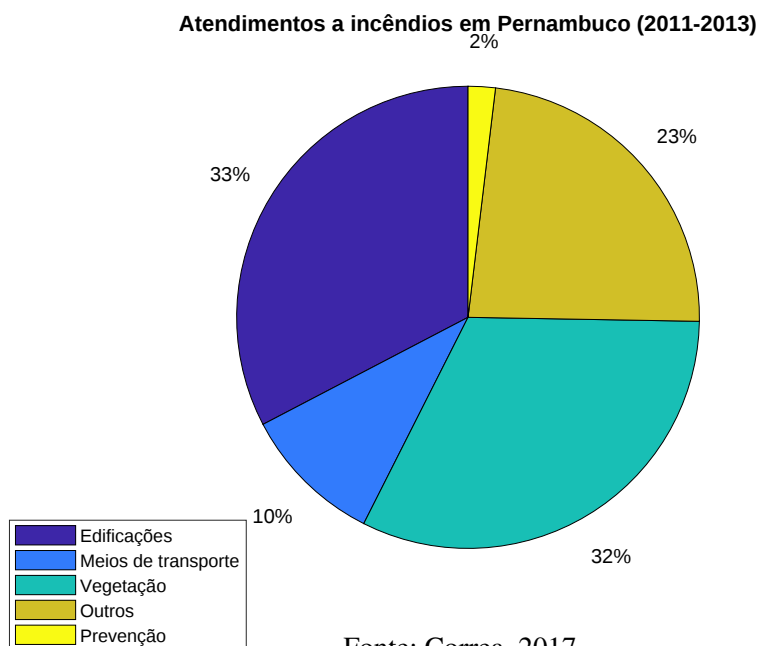
Fonte: CTIF, 2018.

World Fire Statistics - Report n° 23 no ano de 2018, que apresenta um levantamento estatístico dos tipos de incêndios ocorridos no mundo em 2016, baseado em dados fornecidos por 32 países associados. Na Figura 1, mostra-se a proporção de cada uma das categorias de incêndio.

Embora o Brasil não esteja incluso nesta estatística, é possível ver a grande proporção de incêndios que ocorrem em edificações, o que corrobora a importância da segurança contra incêndio em tal grupo.

No que concerne ao Brasil, especificamente a Pernambuco, a situação não é diferente. Corrêa et al. (2017) apresenta em sua obra uma análise comparativa entre os percentuais de incêndios ocorridos em vários países, devidamente registrados no *World Fire Statistics* (2012) e os ocorridos em Pernambuco, registrados pelo Corpo de Bombeiros Militar de Pernambuco – CBMPE no triênio 2011-2013. Mostram-se na Figura 2 os percentuais de incêndios por área para Pernambuco, em que é possível perceber que a contribuição de incêndios em edificações é igualmente expressiva.

Figura 2 – Incêndios em Pernambuco.



2.2 Resistência ao incêndio de estruturas

Cashell et al. (2021) apresentam os detalhes e a análise de um teste de fogo realizado em uma viga celular de aço inoxidável, bem como o desenvolvimento de um modelo de elementos finitos para um estudo mais aprofundado do comportamento. As vigas celulares são cada vez mais populares na construção, pois fornecem uma solução de projeto estrutural e materialmente eficiente, além de permitir a passagem de serviços. Seu comportamento em caso de incêndio pode ser desafiador, pois o poste de teia normalmente atinge temperaturas mais altas do que teias equivalentes em vigas sólidas. O aço inoxidável também é cada vez mais popular para aplicações estruturais, principalmente devido à sua excelente resistência à corrosão, bem como seus outros atrativos atributos físicos e mecânicos. O foco deste trabalho está no comportamento das vigas celulares de aço inoxidável, que combinam as qualidades atrativas do aço inoxidável com a eficiência estrutural das vigas com aberturas, no fogo. Um teste de incêndio foi conduzido, o qual é descrito e discutido. Em seguida, um modelo de análise de elementos finitos é desenvolvido para analisar o comportamento termo-mecânico de vigas celulares de aço inoxidável não protegidas. O modelo é validado usando os resultados experimentais e então empregado para investigar os parâmetros importantes que influenciam o comportamento.

Drury, Kordosky e Quiel (2020), em seu trabalho, tratam da resistência estrutural ao fogo de um conjunto de viga de piso de aço de abrangência unidirecional parcialmente composta com restrição parcial de translação e rotação fornecida por conexões de aba de cisalhamento a uma estrutura de suporte. Um artigo anterior dos mesmos autores descreveu um par de testes experimentais em amostras de piso compósito estruturalmente idênticas (uma protegida e a outra desprotegida) que são sujeitas ao fogo por meio de um grande forno modular. Neste artigo, os

autores usaram esses resultados experimentais para validar modelos numéricos que capturam de forma conservadora a resposta termo-mecânica dos conjuntos de espécimes ao fogo. Os modelos são desenvolvidos para maximizar a simplicidade na implementação do design baseado no desempenho desses conjuntos na prática. A análise térmica do aço é realizada usando uma abordagem de massa concentrada múltipla, que pode ser implementada por meio de planilha ou uma solução programada simples e não iterativa. A análise térmica da laje por meio de um modelo de fluxo de calor unidimensional simples é comparada com uma solução computacional mais detalhada. Dois tipos de análises de elementos finitos estruturais foram realizados: uma composta por elementos de casca (mais complexa) e outra composta por elementos de viga de fibra (mais simples). Os resultados de todos os modelos mostram concordância conservadora com os dados experimentais. Esses modelos são usados para analisar os conjuntos testados para variações na carga aplicada e na espessura da proteção contra incêndio para demonstrar a utilidade do teste de incêndio padrão ASTM E119 como uma linha de base de validação para avaliação de engenharia de incêndio estrutural com base no desempenho.

Kucukler (2020) estudou o comportamento da flambagem lateral por torção e o dimensionamento de vigas de aço em caso de incêndio em seu artigo. Modelos de elementos finitos capazes de replicar a resposta à flambagem lateral-torção (FLT) de vigas de aço em temperaturas elevadas são desenvolvidos e validados. Os modelos de elementos finitos validados são usados para realizar extensos estudos paramétricos para explorar o comportamento FLT de vigas de aço no fogo, considerando vários formatos de seção transversal, esbeltez de barra, graus de aço, níveis elevados de temperatura e diferentes processos de fabricação. Uma equação de projeto para a avaliação de FLT de vigas de aço em temperaturas elevadas é desenvolvida com base nos resultados de extensos estudos paramétricos. A alta precisão, segurança e confiabilidade da abordagem de projeto proposta são ilustradas, que também são comparadas com as regras de projeto de viga existentes na norma europeia de projeto de aço estrutural EN 1993-1-2. As propostas de projeto feitas neste artigo são compatíveis com as novas equações de avaliação FLT que devem ser incorporadas na próxima versão da norma europeia de projeto de aço estrutural à temperatura ambiente EN 1993-1-1 e levam a previsões de resistência final mais precisas em relação a as equações de projeto de flambagem de viga existentes na EN 1993-1-2.

Vitorino, Rodrigues e Couto (2020) estudaram os efeitos de um incêndio após um terremoto. Segundo os autores, os efeitos do fogo após o terremoto em áreas urbanas podem ser ainda piores do que os efeitos do próprio terremoto. Os edifícios não são projetados de forma adequada para o incêndio após um terremoto, pois a maioria dos padrões ignora essa possibilidade. O objetivo do trabalho é avaliar as consequências dos danos causados pelos eventos sísmicos na resistência ao fogo de elementos de concreto armado. Diversas análises numéricas foram realizadas para os elementos de concreto armado utilizando o programa SAFIR, considerando a análise térmica e mecânica da estrutura. As principais variáveis em análise foram o tipo de dano nos elementos e o tipo de cargas. A análise térmica foi realizada utilizando a curva de fogo padrão ISO 834. Os resultados mostram que os danos impostos pelo terremoto em

estruturas de concreto armado reduzem a resistência ao fogo, principalmente se a cobertura dos elementos for removida e a armadura for exposta ao fogo.

Zhang et al. (2020) analisaram colunas de concreto armado confinado com tubos de aço de paredes finas, que são membros compostos de um novo tipo; segundo os autores, o desempenho estático e sísmico dessas colunas tem sido extensivamente investigado nas últimas décadas. Existem, no entanto, estudos muito limitados sobre o comportamento ao fogo dos pilares de concreto armado confinado com tubo de aço submetidos à compressão axial. Neste trabalho são apresentados estudos experimentais e numéricos sobre a resposta ao fogo de pilares tubulares de concreto armado confinado sob compressão axial. Um total de oito corpos de prova com diferentes espessuras de parede de tubo de aço e taxas de carga foram testados até a falha sob o fogo padrão ISO-834. Distribuição de temperatura, deformação axial, modos de falha e duração do fogo foram registrados nos testes de incêndio. Modelos de elementos finitos (FE) foram estabelecidos usando ABAQUS para estimar o comportamento do fogo e os modelos foram validados comparando com os resultados medidos. Estudos paramétricos foram realizados sobre a resistência ao fogo de colunas de concreto armado confinado com tubo de aço de parede fina e os parâmetros considerados incluem diâmetro do tubo de aço, espessura da parede do tubo de aço, razão de carga, taxa de reforço, resistência do material e espessura da cobertura de concreto. Os estudos mostram que a relação de carga e o diâmetro do tubo de aço são dois fatores-chave que governam a resistência ao fogo de colunas de concreto armado confinado com tubo de aço de parede fina. Com base em resultados de teste e numéricos, uma abordagem de projeto foi proposta para prever a distribuição de temperatura e capacidade de carga de colunas de concreto armado confinado com tubo de aço de parede fina sob fogo padrão ISO-834.

2.3 Resistência térmica de alvenarias

Borges (2018) apresentou um estudo e uma análise experimental de alvenarias de vedação compostas por blocos de concreto simples e argamassa cimentícia submetidas a elevadas temperaturas características de processos de incêndios, sendo estes residenciais e considerados com composição predominante de materiais celulósicos. Ademais, identificou por análise experimental os comportamentos, características e a seguridade quanto à capacidade de isolamento térmico de paredes de alvenaria de vedação construídas em blocos vazados de concreto simples (com e sem revestimentos por argamassas cimentícias) frente a um carregamento térmico aplicado através de uma curva teórica de temperatura no tempo característica de um processo de incêndio padrão, estabelecida por normatizações nacionais e internacionais. Acerca da resistência térmica da referida parede, concluiu que a presença ou não da argamassa cimentícia de revestimento, assim como a sua espessura, influenciam significativamente de forma positiva no comportamento das curvas de aquecimento na região aquecida da face não exposta ao aquecimento.

Junior (2019) avaliou, experimentalmente, o comportamento de alvenaria em blocos cerâmicos de vedação, revestida com pasta de gesso, quando submetida a temperaturas decor-

rentes de incêndio padrão. Outrossim, testou seis paredes que foram construídas utilizando-se blocos cerâmicos de numa olaria local e, após o período de cura, foram revestidas com pasta de gesso nas espessuras de 10, 15 e 20 mm em uma ou ambas as faces. O aquecimento das paredes foi proporcionado por um forno elétrico previamente programado para comportar-se segundo a curva incêndio padrão ISO 834-1. Constatou, a partir dos resultados obtidos, que a aplicação do revestimento de pasta de gesso contribuiu para a melhoria no desempenho das paredes de blocos cerâmicos no tocante à estanqueidade e ao isolamento térmico. No entanto, comparando as paredes entre si, constatou que a melhoria no desempenho proporcionado pelas espessuras de 15 mm e 20 mm é pouco significativa em relação à de 10 mm. Logo, visando à segurança estrutural ponderada com a viabilidade econômica, conclui que 10 mm seria a espessura mais recomendada para revestimentos corriqueiros aplicados em ambientes que não apresentem riscos adjacentes.

Coelho (2017) versou, em seu trabalho, sobre comportamento mecânico de bloco cerâmico e argamassa, usualmente empregados nas alvenarias de vedação, quando submetidos a elevadas temperaturas decorrentes da ocorrência de incêndios. Avaliou a resistência mecânica residual de blocos cerâmicos e argamassas, após serem submetidos a altas temperaturas e resfriados e avaliar o comportamento das paredes rebocadas e não rebocadas quando submetidas a altas temperaturas. Além disso, realizou séries de ensaios de resistência à compressão nos seguintes corpos de prova: bloco cerâmico (9x19x19cm), prismas (compostos de 2 (dois) blocos cerâmicos, sobrepostos e assentados com argamassa de cimento) e barras prismáticas (4x4x16cm) de argamassa de cimento. Também ensaiou 6 (seis) mini-paredes (1,50x1,50m), submetida a elevadas temperaturas. A partir dos resultados, concluiu que a espessura de 1 cm de reboco nas paredes permite aproximadamente mais 10 minutos de resistência ao fogo e que, em caso de incêndio, o resfriamento mais adequado para esse tipo de parede é o lento, pois apresenta um menor decaimento de resistência.

Tadeu, Simões e Prata (2011) estudou numericamente pontes térmicas lineares de forma mais realista, assumindo um comportamento dinâmico que permite a simulação de estados transitórios onde as temperaturas externa e interna podem variar ao longo do tempo. O problema é resolvido por um modelo de elementos de contorno (BEM), formulado no domínio da frequência. Soluções dependentes do tempo são obtidas posteriormente por meio de transformações inversas de Fourier, que podem simular qualquer variações de temperatura externa. Após uma validação experimental do modelo BEM, uma série de simulações térmicas foram realizadas para ilustrar a aplicabilidade do modelo proposto. Além disso, seu modelo permite a importância de computar pontes térmicas a serem verificadas dinamicamente. A título de curiosidade sobre pontes térmicas o autor destaca que as perdas de calor através delas frequentemente levam a patologias de construção geradas pela condensação de umidade. Assim, as pontes térmicas precisam ser consideradas na fase de projeto da construção, a fim de evitar ambos perda de calor e a ocorrência dessas patologias posteriormente. A ponte térmica linear é frequentemente levada em conta na fase de projeto, usando um coeficiente pré-definido. Este fator está listado em vários regulamentos padrões para vários tipos de pontes térmicas lineares com base no pressuposto de um estado

estacionário de condução.

Sá et al. (2020) discutiram em seu trabalho sobre a resistência ao fogo de paredes não estruturais feitas de blocos de gesso sólidos. Realizaram os testes experimentais de acordo com o indicações da norma brasileira NBR 10636, com tempo de exposição ao calor de 120 min, em três paredes com espessuras de 5, 7 e 10 cm. Além disso, concluíram, a partir dos resultados, que as paredes de gesso têm grande resistência ao fogo; a temperatura máxima medido na face não exposta foi de 75 ° C, ocorreu na amostra de 5 cm de espessura. Segundo os referidos autores, a parede de 5 cm não cumpre os testes de integridade e estabilidade estrutural exigido pela norma acima mencionada durante o tempo de exposição ao calor, portanto, presume-se que ele pode resistir a um tempo de exposição ao fogo de 90 minutos ou menos. As paredes de 7 e 10 cm de espessura atendem a todos os critérios exigidos pela norma (isolamento térmico, integridade e estabilidade estrutural) durante a exposição ao calor tempo, portanto, pode resistir a um tempo de exposição ao fogo de 120 min ou superior.

Prakash et al. (2020) apresentam uma estrutura de micromodelagem baseada em elementos finitos 2-D (EF) para resposta termo-mecânica de estruturas de alvenaria de tijolo maciço sujeitas ao fogo. A estrutura FE 2-D considera geométricas e não linearidades do material e estados transitórios de deformação em conjunto com as propriedades do material dependentes da temperatura. A não linearidade do material dentro do modelo 2-D FE é considerada dependente da temperatura. A estrutura EF é validada contra a resposta termo-mecânica de um parede de alvenaria de meia escala submetida à exposição unilateral ao fogo, e observa-se que as previsões do EF estrutura são razoavelmente precisas. Utilizando a estrutura EF validada, é realizada em uma parede de alvenaria em escala real sujeita a uma exposição unilateral ao fogo. Fenômenos que incluem aquecimento térmico, difusão de calor, interação termo-mecânica unidade-argamassa, fissuração e perfis de tensão dentro das estruturas de alvenaria são estudados intrinsecamente. Além disso, a termo-mecânica dentro volumes representativos da unidade envolvente, bem como da argamassa e sua correlação com o termo-mecânico global resposta é estudada. A discussão detalhada sobre sua termo-mecânica é uma das novidades do presente estudo. É observado que a curvatura térmica resultou de uma interação complexa entre dilatação térmica e rachadura e esmagamento da argamassa.

Nguyen e Meftah (2012a) apresentam quatro testes de parede para ilustrar o comportamento de paredes de alvenaria de argila durante fogo. Os testes de parede selecionados são genericamente representativos dos resultados gerais obtidos durante uma série de experimentos. Os resultados experimentais são apresentados e analisados quanto ao risco de estilhaçamento na resistência ao fogo de alvenaria. A análise contém uma investigação detalhada de temperatura, deformação e fenômenos de degradação mecânica local nas paredes testadas. Finalmente, o estudo é concluído resumindo os parâmetros que controlam significativamente a resistência ao fogo de paredes de alvenaria de argila e merecem consideração em qualquer abordagem de modelagem.

Nguyen e Meftah (2012b) [na primeira obra obra desses autores - Nguyen e Meftah

(2012a) -, o comportamento ao fogo de paredes de alvenaria confeccionadas com tijolos vazados de argila foi investigado experimentalmente. Vários mecanismos complexos ocorridos durante o disparo são analisados e identificados. Em particular, em casos de paredes de suporte de carga, o lascamento local de tijolos é considerado como um fator importante que rege o desempenho ao fogo de paredes de alvenaria.] apresentam, nesta segunda obra, a investigação da alvenaria de barro cozido por abordagem teórica com o elemento finito, método para prever o seu comportamento e desempenho sob exposição ao fogo. Para isso, um 3D a simulação numérica é conduzida com atenção especial aos riscos de fragmentação dos alvéolos tijolos.

2.4 Método dos Elementos de Contorno

Wen e Khonsari (2009) utilizaram o método de elemento de contorno com reciprocidade dual para o estudo de problemas de condução de calor transiente na presença de fontes de calor em movimento. Neste método, a integração no tempo é processada por um método de matriz de transferência de iteração, as matrizes de coeficientes são calculadas apenas uma vez e nenhuma integração de domínio é necessária. Mostra-se que a aplicação do o método de elemento de contorno com reciprocidade dual resulta em economia considerável no tempo de computação e preparação dos dados. Exemplos numéricos são apresentados para demonstrar a eficiência e precisão do método, comparando os resultados calculados com resultados publicados ou soluções usando o método de elementos finitos. Embora apenas problemas bidimensionais sejam apresentados no artigo, o método pode ser prontamente estendido para problemas tridimensionais para lidar com problemas de contato mais complicados.

Lewandowski (2013) apresenta uma aplicação do método dos elementos de contorno aplicado a uma transferência de calor condutiva bidimensional. O algoritmo do método é explicado e suas vantagens são descritas. Função de Green como solução fundamental para a equação de Poisson em duas dimensões foi utilizada e a abordagem direta foi aplicada. Os resultados apresentados dizem respeito elementos de construção civil como casos típicos de pontes térmicas. Algumas propriedades do método de elemento de contorno que dão novas possibilidades foram considerados. Por exemplo, forçar valores selecionados de temperatura nas bordas internas do domínio considerado ou aumento local do resolução do campo de temperatura. As simulações foram realizadas com algoritmo próprio do autor.

