



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

LAYANE BASTOS JUVITO

**ESTUDO DAS DIFERENTES TÉCNICAS DE SUAVIZAÇÃO NO MÉTODO
MULTIESCALA ITERATIVO MSCV ACOPLADO AO ESQUEMA DE ALTA
RESOLUÇÃO CPR NA SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS BIFÁSICOS
ÁGUA-ÓLEO EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO USANDO MALHAS NÃO
ESTRUTURADAS**

Recife

2021

LAYANE BASTOS JUVITO

**ESTUDO DAS DIFERENTES TÉCNICAS DE SUAVIZAÇÃO NO MÉTODO
MULTIESCALA ITERATIVO MSCV ACOPLADO AO ESQUEMA DE ALTA
RESOLUÇÃO CPR NA SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS BIFÁSICOS
ÁGUA-ÓLEO EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO USANDO MALHAS NÃO
ESTRUTURADAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia e Geociências, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração Simulação e Gerenciamento de Reservatórios de Petróleo

Orientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Maciel Lyra
Coorientador: Prof. Dr. Darlan karlo Elisiário de Carvalho

Recife

2021

Catalogação na fonte
Bibliotecária Margareth Malta, CRB-4 / 1198

J97e

Juvito, Layane Bastos.

Estudo das diferentes técnicas de suavização no método multiescala iterativo MSCV acoplado ao esquema de alta resolução CPR na simulação de escoamentos bifásicos água-óleo em reservatórios de petróleo usando malhas não estruturadas / Layane Bastos Juvito. - 2021.

73folhas, il., gráfs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Maciel Lyra.

Coorientador: Prof. Dr. Darlan karlo Elisiário de Carvalho.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2021.

Inclui Referências.

1. engenharia civil. 2. fluxo bifásico. 3. reservatórios de petróleo anisotrópicos e heterogêneos. 4. multiescala. 5. MsCV. 6. suavizadores. 7. aproximações de alta ordem. 8. cpr. 9. mlp. I. Lyra, Paulo Roberto Maciel (Orientador). II. Carvalho, Darlan karlo Elisiário de (Coorientador). III. Título

UFPE

624 CDD (22. ed.)

BCTG/2021-212

LAYANE BASTOS JUVITO

**ESTUDO DAS DIFERENTES TÉCNICAS DE SUAVIZAÇÃO NO MÉTODO
MULTIESCALA ITERATIVO MSCV ACOPLADO AO ESQUEMA DE ALTA
RESOLUÇÃO CPR NA SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS BIFÁSICOS ÁGUA
ÓLEO EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO USANDO MALHAS NÃO
ESTRUTURADAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia e Geociências, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração Simulação e Gerenciamento de Reservatórios de Petróleo

Aprovada em: 18/06/2021.

BANCA EXAMINADORA

participação por videoconferência
Prof. Dr. Paulo Roberto Maciel Lyra (orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

participação por videoconferência
Prof. Dr. Alessandro Romário Echevarria Antunes (examinador externo)
Universidade Federal de Pernambuco

participação por videoconferência
Prof. Dr. Igor Fernandes Gomes (examinador interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Às minhas eternas rainhas, minhas avós (in memoriam): Maria Ana e Ana Souza.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço ao maior orientador da minha vida, Deus, pois somente através da ajuda de Sua Inteligência Infinita que este trabalho foi concluído de forma satisfatória.

Ao meu orientador Paulo Roberto Maciel Lyra, por ser uma constante fonte de motivação e incentivo e pelas valiosas horas dedicadas a esse trabalho, sempre com uma presença cheia de otimismo.

Ao meu coorientador Darlan Karlo Elisiário de Carvalho pelo auxílio e orientação.

A todos os colegas do PADMEC, em especial a Artur Castiel Reis de Souza e Gustavo Galindez Ramirez, pela troca de conhecimento, incentivo, paciência e todo apoio dado a essa pesquisa.

Aos professores Alessandro Romário Echevarria Antunes e Igor Fernandes Gomes por aceitarem participar da banca examinadora.

A FACEPE que contribuiu financeiramente para a realização desse trabalho.

Aos meus pais, Marileide Bastos e Josenaldo Juvito, pelo carinho, afeto, dedicação e cuidado, sempre presentes nessa caminhada com muita luta e determinação, me dando forças pra seguir meus sonhos principalmente durante os momentos mais difíceis.

Aos meus amigos que sempre estiveram ao meu lado me apoiando, incentivando e compartilhando experiências de forma construtiva.

Enfim, agradeço a todos aqueles que de alguma forma contribuíram ou torceram pela concretização deste trabalho.

RESUMO

A modelagem e simulação de escoamentos multifásicos em meios heterogêneos e anisotrópicos constituem um grande desafio matemático e numérico, onde metodologias numéricas adequadas são de suma importância, visando fornecer ferramentas essenciais para análise de engenharia de reservatórios, pois permite a previsão do desempenho dos reservatórios de hidrocarbonetos sob várias estratégias operacionais. O uso de esquemas de altíssima ordem para resolver o problema de transporte, juntamente com métodos multiescala aplicados na simulação de escoamentos multifásicos em reservatórios de petróleo, ainda não foi explorado na literatura. Neste trabalho, o método multiescala iterativo MsCV (*Multiscale Control-Volume*) é usado para resolver o problema elíptico da pressão enquanto a equação de saturação hiperbólica é resolvida usando o CPR (*Correction Procedure via Reconstruction*). Para acoplar adequadamente o conjunto anterior de equações, usamos a estratégia IMPES (*Implicit Pressure Explicit Saturation*) e um operador de reconstrução de velocidade com base nas funções de forma de interpolação de Raviart-Thomas de ordem inferior. Além disso, é empregado o MLP (*Multidimensional Limiting Process*) na fase de reconstrução do CPR a fim de suprimir oscilações numéricas intrínsecas à representação de regiões de choque por esquemas de alta ordem e para entregar alta resolução nas regiões suaves da solução. Para acoplar adequadamente o método MsCV com a abordagem de CPR, uma reconstrução de velocidade adequada em todos os volumes de controle é necessária para garantir a acurácia do método de alta ordem. Assim, o campo de velocidade deve apresentar um grau adequado de precisão que, em geral, não é entregue por métodos multiescala. Para lidar com esse problema e remover os componentes de alta frequência do erro, estudamos vários métodos de suavização (ou preconditionadores). Assim, foram realizadas diversas simulações em 2-D, usando problemas "*benchmarks*" da literatura, a fim de analisar o comportamento e a eficiência de diferentes suavizadores aplicados ao problema elíptico para produzir um campo de velocidade preciso e, portanto, resultados satisfatórios para o problema de fluxo bifásicos em reservatórios de petróleo heterogêneos e anisotrópicos.

Palavras chave: fluxo bifásico; reservatórios de petróleo anisotrópicos e heterogêneos; multiescala; mscv; suavizadores; aproximações de alta ordem; cpr; mlp.

ABSTRACT

The modeling and simulation of multiphase flows in heterogeneous and anisotropic media constitute a major mathematical and numerical challenge, where, adequate numerical methodologies are the paramount importance, aimed to provide essential tools for reservoir engineering analysis, as it allows the prediction of the performance in the hydrocarbon reservoirs under various operational strategies. The use of very high-order schemes to solve the transport problem, together with multiscale methods applied to multiphase flows in petroleum reservoirs has not been explored in literature. In this work, the Multiscale Control-Volume (MsCV) method is used to solve the elliptical pressure problem while the hyperbolic saturation equation is solved using the high-resolution nodal Correction Procedure via Reconstruction (CPR) approach. In order to properly couple the previous set of equations, we use the Implicit Pressure Explicit Saturation (IMPES) strategy and a velocity reconstruction operator based on the lowest order Raviart–Thomas interpolation shape functions. In addition, a hierarchical Multidimensional Limiting Process (MLP) is employed in the reconstruction stage of CPR approach to suppress numerical oscillations (under and over shoots) intrinsic to the representation of shock regions by high-order schemes and to deliver high-resolution in smooth regions of the solution. To properly couple the MsCV method with the CPR approach an adequate velocity reconstruction throughout all control volumes is necessary to assure the accuracy of the high-order method. Thus, the velocity field must present a proper degree of accuracy that, in general, is not handed by multiscale methods. To deal with this issue and to remove the high-frequency components of the error and the residual, we have studied several smoothers. Thus, several simulations were performed in 2-D, using "benchmarks" problems in the literature, in order to analyze the behavior and efficiency of different smoothers applied to the elliptical problem to produce an accurate velocity field and, therefore, satisfactory results for the biphasic flow problem in heterogeneous and anisotropic oil reservoirs.

Keywords: oil–water displacements; anisotropic and heterogeneous petroleum reservoirs; multiscale; mscv; smoothers; high-order approximations; cpr; mlp.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Algoritmo da metodologia IMPES.	30
Figura 2 – Parte de uma malha poligonal, ilustrando o estêncil tipo diamante, em 2-D. .	33
Figura 3 – Parte de uma malha quadrangular, ilustrando a interpolação da velocidade via as funções de Raviart-Thomas de baixa ordem RT_0	34
Figura 4 – Descrição das malhas fina e grossa primal.	36
Figura 5 – Pontos de Solução e Pontos de Fluxo no domínio de referência 2D para uma aproximação P_2	46
Figura 6 – Escoamento monofásico no conjunto de dados do SPE 10: Norma Euclidiana do erro para cada camada sem aplicação do método iterativo.	50
Figura 7 – Escoamento monofásico no conjunto de dados do SPE 10: Impacto da aplicação da estratégia de suavização no campo de pressão: Norma Euclidiana do erro para cada camada do SPE (15 iterações).	51
Figura 8 – Escoamento monofásico no conjunto de dados do SPE 10: Impacto da aplicação da estratégia de suavização no campo de velocidades: Norma Euclidiana do erro para cada camada do SPE (15 iterações).	52
Figura 9 – Escoamento monofásico no conjunto de dados do SPE 10: Histórico de convergência dos suavizadores: Norma Euclidiana do resíduo para cada iteração, plotando até 200 iterações.. . . .	54
Figura 10 – Escoamento monofásico no conjunto de dados do SPE 10: Campos de permeabilidade e pressão da camada 67 do SPE10.	55
Figura 11 – Escoamento bifásico em reservatório altamente heterogêneo e isotrópico. .	56
Figura 12 – Perfis de saturação para o $VPI = 0.3$ em uma configuração do tipo "1/4 de five-spot" em reservatório altamente heterogêneo e isotrópico: Perfis de saturação calculados usando os métodos FOU e CPR, com diferentes ordens, e para o cálculo da pressão utilizando o método MPFA-D (a, d, g e j), MsCV (b, e, h e k) e iMsCV (c, f, i e l).	58
Figura 13 – Escoamento bifásico em reservatório altamente heterogêneo e isotrópico: Norma Euclidiana do erro para os campos de pressão (a, c, e, g) e de velocidade (b, d, f, h).	59
Figura 14 – Escoamento bifásico em reservatório altamente heterogêneo e isotrópico: Curvas de produção.	60

Figura 15 – Escoamento bifásico em reservatório altamente heterogêneo e isotrópico: Curvas de produção obtidas pelo método iterativo (iMsCV).	61
Figura 16 – Escoamento bifásico em reservatório heterogêneo com tensor de permeabilidade descontínuo e com alta razão de anisotropia: Ângulos de rotação do tensor anisotrópico descontínuo (esquerda); malha fina quadrilateral não-estruturada e malha poligonal não estruturada primal na escala grossa (direita).	62
Figura 17 – Escoamento bifásico em reservatório heterogêneo com tensor de permeabilidade descontínuo e com alta razão de anisotropia: perfis de saturação para o pvi de 0.3 para os métodos, de solução da saturação de diferentes ordens, na malha fina (esquerda), MsCV (centro) e iMscv (direita).	64
Figura 18 – Escoamento bifásico em reservatório heterogêneo com tensor de permeabilidade descontínuo e com alta razão de anisotropia: Curvas de produção. . . .	65
Figura 19 – Escoamento bifásico em reservatório heterogêneo com tensor de permeabilidade descontínuo e com alta razão de anisotropia: Comparação das curvas de produção obtidas por diferentes ordens de aproximação na solução da saturação com a solução de referência global.	66

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Lista de abreviações importantes para a compreensão das análises deste capítulo.	48
Tabela 2 – Escoamento monofásico no conjunto de dados do SPE 10: Norma Euclidiana do erro após 15 iterações: campo de pressão.	51
Tabela 3 – Escoamento monofásico no conjunto de dados do SPE 10: Norma Euclidiana do erro após 15 iterações: campo de velocidade.	53
Tabela 4 – Número de iterações necessárias para cada método atingir a tolerância de 10^{-9} .	53

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BGS	Backward Gauss-Seidel.
BSOR	Backward Successive Over Relaxation.
CFD	Computational Fluid Dynamic.
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy Condition.
CPR	Correction Procedures via Reconstruction Method.
ILU	Decomposição LU Incompleta.
DMP	Discrete Maximum Principle.
FGS	Forward Gauss-Seidel.
FOU	First-Order Upwind.
FOU	First-Order Upwind.
FP	Flux Point.
FR	Flux Reconstruction.
FSOR	Forward Successive Over Relaxation.
FV	Finite Volume.
IMPES	Implicit Pressure Explicit Saturation.
iMsCV	Iterative Multiscale Control Volume.
LCP	Lifting Collocation Penalty.
LPEW	Linearity-Preserving Explicit Weighted.
M	Método Iterativo Multiescala.
MLP	Multi-Dimensional Limiting Procedure.
MM	Método Iterativo Multiescala Modificado.
MN	Método Iterativo Multinível.

MPFA	Multi-Point Flux Approximation.
MPFA-D	Multi-Point Flux Approximation- <i>Diamond</i> type.
MsCV	Multiscale Control-Volume.
MsFEM	Multiscale Finite Element Method.
MsFV	Multiscale Finite Volume Method.
MsMFEM	Mixed Finite-Element Multiscale Method.
MsRSB	Multiscale Restriction-Smoothed Basis.
R	Método Iterativo Richardson.
SP	Solution Point.
SOR	Successive Over-Relaxation.
TPFA	Two-Point Flux Aproximation.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	OBJETIVO GERAL	18
1.1.1	Objetivos específicos	18
1.2	CONTEÚDO	18
2	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	20
2.1	CONCEITOS FUNDAMENTAIS	20
2.1.1	Propriedades das Rochas e Fluidos	20
2.1.1.1	Porosidade	20
2.1.1.2	Saturação	21
2.1.1.3	Permeabilidade	21
2.1.1.4	Massa específica	23
2.1.1.5	Viscosidade	23
2.1.1.6	Mobilidade	23
2.1.2	Lei de Darcy	23
2.1.2.1	Fluxo fracionário	24
2.2	EQUAÇÕES DE PRESSÃO E SATURAÇÃO	24
2.2.1	Equação da pressão	25
2.2.2	Equação da saturação	26
2.2.3	Condições iniciais e de contorno	27
3	FORMULAÇÃO NUMÉRICA	29
3.1	METODOLOGIA IMPES	29
3.2	APROXIMAÇÃO PARA A EQUAÇÃO DE PRESSÃO/VELOCIDADE	30
3.2.1	Equação Discreta da Pressão	30
3.2.2	Método MPFA-D	31
3.2.3	Reconstrução do campo de velocidade no interior do volume de controle	33
3.2.4	Volume de Controle Multiescala (MsCV)	35
3.2.4.1	Operadores Multiescala	35
3.2.4.2	Reconstrução do fluxo conservativo em todas as escalas	36
3.2.4.3	Algoritmo de pre-processamento do MsCV	37
3.2.5	Suavizadores	38
3.2.5.1	Métodos Gauss-Seidel	39

3.2.5.2	<i>Sucessive Over Relaxation (SOR)</i>	40
3.2.5.3	Decomposição Incompleta LU (<i>ilu(0)</i>)	41
3.2.6	<i>Solvers Iterativos</i>	42
3.2.6.1	Método de Richardson	42
3.2.6.2	<i>Solver</i> Multiescala	43
3.2.6.3	<i>Solver</i> Multiescala Modificado	43
3.2.6.4	<i>Solver</i> Multinível	44
3.3	APROXIMAÇÃO PARA A EQUAÇÃO DE SATURAÇÃO/TRANSPORTE	44
3.3.1	Método CPR	45
4	RESULTADOS	48
4.1	ESCOAMENTO MONOFÁSICO NO CONJUNTO DE DADOS DO SPE 10	49
4.2	ESCOAMENTO BIFÁSICO EM RESERVATÓRIO ALTAMENTE HETEROGÊNEO E ISOTRÓPICO	55
4.3	ESCOAMENTO BIFÁSICO EM RESERVATÓRIO HETEROGÊNEO COM TENSOR DE PERMEABILIDADE DESCONTÍNUO E COM ALTA RAZÃO DE ANISOTROPIA	60
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	67
	REFERÊNCIAS	69

1 INTRODUÇÃO

A modelagem e simulação numérica de reservatórios de petróleo se configuram em um grande desafio para a indústria petrolífera, pois ela envolve problemas em diferentes escalas e apresentam grandes volumes de dados que, em alguns casos, inviabilizam as simulações numéricas devido a capacidade computacional limitada, mesmo nos dias atuais. Duas formas de mitigar esse problema são: o uso de métodos *upscaling* ou métodos multiescala. O primeiro realiza uma espécie de homogeneização dos dados a fim de reduzir a complexidade do problema computacional. Isso é feito utilizando alguma técnica para reduzir o número de informações presentes nos modelos para as propriedades da rocha-reservatório e sua interação com os fluidos que escoam através dela de modo que suas características fundamentais sejam preservadas e, em geral, essa homogeneização recai em algum tipo de "média" das propriedades nas escalas mais finas para fornecer informações nas escalas menos densas. No entanto, ao fazer isso, a obtenção de soluções acuradas é comprometida devido à perda de informação, fazendo com que alguns fenômenos não sejam observados apropriadamente em todas as escalas (BARBOSA et al., 2018; CORTINOVIS; JENNY, 2017). Essa perda de informação varia de acordo com a técnica utilizada para realizar a homogeneização das propriedades, reduzindo-a ao se aplicar técnicas mais elaboradas.

