



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

IVANGILLYS GOMES DE LIMA

**PROCESSO GOMPERTZ-ARMA E PROPRIEDADES: Uma Aplicação à
Precificação do Mercado Financeiro**

Recife

2021

IVANGILLYS GOMES DE LIMA

**PROCESSO GOMPERTZ-ARMA E PROPRIEDADES: Uma Aplicação à
Precificação do Mercado Financeiro**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Estatística.

Área de Concentração: Estatística Aplicada

Orientador (a): Prof.^a Dra. Maria do Carmo Soares de lima

Coorientador (a): Prof. Dr. Abraão D.C Nascimento

Recife

2021

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

L732p Lima, Ivangillys Gomes de
Processo Gompertz-ARMA e propriedades: uma aplicação à precificação do mercado financeiro / Ivangillys Gomes de Lima. – 2021.
65 f.: il., fig., tab.

Orientadora: Maria do Carmo Soares de Lima.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Estatística, Recife, 2021.
Inclui referências e apêndices.

1. Estatística aplicada. 2. Séries temporais. I. Lima, Maria do Carmo Soares de (orientadora). II. Título.

310

CDD (23. ed.)

UFPE- CCEN 2021 - 148

IVANGILLYS GOMES DE LIMA

**“ PROCESSO GOMPERTZ-ARMA E PROPRIEDADES: UMA APLICAÇÃO A PRECIFICAÇÃO DO
MERCADO FINANCEIRO”**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Estatística.

Aprovada em: 26 de Julho de 2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof.^a Dr.^a Maria do Carmo Soares de Lima
UFPE

Prof. Dr. Vinicius Quintas Souto Maior
UFPE

Prof. Dr. Pedro Monteiro de Almeida Júnior
UEPB

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus antes de tudo, pois entre tantas coisas magníficas que nos tem presenteado, deu-me a graça de poder levantar todos os dias e também me agraciou mantendo os meus de pé. Agradeço também a minha família, especialmente na pessoa de minha esposa, maravilhosa, que me deu o estímulo necessário nos dias mais escuros da pós graduação e é minha fiel companheira nessa jornada. . . minha mãe e meus irmãos, que sempre acreditam em mim e são imprescindíveis para tudo o que eu faço. Aos amigos da pós, os meninos do doutorado nas pessoas de Cesar, Nicolas, Joás, Luan, João Eudes, AnaBeth, France e tantos outros que sempre estiveram disponíveis para ouvir e estender as mãos,..., mas, quero agradecer de forma especial ao André Medeiros, Felipe Brito, Isabel e ao João que entraram juntos comigo nessa odisseia que foi a pós graduação, e firmamos uma amizade para além dos muros da universidade, e também agradeço ao Jairo Santana e a Tatiane Ribeiro, porque sempre, sempre de verdade, acreditaram que eu poderia ir até mais longe, e sempre apontaram o caminho... sem eles, sem todos eles citados acima, isso teria sido impossível. Agradeço aos professores, especialmente aos orientadores por tamanha paciência e dedicação.

RESUMO

No processo de desenvolvimento científico, um dos temas que ao longo do tempo vem recebendo maior atenção é o das séries temporais, com aplicações em vários campos do conhecimento, tais como finanças, economia, biologia, hidrologia, etc. Neste sentido, o presente trabalho busca contribuir com os estudos das séries temporais a partir da proposição de um modelo alternativo ao tão bem conhecido modelo autorregressivo e de médias móveis (ARMA) e ao modelo ARMA Generalizado (GARMA), por possuírem limitações quanto a suposição de normalidade da variável resposta no caso do modelo ARMA e a limitação, novamente, da variável resposta, às distribuições da família exponencial, no caso do GARMA. Para tanto, considera-se como distribuição marginal do modelo proposto a distribuição Gompertz, definindo, portanto, o novo modelo denominado de – Gompertz-ARMA. O referido modelo é construído com base na reparametrização em termos dos quantis da distribuição Gompertz. O objetivo de usar um modelo reparametrizado é ter uma maior flexibilização na análise de uma dada série temporal, considerando que passamos a poder estudar qualquer trecho da série, a mediana, o primeiro e o terceiro quartil. Uma vez definido o modelo, realiza-se um estudo de simulação de Monte Carlo para diferentes cenários dos parâmetros da distribuição Gompertz-ARMA, diferentes quantis e tamanhos amostrais. Como método de estimação dos parâmetros da série, utiliza-se o método da máxima verossimilhança condicional. Por fim, para mostrar a aplicabilidade do novo modelo à situações reais, realiza-se um estudo sobre a série de preços de fechamento das ações da PETROBRAS, buscando prever o comportamento da série temporal considerada.

Palavras-chaves: Gompertz; Gompertz-ARMA; predição; séries temporais.

ABSTRACT

In the process of scientific development, one of the themes that has received greater attention over time is that of time series, which may have applications in various fields of knowledge, such as finance, economics, biology, hydrology, etc. In this sense, the present work seeks to contribute to the studies of time series from the proposition of an alternative model to the well-known autoregressive and moving average model (ARMA) and to the Generalized ARMA model (GARMA), as they have limitations as to a normality assumption of the response variable in the case of the ARMA model and the limitation, again of the response variable to the exponential family distributions, in the case of the GARMA. Therefore, the Gompertz distribution is considered as the marginal distribution of the proposed model, thus defining the new model called — Gompertz-ARMA. This model is built based on the reparametrization in terms of the quantiles of the Gompertz distribution. The objective of using a reparative model is to have greater flexibility in the analysis of a temporal data series, considering that we are now able to study any part of the series, the median, the first and third quartiles. Once the model is defined, a Monte Carlo simulation study is carried out for different settings of the parameters of the Gompertz-ARMA distribution, different quantiles and samples. As a method of estimating the parameters of the series, the conditional maximum likelihood method is used. Finally, to show the applicability of the new model to real hypotheses, a study is carried out on the data from the closing of PETROBRAS shares, seeking to predict the behavior of the considered time series.

Keywords: Gompertz; Gompertz-ARMA; forecast; time series.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Funções densidade de probabilidade para alguns valores dos parâmetros a e c	18
Figura 2 – Gráfico da densidade da Gompertz reparametrizada	20
Figura 3 – Série temporal $\phi = 0.1$ e $u = 0.5$	33
Figura 4 – Série temporal $\phi = 0.8$ e $u = 0.5$	33
Figura 5 – Série temporal $\theta = 0.1$ e $u = 0.5$	34
Figura 6 – Série temporal $\theta = 0.9$ e $u = 0.5$	34
Figura 7 – Série temporal com $\phi = 0.1, \theta = 0.1, q = 1.2$ com $u = 0.5$	35
Figura 8 – Série temporal com $\phi = 0.9$ e $\theta = 0.8$ com $u = 0.5$	35
Figura 9 – Série temporal com $\phi = 0.5$ e $\theta = 0.8$ com $u = 0.25$	35
Figura 10 – Série temporal com $\phi = 0.5$ e $\theta = 0.8$ com $u = 0.5$	36
Figura 11 – Série temporal com $\phi = 0.5$ e $\theta = 0.8$ com $u = 0.75$	36
Figura 12 – Série temporal do preço fechamento das ações da Petrobras	46
Figura 13 – ACF e PACF da série de preço de fechamento das ações da Petrobras	47
Figura 14 – Ajuste Gompertz-AR(1)	48
Figura 15 – Resíduos Gompertz-AR(1)	48
Figura 16 – Ajuste do modelo Gama-AR(1)	49
Figura 17 – Resíduos Gama-AR(1)	49

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Simulação modelo Autorregressivo com parâmetros: $\alpha = 0.4$, $c = 0.9$, $\phi = 0.25$ e diferentes quantis (U)	38
Tabela 2 – Simulação modelo de Médias móveis com parâmetros $\alpha = 1$, $c = 0.5$, $\theta = 0.5$ e diferentes quantis (U)	38
Tabela 3 – Simulação ARMA com parâmetros: $\alpha = 0.4$, $c = 0.90$, $\phi = 0.25$, $\theta = 0.50$ e diferentes quantis (U)	40
Tabela 4 – Simulação modelo Autorregressivo com parâmetros: $\alpha = (2.4, 1.2, -0.4)$, $c = (1.5, 0.9, 0.3)$, $\phi = (0.75, 0.5, 0.25)$ avaliados no segundo quartil	41
Tabela 5 – Simulação modelo de Médias móveis com parâmetros $\alpha = (0.2, 0.6, 1)$, $c = (0.25, 0.75, 1.5)$ $\theta = (0.1, 0.5, 0.9)$ avaliados no segundo quartil	42
Tabela 6 – Simulação ARMA com parâmetros: $\alpha = (1.2, -0.8, -0.4)$, $c = (0.9, 0.6, 0.2)$, $\phi = (0.2, 0.5, 0.95)$, $\theta = (0.95, 0.5, 0.2)$ avaliados no segundo quartil	43
Tabela 7 – Estatística descritiva	47
Tabela 8 – Medidas de acurácia	50
Tabela 9 – Estimativas	50
Tabela 10 – Critérios de seleção de modelos	50

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	MOTIVAÇÃO	11
1.2	OBJETIVOS	13
1.3	PLATAFORMA COMPUTACIONAL	13
1.4	ORGANIZAÇÃO	13
2	DISTRIBUIÇÃO GOMPERTZ	15
2.1	CARACTERIZAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO GOMPERTZ	17
2.2	DISTRIBUIÇÃO GOMPERTZ REPARAMETRIZADA E ALGUMAS PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS	19
2.3	INFERÊNCIA	20
3	PROPOSTA MODELO GOMPERTZ-ARMA	23
3.1	MODELO GARMA	24
3.2	O MODELO GOMPERTZ-ARMA	26
3.3	INFERÊNCIA NO MODELO GOMPERTZ-ARMA	26
3.3.1	Predição	28
3.3.2	Análise de resíduos	29
3.3.3	Medidas de ajustes	30
4	ESTUDO DE SIMULAÇÃO	32
4.1	MODELO GOMPERTZ-AR(1)	32
4.2	GOMPERTZ-MA(1)	33
4.3	GOMPERTZ-ARMA(1,1)	34
4.4	RESULTADOS NUMÉRICOS	36
4.4.1	Estudo de Monte Carlo	36
5	APLICAÇÃO	44
5.1	A PROBLEMATIZAÇÃO ENTRE A ANÁLISE DE PREÇOS E A ANÁLISE DE VOLATILIDADE	44
5.2	MECADO DE CAPITAIS	44
6	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	51
	REFERÊNCIAS	52
	APÊNDICE A – MATRIZ DE INFORMAÇÃO DE FISHER	56

APÊNDICE B – CÓDIGOS DA GERAÇÃO	60
--	-----------

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Uma das áreas da estatística que ao longo do últimos anos vem se desenvolvendo de forma muito significativa é a de séries temporais, que de acordo com Morettin e Tolo (2006), tem como um dos objetivos fazer previsões, sejam essas de curto prazo, como nos casos de séries de vendas, produção e estoque; ou de longo prazo, como no caso de séries populacionais e de produtividade. Dentre os métodos desenvolvidos no transcurso do tempo, a metodologia de Box & Jenkins (1976) vem se destacando no sentido de aplicações e estudos, especialmente nas áreas de economia e finanças.

O modelo autorregressivo de médias móveis (ARMA), proposto por Box e Cox (1964), tornou-se uma abordagem padrão em estudos de séries temporais, entretanto, o modelo possui certas limitações que são intrínsecas ao próprio desenvolvimento, como a suposição de normalidade da variável resposta, ou seja, a variável resposta precisa ser necessariamente normal. Uma vez que nem sempre a natureza dos dados que estão sendo submetidos a análise tem distribuição normal, essa suposição restringe a aplicabilidade do modelo para determinados conjuntos de dados. Com vistas a superar essa limitação, algumas abordagens alternativas foram feitas e dentre elas, pode-se destacar os modelos autorregressivos de médias móveis generalizados (GARMA). Essa classe de modelos pode ser usada para modelar séries cujas respostas tenham dependência temporal e não sejam limitadas à distribuição gaussiana (BENJAMIN; RIGBY; STASINOPOULOS, 2003).

Por outro lado, outros modelos surgiram como alternativa ao GARMA, e têm como objetivo modelar séries cuja resposta não precisa estar necessariamente incluída dentro das distribuições da família exponencial. Nesse sentido, os trabalhos desenvolvidos por:

- Ferrari e Cribari-Neto (2004) propuseram um modelo cuja distribuição marginal é a distribuição beta, tomando, dessa forma, o modelo beta autorregressivo de médias móveis (β ARMA). Os autores aplicaram o modelo desenvolvido ao estudo da taxa de desemprego oculto, na cidade de São Paulo. O estudo abarca o período que vai de Janeiro de 1991 até Novembro de 2015.
- Já Cordeiro e Andrade (2009), expandiram as séries de respostas para as distribuições da família exponencial generalizada, propondo uma nova classe de modelos, a saber,

modelos ARMA generalizados transformados (TGARMA);

- Bayer, Bayer e Pumi (2017) desenvolveram do modelo Kumaraswamy autorregressivo de médias móveis (KARMA), cuja distribuição marginal é a Kumaraswamy, com aplicações em hidrologia. A aplicação tem como objetivo avaliar a média mensal da umidade relativa do ar da cidade de Brasília, para os anos de 2000 até 2016.
- Maior e Cysneiros (2018) desenvolveram um modelo de séries temporais sobre a estrutura autorregressiva e de médias móveis para a classe das distribuições simétricas, propondo dessa forma, o modelo SYMARMA, que foi aplicado ao mercado financeiro, avaliando o excesso de retorno dos preços de fechamento das ações da Microsoft e o índice S&P500.

Mais recentemente tivemos outros autores, que seguindo a mesma linha, propuseram extensões ao modelo ARMA tradicional, como por exemplo:

- Ribeiro (2020), propôs o modelo Unit BurrXII ARMA, com o objetivo de modelar dados no intervalo (0,1) e aplicou este novo modelo aos dados de taxas de mortalidade provocadas pelo novo Coronavírus.
- Palm, Bayer e Cintra (2021), por sua vez, prosuperam uma extensão para os modelos ARMA tomando como marginal a distribuição Beta Binomial, dando forma ao modelo β BARMA, com o objetivo de modelar dados de contagem limitados e amplitude.
- Já Almeida-Junior e Nascimento (2021), a partir das marginais \mathcal{G}_i^0 e K-Bessel, desenvolveram os modelos \mathcal{G}_i^0 -ARMA e KB-ARMA, com o objetivo de descrever séries temporais de intensidades das imagens de radares tanto de imagens distintas quanto das vizinhanças espaciais de uma imagem.

Seguindo a mesma linha do que fora proposto pelos autores supracitados, especialmente Ribeiro (2020), no sentido de modelagem, o presente trabalho busca uma abordagem alternativa para se fazer predição em áreas relevantes do conhecimento, tendo como marginal a distribuição GOMPERTZ, a partir de uma reparametrização específica, que busca captar os efeitos dos quantis das séries analisadas e evidenciar o efeito desses quantis na predição do preço de fechamento das ações listadas na Bolsa de valores de São Paulo.

1.2 OBJETIVOS

De uma forma mais abrangente, o presente trabalho tem como objetivo propor uma nova alternativa ao modelo GARMA, uma vez que este já é uma generalização do ARMA, no entanto, mantém a restrição sobre a variável resposta, que agora passa a ser as distribuições da família exponencial, tomando como distribuição marginal a distribuição Gompertz reparametrizada pela sua quantílica.

De forma mais específica, o trabalho tem como objetivos:

- Propor uma nova reparametrização para a função de distribuição Gompertz, através da quantílica;
- Propor uma nova abordagem à análise de séries temporais a partir da distribuição Gompertz reparametrizada pela quantílica;
- Verificar se o modelo Gompertz-ARMA(1,1) e os seus casos particulares, Gompertz-AR(1) e Gompertz-MA(1) são eficientes na análise dos preços de fechamento das ações listados na Bolsa de valores de São Paulo, tomando as ações da Petrobras como referência.

1.3 PLATAFORMA COMPUTACIONAL

No que tange às avaliações numéricas, simulações, elaboração de gráficos, expostas ao longo da dissertação, utilizamos o *software* R na sua versão 4.0.5 para Windows. O *software* R encontra-se disponível gratuitamente no site <https://www.r-project.org>. Por fim, o trabalho foi digitado usando o sistema de tipografia \LaTeX , seguindo o desenvolvimento de Goossens, Mittelbach e Samarin (1994).

1.4 ORGANIZAÇÃO

O presente trabalho está estruturado em quatro capítulos, desenvolvidos da seguinte forma: no Capítulo 2 apresenta-se uma breve revisão da literatura, mostrando desde o surgimento do modelo Gompertz até algumas das aplicações mais recentes, bem como, descreve-se algumas propriedades estatísticas e matemáticas. Além disso, é feita a proposta de uma reparametrização da distribuição Gompertz. No Capítulo 3, introduz-se o modelo Gompertz-ARMA(p,q), o

processo inferencial para a estimação dos seus parâmetros e as medidas de qualidade para se avaliar a acurácia do modelo proposto. Já o Capítulo 4 tem como objetivo avaliar o modelo proposto por meio de estudos de simulação de Monte Carlo. Já no Capítulo 5 tem-se uma aplicação à dados do mercado financeiro e, por fim, no Capítulo 6 temos a conclusão e a proposta de novos trabalhos.