Zhou et al. (2011) propõem um novo esquema de variação de parâmetro de forma para funções de base radial (RBF) no âmbito do Método dos Elementos de Contorno. São feitos estudos de comparação com o RBF de formato constante na convergência e estabilidade. Os resultados mostram que, sob o mesmo nível de precisão, o número da condição da matriz de interpolação por nosso esquema cresce muito mais lentamente do que a matriz de interpolação RBF de formato constante com o aumento no número de pontos de interpolação. Como exemplo de aplicação, o método de reciprocidade dual equipado com o novo RBF é combinado com o Método dos Elementos de Contorno para resolver problemas de valor de contorno governados

por equações de Poisson. Os resultados numéricos demonstram ainda mais a robustez e melhor estabilidade do novo RBF. É importante dizer que as funções de base radial (RBFs) são uma ferramenta eficiente na aproximação multivariada, mas geralmente sofrem de uma matriz de interpolação mal condicionada quando os pontos de interpolação são muito densos ou espaçados irregularmente. Os RBFs com parâmetros de forma variável geralmente podem melhorar o número de condição da matriz de interpolação.

Simoes et al. (2012) apresentam uma validação experimental de soluções do método dos elementos de contorno (BEM) 2D para a condução de calor transiente em sistemas contendo heterogeneidades. O problema é formulado no domínio da frequência. As respostas no domínio do tempo são obtidas por meio de uma transformada inversa de Fourier. Frequências complexas com uma pequena parte imaginária são introduzidas. Seu efeito é levado em consideração pelo reescalonamento dos resultados no domínio do tempo. Para fins de validação, as soluções fornecidas pela formulação BEM proposta foram primeiro verificadas em relação às soluções analíticas e depois comparadas com os resultados experimentais. Nos testes de laboratório, uma inclusão de aço foi incorporada em um meio hospedeiro confinado e temperaturas instáveis foram aplicadas ao seu limite. Dois meios hospedeiros foram testados: poliestireno expandido moldado e placa de fibra de média densidade. Os sistemas foram submetidos a fontes de calor planas e pontuais. As propriedades térmicas desses materiais foram previamente definidas experimentalmente. Os resultados mostram que as soluções BEM concordam bem com os resultados experimentais.

Yang et al. (2020) propõem um novo método de equação integral de interface única é estabelecido para resolver problemas não lineares de transferência de calor multimídia com condutividade térmica dependente da temperatura. Inicialmente, a equação integral de domínio de contorno para transferência de calor não linear em meio único é estabelecida com base na solução fundamental da equação de Laplace. Em seguida, com base na característica de variação das propriedades do material, uma nova equação integral única para multimídia não linear de material é estabelecida de acordo com a regra de degeneração de uma integral de domínio para uma integral de interface. A seguir, as equações finais do sistema são resolvidas pelo método iterativo de Newton-Raphson após a discretização. Comparando com o método convencional de elementos de contorno de múltiplos domínios, o método apresentado é mais eficiente em tempo computacional, preparação de dados e codificação de programa. Três exemplos numéricos são dados para demonstrar a correção e robustez do método apresentado no artigo.

2.5 Método dos Elementos de Contorno com Método da reciprocidade dual

Karur e Ramachandran (1994) apresentam a propriedade de convergência de funções de base radial - RBF - para problemas bidimensionais numericamente. O erro de interpolação é quantificado para uma função de teste particular e o comportamento local do RBF é ilustrado. Os RBF são então usados para aproximação em O Método de Reciprocidade Dual (DRM) para

resolver equações não lineares do tipo Poisson e os resultados são comparados com soluções exatas conhecidas. A estreita concordância da solução numérica com a solução exata, para um refinamento uniforme da malha, demonstra as propriedades de convergência do RBF e a precisão de seu uso em DRM. O Método de Reciprocidade Dual (DRM) é uma classe de técnicas de elemento de contorno em que a integral de domínio resultante dos termos não homogêneos em equações do tipo de Poisson é transferida para uma integral de fronteira equivalente usando funções de aproximação adequadas. O uso de funções de base radial (RBF) como funções de aproximação para este propósito apresenta várias vantagens sobre as técnicas convencionais de interpolação.

Schaback (1995) apresenta, para interpolação de dados multivariados espalhados por funções de base radial, uma “relação de incerteza” entre o erro atingível e a condição das matrizes de interpolação. Ele afirma que o erro e o número da condição não podem ser mantidos pequenos. Limites nas constantes de Lebesgue são obtidos como um subproduto. Uma variação da teoria de Narcowich-Ward de limites superiores na norma do inverso da matriz de interpolação é apresentada a fim de lidar com todo o conjunto de funções de base radial que estão atualmente em uso.

Gao et al. (2017) apresentam, neste artigo, uma família de elementos globais (GEs) que é construída para modelar geometrias e representar variáveis físicas, com base em um conjunto de funções de base completas formuladas em termos de coordenadas globais normalizadas. Os principais benefícios do uso de GEs são que os nós elementares podem ser distribuídos e numerados de maneira arbitrária e as derivadas parciais espaciais globais de geometrias e variáveis físicas que aparecem nas equações governantes de problemas de engenharia podem ser derivadas diretamente. Com base nos GEs construídos e seus derivados espaciais de funções de forma global, um novo método numérico simples e robusto, denominado como Método de Elemento livres com base em Elementos Globais (GEFREM), é proposto para resolver problemas gerais bidimensionais de condução de calor. GEFREM herda as vantagens do método dos elementos finitos, método sem malha e método dos elementos livres. Uma descrição detalhada do GEFREM para resolver problemas gerais de condução de calor não lineares e não homogêneos é apresentada no artigo e vários exemplos são fornecidos para verificar a exatidão e demonstrar o potencial do método proposto.

Cheng (2000) obtém, em seu trabalho, soluções particulares de funções de base radial de ordem superior dos tipos cônica e spline para os operadores Laplaciano, do tipo Helmholtz e poliarmônico. Essas soluções específicas são necessárias na implementação do Método dos Elemento de Contorno acoplado com a Reciprocidade Dual.

Conforme se depreende da revisão da literatura acima, os autores desse trabalho desconhecem, nos diversos periódicos pesquisados, a existência de alguma literatura da aplicação do Método dos Elementos de Contorno (BEM) ao problema de estrutura em situação de incêndio especificamente. Há, como se pode ver nos trabalhos acima, literatura relativa à condutividade térmica usando BEM como técnica numérica. Todavia, nos termos tratados nesse trabalho, isto é,

em se tratando de resposta térmica ao incêndio de seções estruturais e não estruturais, os autores não conhecem uma aplicação do BEM até a data da publicação desta dissertação. Isto corrobora o caráter inovador desta pesquisa.

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Neste capítulo, apresenta-se brevemente a equação diferencial que rege o fenômeno físico analisado neste trabalho - difusividade térmica - bem como aspectos ligados às suas condições de contorno e à sua não linearidade. Além disso, discorre-se sobre o desenvolvimento básico e necessário do Método dos Elementos de Contorno, doravante designado BEM - do inglês *Boundary Element Method*, bem como sobre as ferramentas que lhe são conexas e imprescindíveis à sua desenvolvimento, para resolução da equação do problema.

3.1 Equação do problema

Considere-se um campo de temperatura transiente $u(x, t)$ num meio isotrópico de domínio bidimensional Ω , com contorno $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q \cup \Gamma_h$, sem fonte interna de calor e cuja representação é exibida na Figura 3. Para este caso, a equação que governa a condução de calor é

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho c \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.1)$$

com a condição inicial

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (3.2)$$

e com condições de contorno

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t), x \in \Gamma_u \quad (3.3)$$

$$q(x, t) = \bar{q}(x, t), x \in \Gamma_q \quad (3.4)$$

$$q(x, t) = h(u - u_\infty) + \sigma \epsilon (u^4 - u_\infty^4), x \in \Gamma_h \quad (3.5)$$

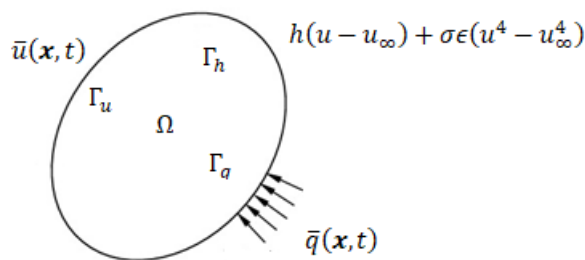
em que x é o vetor de posição; o parâmetro t denota o tempo; K é a condutividade térmica do material; c é designado calor específico; ρ é a massa específica do material; $q(x, t)$ é o fluxo de calor definido como $q(x, t) = -K \frac{\partial u}{\partial n}$ em que n é o vetor normal ao contorno Γ para fora do domínio Ω ; $u_0(x)$ representa a distribuição inicial de temperatura; $\bar{u}(x, t)$ e $\bar{q}(x, t)$ são respectivamente a temperatura e fluxo prescritos. O parâmetro h é o coeficiente de transferência de calor por convecção; σ é a constante de Stefan-Boltzmann e ϵ é o fator radiativo entre a superfície e o exterior a uma temperatura u_∞ .

Assumindo-se que K , ρ e c são todos dependentes da temperatura, a Equação (3.1) é notoriamente não linear, porquanto assume a forma

$$K \nabla^2 u - \rho c \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{dK}{du} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.6)$$

em que os termos não lineares aparecem explicitamente no lado direito. Além disso, outra não linearidade advém da condição de contorno por radiação da Equação (3.5). O intuito deste trabalho é resolver a equação (3.1) com as ditas não linearidades e com aplicação prática aos casos mencionados na introdução.

Figura 3 – Configuração do domínio.



Fonte: Autor, 2021.

3.2 Modelos Matemáticos

O modelo matemático de qualquer sistema físico se constitui normalmente em uma equação diferencial ou um sistema de equações diferenciais que regem o comportamento de cada parte infinitesimal deste sistema. Uma vez descrito o sistema neste conjunto de equações, passa-se ao trabalho de obtenção de sua solução dentro de domínio físico específico, que pode, por sua vez, não só se apresentar de qualquer forma geométrica, desde formas simples a mais complexas, como também ser formado por materiais distintos com propriedades complexas. Estas complicações - que só não se fazem presente em casos ideais, apresentando-se em qualquer aplicação prática - dificultam muito a obtenção de soluções analíticas, fazendo-se necessária a utilização de métodos numéricos, que se mostram como opções viáveis e apresentam em geral soluções precisas e acuradas. Dentre tais métodos, pode-se citar o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos Finitos, o Método dos Volumes Finitos e o Método dos Elementos de Contorno (BEM).

3.3 Métodos Numéricos

Um dos primeiros métodos numéricos desenvolvidos foi o Método das Diferenças Finitas, aplicado até hoje a um extenso número de problemas. Neste método, usa-se uma malha sobre todo o domínio físico do problema, que contém pontos em que são efetuadas as aproximações para as derivadas envolvidas, mediante a aplicação da série de Taylor. Assim, expressa-se a equação algébrica resultante de tal aproximação em termos dos valores da função incógnita em alguns pontos específicos da malha utilizada, os chamados pontos nodais. Em geral, o aludido esquema se mostra suficientemente robusto para representar adequadamente a equação diferencial de governo, sobretudo em caso unidimensionais. A principal dificuldade do Método das Diferenças Finitas consiste em sua aplicação a problemas cujo domínio é constituído de formas geométricas intrincadas. Além disso, tal método contém outra dificuldade, qual seja, a aplicação das condições de contorno, que, não raras vezes, necessita da criação de pontos nodais fictícios, que são externos ao domínio da equação diferencial. A principal vantagem de tal método

é seu esquema ser relativamente econômico para a montagem do sistema de equações, devido fundamentalmente a simplicidade das operações envolvidas. Por isso mesmo, ainda se encontra sua aplicação, principalmente em Mecânica dos Flúidos.

O desenvolvimento do Método dos Volumes Finitos foi baseado em esquemas do tipo diferença finitas. Em tal método (Método dos Volumes Finitos), discretiza-se o domínio físico por intermédio de uma série de volumes elementares, os denominados volumes finitos. Ao longo desses volumes, impõe-se a continuidade das incógnitas do problema. Ademais, utiliza-se uma equação extra, oriunda da imposição do princípio da conservação do fluxo nos volumes elementares. Devido a isso, este método possui uma grande precisão dos resultados em relação ao Método das Diferenças Finitas.

O método numérico mais amplamente utilizado é, sem dúvidas, o Método dos Elementos Finitos, doravante designado FEM - do inglês *Finite Element Method*. E disto deriva uma das motivações deste trabalho: utilização de uma formulação alternativa para o problema térmico no âmbito da segurança contra incêndio. Neste método, o domínio da equação diferencial é dividido em elementos, os chamados elementos finitos, cuja geometria independe da equação diferencial; sobre tais elementos finitos se estabelece a variação da incógnita do problema mediante as denominadas funções de forma. Em seguida, estabelece-se um sentença de Resíduos Ponderados, a fim de proporcionar uma distribuição do erro na aproximação. O FEM foi inicialmente desenvolvido para aplicação à Mecânica dos Sólidos. Todavia, atualmente se mostra difundido em diversas áreas da ciência. O objetivo precípua da concepção deste método foi representar adequadamente geometrias complexas, de modo a simplificar a introdução das condições de contorno, eliminando algumas dificuldades do Método das Diferenças Finitas. Pode-se citar como desvantagens do FEM a grande quantidade de dados para a discretização - fato que se potencializa sobremaneira em problemas tridimensionais - e a dificuldade com problemas descontínuos ou com alta taxa de variação e com domínios infinitos.

O Método dos Elementos de Contorno (BEM), a princípio, foi desenvolvido em resposta às dificuldades aludidas acima. Tal método se processa apenas com a discretização do contorno do domínio físico, reduzindo enormemente a quantidade de dados necessários à modelagem. A ideia básica consiste na utilização das Equações Integrais, a fim de transformar a equação diferencial associada ao fenômeno em uma expressão integral, de acordo com Bulcao (1999).

Ato contínuo, essa expressão integral é discretizada, valendo-se de diversos elementos dispostos sobre o contorno do domínio do problema. Por isso, a denominação Método dos Elementos de Contorno. Tais elementos são formados por um conjunto de pontos nodais. A seguir as equação são expressas através de um sistema de equações algébricas, formado pelos denominados coeficientes de influência, que computam a influência de uma ação de domínio concentrada em determinado ponto sobre os pontos nodais de um determinado elemento de contorno.

3.4 Soluções fundamentais

3.4.1 Solução fundamental para o pontencial

Segundo Brebbia e Dominguez (1992), a solução fundamental constitui a base da formulação do BEM. Tal solução representa a resposta do pontencial em um meio infinito quando a fonte se encontra concentrada em um ponto específico. Ainda segundo o aludido autor, trata-se da solução particular da equação de Poisson quando o termo fonte é a função Delta de Dirac, conforme se segue.

$$\nabla^2 u^* = -\delta(x - x_d) \quad (3.7)$$

em que x_d é a localização do ponto fonte; x é um ponto qualquer no domínio infinito (ponto campo); δ representa a função Delta de Dirac e u^* é a solução fundamental. Uma solução possível para a Equação 3.7 pode ser expressa como se segue.

$$u^* = c \ln r \quad (3.8)$$

em que c é uma constante qualquer e r representa a distância entre o ponto fonte e o ponto campo. Considerando um domínio bidimensional, caso em que se apoia este presente trabalho, tem-se que a coordenada do ponto fonte, levando-se em conta um base ortonormal do plano, pode ser dada como $x_d = (x_d, y_d)$, ao passo que a coordenada do ponto campo, no mesmo referencial, é $x = (x, y)$, de modo que

$$r = \sqrt{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2}. \quad (3.9)$$

Depreende-se, a partir das Equações 3.8 e 3.9, que

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} = c \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = c \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x}. \quad (3.10)$$

Além disso, a partir da Equação 3.9, é possível escrever

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2}} (2(x - x_d)) = \frac{(x - x_d)}{r}. \quad (3.11)$$

Portanto,

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} = c \frac{1}{r} \frac{(x - x_d)}{r} = c \frac{(x - x_d)}{r^2}. \quad (3.12)$$

Derivando novamente a Equação 3.12 em relação a x , obtém-se

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} = c \left[\frac{1}{r^2} - \frac{2(x - x_d)^2}{r^4} \right]. \quad (3.13)$$

Analogamente para a variável y , tem-se

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} = c \left[\frac{1}{r^2} - \frac{2(y - y_d)^2}{r^4} \right]. \quad (3.14)$$

Isto posto, o laplaciano de u^* é por óbvio

$$\nabla^2 u^* = \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} = 2c \left[\frac{1}{r^2} - \frac{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2}{r^4} \right] = 2c\delta(x - x_d). \quad (3.15)$$

Igualando as Equações 3.15 e 3.7, pode-se calcular a constante c da forma como se segue.

$$-\delta(x - x_d) = 2c\delta(x - x_d). \quad (3.16)$$

Portanto, obtém-se

$$c = -\frac{1}{2}. \quad (3.17)$$

Consectariamente, a solução fundamental para o pontencial u^* é expressa da forma subsecutiva.

$$u^* = -\frac{1}{2} \ln r. \quad (3.18)$$

Todavia, Brebbia e Dominguez (1992) apresentam em sua obra

$$u^* = -\frac{1}{2\pi} \ln r, \quad (3.19)$$

com a qual se obtém um fluxo unitário através da fonte e a qual constitui a solução fundamental do potencial utilizada neste trabalho.

3.4.2 Solução fundamental para a derivada normal ao contorno

No problema térmico, notadamente na condução de calor, o fluxo de calor que atravessa o domínio é proporcional à derivada do pontencial em relação à normal ao contorno, o qual neste caso seria o próprio campo de temperatura. Considera-se portanto que a supracitada derivada é designada por

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}, \quad (3.20)$$

em que n representa o vetor normal ao contorno que aponta para fora do domínio.

Assim, derivando a Equação 3.19 em relação a n , conforme preconiza a Equação 3.20, obtém-se

$$q^* = \frac{\partial}{\partial n} \left(-\frac{1}{2\pi} \ln r \right) = -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial(\ln r)}{\partial x} n_x + \frac{\partial(\ln r)}{\partial y} n_y \right] \quad (3.21)$$

em que n_x e n_y representam respectivamente as componentes do vetor uniário n .

Ao analisar a Equação 3.21, depreende-se que

$$\frac{\partial(\ln r)}{\partial x} = \frac{\partial(\ln r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}. \quad (3.22)$$

Além disso, ao utilizar a Equação 3.11, tem-se a seguinte expressão

$$\frac{\partial(\ln r)}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{(x - x_d)}{r} = \frac{x - x_d}{r^2}. \quad (3.23)$$

À semelhança da direção x , obtém-se para a direção y

$$\frac{\partial(\ln r)}{\partial y} = \frac{y - y_d}{r^2}. \quad (3.24)$$

Ao substituir as Equações 3.23 e 3.24 na Equação 3.21, obtém-se a subsecutiva equação para a derivada da solução fundamental.

$$q^* = -\frac{1}{2\pi r^2} [(x - x_d)n_x + (y - y_d)n_y] \quad (3.25)$$

3.5 A equação integral de contorno

Segundo Brebbia e Dominguez (1992), para obter a equação integral de contorno característica do BEM, pode-se utilizar, dentre outros, o método dos resíduos ponderados. Suas principais vantagens são a generalidade e extensão para diferentes tipos de equação. Tal método (método dos resíduos ponderados) se resume fundamentalmente na multiplicação da equação diferencial governante do problema por um função peso arbitrária ω . Integra-se a expressão obtida em todo o domínio de análise e iguala-se tal integral a zero. Este procedimento é mostrado na equação abaixo, Equação 3.26, para o caso especial da equação de Laplace, caso especial da equações trabalhadas neste trabalho e base para formulação de todas elas.