Os métodos multiescala superam algumas das limitações dos métodos *upscaling*, introduzindo funções de base que são capazes de projetar o sistema discreto da escala fina no espaço da escala grossa, onde esse sistema é resolvido e o operador multiescala de prolongamento projeta a solução de volta à escala original do problema. Dessa forma, o número de graus de liberdade é reduzido, bem como a quantidade de informações perdidas, quando comparado aos métodos *upscaling* (CORTINOVIS; JENNY, 2017; SOUZA et al., 2020).

Hou e Wu (1997) foram os primeiros a propor um método multiescala aplicado à solução de problemas elípticos. A ideia do *Multiscale Finite Element Method* (MsFEM) era capturar as informações da escala fina, construindo as funções de base de cada elemento, considerando condições especiais de contorno, para evitar erros de ressonância entre os elementos da malha fina. Embora o problema elíptico apresente resultados satisfatórios, o campo de velocidade obtido pelo método não é conservativo. No entanto, para obter uma solução precisa para o problema de transporte é essencial possuir um campo de velocidade conservativo. Chen e Hou (2003) foram capazes de solucionar esse problema utilizando o *Mixed Finite-Element Multiscale*

Method (MsMFEM), impondo a conservação do fluxo ao criar funções de base que calculam simultaneamente os campos de pressão e velocidade.

O *Multiscale Finite Volume Method* (MsFV) proposto por Jenny, Lee e Tchelepi (2003) usa uma estratégia diferente para reimpôr a conservação do fluxo. Eles criaram uma nova malha, denominada malha grossa dual, formada a partir da malha grossa primal, onde as funções de base são calculadas. Essa malha dual auxiliar foi feita de modo a garantir que o problema seja conservativo na malha grossa primal. Para garantir um campo de velocidades conservativo na malha fina, o MsFV utiliza o fluxo nas superfícies de cada volume da malha coarse primal para calcular um novo conjunto de funções de base. Moyner, Lie et al. (2013) estenderam o MsFV criando uma estrutura para permitir a simulação em malhas não-estruturadas na escala grossa. O método *Multiscale Restriction-Smoothed Basis* (MsRSB) desenvolvido por Møyner e Lie (2016) aplica um esquema iterativo diretamente na discretização da malha fina para modificar os operadores de prolongamento, para que se tornem cada vez mais consistentes com as propriedades locais dos operadores diferenciais, dando origem a um esquema robusto e rápido. No entanto, assim como grande parte dos métodos multiescala, o MsRSB utiliza um esquema *Two-Point Flux Approximation* (TPFA). O uso dessa abordagem agrega ao método algumas limitações, uma vez que este se torna inconsistente quando aplicado em malhas não estruturadas e em casos de elevada anisotropia onde a K-ortogonalidade não existe (CHEN et al., 2008). Assim, com o intuito de obter um esquema consistente e mais robusto, que forneça bons resultados para malhas gerais, alguns pesquisadores têm contribuído no desenvolvimento de diversos esquemas *Multi-Point Flux Approximation* (MPFA), tais como Aavatsmark et al. (1998), Contreras, Lyra e Carvalho (2019), Edwards e Rogers (1998), Gao e Wu (2010).

Com base nisso, Souza et al. (2020) desenvolveu um método multiescala, denominada MsCV (*Multiscale Control-Volume*), capaz de entregar soluções acuradas para malhas não-estruturadas e casos altamente anisotrópicos e heterogêneos ao acoplar o MsRSB e um método MPFA não ortodoxo, com suporte completo de pressão, que utiliza um estêncil de diamante (MPFA-D) (CONTRERAS et al., 2016). Para obter campos de pressão mais precisos, Souza et al. (2020) utilizou o procedimento iterativo de Dirichlet, além das funções de correção de fluxo em escala grossa proposta por (BARBOSA, 2017; BARBOSA et al., 2018). Os resultados apresentados em seu trabalho sugerem que a obtenção de campos de pressão com erros significativamente baixos não gera, necessariamente, campos de velocidade com mesmo grau de precisão. Uma forma de reduzir esse problema, inerente aos métodos multiescala, é aplicar algum procedimento

iterativo durante o processo de solução do problema elíptico (BOSMA et al., 2017; HAJIBEYGI et al., 2008; MØYNER; LIE, 2016).

Deve-se então buscar o método iterativo que melhor se enquadre no problema que deseja-se resolver. O método de Richardson, um dos primeiros *solvers* iterativos a ser desenvolvido, é um método simples, de fácil implementação e paralelização, o que o torna atraente para a solução de grandes sistemas de equações lineares (RICHARDSON, 1910; F.; REICHEL, 1988). Alguns métodos iterativos que foram desenvolvidos posteriormente adotam, em alguma etapa, a iteração de Richardson, junto a outras etapas que foram introduzidas a fim de preservar alguma propriedade física ou matemática do problema em estudo. É o caso dos métodos iterativos denominados, neste trabalho, por *solver* Multiescala (BOSMA et al., 2017) e *solver* multiescala Modificado (MØYNER; LIE, 2016), os quais são utilizados, comumente, em problemas multiescala com a finalidade de preservar alguma propriedade do método que pode ser perdida durante o processo iterativo. Além desses, o método Multinível (DIMOV; FIDANOVA; LIRKOV, 2015) também faz uso da iteração de Richardson, no entanto ele a aplica em conjunto com uma correção proveniente da resolução exata de um problema com menor número de incógnitas, equivalente ao problema multiescala na malha grossa, e é relacionado com o original, problema multiescala na malha fina. Esta ideia pode ser estendida recursivamente, dando origem a diversos níveis de malha, daí o nome do método (MAGRI et al., 2015).

A eficiência desses métodos está relacionada diretamente com o suavizador (também denominado de pré-condicionador) que será utilizado a cada iteração e este, por sua vez, depende do tipo de problema que se esteja resolvendo, tornando a escolha do suavizador uma tarefa complexa, uma vez que, o suavizador não irá apresentar o mesmo desempenho para problemas diferentes. Esses métodos de suavização consistem em aproximar a inversa da matriz de coeficientes do sistema de equações lineares, sendo responsável por eliminar as componentes de alta frequência do erro, tornando-as suaves em relação à malha adotada (BENZI, 2002; JUNQUEIRA, 2008; MAGRI et al., 2015). Assim, os suavizadores são matrizes que podem ser construídas com base em diferentes abordagens. Dentre as clássicas e adotadas no contexto de simulação em reservatórios de petróleo, pode-se citar os suavizadores obtidos com base nos métodos Gauss-Seidel, SOR (*Successive Over-Relaxation*) e Decomposição LU incompleta.

Outra prática comum às metodologias que adotam métodos multiescala, que fazem parte da família dos métodos de volumes finitos, é usar o método de primeira ordem, FOU (*First-Order Upwind*), para solucionar o problema de transporte devido a sua simplicidade,

além de garantir a monotonicidade das soluções numéricas, embora apresente excessiva difusão numérica. A fim de mitigar esse problema e obter soluções mais acuradas, foi adotado neste trabalho um esquema numérico robusto, estável e de alta ordem (CPR - *Correction Procedure via Reconstruction*), para resolver o problema de transporte, proposto por Wang, Gao e Haga (2011) ao combinar os métodos FR (*Flux Reconstruction*) (HUYNH, 2007) e LCP (*Lifting Collocation Penalty*) (WANG; GAO, 2009), e aplicado pela primeira vez em problemas de escoamento em reservatórios de petróleo por Galindez-Ramirez et al. (2017).

1.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo deste trabalho é efetuar, pela primeira vez na literatura, o acoplamento de um método multiescala com um esquema de alta ordem para solução de escoamentos bifásicos água-óleo em reservatórios de petróleo usando malhas não-estruturadas.

1.1.1 Objetivos específicos

- Testar diferentes métodos iterativos;
- Analisar o comportamento e a eficiência de diferentes suavizadores aplicados ao problema elíptico a fim de produzir um campo de velocidade preciso;
- Aplicar o procedimento iterativo no MsCV, dando origem ao iMsCV (*iterative Multiscale Control Volume*);
- Efetuar o acoplamento do método multiescala iMsCV com o esquema CPR de alta ordem.

1.2 CONTEÚDO

Esta dissertação é composta por 5 capítulos. Este primeiro capítulo concentra-se na introdução e revisão das principais questões da simulação de escoamento bifásico em meios porosos usando esquemas multiescala para a solução do campo de pressão acoplado à método de alta ordem na solução do campo de saturação. O segundo capítulo consiste na formulação matemática usada para derivar as equações que descrevem o fluxo de duas fases em meios porosos. O terceiro capítulo refere-se à formulação numérica, na qual apresentamos os esquemas numéricos usados para derivar a forma discreta do modelo matemático descrito no segundo capítulo. Além disso, também são descritos os suavizadores e os métodos iterativos que foram

analisados nesta pesquisa. O quarto capítulo é uma compilação dos resultados para problemas bifásicos. Por fim, no quinto e último capítulo apresentamos as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo, serão apresentadas as equações que governam o escoamento bifásico, água e óleo, imiscível e incompressível em meios porosos rígidos, obtidas com base nas Leis de Conservação de Massa e de Darcy (PEACEMAN, 1977). Além disso, apresentaremos, brevemente, os conceitos fundamentais dos parâmetros relacionados às propriedades da rocha e do fluido.

As principais hipóteses simplificadoras adotadas neste modelo são descritas a seguir (PEACEMAN, 1977):

- Fluxo bifásico, água w e óleo o ;
- Escoamento imiscível;
- O fluido e a rocha são incompressíveis;
- Os efeitos térmicos, químicos e capilares são desconsiderados;
- Os efeitos de dispersão e adsorção são negligenciados;
- O fluxo em meio poroso obedece à Lei de Darcy.

2.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Nesta seção serão apresentados os conceitos fundamentais dos parâmetros relacionados às propriedades da rocha e do fluido.

2.1.1 Propriedades das Rochas e Fluidos

2.1.1.1 Porosidade

A porosidade ϕ de uma rocha é a medida de sua capacidade em armazenar fluidos (AHMED, 2001). Matematicamente, é definida como a razão entre o volume de vazios V_p e o volume total da amostra rochosa V_t :

$$\phi = \frac{V_p}{V_t} \quad (2.1)$$

Há fatores que influenciam diretamente nesta propriedade, tais como; grãos (tamanho, seleção, nível de arredondamento), processos diagenéticos (transformações em adaptação às

novas condições físicas e químicas), profundidade e pressão (arranjo geométrico, compactação e cimentação) (VIANA, 2017). Assim, com base na conectividade desses espaços vazios, a porosidade de uma rocha pode ser classificada em dois tipos; absoluta e efetiva. A porosidade absoluta é aquela que relaciona o volume de todos os poros, sejam eles conectados ou não, com o volume total da amostra de rocha. A porosidade efetiva, por sua vez, correlaciona o volume de poros interconectados e o volume total da amostra. Na simulação de reservatórios a porosidade de interesse é a efetiva, pois ela representa o volume de fluidos recuperáveis do reservatório de petróleo (AHMED, 2006).

2.1.1.2 Saturação

A fração do volume poroso (V_p) ocupado por uma determinada fase i é denominada saturação da fase i . Por definição, a soma das saturações de todas as fases que ocupam os poros da rocha deve ser igual a um (AHMED, 2001; ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001; TOWLER, 2002). Para uma fase i , essa propriedade é expressada, matematicamente, por:

$$S_i = \frac{V_i}{V_p} \quad (2.2)$$

Em que V_i representa o volume poroso da fase i .

Considerando as fases água e óleo, temos:

$$S_w + S_o = 1 \quad (2.3)$$

A saturação máxima na qual a fase água irá permanecer imóvel é denominada saturação irreduzível de água (S_{wi}), onde, para a fase óleo, esse valor limite é dito saturação residual do óleo (S_{ro}). Esses valores são medidos em laboratório por meio de processos de drenagem e embebição, respectivamente, da amostra do reservatório em estudo (AHMED, 2001; ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006).

2.1.1.3 Permeabilidade

A permeabilidade ($\tilde{K}$) é a propriedade que indica a capacidade da rocha em escoar fluidos por meio de seus poros interconectados. Detém grande importância na engenharia de reservatórios, pois ela controla o movimento direcional e a taxa de fluxo dos fluidos do reservatório na formação (AHMED, 2001; ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006; THOMAS, 2001). Quando o espaço poroso está completamente preenchido por uma única fase, a permeabilidade é dita

absoluta. Se, por outro lado, os poros estiverem ocupados por mais de uma fase, cada uma delas irá afetar o fluxo da outra. Desse modo, surge o conceito de permeabilidade efetiva da fase k_f , que indica a capacidade da rocha de permitir o fluxo de uma fase na presença de outras (ABOU-KASSEM et al., 2010; TOWLER, 2002).

Outro conceito importante é o de permeabilidade relativa que consiste em uma medida adimensional da permeabilidade efetiva e é definida como sendo a razão entre as permeabilidades efetiva e absoluta:

$$k_{rf} = \frac{k_f}{k} \quad (2.4)$$

Quando duas ou mais fases estão presentes, as forças capilares existentes irão reduzir as vazões de cada fase de forma não-linear. Isso significa que a soma das permeabilidades efetivas sempre será inferior a permeabilidade absoluta e a soma das permeabilidades relativas sempre será inferior a unidade (BROOKS; COREY, 1964).

Para um sistema óleo/água, o valor da permeabilidade relativa do óleo (o) ou da água (w) é uma função da saturação dos fluidos e pode ser definido por meio de relações constitutivas presentes na literatura. Neste trabalho, para descrever essa propriedade utilizamos os modelos de Brooks e Corey (BROOKS; COREY, 1964) e de Van Genuchten (1980) descritos em (HELMIG, 1997)

Brooks-Corey

$$\begin{aligned} k_{rw}(S_w) &= S_n^{n_w} \\ k_{ro}(S_w) &= 1 - S_n^{n_o} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Van Genuchten

$$\begin{aligned} k_{rw}(S_w) &= S_n^{1/\gamma} \left(1 - \left[1 - S_n^{1/\gamma} \right]^\gamma \right)^2 \\ k_{ro}(S_w) &= (1 - (1 - S_n))^{1/2} \left(1 - (1 - S_n)^{1/\gamma} \right)^{2\gamma} \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde n_w , n_o e γ são parâmetros que podem assumir diferentes valores e S_n é a normalização da saturação da fase em relação à saturação irreduzível da água S_{wi} e à saturação residual do óleo S_{or} , definida como: (CHEN; HUAN; MA, 2006)

$$S_n = \frac{S_w - S_{wi}}{1 - S_{wi} - S_{or}} \quad (2.7)$$

2.1.1.4 Massa específica

A massa específica (ρ) de uma substância ou de uma mistura líquida é definida como a relação entre a sua massa (m) e o seu volume (V):

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2.8)$$

2.1.1.5 Viscosidade

A viscosidade (μ) pode ser definida como a medida da capacidade de um fluido escoar quando submetido a um gradiente de pressão. As forças de atrito internas resultantes das interações intermoleculares dos fluidos irão determinar a resistência ao escoamento para um dado fluido, quanto mais próximas estão as suas moléculas, em outras palavras, quanto mais denso, maior será a influencia dessas forças, retardando o fluxo do fluido (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001).