2 DISTRIBUIÇÃO GOMPERTZ

Gompertz (1825) mostrou que as taxas de mortalidade cresciam exponencialmente com o aumento da idade. A motivação por trás do desenvolvimento do modelo estava no fato de se querer maior precisão para os cálculos das anuidades, ou seguros. Com o passar do tempo, o modelo foi sendo estendido para outras áreas do conhecimento com o propósito de analisar os padrões de mortes em uma ampla gama de outros organismos (KIRKWOOD, 2015)

Garg, Rao e Redmond (1970) estudaram algumas das propriedades estatísticas da distribuição de Gompertz e estimaram os parâmetros usando o método de máxima verossimilhança com referência aos dados sobre os efeitos da contracepção oral prolongada na mortalidade em ratos. Jaheen (2003) estudou esta distribuição com base em censura¹ tipo II e valores de registro usando abordagem bayesiana. Wu, Hung e Tsai (2003) derivaram os estimadores pontuais e intervalares para os parâmetros da distribuição Gompertz baseada em amostras censuradas tipo II progressivas.

Wu, Hung e Tsai (2004) usaram o método dos mínimos quadrados para estimar os parâmetros da distribuição Gompertz. Ismail (2010) discutiu estimativas pontuais e intervalares de uma distribuição Gompertz bi-paramétrica em testes de vida parcialmente acelerados com censura Tipo II.

Kiani, Arasan e Midi (2012), que estudaram o desempenho do modelo Gompertz considerando a dependência temporal das covariáveis, na presença de dados censurados à direita. Além disso, foi feita uma comparação entre o desempenho do modelo sob diferentes proporções de censura (CP) e tamanhos de amostra.

Sob essa mesma perspectiva de regressão, muitos autores abordaram o modelo Gompertz em diferentes áreas do conhecimento, como listado a seguir:

1. Crescimento de organismos, como

- Dinossauros (COOPER et al., 2008; LEE et al., 2014, por exemplo) ;
- Pássaros (RICKLEFS, 1967; RICKLEFS, 1968; Tjørve, 2009, por exemplo);
- Mamíferos no geral, (ZULLINGER et al., 1984; BEGALL, 1997, por exemplo);

¹ De uma forma geral pode-se definir censura como sendo os dados que estão fora dos limites de mensuração de determinados equipamentos. Esse tipo de dado pode ser subdividido em duas categorias, dados com censura do Tipo I, e dados com censura do Tipo II. No caso da censura Tipo I, os limites de medição são fixos e o número de dados fora desse limite variam. Enquanto que na censura Tipo II, os limites são variáveis, Mercy e Kumaran (2010)

- Marsupiais (LEE; COCKBURN et al., 1985; COCKBURN; JOHNSON, 1988, por exemplo).
2. Crescimento de tumores (LAIRD, 1964; NORTON, 1988; VAGHI et al., 2020).
 3. Sobrevida em pacientes com câncer (RIFFENBURGH; JOHNSTONE, 2001, por exemplo)

Adicionalmente, na proposta de novas distribuições o modelo Gompertz também tem sua importância. El-Gohary, Alshamrani e Al-Otaibi (2013) generalizaram a distribuição Gompertz propondo um novo modelo com três parâmetros que se mostrou eficaz no ajuste a um conjunto de dados de tempo de vida.

Com o grande uso do modelo Gompertz para modelar tempo de vida, Lenart e Missov (2016) perceberam que muitos autores que trabalhavam com o modelo até então estavam negligenciando o fato da análise do ajuste satisfazer ou não os critérios teóricos, a saber: estatística de Anderson-Darling, teste do coeficiente de correlação, uma estatística usando os momentos e um teste contra as distribuições de valores extremos generalizados. Essas medidas de ajustes foram discutidas no trabalho.

Mazucheli, Menezes e Dey (2019) propuseram uma distribuição Gompertz reparametrizada. Os autores usaram a transformação $X = \exp(-Y)$ para obter a nova distribuição com suporte no intervalo $(0,1)$. Antes da transformação, Y era uma variável aleatória não negativa, com distribuição Gompertz. A nova distribuição foi nomeada de Gompertz unitária. O novo modelo apresentou maior flexibilidade no que diz respeito às formas da função taxa de falha, que apresentou as formas constante, crescente e as formas de banheira e banheira invertida. Adicionalmente, a distribuição proposta mostrou-se com performance superior na aplicação a dados ambientais e de fadiga.

Mais recentemente, Eliwa et al. (2020) propuseram uma extensão bivariada da família Gompertz-G. No trabalho, é proposto uma distribuição bivariada flexível com base na distribuição Marshall-Olkinna, na família Gompertz-H. Além disso, os autores mostraram a performance da família em questão através de uma aplicação a dados reais de futebol.

Embora com o passar do tempo a distribuição tenha ganhado relevância e aplicação nas mais diversas áreas, o modelo não se desenvolveu na mesma medida sob a perspectiva das séries temporais. Dessa forma, o presente trabalho é inovador no que diz respeito à proposta de se utilizar a distribuição Gompertz reparametrizada pela quantílica, uma vez que há maior flexibilidade na hora de se fazer as análises das séries temporais, não considerando necessa-

riamente a média e a mediana como referência; e ao fato de utilizar essa distribuição como marginal para um modelo de séries temporais. Além do fato de não ser encontrado na literatura um modelo Gompertz autorregressivo e de médias móveis.

2.1 CARACTERIZAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO GOMPERTZ

A distribuição Gompertz é uma distribuição contínua, com suporte definido nos \mathbb{R}^+ . A função densidade de probabilidade (fdp) é expressa da seguinte forma:

$$f(x; a, c) = a \exp(cx) \exp \left\{ \left(\frac{-a}{c} \right) [\exp(cx) - 1] \right\}, \quad (2.1)$$

em que $a > 0$ é o parâmetro de escala e $c > 0$ é o parâmetro de forma. A função de distribuição acumulada (fda), é dada por:

$$F(x; a, c) = 1 - \exp \left\{ \left(\frac{-a}{c} \right) [\exp(cx) - 1] \right\}, \quad (2.2)$$

Algumas formas assumidas por (2.1) são apresentadas na Figura 1. Note que para valores muito pequenos do parâmetro de forma c , o gráfico assume a forma decrescente. No entanto, à medida que os valores correspondentes ao parâmetro c crescem, a curva vai se tornando unimodal, tendo um decaimento muito expressivo à medida que x vai aumentando. Na construção do gráfico, mantivemos sempre o parâmetro de escala fixo, enquanto o parâmetro de forma foi alterado, com o objetivo de vermos as possíveis formas das curvas da função.

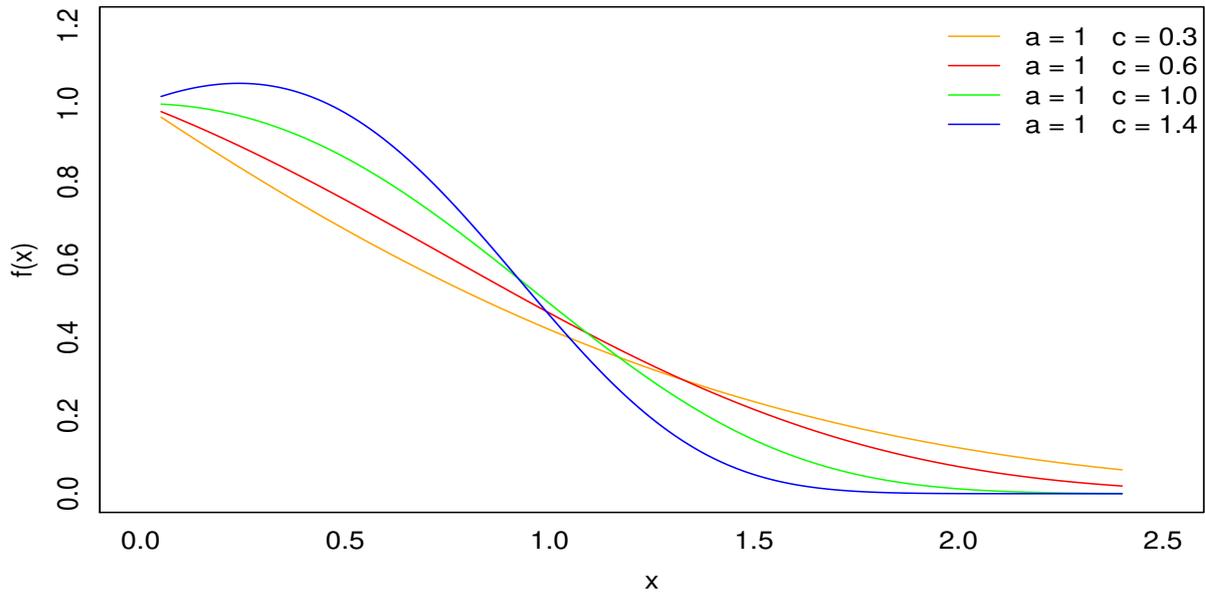
Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade (2.1), escreve-se $X \sim Gomp(a, c)$. A função quantílica (q) é obtida a partir da inversa da função de distribuição acumulada, apresentada na Equação (2.2), de forma que: $q = Q(u) = F^{-1}(x)$; logo:

$$q = \frac{1}{c} \log \left[1 - \left(\frac{c}{a} \right) \log(1 - u) \right]; u \in [0, 1].$$

A função quantílica terá um papel fundamental no decorrer do presente trabalho, visto que um dos objetivos é propor um modelo reparametrizado pela quantílica, que possibilite captar os efeitos de quantis distintos na análise da série temporal.

Para modelar o quantil da Gompertz, deve-se tomar o valor u correspondente ao quantil objetivado. Para a mediana, por exemplo, temos:

Figura 1 – Funções densidade de probabilidade para alguns valores dos parâmetros a e c



Fonte: O Autor (2021).

$$Md(X) = \frac{1}{c} \log \left[1 - \left(\frac{c}{a} \right) \log(0.5) \right].$$

Em se tratando dos momentos da distribuição Gompertz, o k -ésimo momento de X em torno de zero, $E(X)^n$, ou momento de ordem X , é dado por:

$$E(X^n) = \frac{a \exp\left(\frac{a}{c}\right)}{c} \int_0^{\infty} \frac{1}{c} \exp\left(\frac{-ax}{c}\right) \log x dx.$$

Da equação acima pode-se deduzir os dois primeiros momentos como se segue:

$$E(X) = \frac{a \exp\left(\frac{a}{c}\right)}{c} \int_0^{\infty} \frac{1}{c} \exp\left(\frac{-ax}{c}\right) \log x dx.$$

$$E(X^2) = \frac{a \exp\left(\frac{a}{c}\right)}{c} \int_0^{\infty} \frac{1}{c^2} \exp\left(\frac{-ax}{c}\right) (\log x)^2 dx.$$

A função geratriz de momentos é definida como $M(t) = E(e^{tX})$, ou seja, é definida como a esperança da função característica, que por sua vez, é definida como abaixo:

$$\phi(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} dF(X)$$

Dessa forma, a função geratriz de momentos é dada como segue:

$$\phi(t) = E(e^{itX}) = \frac{a}{c} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\Gamma(u+1)}{\left(\frac{a}{c}\right)^{u+1}} \binom{t/c}{p},$$

Em que $\Gamma(\cdot)$ é a função gama e u está definida entre $[0, 1]$.

2.2 DISTRIBUIÇÃO GOMPERTZ REPARAMETRIZADA E ALGUMAS PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS

Um dos objetivos pretendidos pelo presente trabalho é modelar quantis diferentes de determinadas séries, de modo que possa oferecer como contribuição a possibilidade de se estudar alguns fenômenos que ocorrem em trechos distintos de uma série temporal. Diante disso, a ideia aqui é utilizar a reparametrização em função do quantil da distribuição (RIBEIRO, 2020).

Da Equação (2.2) escreve-se o parâmetro de escala em função dos parâmetros c e q , como se segue:

$$a = \frac{c \log(1-u)}{1 - \exp(cq)} \quad (2.3)$$

Substituindo a Equação (2.3) na Equação (2.2), obtêm-se a nova função de distribuição acumulada da Gompertz, reparametrizada no quantil q e dada por:

$$F(x; q, c) = 1 - \exp \left\{ \frac{-\log(1-u)}{1 - \exp(cq)} [\exp(cx) - 1] \right\} \quad (2.4)$$

Conseqüentemente, a função densidade, é dada por:

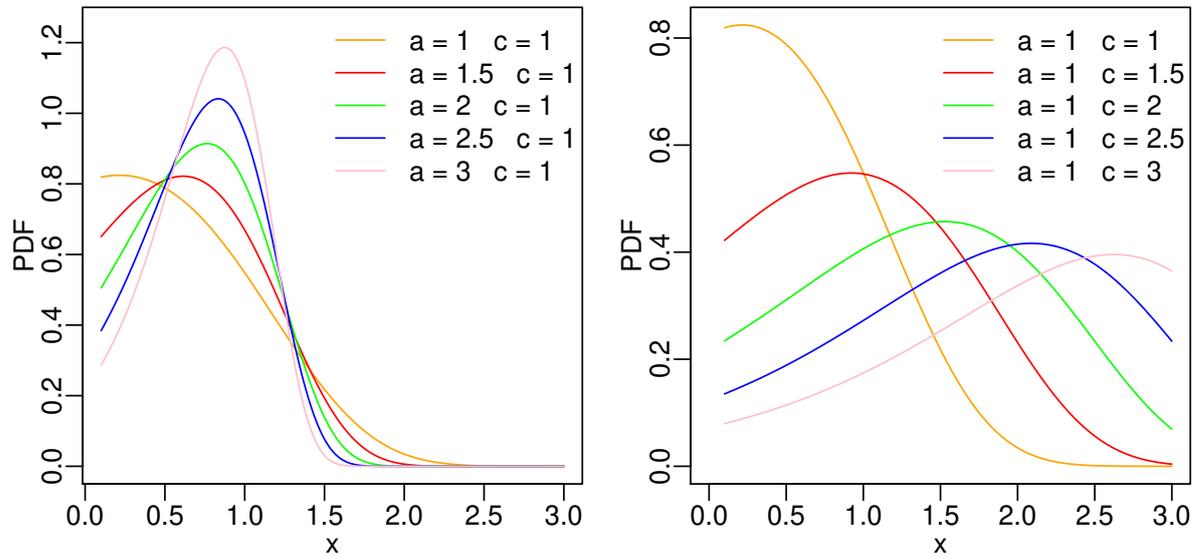
$$f(x; q, c) = \frac{c \log(1-u)}{1 - \exp(cq)} \exp(cx) \exp \left\{ \frac{-\log(1-u)}{\exp(cq) - 1} [\exp(cx) - 1] \right\} \quad (2.5)$$

A figura 2 mostra as formas possíveis para a fdp da Gompertz reparametrizada, considerando o quantil $u = 0.75$. Note que na figura 2a, fixamos o valor do parâmetro de forma e variamos o valor do parâmetro de escala. Em (2b) fixamos o parâmetro de escala e variamos o valor de c . Observe que duas formas foram obtidas: decrescente e unimodal.

Quanto aos momentos centrais, pode-se obtê-los a partir da equação abaixo:

$$E(X^n) = \frac{\log(1-u)}{1 - \exp(cq)} \exp \left[\frac{\log(1-u)}{1 - \exp(cq)} \right] \int_1^{\infty} \frac{1}{c} \exp \left[\frac{\log(1-u)}{\exp(cq) - 1} \right] \log(x) dx \quad (2.6)$$

Figura 2 – Gráfico da densidade da Gompertz reparametrizada



Fonte: O Autor (2021).

A função geratriz de momentos da Gompertz reparametrizada pode ser deduzida como se segue:

$$\phi(t) = \frac{\log(1-u)}{1-\exp(cq)} \sum_n (-1)^n \frac{\Gamma(p+1)}{\left[\frac{\log(1-u)}{1-\exp(cq)}\right]^{p+1}} \binom{\frac{t}{c}}{p} \quad (2.7)$$

2.3 INFERÊNCIA

Para o modelo Gompertz reparametrizado, o método que será usado para a estimação dos parâmetros será o método da máxima verossimilhança, que, sob determinadas condições de regularidade, possui as propriedades de consistência, suficiência, eficiência e normalidade assintótica, que o torna, segundo Martinez (2004), a mais importante ferramenta de estimação paramétrica.

Considere que (X_1, \dots, X_n) sejam variáveis aleatórias (V.as.) independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) e que $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ é o vetor de eventos observados, associados às V.as.. Seja $f(\mathbf{x}; \theta)$ a função de probabilidade ou densidade conjunta de \mathbf{Y} , que é função do vetor de parâmetros desconhecidos $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)^\top$ com $\theta \in \Theta$, em que Θ é o espaço paramétrico.

Dizemos que um determinado modelo está corretamente especificado quando sua densidade é dada por $f(x_t; \theta_0)$, $\forall t$, em que θ_0 é o verdadeiro valor de θ .

A função de verossimilhança total para θ baseada em $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ é dada por

$$L(\theta) \equiv L(\theta; \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}; \theta) = \prod_{t=1}^n f(x_t; \theta),$$

que é uma função de θ para \mathbf{x} fixo, em que $f(x_t; \theta)$ é a função densidade de probabilidade conjunta.