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) \omega \, d\Omega = 0 \quad (3.26)$$

Desenvolvendo o operador laplaciano em termos das derivadas cartesianas, obtém-se

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \omega \, d\Omega = 0. \quad (3.27)$$

E separando em duas integrais, tem-se

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \omega \, d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \omega \, d\Omega = 0. \quad (3.28)$$

Para transformar essas integrais de domínio constantes na Equação ?? em integrais de contorno - essência do Método dos Elementos de Contorno -, é necessário valer-se do Teorema de Gauss-Green, cujo teor é descrito na equação abaixo, Equação ??

$$\int_{\Gamma} f(x, y) n_x \, d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} \, d\Omega \quad (3.29)$$

em que f é uma função arbitrária.

Faz-se primeiramente a análise para a primeira integral da Equação 3.28, que diz respeito a direção x . E, de pronto, já se diz que o caso para a direção y é inteiramente análogo. Ao escrever a expressão

$$f(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \omega \quad (3.30)$$

e ao substituí-la na Equação 3.30, obtém-se

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} \omega n_x \, d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \omega \right) \, d\Omega. \quad (3.31)$$

Desenvolvendo a diferenciação do lado direito da Equação 3.31, tem-se que

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} \omega n_x \, d\Gamma = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \omega + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \, d\Omega, \quad (3.32)$$

ou ainda

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} \omega n_x \, d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \omega \, d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} \, d\Omega. \quad (3.33)$$

Rearranjando a Equação 3.33, obtém-se

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \omega \, d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} \omega n_x \, d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} \, d\Omega. \quad (3.34)$$

Ao observar a última integral do lado direito da Equação 3.34, depreende-se que se trata ainda de uma integral de domínio remanescente, de tal forma que necessário se faz transformá-la numa integral de contorno. Para tanto, utiliza-se novamente o Teorema de Gauss-Green, tomando a seguinte igualdade

$$f = u \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad (3.35)$$

de modo que se obtém

$$\int_{\Gamma} u \frac{\partial \omega}{\partial x} n_x \, d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \, d\Omega. \quad (3.36)$$

Efetando a diferenciação do lado direito da Equação 3.36, tem-se que

$$\int_{\Gamma} u \frac{\partial \omega}{\partial x} n_x \, d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} \, d\Omega + \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \, d\Omega. \quad (3.37)$$

Reorganizando a Equação 3.37

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} \, d\Omega = \int_{\Gamma} u \frac{\partial \omega}{\partial x} n_x \, d\Gamma - \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \, d\Omega. \quad (3.38)$$

Portanto, pode-se escrever a primeira integral da Equação 3.28, substituindo a Equação 3.38 na Equação 3.34, da seguinte forma

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \omega \, d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} \omega n_x \, d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial \omega}{\partial x} n_x \, d\Gamma + \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \, d\Omega. \quad (3.39)$$

De maneira totalmente análoga, pode-se escrever a segunda integral da Equação 3.28 da seguinte forma

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \omega \, d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} \omega n_y \, d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial \omega}{\partial y} n_y \, d\Gamma + \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \, d\Omega. \quad (3.40)$$

Ao substituir as Equações 3.39 e 3.40 na Equação 3.28, obtém-se

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) \omega \, d\Gamma - \int_{\Gamma} u \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} n_x + \frac{\partial \omega}{\partial y} n_y \right) \, d\Gamma + \int_{\Omega} u \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \, d\Omega = 0. \quad (3.41)$$

Esta equação (Equação 3.41) pode ser ainda reescrita de forma compacta como se segue

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \omega \, d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial \omega}{\partial n} \, d\Gamma + \int_{\Omega} u \nabla^2 \omega \, d\Omega = 0. \quad (3.42)$$

Ao analisar a Equação 3.42, depreende-se que a próxima etapa é, por óbvio, eliminar a última integral de domínio que ainda remanesce na expressão, qual seja, a última integral do lado direito da Equação 3.42, de modo a se obter uma equação inteiramente de contorno. Para

tanto, faz-se necessária uma escolha apropriada da função peso ω . Esta escolha é levada a cabo fazendo-se ω igual àquela função cujo laplaciano anule de alguma maneira a integral de domínio; tal função é precisamente a solução fundamental do potencial, isto é, $\omega = u^*$. Isto constitui uma das principais idiossincrasias do BEM: função de ponderação igual à solução fundamental. Uma vez que o laplaciano da solução fundamental do potencial é a função Delta de Dirac, tem-se que o mesmo será igual a zero em todo o domínio, exceto no ponto fonte.

Portanto, a Equação 3.42 assume a forma

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} u \nabla^2 u^* d\Omega = 0. \quad (3.43)$$

Neste sentido, deve-se substituir o laplaciano pela função Delta de Dirac; e ao fazê-lo, obtém-se

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega} u \delta(x - x_d) d\Omega = 0. \quad (3.44)$$

Valendo-se das propriedades da função Delta de Dirac, é possível escrever

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma - u(x_d, y_d) = 0. \quad (3.45)$$

Ao se isolar explicitamente $u(x_d, y_d)$, obtém-se

$$u(x_d, y_d) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma. \quad (3.46)$$

Assumindo a notação de $q = \frac{\partial u}{\partial n}$ e $q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$ para as derivadas normais ao contorno do potencial e da solução fundamental respectivamente, pode-se escrever

$$u(x_d, y_d) = \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma - \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma. \quad (3.47)$$

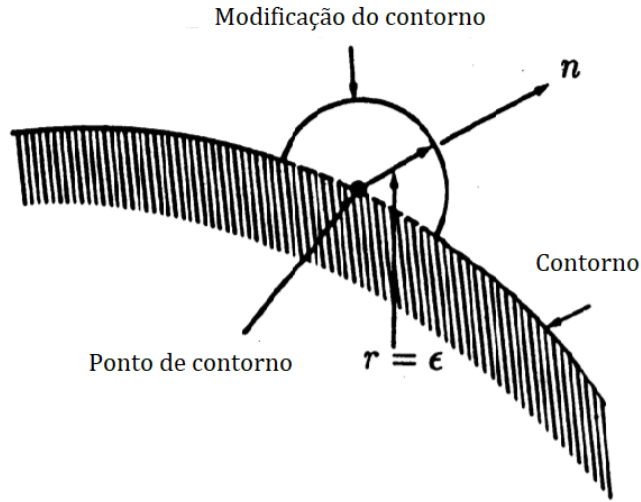
Esta equação de contorno é válida apenas para os pontos fontes localizados no interior do domínio. Para analisar o caso em que o ponto fonte está localizado na fronteira do domínio, isto é, no contorno do domínio, é necessário uma pequena alteração na Equação 3.47. Considere, para tanto, a figura abaixo.

A partir da Figura 4, é possível depreender que o contorno alterado possui um arco de circunferência (designado S' para efeito de análise) sobre o ponto fonte; igualmente se depreende que o contorno original (designado S para efeito de análise) não contém tal arco de circunferência.

Seja considerado que S' é um arco de circunferência cujo raio é ϵ . Portanto, em qualquer ponto de S' , a distância r , que é a distância entre o ponto fonte e o ponto campo, é sempre o próprio ϵ . Tomando o limite quando ϵ tende a zero, isto é, $\epsilon \rightarrow 0$, tem-se que o ponto fonte se localiza no contorno. Para fazê-lo, é preciso separar as integrais da Equação 3.47 em duas partes, quais sejam, S e $(S - S')$, conforme se segue.

$$u(x_d, y_d) = \int_{S'} u^* q dS + \int_{S-S'} u^* q dS - \int_{S'} u q^* dS - \int_{(S-S')} u q^* dS. \quad (3.48)$$

Figura 4 – Modificação do contorno.



Fonte: PARTRIDGE; BREBBIA; WROBEL, (1992)

Ao analisar a terceira integral da Equação acima, Equação 3.48 e ao substituir a Equação 3.25, tem-se

$$\int_{S'} u q^* dS = \int_{S'} u \frac{1}{2\pi r^2} [(x - x_d)n_x + (y - y_d)n_y] dS. \quad (3.49)$$

Ao analisar novamente a Equação 3.9, tem-se

$$r = \sqrt{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2}. \quad (3.50)$$

Escrevendo r vetorialmente, obtém-se

$$\vec{r} = (x - x_d)\vec{i} + (y - y_d)\vec{j} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j}. \quad (3.51)$$

Escrevendo o vetor $\vec{r}$ de forma unitária, tem-se

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{r_x\vec{i} + r_y\vec{j}}{r}, \quad (3.52)$$

em que

$$n_x = \frac{r_x}{r} \quad ; \quad n_y = \frac{r_y}{r}. \quad (3.53)$$

Portanto, com as Equações 3.50, 3.51 e 3.52, pode-se escrever a Equação 3.49 da seguinte forma

$$\int_{S'} u q^* dS = \int_{S'} u \frac{1}{2\pi r^2} [r_x n_x + r_y n_y] dS. \quad (3.54)$$

ou ainda

$$\int_{S'} u q^* dS = \int_{S'} u \frac{1}{2\pi r^2} \left[r_x \frac{r_x}{r} + r_y \frac{r_y}{r} \right] dS. \quad (3.55)$$

Uma vez que em todo o domínio S' $r = \epsilon$ e $dS = r d\theta$, tem-se

$$\int_{S'} u q^* dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} u \frac{1}{2\pi\epsilon^2} \left[\frac{r_x^2 + r_y^2}{\epsilon} \right] \epsilon d\theta. \quad (3.56)$$

Da Equação acima (Equação 3.56), obtém-se a Equação abaixo, porquanto $r_x^2 + r_y^2 = \epsilon^2$.

$$\int_{S'} u q^* dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} u \frac{1}{2\pi\epsilon^2} \left[\frac{\epsilon^2}{\epsilon} \right] \epsilon d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{u}{2\pi} d\theta = \frac{u}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1). \quad (3.57)$$

Por conseguinte, fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, tem-se

$$\int_{S'} u q^* dS = u(x_d, y_d) \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi}. \quad (3.58)$$

Agora, deve-se analisar a primeira integral da Equação 3.48. Ao fazê-lo, é possível escrever

$$\int_{S'} u^* q dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} q \left[-\frac{1}{2\pi} \ln r \right] dS. \quad (3.59)$$

Ao fazer $r = \epsilon$ e $dS = \epsilon d\theta$, obtém-se

$$\int_{S'} u^* q dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} q \left[-\frac{1}{2\pi} \ln \epsilon \right] \epsilon d\theta. \quad (3.60)$$

Como ϵ é o raio do arco de circunferência, não varia do domínio de integração S' , isto é, é constante, pode-se escrever

$$\int_{S'} u^* q dS = -\frac{q}{2\pi} \epsilon \ln \epsilon \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta, \quad (3.61)$$

ou ainda

$$\int_{S'} u^* q dS = -\frac{q}{2\pi} \epsilon \ln \epsilon (\theta_2 - \theta_1). \quad (3.62)$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, obtém-se

$$\int_{S'} u^* q dS = -\frac{q}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \ln \epsilon = 0. \quad (3.63)$$

Portanto, tem-se

$$\int_{S'} u^* q dS = 0. \quad (3.64)$$

Ao substituir as Equações 3.58 e 3.64 na Equação 3.48, obtém-se

$$u(x_d, y_d) = u(x_d, y_d) \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} - \int_{(S-S')} u^* q dS + \int_{(S-S')} u q^* dS. \quad (3.65)$$

Considerando que quando $\epsilon \rightarrow 0$ tem-se que $(S - S') \rightarrow S$, é possível escrever então

$$u(x_d, y_d) = u(x_d, y_d) \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} - \int_S u^* q dS + \int_S u q^* dS. \quad (3.66)$$

É possível ainda reorganizar a Equação 3.66 da seguinte forma

$$u(x_d, y_d) - u(x_d, y_d) \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} = - \int_S u^* q dS + \int_S u q^* dS, \quad (3.67)$$

ou ainda

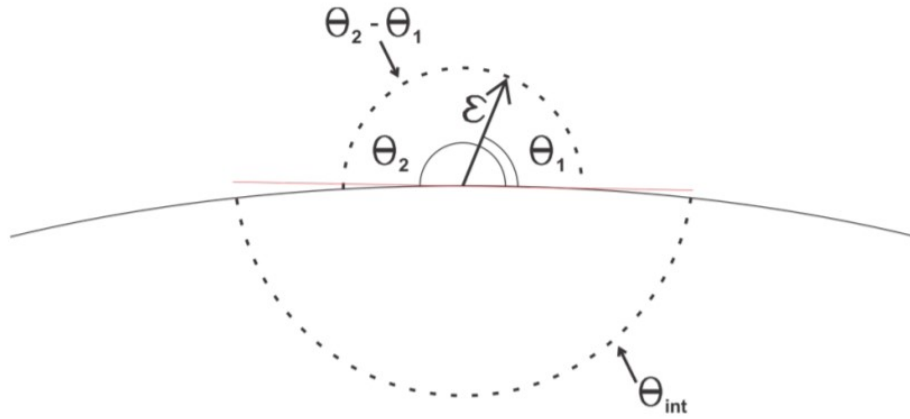
$$u(x_d, y_d) \left[1 - \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} \right] = \int_S u q^* dS - \int_S u^* q dS, \quad (3.68)$$

ou ainda

$$u(x_d, y_d) \left[\frac{2\pi - (\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} \right] = \int_S u q^* dS - \int_S u^* q dS, \quad (3.69)$$

A expressão $\pi - (\theta_2 - \theta_1)$ corresponde ao ângulo interno do contorno no ponto fonte, conforme Figura 5.

Figura 5 – Ângulo interno.



Fonte: Autor, 2021.

Dessa maneira, pode-se escrever a Equação 3.69 da maneira como se segue.

$$u(x_d, y_d) \frac{\theta_{int}}{2\pi} = \int_S u q^* dS - \int_S u^* q dS. \quad (3.70)$$

Tal Equação (Equação 3.70) é a equação integral de contorno válida quando o ponto fonte está localizado no contorno do domínio. Se o ponto fonte estiver localizado no exterior do domínio, isto é, para fora do contorno, tem-se que $u(x_d, y_d) = 0$, porquanto a Função Delta de Dirac é igualmente igual a zero; e pode-se escrever

$$\int_S u q^* dS - \int_S u^* q dS = 0. \quad (3.71)$$

Resumidamente, com base em tudo que já foi exposto, pode-se escrever a seguinte equação.

$$c u(x_d, y_d) = \int_S u q^* dS - \int_S u^* q dS, \quad (3.72)$$

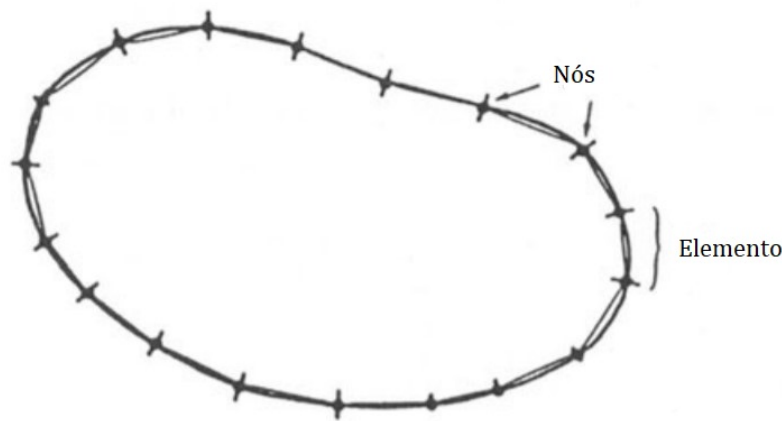
em que c é uma variável cujo valor depende da localização do ponto fonte: se no interior do domínio ($c = 1$), se no próprio contorno ($c = \frac{\theta_{int}}{2\pi}$) ou se no exterior do domínio ($c = 0$). Para um contorno suave, evidentemente $c = \frac{1}{2}$, segundo Brebbia e Dominguez (1992).

3.6 Discretização da equações

A formulação do BEM consiste evidentemente na discretização do contorno analisado. Portanto, conforme a Equação 3.73 e a Figura 6, o contorno Γ é descrito como a soma de n pedaços Γ_i , em que é dividido.

$$\Gamma = \sum_{i=1}^n \Gamma_i \quad (3.73)$$

Figura 6 – Discretização do contorno.



Fonte: PARTRIDGE; BREBBIA; WROBEL, (1992)

Da discretização do contorno resulta naturalmente a discretização da Equação 3.72. Dessa maneira, cada integral dessa equação se tranforma em n integrais definidas sobre cada um dos n elementos de contorno mostrado na Figura 6. A Equação 3.72 discretizada é escrita da forma que se segue.

$$c u(x_d, y_d) = \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma_j \right) - \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Gamma_j} u^* q d\Gamma_j \right) \quad (3.74)$$

A discretização do contorno gera n pedaços do contorno que precisam, ainda, ser representados matematicamente. Estes pedaços do contorno podem ter uma forma qualquer, fato que leva à necessidade de serem aproximados por uma forma conhecida, como, segmentos de reta, polinômios de primeira ordem, polinômios de segunda ordem, etc. Quanto mais alto for o grau do polinômio utilizado, mais fiel será a representação que esta forma conhecida fará do pedaço do contorno. Estas formas conhecidas são chamadas de elementos de contorno. A soma de todos os elementos de contorno será, então, uma aproximação do contorno real. Quanto maior for a

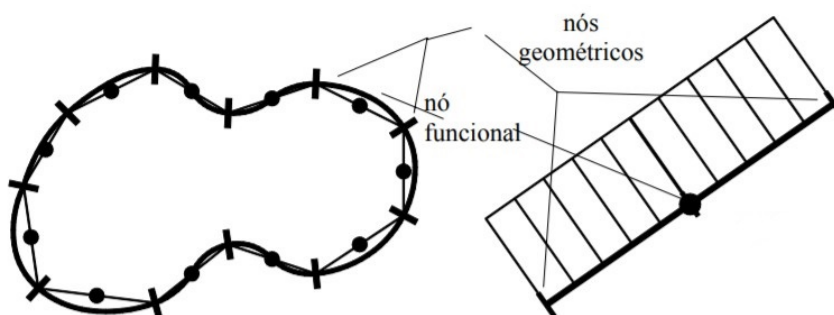
discretização, ou seja, quanto maior for o número n de pedaços em que o contorno foi dividido, melhor será a aproximação feita por meio dos elementos de contorno.

3.7 Tipos de Elemento

3.7.1 Elemento de contorno constante

Segundo Bulcao (1999), este é o tipo mais simples de elemento de contorno existente. Para um determinado elemento de contorno não é admitida nenhuma alteração nos valores das variáveis físicas do problema ao longo de seu comprimento, estas são tomadas como sendo constantes. No Método dos Elementos de Contorno aplicado a problemas de campo escalar, a utilização de elementos de contorno constante alcança uma precisão bastante satisfatória, em termos de Engenharia, apesar de sua simplicidade.

Figura 7 – Elemento de contorno constante.