2.1.1.6 Mobilidade

A mobilidade de um fluido λ_i é definida como a relação entre a permeabilidade efetiva a esse fluido e a sua viscosidade nas condições de reservatório (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006). Assim, a mobilidade relativa é a razão entre a permeabilidade relativa e a viscosidade do fluido (FANCHI, 2005)

$$\lambda_i = \frac{k_{ri}}{\mu_i} \quad (2.9)$$

O somatório das mobilidades de todas as fases presentes, neste caso, água e óleo, é definido como mobilidade total (λ):

$$\lambda = \lambda_w + \lambda_o \quad (2.10)$$

2.1.2 Lei de Darcy

A Lei de Darcy é amplamente incorporada em modelos analíticos de fluxo de fluidos em meios porosos e pode ser considerada uma lei empírica ou uma expressão analítica derivada da equação de Navier e Stokes. Ela foi descoberta em 1856 pelo engenheiro Francês Henry Darcy ao estudar problemas de tratamento de água através de filtros de areia. A lei afirma que a vazão volumétrica de um fluido homogêneo através do meio poroso é proporcional ao gradiente hidráulico e a área de seção transversal normal à direção do fluxo e inversamente proporcional

à viscosidade do fluido (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001; EWING, 1984; ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006).

Embora a equação formulada por Darcy possua caráter empírico, ela pode ser modificada de várias formas e ser aplicada na modelagem de diversos regimes de fluxo. Posteriormente, foi proposta uma forma generalizada da Lei de Darcy que é vastamente utilizada na engenharia de reservatórios (EWING, 1984; PEACEMAN, 1977). Assim, para uma fase i , quando na presença de outras fases, ela pode ser expressa por:

$$\vec{v}_i = -\lambda_i K \left(\vec{\nabla} p_i - \rho_i \vec{g} \right) \quad (2.11)$$

onde $\vec{v}_i$ é a velocidade da fase i , K é a permeabilidade absoluta, $\vec{\nabla}$ é o operador gradiente, p_i é a pressão da fase i , ρ_i é a densidade da fase i e $\vec{g}$ é o vetor de aceleração gravitacional. Desconsiderando o efeito gravitacional, obtemos:

$$\vec{v}_i = -\lambda_i K \vec{\nabla} p_i \quad (2.12)$$

A soma das velocidades de cada fase presentes no escoamento é dita velocidade total do fluido. Considerando as fases água e óleo, temos:

$$\vec{v} = \vec{v}_w + \vec{v}_o \quad (2.13)$$

2.1.2.1 Fluxo fracionário

O fluxo fracionário de um fluido f_i é definido como a razão entre a vazão de produção do fluido e a vazão total:

$$f_i = \frac{q_i}{\sum_i q_i} \quad (2.14)$$

Uma equação simplificada é obtida substituindo a Lei de Darcy, Eq. (2.12), na definição de fluxo fracionário, Eq. (2.14). Negligenciando os efeitos da gravidade e da capilaridade e, após algumas manipulações algébricas, é possível expressar esse parâmetro em função das mobilidades das fases que ocupam o espaço poroso (FANCHI, 2005):

$$f_i = \frac{\lambda_i}{\sum_i \lambda_i} \quad (2.15)$$

2.2 EQUAÇÕES DE PRESSÃO E SATURAÇÃO

O sistema de equações diferenciais que governa o escoamento bifásico pode ser obtido combinando a equação de conservação da massa e a Lei de Darcy (HELMIG, 1997; PEACEMAN,

1977). Assim, adotando as hipóteses simplificadoras, e o princípio de conservação da massa para uma fase i , pode ser expressa por:

$$\phi \rho_i \frac{\partial S_i}{\partial t} + \rho_i \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_i = q_i \quad (2.16)$$

onde t é o tempo e q_i é a vazão mássica do termo fonte ou sumidouro, nesse caso, representa os poços de injeção e produção, respectivamente.

2.2.1 Equação da pressão

A partir da Eq. (2.16) e das hipóteses adotadas, podemos realizar algumas manipulações de modo a obter uma equação diferencial parcial apenas em função da pressão, eliminando os termos de derivadas da saturação.

Assim, escrevendo a Eq. (2.16) para as fases água e óleo, temos:

$$\phi \rho_w \frac{\partial S_w}{\partial t} + \rho_w \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_w = q_w \quad (2.17)$$

$$\phi \rho_o \frac{\partial S_o}{\partial t} + \rho_o \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_o = q_o \quad (2.18)$$

Somando as equações Eq. (2.17) e Eq. (2.18) e reordenando os termos correspondentes, obtemos a seguinte expressão:

$$\phi \frac{\partial (S_w + S_o)}{\partial t} + \rho_i \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}_w + \vec{v}_o) = \frac{q_w}{\rho_w} + \frac{q_o}{\rho_o} \quad (2.19)$$

Aplicando a restrição da Eq. (2.3) para eliminar o termo da saturação e utilizando o conceito da velocidade total da Eq. (2.13), temos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{q_w}{\rho_w} + \frac{q_o}{\rho_o} \quad (2.20)$$

Definindo a vazão volumétrica total como; $Q = Q_w + Q_o$, onde $Q_w = \frac{q_w}{\rho_w}$ e $Q_o = \frac{q_o}{\rho_o}$, é possível escrever a equação da pressão, de natureza elíptica, da seguinte forma (EDWARDS; ROGERS, 1998; CAVALCANTE, 2019; CARVALHO, 2005; CONTRERAS et al., 2016; PEACEMAN, 1977):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = Q \quad (2.21)$$

onde v é velocidade total calculada por meio da lei de Darcy descrita pela Eq. (2.13).

2.2.2 Equação da saturação

A Eq. (2.16) pode ser resolvida apenas para uma fase, devido à restrição imposta na Eq. (2.3). A escolha da fase foi feita conforme a prática usual da literatura (CARVALHO, 2005; CONTRERAS et al., 2016; PEACEMAN, 1977). Para tal, escrevemos as velocidades para as fases água e óleo, respectivamente, utilizando a Eq. (2.12):

$$\vec{v}_w = -\lambda_w K \vec{\nabla} p \quad (2.22)$$

$$\vec{v}_o = -\lambda_o K \vec{\nabla} p \quad (2.23)$$

Multiplicando a Eq. (2.22) por λ_o e a Eq. (2.23) por λ_w , obtemos:

$$\lambda_o \vec{v}_w = \lambda_w \vec{v}_o = -\lambda_w \lambda_o K \vec{\nabla} p \quad (2.24)$$

Desse modo, temos que:

$$\lambda_o \vec{v}_w - \lambda_w \vec{v}_o = 0 \quad (2.25)$$

Por meio da Eq. (2.13) podemos escrever a velocidade da fase óleo em função das velocidades total e da fase água:

$$\vec{v}_o = \vec{v} - \vec{v}_w \quad (2.26)$$

Substituindo a Eq. (2.26) na Eq. (2.25) iremos obter:

$$\lambda_o (\vec{v} - \vec{v}_w) - \lambda_w \vec{v}_o = 0 \quad (2.27)$$

Rearranjando os termos, obtemos:

$$\lambda_w \vec{v} = (\lambda_w + \lambda_o) \vec{v}_w = \lambda \vec{v}_w \quad (2.28)$$

Logo, a velocidade da fase água é definida como:

$$\vec{v}_w = \frac{\lambda_w}{\lambda} \vec{v} = f_w \vec{v} \quad (2.29)$$

Após escrever a equação da conservação para a fase água, podemos dividi-la por ρ_w e utilizar a definição de vazão volumétrica da fase água para obtermos a seguinte expressão:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_w = Q_w \quad (2.30)$$

Por fim, substituindo a Eq. (2.29) na Eq. (2.30), iremos obter a equação hiperbólica de saturação:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (f_w \vec{V}) = Q_w \quad (2.31)$$

O acoplamento entre as equações de pressão e saturação é realizado por meio do campo de velocidade total $\vec{V}$ (PEACEMAN, 1977).

2.2.3 Condições iniciais e de contorno

Além das equações de pressão e saturação, para ter um modelo matemático completo, é necessário especificar a descrição do reservatório, o conjunto de condições iniciais e o conjunto de condições de contorno apropriadas para descrever o fluxo de fluidos que entram ou saem do reservatório. Para tal, as condições de contorno serão separadas em condições de contorno externa e interna, sendo a última expressada pelas especificações de poço (EWING, 1984). Neste caso, considerando um domínio Ω , seu contorno Γ é definido como:

$$\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_P \cup \Gamma_I \quad (2.32)$$

onde Γ_D e Γ_N representam as fronteiras externas de Dirichlet (pressão prescrita) e Neumann (fluxo prescrita), respectivamente, e Γ_P e Γ_I os poços produtores e injetores, respectivamente.

Especificando o tratamento das condições de contorno para a equação de pressão descrita na Equação (2.21), temos que as condições de contorno externas podem ser escritas como (CARVALHO, 2005; CONTRERAS et al., 2016):

$$\begin{aligned} p(\vec{r}, t) &= g_D \text{ em } \Gamma_D \times [0, t] \\ \vec{V} \cdot \vec{n} &= g_N \text{ em } \Gamma_N \times [0, t] \end{aligned} \quad (2.33)$$

Nas equações acima, $\vec{r}$ é o vetor posição, t é o tempo, $\vec{n}$ é o vetor normal unitária externa à superfície de controle, $\vec{V}$ é a velocidade total e g_D e g_N são funções conhecidas da pressão e do fluxo, respectivamente. Por outro lado, condições de contorno internas, com pressão (g_{D_I}) e / ou fluxo (g_{N_I}) prescritos nos poços, podem ser expressas, nessa ordem, conforme indicado por:

$$\begin{aligned} p(\vec{r}, t) &= g_{D_I} \text{ ou } \vec{V} \cdot \vec{n} = g_{N_I} \text{ em } \Gamma_I \times [0, t] \\ p(\vec{r}, t) &= g_{D_I} \text{ ou } \vec{V} \cdot \vec{n} = g_{N_I} \text{ em } \Gamma_P \times [0, t] \end{aligned} \quad (2.34)$$

Por fim, as condições iniciais e de contorno para a equação de saturação podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} S_w(\vec{r}, t) &= \bar{S}_w \quad \text{em} \quad \Gamma_I \times [0, t] \quad \text{ou} \quad \Gamma_D \times [0, t] \\ S_w(\vec{r}, t) &= \bar{S}_w^0 \quad \text{em} \quad \Omega \times t^0 \end{aligned} \tag{2.35}$$

onde, $\bar{S}_w$ é a saturação de água prescrita nos poços injetores e $\bar{S}_w^0$ é a distribuição inicial da saturação de água em todo o domínio para $t = t_0$.

3 FORMULAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo, apresentaremos as estratégias numéricas utilizadas para resolver as Equações (2.21) e (2.31), utilizando o método iMsCV (*Iterative Multiscale Control Volume*) acoplado ao método de alta ordem CPR (*Correction Procedure via Reconstruction*) via uma formulação segregada tipo IMPES (*Implicit Pressure Explicit Saturation*).

A formulação numérica foi implementada em MATLAB (THE MATHWORKS, INC., 2017), modificando e estendendo alguns códigos desenvolvidos por Galindez-Ramirez (2018) e Souza (2018), no PADMEC (grupo de pesquisa em Processamento de Alto Desempenho na Mecânica Computacional). A geração das malhas foi feita por meio do software livre GMSH (GEUZAINÉ; REMACLE, 2009). A visualização dos resultados dos campos de pressão e saturação foi feita pelo programa VisIt (CHILDS et al., 2011) e os gráficos foram gerados no MATLAB.

3.1 METODOLOGIA IMPES

O método IMPES foi desenvolvido originalmente por Sheldon et al. (1959) e Stone e Garder (1961) e é amplamente utilizado na área de simulação de reservatório de petróleo. Essa metodologia visa resolver os problemas de fluxo, Eq.(2.21), e transporte, Eq. (2.31), de forma segregada usando, respectivamente, uma aproximação implícita e explícita no tempo (CARVALHO, 2005; CHEN; HUAN; MA, 2006). A razão pela qual o sistema acoplado é resolvido de forma sequencial é que as variáveis de saturação e pressão descrevem mudanças que ocorrem em escalas de tempo diferentes (EWING, 1983). O algoritmo da metodologia IMPES, no contexto do presente trabalho, está representado na Figura 1.

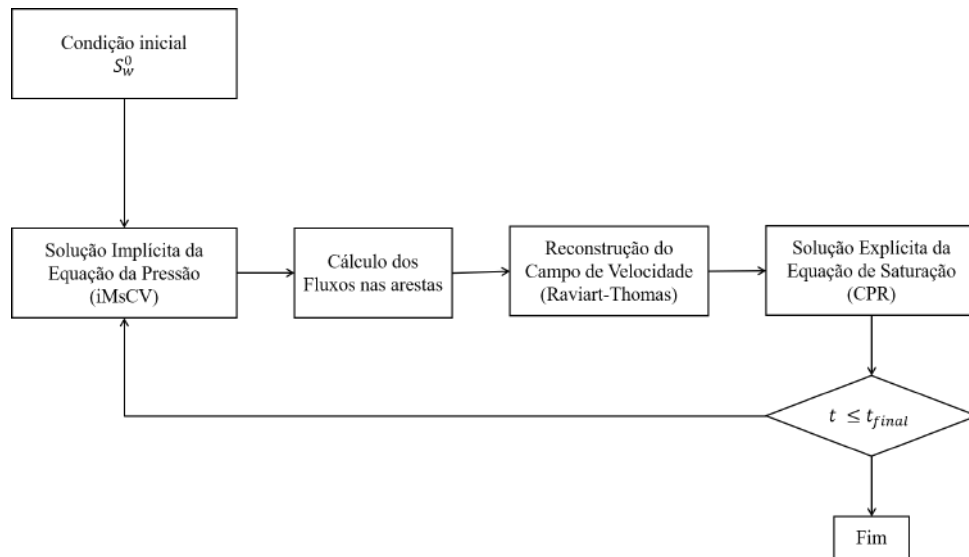
A partir da distribuição da saturação de água inicial, a mobilidade total $\lambda(S_w)$ é calculada na superfície de controle. Então, a equação da pressão, Eq. (2.21), é resolvida implicitamente, o campo de velocidade é calculado usando a Equação da Lei de Darcy, Eq. (2.11), que irá alimentar a equação de saturação, Eq. (2.31), essa, por sua vez, é resolvida explicitamente a cada etapa de tempo, calculada de acordo com a condição CFL (Courant – Friedrichs – Lewy) para manter a estabilidade.

De acordo com Galindez-Ramirez (2018), acoplar os esquemas de discretização tipo Volumes Finitos Centrados na Célula, para o campo de pressão, com aproximações nodais de ordem superior, para o campo de saturação, ainda é um desafio. Isso porque esses métodos de

discretização, que resolvem a equação de pressão, classicamente calculam os fluxos através das faces das células que pertencem à malha primal, mas não fornecem informações sobre os valores pontuais de velocidade dentro dos elementos da malha (SRINIVASAN; LIPNIKOV, 2013).

A fim de obter os valores do campo de velocidade em todo o domínio, foi construído um operador de reconstrução baseado na função de forma de elementos finitos de Raviart-Thomas de ordem mais baixa. Esse operador recebe como entrada o fluxo através das arestas do elemento e retorna uma aproximação dos valores pontuais de velocidade em qualquer posição da célula (RAVIART; THOMAS, 1977; SRINIVASAN; LIPNIKOV, 2013; GALINDEZ-RAMIREZ, 2018). Dessa forma, é possível realizar o acoplamento via IMPES da formulação iMsCV com formulações nodais, como o CPR.

Figura 1 – Algoritmo da metodologia IMPES.



Fonte: Adaptado de (GALINDEZ-RAMIREZ, 2018).