De acordo com Bolfarine e Sandoval (2001), estimador de máxima verossimilhança (EMV), $\hat{\theta}$, é o valor de θ que maximiza $L(\theta)$. Ou seja,

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} L(\theta; \mathbf{x}).$$

Segundo Cordeiro (1992), como a função logarítmica é estritamente monótona, maximizar $L(\theta)$ é equivalente a maximizar:

$$\ell(\theta; \mathbf{x}) \equiv \log[L(\theta)] = \sum_{t=1}^n \log(f(x_t; \theta)), \quad (2.8)$$

em que $\ell(\theta; \mathbf{x})$ é a função de log-verossimilhança total. Denotaremos por $\ell(\theta; x_t)$ a função de log-verossimilhança conjunta, ou seja: $\ell(\theta; x_t) = \log[f(x_t; \theta)]$.

O vetor escore da função de log-verossimilhança é dado pelo gradiente de $\ell(\theta; y_t)$, em relação ao vetor de parâmetros θ , ou seja,

$$\nabla \ell(\theta; y_t) = \frac{\partial \ell(\theta; y_t)}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial \ell(\theta; y_t)}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial \ell(\theta; y_t)}{\partial \theta_p} \right)^\top.$$

De acordo com Martinez (2004), a função Escore descreve o comportamento da função log de verossimilhança para valores distintos de θ .

De modo que para obtermos os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo Gompertz reparametrizado, como definida na Equação (2.3), devemos tomar:

$$\ell(\theta, x_i) = n \log[-c \log(1-u)] - n \log[\exp(cq) - 1] + c \sum_{i=1}^n x_i + \frac{\log(1-u)[\exp(c \sum_{i=1}^n x_i) - 1]}{\exp(cq) - 1};$$

e, derivando a expressão acima com relação a c e q , obteremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\theta, x_i)}{\partial c} &= -\frac{nq \exp(cq)}{\exp(cq) - 1} + \frac{n}{c} - \frac{q \exp(cq)[\exp(c \sum_{i=1}^n x_i) - 1] \log(1-u)}{(\exp(cq) - 1)^2} \\ &+ \frac{x \exp(c \sum_{i=1}^n x_i) - x_i \log(1-u)}{\exp(cq) - 1} + \sum_{i=1}^n -x_i = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial l(\theta, x_i)}{\partial q} = -\frac{cn \exp(cq)}{\exp(cq) - 1} - \frac{c \exp(qc) [\exp(c \sum_{i=1}^n x_i) - 1] \log(1 - u)}{(\exp(cq) - 1)^2} = 0$$

Considerando que este sistema de equações não possui solução em forma fechada, ou seja, não conseguimos isolar os parâmetros; para obtermos as estimativas de máxima verossimilhança, \hat{c} e \hat{q} , precisaremos maximizar a função de log-verossimilhança numericamente, ou seja, por meio de modelos de otimização não-linear.

3 PROPOSTA MODELO GOMPERTZ-ARMA

Diante da necessidade de se conhecer um pouco melhor os fundamentos por trás da proposta, serão introduzidos alguns conceitos de séries temporais e do processo ARMA, e posteriormente, o modelo Gompertz-ARMA será efetivamente proposto.

Pode-se definir uma série temporal como um conjunto de observações de uma determinada variável aleatória ordenada no tempo, como por exemplo, os índices da bolsa de valores, o preço das ações num horizonte de tempo, o índices de indicadores sociais, tais como taxa de mortalidade e natalidade num determinado período.

De acordo com a Morettin e Tolo (2006), existem, pelo menos, quatro objetivos principais na análise de uma série temporal, a saber:

- Investigar o mecanismo gerador da série temporal;
- Fazer previsões dos valores futuros da série;
- Descrever o comportamento da série ;
- Procurar periodicidades relevantes nos dados;

Nesse contexto, o modelo ARMA, que é uma composição dos modelos autorregressivos (AR) e dos modelos de médias móveis (MA), é uma das metodologias mais utilizadas de acordo com Brockwell, Davis e Fienberg (1991)

Os modelos AR de ordem p , são modelos em que o valor atual da série x_t pode ser expresso como a soma de uma sequência de p valores passados, $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-p}$, mais uma componente aleatória, que representa um erro desconhecido, que impacta diretamente no modelo mesmo que não esteja expresso na série observada. Dessa forma, temos:

$$x_t = \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i} + e_t,$$

em que x_t representa a série no instante t , ϕ_i é o i -ésimo parâmetro autorregressivo, que pode ser interpretado como uma sequência de pesos que são atribuídos aos dados da série, relacionando os valores mais antigos aos menores pesos, e e_t é um ruído branco.

Com relação aos modelos MA de ordem q , o valor atual da série pode ser obtido por meio de uma combinação linear de fatores de inovação do período corrente com aqueles ocorridos em períodos anteriores, de modo que:

$$x_t = \mu + \sum_{i=1}^q \theta_i e_{t-1} + e_t$$

O modelo ARMA(p,q) é uma mistura dos modelos AR e MA e tem como vantagem o fato de ser mais flexível na modelagem de séries temporais, uma vez que capta os efeitos tanto da estrutura autorregressiva quanto da estrutura de média móvel. O principal benefício do ARMA é que, para ajustar a sua estrutura a séries temporais estacionárias complexas, ele frequentemente faz uso de uma quantidade de termos menor do que a exigida pelos modelos puramente AR e MA (PARMEZAN, 2014). O modelo é expresso abaixo:

$$x_t = \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-1} + \sum_{i=1}^q \theta_i e_{t-1} + e_t$$

3.1 MODELO GARMA

O presente trabalho toma como referência o modelo GARMA e propõe uma abordagem alternativa, uma vez que considera como marginal uma distribuição que não faz parte da família exponencial e busca uma expressão mais flexível. Diante disso, faz-se necessária a presente seção com o objetivo de entender a formulação proposta por Benjamin, Rigby e Stasinopoulos (2003).

A classe de modelos generalizados autorregressivos de médias móveis, é uma extensão do modelo ARMA, que deveria possuir a variável resposta como uma distribuição Gaussiana, tal qual no modelo clássico de regressão. A generalização traz justamente uma flexibilização maior acerca da variável resposta, que passa a incorporar qualquer distribuição dentro da família exponencial, exatamente como estendida para o caso do MLG.

De acordo com o modelo desenvolvido pelos autores, a distribuição condicional de cada observação y_t , para $t = 1, \dots, n$ dado $H_t = \{x_t, \dots, x_t, y_{t-1}, \dots, y_1, \mu_{t-1}, \dots, \mu_1\}$, isto é, a menor σ -álgebra tal que as variáveis y_1, \dots, y_{t-1} são mensuráveis e é assumido pertencer a família exponencial.

Essa notação, usada por Benjamin, Rigby e Stasinopoulos (2003) é a mesma definida para a classe dos MLGs veja (MCCULLAGH; NELDER, 1989). A diferença é que aqui as observações não são independentes e, conseqüentemente, a distribuição condicional é modelada.

Como na classe dos MLGs, a relação entre o preditor linear, denotado por η_t , e a média condicional de y_t é estabelecida por meio de uma função de ligação, g . As restrições sobre a

função g é que as derivadas de primeira e segunda ordem existam e que g seja uma função monótona injetora. O modelo GARMA é definido adicionando um componente τ ao preditor linear dos MLGs, isto é:

$$g(\mu_t) = \eta_t = \mathbf{x}_t^\top \boldsymbol{\beta} + \tau_t, \quad (3.1)$$

em que $\boldsymbol{\beta}^\top = (\beta_1, \dots, \beta_r)$ é o vetor r -dimensional de parâmetros desconhecidos associado às covariáveis, $\mathbf{x}_t^\top = (x_{t1}, \dots, x_{tr}) \in \mathbb{R}^r$, com $r < n$, e

$$\tau_t = \sum_{j=1}^p \phi_j \mathcal{A}(y_{t-j}, \mathbf{x}_{t-j}, \boldsymbol{\beta}) + \sum_{j=1}^q \theta_j \mathcal{M}(y_{t-j}, \boldsymbol{\mu}_{t-j}),$$

que permite adicionar ao preditor linear, termos autorregressivos e de médias móveis, representados pelas funções \mathcal{A} e \mathcal{M} , respectivamente. Os vetores $\boldsymbol{\phi}^\top = (\phi_1, \dots, \phi_p)$ e $\boldsymbol{\theta}^\top = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ definem os parâmetros autorregressivos (AR) e de médias móveis (MA), respectivamente (BENJAMIN; RIGBY; STASINOPOULOS, 2003). Isto é, $\boldsymbol{\phi}$ e $\boldsymbol{\theta}$ são os parâmetros de uma estrutura ARMA com ordens $p, q \in \mathbb{N}$, denotada por ARMA(p, q).

Um submodelo de (3.1), bastante útil em aplicações práticas (BENJAMIN; RIGBY; STASINOPOULOS, 2003), é definido como:

$$g(\mu_t) = \eta_t = \mathbf{x}_t^\top \boldsymbol{\beta} + \sum_{i=1}^p \phi_i [g(y_{t-i}) - \mathbf{x}_{t-i}^\top \boldsymbol{\beta}] + \sum_{j=1}^q \theta_j r_{t-j}, \quad (3.2)$$

em que $r_t = g(y_t) - \eta_t$, que corresponde a um erro determinístico, medido na escala do preditor (pode ser os resíduos de Pearson, medido na escala original etc) (BENJAMIN; RIGBY; STASINOPOULOS, 2003). Note que a média condicional μ_t é relacionada a um preditor linear, η_t , através de uma função de ligação, geralmente definida como $g : \mathbb{R}_y \rightarrow \mathbb{R}$, que seja duas vezes diferenciável e estritamente monótona, em que \mathbb{R}_y corresponde ao suporte da distribuição de y_t de acordo com a família exponencial considerada.

A partir da Equação (3.2) e da família exponencial, vários casos especiais da estrutura GARMA podem ser modelados, dependendo do componente aleatório considerado. O processo gaussiano ARMA (p, q) é obtido quando a distribuição condicional de $y_t | \mathbf{H}_t$ é a distribuição normal e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função identidade.

Uma vez que desejamos modelar dados cuja natureza é estritamente positiva, precisaremos de uma função de ligação que faça o mapeamento dos reais positivos para o reais, $g(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. A função de ligação que utilizaremos é a função logarítmica, que é a mais utilizada para distribuições estritamente positivas, por prover valores não negativos para $\mu_t = g^{-1}(\eta_t)$.

3.2 O MODELO GOMPERTZ-ARMA

Seja X_t um processo estocástico, em que $X_t \sim \text{Gompertz}(x_t; q_t, c)$, em que $q_t > 0$, $c > 0$, e $x_t = [0, \infty)$. Seja ainda $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma\{X_t, X_{t-1}, \dots\}$ a σ -álgebra gerada pelas informações passadas. Assim, temos que a distribuição condicional de X_t , dado \mathcal{F}_{t-1} , ou seja $X_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim \text{Gompertz}(x_t; q_t, c)$, pode ser expressa como abaixo:

$$f(x_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{c \log(1 - u)}{1 - \exp(-cq_t)} \exp(cx_t) \exp\left\{ \frac{\log(1 - u)}{\exp(q_t c) - 1} [\exp(cx_t) - 1] \right\} \quad (3.3)$$

Para incluir a dependência temporal no modelo Gompertz, consideramos a estrutura proposta por Benjamin, Rigby e Stasinopoulos (2003), como apresentada acima. Para tanto, fazemos $\mu_t = q_t$ e $\eta_t = g(q_t) = \log(q_t)$, isto é, tomamos a função de ligação como a logarítmica, que implica em $q_t = \exp\{\eta_t\}$. Assim, incluímos subestruturas autorregressivas e de médias móveis e um parâmetro adicional (α) que visa captar o intercepto. De forma que temos

$$q_t = \exp\left\{ \alpha + x_t^\top \beta + \sum_{i=1}^p \phi_i [\log(y_{t-i}) - x_t^\top \beta] + \sum_{j=1}^q \theta_j [\log(y_{t-j}) - \log(q_{t-j})] \right\} \quad (3.4)$$

O modelo Gompertz-ARMA(p,q) é, portanto, definido a partir das especificações dadas nas Equações (3.3) e (3.4).

Para os modelos Gompertz-AR e Gompertz-MA, devemos pegar apenas as parcelas correspondentes a cada uma das estruturas AR e MA, de forma que tenhamos os modelos:

- Gompertz-AR(p)

$$q_t = \exp\left\{ \alpha + x_t^\top \beta + \sum_{i=1}^p \phi_i [\log(y_{t-i}) - x_t^\top \beta] \right\}$$

- Gompertz-MA(q)

$$q_t = \exp\left\{ \alpha + x_t^\top \beta + \sum_{j=1}^q \theta_j [\log(y_{t-j}) - \log(q_{t-j})] \right\}$$

3.3 INFERÊNCIA NO MODELO GOMPERTZ-ARMA

A presente seção trata das questões relacionadas ao processo de estimação dos parâmetros do modelo proposto. Para tal, usa-se a estimação por máxima verossimilhança condicional (EMVC).

Sejam $\boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\phi}^\top, \boldsymbol{\theta}^\top, c)^\top$ o vetor de parâmetros, de dimensão $(p + q + k + 2)$, do modelo Gompertz-ARMA(p,q), como definido nas Equações (3.3) e (3.4) e x_1, \dots, x_t uma série temporal observada. A função log-verossimilhança condicional pode ser expressa como:

$$\ell = \ell(\boldsymbol{\psi}; x_1, \dots, x_n) = \sum_{t=m+1}^n \ell(q_t, c), \quad (3.5)$$

em que $\ell(q_t, c) = \log f(x_t | \mathcal{F}_{t-1})$ tal que:

$$\ell(q_t, c) = \log[-c \log(1 - u)] - \log[\exp(cq_t) - 1] + cx_t + \frac{\log(1 - u)[\exp(cx_t) - 1]}{\exp(q_t c) - 1}.$$

Neste ponto, estamos em posição de definir as estimativas de máxima verossimilhança para $\boldsymbol{\psi}$:

$$\hat{\boldsymbol{\psi}} = \arg \max_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^+} [\ell(\boldsymbol{\psi})].$$

O vetor escore é um importante instrumento no processo de estimação por máxima verossimilhança. Ele pode ser definido como o vetor de primeiras derivadas ℓ ,

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\psi}) = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\psi}} = \left[\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\alpha}}, \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\beta}^\top}, \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\phi}^\top}, \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top}, \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\psi})}{\partial c} \right].$$

Aplicando a regra da cadeia, chega-se a: O i -ésimo termo de $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\psi})$ é dado por:

$$U_{\theta_j}(\boldsymbol{\psi}) = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\psi}; c, q_t)}{\partial \psi_j} = \sum_{t=m+1}^n \frac{\partial \ell(q_t, c)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \psi_j}, \quad (3.6)$$

em que

$$\frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} = \exp(\eta_t),$$

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\psi}; c, q_t)}{\partial c} = \frac{1}{c} - \frac{q \exp(cq_t)}{\exp(cq_t) - 1} + x_t + \frac{x_t \exp(cx_t) \log(1 - u)}{\exp(cq_t) - 1} - \frac{q \exp(cq_t) \log(1 - u)[\exp(cx_t) - 1]}{(\exp(cq_t) - 1)^2},$$

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\psi}; c, q_t)}{\partial q_t} = -\frac{c \exp cq_t}{\exp(cq_t) - 1} - \frac{c \exp(cq_t) \log(1 - u)[\exp(cx_t) - 1]}{(\exp(cq_t) - 1)^2},$$

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial \alpha} = 1 - \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial \eta_{t-j}}{\partial \alpha}$$

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial \beta_l} = x_{tl} - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{(t-i)l} - \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial \eta_{t-j}}{\partial \beta_l},$$

Em que $l = 1, \dots, r$ e x_{tl} é o l -ésimo elemento de x_t .

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial \phi_i} = \log(y_{t-1}) - x_{t-1}^\top \beta - \sum_{j=1}^p \theta_j \frac{\partial \eta_{t-j}}{\partial \phi_i}$$

e

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial \theta_i} = \log(x_{t-j}) - \log(q_{t-j}) - \sum_{w=1}^q \theta_j \frac{\partial \eta_{t-w}}{\partial \beta_l}.$$

Outra importante estrutura para o processo inferencial é a matriz de informação observada que é apresentada no apêndice A.

Tomando cada componente do vetor escore e igualando a zero, caso exista um ponto de máximo, obteremos a estimativa de máxima verossimilhança condicional. Para o caso em tela, como o sistema não possui forma fechada, deve-se utilizar um método iterativo, tal como o Newton-Raphson ou quasi-Newton. Para um aprofundamento sobre os métodos de otimização não linear, consultar Nocedal e Wright (2006). No presente trabalho, utilizou-se o método quasi-Newton conhecido como método Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS), para maiores detalhes ver Press et al. (1986). Por ser um algoritmo de otimização iterativo, o BFGS exige um chute inicial para começar as iterações. Diante dessa necessidade, utilizaram-se como chutes iniciais valores arbitrados no espaço paramétrico, sendo escolhido o valor do grid de valores de menor AIC.