Fonte: BULCAO, (1999)

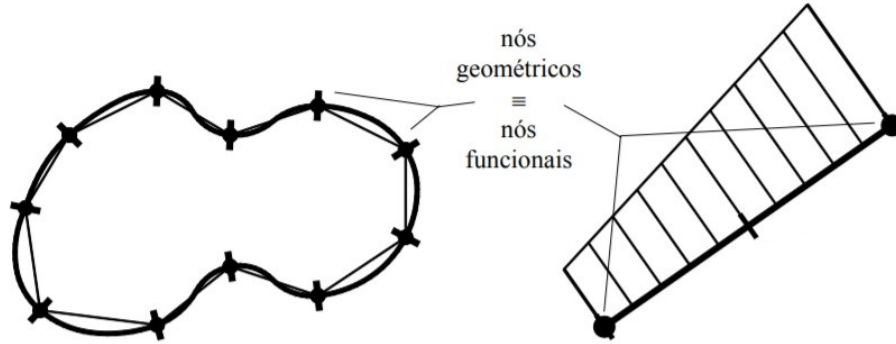
Na Figura 7, observam-se as posições dos nós funcionais, em que se calcula o valor o potencial, e geométricos, que definem a geometria do contorno, para um determinado elemento de contorno constante, bem como um exemplo da discretização de um contorno usando tal elemento.

3.7.2 Elemento de contorno linear

Neste tipo de elemento de contorno, tanto a geometria quanto as variáveis do problema utilizam funções de interpolação polinomiais lineares; portanto, tem-se uma coincidência entre os nós geométricos e funcionais.

Na Figura 9, podem ser observadas as posições dos nós funcionais e geométricos para um determinado elemento de contorno linear, bem como um exemplo da discretização de um contorno usando tal elemento. Tal elemento foi utilizado no presente trabalho.

Figura 8 – Elemento de contorno linear.



Fonte: BULCAO, (1999)

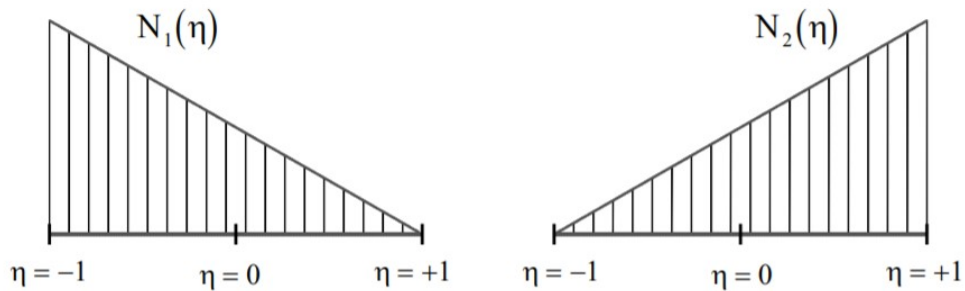
3.8 Sistema de equações e esquema discretizado

No caso de interpolação linear, a função que se deseja aproximar pode variar linearmente ao longo do sistema de coordenadas naturais - em que as coordenadas geométricas que representam o elemento são normalizadas -, sendo que os valores extremos da função de interpolação são mapeados nos pontos com coordenadas naturais $\eta = 1$ e $\eta = -1$ respectivamente. As equações são as que se segue.

$$N_1(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta) \quad (3.75)$$

$$N_2(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta) \quad (3.76)$$

Figura 9 – Funções de interpolação Linear.



Fonte: Autor, (2021)

A função potencial do problema deve ser expressa em termos das funções de interpolação e dos valores nodais, de modo a ensinar a introdução da condições de contorno. Portanto, segue que

$$u_j = (N_1 u_1 + N_2 u_2)_j \quad (3.77)$$

$$q_j = (N_1 q_1 + N_2 q_2)_j \quad (3.78)$$

em que j indica o elemento de contorno em análise, o qual varia de $j = 1, 2, \dots, n$, sendo n o número de elementos.

Neste tipo de elemento, uma vez que os nós estão na extremidade do elemento, nem sempre o ponto fonte estará em uma parte suave do contorno. Desse modo, a constante c da Equação 3.74 nem sempre irá assumir o valor $c = \frac{1}{2}$, devendo ser calculada para cada posição do ponto fonte (nos casos em que o mesmo estiver localizado sobre o contorno).

Portanto, a Equação 3.74 pode ser finalmente expressa como se segue

$$c u^i(x_d, y_d) = \sum_{j=1}^n \left(\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_j \right) - \sum_{j=1}^n \left(\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_j \right) \quad (3.79)$$

em que h_1 , h_2 , g_1 e g_2 são expressos respectivamente por

$$h_1 = \int_j N_1 q^* d\Gamma_j \quad (3.80)$$

$$h_2 = \int_j N_2 q^* d\Gamma_j \quad (3.81)$$

$$g_1 = \int_j N_1 u^* d\Gamma_j \quad (3.82)$$

$$g_2 = \int_j N_2 u^* d\Gamma_j \quad (3.83)$$

A Equação 3.79 constitui a equação integral de contorno discretizada em elementos lineares. É possível organizá-la da seguinte forma

$$-c u^i(x_d, y_d) + \sum_{j=1}^n \left(\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_j \right). \quad (3.84)$$

Fazendo

$$H_{ij} = \begin{cases} \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}_j & i \neq j \\ -c + \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}_j & i = j \end{cases} \quad (3.85)$$

e

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix}_j, \quad (3.86)$$

tem-se que a Equação 3.79 pode ser escrita da seguinte forma

$$\sum_{j=1}^n \left(H_{ij} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(G_{ij} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_j \right). \quad (3.87)$$

Alternativamente e de forma mais compacta, pode-se escrever

$$Hu = Gq \quad (3.88)$$

em que u representa um vetor contendo os valores do potencial para todos os pontos nodais funcionais utilizados na discretização do domínio físico do problema; q representa um vetor contendo os valores da derivada do potencial na direção ao contorno para os pontos nodais funcionais utilizados na discretização do domínio físico do problema; G é uma matriz contendo os denominados coeficientes de influência g_{ij} ; H é uma matriz contendo os denominados coeficientes de influência h_{ij}

Os termos H_{ij} e G_{ij} acumulam as contribuições de h_{ij} e g_{ij} respectivamente dos elementos de contorno i que contém o nó j . Os pontos nodais extremos dos elementos de contorno recebem contribuições vindas dos dois elementos que chegam a estes pontos nodais.

3.9 Condições de contorno

O sistema linear de equações algébricas resultante BEM possui N equações, sendo N o número de pontos nodais e $2N$ valores nodais, expressos pelos vetores u e q , representando os valores do potencial e sua derivada na direção ao vetor normal ao contorno respectivamente. Na resolução de um determinado problema qualquer, impõem-se N condições de contorno, sendo uma condição associada a cada ponto nodal. Assim, diminui-se o número de incógnitas para N , permitindo a reordenação do sistema de equações de tal forma que se chega à seguinte equação

$$Ax = b \quad (3.89)$$

em que x é um vetor cujos elementos constituem as incógnitas do problema, A é uma matriz cujas colunas são concernentes às incógnitas e r representa um vetor cujos valores são obtidos mediante os valores prescritos e as colunas matriciais a eles relacionadas.

Inicialmente, para se demonstrar o procedimento de reordenação das matrizes H e G da Equação 3.88, considera-se um problema em que se prescrevem exclusivamente condições de contorno essenciais e naturais. Sendo assim, a Equação 3.88 pode ser representada em termos de sub-matrizes de acordo com a seguinte equação

$$\begin{bmatrix} H_{\bar{u}\bar{u}} & H_{\bar{u}u} \\ H_{u\bar{u}} & H_{uu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{\bar{q}\bar{q}} & G_{\bar{q}q} \\ G_{q\bar{q}} & G_{qq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q} \\ q \end{Bmatrix}. \quad (3.90)$$

Rearrajando-a é possível escrever

$$\begin{bmatrix} -G_{q\bar{q}} & H_{u\bar{u}} \\ -G_{u\bar{u}} & G_{u\bar{u}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_{u\bar{q}} & G_{q\bar{q}} \\ -H_{u\bar{u}} & G_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{q} \end{Bmatrix}, \quad (3.91)$$

isto é,

$$Ax = b. \quad (3.92)$$

Para finalizar, analisa-se o caso em que condições de contorno puramente convectivas são impostas, isto é, condições de contorno do tipo constante na Equação 3.5 sem a parte relativa à radiação. Tem-se que de modo geral tal condição pode ser escrita como $\bar{q} = h(u - u_\infty)$. Assim, o rearranjo matricial é obtido da seguinte forma

$$Hu = G[h(u - u_\infty)], \quad (3.93)$$

ou ainda

$$[H - hG]u = -hGu_\infty, \quad (3.94)$$

o que constitui um sistema da forma da Equação 3.92.

3.10 Cálculo do potencial e sua derivada direcional nos pontos internos ao domínio

Em geral, o cálculo das incógnitas para os pontos internos é feito após a resolução do sistema de equações, isto é, no momento chamado de pós-processamento, mediante a reaplicação da equação integral do Método dos Elementos de Contorno, valendo-se dos valores obtidos para as variáveis no contorno.

Inicialmente, para o cálculo do potencial nos pontos internos, considera-se a equação integral discretizada do Método dos Elementos de Contorno. Empregando-se elementos de contorno lineares para a discretização do domínio e considerando que o ponto fonte coincide com o ponto interno, portanto o valor da constante c é unitário, obtém-se

$$u^i(x_d, y_d) = \sum_{j=1}^n \left(\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_j \right) - \sum_{j=1}^n \left(\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_j \right). \quad (3.95)$$

É importante dizer que nesta etapa do processo os valores de todos os potenciais e sua derivada no contorno já são conhecidos, uma vez que o sistema de equação já foi resolvido anteriormente. A Equação 3.95 pode ser escrita de forma matricial da seguinte forma.

$$u(x_d, y_d) = UH - QG. \quad (3.96)$$

Para calcular os valores das derivadas direcionais do pontencial, isto é, os fluxos nas direções dos eixos coordenados, é necessário aplicar a uma derivada direcional na Equação 3.95. Ao fazê-lo, é obtida a seguinte expressão.

$$q_{x_i}^i(x_d, y_d) = \frac{u^i(x_d, y_d)}{\partial x_i}, \quad (3.97)$$

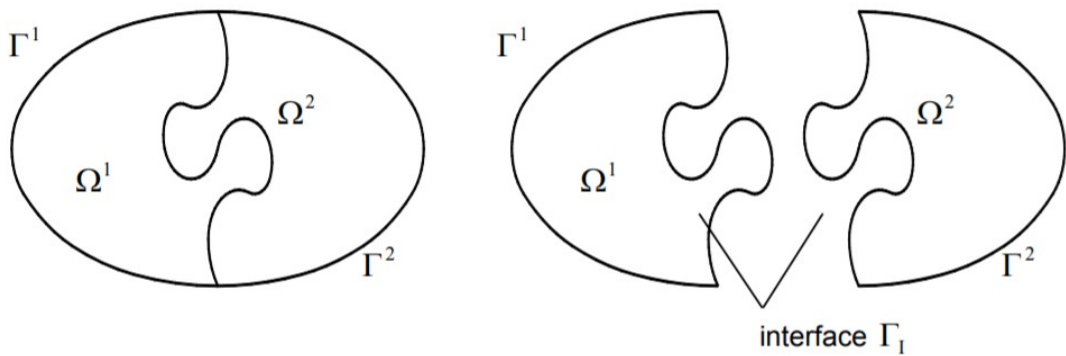
em que x_i representa uma direção genérica.

3.11 Sub-regiões

A não homogeneidade do domínio constitui uma limitação do Método dos Elementos de Contorno, em virtude da dificuldade de representar tal variação de propriedades em uma única equação integral envolvendo tão somente variáveis de contorno.

Para a solução de problema setorialmente homogêneos, pode-se empregar o recurso de sub-regiões, no qual o domínio é dividido em sub-domínios homogêneos. Nesse sentido, aplica-se a formulação básica do Método dos Elementos de Contorno a cada sub-região e em seguida se aplica as condições de compatibilidade na interfaces das sub-regiões.

Figura 10 – Representação da aplicação de sub-regiões.



Fonte: BULCAO, (1999)

Para ilustrar o emprego dessa técnica, considere a Figura 10, em que são mostrados um domínio constituído por dois setores homogêneos Ω_1 e Ω_2 , com propriedades K_1 e K_2 respectivamente. Considere o sistema matricial resultante da aplicação do BEM ao sub-domínio Ω_1

$$[H^1 \ H_I^1] [u^1 \ u_I^1]^T = [G^1 \ G_I^1] [q^1 \ q_I^1]^T \quad (3.98)$$

e o sistema matricial resultante da aplicação do BEM ao sub-domínio Ω_2

$$[H^2 \ H_I^2] [u^2 \ u_I^2]^T = [G^2 \ G_I^2] [q^2 \ q_I^2]^T, \quad (3.99)$$

nos quais os índices 1 e 2 se referem respectivamente aos termos pertencentes aos sub-domínios 1 e 2 e o índice I se refere aos termos pertencentes à interface. Da aplicação das condições de compatibilidade, resulta que

$$u_I^1 = u_I^2 = u_I \quad (3.100)$$

e que

$$q_I^1 = -\frac{K^2}{K^1} q_I^2 = q_I. \quad (3.101)$$

Aplicando tais condições nos sistemas de equações constantes nas Equações 3.99 e 3.100 e reordenando-os, obtém-se um único sistema de equação, no qual é possível introduzir as condições de contorno do problema. Esse sistema pode ser visto na equação abaixo.

$$\begin{bmatrix} H^1 & H_I^1 & 0 \\ 0 & H_I^2 & H^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^1 \\ u_I \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 & G_I^1 & 0 \\ 0 & \frac{-K^1}{K^2} G_I^2 & G^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q^1 \\ q_I \\ q^2 \end{Bmatrix} \quad (3.102)$$

4 MÉTODO DA RECIPROCIDADE DUAL

Na aplicação direta do método dos elementos de contorno, surgem-se algumas dificuldades para modelar adequadamente os problemas não lineares e dependentes do tempo; a principal delas seria a necessária discretização do domínio em elementos para lidar com os termos não levados ao contorno pela aplicação da equação fundamental. Isto afasta uma das principais características do BEM, a menor quantidade de dados de entrada. A fim de resolver este problema, observa-se a aplicação de diversos métodos por diferentes autores; alguns dos quais ainda encontram dificuldades, seja na integração analítica do domínio, seja no relativo alto custo computacional, seja na aplicação restrita a problemas simples (PARTRIDGE; BREBBIA; WROBEL, 1992).

Há ainda dentre os referidos métodos o DRM (Método da Reciprocidade Dual), que consiste basicamente na construção de soluções particulares e pode ser usado para resolver problemas não lineares e dependentes do tempo, bem como para representar alguma fonte de distribuição interna ao domínio; sua principal vantagem é a generalidade.

Seja considerada a equação subsecutiva.

$$\nabla^2 u = b(x, y, t, u) \quad (4.1)$$

em que b é uma função qualquer arbitrária. O objetivo é solucioná-la sem a necessidade de discretização interna do domínio, mantendo-se as precípuas características do método dos elementos de contorno. Para tanto, faz-se o desenvolvimento a seguir baseado em Partridge, Brebbia e Wrobel (1992). A solução da Equação 4.1 é evidentemente expressa como a soma da solução homogênea com uma solução particular indicada por $\hat{u}$, isto é,

$$\nabla^2 \hat{u} = b. \quad (4.2)$$

Propõe-se uma série de equações particulares $\hat{u}_j$ em vez de uma única $\hat{u}$, de tal modo que b é aproximado por

$$\nabla^2 b \cong \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f_j \quad (4.3)$$

em que N e L são respectivamente o número de pontos do contorno e internos ao domínio; α_j é o conjunto de coeficientes inicialmente desconhecidos e f_j é o conjunto de funções de interpolação. Exige-se que as funções de interpolação se relacionem com as soluções particulares $\hat{u}_j$ da seguinte maneira

$$\nabla^2 \hat{u}_j = f_j. \quad (4.4)$$

A Equação 4.3 há de ser válida em todo o domínio; as funções de interpolação f_j dependem tão somente da geometria e não estão sujeitas à restrição quanto ao tipo, salvo

eventual singularidade que possa ensejar na interpolação. Substituindo as Equações 4.4, 4.3 e 4.1, tem-se

$$\nabla^2 u = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j (\nabla^2 \hat{u}_j). \quad (4.5)$$

Tal equação pode ser submetida ao procedimento da seção anterior para o desenvolvimento BEM, isto é, multiplica-se pela equação fundamental e integra-se em todo o domínio, resultado

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* d\Omega = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \int_{\Omega} (\nabla^2 \hat{u}_j) u^* d\Omega. \quad (4.6)$$

À semelhança da seção anterior, as integrais de domínio se transformam em integrais de contorno, de sorte que

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} q^* u d\Omega - \int_{\Gamma} u^* q d\Omega = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(c_i \hat{u}_{ij} + \int_{\Gamma} q^* \hat{u}_j d\Omega - \int_{\Gamma} u^* \hat{q}_j d\Omega \right). \quad (4.7)$$

Esta é a equação integral de contorno do DRM, em que $\hat{q}_j = \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial n}$; pode-se ainda reescrevê-la de forma discretizada como se segue, porquanto seu lado esquerdo não é outro senão a Equação 3.74.

$$Hu - Gq = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(c_i \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} q^* \hat{u}_j d\Omega - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u^* \hat{q}_j d\Omega \right). \quad (4.8)$$

É importante frisar que não é necessário aproximar as funções $\hat{u}$ e $\hat{q}$, pois são conhecidas e diretamente ligadas à função f ; contudo, ao fazê-lo, as matrizes H e G podem ser usadas também no lado direito da Equação 4.8. E isto aumenta a eficiência do método sem, no entanto, segundo Partridge, Brebbia e Wrobel (1992), aumentar sobremaneira o erro numérico. Desta forma, pode-se escrever

$$Hu - Gq = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j (H\hat{u}_j - G\hat{q}_j), \quad (4.9)$$

ou ainda

$$Hu - Gq = (H\hat{U} - G\hat{Q})\alpha \quad (4.10)$$

em que $\hat{U}$ e $\hat{Q}$ são constituídas respectivamente pelas colunas $\hat{u}_j$ e $\hat{q}_j$. A partir da Equação 4.3 e avaliando o valor de b em todos $(N + L)$ os pontos, depreende-se que

$$\alpha = F^{-1}b \quad (4.11)$$

cujas matrizes F é constituída pelos vetores f_j , isto é, cada coluna da aludida matriz contém os valores da função f_j em cada um dos $N + L$ pontos. Para solução do problema de condução térmica transiente linear, faz-se $b = \eta \dot{u}$ na Equação 4.1, de modo que

$$Hu - Gq = \eta(\widehat{H\hat{U}} - G\widehat{Q})F^{-1}\dot{u}. \quad (4.12)$$

Sabe-se que as matrizes da equação acima são todas conhecidas e dependentes da geometria. Portando, fazendo $C = -\eta(\widehat{H\hat{U}} - G\widehat{Q})F^{-1}$, tem-se

$$C\dot{u} + Hu = Gq. \quad (4.13)$$

O sistema constante na Equação 4.13 é similar ao obtido usando o método dos elementos finitos. Consequentemente, faz-se necessário o uso de algum esquema de integração direta ou outra ferramenta mais robusta para resolvê-lo. Por exemplo, Wen e Khonsari (2009) propõem um eficiente e robusto método, nomeadamente o método da matriz de transferência. Entretanto, neste trabalho, uma aproximação linear é proposta para a variação u e q dentro de cada passo de tempo, como se segue

$$u = (1 - \theta_u)u^m + \theta_u u^{m+1} \quad (4.14)$$

$$q = (1 - \theta_q)q^m + \theta_q q^{m+1} \quad (4.15)$$

$$\dot{u} = \frac{1}{\Delta t}(u^{m+1} - u^m) \quad (4.16)$$

em que θ_u e θ_q são parâmetros que posicionam respectivamente os valores de u e q entre os intervalos de tempo $m+1$ e m ; de sorte que a Equação 4.13 se torna

$$\left(\frac{1}{\Delta t}C + \theta_u H\right)u^{m+1} - \theta_q Gq^{m+1} = \left[\frac{1}{\Delta t}C - (1 - \theta_u)H\right]u^m + (1 + \theta_q)Gq^m. \quad (4.17)$$

Em particular, para os valores $\theta_u = 0.5$ e $\theta_q = 1$, tem-se boa exatidão conforme Partridge, Brebbia e Wrobel (1992) e obtém-se

$$\left(\frac{2}{\Delta t}C + H\right)u^{m+1} - 2Gq^{m+1} = \left(\frac{2}{\Delta t}C - H\right)u^m. \quad (4.18)$$

Este sistema pode ser resolvido mediante a introdução das condições de contorno, haja vista que seu lado direito é sempre conhecido no instante de tempo $(m + 1)\Delta t$ seja por se tratar de solução anteriormente calculado seja por se tratar da condição inicial no instante t_0 .