3.2 APROXIMAÇÃO PARA A EQUAÇÃO DE PRESSÃO/VELOCIDADE

Nesta seção serão descritos os métodos utilizados na aproximação discreta da equação da pressão.

3.2.1 Equação Discreta da Pressão

Para resolver a equação da pressão, Eq. (2.21), discretizamos o domínio Ω , com contorno Γ , em N volumes de controle (V.C.) poligonais não sobrepostos, denominados como Ω_i .

Integrando a Eq. (2.21) sobre um volume de controle arbitrário Ω_i , usando a Lei de Darcy, e aplicando o Teorema da Divergência de Gauss, temos:

$$\int_{\Gamma_i} \vec{v} \cdot \vec{n} \delta \Gamma_i = \int_{\Omega_i} Q \delta \Omega_i \quad (3.1)$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio nos termos da esquerda e da direita da Eq. (3.1) iremos obter, respectivamente:

$$\int_{\Gamma_i} \vec{v} \cdot \vec{n} \delta \Gamma_i = \sum_{IJ \in \Gamma_i} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} \quad (3.2)$$

$$\int_{\Omega_i} Q \delta \Omega_i = \bar{Q} V_i \quad (3.3)$$

onde $\vec{n}$ é o vetor unitário externo para a superfície de controle Γ_i , $\vec{v}_{IJ}$ representa o fluxo através de Γ_i , $\vec{N}_{IJ}$ é o vetor área associado à cada face $IJ \in \Gamma_i$, $\bar{Q}$ é o termo fonte (ou sumidouro) médio e V_i é o volume (ou área em 2-D) do volume de controle Ω_i .

Assim podemos escrever a Eq. (2.21) em sua forma discreta, com base nas Equações (3.2) e (3.3), da seguinte forma:

$$\sum_{IJ \in \Gamma_i} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \bar{Q} V_i \quad (3.4)$$

O cálculo do fluxo (ou vazão), $\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ}$, pode ser efetuado através de inúmeros métodos de volumes finitos. Na próxima sessão descreveremos o método MPFA-D adotado.

3.2.2 Método MPFA-D

O esquema MPFA-D foi desenvolvido por Gao e Wu (2010) e aplicado, pela primeira vez, no contexto de simulação de reservatórios de petróleo por Contreras et al. (2016). Como sugere o nome, o MPFA-D utiliza múltiplos pontos para aproximar o fluxo na interface entre células vizinhas utilizando volumes de controle auxiliares em uma disposição geométrica que lembra um diamante lapidado em 3-D. O MPFA-D é uma formulação completamente centrada na célula, que requer também os valores de pressão para cada vértice nos dois pontos extremos da aresta, em 2-D, que são obtidos usando uma combinação linear ponderada dos valores de pressão nos centroides ou pontos de colocação das células circundantes.

Assim, em 2-D, via o MPFA-D a vazão através da aresta $\overrightarrow{IJ}$ pode ser escrita (GAO; WU, 2010) na forma compacta como:

$$\vec{F}_{IJ} = \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} \cong \tau_{IJ} [p_R - p_L - v_{IJ}(p_J - p_I)] \quad (3.5)$$

onde, $p_{\hat{L}}$, $p_{\hat{R}}$ são as pressões associadas aos centroides das células $\hat{L}$ e $\hat{R}$, respectivamente, p_I e p_J são as pressões nos vértices da face $\vec{IJ}$, ver Fig. 2, e τ_{IJ} é um termo de transmissibilidade escalar, dada por:

$$\tau_{IJ} = -\lambda_{IJ} \frac{K_{IJ_{\hat{L}}}^{(n)} K_{IJ_{\hat{R}}}^{(n)}}{K_{IJ_{\hat{L}}}^{(n)} h_{IJ}^{\hat{R}} + K_{IJ_{\hat{R}}}^{(n)} h_{IJ}^{\hat{L}}} |\vec{IJ}| \quad (3.6)$$

Na equação anterior $K_{IJ_{\hat{L}}}^{(n)}$ e $K_{IJ_{\hat{R}}}^{(t)}$ são as projeções nas direções normal e tangencial, respectivamente, do tensor de permeabilidade para VC (Volumes de Controle) adjacentes que compartilham uma face $\vec{IJ}$ com comprimento $|\vec{IJ}|$ (área em 3-D). As alturas dos centroides, em relação as faces $\vec{IJ}$ e $\vec{JI}$, para os VCs $\hat{L}$ e $\hat{R}$ são representados por $h_{IJ}^{\hat{L}}$ e $h_{IJ}^{\hat{R}}$, respectivamente.

Com respeito à mobilidade na face $\vec{IJ}$ esta pode ser aproximada na seguinte forma:

$$\lambda_{IJ} = \frac{\lambda_I + \lambda_J}{2} \quad (3.7)$$

com λ_I e λ_J sendo as mobilidades nos nós I e J , respectivamente, e são obtidas através de uma média ponderada pelos volumes (arestas em 2-D) das mobilidades dos volumes de controle que circundam os nós I e J , nessa ordem (SOUZA, 2015).

Por outro lado, v_{IJ} é um parâmetro tangencial não dimensional, que pode ser escrito como:

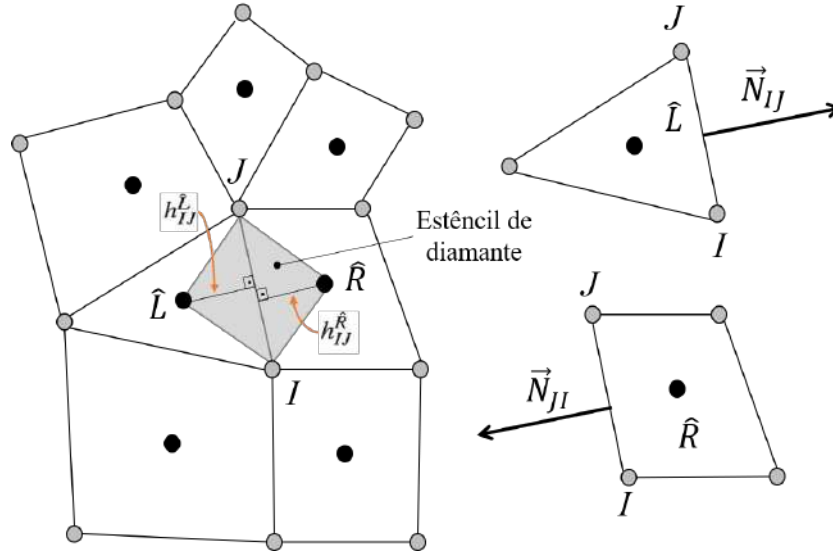
$$v_{IJ} = \frac{\vec{IJ} \cdot \vec{\hat{L}\hat{R}}}{|\vec{IJ}|^2} - \frac{1}{|\vec{IJ}|} \left(\frac{K_{IJ_{\hat{L}}}^{(t)}}{K_{IJ_{\hat{L}}}^{(n)}} h_{IJ}^{\hat{L}} + \frac{K_{IJ_{\hat{R}}}^{(t)}}{K_{IJ_{\hat{R}}}^{(n)}} h_{IJ}^{\hat{R}} \right) \quad (3.8)$$

Como já foi dito, as pressões nodais, p_I e p_J são calculadas usando os valores da pressão nos CVs envolvendo os nós I e J , respectivamente, por meio da interpolação ponderada, denominada LPEW (Linearity-Preserving Explicit Weighted) (GAO; WU, 2010; CONTRERAS et al., 2016).

Com as expressões de balanço de fluxo escritas para todas as células, podemos escrever um sistema linear, cujo número de incógnitas, que são as pressões nos pontos de colocação das células, e o número de equações são iguais ao número de células (SOUZA, 2015). Esse sistema tem como solução o campo de pressões e pode ser expresso na forma compacta como:

$$\underline{TP} = \underline{Q} \quad (3.9)$$

Figura 2 – Parte de uma malha poligonal, ilustrando o estêncil tipo diamante, em 2-D.



Fonte: Adaptado de Contreras et al. (2016).

onde $\underline{T}$ é matriz de transmissibilidade, $\underline{P}$ é o vetor de pressão e $\underline{Q}$ é o vetor de termos independentes incluindo os termos de fonte/sumidouro e as condições de contorno.

3.2.3 Reconstrução do campo de velocidade no interior do volume de controle

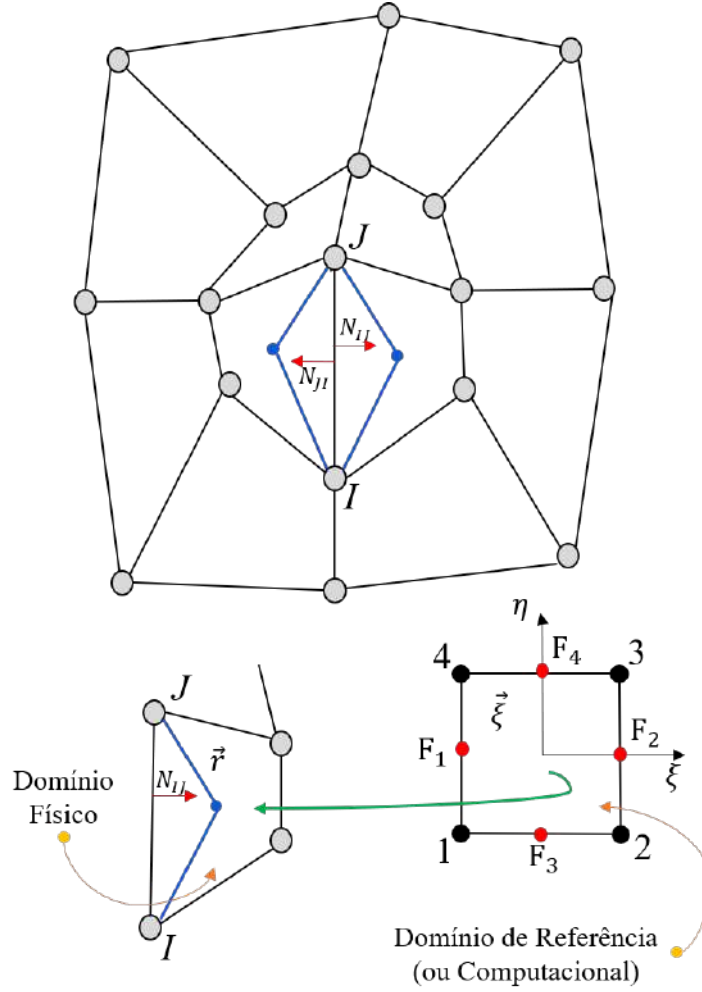
Para acoplar adequadamente o método MPFA-D com a formulação de CPR é necessário obter uma reconstrução de velocidade através dos volumes de controle da malha. Como o método de volumes finitos centrado na célula naturalmente fornece fluxos através das faces da célula que pertencem à malha primal, um operador de reconstrução é obtido a partir das funções de base do método de elementos finitos mistos de Raviart-Thomas de ordem zero (RAVIART; THOMAS, 1977), obtendo-se assim o campo de velocidade conservativo em todo o domínio.

O operador de reconstrução pode ser escrito no domínio computacional (ou de referência) da seguinte forma: (MATRINGE; JUANES; TCHELEPI, 2006; HÆGLAND et al., 2007)

$$\vec{v}_{\mathbb{R}}(\vec{\xi}) = \begin{bmatrix} -\frac{\vec{F}_1}{4}(1 - \xi) + \frac{\vec{F}_2}{4}(1 + \xi) \\ -\frac{\vec{F}_3}{4}(1 - \eta) + \frac{\vec{F}_4}{4}(1 + \eta) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

no quadrilátero bilinear padrão $\{\vec{\xi} = (\xi, \eta) | -1 \leq (\xi, \eta) \leq 1\}$, com F_{1-4} sendo vazões através das superfícies de controle, como ilustrado na Fig. 3, e $\vec{v}_{\mathbb{R}}$ a velocidade reconstruída no domínio de referência.

Figura 3 – Parte de uma malha quadrangular, ilustrando a interpolação da velocidade via as funções de Raviart-Thomas de baixa ordem RT₀.



Fonte: Adaptado de Galindez-Ramirez (2018).

Finalmente, o campo de velocidade do domínio de referência, $\vec{v}_{\mathbb{R}}$, pode ser mapeado de volta para o domínio físico, obtendo-se $\vec{v}_{\mathbb{P}}$ através da transformação de Piola:

$$\mathcal{P}(\vec{\xi}) = \frac{1}{\det(\mathcal{J}(\vec{\xi}))} \mathcal{J} \quad (3.11)$$

como segue:

$$\vec{v}_{\mathbb{P}}(\vec{r}) = \mathcal{P}(\vec{\xi}) \vec{v}_{\mathbb{R}}(\vec{\xi}) \quad (3.12)$$

de tal forma que o fluxo é preservado, isto é, o fluxo através das interfaces das células no domínio físico e de referência são os mesmos. Na equação (3.11) $\mathcal{J}$ é a matriz Jacobiana da transformação de coordenadas.

3.2.4 Volume de Controle Multiescala (MsCV)

O esquema MsCV pode ser visto como uma extensão do MsRSB clássico, cuja principal vantagem sobre os métodos multiescala da família MsFV é a possibilidade de trabalhar com malhas não estruturadas em ambas as escalas grossa e fina. No entanto, esse esquema faz uso do TPFA, que só é consistente em malhas k-ortogonais, restringindo seu uso a malhas estruturadas na escala fina, na maioria das vezes. Assim, o MsCV, desenvolvido por Souza (2018), estende essa metodologia substituindo o TPFA pelo MPFA-D, tornando o método mais flexível, podendo ser utilizado para a solução de problemas com malhas não-estruturadas, e, portanto, geometrias mais complexas.

Como muitos outros métodos multiescala, o MsCV define um conjunto de operadores locais (funções de base multiescala) que mapeiam as incógnitas associadas às células da malha fina às incógnitas associadas aos elementos na malha de menor resolução. Assim como no MsRSB, esses operadores são construídos por meio de suavização restrita na matriz da escala fina e são consistentes com os operadores de diferenças (MØYNER; LIE, 2016; SOUZA, 2018).

3.2.4.1 Operadores Multiescala

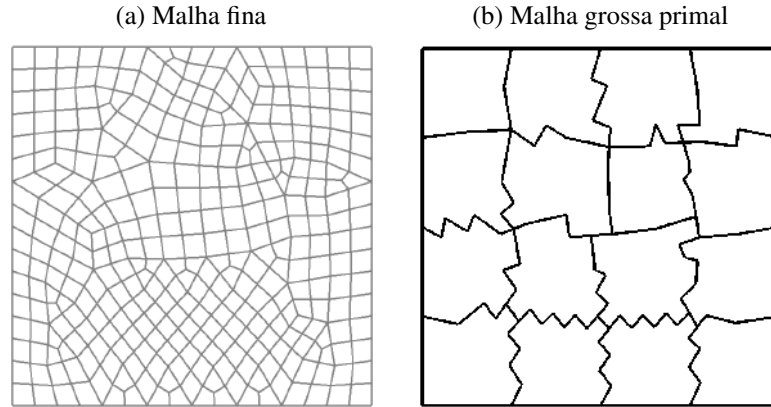
O MsCV herda o operador de restrição ($\underline{R}_{op}$) do MsFV clássico (CHEN; HUAN; MA, 2006; JENNY; LEE; TCHELEPI, 2006; ZHOU; TCHELEPI, 2008; MØYNER; LIE, 2016). Este operador identifica quais células finas Ω_i^f , Figura 4 (a), influenciam o volume grosso Ω_j^c , Figura 4 (b). Cada linha do operador corresponde a um volume grosso e cada coluna é correspondente aos elementos da malha na escala fina, assim, a j -ésima linha do operador é um vetor booleano $1 \times n_f$ assumindo os valores iguais a 1 para todas as células finas que pertencem àquele volume grosso e 0 para as células restantes. Esse operador pode ser expresso como:

$$(\underline{R}_{op}) = \begin{cases} 1 & \Omega_i^f \in \Omega_j^c \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{onde } 1 \leq j \leq n_c \text{ e } 1 \leq i \leq n_f \quad (3.13)$$

Assim como o MsRSB, o MsCV calcula o operador de prolongamento ($\underline{P}_{op}$) resolvendo uma versão normalizada da equação de pressão para cada volume grosso iterativamente, usando um esquema de Jacobi ponderado adaptado, no qual o incremento de Jacobi é modificado a fim de evitar seu crescimento fora da região de suporte correspondente. Como a matriz de transmissibilidade, geralmente, sofre poucas modificações ao longo de cada etapa de tempo, o operador de prolongamento calculado na etapa de tempo anterior é utilizado como estimativa

inicial no processo iterativo. Assim, cada coluna deste operador armazena uma distribuição de pressão normalizada que varia de 1, no centro da célula na escala grossa, a 0, fora da região de suporte da célula correspondente. Essas etapas estão descritas detalhadamente em Souza (2018).