3.3.1 Predição

Como já mencionado, de acordo com Morettin e Tolo (2006), um dos objetivos da análise de séries temporais é fazer previsões, nesse sentido, uma vez que tomamos como referência os quantis da Gompertz reparametrizada para construção do presente modelo, a previsão dar-se-à no sentido de apontar para os quantis um passo a frente, a partir dos dados passados. Supondo que h_0 seja um horizonte de tempo e que x_t , para $t = n + 1, \dots, n + h_0$, seja uma covariável, que seja uma função determinística de t , ela poderá ser determinada para valores de $t > n$, Bayer, Bayer e Pumi (2017).

Baseado na estimação por máxima verossimilhança condicional, pode-se encontrar o vetor $\hat{\psi}$, de onde pode-se obter as estimativas para $\hat{q}_{t+1}, \dots, \hat{q}_t$, de modo que teremos uma sequência de $\{\hat{q}\}_{t=m+1}^n$, de $\{q\}_{t=m+1}^n$ a partir do vetor de estimativas $\hat{\psi}$, de modo que:

$$\hat{q}_t = g^{-1} \left(\hat{\alpha} + \mathbf{x}_t^\top \hat{\beta} + \sum_{i=1}^p \hat{\phi}_i [\log(y_{t-j}) - \mathbf{x}_t^\top \hat{\beta}] + \sum_{j=1}^q \hat{\theta}_j \hat{r}_{t-j} \right)$$

onde: $\hat{r}_t = 0$, se $t \leq m$ e $\hat{r}_t = g(y_t) - g(\hat{q}_t)$, se $m \leq t \leq n$

e, por tanto:

$$\hat{q}_t = \exp \left(\hat{\alpha} + \mathbf{x}_t^\top \hat{\beta} + \sum_{i=1}^p \hat{\phi}_i [\log(y_{t-j}) - \mathbf{x}_t^\top \hat{\beta}] + \sum_{j=1}^q \hat{\theta}_j \hat{r}_{t-j} \right)$$

Consequentemente, os valores futuros dos quantis q_s , onde $t = n + 1, \dots, s$, do modelo apresentado, podem ser obtidos como:

$$\hat{q}_{n+h} = \exp \left(\hat{\alpha} + \mathbf{x}_{n+h}^\top \hat{\beta} + \sum_{i=1}^p \hat{\phi}_i [\log(y_{n+h-i}) - \mathbf{x}_{n+h-i}^\top \hat{\beta}] + \sum_{j=1}^q \hat{\theta}_j \hat{r}_{n+h-j} \right)$$

3.3.2 Análise de resíduos

De acordo com Kedem e Fokianos (2002), a análise de resíduos é de fundamental importância para questões relacionadas a determinação da qualidade dos ajustes. Pode-se definir resíduos como sendo uma medida de afastamento entre uma dada observação e o seu valor ajustado, ou seja, a diferença entre os valores preditos e os valores observados na série, (BROCKWELL; DAVIS, 2009).

A literatura trata sobre algumas possibilidades de resíduos para muitas classes de modelos, tais como:

- Resíduos ordinários.

$$r_i = x_i - \hat{\omega}_i.$$

- Resíduos de Pearson.

$$r_i^p = \frac{x_i - \hat{\omega}_i}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\omega}_i)}}.$$

- Resíduos de Pearson Padronizado.

$$r_i^{pp} = \frac{x_i - \hat{\omega}_i}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\omega}_i)(1 - h_{ii})}},$$

em que h_{ii} é o i -ésimo elemento da diagonal da Matriz H.

Pode-se encontrar cada um destes resíduos nos trabalhos de Maior e Cysneiros (2018), Almeida-Junior e Nascimento (2021) e Palm, Bayer e Cintra (2021), respectivamente. No presente trabalho, tomaremos os resíduos ordinários como referência para o modelo Gompertz-ARMA.

3.3.3 Medidas de ajustes

Como critérios de comparação entre as previsões fornecidas pelos modelos ajustados, são utilizadas as seguintes medidas:

Mean Square Error (MSE), ou Erro Quadrático Médio, é uma medida largamente utilizada na estatística, entretanto, na presente abordagem, ao invés de comparar os resultados entre os parâmetros e as estimativas como no caso das avaliações dos dados simulados, passa-se a ter a diferença entre a série original e a série ajustada a partir dos parâmetros, de forma que $e_t = q_t - \hat{q}_t$.

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (q_t - \hat{q}_t)^2$$

Mean Absolute Square Error (MASE), ou Erro Quadrático Médio Absoluto, Hyndman e Koehler (2006), é uma boa medida para comparar resultados de séries que apresentem *Outliers*, uma vez que é menos sensível as distorções da série.

$$MASE = \frac{1}{n} \left(\frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |q_t - \hat{q}_t|}{\frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n |q_t - q_{t-1}|} \right)$$

Mean Absolute Percentage Error (MAPE), ou Erro Médio Absoluto Percentual, é uma medida interessante por trazer o dimensionamento do erro como uma proporção. De acordo com Myttenaere et al. (2016), é bastante usado em finanças porque os valores são medidos em termos relativos.

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|q_t - \hat{q}_t|}{|q_t|}$$

Unscaled Mean Bounded Relative Absolute Error (UMABRAE). A proposta do UMBRAE na comparação entre métodos de previsão, é fornecer, de modo simples, uma avaliação dos modelos que melhor se ajustam aos dados, tomando o valor de 1 como referência. Para valores

maiores do que a unidade, o desempenho do modelo de referência é superior ao proposto. Para valores menores do que a referência, o modelo proposto é superior. E para valores muito próximos de um, os modelos são correspondentes no sentido de precisão, Chen, Twycross e Garibaldi (2017).

$$UMBRAE = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|q_t - \hat{q}_t|}{|q_t - \hat{q}_t| + |q_t - q_{t-1}|}}{1 - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|q_t - \hat{q}_t|}{|q_t - \hat{q}_t| + |q_t - q_{t-1}|}}$$

Essas medidas serão utilizadas na seção aplicação, com o objetivo de medir a eficiência de cada um dos modelos testados.

4 ESTUDO DE SIMULAÇÃO

A presente seção apresenta os resultados das simulações para o modelo Gompertz-ARMA(1,1), bem como uma análise dos efeitos dos quantis na estrutura dos gráficos.

Para as avaliações numéricas, procedemos com a simulação de Monte Carlo, realizando 5.000 réplicas, variando ora os parâmetros, ora os quantis.

Considerando que a série possui dependência temporal, seguiu-se os seguintes passos para a geração do dados:

- Definimos os parâmetros do modelo, a saber c , α , ϕ , θ , e os valores (x_i, q_i) em que $i = 1, \dots, m$ e $m = \max\{p, q\}$
- Tomando $t \geq m + 1$, calculamos q_t , em conformidade com :

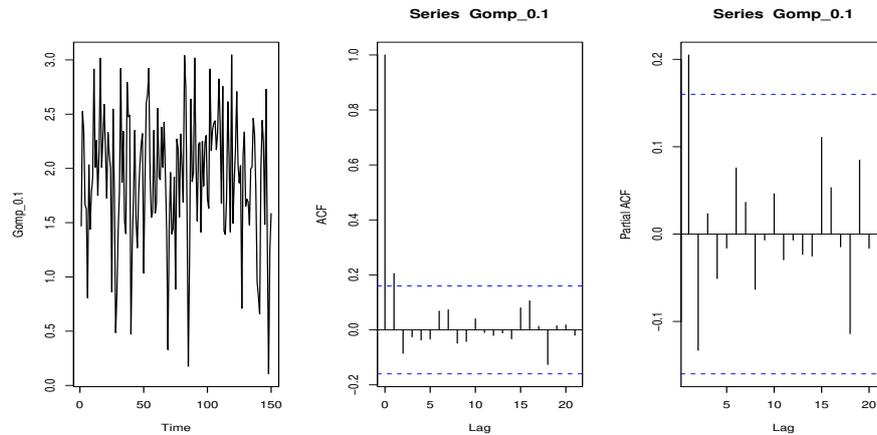
$$q_t = \exp \left\{ \alpha + x_t^\top \beta + \sum_{i=1}^p \phi_i [\log(y_{t-i}) - x_t^\top \beta] + \sum_{j=1}^q \theta_j [\log(y_{t-j}) - \log(q_{t-j})] \right\}.$$

- Geramos $X_t \sim \text{Gompertz Reparametrizada}$ de parâmetros c e q_t , sendo $t = m+1, \dots, n$.
- Para obter os n valores da série, deve-se repetir os dois passos anteriores n vezes.

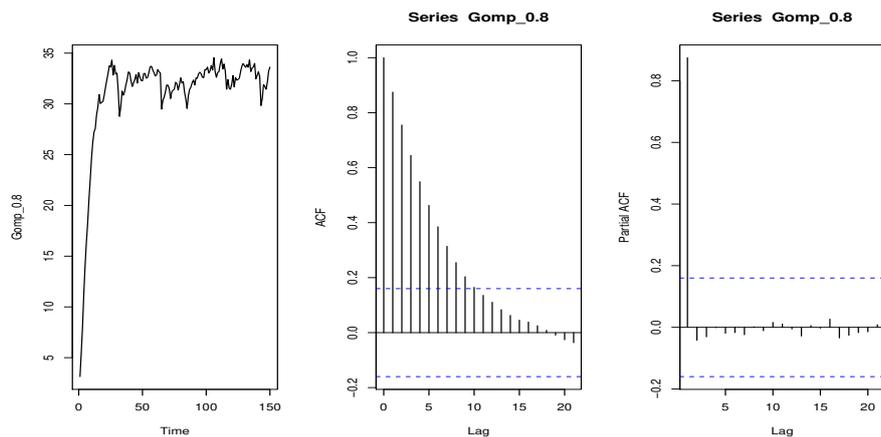
4.1 MODELO GOMPERTZ-AR(1)

O presente gráfico avalia o efeito da alteração do parâmetro ϕ sobre a série temporal gerada a partir do modelo Gompertz-AR(1). Os parâmetros levados em consideração para o modelo autorregressivo foram $\phi = 0.1$ e $\phi = 0.8$, avaliados no segundo quartil, ou seja, $u = 0.5$, e os demais parâmetros foram $c = 0.2$ e $c = 0.8$, $\alpha = 0.7$ e $q = 0.9$. Posteriormente vemos os efeitos dessa mesma variação nos gráficos de autocorrelação e autocorrelação parcial.

Na figura 3, percebe-se que, embora seja um modelo autorregressivo, o decaimento dos *lag's* no Acf é abrupto, enquanto que na figura 4, onde o ϕ é consideravelmente superior, o decaimento acontece de forma exponencial ou seinodal. Outra condição interessante é o aumento da escala potencializada pelo aumento do valor associado ao parâmetro de forma (c).

Figura 3 – Série temporal $\phi = 0.1$ e $u = 0.5$ 

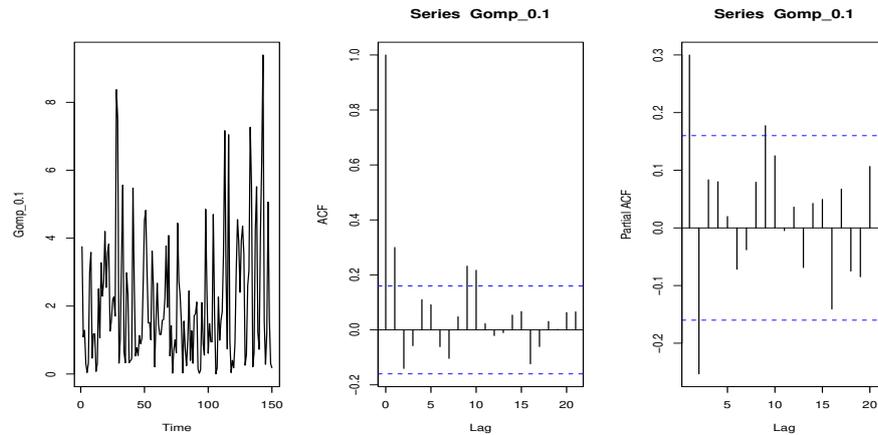
Fonte: O Autor (2021).

Figura 4 – Série temporal $\phi = 0.8$ e $u = 0.5$ 

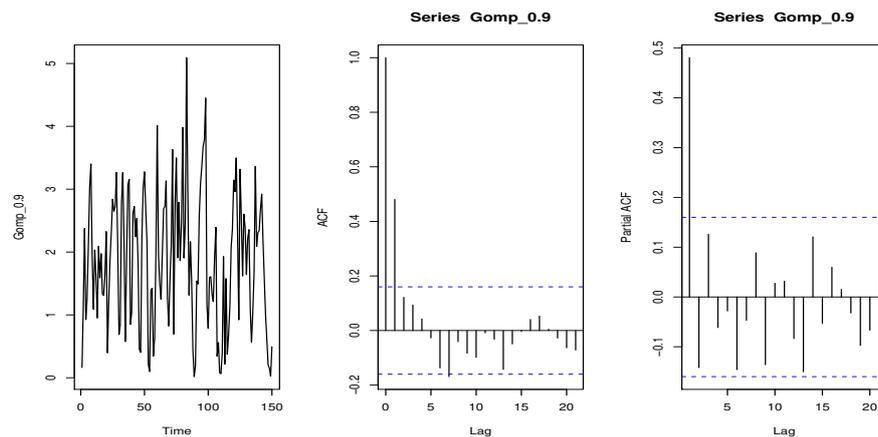
Fonte: O Autor (2021).

4.2 GOMPERTZ-MA(1)

Para o caso dos modelos de médias móveis, seguiremos a mesma ideia do item anterior e manteremos o quantil na mediana, enquanto assumiremos $\theta = 0.1$ e $\theta = 0.9$, $c = 0.2$ e $\alpha = 0.1$ e $q = 0.2$. No caso do modelo MA, como era de se esperar, observa-se um corte significativo no primeiro *lag* no caso do ACF, e os *lags* do PACF com decrescimento exponencial.

Figura 5 – Série temporal $\theta = 0.1$ e $u = 0.5$ 

Fonte: O Autor (2021).

Figura 6 – Série temporal $\theta = 0.9$ e $u = 0.5$ 

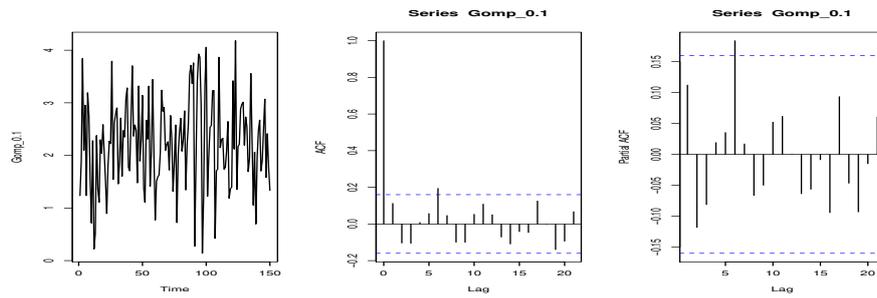
Fonte: O Autor (2021).

4.3 GOMPERTZ-ARMA(1,1)

Em se tratando do modelo Gompertz-ARMA, fizemos duas séries de dados gerados, onde a primeira, que segue abaixo, tem a mesma metodologia das anteriores, variando apenas os parâmetros que caracterizam os modelos AR e MA ($\phi = 0.1, \theta = 0.1,$) e ($\phi = 0.9, \theta = 0.8,$) considerando ainda $c = 2$ e $\alpha = 0.7$. Posteriormente, fizemos um outro conjunto de gráficos alterando apenas os quantis ($u = 0.25, u = 0.5$ e $u = 0.75$), de forma a tentar captar o efeito puramente do quantil nos gráficos do modelo ARMA.

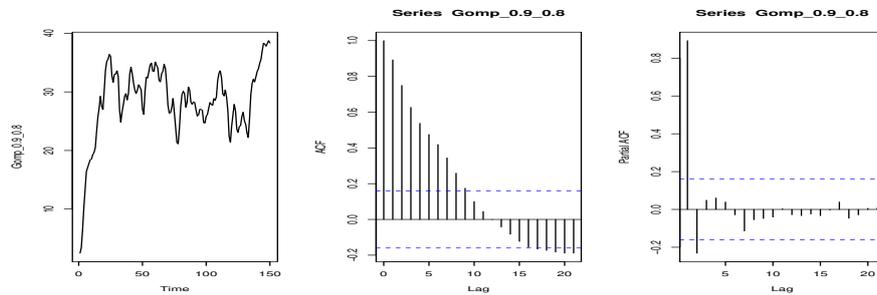
Levando em conta a alteração apenas dos quantis, podemos perceber que não há uma alteração significativa na disposição dos gráficos, de forma que o efeito do quantil está muito

Figura 7 – Série temporal com $\phi = 0.1, \theta = 0.1, q = 1.2$ com $u = 0.5$



Fonte: O Autor (2021).

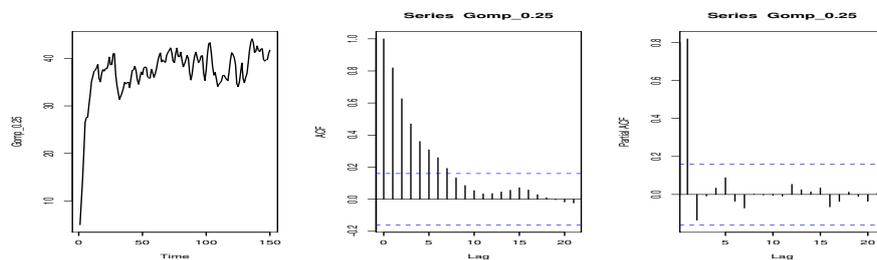
Figura 8 – Série temporal com $\phi = 0.9$ e $\theta = 0.8$ com $u = 0.5$



Fonte: O Autor (2021).