4.1 A função f

Como sobredito, as funções f_j são arbitrárias e não estão sujeitas a nenhuma restrição senão a ensejar singularidade na matriz F – Equação 4.11. Não obstante ser possível a utilização de muitos tipos de função – séries trigonométricas e elementos do triângulo de pascal –, na

maioria dos casos de aplicação do DRM, utilizam-se funções de base radial (Radial Basis Function – RBF) para interpolação, principalmente a função $f = 1 + r + r^2 + \dots + r^m$. De fato, tal função se mostra relativamente simples e uma alternativa acurada, bem como sempre produz matriz de interpolação não singular. Contudo, à medida que a densidade da nuvem de pontos de interpolação cresce, o número de condição da matriz cresce de tal maneira que o sistema da Equação 4.11 se torna irresolúvel numericamente; e isto já foi estudo de diversos trabalhos, dentre os quais se cita Karur e Ramachandran (1994) e Peixoto (2013). Além disso, inobstante sua simplicidade e eficiência, a interpolação RBF sofre de uma dualidade entre precisão e estabilidade, que pode ser expressa de forma semelhante ao princípio da incerteza da mecânica quântica (SCHABACK, 1995). Noutras palavras, a precisão e a estabilidade da solução dependem naturalmente da escolha da função de interpolação.

Neste contexto, a fim de garantir a robustez da interpolação, propuseram-se diversos métodos – para mais detalhes, veja-se Brownlee (2005) –, dentre os quais RBF com parâmetro variável. A ideia consiste basicamente em determinar o parâmetro variável da RBF em termos da densidade local de pontos, de modo a diminuir o número de condição da matriz de interpolação. Há inúmeros tipos de RBF variável (Gaussiana, Spline Cúbico, Multiquadrática Inversa); escolhe-se neste trabalho a Quadrática Inversa, cuja forma é a seguinte

$$f = \frac{1}{1 + (er)^2} \quad (4.19)$$

em que e é o parâmetro variável.

Sabe-se que o condicionamento de uma matriz é tanto menor (melhor) quanto mais próxima for da matriz identidade; nesse sentido, a partir de uma análise da Equação 4.19, depreende-se que quanto maior for o parâmetro e e tanto mais bem condicionada será a matriz F , porquanto a distância radial r cresce para pontos fora da diagonal principal e é nulo nela.

Dada a função f , é necessário calcular a função $\hat{u}_j$; e para isto, calcula-se a solução particular da Equação 4.5. Note-se que, devido a simetria do problema em apreço (CHENG, 2000), o laplaciano se reduz à dependência da variável radial. Assim, a referida equação se torna

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} \right) = \frac{1}{1 + (er)^2}, \quad (4.20)$$

mediante a qual, com integração, se obtém

$$\hat{u} = \frac{1}{2e^2} \int_0^r \frac{\ln(e^2 \varphi^2 + 1)}{\varphi} d\varphi. \quad (4.21)$$

5 O CASO NÃO LINEAR

Não há apenas uma alternativa para resolução numérica da equação não linear 3.1; para resolvê-la, Onishi e Kuroki (1982) consideram o lado direito da Equação 3.6 como uma fonte não linear; já mais recentemente, Gao et al. (2019) aplicaram o método do elemento livre baseado em elemento global. Todavia, uma formulação elegante pode ser obtida mediante a transformada de Kirchhoff, a qual lineariza totalmente o problema estacionário se somente condições de contorno do tipo das Equações 3.3 e 3.4 estão presentes. Entretanto, se se tem condição de contorno do tipo constante na Equação 3.5, o processo ainda é parcialmente não linear, fazendo-se necessário o uso de um processo iterativo.

A ideia básica da transformada de Kirchhoff é construir uma nova variável $U = U(u)$ de tal sorte que a Equação 3.1 se torne linear nesta nova variável. As derivadas de U com respeito a x e y são respectivamente

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{dU}{du} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.2)$$

Ao comparar as equações acima com a Equação 3.1, depreende-se que a escolha apropriada de U é tal que

$$\frac{dU}{du} = K(u) \quad (5.3)$$

ou na forma integral

$$U = T[u] = \int_{u_a}^u K(\varphi) d\varphi \quad (5.4)$$

em que u_a é um valor de referência arbitrário. Consequentemente, a Equação 3.1 se torna

$$\nabla^2 U = \frac{1}{k} \frac{\partial U}{\partial t} \quad (5.5)$$

na qual $k = k(u) = \frac{K}{\rho c}$. Pode-se notar que a Equação 5.5 contém um termo não linear residual, nomeadamente k . Portanto, necessário se faz outra transformação. Conforme Partridge, Brebbia e Wrobel (1992), é possível escrever $k = k(x, y, t)$, desde que u seja um campo contínuo. Propõe-se uma nova variável τ definida como

$$\tau = \int_0^t k(x, y, t) dt. \quad (5.6)$$

Da derivada parcial de τ com respeito a t , obtém-se

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = k. \quad (5.7)$$

Desse modo, substituindo a equação acima na Equação 5.5, finalmente, tem-se

$$\nabla^2 U = \frac{\partial U}{\partial \tau}. \quad (5.8)$$

Esta equação pode ser resolvida como descrito na seção anterior. Entretanto, uma vez que a nova variável τ depende da posição, um processo de solução iterativo deve ser empregado. Emprega-se, portanto, à Equação 5.8 o DRM em conjunto com o método de Newton-Raphson (vide Partridge, Brebbia e Wrobel (1992) para mais detalhes), resultando, semelhantemente à Equação 4.19,

$$(2\bar{C} + H)U^{m+1} - 2GQ^{m+1} = (2\bar{C} - H)H^m \quad (5.9)$$

em que U e Q representam valores no espaço transformado e matriz $\bar{C}$ ($\bar{C}_{ij} = \frac{c_{ij}}{\Delta\tau_j}$) contém o valor do passo da variável de tempo modificada em cada nó, isto é, $\Delta\tau_j = k_j\Delta t$. Conforme Partridge et al. (1992), ao aplicar à Equação não linear 5.9 o método de Newton-Raphson, e considerando-se a função residual $\psi(X^{m+1})$ que será zero quando X^{m+1} é a solução exata, obtém-se

$$\psi(X^{m+1}) = (2\bar{C} + H)U^{m+1} - 2GQ^{m+1} - (2\bar{C} - H)U^m. \quad (5.10)$$

A expansão em série de Taylor em torno de uma solução X_n da função ψ com apenas dois termos é

$$\psi(X) = \psi(X_n) + \left[\frac{\partial\psi}{\partial X} \right]_n (X - X_n) \quad (5.11)$$

cujo subscrito n representa a n -ésima iteração. Ademais, considerando-se que X é a solução exata, isto é, $\psi(X) = 0$, a seguinte expressão é obtida

$$J_n \Delta X_{n+1} = -\psi(X_n) \quad (5.12)$$

em que J é a matriz jacobiana e ΔX o vetor de incremento. A partir disso, é possível determinar para cada iteração a solução atualizada por intermédio da seguinte expressão incremental

$$X_{n+1} = X_n + \Delta X_{n+1}, \quad (5.13)$$

até atingir-se um arbitrário nível de convergência.

O cômputo dos coeficientes da matriz jacobiana depende das condições de contorno e é dado por

$$J_{ij}^{m+1} = \frac{\partial\psi_i^{m+1}}{\partial X_j^{m+1}}. \quad (5.14)$$

Por um lado, quando a condição de contorno é do tipo expresso na Equação 3.3, tem-se que

$$J_{ij}^{m+1} = -2G_{ij}. \quad (5.15)$$

Por outro, quando a condição de contorno é do tipo expresso na Equação 3.4 ou 3.5, tem-se que

$$J_{ij}^{m+1} = \frac{2}{\Delta\tau_j} C_{ij} + H_{ij} - 2G_{ij} \frac{\partial Q_j^{m+1}}{\partial U_j^{m+1}} + 2C_{ij}(U_j^{m+1} - U_j^m) \frac{\partial}{\partial U_j^{m+1}} (\Delta\tau_j)^{-1}. \quad (5.16)$$

Veja-se Wrobel e Brebbia (1987) para obtenção da expressão da derivada de $(\Delta\tau_j)^{-1}$. A derivada de Q_j depende do tipo de condição de contorno; para encontrá-la considere que, após a aplicação da transformada de Kirchhoff's, as condições de contorno das Equações 3.3, 3.4 e 3.5 se tornam respectivamente

$$U = \bar{U} = T[\bar{u}] \quad (5.17)$$

$$Q = \frac{\partial U}{\partial n} = \bar{Q} = K \frac{\partial u}{\partial n} = -\bar{q} \quad (5.18)$$

$$Q = -h(u - u_\infty) - \sigma\epsilon(u^4 - u_\infty^4) \quad (5.19)$$

em que se nota que a condição de contorno da Equação 3.5, ou Equação 5.19, no espaço transformada, isto é, a condição de contorno convectiva e radioativa, é não linear, porquanto $u = T^{-1}[U]$ não é necessariamente linear, de sorte que a derivada de Q_j com respeito a U_j , para a condição de fluxo prescrito, é evidentemente nula, porquanto Q_j independe de U_j neste caso; já para a condição radioativa e convectiva, a derivada de Q_j se mostra

$$\frac{\partial Q_j^{m+1}}{\partial U_j^{m+1}} = -\frac{h}{K_j} - \frac{4\sigma\epsilon u_j^3}{K_j}. \quad (5.20)$$

Finalmente, salienta-se que durante este processo é necessário o cálculo da transformação inversa; veja-se Azevedo (1995) para detalhes de como fazê-lo.

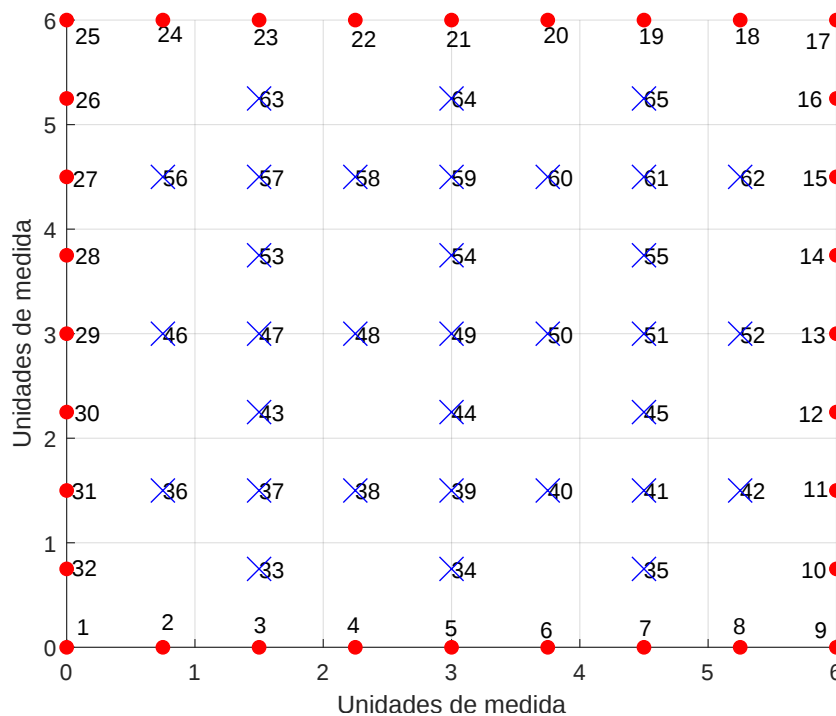
6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Embasado na formulação descrita nos capítulos anteriores, um programa de computador é desenvolvido em MATLAB para resolver a já citada equação de condução de calor 2D com os diferentes tipos de condições de contorno também já mencionados. A fim de validar a modelagem e verificar a eficiência do método, analisam-se alguns casos de equações diferenciais cuja solução analítica é explicitamente conhecida, tais casos são mostrados abaixo na sequência deste capítulo. Além disso, a utilização do programa é ilustrada pela aplicação a duas seções de aço e duas seções de concreto, comparando-se os resultados com os propostos pelas respectivas normas, a fim de fornecer evidências da eficiência e precisão da análise.

6.1 Validação do modelo

Considere inicialmente o domínio quadrático abaixo com seis unidades de comprimento em seus lados e sua respectiva discretização (veja-se Figura 11). Tal malha contém 32 pontos de contorno (marcados com um ponto vermelho na malha) e 33 pontos internos (marcados com um x azul na malha), perfazendo um total de 65 pontos.

Figura 11 – Esquema do domínio de validação discretizado.



Fonte: Autor, 2021.

Agora considere as seguintes equações diferenciais parciais definidas neste domínio e mostradas na Tabela 1 abaixo.

As condições de contorno, bem como as condições iniciais para as equações dependentes do tempo, de tais equações são definidas na Tabela 2. As propriedades térmicas da última equação

Tabela 1 – Equações diferenciais parciais.

Tipo	Equação
(i) Equação de Laplace	$\nabla^2 u = 0$
(ii) Equação de Poisson	$\nabla^2 u = 10$
(iii) Equação da difusividade	$\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t}$
(iv) Equação da difusividade não linear	$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho c \frac{\partial u}{\partial t}$

Fonte: Autor, 2020.

diferencial supracitada, isto é, Equação (iv), são dadas como $K(u) = 1 + u$, $c = 1 + u$ e $\rho = 1$, com as apropriadas unidades de medida.

Portanto, esta equação diferencial - Equação (iv) - é um caso de condução de calor não linear particularmente singular, porque $\frac{K}{\rho c} = 1$, de sorte que tal equação se torna linear na variável U definida nos capítulos anteriores; consequentemente, uma solução analítica pode ser expressa para este caso sem muita dificuldade e ter-se uma validação para uma equação não linear. Além disso, a dependência de K com o potencial (neste caso a temperatura) é linear, de tal forma que a transformada de Kirchhof, bem assim sua inversa, é facilitada. Analisa-se este caso com essas idiosincrasias para verificar brevemente a eficácia do modelo para o caso não linear.

Tabela 2 – Condições de contorno e iniciais.

Eq.	Condição de Contorno	Condição inicial
(i)	$u(x, y) = \bar{u}(x, y) = \frac{\sinh(\frac{\pi y}{6})}{\sinh(\pi)} \sinh(\frac{\pi x}{6}) + 1$	
(ii)	$u(x, y) = \bar{u}(x, y) = 0$	
(iii)	$u(0, y, t) = u(6, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, 6, t) = 0$	$u_0(x, y, 0) = xy(x - 6)(y - 6)$
(iv)	$u(0, y, t) = u(6, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, 6, t) = 0$	$u_0(x, y, 0) = xy(x - 6)(y - 6)$

Fonte: Autor, 2020.

Para as Equações de Laplace e Poisson, mostram-se os resultados na Tabela 3, em que é possível notar a eficácia da modelagem e a eficiência do BEM. Para a Equação de Laplace especificamente, somente é mostrado o valor do fluxo ($\frac{\partial u}{\partial n}$ ou ainda derivada do potencial com respeito ao vetor normal para fora do domínio) para a aresta inferior do domínio; para a Equação de Poisson, é mostrado o valor do potencial (u) nos pontos internos do domínio. Nesta tabela, a sigla BEM se refere aos valores obtidos pela modelagem desenvolvida neste trabalho, ao passo que ASM faz alusão aos valores da solução analítica para O respectivo cada.

Para a equação da difusividade linear e não linear, a evolução da temperatura com o tempo no ponto central do domínio, isto é, ponto 49, é analisada em certos instantes de tempo preestabelecidos. Os resultados são mostrados na Tabela 4, os quais são igualmente acurados. O erro mais acentuado relativo à equação da difusividade não linear em relação aos outros casos é devido ao fato de que nesta análise é usado na solução, como pode ser visto facilmente na

Tabela 3 – Resultados para Equação de Laplace e Poisson com elemento linear.

Equação de Laplace					Equação de Poisson				
Posição		BEM	ASM	Erro	Posição		BEM	ASM	Erro
x	y	$\frac{\partial u}{\partial n} 10^{-3}$	$\frac{\partial u}{\partial n} 10^{-3}$	e(%)	x	y	u	u	e(%)
0.75	0.00	-17.59	-17.35	1.39	1.50	0.75	-10.26	-10.15	1.13
1.50	0.00	-32.45	-32.06	1.21	3.00	0.75	-12.68	-12.57	0.89
2.25	0.00	-42.30	-41.89	0.99	3.75	1.50	-19.71	-19.60	0.55
3.00	0.00	-45.77	-45.34	0.95	3.00	3.00	-26.63	-26.52	0.40
3.75	0.00	-42.30	-41.89	0.99	3.00	4.50	-20.75	-20.64	0.52
4.50	0.00	-32.44	-32.06	1.21	4.50	4.50	-16.41	-16.30	0.67
5.25	0.00	-17.59	-17.35	1.39	4.50	5.25	-10.26	-10.15	1.13

Fonte: Autor, 2020.

formulação, um método iterativo, que introduz um erro adicional à análise.