Figura 4 – Descrição das malhas fina e grossa primal.



Fonte: Adaptado de Souza (2018)

De acordo com Barbosa et al. (2018) e Souza et al. (2020), o operador de prolongamento do MsCV, que adota o MPFA-D, em geral, entrega bons resultados, no entanto, pode apresentar perda de precisão dependendo da escolha da malha primal da escala menos densa, particularmente quando os limites dos volumes grossos encontram-se sobre regiões de barreira ou canais de alta permeabilidade.

Após calcular corretamente esses operadores, podemos escrever o método multiescala como:

$$P_{ms} = \underline{P}_{op} P_c = \underline{P}_{op} \underline{T}_c^{-1} \underline{Q}_c \equiv \underline{P}_{op} (\underline{R}_{op} \underline{T}_f \underline{P}_{op})^{-1} \underline{R}_{op} \underline{Q}_f \quad (3.14)$$

onde P_{ms} e P_c são as soluções multiescala nas escalas fina e grossa, respectivamente, T a transmissibilidade e Q o termo de fonte/sumidouro, aqui o subscrito f e c indicam, nessa ordem, os valores na escala fina e na escala grossa. Para mais detalhes veja Souza et al. (2020).

3.2.4.2 Reconstrução do fluxo conservativo em todas as escalas

É fundamental obter um campo de fluxo conservativo em todas as malhas envolvidas no método multiescala para encontrarmos uma aproximação consistente do problema de transporte. Isso é válido tanto quando este é resolvido por meio de métodos de baixa ordem quanto para os métodos de alta ordem de aproximação.

O algoritmo utilizado para calcular o operador de prolongamento, desacopla o domínio à medida que a equação de pressão normalizada é calculada, localmente, dentro de cada região de suporte. Isso dá origem a um campo de fluxo que não é conservativo em todo o domínio computacional, mas, apenas dentro dos limites de cada volume grosso, uma vez que, esses estão contidos em sua própria região de suporte.

A reconstrução de fluxo, proposto por Jenny, Lee e Tchelepi (2006) e utilizado neste trabalho, é realizada em duas etapas. A primeira consiste em usar o campo de pressão multiescala para recuperar os fluxos na superfície de cada volume grosso primal, a fim de usá-los como condições de contorno de Neumann para resolver a Eq. (2.21) para cada volume grosso primal. A segunda etapa é usar o campo de pressão resultante para calcular um novo campo de velocidade em todas as superfícies da escala fina, exceto naquelas contidas no contorno de cada volume grosso primal, pois, para esses elementos, o fluxo calculado na etapa anterior é conservativo. Assim, é resolvido o problema de Neumann para cada volume de controle grosso. A reconstrução do fluxo é descrita conforme a Equação: (3.15).

$$\begin{cases} -\vec{\nabla} \cdot \lambda \underline{K} \vec{\nabla} (P_{msc}) = q_f & \text{em } \Omega^p \\ -\frac{\partial}{\partial x_n} \left(-\lambda \underline{K} \frac{\partial}{\partial x_n} (P_{msc}) \right) = \vec{v}_{ms} \cdot \vec{N} & \text{em } \delta\Omega^p \\ P_{msc} = P_{ms} & \text{em } x^P \end{cases} \quad (3.15)$$

A velocidade nos contornos de cada volume grosso é calculada na primeira etapa e a velocidade dentro do volume grosso é calculada na segunda etapa.

3.2.4.3 Algoritmo de pré-processamento do MsCV

Souza (2018) adaptou o algoritmo de pré-processamento proposto por Møyner e Lie (2016), a fim de tornar o MsCV capaz de lidar com malhas não-estruturadas em todas as escalas. A etapa de pré-processamento do MsCV consiste em construir a malha grossa, calcular os centroides de cada célula da malha grossa primal e, por fim, definir as regiões de suporte. Os elementos da malha menos densa, gerados por meio desse algoritmo, são polígonos que assumem uma forma pseudo-estruturada podendo se assemelhar a um quadrado ou hexágono.

O ponto central de um volume grosso (x^P) é definido pelo ponto que possui a menor soma das distâncias às interfaces das bordas intermediárias. Assim, o centro de um volume grosso primal é a célula da escala final cujas coordenadas do centro estão mais próximas de sua mediana geométrica (SOUZA et al., 2020).

O primeiro passo para definir a região de suporte de um elemento grosso arbitrário (I_j) é identificar quais as células da malha grossa são vizinhas ao volume grosso central. Em seguida são calculados os pontos médios das interfaces do volume central e de seus vizinhos. Esses pontos e os pontos centrais dos vizinhos são usados para realizar uma triangulação de Delaunay, gerando a região de suporte da referida célula grossa. Alguns ajustes são feitos para fazer com que os elementos da malha fina que representam os centroides dos volumes grossos vizinhos façam parte do contorno da região de suporte (B_j). Esse processo encontra-se minuciosamente explicado em Souza et al. (2020).

3.2.5 Suavizadores

Os suavizadores também podem ser denominados de pré-condicionadores, esses métodos possuem uma propriedade de suavização que remove as componentes de alta frequência do erro e do resíduo, enquanto mantém as componentes de baixa frequência. Eles consistem em determinar uma matriz que aproxime a inversa da matriz original do problema (JUNQUEIRA, 2008).

Neste trabalho, foram implementados alguns suavizadores obtidos a partir de métodos iterativos clássicos; *Forward Gauss-Seidel* (FGS), *Backward Gauss-Seidel* (BGS), *Forward Successive Over Relaxation* (FSOR) e *Backward Successive Over Relaxation* (BSOR), além desses, também foi utilizado o suavizador obtido pelo Método da Decomposição LU Incompleta ($ilu(0)$) (SAAD, 2000).

Conforme mostrado na Eq. (3.9), a pressão na malha fina, em sua forma matricial, é do tipo:

$$T_f p_f = Q_f \quad (3.16)$$

e o resíduo é dado por:

$$r_f = Q_f - T_f p_f \quad (3.17)$$

Define-se a matriz que aproxima a inversa de T_f , M , como sendo a matriz que relaciona o incremento da solução ao resíduo:

$$\Delta p_f^{k+1} = M r^k \quad (3.18)$$

Como T_f é uma matriz quadrada, ela pode ser decomposta da seguinte forma:

$$T_f = D_f + L_f + U_f \quad (3.19)$$

onde D_f , L_f e U_f são as matrizes diagonal, triangular inferior e triangular superior, respectivamente, da matriz de transmissibilidade na malha fina, T_f .

3.2.5.1 Métodos Gauss-Seidel

Substituindo a Eq. (3.19) na Eq. (3.16), teremos:

$$(D_f + L_f + U_f) p_f = Q_f \quad (3.20)$$

E introduzindo um processo iterativo de forma aproximada, temos:

$$(D_f + L_f) p_f^{k+1} = -U_f p_f^k + Q_f \quad (3.21)$$

O suavizador M é obtida adicionando e subtraindo $T_f p_f^k$ na Eq. (3.21):

$$(D_f + L_f) p_f^{k+1} = -U_f p_f^k + Q_f + T_f p_f^k - T_f p_f^k \quad (3.22)$$

$$(D_f + L_f) p_f^{k+1} = (T_f - U_f) p_f^k + Q_f - T_f p_f^k \quad (3.23)$$

Substituindo a Eq. (3.19) na Eq. (3.23), temos:

$$(D_f + L_f) p_f^{k+1} = (D_f + L_f) p_f^k + Q_f - T_f p_f^k \quad (3.24)$$

Substituindo o resíduo da iteração k , r_f^k , na Eq. (3.24) e reorganizando os termos, iremos obter:

$$(D_f + L_f) p_f^{k+1} = (D_f + L_f) p_f^k + r_f^k \quad (3.25)$$

$$(D_f + L_f) (p_f^{k+1} - p_f^k) = r_f^k \quad (3.26)$$

$$\Delta p_f^{k+1} = (D_f + L_f)^{-1} r_f^k \quad (3.27)$$

Por fim, o suavizador FGS é obtido comparando a Eq. (3.18) com a Eq.(3.27):

$$M_{FGS} = (D_f + L_f)^{-1} \quad (3.28)$$

O BGS é obtido a partir da substituição da Eq. (3.19) na Eq. (3.16) da seguinte forma:

$$(D_f + U_f) p_f^{k+1} = -L_f p_f^k + Q_f \quad (3.29)$$

De maneira análoga ao realizado para determinar o suavizador FGS, temos que:

$$M_{BGS} = (D_f + U_f)^{-1} \quad (3.30)$$

3.2.5.2 Sucessive Over Relaxation (SOR)

O método da sobre-relaxação sucessiva foi um dos primeiros suavizadores a ser empregado na resolução dos sistemas lineares presentes em simulação de reservatórios. No início, esse método era normalmente utilizado em conjunto com o solver Richardson (apresentado na seção 3.2.6.1), sendo muitas vezes denominado diretamente como o solver do problema (MAGRI et al., 2015).

O SOR é uma variação do método de Gauss-Seidel, ao qual é aplicado um coeficiente de relaxação ω que, dependendo do seu valor, pode acelerar ou retardar a sua convergência. O fator ω pode assumir valores entre 0 e 2, sendo denominado de sub-relaxação no caso de $0 < \omega < 1$ e sobre-relaxação no caso de $1 < \omega < 2$ (GONÇALVES et al., 2018). Foi adotado $\omega = 5/3$ com base nos estudos e testes realizados durante o desenvolvimento deste trabalho.

Substituindo Eq. (3.19) em Eq. (3.16) e multiplicando ambos os lados da equação pelo coeficiente de relaxação, temos:

$$\omega (D_f + L_f + U_f) p_f = \omega Q_f \quad (3.31)$$

ou

$$\omega L_f p_f = \omega Q_f - \omega (D_f + U_f) p_f \quad (3.32)$$

Somando $D_f p_f$ aos dois lados da equação Eq. (3.32), temos:

$$D_f p_f + \omega L_f p_f = \omega Q_f - \omega (D_f + U_f) p_f + D_f p_f \quad (3.33)$$

E introduzindo um processo iterativo de forma aproximada, temos:

$$(D_f + \omega L_f) p_f^{k+1} = D_f p_f^k + \omega Q_f - \omega (D_f + U_f) p_f^k \quad (3.34)$$

Subtraindo e adicionando $\omega L_f P_f^k$ na Eq. (3.34):

$$(D_f + \omega L_f) p_f^{k+1} = D_f p_f^k + \omega Q_f - \omega (D_f + U_f) p_f^k - \omega L_f P_f^k + \omega L_f P_f^k \quad (3.35)$$

$$(D_f + \omega L_f) p_f^{k+1} = (D_f + \omega L_f) p_f^k - \omega (D_f + U_f) p_f^k - \omega L_f p_f^k + \omega Q_f \quad (3.36)$$

$$(D_f + \omega L_f) (p_f^{k+1} - p_f^k) = \omega Q_f - \omega (D_f + U_f + L_f) p_f^k \quad (3.37)$$

$$(D_f + \omega L_f) \Delta p_f^{k+1} = \omega r_f^k \quad (3.38)$$

$$\Delta p_f^{k+1} = \omega (D_f + \omega L_f)^{-1} r_f^k \quad (3.39)$$

Assim, temos que:

$$M_{FSOR} = \omega (D_f + \omega L_f)^{-1} \quad (3.40)$$

O suavizador BSOR é obtido substituindo a Eq. (3.19) na Eq. (3.16) da seguinte maneira:

$$\omega U_f p_f = \omega Q_f - \omega (D_f + L_f) p_f \quad (3.41)$$

De forma análoga ao M_{FSOR} , temos que o suavizador M_{BSOR} é dado por

$$M_{BSOR} = \omega (D_f + \omega U_f)^{-1} \quad (3.42)$$

Pode-se observar que ao impor ω igual a 1, os suavizadores M_{FSOR} e M_{BSOR} recaem no M_{FGS} e M_{BGS} , respectivamente. É importante destacar que esses suavizadores terão melhor desempenho quando aplicados às matrizes diagonal dominante. A matriz de transmissibilidade obtida pelo método MPFA-D não garante essa propriedade.

3.2.5.3 Decomposição Incompleta LU ($ilu(0)$)

O processo de fatoração LU incompleta calcula uma matriz triangular inferior esparsa L e uma matriz triangular superior esparsa U , de modo que a matriz residual $R = LU - T_f$ satisfaça certas restrições. A técnica de fatoração Incompleta LU sem preenchimento, indicada por $ilu(0)$, considera o padrão de zeros precisamente igual ao da matriz original T_f , ou seja, os fatores L e U são calculados de modo que a soma do número de elementos não nulos de cada fator seja igual àquele referente à matriz original (SAAD, 2000; MAGRI et al., 2015).

Considerando, por exemplo, uma matriz A penta diagonal, é possível determinar duas matrizes quaisquer, uma triangular superior e outra triangular inferior, que apresente a mesma estrutura da parte superior e inferior da matriz A , respectivamente, de modo que o produto dessas matrizes irá gerar uma outra, hepta diagonal. As entradas dessas duas diagonais extras são chamadas de elementos de preenchimento, se ignorarmos esses elementos é possível determinar as matrizes L e U em que o produto entre elas será igual a matriz A nas outras diagonais. Há uma infinidade de matrizes L e U que atendem a essa restrição, assim a matriz $ilu(0)$ não é definida unicamente (SAAD, 2000). Ela é originalmente definida pelo algoritmo abaixo:

Algoritmo 1: Construção do suavizador pela fatorização incompleta $ilu(0)$

Para $i = 2, \dots, n$ faça:

Para $k = 1, \dots, i-1$ e para $(i, k) \in NZ(T)$ faça:

Calcule $t_{ik} = \frac{t_{ik}}{t_{kk}}$

Para $j = k+1, \dots, n$ e para $(i, j) \in NZ(T)$ faça:

Calcule $t_{ij} := t_{ij} - t_{ik}t_{kj}$

Fim

Fim

Fim

onde $NZ(T)$ é o conjunto de pares (i, j) , com $1 \leq i, j \leq n$, tal que $t_{i,j} \neq 0$.

3.2.6 Solvers Iterativos

A solução multiescala p_{ms} pode ser usada diretamente como uma boa solução aproximada em relação a solução de referência, no entanto, essa solução gera um campo de velocidades pouco acurado. Como já mencionado neste trabalho, é de suma importância a obtenção de um campo de velocidades que possua um bom grau de precisão, pois ele é responsável pelo acoplamento entre os *solvers* de pressão e saturação. Essa necessidade se torna mais evidente quando são utilizados métodos de alta ordem. Assim, o solver iterativo é aplicado com a finalidade de obter soluções mais precisas do campo de pressão e, conseqüentemente, melhorar a solução do campo de velocidades

A seguir serão apresentados alguns *solvers* que foram utilizados dentro do contexto multiescala e Multigrid, sendo aplicados diretamente na solução multiescala p_{ms} . Nesta seção utilizamos p_f para indicar a solução aproximada na escala fina nos *solvers* iterativos.

3.2.6.1 Método de Richardson

Este é um dos primeiros *solvers* iterativos apresentados na literatura (RICHARDSON, 1910) e é dado por:

$$p_f^{k+1} = p_f^k + \omega_r M_f^{-1} (Q_f - T_f p_f^k) \quad (3.43)$$

onde ω_r é um escalar não-negativo, geralmente igual a um, e M_f^{-1} é um dos suavizadores apresentados na subseção 3.2.5, ambos aplicados com a finalidade de acelerar a convergência do método iterativo.

Como foi dito anteriormente, a solução multiescala na escala grossa é conservativa, portanto, é desejável que essa propriedade seja mantida ao longo das diversas iterações do *solver*. Porém, esse método não garante que essa propriedade será conservada.

3.2.6.2 *Solver* Multiescala

Esse *solver*, ao contrário do Método de Richardson, foi construído de forma que a conservação na escala grossa é garantida, uma vez que o problema multiescala é resolvido a cada iteração. O procedimento iterativo é repetido até que a norma do erro atinja a tolerância especificada ou o número máximo de iterações seja alcançado.