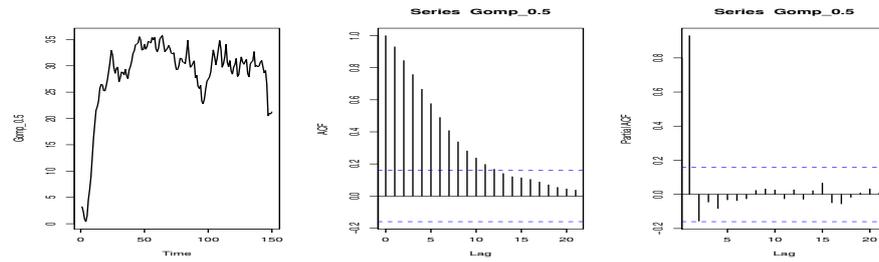
mais ligado à magnitude dos valores de x_t , diminuindo gradativamente à medida que nos deslocamos para quantis maiores. Os gráficos foram construídos sobre os parâmetros: ($q = 0.2, c = 0.1, \theta = 0.5, \phi = 0.8, (u = 0.25, 0.5, 0.5), \alpha = 0.7$).

Figura 9 – Série temporal com $\phi = 0.5$ e $\theta = 0.8$ com $u = 0.25$



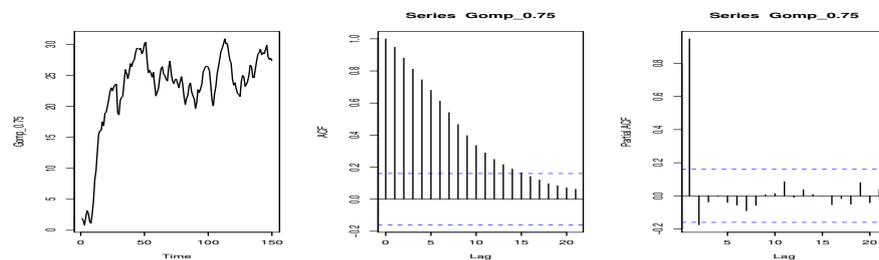
Fonte: O Autor (2021).

Figura 10 – Série temporal com $\phi = 0.5$ e $\theta = 0.8$ com $u = 0.5$



Fonte: O Autor (2021).

Figura 11 – Série temporal com $\phi = 0.5$ e $\theta = 0.8$ com $u = 0.75$



Fonte: O Autor (2021).

4.4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção são apresentados os resultados das simulações de Monte Carlo com o objetivo de analisar as propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança condicional para o modelo desenvolvido. O estudo é desenvolvido com a finalidade de quantificar o comportamento dos estimadores de máxima verossimilhança dos modelos Gompertz-ARMA, Gompertz-AR e Gompertz-MA, sobre a perspectiva de três critérios, a saber: estimativa, viés e erro quadrático médio (EQM). O número de réplicas de Monte Carlo foi de 5.000 e os tamanhos amostrais foram $n \in \{100, 250, 500\}$

4.4.1 Estudo de Monte Carlo

Para o estudo, propusemos pelo menos dois cenários para serem avaliados. No primeiro cenário o objetivo é quantificar o comportamento dos estimadores sobre a perspectiva dos quantis, ou seja, queremos ver como a alteração do quantil impacta na estimação dos parâmetros do modelo. Nesse sentido, definimos o espaço de variação de u como $u \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$ e definimos também os parâmetros para cada um dos modelos, como abaixo:

- Autorregressivo: $\alpha = 0.4$, $c = 0.9$ e $\phi = 0.25$.
- Médias Móveis: $\alpha = 1$, $c = 0.5$ e $\theta = 0.5$.
- ARMA: $\alpha = 0.4$, $c = 0.9$, $\phi = 0.25$, e $\theta = 0.5$.

A tabela (1) retrata as simulações para o modelo Gompertz-AR(1), onde os parâmetros do modelo foram $\alpha = 0.4$, $\phi = 0.25$ e $c = 0.9$. Tomando o EQM como referência, pode-se ver que à medida que a amostra aumenta, os valores do erro quadrático médio (EQM) vão diminuindo de forma consistente, demonstrando com clareza as propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança.

Olhando para o intercepto, parâmetro α , pode-se perceber que a influência do quantil na estimação do parâmetro foi relevante, considerando que, quando ajustado pelo segundo quantil os erros associados a cada amostra foram menores do que para o primeiro e terceiro quantil. Já quando se trata do parâmetro c , à medida que se aumenta os quantis, aumentam-se também os erros e, no caso do parâmetro ϕ , parâmetro autorregressivo, ele é mais preciso para quantis mais altos, de forma que já evidencia que para séries cuja estrutura seja autorregressiva, o modelo que se ajusta melhor é aquele que utiliza o terceiro quantil.

No caso dos resultados numéricos para os modelos de médias móveis, tabela (2), percebe-se que os estimadores são consistentes e obedecem as propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança, tendo o EQM diminuído substancialmente com aumento do tamanho da amostra. No caso do estimador $\hat{\theta}$, embora ele decresça para quantis mais altos, a variabilidade dos erros é menor do que nos outros parâmetros.

Já a estimativa \hat{c} é mais precisa quando estimada sobre o primeiro quantil, para qualquer tamanho amostral. Entretanto, a estimativa $\hat{\alpha}$ parece funcionar melhor quando estamos sobre o segundo quantil. Uma vez que o parâmetro θ é quem define o modelo de médias móveis, fica o indicativo de que para o processo de estimação do modelo é mais significativo quando se trabalha com esse quantil.

Tabela 1 – Simulação modelo Autorregressivo com parâmetros: $\alpha = 0.4$, $c = 0.9$, $\phi = 0.25$ e diferentes quantis (U)

Nobs	\hat{a}	Vies(\hat{a})	EQM(\hat{a})	\hat{c}	Vies(\hat{c})	EQM(\hat{c})	$\hat{\phi}$	Vies($\hat{\phi}$)	EQM($\hat{\phi}$)
$U = 0.25$									
100	0.4015	0.0015	0.0146	0.9205	0.0205	0.0105	0.2443	-0.0057	0.0067
250	0.3989	-0.0011	0.0060	0.9058	0.0058	0.0039	0.2467	-0.0033	0.0028
500	0.3996	-0.0004	0.0031	0.9026	0.0026	0.0020	0.2497	-0.0003	0.0015
$U = 0.5$									
100	0.3971	0.0029	0.0087	0.9285	0.0285	0.0184	0.2429	0.0071	0.0048
250	0.3973	0.0027	0.0035	0.9082	0.0082	0.0069	0.2461	0.0039	0.0019
500	0.4002	0.0002	0.0017	0.9039	0.0039	0.0035	0.2492	0.0008	0.0010
$U = 0.75$									
100	0.3867	-0.0133	0.0108	0.9444	0.0444	0.0378	0.2417	-0.0083	0.0039
250	0.3932	-0.0068	0.0043	0.9132	0.0132	0.0139	0.2456	-0.0044	0.0016
500	0.3992	-0.0008	0.0021	0.9067	0.0067	0.0071	0.2488	-0.0012	0.0008

Fonte: O Autor (2021).

Tabela 2 – Simulação modelo de Médias móveis com parâmetros $\alpha = 1$, $c = 0.5$, $\theta = 0.5$ e diferentes quantis (U)

Nobs	\hat{a}	Vies(\hat{a})	EQM(\hat{a})	\hat{c}	Vies(\hat{c})	EQM(\hat{c})	$\hat{\theta}$	Vies($\hat{\theta}$)	EQM($\hat{\theta}$)
$U = 0.25$									
100	1.0012	0.0012	0.0032	1.5269	0.0269	0.0170	0.4988	-0.0012	0.0046
250	0.9995	-0.0005	0.0013	1.5075	0.0075	0.0063	0.4988	-0.0012	0.0017
500	0.9999	-0.0001	0.0007	1.5030	0.0030	0.0031	0.5007	0.0007	0.0009
$U = 0.5$									
100	0.9979	-0.0021	0.0019	1.5282	0.0282	0.0194	0.4994	-0.0006	0.0036
250	0.9985	-0.0015	0.0008	1.5077	0.0077	0.0072	0.4992	-0.0008	0.0013
500	0.9998	-0.0002	0.0004	1.5031	0.0031	0.0036	0.5008	0.0008	0.0007
$U = 0.75$									
100	0.9945	-0.0055	0.0017	1.5314	0.0314	0.0243	0.4999	-0.0001	0.0030
250	0.9976	-0.0024	0.0006	1.5087	0.0087	0.0090	0.4995	-0.0005	0.0011
500	0.9998	-0.0002	0.0003	1.5037	0.0037	0.0045	0.5009	0.0009	0.0006

Fonte: O Autor (2021).

Na simulação para o modelo Gompertz-ARMA, tabela 3, o comparativo da influência dos quantis na estimação dos parâmetros ϕ e θ trouxe o indicativo de que para os valores dos parâmetros em questão, o maior quantil torna a simulação sobre θ mais precisa, enquanto que o efeito sobre ϕ é inverso, sendo mais preciso em $u = 0.25$.

Tabela 3 – Simulação ARMA com parâmetros: $\alpha = 0.4, c = 0.90, \phi = 0.25, \theta = 0.50$ e diferentes quantis (U)

Nobs	\hat{a}	Vies(\hat{a})	EQM(\hat{a})	\hat{c}	Vies(\hat{c})	EQM(\hat{c})	$\hat{\phi}$	Vies($\hat{\phi}$)	EQM($\hat{\phi}$)	$\hat{\theta}$	Vies($\hat{\theta}$)	EQM($\hat{\theta}$)
$U = 0.25$												
100	0.3900	-0.0100	0.0611	0.9285	0.0285	0.0097	0.2515	0.0015	0.0149	0.4901	-0.0099	0.0151
250	0.3965	-0.0035	0.0220	0.9113	0.0113	0.0033	0.2497	-0.0003	0.0056	0.4955	-0.0045	0.0060
500	0.3983	-0.0017	0.0104	0.9057	0.0057	0.0017	0.2479	-0.0021	0.0026	0.4985	-0.0015	0.0030
$U = 0.5$												
100	0.3906	-0.0094	0.0310	0.9419	0.0419	0.0212	0.2570	0.0070	0.0133	0.4845	-0.0155	0.0106
250	0.3946	-0.0054	0.0119	0.9161	0.0161	0.0074	0.2518	0.0018	0.0050	0.4940	-0.0060	0.0039
500	0.3970	-0.0030	0.0059	0.9080	0.0080	0.0037	0.2486	-0.0014	0.0023	0.4983	-0.0017	0.0019
$U = 0.75$												
100	0.3438	-0.0562	0.0723	1.0008	0.1008	0.0997	0.2613	0.0113	0.0135	0.4784	-0.0216	0.0094
250	0.3747	-0.0253	0.0282	0.9343	0.0343	0.0327	0.2528	0.0028	0.0050	0.4922	-0.0078	0.0034
500	0.3877	-0.0123	0.0148	0.9176	0.0176	0.0159	0.2492	-0.0008	0.0023	0.4974	-0.0026	0.0016

Fonte: O Autor (2021).

Para o segundo cenário, o objetivo é avaliar o comportamento das estimativas sobre a perspectiva da variação dos parâmetros, ou seja, manteremos o quantil fixado na mediana e variaremos os parâmetros dos modelos Gompertz-AR(1), Gompertz-MA(1) e Gompertz-ARMA(1,1), de forma a conseguirmos testar o comportamento das estimativas mapeando um espaço de variação considerável. Neste sentido, tomamos os seguintes parâmetros para os modelos:

- Autorregressivo: $\alpha \in \{2.4, 1.2, -0.4\}$, $c \in \{1.5, 0.9, 0.3\}$ e $\phi \in \{0.75, 0.5, 0.25\}$
- Médias móveis: $\alpha \in \{0.2, 0.6, 1\}$, $c \in \{0.25, 0.75, 1, 5\}$ e $\theta \in \{0.1, 0.5, 0.9\}$
- ARMA: $\alpha \in \{1.2, -0.8, -0.4\}$, $c \in \{0.9, 0.6, 0.2\}$, $\phi \in \{0.2, 0.5, 0.95\}$ e $\theta \in \{0.95, 0.5, 0.2\}$

Tabela 4 – Simulação modelo Autorregressivo com parâmetros: $\alpha = (2.4, 1.2, -0.4)$, $c = (1.5, 0.9, 0.3)$, $\phi = (0.75, 0.5, 0.25)$ avaliados no segundo quartil

Nobs	$\hat{\alpha}$	Vies($\hat{\alpha}$)	EQM($\hat{\alpha}$)	\hat{c}	Vies(\hat{c})	EQM(\hat{c})	$\hat{\phi}$	Vies($\hat{\phi}$)	EQM($\hat{\phi}$)
$\alpha = 2.4, c = 1.5, \phi = 0.75$									
100	2.3977	-0.0023	0.0011	1.5281	0.0281	0.0158	0.7403	-0.0097	0.0015
250	2.3993	-0.0007	0.0004	1.5118	0.0118	0.0061	0.7447	-0.0053	0.0008
500	2.3996	-0.0004	0.0002	1.5060	0.0060	0.0028	0.7465	-0.0035	0.0005
$\alpha = 1.2, c = 0.9, \phi = 0.3$									
100	1.1921	-0.0079	0.0072	0.9178	0.0178	0.0091	0.4859	-0.0141	0.0045
250	1.1979	-0.0021	0.0027	0.9077	0.0077	0.0035	0.4948	-0.0052	0.0017
500	1.1991	-0.0009	0.0013	0.9040	0.0040	0.0017	0.4969	-0.0031	0.0009
$\alpha = -0.4, c = 0.9, \phi = 0.25$									
100	-0.3913	0.0087	0.0232	0.3469	0.0469	0.0264	0.2440	-0.0060	0.0061
250	-0.3942	0.0058	0.0089	0.3203	0.0203	0.0093	0.2490	-0.0010	0.0024
500	-0.3967	0.0033	0.0045	0.3103	0.0103	0.0044	0.2491	-0.0009	0.0012

Fonte: O Autor (2021).

Os dados da Tabela 4 evidenciam os resultados para a simulação do modelo Gompertz-AR(1), sobre o segundo quartil. O que se pode perceber da tabela é que os estimadores são assintoticamente enviesados, de forma que, à medida que a amostra cresce, os erros tendem à zero. No caso do $\hat{\alpha}$, podemos ver que os erros associados a cada tamanho amostral foi diminuindo à medida que o parâmetro foi se distanciando de zero. Já no caso do estimador \hat{c} , a proximidade de 1 tornou a estimação mais precisa, quando comparado com as outras

Tabela 5 – Simulação modelo de Médias móveis com parâmetros $\alpha = (0.2, 0.6, 1)$, $c = (0.25, 0.75, 1.5)$ $\theta = (0.1, 0.5, 0.9)$ avaliados no segundo quartil

Nobs	$\hat{\alpha}$	Vies($\hat{\alpha}$)	EQM($\hat{\alpha}$)	\hat{c}	Vies(\hat{c})	EQM(\hat{c})	$\hat{\theta}$	Vies($\hat{\theta}$)	EQM($\hat{\theta}$)
$U = 0.25$									
100	0.2057	0.0057	0.0141	0.2782	0.0282	0.0095	0.1011	0.0011	0.0067
250	0.2041	0.0041	0.0054	0.2622	0.0122	0.0034	0.1020	0.0020	0.0025
500	0.2024	0.0024	0.0028	0.2561	0.0061	0.0016	0.1006	0.0006	0.0012
$U = 0.5$									
100	0.5977	-0.0023	0.0104	0.7754	0.0254	0.0125	0.5011	0.0011	0.0041
250	0.6003	0.0003	0.0040	0.7610	0.0110	0.0046	0.5013	0.0013	0.0015
500	0.6005	0.0005	0.0020	0.7557	0.0057	0.0022	0.5004	0.0004	0.0007
$U = 0.75$									
100	0.9971	-0.0029	0.0029	1.5302	0.0302	0.0195	0.9030	0.0030	0.0010
250	0.9995	-0.0005	0.0011	1.5127	0.0127	0.0075	0.9007	0.0007	0.0002
500	0.9999	-0.0001	0.0006	1.5064	0.0064	0.0036	0.9003	0.0003	0.0001

Fonte: O Autor (2021).

amostras. Já o parâmetro ϕ , que caracteriza a série autorregressiva, também obteve um melhor estimador ($\hat{\phi}$) quando o parâmetro esteve mais perto de 1.

Com relação ao modelo Gompertz-MA(1), tabela 5, também pode ser visto que a propriedade da consistência é satisfeita, uma vez que todos os estimadores se encaminham para zero, com o aumento do tamanho da amostra. Vale notar que no caso $\hat{\alpha}$, da mesma forma que no caso autorregressivo, à medida que o parâmetro se afastou de zero, os erros passaram a ser menores. Entretanto, no caso \hat{c} , para valores mais próximos de zero é que obtivemos maior precisão. Entretanto, vale salientar que há uma certa persistência do viés, considerando que, diferentemente do que se pode ver nos outros parâmetros, ele não baixou para tão próximo de zero como os demais parâmetros na amostra de tamanho 500.