Tabela 4 – Resultados para Equação da difusividade linear e não linear com elemento linear para o nó 49.

tempo (s)	Difusividade linear			Difusividade não linear		
	u (BEM)	u (ASM)	e(%)	u (BEM)	u (ASM)	e(%)
1	49.422	49.450	-0.06	55.706	55.665	0.074
2	28.770	28.789	-0.07	41.550	41.486	0.160
3	16.644	16.652	-0.04	31.312	31.254	0.180
4	09.623	09.624	-0.01	23.573	23.524	0.200
5	05.563	05.562	0.02	17.694	17.655	0.220
6	03.216	03.214	0.06	13.229	13.196	0.250
7	01.859	01.858	0.09	09.838	09.812	0.270
8	01.075	01.073	0.12	07.266	07.245	0.290
9	00.621	00.620	0.16	05.319	05.301	0.320
10	00.359	00.358	0.19	03.848	03.834	0.360

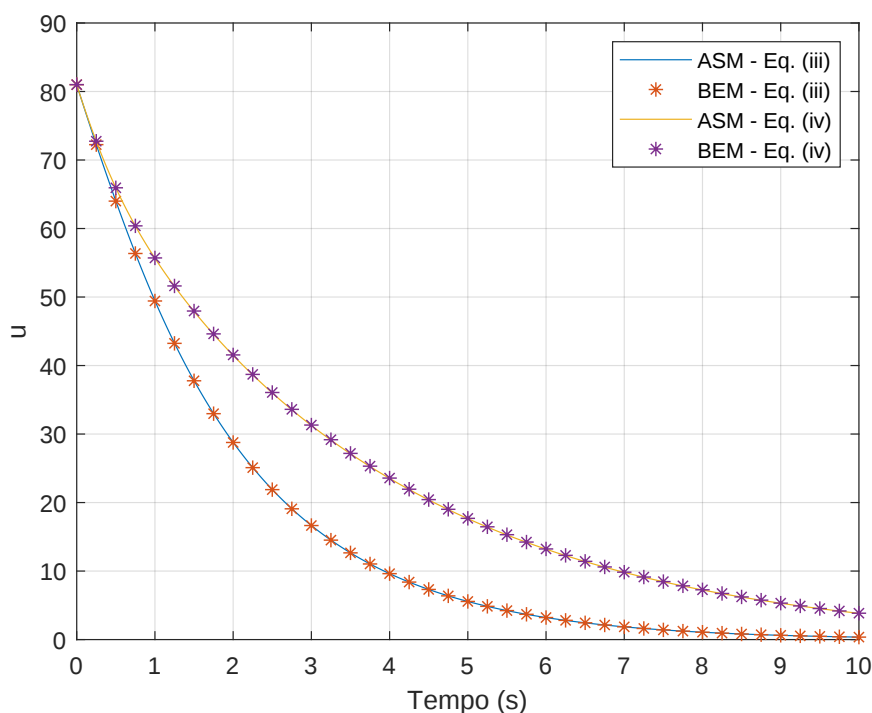
Fonte: Autor, 2020.

Mostra-se na Figura 12 a evolução da solução das Equações (iii) e (iv) - difusividade linear e não linear respectivamente - no tempo para o nó 49 do domínio exibido na Figura 11. É possível notar o efeito do crescimento da condutividade térmica K (caso da Equação (iv)), que resulta em um mais lento decrescimento da solução u em relação à Equação (iii), caso em que a condutividade térmica é independente da temperatura. Finalmente, o objetivo desta seção é alcançado, porquanto os resultados aqui obtidos para as diferentes equações diferenciais parciais via BEM estão absolutamente em conformidade com a respectiva solução analítica; isto valida o modelo apresentado aqui e mostra a eficácia numérica do método.

Em particular, o método da reciprocidade dual é capaz de lidar com o termo não homogêneo das Equações diferenciais parciais (ii), (iii) e (iv), alcançando bons resultados; ademais, a transformada de Kirchhof, no que lhe concerne, é capaz de linearizar a Equação diferencial

parcial (iv) e o método de Newton-Raphson, usado neste trabalho e apresentado na formulação, mostrou-se eficiente, obtendo resultados igualmente bons para a Equação (iv).

Figura 12 – Solução da Equações (iii) e (iv) no tempo para o nó 49.



Fonte: Autor, 2021.

6.2 Aplicação à seção de aço

Em primeiro lugar, é preciso dizer que as propriedades térmicas do aço usadas nas simulações são as mesmas apresentadas na EN 1993-1-2. Ademais, a referida norma preconiza um valor fixo para a massa específica do aço, independentemente da temperatura. Mostram-se na Tabela 5 abaixo as características numéricas e geométricas das seções de aço testadas.

Ao se observar as curvas do calor específico e da condutividade térmica na supracitada norma (EN 1993-1-2), nota-se a variação das propriedades em função da temperatura, principalmente o calor específico, o que por si só já enseja a não linearidade da equação de condução de calor na seção. Entretanto, ela mesma (a norma EN 1993-1-2) permite simplificar o uso de valores constantes para estas propriedades, o que definitivamente não gera muita diferença sob a ótica da capacidade térmica da seção, pois a diferença de temperatura entre usar o valor constante ou o valor variável não passa de uma centena de graus; isto se deve fundamentalmente ao fato de que as seções de aço são esbeltas, de modo que a condução não é um fenômeno preponderante.

Na Figura 13, as malhas das seções de aço são mostradas respectivamente; os pontos de contorno são marcados com um ponto vermelho na malha e os pontos internos são marcados com um x azul na malha; os nós apresentados com rótulo são aqueles para os quais a temperatura

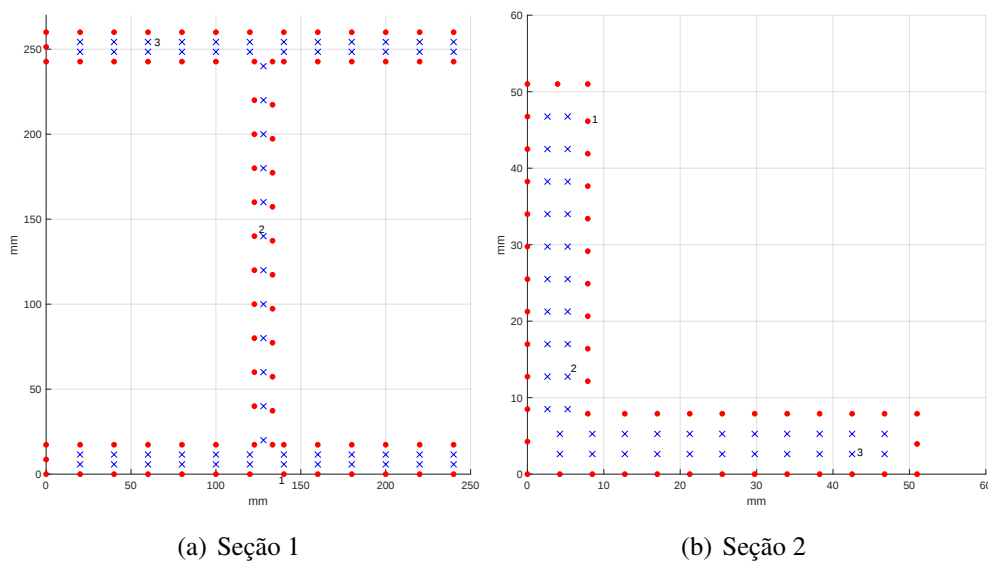
Tabela 5 – Seções de aço e concreto testadas.

	Seções de concreto		Seções de aço	
Seção	1	2	1	2
Tipo	Retangular	Retangular	W 250 x 89.00	L 51 x 7.9
A (cm^2)	480	1800	1113.9	7.42
d (mm)	300	600	260	
b_f (mm)	160	300	256	50.8
t_w (mm)			10.7	7.9
t_f (mm)			17.3	
Perímetro (mm)	920	180	1522.6	203.2
Tipo de Elemento	Linear	Linear	Linear	Linear
Nº de pontos de contorno	40	40	82	48
Nº pontos internos	89	90	60	42

Fonte: Autor, 2020.

foi medida durante a análise. Além disso, todos os resultados obtidos aqui via o procedimento da EN 1993-1-2 (método simplificado) foram calculados considerando o fator de correção $k_{sh} = 1$, conforme permite a referida norma. É importante dizer que as duas seções testadas aqui foram expostas à curva do incêndio padrão (ISO 834) em todo o seu perímetro. Portanto, em se tratando das condições de contorno do problema, elas são do tipo da Equação 3.5 em todo o perímetro da seção; as seções foram inteiramente consideradas à temperatura ambiente (20° C) para efeitos de condição inicial no instante de tempo zero.

Figura 13 – Discretização das seções de aço testadas

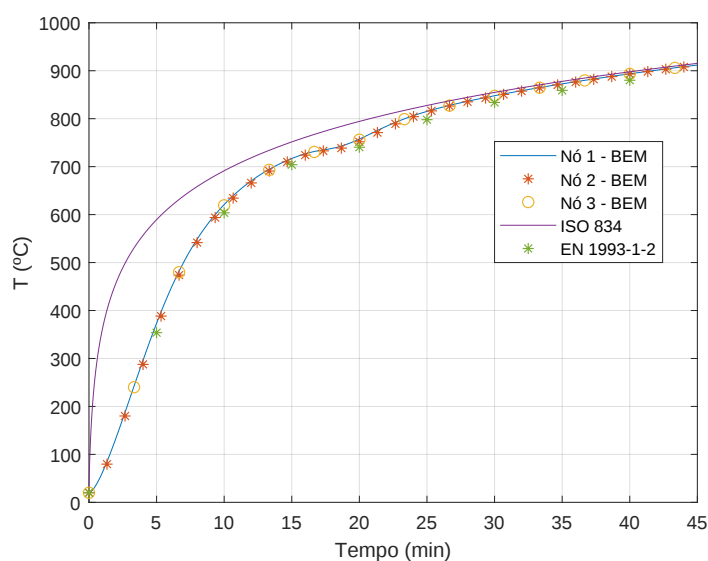


Fonte: O Autor, 2020.

Os resultados apresentados na Figura 14 são comparados com o procedimento simplificado constante na EN 1993-1-2. Em todas as seções de aço testadas, os resultados obtidos via

BEM, isto é, pela metodologia apresentada neste trabalho, são próximos daqueles obtidos mediante a metodologia da norma EN 1993-1-2. Além disso, ao analisar a Figura 14, depreende-se que a ondulação da curva próximo aos 750 °C é devida ao crescimento do calor específico do aço nesta temperatura. Por outro lado, isto revela a habilidade do método para capturar a não linearidade do problema. Ademais, as temperaturas nos três pontos medidos se mostram muito próximas da temperatura do método simplificado; isto confirma a boa aproximação da norma ao considerar seções de aço delgadas sem um gradiente de temperatura expressivo.

Figura 14 – Evolução da temperatura no tempo para a seção de aço 2 com calor específico variável.



Fonte: Autor, 2021.

Mostra-se na Tabela 6 o resultado das temperaturas para as duas seções de aço testadas em diferentes instantes de tempo, comparando-se os resultados com aqueles advinentes do método simplificado da norma. Para todos os pontos, obtém-se temperaturas muito próximas em ambas as seções, o que reforça a homogeneidade de temperatura nas seções delgadas. Além disso, nota-se a boa adequação dos resultados obtidos via BEM em relação aos do procedimento da norma.

Ao comparar os resultados das duas seções testadas, um mais rápido aumento da temperatura é notado na seção 2 em relação à seção 1; isto se deve fundamentalmente ao fato de que ela (seção 2) é a menor seção. Finalmente, os resultados revelam, por um lado, a validação da modelagem BEM e, por outro lado, a precisão do método simplificado presente na EN 1993-1-2 para seções de aço delgadas. É importante notar que as isortérmicas de temperatura não foram mostradas para as seções apresentadas aqui porque a temperatura varia pouco dentro da seção conforme já mencionado.

Portanto, é possível dizer que o BEM com a metodologia apresentada aqui é capaz de apresentar uma boa solução térmica para seções de aço, capturando bem a não linearidade do problema, a despeito de se tratar de seções delgadas, o que a princípio geraria complicações.

Contudo, para os casos apresentados, esta limitação não foi observada.

6.3 Aplicação à seção de concreto

Primeiramente, é importante frisar que todas as propriedades térmicas do concreto aqui analisado foram retiradas da EN 1992-1-2, isto é, as curvas da condutividade térmica, massa específica e calor específico com a temperatura são as que lá se encontram. Além disso, as demais propriedades térmicas - emissividade ($\epsilon = 0.7$) e coeficiente de convecção ($h = 25$) - e seções analisadas foram retiradas do anexo A da aludida norma, a fim de comparação dos resultados. Ademais, é importante dizer que todas as seções testadas foram submetidas ao incêndio padrão em todos os lados. Mostram-se na Tabela 5 as características principais das seções retangulares testadas. Saliente-se, de início, que, diferentemente do aço, as seções de concreto são geralmente robustas, de sorte que a condução é um fator importante; tem-se, por conseguinte, um gradiente de temperatura. Somando isto ao fato de que as propriedades térmicas são estritamente dependentes da temperatura, obtém-se um problema essencialmente não linear. Em se tratando das condições de contorno, as seções analisadas são retangulares e submetidas à curva do incêndio padrão (ISO 834) em todo o seu perímetro, ou seja, trata-se de condição de contorno do tipo da Equação 3.5; devido à simetria do problema e para comparar os resultados com os da norma, somente um quarto do domínio de cada seção foi analisado, adotando-se as condições apropriadas para tanto, isto é, as arestas externas do domínio original da seção completa são ainda submetidas à curva padrão (condição de contorno constante na Equação 3.5) e nas outras arestas obtidas pelo corte da seção é fixado fluxo zero, devido à simetria da solução. Além disso, consideram-se todas as seções em temperatura igual à temperatura ambiente (20°C) para fins de condição inicial no instante de tempo zero. Em relação à discretização do domínio, na Figura 15, podem-se ver os pontos de contorno, que são marcados com um ponto vermelho, e os pontos internos ao domínio, que são marcados com um x azul; os pontos internos rotulados com números são aqueles para os

Tabela 6 – Resultados da temperatura para as duas seções testadas considerando o calor específico variável.

$t \text{ (min)}$	Seção 1				Seção 2			
	Nó	BEM	Norma	$e \text{ (%)}$	Nó	BEM	Norma	$e \text{ (%)}$
30	1	805.526	805.711	-0.02	1	834.170	833.823	0.04
	2	805.013	805.711	-0.09	2	833.175	833.823	-0.08
	3	805.078	805.711	-0.08	3	833.870	833.823	0.01
60	1	939.852	940.031	-0.02	1	942.954	942.803	0.02
	2	941.839	940.031	0.19	2	942.599	942.803	-0.02
	3	939.684	940.031	-0.04	3	942.839	942.803	0.01
90	1	1002.851	1002.967	-0.01	1	1004.620	1004.525	0.01
	2	985.335	1002.967	-1.76	2	1004.397	1004.525	-0.01
	3	1002.736	1002.967	-0.02	3	1004.545	1004.525	0.01

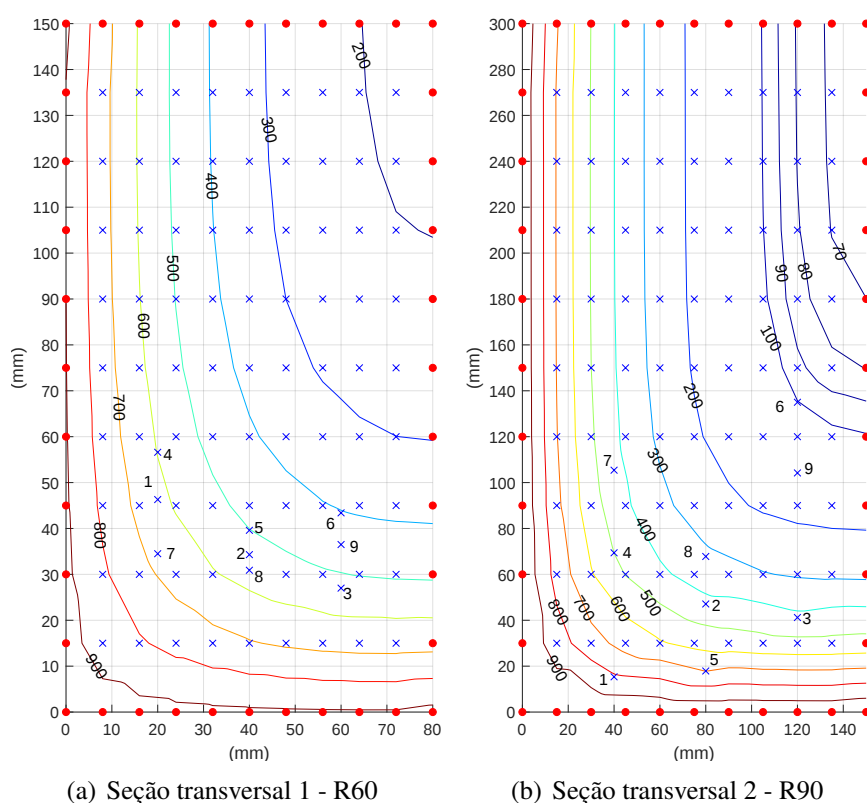
Fonte: Autor, 2020.

quais se mede a temperatura em certos instantes de tempo para análise.

Os resultados para um quarto das seções, como na EN 1992-1-2, são mostrados na Figura 15; na primeira parte dessa mesma figura, tem-se a distribuição de temperatura da seção 1 com 60 min submetida ao incêndio; na segunda parte, por outro lado, tem-se a distribuição de temperatura da seção 2 com 90 min submetida ao incêndio. Como se pode ver, os resultados do BEM são bem próximos daqueles apresentados na norma EN 1992-1-2, isto ratifica a validação da modelagem. Além disso, é importante enfatizar que - de acordo com o que já foi comentado -, em seções de concreto, a aproximação de considerar toda a seção na mesma temperatura, como é feito em seções de aço, não é factível. Tem-se um nítido gradiente de temperatura.

Para os pontos rotulados na Figura 15, a temperatura foi medida e mostrada na Tabela 7 junto com os valores obtidos via EN 1992-1-2. Além disso, também é mostrado o erro relativo entre esses resultados, mediante o qual é possível verificar a boa eficácia dos resultados obtidos pela modelagem apresentada aqui. É importante dizer que os resultados obtidos via EN 1992-1-2 foram retirados do Anexo A da aludida norma mediante uma análise visual; tentou-se remover tais resultados da forma mais precisa possível, dado que a norma somente apresenta a solução gráfica para seções de concreto; isto constitui uma lacuna do método dos 500 °C, porquanto para aplicá-lo a uma seção de concreto a posição da isórterma 500 é necessária, fazendo-se necessária uma mais sofisticada análise térmica para isso.

Figura 15 – Isotérmicas de temperatura geradas pelo BEM para as seções transversais de concreto.



Fonte: O Autor, 2020.

Tabela 7 – Resultados da temperatura para as duas seções de concreto testadas.

Section 1					Section 2				
$t \text{ (min)}$	Nó	BEM	Norma	$e \text{ (%)}$	$t \text{ (min)}$	Nó	BEM	Norma	$e \text{ (%)}$
30	1	399.538	400.0	-0.12	60	1	694.887	700.0	-0.73
	2	298.468	300.0	-0.51		2	299.159	300.0	-0.28
	3	303.111	300.0	1.04		3	308.130	300.0	2.71
60	4	596.973	600.0	-0.50	90	4	503.611	500.0	0.72
	5	501.443	500.0	0.29		5	701.435	700.0	0.21
	6	402.984	400.0	0.75		6	100.308	100.0	0.31
90	7	800.723	800.0	0.09	120	7	522.623	500.0	4.52
	8	705.188	700.0	0.74		8	412.631	400.0	3.16
	9	605.669	600.0	0.94		9	208.431	200.0	4.22

Fonte: Autor, 2020.

Portanto, a metodologia aqui apresentada constitui uma ferramenta versátil para análises térmicas de seções de concreto, facilitando a aplicação do Método dos 500 °C. A modelagem da condução térmica não linear se mostrou eficaz para o problema da seção de concreto. Tal solução térmica para o concreto apresentou excelentes resultados mesmo sem considerar a migração e evaporação da água no concreto. No entanto, modelar este comportamento é um importante desafio para melhorar esses modelos numéricos, porque está diretamente associada ao "spalling", um fator extremamente relevante para determinação do comportamento ao incêndio de estruturas de concreto.