Esse método pode ser dividido em duas etapas (BOSMA et al., 2017):

Etapas multiescala

$$\begin{aligned}
 r_c^{km} &= R_{op} r_f^k \\
 \delta p_c^{km} &= T_c^{-1} r_c^{km} \\
 \delta p_f^{km} &= P_{op} \delta p_c^{km} \\
 p_f^{km} &= p_f^k + \delta p_f^{km} \\
 r_f^{km} &= Q_f - T_f p_f^{km}
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Etapas de suavização

$$\begin{aligned}
 p_f^{k+1} &= p_f^{km} + M^{-1} r_f^{km} \\
 r_f^{k+1} &= Q_f - T_f p_f^{k+1}
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

onde δp_c^{km} e δp_f^{km} indicam os incrementos na escala grossa e fina, respectivamente, e o sobrescrito km é utilizado pra indicar o cálculo na etapa multiescala na iteração k .

3.2.6.3 *Solver* Multiescala Modificado

Esse esquema apresenta duas diferenças em relação ao anterior (MØYNER; LIE, 2016). Primeiro, na etapa multiescala ele define um resíduo suavizado na escala grossa, r_{sc}^{km} , que será utilizado no cálculo do incremento junto com o resíduo da malha grossa. A segunda mudança é feita na etapa de suavização, aqui, o suavizador é aplicado ao resíduo inicial da malha fina, r_f^k , e não ao resíduo corrigido, r_f^{km} .

Etapa multiescala

$$\begin{aligned}
r_c^{km} &= R_{op} r_f^k \\
r_{sc}^{km} &= R_{op} M^{-1} r_f \\
\delta p_c^{km} &= T_c^{-1} (\mathbf{r}_c^{km} - \mathbf{r}_{sc}^{km}) \\
\delta p_f^{km} &= P_{op} \delta p_c^{km} \\
p_f^{km} &= p_f^k + \delta p_f^{km} \\
r_f^{km} &= Q_f - T_f p_f^{km}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Etapa de suavização

$$\begin{aligned}
p_f^{k+1} &= p_f^{km} + M^{-1} \mathbf{r}_f^k \\
r_f^{k+1} &= Q_f - T_f p_f^{k+1}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

É válido ressaltar que a etapa de suavização dos *solvers* multiescala e multiescala modificado consiste no método de Richardson com $\omega_r = 1$.

3.2.6.4 Solver Multinível

O esquema multinível é obtido considerando-se uma hierarquia de espaços, onde o suavizador irá substituir recursivamente a inversa exata da matriz de transmissibilidade no espaço da escala fina, em seguida o mesmo procedimento é aplicado ao espaço da escala grossa até atingir o número máximo de níveis desejado (DIMOV; FIDANOVA; LIRKOV, 2015). Neste trabalho, consideramos apenas o caso de única etapa de correção da malha grossa. Assim, o esquema multinível de dois níveis pode ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
p_f^{n1} &= p_f^k + M_f^{-1} r_f^k \\
p_f^{n2} &= p_f^{n1} + P_{op} M_c^{-1} R_{op} r_f^{n1} \\
p_f^{k+1} &= p_f^{n2} + M_f^{-1} r_f^{n2}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

onde p_f^{n1} e p_f^{n2} representam os valores aproximados do campo de pressão nos diferentes níveis de malhas.

3.3 APROXIMAÇÃO PARA A EQUAÇÃO DE SATURAÇÃO/TRANSPORTE

Nesta seção serão descritos os métodos utilizados na aproximação discreta da equação da saturação.

3.3.1 Método CPR

O método CPR, semelhante aos métodos DG, SV, e SD pode alcançar alta ordem de acurácia através de um estêncil compacto que consiste da célula alvo e dos seus vizinhos imediatos. Além disso, o CPR recupera versões simplificadas dos métodos nodais DG, SV e SD usando uma função adequada de reconstrução polinomial, cujos coeficientes são pré-processados e armazenados (GALINDEZ-RAMIREZ et al., 2020).

Para obtermos a equação discreta da saturação pela abordagem do CPR, consideramos o seguinte modelo de fluxo imiscível (água e óleo) em um domínio Ω com a imposição de condições de contorno apropriadas em Γ , a Equação 2.31, com $\phi = \text{constante}$, sem perda de generalidade, pode ser escrita como:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (f_w \vec{v}) - Q_w = 0 \quad (3.49)$$

Podemos obter a equação na forma de resíduos ponderado multiplicando a equação 3.49 pela função de teste W e integrando sobre o domínio Ω :

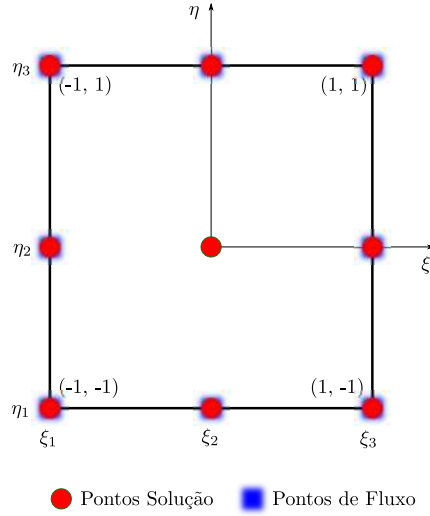
$$\int_{\Omega} W \left(\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (f_w \vec{v}) - Q_w \right) d\Omega = 0 \quad (3.50)$$

A solução S_w é aproximada por $S_w^{P_n}$, sendo P_n o espaço polinomial de grau menor ou igual a n . A dimensão de P_n , para elementos quadrilaterais, é dada por: $D = (1 + n)^2$. Após alguns cálculos algébricos, a equação de saturação na forma semi-discreta para o caso 2D, com $S_{(i,j,k)}$ sendo a saturação nos graus de liberdade requeridos pela ordem de aproximação desejada, em que, i é o índice da célula, e j e k são os pontos de solução para um elemento quadrangular, ver Figura. 5, pode-se escrever na seguinte forma (HUYNH, 2007; WANG, 2011):

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial S_{w(i,j,k)}^{P_n}}{\partial t} = & - \left(\Pi_{j,k} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_w(S_i^{P_n}) \right] + \right. \\ & \frac{2}{|\mathcal{J}|_{i,j,k}} \left\{ [\mathcal{F}_x(-1, \eta_{j,k}) - F_{x(i)}(-1, \eta_{j,k})] g'_L(\xi_j) + [\mathcal{F}_x(1, \eta_{j,k}) - F_{x(i)}(1, \eta_{j,k})] g'_R(\xi_j) + \right. \\ & \left. [\mathcal{F}_y(\xi_{j,k}, -1) - F_{y(i)}(\xi_{j,k}, -1)] g'_L(\eta_k) + [\mathcal{F}_y(\xi_{j,k}, 1) - F_{y(i)}(\xi_{j,k}, 1)] g'_R(\eta_k) \right\} \\ & \left. + Q_w \right) \end{aligned} \quad (3.51)$$

onde $\Pi_{j,k}$ é um operador de projeção, utilizado no caso de funções de fluxo não lineares, $\vec{F}_w$, que representa o fluxo advectivo, $\mathcal{F}$ é o fluxo numérico e F é denominado o fluxo descontínuo, g_L é conhecida como a função de reconstrução e $\mathcal{J}$ é a matriz jacobiana do mapeamento do domínio de referência para o domínio físico.

Figura 5 – Pontos de Solução e Pontos de Fluxo no domínio de referência 2D para uma aproximação P_2 .



Fonte: Adaptado de Huynh (2007).

Para determinar os valores de fluxo descontínuo, $\mathcal{F}(S^-, S^+)$, através das interfaces das células e para realizar o acoplamento das mesmas, usamos um esquema Roe-E, com correção de entropia, que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathcal{F}_{\text{Roe-E}} \cdot \vec{N} = \begin{cases} \mathcal{F}_{\text{LLF}} \cdot \vec{N}, & \text{se } \frac{\partial F_w}{\partial S}(S^-) \cdot \frac{\partial F_w}{\partial S}(S^+) < 0 \\ \mathcal{F}_{\text{Roe}} \cdot \vec{N}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.52)$$

onde os sobrescritos (-) e (+) são usados para indicar os lados esquerdo e direito das interfaces numéricas, respectivamente, e o fluxo Local Lax-Friedrichs (LLF) é definido como:

$$\mathcal{F}_{\text{LLF}} \cdot \vec{N} = \frac{1}{2} \left[(F_w(S^+) + F_w(S^-)) \cdot \vec{N} - \max |\mathcal{B}| (S^+ - S^-) \right] \quad (3.53)$$

com

$$\mathcal{B} = \frac{\partial F_w(S)}{\partial S_w} \cdot \vec{N}$$

e o resolvidor aproximado de Riemann linearizado do tipo Roe, também chamado de Murman ou Murman-Roe no caso escalar, é dado como:

$$\mathcal{F}_{\text{Roe}} = \begin{cases} F_w(S_w^-), & \text{se } \mathcal{B} \geq 0 \\ F_w(S_w^+), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.54)$$

De maneira geral, o fluxo numérico LLF fornece excessiva viscosidade artificial, quando comparado ao fluxo numérico Roe-E.

Para completar a formulação, precisamos apenas calcular a taxa de fluxo de água no poço de produção, que pode ser escrito como:

$$Q_w = Q f_w(\bar{S}_w) \quad (3.55)$$

com Q sendo a taxa específica de produção de fluido total e f_w o fluxo fracionário de água. O valor médio de saturação $\bar{S}_w$ do polinômio de grau $n = 0$ pode ser calculado por meio de uma projeção L2 a partir dos valores nodais de saturação nos pontos de solução.

O procedimento de projeção de S^{Pn} para a aproximação média $\bar{S}_w = S^{Pm} = \Pi^m S^{Pn}$ com $m = 0$ é realizado calculando os coeficientes modais:

$$\hat{S}^{Pn} = \mathfrak{V}^{-1} S^{Pn} \quad (3.56)$$

e, truncando os modos de ordem superior, $\mathcal{T} [\hat{S}^{Pn}]$ maior que $n = 0$, com $\mathfrak{V}$ sendo a matriz de Vandermonde (HESTHAVEN; WARBURTON, 2008). Então, a solução projetada pode ser escrita de forma geral como:

$$S^{Pn} = \mathfrak{V} \mathcal{T} [\hat{S}^{Pn}] \quad (3.57)$$

A estratégia de captura de choque adotada no resolvidor de saturação é o MLP (Multi-dimensional Limiting Procedure) hierárquico (PARK; KIM, 2016), para maiores detalhes ver (GALINDEZ-RAMIREZ et al., 2017; GALINDEZ-RAMIREZ et al., 2020).

Escrevendo a Equação (3.51) na forma compacta, temos:

$$\phi \frac{d\hat{S}_w}{dt} = -R(S_w) + Q_w(\bar{S}_w) \quad (3.58)$$

então, a integração do tempo é realizada usando um método Runge-Kutta explícito de terceira ordem (HIRSCH, 2007; LYRA; MORGAN, 2000) com dois estágios intermediários para chegar a t^{q+1} a partir de t^q , de modo que:

$$\begin{aligned} \hat{S}_w^{(1)} &= \hat{S}_w^q - \frac{\Delta t}{\phi} R(S_w^q) + \frac{\Delta t}{\phi \Omega_i} \bar{Q}_w(\bar{S}_w) \\ \hat{S}_w^{(2)} &= \frac{3}{4} \hat{S}_w^q + \frac{1}{4} \left[\hat{S}_w^{(1)} - \frac{\Delta t}{\phi} R(\hat{S}_w^{(1)}) + \frac{\Delta t}{\phi \Omega_i} \bar{Q}_w(\hat{S}_w^{(1)}) \right] \\ \hat{S}_w^{q+1} &= \frac{1}{3} \hat{S}_w^q + \frac{2}{3} \left[\hat{S}_w^{(2)} - \frac{\Delta t}{\phi} R(\hat{S}_w^{(2)}) + \frac{\Delta t}{\phi \Omega_i} \bar{Q}_w(\hat{S}_w^{(2)}) \right] \end{aligned} \quad (3.59)$$

onde, o índice superior (1) e (2) se referem a estágios intermediários no processo de marcha no tempo e usando o teorema do valor médio, o termo fonte é aproximado como (SOUZA et al., 2018):

$$\bar{Q}_w = \frac{1}{\Omega_i} \int_{\Omega_i} Q_w d\Omega_i \quad (3.60)$$

Seguindo o trabalho de (PARK; KIM, 2016), escolhemos um Δt estável para valores arbitrários de ordem polinomial n , usando a expressão:

$$\Delta t = \frac{\text{CFL}}{2n+1} \frac{\phi |\Omega_i|}{\max_{IJ \in \Gamma_i} \left[(|\partial f_w / \partial S|)_{IJ} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} \right]} \quad (3.61)$$

4 RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos utilizando o método iMsCV, para resolver o problema de fluxo, acoplado ao método CPR, de ordem 2, 3 e 4, para resolver o problema de transporte. As simulações foram realizadas de acordo com a formulação numérica descrita no Capítulo 3. Vale ressaltar que foram adotadas duas soluções de referência, uma denominada solução de referência multiescala, que é obtida por meio da simulação direta na escala fina e a segunda foi denominada solução de referência global, obtida por meio da simulação em uma malha convergida, a qual é resultado da aplicação do método MPFA-D, para resolver a equação de pressão, acoplado ao método FOU, para resolver o problema de saturação.

Para todos os exemplos dessa sessão o domínio computacional foi definido como um quadrado unitário $[0, 1]^2$ em uma configuração do tipo "1/4 five spot", onde o poço injetor se localiza no canto inferior esquerdo e o poço produtor se localiza no canto superior direito. Utilizamos condições de fluxo nulo nas fronteiras, fluxo prescrito ($Q_{inj} = 1$) no poço injetor e pressão prescrita ($p_{prod} = 0$) no poço produtor. Para os exemplos de fluxo bifásico, a saturação de água no poço injetor é $S_w = 1$, em um reservatório inicialmente saturado por óleo ($\bar{S}_w^0 = 0$). As saturações residuais e a razão de mobilidade são dadas, nessa ordem, por: $S_{irw} = S_{ro} = 0$ e $M \cong \left(\frac{\mu_o}{\mu_w}\right) = 4$, a densidade da água e do óleo são, respectivamente, 1 e 0,8. Além disso, foi adotado $CFL = 0,5$. Na Tabela 1 estão apresentadas algumas informações que irão auxiliar na compreensão dos resultados que serão apresentados nas próximas sessões desse capítulo.

Tabela 1 – Lista de abreviações importantes para a compreensão das análises deste capítulo.

Métodos	Sigla
<i>Forward Sucessive Over Relaxation</i>	FSOR
<i>Backward Sucessive Over Relaxation</i>	BSOR
Decomposição LU Incompleta	ILU
<i>Forward Gauss-Seidel</i>	FGS
<i>Backward Gauss-Seidel</i>	BGS
Método Iterativo Multiescala	M
Método Iterativo Multiescala Modificado	MM
Método Iterativo Multinível	MN
Método Iterativo Richardson	R

Para verificar a acurácia dos métodos foi adotada a norma Euclidiana L_2 , expressa por:

$$\|\vec{x}\|_2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{1}{2}} \quad (4.1)$$

onde x_i é o i -ésimo componente do vetor $\vec{x}$ de tamanho n . Assim o erro relativo, adotado neste trabalho, é definido por:

$$\varepsilon_{rel} = \varepsilon = \frac{\|X_{ref} - X_{ms}\|_2}{\|X_{ref}\|_2} \quad (4.2)$$

4.1 ESCOAMENTO MONOFÁSICO NO CONJUNTO DE DADOS DO SPE 10

Para avaliar o comportamento de cada um dos suavizadores analisados neste trabalho, combinados com os quatro métodos iterativos apresentados na seção 3.2.5, foi realizado uma série de simulações de fluxo monofásico utilizando os campos de permeabilidades do Modelo 2 do *10th Comparative Solution Project* da SPE (SPE 10), que é disponibilizado em Christie e Blunt (2001). Esse modelo possui 85 camadas, no qual as 35 primeiras representam a formação Tarbert e apresentam um campo de permeabilidade que segue uma distribuição lognormal e as heterogeneidades variam suavemente. As outras 50 camadas representam a formação Upper Ness, cujas camadas apresentam regiões de alta permeabilidade intercaladas com zonas de baixa permeabilidade.