Já no caso do modelo Gompertz-ARMA(1,1), no estimador $\hat{\alpha}$, a convergência é mais lenta quando $\alpha = 1.2$. Mesmo para uma amostra de tamanho 500 o valor estimado está substancialmente distante do parâmetro verdadeiro. O estimador \hat{c} se mostra mais preciso, no sentido em que os valores associados aos erros para quaisquer tamanho amostral são menores para valores pequenos de c , entretanto, ainda é clara uma persistência do viés do estimador. Por fim, tanto os estimadores para $\hat{\phi}$ quanto para $\hat{\theta}$, se mostram mais precisos para os valores mais altos de ϕ e θ .

Tabela 6 – Simulação ARMA com parâmetros: $\alpha = (1.2, -0.8, -0.4), c = (0.9, 0.6, 0.2), \phi = (0.2, 0.5, 0.95), \theta = (0.95, 0.5, 0.2)$ avaliados no segundo quartil

Nobs	$a = 1.2$	Vies(\hat{a})	EQM(\hat{a})	$c = 0.9$	Vies(\hat{c})	EQM(\hat{c})	$\phi = 0.2$	Vies($\hat{\phi}$)	EQM($\hat{\phi}$)	$\theta = 0.95$	Vies($\hat{\theta}$)	EQM($\hat{\theta}$)
$U = 0.25$												
100	-0.1518	-1.3518	5.7481	0.9350	0.0350	0.3302	0.2148	0.0148	0.0079	0.9162	-0.0338	0.0028
250	0.5254	-0.6746	1.9323	0.8964	-0.0036	0.0222	0.2067	0.0067	0.0029	0.9385	-0.0115	0.0005
500	0.8400	-0.3600	0.7613	0.8968	-0.0032	0.0067	0.2035	0.0035	0.0014	0.9448	-0.0052	0.0001
$U = 0.5$												
100	-0.4111	-0.0111	0.0824	0.6544	0.0544	0.0333	0.5049	0.0049	0.0083	0.4885	-0.0115	0.0081
250	-0.4040	-0.0040	0.0333	0.6206	0.0206	0.0111	0.5016	0.0016	0.0030	0.4962	-0.0038	0.0031
500	-0.4027	-0.0027	0.0168	0.6102	0.0102	0.0053	0.5013	0.0013	0.0014	0.4977	-0.0023	0.0015
$U = 0.75$												
100	-0.8040	-0.0040	0.0887	0.2732	0.0732	0.0291	0.9757	0.0257	0.0052	0.2012	0.0012	0.0085
250	-0.7930	0.0070	0.0278	0.2256	0.0256	0.0071	0.9536	0.0036	0.0005	0.2014	0.0014	0.0029
500	-0.7971	0.0029	0.0139	0.2121	0.0121	0.0031	0.9514	0.0014	0.0002	0.2004	0.0004	0.0014

Fonte: O Autor (2021).

5 APLICAÇÃO

5.1 A PROBLEMATIZAÇÃO ENTRE A ANÁLISE DE PREÇOS E A ANÁLISE DE VOLATILIDADE

De acordo com Fama (1965), uma das principais questões no estudo da previsão de ativos financeiros era se os preços passados de uma ação ordinária poderiam ser usados para prever o comportamento dos preços futuros. Neste sentido, muitos estudos foram sendo desenvolvidos com objetivo de minimizar os riscos nas tomadas de decisão tanto das empresas quanto dos investidores.

Segundo Gujarati e Porter (2011), algumas variáveis econômicas, tais como preço das ações, taxas de câmbio, taxas de inflação, apresentam aglomeração por volatilidade, ou seja, os valores apresentam forte variação entre determinados períodos de tempo, seguida por períodos de maior estabilidade. Ou seja, os erros associados as previsões nos preços, nas taxas de câmbio e inflação podem ser mais significativos em determinados períodos do que em outros, trazendo um maior grau de incerteza sobre os retornos.

Com vistas a capturar o efeito da autocorrelação da variância da inflação no Reino Unido, Engle (1982) desenvolveu o modelo conhecido como modelo autorregressivo de heterocedasticidade condicional (ARCH). Considerando que o interesse maior do investidor recai sobre a variabilidade dos seus investimentos, modelos do tipo ARCH e sua generalização GARCH, passaram a ser largamente utilizadas em estudos nos mercados financeiros. De acordo com Morettin e Tolo (2006), a ideia básica do modelo é que o retorno de X_t (preço do ativo) é não correlacionado serialmente, todavia, a volatilidade (variância condicional) depende dos retornos passados.

Ainda que a abordagem sobre volatilidade traga uma maior evidência de segurança para os investidores, neste primeiro momento, a presente dissertação busca trabalhar com o preço observado do ativo, por entender que é o primeiro passo dentro da cadeia lógica e guardaremos para trabalhos futuros a abordagem sobre os modelos ARCH e GARCH.

5.2 MERCADO DE CAPITALIS

Pode-se pensar no mercado de capitais como um mercado que junta poupadores, ou seja, aqueles que detêm o capital e estão à procura de alternativas para investir esse capital; e os

tomadores de empréstimos, empresas que buscam financiamentos para o desenvolvimento de suas atividades. Uma vez que o mercado de capitais une aqueles que ofertam e aqueles que demandam capital, pode-se dizer que há um aumento geral de bem-estar promovido por este mercado, (RAMOS, 2010).

Segundo RASSIER e HILGERT (2012), o desenvolvimento do mercado de capitais está diretamente relacionado com o desenvolvimento da economia de um país, de modo que economias mais desenvolvidas possuem mercados de capitais mais ativos. De acordo com Nóbrega et al. (2000), o valor de mercado das 380 empresas listadas na bolsa de valores brasileiras era de R\$2.27 trilhões, em fevereiro de 2010. Na comparação entre os valores negociados na bolsa brasileira e americana, o valor negociado na bolsa brasileira representava 1% do que foi negociado na americana em 2010. De acordo com as informações da B3, a quantidade de investidores pessoa física chegou a 3.8 milhões no primeiro semestre de 2021, mostrando, dessa forma, que o mercado de capitais brasileiro ainda está consideravelmente distante do mercado de capitais dos países desenvolvidos.

No sentido operacional, o mercado de ações é um mercado de títulos nominais. As ações negociadas representam uma fração do capital social da empresa que é comprada pelo investidor/acionista, que se torna um sócio da empresa e, como tal, auferir renda em casos de valorização da empresa ou perde renda no caso de prejuízos. As ações são basicamente subdivididas em dois tipos:

- Ações Ordinárias (ON): Tem como principal característica dar ao seu possuidor o direito a voto nas assembleias.
- Ações preferenciais (PN): Tem como principal característica a liquidez.

Em termos de identificabilidade, as ações do tipo ordinárias são indexadas pelo número (3), por exemplo PETR3, e as preferenciais são indexadas pelo número (4), por exemplo PETR4. Quanto a forma de remuneração, as principais são:

- Valorização da cotação
- Dividendos
- Juros sobre capital próprio

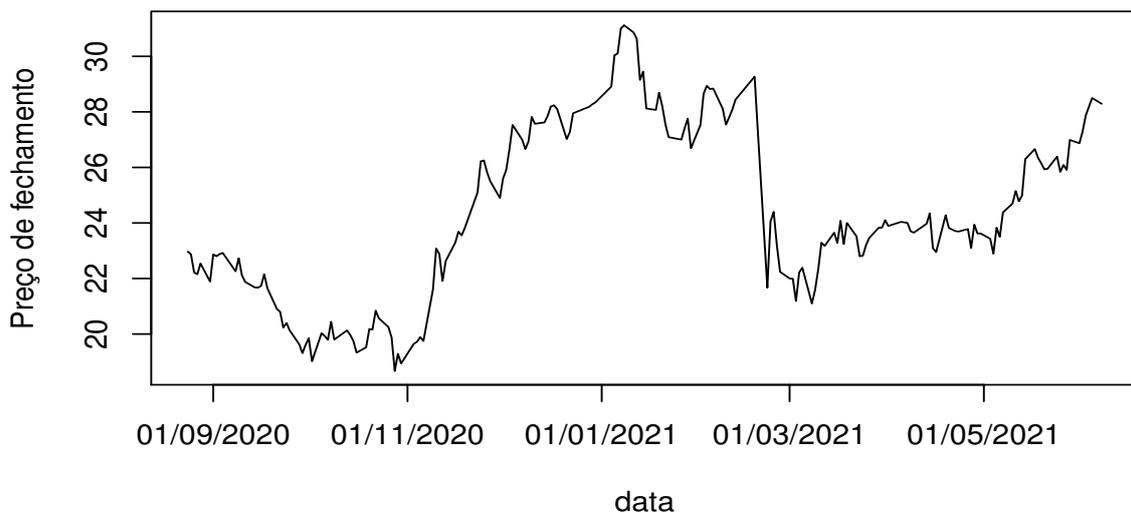
Como definido nos objetivos, uma das metas do presente trabalho é verificar se o modelo Gompertz-ARMA consegue se ajustar de forma consistente a dados de ativos financeiros. Para

tanto, foi usada a série de preço de fechamento das cotações das ações da PETROBRAS (PETR4), listada na bolsa de valores de São Paulo, no período compreendido entre os dias 08 de junho de 2020 a 08 de junho de 2021.

A Petrobras é uma empresa brasileira que atua no mercado de exploração, produção, refino e comercialização de energia. É a empresa líder mundial na exploração e produção em águas profundas e ultraprofundas. A empresa produz em média 2,84 milhões de barris de óleo equivalente por dia, possui 13 refinarias.

Contando com mais de 750 mil acionistas, a Petrobras é a empresa brasileira com maior volume de negociação na bolsa de valores de São Paulo e pode ser considerada a maior empresa do país.

Figura 12 – Série temporal do preço fechamento das ações da Petrobras



Fonte: O Autor (2021).

Os gráficos acima retratam a série temporal que representa os valores das ações da Petrobras ao longo do último ano. O gráfico mostra bastante oscilação nos preços das ações, tendo atingido valor mínimo de R\$ 18,67, logo após a empresa ter anunciado um prejuízo de mais de R\$ 1 bilhão, em Outubro do último ano, contra R\$ 31,12, o que mostra como o mercado de ações é sensível às informações, tornando-o extramente volátil.

As estatísticas descritivas para a série em questão são mostradas na tabela 7 abaixo, onde são expostos os valores dos quartis, de onde pode-se perceber que a diferença entre os valores

que marcam o 1º, 2º e 3º quartil não é tão significativa. A assimetria, que neste caso se mostra levemente à direita. Esses dados são importantes por nos informarem acerca da constituição da série temporal.

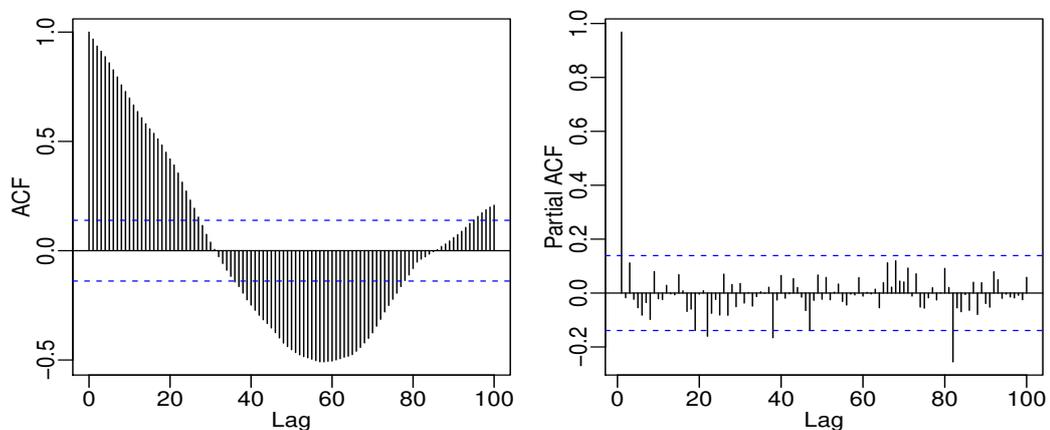
Tabela 7 – Estatística descritiva

n	Min	1º q	Mediana	Media	3º q	Max	Desv.Pad	Assimetria	Curtose
233	18.670	22.150	23.290	23.979	26.300	31.120	2.865	0.432	2.388

Fonte: O Autor (2021).

O gráfico da autocorrelação, por apresentar um decaimento exponencial, aponta para um modelo do tipo autorregressivo. Seguindo o mesmo apontamento, o gráfico da autocorrelação parcial, com o primeiro lag tocando a unidade, enquanto que os demais ficam oscilando em torno de zero, fortalece a hipótese de um modelo autorregressivo de ordem 1, AR(1).

Figura 13 – ACF e PACF da série de preço de fechamento das ações da Petrobras

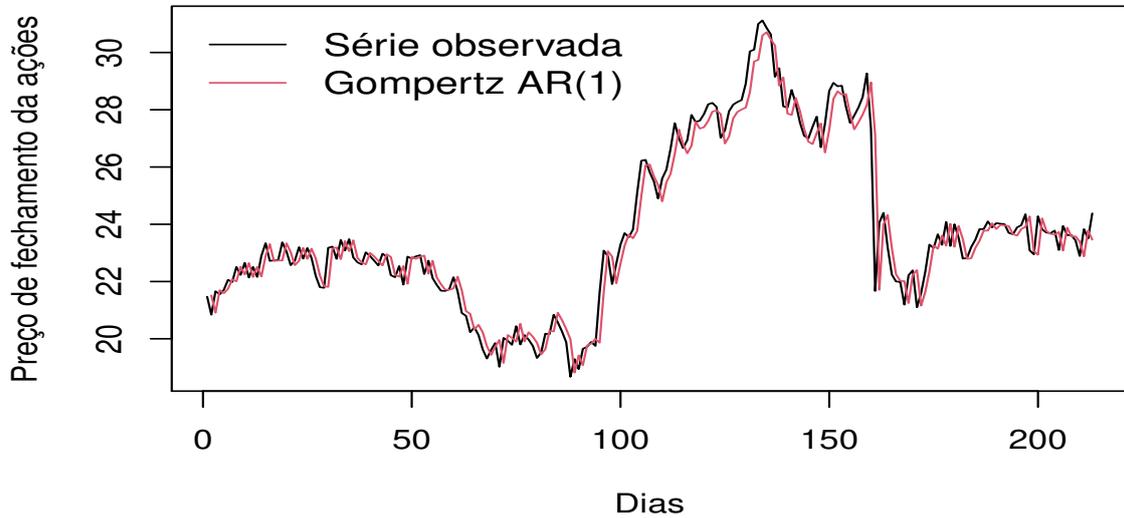


Fonte: O Autor (2021).

Com relação aos ajustes das curvas das séries geradas, embora tenhamos trabalhado com os modelos Gompertz-AR(1), Gompertz-MA(1) e Gompertz-ARMA(1,1), variando sempre os quantis 0.25, 0.50, 0.75, dentre todos os modelos analisados para os dados em questão, o modelo Gompertz-AR(1) foi o que proporcionou o melhor ajuste, conforme pode-se visto no gráfico abaixo.

Em se tratando da análise dos resíduos, o gráfico abaixo, tendo como referência o ACF, mostra que os resíduos estão contidos dentro dos limites e margeiam o zero, enquanto que

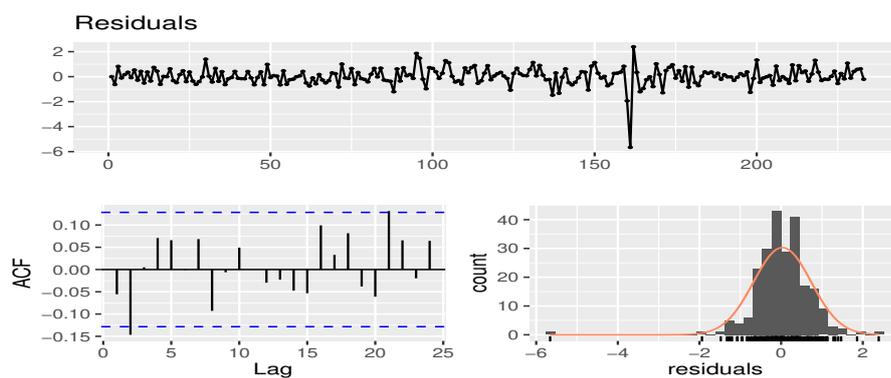
Figura 14 – Ajuste Gompertz-AR(1)



Fonte: O Autor (2021).

o histograma aponta para resíduos como tendo distribuição aproximadamente normal, com média centrada em zero, que nos dá um indicativo que os resíduos tem características de ruído branco.