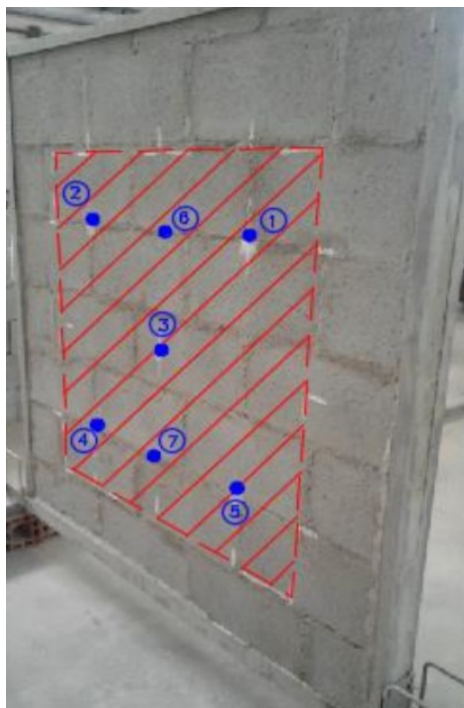
6.4 Aplicação à parede de bloco de concreto

6.4.1 Parede sem revestimento

Nesta seção, analisa-se uma seção de uma parede de bloco de concreto. A fim de comparar os resultados numéricos obtidos pela metodologia BEM aqui desenvolvida com dados experimentais, utiliza-se como objeto de aplicação a mesma parede analisada por Borges (2018). Além disso, salienta-se que o aludido autor verificou a adequação da curva de aquecimento do forno usado nos seus experimentos de acordo com normas relacionadas, de modo que a curva de aquecimento fosse próxima da curva ISO 834 (curva utilizada neste trabalho para simular o incêndio); o gráfico da curva de aquecimento pode ser vista na referida obra.

A parede analisada tem as seguintes dimensões: 1,50 m de altura, 1,50 m de largura e 0,09 m de espessura; e pode ser vista na Figura 16, em que a parte hachurada de vermelho é a parte em que incide o aquecimento do forno. Ainda na Figura 16, os pontos marcados são aqueles para os quais Borges (2018) mediu a temperatura durante seu experimento por intermédio de termopares lá localizados. De pronto, é importante dizer que não é possível obter com exatidão a localização dos pontos medidos, em virtude dos mecanismos inerentes ao experimento. Maiores detalhes sobre a execução do experimento podem ser vistos no supracitado trabalho.

Figura 16 – Parede de blocos de concreto analisada.

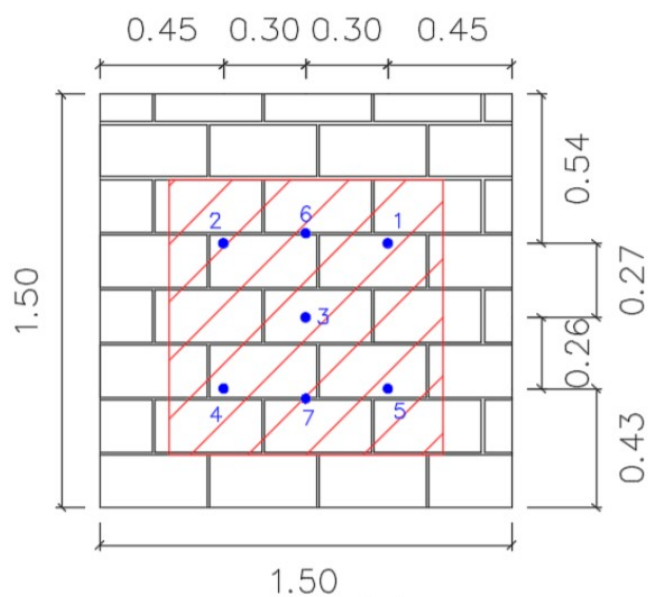


Fonte: BORGES, 2018.

Mostra-se uma ilustração planar da parede de concreto analisada na Figura 17, em que se mostra também as cotas dos pontos marcados para análise. Em relação à análise numérica, como o programa desenvolvido neste trabalho se resume a domínios bidimensionais, analisa-se tão somente um corte vertical da parede em apreço. Além disso, é importante dizer que os blocos constituintes da parede são vazados com furos verticais, de modo que há cortes verticais que contemplam furos e outros que se constroem numa seção de concreto inteiramente cheia, pois cortam o septo de um bloco e a ligação de outros com argamassa (imediatamente acima e abaixo) alternadamente. É evidente que para se considerar uma seção cheia de concreto com as mesmas propriedades, faz-se necessário considerar que as propriedades da argamassa de ligação são as mesmas do concreto. Esta consideração é feita para a análise aqui apresentada; e as propriedades do concreto utilizadas nesta seção são as mesmas utilizadas na seção anterior, e os mesmos comentários lá tecidos são válidos para esta seção.

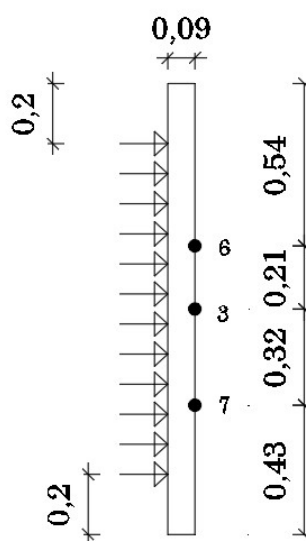
Em se tratando do domínio analisado e das suas condições de contorno, faz-se necessário observar a Figura 18, em que é possível não só ver os pontos para os quais se mediu a temperatura, como também a sua localização no domínio. Ademais, diga-se que a numeração dos três pontos nesta figura (Figura 18) são as mesmas da Figura 17, porquanto o corte analisado é aquele que passa pelos pontos 3, 6 e 7 constantes nesta última figura. Ainda em relação à Figura 18, as setas constantes na figura representam a incidência do aquecimento proveniente do forno; portanto, o lado esquerdo corte da Figura 18 representa o lado exposto ao fogo, ao passo que o lado direito representa o lado não exposto ao fogo da parede, em que se mede a temperatura para fins de análise de resistência ao fogo. Além disso, em se tratando das condições de contorno, todo o

Figura 17 – Esquema da parede de concreto analisada.



Fonte: BORGES, 2018.

Figura 18 – Corte da parede com dimensões em metros (domínio analisado).



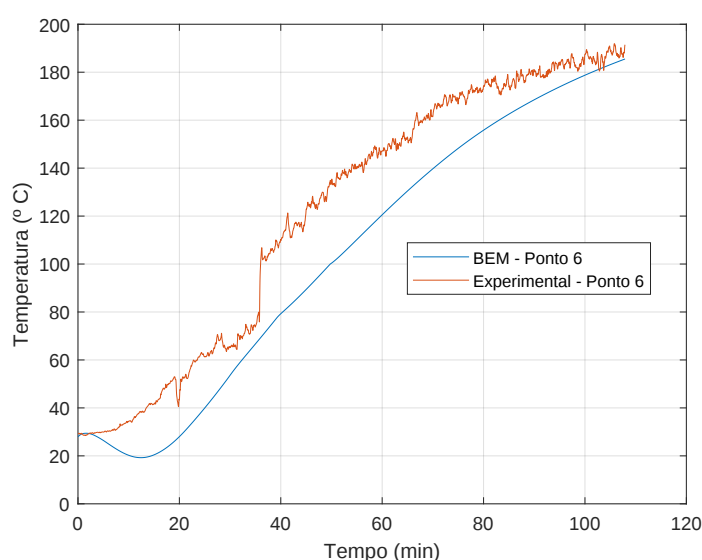
Fonte: Autor, 2020.

contorno está submetido à convecção e radiação em relação à temperatura ambiente, exceto a parte do domínio em que incide o aquecimento (parte do domínio em que se representam as setas na Figura 18) que está submetido à convecção e radiação em relação à temperatura da curva ISO 834. Em se tratando da discretização do domínio, utilizou-se 78 elementos de contorno lineares de tamanhos iguais em todo o contorno e 145 pontos internos também igualmente espaçados.

Os resultados obtidos são mostrados nas Figuras 19, 20 e 21, mediante as quais é possível notar a boa adequação da modelagem para o ponto 7, ponto 6 e temperatura média, não obstante a simplicidade do modelo e as imprecisões inerentes e inevitáveis do experimento. Uns pontos

foram melhor representado que outros pelo modelo numérico. Todavia, é importante dizer que a solução do ponto 6 e do ponto 7 são praticamente simétricas, o que não se nota da medição experimental, isso se deve provavelmente a inerentes imprecisões nas medidas, mas o modelo apresentou resposta semelhante para os dois pontos. Em relação à resistência térmica das paredes, conforme preconiza a norma ABNT NBR 10636, é calculada mediante a aferição da temperatura na face não exposta ao incêndio e tem valor igual ao menor tempo durante o qual os seguintes critérios são satisfeitos: nenhum ponto medido da face não exposta não atinge um aumento de temperatura superior a 180 °C em relação à temperatura inicial e a média da temperatura nos pontos medidos não atinge um aumento de temperatura superior a 140 °C em relação à temperatura inicial.

Figura 19 – Evolução da temperatura no tempo para a seção de parede de concreto no ponto 6.



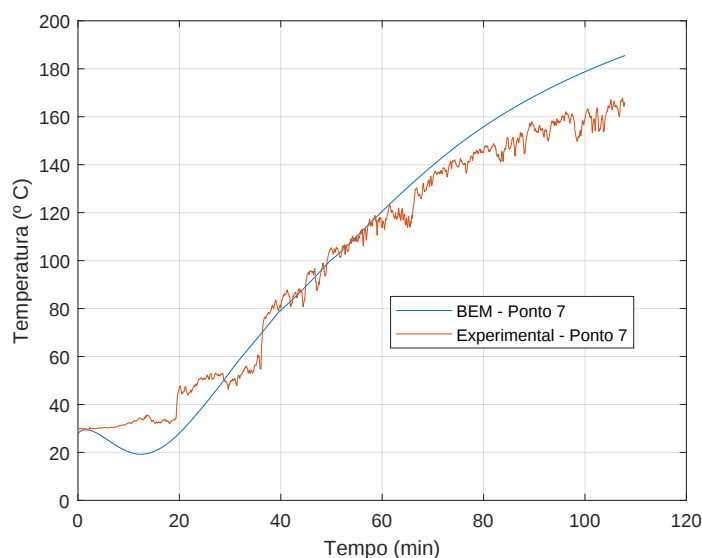
Fonte: Autor, 2020.

É possível notar na Figura abaixo (Figura 21), em que se mostra a temperatura média dos três pontos em análise na face não exposta, que a resistência térmica da parede obtida via BEM seria em torno de 120 min, haja vista que neste instante a temperatura média está por volta dos 170 °C, isto é, 140 °C acima da temperatura de início (30 °C); ao passo que a resistência via análise experimental seria de 80 min, haja vista que neste instante a temperatura média medida experimentalmente está num patamar de aproximadamente 170 °C. Tanto no tempo de análise experimental quanto na análise numérica nenhum ponto atingiu o limite de resistência, isto é, 180 °C acima da temperatura inicial.

6.4.2 Parede revestida na face exposta ao fogo

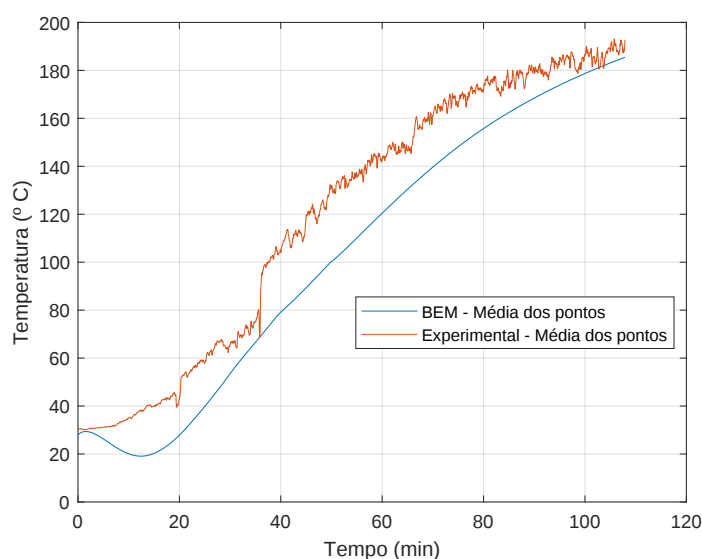
Nesta subseção, analisa-se o comportamento da parede de blocos de concreto revestida com argamassa cimentícia (2 cm), conforme Borges (2018) também o fez experimentalmente. Para essa análise, considerou-se que a argamassa cimentícia tem as mesmas propriedades térmicas

Figura 20 – Evolução da temperatura no tempo para a seção de parede de concreto no ponto 7.



Fonte: Autor, 2020.

Figura 21 – Evolução da temperatura no tempo para a seção de parede - média dos três pontos medidos.



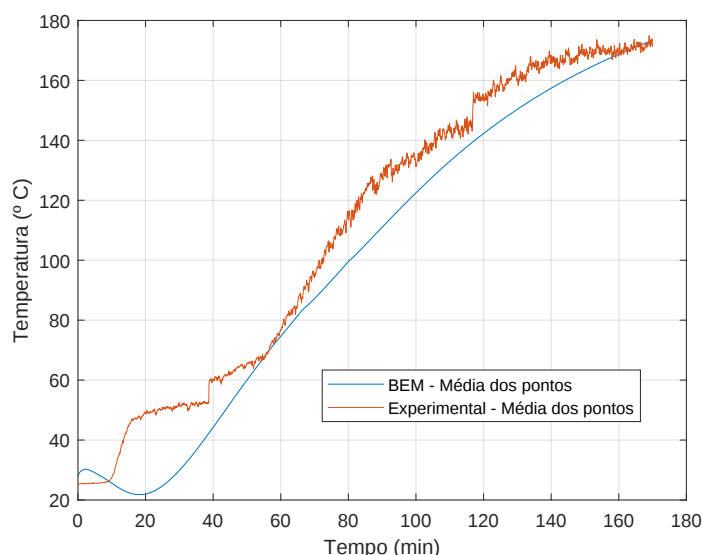
Fonte: Autor, 2020.

do concreto constituinte do bloco, de modo que a seção da parede apresenta um único material homogêneo. Todas as considerações feitas na subseção anterior atinentes a propriedades térmicas, a condições de contorno e à discretização são válidas para esse caso, salvo a espessura da parede, que neste caso é de 11 cm.

Nas Figuras 22, 23, 24, 25 são mostrados os resultados obtidos para a parede revestida na face exposta ao fogo nos pontos medidos. É possível notar a boa representação dos dados experimentais pelo modelo numérico, apesar das dificuldades já mencionadas e desafio que é comparar dados numéricos com experimentais. Essa parede apresenta resistência térmica de aproximadamente 160 min, conforme é possível depreender do gráfico constante na Figura

22, porquanto neste instante de tempo a temperatura se eleva 140 °C acima da temperatura inicial; é importante dizer que nesse caso não há diferença entre a resistência obtida pela curva experimental ou pela curva numérica, pois são muito semelhantes no instante de tempo 160 min, vide Figura 22.

Figura 22 – Evolução da temperatura no tempo para a seção de parede com revestimento na face exposta ao fogo - média dos três pontos médidos.



Fonte: Autor, 2020.

Além disso, durante o tempo da análise, não se verifica o rompimento do critério de 180 °C em ponto específico, conforme se pode ver nas Figuras 23, 24 e 25, pois para isso seria necessário uma temperatura em algum ponto mensurado de 210 °C, já que a temperatura inicial é algo por volta dos 30 °C.

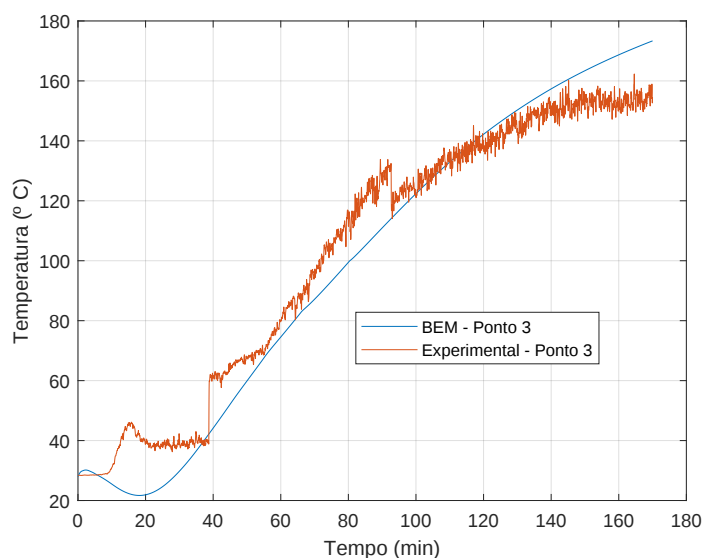
Portanto, conclui-se que o aumento da espessura da parede aumenta a resistência térmica da mesma, o que já era esperado de acordo com a condução térmica e os aspectos a ela antinentes.

Além disso, é importante ressaltar a boa eficácia do modelo no que diz respeito ao comportamento térmico da parede de blocos de concreto e no cálculo de sua resistência térmica perante o incêndio padrão; ademais, é de se frisar a representatividade das hipóteses ressaltadas durante esta seção.

6.5 Aplicação à parede de gesso

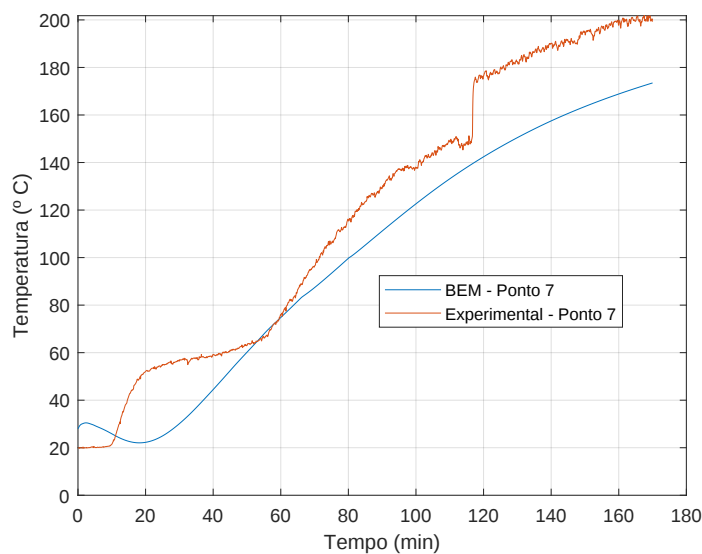
Nesta seção, analisa-se uma seção de uma parede de gesso compacto, isto é, paredes constituídas por blocos de gesso cheios cujas seções transversais são também cheia; isto facilita a análise no presente trabalho. A fim de comparar os resultados numéricos obtidos pela metodologia BEM aqui desenvolvida com dados experimentais, utiliza-se como objeto de aplicação a mesma parede analisada por Junior (2019). Além disso, salienta-se que o aludido autor verificou a adequação da curva de aquecimento do forno usado nos seus experimentos de acordo com norma

Figura 23 – Evolução da temperatura no tempo para a seção de parede com revestimento na face exposta ao fogo - ponto 3.



Fonte: Autor, 2020.

Figura 24 – Evolução da temperatura no tempo para a seção de parede com revestimento na face exposta ao fogo - ponto 7.