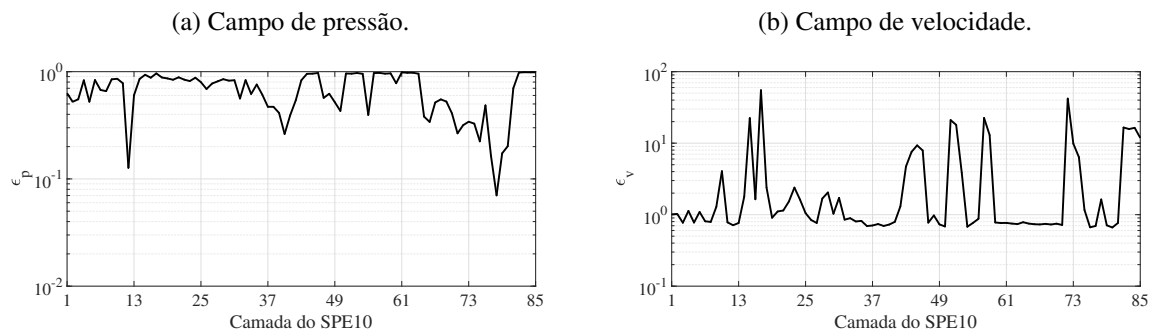
Foi realizada a simulação para cada uma das 85 camadas do Modelo 2 do SPE 10. A malha na escala fina possui 13.200 elementos e a malha menos densa contém 64 elementos quadrilaterais, ambas malhas não-estruturadas. Inicialmente, foi realizada a simulação utilizando o MsCV sem aplicação do método iterativo e foi calculada a norma Euclidiana do erro, para as soluções nos campos de pressão e velocidade, para todas as camadas e esses valores estão apresentados na Figura 6. Em seguida foram realizadas as simulações adotando o iMsCV, na etapa iterativa foram empregadas 15 iterações e, assim como foi feito para a solução obtida pelo MsCV, a norma Euclidiana do erro foi calculada para todos os diferentes métodos iterativos, com as diferentes alternativas de preconditionadores (ou suavizadores) testados neste trabalho. Pode-se observar esses resultados na Figura 7 para o campo de pressão e na Figura 8 para o campo de velocidade.

Podemos observar, confrontando com os resultados da Figura 7, que todos os métodos apresentaram melhora no campo de pressão quando comparado com a solução do MsCV, Figura 6 (a). Em geral, as soluções obtidas por meio do método iterativo multiescala entregaram melhores resultados, o que pode ser reforçado avaliando os valores apresentados na Tabela 2, na qual é possível observar os maiores erros para cada método. É importante informar que para o caso do MsCV, sem aplicação de suavizador, o maior erro está na camada 83 no valor de 0,9881. Para o

método iterativo multiescala o erro relativo mais expressivo foi encontrado na camada 63 com o valor de 0,59702, solução obtida pelo método M-FSOR. Já para o método iterativo multinível, o maior valor para o erro relativo foi obtido pelo métodos MN-BSOR e MN-FGS e encontra-se na camada 61, respectivamente, no valor de 0,6794 e 0,6755. No método multiescala modificado o valor mais expressivo do erro relativo está localizado na camada 63, cujo valor é 0,7197, solução gerada pelo M-FSOR.

O método Richardson apresentou os maiores valores dentre os métodos estudados, sendo o maior deles na camada 61 no valor de 0,9736 associado à solução obtida pelo método R-BGS. Esse comportamento pode ser explicado pelo fato desse método não levar em consideração o problema de transferência de escalas e não ser construído de forma a manter a propriedade de conservação local como os outros métodos analisados.

Figura 6 – Escoamento monofásico no conjunto de dados do SPE 10: Norma Euclidiana do erro para cada camada sem aplicação do método iterativo.

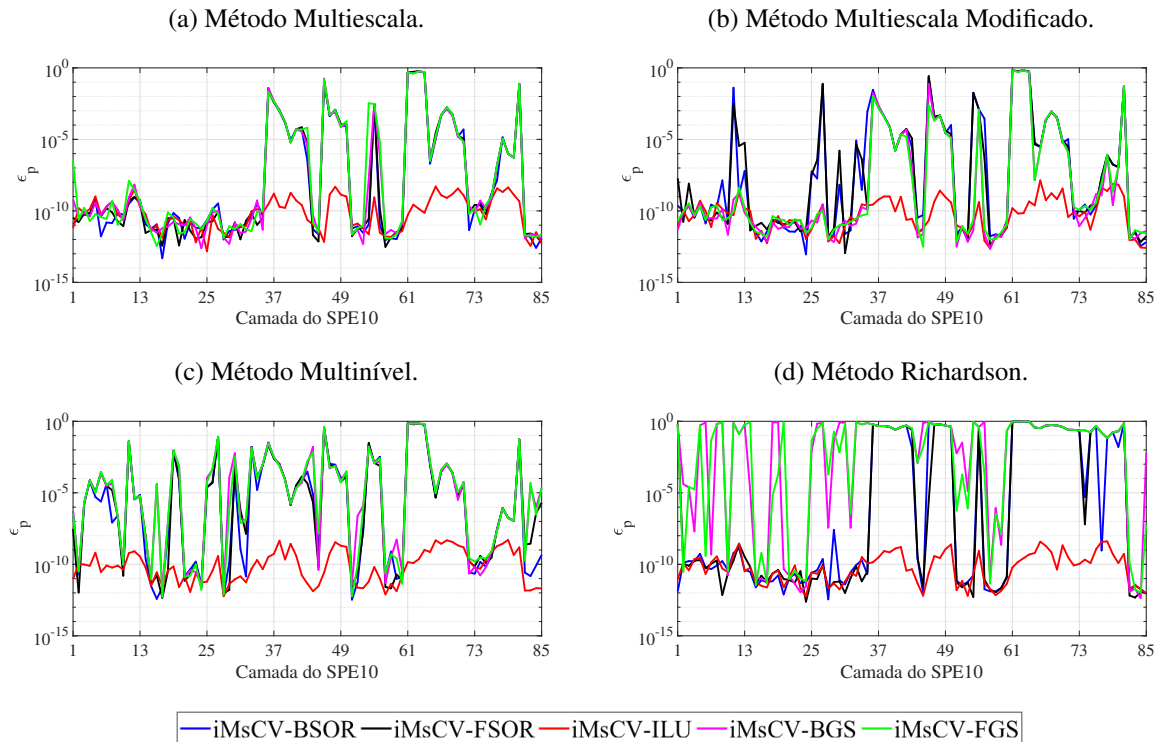


Fonte: A Autora, (2021).

Para as camadas mencionadas, o método não conseguiu representar bem a física do problema. Esse comportamento se deve a três fatores, as condições de contorno reduzidas usadas para realizar o desacoplamento das funções de base do método multiescala, que podem gerar oscilações espúrias como observado por (SOUZA et al., 2020), a própria natureza do SPE 10, que possui grandes variações no campo de permeabilidade, e pelo processo iterativo, o qual visa minimizar o resíduo, que apresenta convergência oscilatória, isso será melhor observado na Figura 9.

Em relação ao campo de velocidade, a aplicação do método iterativo causou uma queda sutil nos valores dos erros relativos, quando comparado com os erros do campo de pressão, como

Figura 7 – Escoamento monofásico no conjunto de dados do SPE 10: Impacto da aplicação da estratégia de suavização no campo de pressão: Norma Euclidiana do erro para cada camada do SPE (15 iterações).



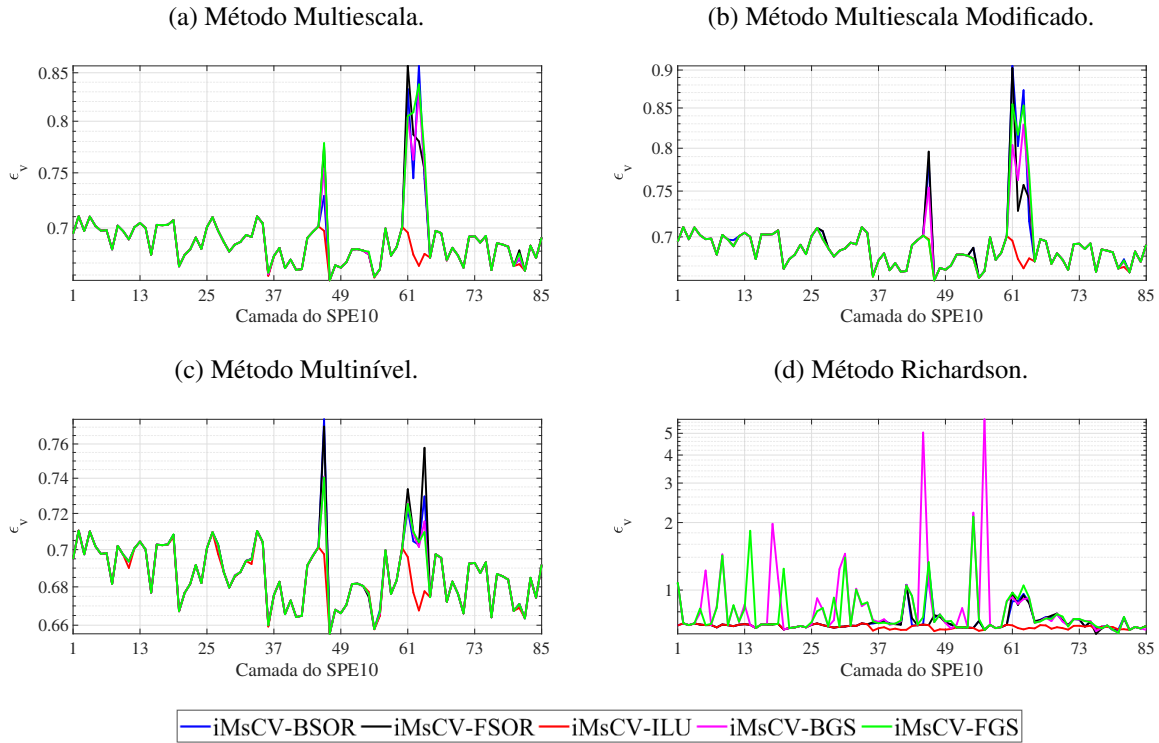
Fonte: A Autora, (2021).

Tabela 2 – Escoamento monofásico no conjunto de dados do SPE 10: Norma Euclidiana do erro após 15 iterações: campo de pressão.

Método	Camada	Erro	Método	Camada	Erro
M-BSOR	63	0,5931	MM-BSOR	61	0,7150
M-FSOR	63	0,5970	MM-FSOR	63	0,7197
M-ILU	67	$1,26 \times 10^{-9}$	MM-ILU	64	$1,01 \times 10^{-9}$
M-BGS	63	0,5685	MM-BGS	61	0,6820
M-FGS	63	0,5735	MM-FGS	62	0,7072
MN-BSOR	61	0,6794	R-BSOR	61	0,9675
MN-FSOR	63	0,6679	R-FSOR	61	0,9733
MN-ILU	66	$1,3 \times 10^{-8}$	R-ILU	76	$1,12 \times 10^{-9}$
MN-FGS	61	0,6755	R-FGS	61	0,9704
MN-BGS	61	0,6671	R-BGS	61	0,9736

já observado anteriormente por (SOUZA et al., 2020). Porém, se confrontarmos os resultados da Figura 8 com os resultados da Figura 6(b), vemos que, com a aplicação do método iterativo, foi possível melhorar fortemente a solução do campo de velocidade. Com base na Figura 8, vemos que os erros, em geral, apresentam o mesmo comportamento para os métodos iterativos multiescala (M-), multiescala modificado (MM-) e multinível (MN-), apresentando erros mais

Figura 8 – Escoamento monofásico no conjunto de dados do SPE 10: Impacto da aplicação da estratégia de suavização no campo de velocidades: Norma Euclidiana do erro para cada camada do SPE (15 iterações).



Fonte: A Autora, (2021).

expressivos nas camadas 61 e 63; 61; 46, respectivamente, ver Tabela 3. Já para o método Richardson a redução do erro ocorreu de forma mais discreta, atingindo o pior valor de 5,7733 na camada 56. Para o MsCV, o maior erro apresentá-se na camada 71 com valor de 41,999.

O suavizador obtido pela fatorização LU incompleta, $ilu(0)$, conseguiu reduzir significativamente os erros mesmo nas camadas mais problemáticas do modelo. Além disso, ele conseguiu atingir a valores máximos do erro relativo para o campo de pressão abaixo de 10^{-7} , apresentando uma diferença significativa em relação aos outros suavizadores. Nas Figuras 7 e 8 é possível observar que o desempenho do suavizador BSOR é um pouco melhor que os demais suavizadores testados, podendo ser escolhido como uma alternativa ao $Il_u(0)$, que se destacou com os melhores resultados, para problemas físicos de baixa complexidade. As curvas divergem apenas em algumas camadas que apresentam maior grau de heterogeneidade.

A fim de avaliar o desempenho dos métodos, foi selecionada a camada 67 para realizar o teste de convergência dos métodos. Neste caso, adotamos como critério de convergência a norma Euclidiana do resíduo obedecendo uma tolerância igual a 10^{-9} , fazendo com que a solução

Tabela 3 – Escoamento monofásico no conjunto de dados do SPE 10: Norma Euclidiana do erro após 15 iterações: campo de velocidade.

Método	Camada	Erro	Método	Camada	Erro
M-BSOR	63	0,8574	MM-BSOR	46	0,7743
M-FSOR	61	0,8574	MM-FSOR	46	0,7704
M-ILU	2	0,7105	MM-ILU	34	0,7102
M-BGS	63	0,8289	MM-BGS	46	0,7409
M-FGS	63	0,8377	MM-FGS	46	0,7404
MN-BSOR	61	0,9057	R-BSOR	46	1,2717
MN-FSOR	61	0,9027	R-FSOR	1	1,0778
MN-ILU	2	0,7105	R-ILU	2	0,7105
MN-FGS	63	0,8289	R-FGS	56	5,7733
MN-BGS	61	0,8548	R-BGS	54	2,1232

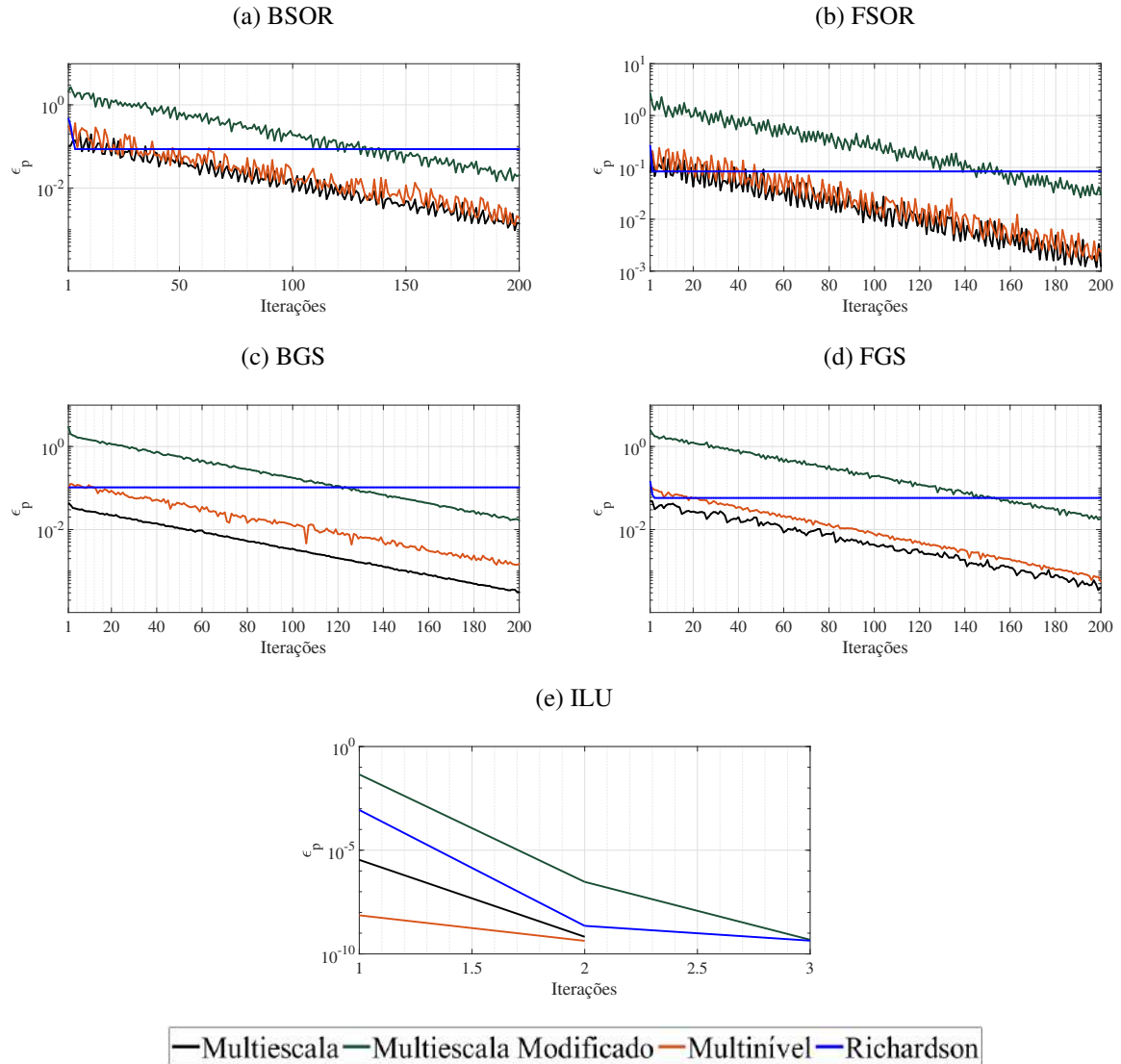
convergida seja suficientemente próxima a solução obtida pelo sistema na escala fina. Para melhorar a visualização foram apresentados os resultados para 200 iterações na Figura 9. Nota-se que o desempenho dos métodos iterativos são similares, exceto o método Richardson, que não conseguiu convergir para a solução, estagnando-se nas primeiras iterações, com exceção de quando utilizado em conjunto com o ILU.