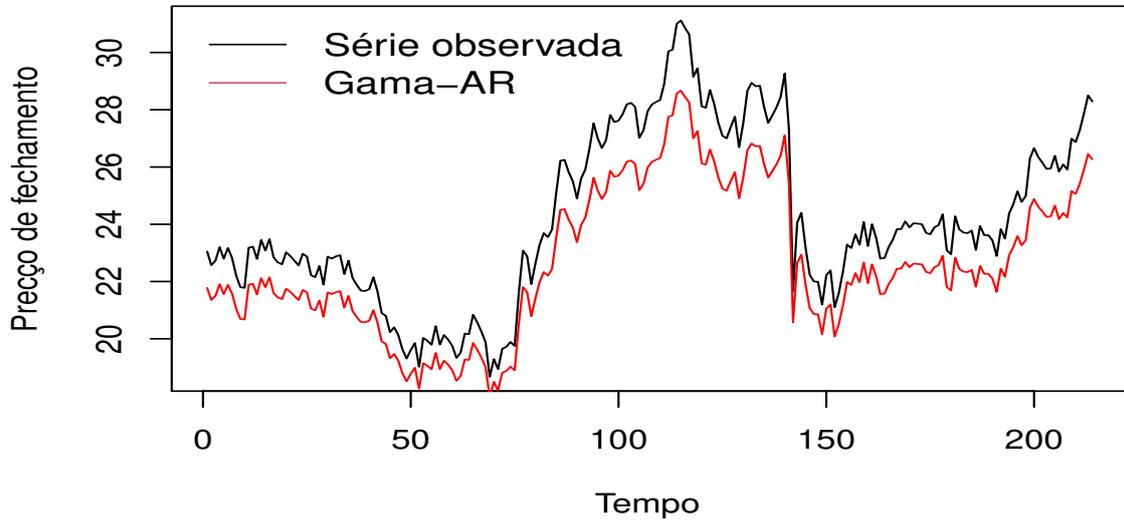
Figura 15 – Resíduos Gompertz-AR(1)



Fonte: O Autor (2021).

Com fins de comparação, abaixo segue o gráfico que retrata os resultados obtidos a partir do modelo Gama-AR. Como pode ser visto de imediato, o modelo Gama-ARMA não se ajusta bem aos dados dos valores de fechamento das ações da Petrobras, os valores preditos estão fortemente subvalorizados, quando comparados aos valores da série original.

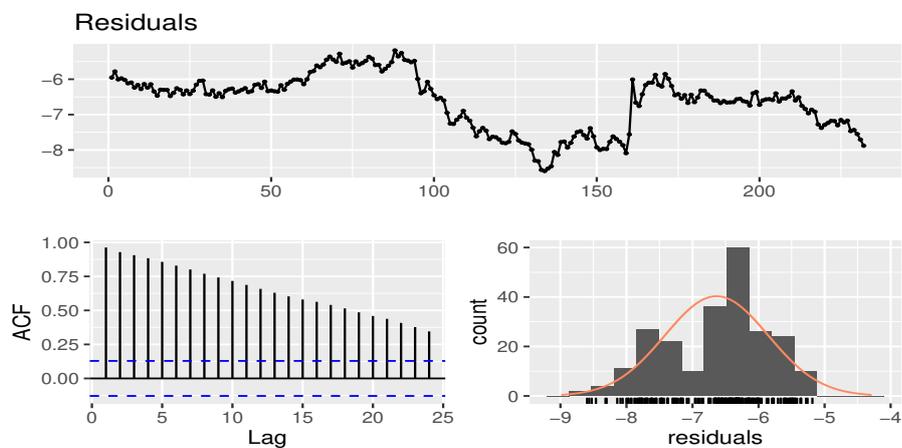
Figura 16 – Ajuste do modelo Gama-AR(1)



Fonte: O Autor (2021).

Quanto aos resíduos, tomando novamente o ACF e o histograma como referência, fica claro que os resíduos não possuem variância constante, uma vez que o gráfico de ACF é decrescente. O histograma mostra que a média está bem distante de zero, de forma que podemos concluir que os resíduos não são distribuídos como um ruído branco, ou seja, com variância constante e média zero.

Figura 17 – Resíduos Gama-AR(1)



Fonte: O Autor (2021).

Os parâmetros estimados de cada um dos modelos em questão, bem como as medidas de acurácia, seguem abaixo:

Tabela 8 – Medidas de acurácia

Modelo	MSE	Mase	Umbrae	Smape
Gompertz-AR	0.5614	0.0052	0.0053	0.0213
Gama-AR	2.1473	0.0113	0.3512	0.0577

Fonte: O Autor (2021).

Tabela 9 – Estimativas

Modelo	α	ϕ	c
Gompertz-AR(1)	-1.0560	0.9999	0.1127
E.p.	0.0049	0.002	0.0051
Gama-AR(1)	0.2382	0.9747	0.4235
E.p.	0.0003	0.0006	0.0002

Fonte: O Autor (2021).

Como pode ser visto a partir da tabela 8, todos os valores que levam em conta a análise dos resíduos foram menores no modelo Gompertz-AR(1), quando comparado ao modelo Gama-AR(1). Esses resultados apontam para o fato de que, em estudos acerca do preço das ações Petrobras, o modelo Gompertz-AR(1) tem maior precisão do que o modelo Gama-AR.

Com relação aos critérios de seleção de modelos, tomando como base o critério de seleção de Akaike (AIC) e o critério de informação Bayesiano (BIC), em ambos os casos, o modelo Gompertz-AR(1) foi o modelo selecionado como melhor.

Tabela 10 – Critérios de seleção de modelos

	Gompertz-AR(1)	Gama-AR(1)
AIC	-374.7441	-304.3634
BIC	384.828	1087,637

Fonte: O Autor (2021).

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho tinha como objetivo propor um novo modelo de análise de série temporal tendo como marginal a distribuição Gompertz reparametrizada pela quantílica. Para tanto, desenvolvemos algumas propriedades da Gompertz reparametrizada e, posteriormente, desenvolvemos o modelo Gompertz-ARMA, e suas variantes, Gompertz-AR e Gompertz-MA.

A partir dos dados simulados para o modelo Gompertz-ARMA, os estimadores dos parâmetros mostraram-se consistentes, inclusive para as alterações dos quantis, de forma que evidencia que o modelo é eficiente na análise de quantis distintos de uma determinada série.

Em se tratando dos ajustes do modelo para o caso das ações da Petrobras, o modelo que se ajustou com maior precisão foi o modelo autorregressivo, avaliado no quantil 0.75. Inclusive, quando comparado com o modelo Gamma-AR, aplicado a mesma série de dados. Apontando para o fato de que se pode estudar séries financeiras a partir do modelo proposto.

Quanto aos trabalhos futuros objetivamos avançar nos estudos dos modelos Gompertz-ARMA, propondo novas abordagens, tais como o Gompertz-ARMA-GARCH, com vistas a modelar volatilidades das ações da bolsa de valores. Outra proposta de trabalho é com o modelo Gompertz vetorial e por fim, expandir a análise do presente modelo para outras séries financeiras.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA-JUNIOR, P. M.; NASCIMENTO, A. D. C. Arma process for speckled data. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Taylor Francis, v. 0, n. 0, p. 1–29, 2021.
- BAYER, F. M.; BAYER, D. M.; PUMI, G. Kumaraswamy autoregressive moving average models for double bounded environmental data. *Journal of Hydrology*, Elsevier, v. 555, p. 385–396, 2017.
- BEGALL, S. The application of the gompertz model to describe body growth. *Growth, development, and aging: GDA*, v. 61, n. 2, p. 61–67, 1997.
- BENJAMIN, M. A.; RIGBY, R. A.; STASINOPOULOS, D. M. Generalized autoregressive moving average models. *Journal of the American Statistical association*, Taylor & Francis, v. 98, n. 461, p. 214–223, 2003.
- BOLFARINE, H.; SANDOVAL, M. C. *Introdução à inferência estatística*. [S.l.]: SBM, 2001. v. 2.
- BOX, G. E.; COX, D. R. An analysis of transformations. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, Wiley Online Library, v. 26, n. 2, p. 211–243, 1964.
- BROCKWELL, P. J.; DAVIS, R. A. *Time series: theory and methods*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2009.
- BROCKWELL, P. J.; DAVIS, R. A.; FIENBERG, S. E. *Time series: theory and methods: theory and methods*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1991.
- CHEN, C.; TWYXCROSS, J.; GARIBALDI, J. M. A new accuracy measure based on bounded relative error for time series forecasting. *PLOS ONE*, Public Library of Science, v. 12, p. 1–23, 03 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1371/journal.pone.0174202>>.
- COCKBURN, A.; JOHNSON, C. Patterns of growth. In: *The Developing Marsupial*. [S.l.]: Springer, 1988. p. 28–40.
- COOPER, L. N.; LEE, A. H.; TAPER, M. L.; HORNER, J. R. Relative growth rates of predator and prey dinosaurs reflect effects of predation. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences*, The Royal Society London, v. 275, n. 1651, p. 2609–2615, 2008.
- CORDEIRO, G. Introdução à teoria de verossimilhança. *Livro texto In*, v. 10, 1992.
- CORDEIRO, G. M.; ANDRADE, M. G. de. Transformed generalized linear models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, Elsevier, v. 139, n. 9, p. 2970–2987, 2009.
- EL-GOHARY, A.; ALSHAMRANI, A.; AL-OTAIBI, A. N. The generalized gompertz distribution. *Applied mathematical modelling*, Elsevier, v. 37, n. 1-2, p. 13–24, 2013.
- ELIWA, M.; ALHUSSAIN, Z.; AHMED, E.; SALAH, M.; AHMED, H.; EL-MORSHEDY, M. Bivariate gompertz generator of distributions: statistical properties and estimation with application to model football data. *Journal of the National Science Foundation of Sri Lanka*, National Science Foundation of Sri Lanka, v. 48, n. 2, 2020.

- ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the econometric society*, JSTOR, p. 987–1007, 1982.
- FAMA, E. F. The behavior of stock-market prices. *The journal of Business*, JSTOR, v. 38, n. 1, p. 34–105, 1965.
- FERRARI, S.; CRIBARI-NETO, F. Beta regression for modelling rates and proportions. *Journal of Applied Statistics*, Taylor & Francis, v. 31, n. 7, p. 799–815, 2004.
- GARG, M. L.; RAO, B. R.; REDMOND, C. K. Maximum-likelihood estimation of the parameters of the gompertz survival function. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, JSTOR, v. 19, n. 2, p. 152–159, 1970.
- GOMPERTZ, B. Xxiv. on the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. in a letter to francis baily, esq. frs &c. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, The Royal Society London, n. 115, p. 513–583, 1825.
- GOOSSENS, M.; MITTELBACH, F.; SAMARIN, A. *The LATEX companion*. [S.I.]: Addison-Wesley Reading, 1994. v. 1.
- GUJARATI, D. N.; PORTER, D. C. *Econometria básica-5*. [S.I.]: Amgh Editora, 2011.
- HYNDMAN, R. J.; KOEHLER, A. B. Another look at measures of forecast accuracy. *International journal of forecasting*, Elsevier, v. 22, n. 4, p. 679–688, 2006.
- ISMAIL, A. A. Bayes estimation of gompertz distribution parameters and acceleration factor under partially accelerated life tests with type-i censoring. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Taylor & Francis, v. 80, n. 11, p. 1253–1264, 2010.
- JAHEEN, Z. F. A bayesian analysis of record statistics from the gompertz model. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 145, n. 2-3, p. 307–320, 2003.
- KEDEM, B.; FOKIANOS, K. *Regression models for time series analysis*. [S.I.]: John Wiley & Sons, 2002. v. 488.
- KIANI, K.; ARASAN, J.; MIDI, H. Interval estimations for parameters of gompertz model with time-dependent covariate and right censored data. *Sains Malaysiana*, v. 41, n. 4, p. 471–480, 2012.
- KIRKWOOD, T. B. Deciphering death: a commentary on gompertz (1825)'on the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies'. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, The Royal Society, v. 370, n. 1666, p. 20140379, 2015.
- LAIRD, A. K. Dynamics of tumour growth. *British journal of cancer*, Nature Publishing Group, v. 18, n. 3, p. 490, 1964.
- LEE, A. K.; COCKBURN, A. et al. *Evolutionary ecology of marsupials*. [S.I.]: Cambridge University Press, 1985.
- LEE, S. J.; BOSCARDIN, W. J.; KIRBY, K. A.; COVINSKY, K. E. Individualizing life expectancy estimates for older adults using the gompertz law of human mortality. *PloS one*, Public Library of Science, v. 9, n. 9, p. e108540, 2014.

- LENART, A.; MISSOV, T. I. Goodness-of-fit tests for the gompertz distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 45, n. 10, p. 2920–2937, 2016.
- MAIOR, V. Q.; CYSNEIROS, F. J. A. Symarma: a new dynamic model for temporal data on conditional symmetric distribution. *Statistical Papers*, Springer, v. 59, n. 1, p. 75–97, 2018.
- MARTINEZ, R. O. *Estimação pontual e intervalar em um modelo de regressão beta*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2004.
- MAZUCHELI, J.; MENEZES, A. F.; DEY, S. Unit-gompertz distribution with applications. *Statistica*, v. 79, n. 1, p. 25–43, 2019.
- MCCULLAGH, P.; NELDER, J. *Generalized linear models*. 2. ed. London: Chapman and Hall, 1989.
- MERCY, J.; KUMARAN, M. Estimation of the generalized lambda distribution from censored data. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, Brazilian Statistical Association, v. 24, n. 1, p. 42–56, 2010.
- MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. Análise de séries temporais. In: *Análise de séries temporais*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 538–538.
- MYTTENAERE, A. D.; GOLDEN, B.; GRAND, B. L.; ROSSI, F. Mean absolute percentage error for regression models. *Neurocomputing*, Elsevier, v. 192, p. 38–48, 2016.
- NÓBREGA, M. d.; LOYOLA, G.; FILHO, E. M. G.; PASQUAL, D. O mercado de capitais: sua importância para o desenvolvimento e os entraves com que se defronta no Brasil. *Publicações Bovespa. São Paulo, maio*, 2000.
- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. *Numerical optimization*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.
- NORTON, L. A gompertzian model of human breast cancer growth. *Cancer research*, AACR, v. 48, n. 24 Part 1, p. 7067–7071, 1988.
- PALM, B. G.; BAYER, F. M.; CINTRA, R. J. Signal detection and inference based on the beta binomial autoregressive moving average model. *Digital Signal Processing*, Elsevier, v. 109, p. 102911, 2021.
- PARMEZAN, A. R. S. *Predição de séries temporais por similaridade*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2014.
- PRESS, W. H.; VETTERLING, W. T.; TEUKOLSKY, S. A.; FLANNERY, B. P. *Numerical recipes*. [S.l.]: Cambridge university press Cambridge, 1986. v. 818.
- RAMOS, A. S. Previsões de séries temporais combinando modelos arma e redes neurais artificiais. Universidade Federal de Pernambuco, 2010.
- RASSIER, L. H.; HILGERT, S. P. Aprenda a investir na bolsa de valores. *Curitiba: IESDE Brasil*, p. 67, 2012.
- RIBEIRO, T. F. *Essays on the unit Burr XII distribution: regression and time series models*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2020.

-
- RICKLEFS, R. E. A graphical method of fitting equations to growth curves. *Ecology*, Wiley Online Library, v. 48, n. 6, p. 978–983, 1967.
- RICKLEFS, R. E. Patterns of growth in birds. *Ibis*, Wiley Online Library, v. 110, n. 4, p. 419–451, 1968.
- RIFFENBURGH, R.; JOHNSTONE, P. Survival patterns of cancer patients. *Cancer*, Wiley Online Library, v. 91, n. 12, p. 2469–2475, 2001.
- TJØRVE, E. Shapes and functions of species–area curves (ii): a review of new models and parameterizations. *Journal of Biogeography*, Wiley Online Library, v. 36, n. 8, p. 1435–1445, 2009.
- VAGHI, C.; RODALLEC, A.; FANCIULLINO, R.; CICCOLINI, J.; MOCHEL, J. P.; MASTRI, M.; POIGNARD, C.; EBOS, J. M.; BENZEKRY, S. Population modeling of tumor growth curves and the reduced gompertz model improve prediction of the age of experimental tumors. *PLoS computational biology*, Public Library of Science, v. 16, n. 2, p. e1007178, 2020.
- WU, J.-W.; HUNG, W.-L.; TSAI, C.-H. Estimation of the parameters of the gompertz distribution under the first failure-censored sampling plan. *Statistics*, Taylor & Francis, v. 37, n. 6, p. 517–525, 2003.
- WU, J.-W.; HUNG, W.-L.; TSAI, C.-H. Estimation of parameters of the gompertz distribution using the least squares method. *Applied mathematics and computation*, Elsevier, v. 158, n. 1, p. 133–147, 2004.
- ZULLINGER, E. M.; RICKLEFS, R. E.; REDFORD, K. H.; MACE, G. M. Fitting sigmoidal equations to mammalian growth curves. *Journal of Mammalogy*, American Society of Mammalogists 810 East 10th Street, PO Box 1897, Lawrence . . . , v. 65, n. 4, p. 607–636, 1984.

APÊNDICE A – MATRIZ DE INFORMAÇÃO DE FISHER

A.1 VETOR ESCORE

$$\begin{aligned}\frac{\partial l(\psi, q_t, c)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial l_t(\psi, q_t, c)}{\partial q_t} \exp(\eta_t) \\ \frac{\partial l(\psi, q_t, c)}{\partial \beta} &= \frac{\partial l_t(\psi, q_t, c)}{\partial q_t} \exp(\eta_t) \left[x_t^\top - \sum_{i=1}^p \phi_i x_t^\top \right] \\ \frac{\partial l(\psi, q_t, c)}{\partial \phi} &= \frac{\partial l_t(\psi, q_t, c)}{\partial q_t} \exp(\eta_t) \left[\sum_{i=1}^p [\log(y_{t-i}) - x_t^\top \beta] \right] \\ \frac{\partial l(\psi, q_t, c)}{\partial \theta} &= \frac{\partial l_t(\psi, q_t, c)}{\partial q_t} \exp(\eta_t) \left[\sum_{j=1}^q [\log(x_{t-j}) - \log(q_{t-j})] \right]\end{aligned}$$

As derivadas com relação a c e q_t já foram mostradas no capítulo 3.