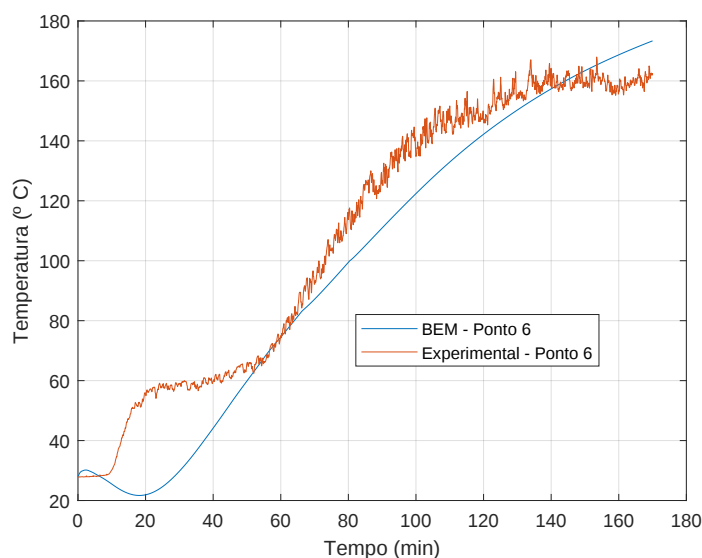


Fonte: Autor, 2020.

relacionada e demais normativos a ela atinentes, de modo que a curva de aquecimento fosse próxima da curva ISO 834 (curva utilizada neste trabalho para simular o incêndio); o gráfico da curva de aquecimento pode ser vista na referida obra.

Os tipos de paredes testadas são vista na Tabela 8. O esquema das paredes em apreço nesta seção podem ser vistas na Figura 26. Além disso, é preciso dizer que as dimensões dessas paredes são iguais àquela analisada na seção anterior, bem como o forno é o mesmo com as mesmas dimensões, pois forma trabalhos desenvolvidos no mesmo laboratório da UFPE. Portanto, o esquema das condições de contorno apresentado na seção anterior é contante na

Figura 25 – Evolução da temperatura no tempo para a seção de parede com revestimento na face exposta ao fogo - ponto 6.



Fonte: Autor, 2020.

Figura 18 é semelhante ao esquema para as paredes de gesso, salvo as espessuras das paredes. Os pontos para os quais se mediu a temperatura são aqueles indicados na Figura 26. Adicionalmente, é importante dizer que o autor Junior (2019) não apresentou as medidas dos pontos em que se mediu a temperatura experimentalmente, de modo que se considera que o ponto central se localiza exatamente no meio da parede os quatro pontos externos se localizam nos terços médios da parede. Para detalhes pormenorizados, veja-se a obra Junior (2019).

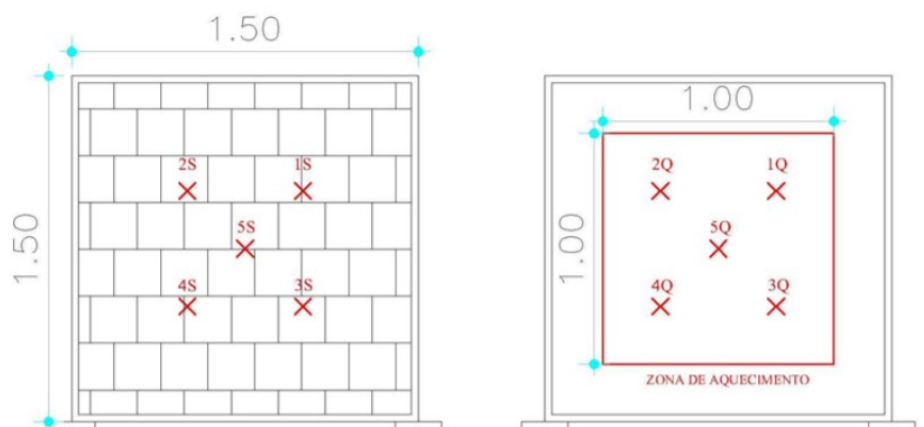
Tabela 8 – Tipos de bloco testados.

Parede	Tipo de Bloco	Espessura do bloco (mm)
50G	Gesso compacto	50
70G	Gesso compacto	70
100G	Gesso compacto	100

Fonte: Autor, 2020.

No que concerne às condições de contorno, as mesmas considerações feitas na seção anterior são válidas para esta seção. Em relação às propriedades térmicas do material constituinte da parede, isto é, as placas de gesso, é preciso dizer primeiramente que não foram mensuradas pelo autor Junior (2019), o que dificulta a modelagem numérica desta parede, porquanto não é possível afirmar com fidedignidade qual o valor dessas propriedades; utilizou-se os valores médios preconizados para placas de gesso e constantes na NBR 15220 para a massa específica, condutibilidade térmica e calor específico ($0.35 \frac{W}{m.K}$ para a condutividade térmica, $0.84 \frac{kJ}{kg.K}$ e $875 \frac{kg}{m^3}$ para a massa específica, porquanto a referida norma preconiza um intervalo de $750 - 100 \frac{kg}{m^3}$ para a massa específica, ou seja, adotou-se o valor médio do intervalo).

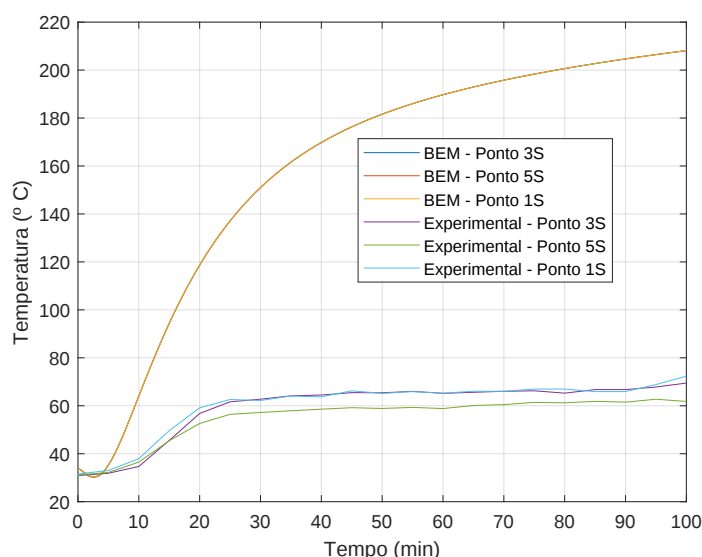
Figura 26 – Esquema das paredes de gesso analisadas.



Fonte: JUNIOR, 2019.

Nas Figuras 27 e 28, são mostrados os resultados obtidos para análise das paredes de gesso, em que é possível depreender prontamente que o modelo numérico deste trabalho não conseguiu representar os dados experimentais. Isto certamente se deve por três principais motivos separados ou concorrentes citados a seguir. Primeiro, as propriedades térmicas da norma não representam o material da parede; segundo, erros inerentes ao experimento, inclusive o autor cita alguns defeitos em alguns termopares; e terceiro, ocorre algum fenômeno térmico que o modelo aqui desenvolvido não consegue representar.

Figura 27 – Evolução da temperatura no tempo para a seção de parede de gesso 50G.

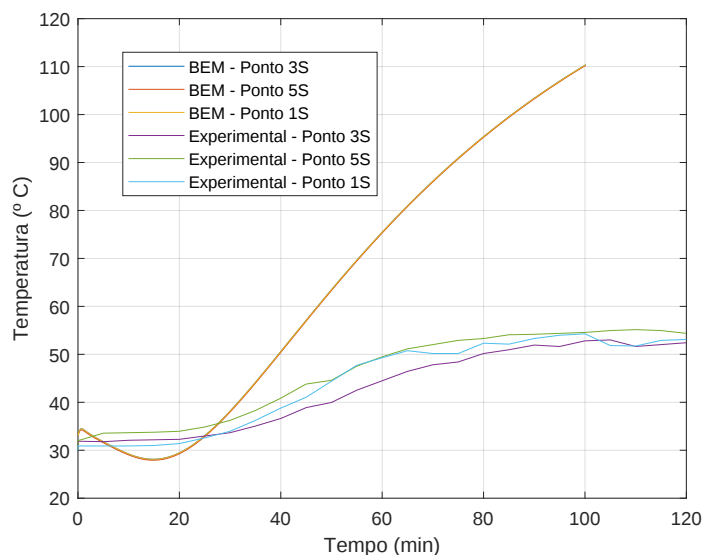


Fonte: Autor, 2020.

Além disso, é importante dizer que o modelo numérico foi coerente em dois pontos - o primeiro dos quais é que os três pontos para os quais se mensurou apresentaram a mesma temperatura devido a simetria e a configuração geométrica do domínio que representa o problema

e o segundo dos quais é que a temperatura da face não exposta diminuiu na parede de mais espessa.

Figura 28 – Evolução da temperatura no tempo para a seção de parede de gesso 100G.



Fonte: Autor, 2020.

Ademais, diga-se que o comportamento das medições experimentais é atípica, porque a temperatura se mantém constante durante quase todo o experimento, salvo o pequeno crescimento no início, apesar do aquecimento do lado exposto ao fogo seguir a curva de incêndio padrão. Não se mostra as temperaturas para a parede 70G, isto é, aquela de espessura 70 mm, porquanto os resultados são semelhantes às que são mostradas e as mesmas considerações feitas acima são válidas para essa parede. Além disso, não se faz as comparações da resistência térmica da parede porque os resultados numéricos e experimentais estão muito diferentes; olhando para os dados experimentais não foi atingindo limite de resistência térmica de 140 °C médio tampouco os 170 °C em algum ponto; olhando para os dados numéricos apenas se atinge o limite de resistência na parede menos espessa de 50 mm, o que se dá aos 40 min.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A metodologia apresentada provou ser capaz e precisa para resolver o problema térmico 2D linear e não linear. Em particular, os problemas de validação apresentados cuja solução analítica é conhecida demonstrou a eficiência do método do Método dos Elementos de Contorno acoplado ao Método da Reciprocidade Dual; além disso, demonstraram a solidez da modelagem, pois as soluções obtidas via O BEM esteve muito próximo das soluções analíticas para os diferentes tipos de equações diferenciais parciais. Portanto, O BEM com a modelagem apresentada é uma boa alternativa de um método avançado em relação ao FEM para solução de equações diferenciais parciais não lineares e não homogêneas.

Em se tratando dos resultados para as seções de aço apresentadas, também é possível notar a boa adequação do modelagem, resultando em resultados muito próximos aos apresentados pelo método simplificado do código EN 1993-1-2, mesmo para seções esbeltas como as apresentadas; isso, por outro lado, revela a precisão do método simplificado da norma em relação a métodos avançados, como o apresentado aqui. Um ponto de destaque é que o aço é um material cujas propriedades estão bem definidas e geralmente homogêneas, o que facilita sobremaneira a modelagem numérica, haja vista a necessidade de dados referentes a propriedades para alimentar os modelos numéricos.

Em relação aos resultados obtidos para as seções estruturais de concreto aqui apresentadas, apesar de não considerar os efeitos da água migração e evaporação no concreto, também há bons resultados quando comparados ao código EN 1992-1-2. Modelar esse fenômeno de evaporação ainda é um desafio, pois está vinculado à fragmentação; e esta é uma sugestão para trabalhos futuros. Além disso, é importante dizer que o modelo aqui produzido é uma ferramenta complementar ao método 500 °C, pois tal método não apresenta solução térmica para o concreto. Outrossim, diga-se que igualmente ao aço o concreto tem características consolidadas e objeto de vários estudos em relação a outros materiais, o que novamente facilita a análise numérica.

No que concerne à aplicação à alvenaria de concreto, obteve-se bons resultados para o comportamento térmico da seção analisada, bem como para a obtenção da resistência térmica da parede, não obstante a simplicidade do modelo e as hipóteses adotadas. Houve uma boa representação dos dados experimentais, apesar do desafio dessa tarefa e das dificuldades inerentes à análise experimental; nesse sentido, as propriedades térmicas do concreto constantes nas normas respectivas representaram bem o concreto usado das alvenarias estudadas.

Os resultados obtidos para as alvenarias de placas de gesso não representaram os dados experimentais, apesar de serem placas homogêneas sem a presença de interfícios internos. Isso certamente se deve a dificuldades inerentes ao experimento e à determinação das propriedades térmicas do material constituinte. Todavia, o fato de a temperatura se manter constante durante todo tempo de análise experimental é atípico e decerto se deve a algum fenômeno químico-físico cuja representação não é alcançada pela condutividade térmica.

7.1 Trabalhos Futuros

Sugere-se a construção de modelos considerando: os efeitos da água de migração e evaporação no concreto e fenômenos a elas atinentes; a possibilidade de modelar o fluxo de calor no ar, a fim de que se represente com fidedignidade a transferência térmica em alvenarias cujas seções apresentam poucos intertícios internos, de modo a ser viável a análise via BEM e nos quais há ar atmosférico em que acontecem fenômenos diferentes da condução térmica.

REFERÊNCIAS

- AZEVEDO, J. P. S. Análise de problemas não-lineares de condução térmica pelo método dos elementos de contorno. *Revista Internacional de Métodos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, v. 11, 1995. Citado na página 51.
- BIN, H. et al. Boundary element analysis of the orthotropic potential problems in 2-d thin structures with the higher order elements. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 118, 2020. Citado na página 13.
- BORGES, I. de A. *Alvenarias de vedação em blocos de concreto simples submetidas a elevadas temperaturas características de processos de incêndio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 19, 60, 61, 62 e 63.
- BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. *Boundary Elements: an introductory course*. 2. ed. [S.l.]: Computational Mechanics Publications, 1992. Citado 4 vezes nas páginas 29, 30, 31 e 37.
- BROWNLEE, R. A. Error estimates for interpolation of rough data using the scattered shifts of a radial basis function. *Numerical Algorithms*, v. 39, 2005. Citado na página 48.
- BULCAO, A. *Formulação do Método dos Elementos de Contorno com dupla reciprocidade usando elementos de ordem superior aplicada a problemas de campo escalar generalizado*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 1999. Citado 4 vezes nas páginas 28, 38, 39 e 43.
- CASHELL, K. A. et al. Experimental and numerical analysis of stainless steel cellular beams in fire. *Fire Safety Journal*, v. 121, 2021. Citado na página 17.
- CHENG, A. H. D. Particular solutions of laplacian, helmholtz-type, and polyharmonic operators involving higher order radial basis functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 24, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 48.
- COELHO, A. A. C. de M. *Estudo do comportamento das alvenarias de vedação em blocos cerâmicos submetidos a elevadas temperaturas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2017. Citado na página 20.
- CORRÊA, C. et al. Incêndio em compartimento de residência na cidade do recife: Um estudo experimental. *Revista ALCONPAT*, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- CORRÊA, C. et al. Mapeamento de incêndios em edificações: um estudo de caso na cidade do recife. *Revista de Engenharia Civil IMED*, v. 2, 2015. Citado na página 12.
- DRURY, M. M.; KORDOSKY, A. N.; QUIEL, S. E. Structural fire resistance of partially restrained, partially composite floor beams, ii: Modeling. *Journal of Construction Steel Research*, v. 197, 2020. Citado na página 17.
- GAO, J. et al. A multi-gpu parallel optimization model for the preconditioned conjugate gradient algorithm. *Parallel Computing*, v. 63, p. 1–16, Abril 2017. Citado na página 24.
- GAO, W. et al. Global-element-based free element method for solving non-linear and inhomogeneous heat conduction problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 109, 2019. Citado na página 49.

- GOV.UK. *Ministério da Habilitação, Comunidades e Governo Local. Departamento de Estatística Nacional*. 2019. <https://www.gov.uk/government/organisations/ministry-of-housing-communities-and-local-government>. Access date: 27 June 2020. Citado na página 12.
- JUNIOR, J. do C. B. *Alvenarias de vedação em blocos cerâmicos revestida de gesso submetidas a elevadas temperaturas características de processos de incêndio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 19, 65, 67 e 68.
- KARUR, S. R.; RAMACHANDRAN, P. A. Radial basis function approximation in the dual reciprocity method. *Mathematical and Computer Modeling*, v. 20, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 48.
- KUCUKLER, M. Lateral instability of steel beams in fire: Behaviour, numerical modelling and design. *Journal of Construction Steel Research*, v. 170, 2020. Citado na página 18.
- LEWANDOWSKI, M. T. Implementation of the boundary element method to two-dimensional heat transfer with thermal bridge effects. *Faculty of Technical Physics and Applied Mathematics*, v. 52, 2013. Citado na página 22.
- NGUYEN, T. D.; MEFTAH, F. Behavior of clay hollow-brick masonry walls during fire. part 1: Experimental analysis. *Fire Safety Journal*, v. 52, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.
- NGUYEN, T. D.; MEFTAH, F. Behavior of hollow clay brick masonry walls during fire. part 2: 3d finite element modeling and spalling assessment. *Fire Safety Journal*, v. 52, 2012. Citado na página 21.
- ONISHI, K.; KUROKI, T. Boundary element method in singular and nonlinear heat transfer. *Boundary Element Methods in Engineering*, v. 24, 1982. Citado na página 49.
- PARTRIDGE, P. W.; BREBBIA, C. A.; WROBEL, L. C. *The dual reciprocity boundary element method*. [S.l.]: Computational Mechanics Publications, 1992. Citado 8 vezes nas páginas 13, 34, 37, 45, 46, 47, 49 e 50.
- PEIXOTO, P. da S. *Análise de discretizações e interpolações em malhas icosaédricas e aplicações em modelos de transporte semi-lagrangianos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013. Citado na página 48.
- PRAKASH, P. R. et al. Finite element based micro modelling of masonry walls subjected to fire exposure: Framework validation and structural implications. *Engineering Structures*, v. 213, 2020. Citado na página 21.
- SCHABACK, R. Error estimates and condition numbers for radial basis function interpolation. *Advances in Computational Mathematics*, v. 3, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 48.
- SIMOES, I. et al. Experimental validation of a frequency domain bem model to study 2d and 3d heat transfer by conduction. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 36, 2012. Citado na página 23.
- Sá, R. T. et al. Performance of plaster walls exposed to high temperatures. *Springer Nature Switzerland*, 2020. Citado na página 21.

- TADEU, A.; SIMÕES, I.; PRATA, J. Simulation of dynamic linear thermal bridges using a boundary element method model in the frequency domain. *Energy and Buildings*, v. 43, 2011. Citado na página 20.
- VITORINO, H.; RODRIGUES, H.; COUTO, C. Evaluation of post-earthquake fire capacity of reinforced concrete elements. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, v. 128, 2020. Citado na página 18.
- WEN, J.; KHONSARI, M. M. Transient heat conduction in rolling/sliding components by a dual reciprocity boundary element method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 52, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 47.
- WORLD FIRE STATISTICS, REPORT Nº23. *Centre of Fire Statistics (International Association of Fire and Rescue Services)*. [S.l.], 2018. 62 p. Citado na página 16.
- WROBEL, L. C.; BREBBIA, C. A. The dual reciprocity boundary element formulation for nonlinear diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 65, 1987. Citado na página 51.
- YANG, K. et al. New interface integration bem for solving multi-medium nonlinear heat transfer problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 117, 2020. Citado na página 23.
- ZHANG, R. et al. Fire behaviour of thin-walled steel tube confined reinforced concrete stub columns under axial compression. *Journal of Construction Steel Research*, v. 172, 2020. Citado na página 19.
- ZHOU, F. et al. Shape variable radial basis function and its application in dual reciprocity boundary face method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 35, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 22.
- ZHOU, W. et al. The boundary element method for elasticity problems with concentrated loads based on displacement singular elements. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 99, 2019. Citado na página 13.