A.2 MATRIZ DE INFORMAÇÃO DE OBSERVADA.

Após o cálculo do vetor escore, podemos definir a inversa da Matrix de Informação de Fisher, como sendo a derivada do vetor escore com relação a cada um de seus componentes, onde obteremos uma matriz 5×5 .

$$k^{-1}(\psi) = \mathbf{E} \left(- \frac{\partial^2 l(\psi_t, q_t, c)}{\partial \psi \partial \psi^\top} \right)$$

Essa matriz terá a forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \alpha \partial \alpha} & \frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \alpha \partial \beta} & \frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \alpha \partial \phi} & \frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \alpha \partial \theta} & \frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \alpha \partial c} \\ \frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \beta \partial \beta} & \frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \beta \partial \phi} & \frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \beta \partial \theta} & \frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \beta \partial c} \\ \frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \phi \partial \alpha} & \frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \phi \partial \beta} & \frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \phi \partial \phi} & \frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \phi \partial \theta} & \frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \phi \partial c} \\ \frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \theta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \theta \partial \beta} & \frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \theta \partial \phi} & \frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \theta \partial \theta} & \frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \theta \partial c} \\ \frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial c \partial \alpha} & \frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial c \partial \beta} & \frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial c \partial \phi} & \frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial c \partial \theta} & \frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial c \partial c} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \alpha \partial \alpha} &= \frac{-c \exp(cq_t)[-cq_t + \exp(cq_t) - 1]}{(\exp(cq_t) - 1)^2} - \frac{c^2 q \exp(cq_t)[\exp cq - 1] \log(1 - u)}{(\exp cq - 1)^2} \\ &\quad + \frac{2c^2 q \log(1 - u)[\exp cq - 1]}{(\exp(cq_t) - 1)^3} - \frac{c \exp cq \log(1 - u)[\exp cq - 1]}{(\exp(cq_t) - 1)^2}\end{aligned}\tag{A.1}$$

Com vistas a facilitar a leitura, vamos indexar cada trecho do resultado de $\frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \alpha \partial \alpha}$ em $L1$, $L2$, $L3$ e $L4$, tendo em vista que o bloco $\frac{\partial}{\partial q_t} \left(\frac{\partial l(\psi, q_t, c)}{\partial \alpha} \right)$ se manterá constante. Então, temos para as derivadas parciais com relação a α

$$\frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \alpha \partial \alpha} = -L1 - L2 + L3 - L4$$

$$\frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \alpha \partial \beta} = (-L1 - L2 + L3 - L4) \left[x_t^\top - \sum_{i=1}^p \phi_i x_t^\top \right]$$

$$\frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \alpha \partial \phi} = (-L1 - L2 + L3 - L4) \left[\sum_{i=1}^p \log(y_{t-i}) - \sum_{i=1}^p x_t^\top \beta \right]$$

$$\frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \alpha \partial \theta} = (-L1 - L2 + L3 - L4) \left[\sum_{j=1}^q \log(x_{t-j}) - \sum_{j=1}^q \log(q_{t-j}) \right]$$

Com relação a β

$$\frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \beta \partial \beta} = (-L1 - L2 + L3 - L4) \left[x_t^\top - \sum_{i=1}^p \phi_i x_t^\top \right]^2$$

$$\frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \beta \partial \alpha} = (-L1 - L2 + L3 - L4) \left[x_t^\top - \sum_{i=1}^p \phi_i x_t^\top \right]$$

$$\frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \beta \partial \phi} = (-L1 - L2 + L3 - L4) \left[x_t^\top - \sum_{i=1}^p \phi_i x_t^\top \right] \left[\sum_{i=1}^p \log(y_{t-i}) - \sum_{i=1}^p x_t^\top \beta \right]$$

$$\frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \beta \partial \theta} = (-L1 - L2 + L3 - L4) \left[x_t^\top - \sum_{i=1}^p \phi_i x_t^\top \right] \left[\sum_{j=1}^q \log(x_{t-j}) - \sum_{j=1}^q \log(q_{t-j}) \right]$$

Com relação a ϕ

$$\frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \phi \partial \phi} = (-L1 - L2 + L3 - L4) \left[\sum_{i=1}^p \log(y_{t-i}) - \sum_{i=1}^p x_t^\top \beta \right]^2$$

$$\frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \phi \partial \alpha} = (-L1 - L2 + L3 - L4) \left[\sum_{i=1}^p \log(y_{t-i}) - \sum_{i=1}^p x_t^\top \beta \right]$$

$$\frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \phi \partial \beta} = (-L1 - L2 + L3 - L4) \left[x_t^\top - \sum_{i=1}^p \phi_i x_t^\top \right] \left[\sum_{i=1}^p \log(y_{t-i}) - \sum_{i=1}^p x_t^\top \beta \right]$$

$$\frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \phi \partial \theta} = (-L1 - L2 + L3 - L4) \left[\sum_{i=1}^p \log(y_{t-i}) - \sum_{i=1}^p x_t^\top \beta \right] \left[\sum_{j=1}^q \log(x_{t-j}) - \sum_{j=1}^q \log(q_{t-j}) \right]$$

Com relação a θ

$$\frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \theta \partial \theta} = (-L1 - L2 + L3 - L4) \left[\sum_{j=1}^q \log(x_{t-j}) - \sum_{j=1}^q \log(q_{t-j}) \right]^2$$

$$\frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \theta \partial \alpha} = (-L1 - L2 + L3 - L4) \left[\sum_{j=1}^q \log(x_{t-j}) - \sum_{j=1}^q \log(q_{t-j}) \right]$$

$$\frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \theta \partial \beta} = (-L1 - L2 + L3 - L4) \left[x_t^\top - \sum_{i=1}^p \phi_i x_t^\top \right] \left[\sum_{j=1}^q \log(x_{t-j}) - \sum_{j=1}^q \log(q_{t-j}) \right]$$

$$\frac{\partial^2 l(\psi, q_t, c)}{\partial \beta \partial \phi} = (-L1 - L2 + L3 - L4) \left[x_t^\top - \sum_{i=1}^p \phi_i x_t^\top \right] \left[\sum_{i=1}^p \log(y_{t-i}) - \sum_{i=1}^p x_t^\top \beta \right]$$

O bloco de derivações com relação ao $\frac{\partial}{\partial c}$, segue abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{\partial l(\psi, q_t, c)}{\partial \alpha} \right) &= - \frac{q \exp(cq) \{-cq + \exp(cq) - 1 + \log(1-u)[\exp(cx) - 1]\}}{[\exp(cq) - 1]^2} \\ &\quad - \frac{cq^2 \exp(cq) \log(1-u)[\exp(cx) - 1]}{[\exp(cq) - 1]^2} + \frac{2cq^2 \exp(2cq) \log(1-u)[\exp(cx) - 1]}{[\exp(cq) - 1]^3} \\ &\quad - \frac{cqx \exp(cq + cx) \log(1-u)}{[\exp(cq) - 1]^2} \end{aligned}$$

Tomando cada termo da equação acima como $A1, A2, A3$ e $A4$, temos:

$$\frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{\partial l(\psi, q_t, c)}{\partial \alpha} \right) = -A1 - A2 + A3 - A4$$

$$\frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{\partial l(\psi, q_t, c)}{\partial \beta} \right) = (-A1 - A2 + A3 - A4) \left[x_t^\top - \sum_{i=1}^p \phi_i x_t^\top \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{\partial l(\psi, q_t, c)}{\partial \phi} \right) = (-A1 - A2 + A3 - A4) \left[\sum_{i=1}^p \log(y_{t-i}) - \sum_{i=1}^p x_t^\top \beta \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{\partial l(\psi, q_t, c)}{\partial \theta} \right) = (-A1 - A2 + A3 - A4) \left[\sum_{j=1}^q \log(x_{t-j}) - \sum_{j=1}^q \log(q_{t-j}) \right]$$

Seja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial l(\psi, q_t, c)}{\partial c} \right) &= \frac{\exp(cq + \eta)[cq - \exp(cq) - 1]}{(\exp(cq) - 1)^2} \\ &\quad + \frac{[\exp(cx) - 1] \log(1-u) \exp(cq + \eta)(-1 - cq)}{(\exp(cq) - 1)^2} \\ &\quad + \frac{2cq \log(1-u) \exp(2cq + \eta)(\exp(cx) - 1)}{(\exp(cq) - 1)^3} \\ &\quad - \frac{cx \log(1-u) \exp(cq + cx + \eta)}{(\exp(cq) - 1)^2} \end{aligned}$$

Reescrevendo como:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial l(\psi, q_t, c)}{\partial c} \right) = k1 + k2 + k3 - k4$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial l(\psi, q_t, c)}{\partial c} \right) = (k1 + k2 + k3 - k4) \left[x_t^\top - \sum_{i=1}^p \phi_i x_t^\top \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial l(\psi, q_t, c)}{\partial c} \right) = (k1 + k2 + k3 - k4) \left[\sum_{i=1}^p \log(y_{t-i}) - \sum_{i=1}^p x_t^\top \beta \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial l(\psi, q_t, c)}{\partial c} \right) = (k1 + k2 + k3 - k4) \left[\sum_{j=1}^q \log(x_{t-j}) - \sum_{j=1}^q \log(q_{t-j}) \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{\partial l(\psi, q_t, c)}{\partial c} \right) &= \frac{1}{c^2} + \frac{q^2 \exp(c * q)}{(\exp cq - 1)^2} + \frac{x^2 \exp(cx) \log(1 - u)}{\exp(cq) - 1} - \frac{qx \log(1 - u) \exp(cx + cq)}{(\exp(cq) - 1)^2} \\ &\quad - \frac{q^2 \exp(cq) \log(1 - u)}{\exp(cx) - 1} + \frac{qx \exp(cx + cq) \log(1 - u)}{(\exp(cx) - 1)^2} \end{aligned}$$

APÊNDICE B – CÓDIGOS DA GERAÇÃO

```
#####
#Ivangillys Gomes
#Testes_Disserta??o
#####

rm(list = ls())
library(maxLik)

### Parametros do Modelo
test= function(nrep=5000, size, semente=1980, a,phi,lambda,theta,Quantil = 0.75){

  qa= 0.75
  Perc= Quantil
  CHUTE=1
  PERC= Quantil
# tamanho da amostra
#size=100
#####
densEE = function(x,alpha,lambda){

  alpha * exp(lambda*x)*exp((-alpha/lambda)*(exp(lambda*x)-1))}

#Gerar amostra de numeros aleatorios de Gompertz
gereEE=function(n,alpha,lambda){
  u=runif(n)
  (1/lambda)*log(1-(lambda/alpha)*log(1-u))
```

```
}

```

```
#Modelo ARMA(NOVO)

```

```
#GeraÃ§Ã£o de dados simulados para a serie

```

```
Z = function(x,q,lambda,theta,phi,u,a,n){
  vet=NULL

```

```
  # Quantil

```

```
  q = exp(a * (1-phi) + theta*(log(x)-log(q)) + phi*log(x))

```

```
  # Parâmetro reparametrizado

```

```
  alpha = lambda*log(1-u)/(1-exp(lambda*q)) ###q ou x ???????????????????

```

```
  # geraÃ§Ã£o da serie

```

```
  vet[1]=gereEE(1,alpha,lambda)

```

```
  for(i in 2:n){

```

```
    q = exp(a *(1-phi) + theta*(log(vet[i-1])-log(q)) + phi*log(vet[i-1]))

```

```
    alpha=lambda*log(1-u)/(1-exp(lambda*q))

```

```
    vet[i]=gereEE(1,alpha,lambda)

```

```
  }

```

```
  return(vet)

```

```
}

```

```
#####

```

```
loglik_AR=function(par){

```

```
  # Variáveis externas

```

```
  # Xobs: Observed series

```

```
  # CHUTE: Chute inicial externa

```

```
  # PERC: percentil inicial externa

```

```
  a = par[1]

```

```
lambda = par[2]
theta = par[3]
phi= par[4]
# chute inicial
x=CHUTE; u=PERC; n=length(Xobs);qa=qa;
q = exp(a * (1-phi) + theta*(log(x)-log(qa)) + phi*log(x))
alpha = lambda*(log(1-u))/(1-exp(lambda*q))
soma = log(densEE(Xobs[1],alpha,lambda))

for(i in 2:n){
  # q=exp( a*(1-phi) + (phi*log(vet[i-1])) )
  q = exp(a *(1-phi) + theta*(log(Xobs[i-1])-log(q)) + phi*log(Xobs[i-1]))
  alpha=lambda*(log(1-u))/(1-exp(lambda*q))
  soma = soma + log(densEE(Xobs[i],alpha,lambda))
}

soma

}

#Z = function(x,q,L,theta,phi,u,a,n){

# > Application
#
#CHUTE=1.5
# Parâmetros da distribuição
#lambda=0.9
#qa=0.5

#amostra
set.seed(1800)
```

```
Xobs<- Z(CHUTE,qa,lambda,phi,theta,PERC,a,size)
Xobs<-ts(Xobs)
#set.seed(1950)
loglik_AR(c(a,lambda,phi,theta))

#laÃ§o de monte carlo

#NÃºmero de rÃ©plicas
#size=20
MC = nrep
MM=matrix(0,MC,4)
for(i in 1:MC){
  #GeraÃ§Ã£o de Dados
  Xobs=Z(CHUTE,qa,lambda,phi,theta,PERC,a,size)
  #print(i)

  #v=maxLik(loglik_AR,start=c(a,phi,lambda),
  #constraints=list(ineqA=A, ineqB=B),method="BFGS")
  v=maxLik(loglik_AR,start=c(a,lambda,phi,theta),method="BFGS")

  MM[i,]=v$estimate
}

#estimativas
#MM
#media das estimativas
EMV=colMeans(MM)
#viÃos das estimativas
vies=EMV-c(a,lambda,phi,theta)
```

```

#vies relativo
viesrel=vies*100/c(a,lambda,phi,theta)
#Var das estimativas
vari=c(var(MM[,1]),var(MM[,2]), var(MM[,3]),var(MM[,4]))
#erro quadratico mÃ©dio
eqm= vies^2+vari
#parÃ¢metros verdadeiros
Pav_ver<-c(a,lambda,phi,theta)
#####
Resultados = list(nobs = size,
                  quantil = Quantil,

                  Par_ver = Pav_ver,
                  Estimativa = EMV,
                  Vies = vies,
                  Viesrel = viesrel,
                  EQM = eqm,
                  Res= cbind(size,EMV[1],vies[1],eqm[1],EMV[2],vies[2],eqm[2],EMV[3]
                            ,vies[3],eqm[3],EMV[4],vies[4],eqm[4]) )
return(Resultados)

}

test_100_q075 = test(nrep = 1000,size = 100,a = 0.4,phi = 0.25,lambda = 0.9,theta = 0.5)
test_250_q075 = test(nrep = 1000,size = 250,a = 0.4,phi = 0.25,lambda = 0.9,theta = 0.5)
test_500_q075 = test(nrep = 1000,size = 500,a = 0.4,phi = 0.25,lambda = 0.9,theta = 0.5)

Res_075 = round(rbind(test_100_q075$Res, test_250_q075$Res, test_500_q075$Res), 4)

test_100_q05 = test(nrep = 1000,size = 100,a = 0.4,phi = 0.25,lambda = 0.9,theta = 0.5
,Quantil = 0.5)
test_250_q05 = test(nrep = 1000,size = 250,a = 0.4,phi = 0.25,lambda = 0.9,theta = 0.5
,Quantil = 0.5)

```

```
test_500_q05 = test(nrep = 1000, size = 500, a = 0.4, phi = 0.25, lambda = 0.9, theta = 0.5
, Quantil = 0.5)
```

```
Res_05 = round(rbind(test_100_q05$Res, test_250_q05$Res, test_500_q05$Res), 4)
```

```
test_100_q025 = test(nrep = 1000, size = 100, a = 0.4, phi = 0.25, lambda = 0.9, theta = 0.5
, Quantil = 0.25)
```

```
test_250_q025 = test(nrep = 1000, size = 250, a = 0.4, phi = 0.25, lambda = 0.9, theta = 0.5
, Quantil = 0.25)
```

```
test_500_q025 = test(nrep = 1000, size = 500, a = 0.4, phi = 0.25, lambda = 0.9, theta = 0.5
, Quantil = 0.25)
```

```
Res_025 = round(rbind(test_100_q025$Res, test_250_q025$Res, test_500_q025$Res), 4)
```

```
Resultados = rbind(Res_025, Res_05, Res_075)
```

```
colnames(Resultados) = c("Nobs", "Est_A", "Vies_A", "EQM_A",
                        "Est_Lambda", "Vies_Lambda", "EQM_Lambda",
                        "Est_phi", "Vies_phi", "EMQ_phi",
                        "Est_Theta", "Vies_Theta", "EMQ_Theta")
```

```
Resultados
```

```
library(stargazer)
```

```
stargazer(Resultados, digits = 4)
```