Tabela 4 – Número de iterações necessárias para cada método atingir a tolerância de 10^{-9} .

Método	Iterações	Método	Iterações
iMsCV-M-BSOR	810	iMsCV-MN-BSOR	829
iMsCV-M-FSOR	893	iMsCV-MN-FSOR	853
iMsCV-M-ILU	2	iMsCV-MN-ILU	2
iMsCV-M-BGS	740	iMsCV-MN-BGS	821
iMsCV-M-FGS	769	iMsCV-MN-FGS	754
iMsCV-MM-BSOR	914	iMsCV-R-BSOR	-
iMsCV-MM-FSOR	1.012	iMsCV-R-FSOR	-
iMsCV-MM-ILU	3	iMsCV-R-ILU	3
iMsCV-MM-BGS	892	iMsCV-R-BGS	-
iMsCV-MM-FGS	900	iMsCV-R-FGS	-

Com base na Tabela 4, é possível notar que o método multiescala conseguiu atingir a tolerância de 10^{-9} com o menor número de iterações, valores bem próximos ao método multinível. É importante ressaltar que os métodos construídos utilizando o suavizador obtido pela fatorização incompleta, $ilu(0)$, foram os que apresentaram os melhores resultados, convergindo para a tolerância desejada em apenas 2 ou 3 iterações. Na Figura 10, pode-se observar o campo de permeabilidade, Figura 10(a), da camada 67, assim como, a solução do campo de pressão

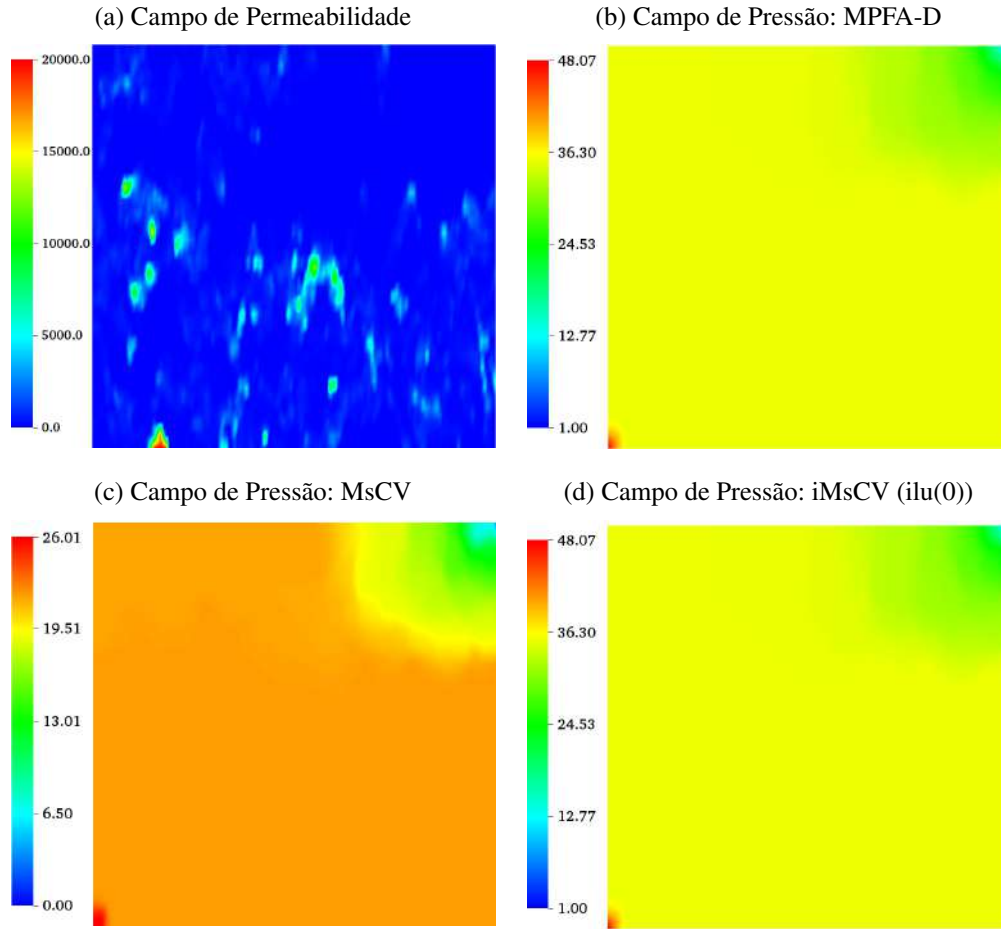
Figura 9 – Escoamento monofásico no conjunto de dados do SPE 10: Histórico de convergência dos suavizadores: Norma Euclidiana do resíduo para cada iteração, plotando até 200 iterações..



Fonte: A Autora, (2021).

obtidas pelos métodos MPFA-D, na malha fina, MsCV e iMsCV. É perceptível que a solução gerada a partir da aplicação do método MsCV, Figura 10 (c), falha fortemente em representar o resultado da malha fina, solução de referência multiescala, Figura 10 (b), apresentando valores do campo de pressão inferiores aos de referência, enquanto que, o método iMsCV, Figura 10 (d), apresenta excelente resultado.

Figura 10 – Escoamento monofásico no conjunto de dados do SPE 10: Campos de permeabilidade e pressão da camada 67 do SPE10.



Fonte: A Autora, (2021).

4.2 ESCOAMENTO BIFÁSICO EM RESERVATÓRIO ALTAMENTE HETEROGÊNEO E ISOTRÓPICO

Este teste foi adaptado de (SOUZA et al., 2020) e o utilizamos para mostrar a qualidade da solução da saturação de água após a aplicação da técnica de suavização por meio do método multiescala iterativo. Neste exemplo, resolvemos um caso interessante que lida com o fluxo bifásico incompressível de óleo e água em um reservatório considerando um meio com tensor de permeabilidade altamente heterogêneo e isotrópico (ver Figura 11 (a)), o qual é dado pela seguinte expressão:

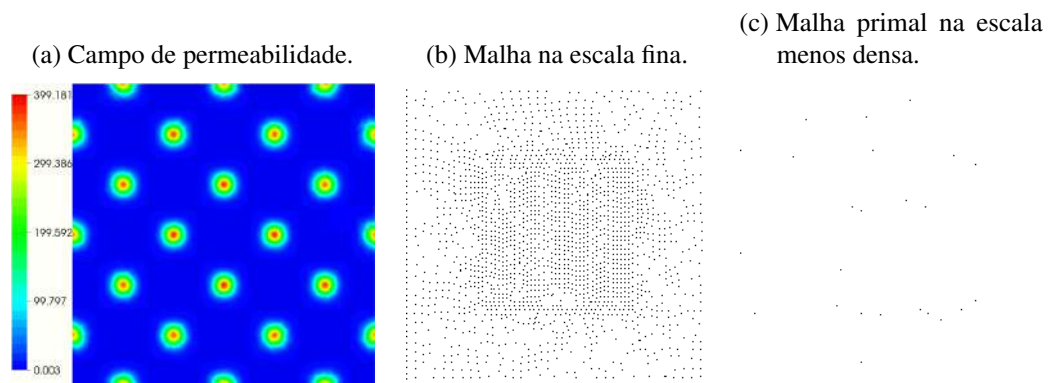
$$K(x, y) = \varepsilon^{2\cos(6\pi x)\cos(6\pi y)} \underline{I} \quad (4.3)$$

onde $\underline{I}$ é a matriz identidade, e $\varepsilon = 5 \times 10^{-2}$. A malha de alta resolução usada neste exemplo é uma malha quadrilateral com 2.795 elementos, apresentada na Figura 11 (b), e uma malha

primal de menor resolução com 35 volumes poligonais, Figura 11 (c).

Na etapa iterativa do método iMsCV adotamos como critério de parada uma tolerância no resíduo de 10^{-7} . A fim de definir o suavizador a ser utilizado para esse problema, foi realizado um teste entre os dois suavizadores que apresentaram os melhores resultados no estudo da seção 4.1, BSOR e *ilu(0)*. Esse teste consiste numa simulação de fluxo monofásico do problema descrito nessa seção. Para esse caso, o suavizador obtido pela fatorização incompleta *ilu(0)* atingiu a tolerância após 2 iterações levando 1,91 segundos, enquanto que o suavizador BSOR necessitou de 7 iterações levando apenas 0,43 segundos, o que corresponde a 22,61 % do tempo do suavizador *ilu(0)*. Assim, para este problema foi adotado o BSOR.

Figura 11 – Escoamento bifásico em reservatório altamente heterogêneo e isotrópico.



Fonte: A Autora, (2021).

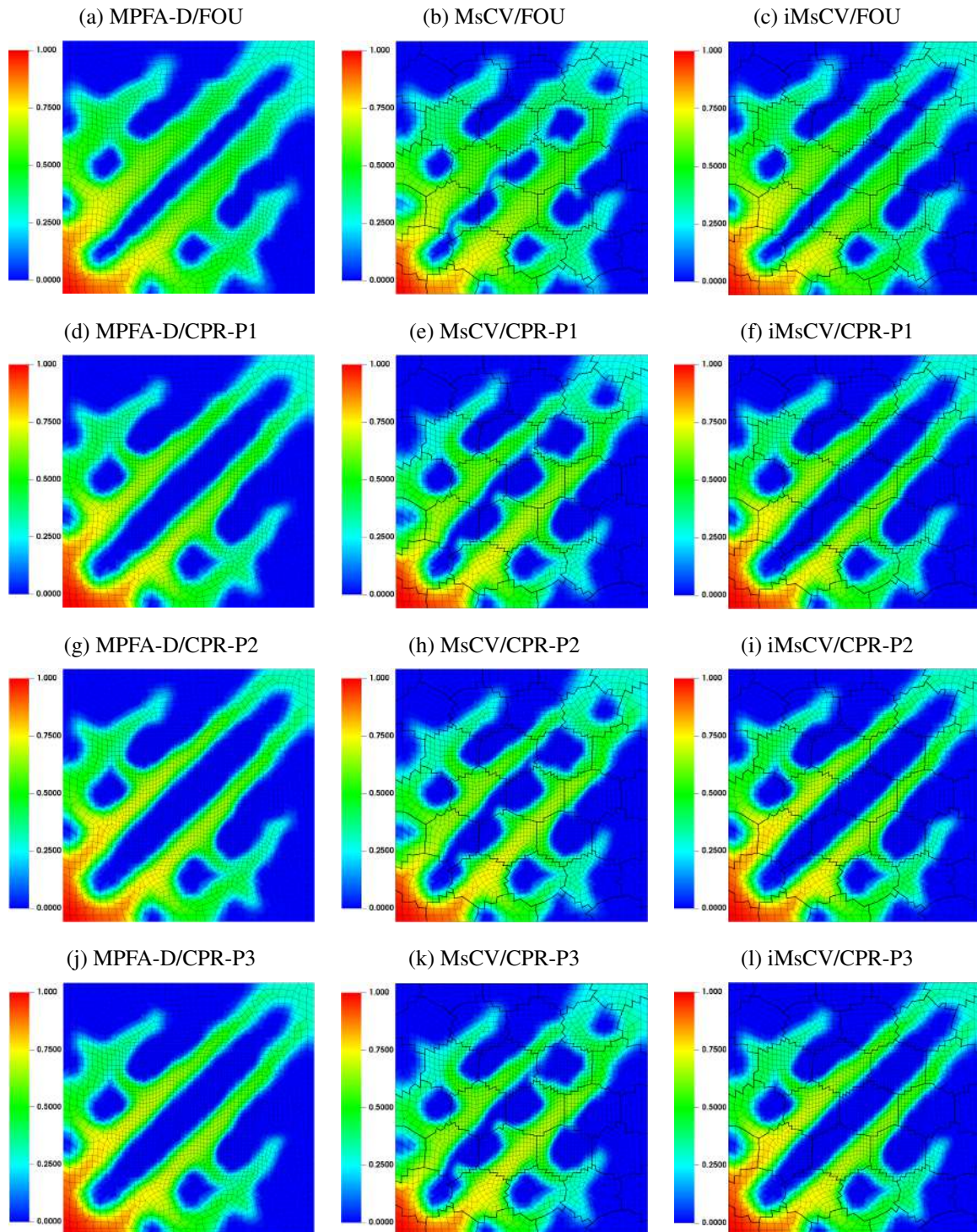
A equação 4.3 representa um campo de permeabilidade que alterna entre zonas circulares de alta permeabilidade e regiões de baixa permeabilidade, como mostrado na Figura 11 (a). A diagonal que conecta os poços de injeção e produção cria um caminho com zonas de permeabilidade muito baixa que alterna com regiões mais permeáveis. Na solução de referência, Figura 12 (a, d, g, j), esta configuração cria um caminho no qual o fluido não pode penetrar. Esta é uma consequência direta da simetria do campo de permeabilidade em relação à diagonal principal, que garante que as células simétricas a esta linha possuam os mesmos valores de pressão. No entanto, a solução multiescala do MsCV, Figura 12 (b, e, h, k), viola a física do problema e cria um campo de saturação no qual a natureza simétrica do meio não é respeitada. Esse comportamento anômalo é causado pela avaliação inacurada do campo de velocidades requerido para a discretização da saturação para ambos os métodos de baixa e alta ordem.

Como mencionado anteriormente, a técnica de suavização iMsCV melhora drasticamente o campo de velocidade total, o qual é recuperado pelo gradiente de pressão, de maneira a calcular uma solução correta do campo de saturação, isso pode ser observado na Figura 12 (c, f, i, l) quando confrontadas com os resultados na malha fina. As soluções para os métodos de baixa e alta ordem preservam a simetria e o comportamento geral esperado mostrando que o método conseguiu representar bem a física do problema.

Com base na Figura 13, podemos notar que, assim como, o erro no campo de pressão apresenta um viés constante com poucas oscilações, para soluções que adotaram o MsCV, os erros no campo de velocidade também tendem a um comportamento constante após o *breakthrough* ($PVI \cong 0,17$). Em relação as soluções obtidas pelo iMsCV, os erros no campo de pressão tendem a aumentar ao longo do tempo e apresentam algumas oscilações. Vale ressaltar que, ainda assim, as soluções do método multiescala iterativo apresentam valores inferiores aos erros apresentados pela solução do MsCV. O comportamento do erro para o campo de velocidade usando os métodos MsCV e iMsCV são similares, divergindo apenas em intensidade, e no caso do uso do FOU, ao longo de quase toda a simulação, o erro usando o iMsCV apresentou valores um pouco maiores que aqueles obtidos pelo MsCV.

Analizando as curvas de produção da Figura 14, fica evidente o aumento de acurácia das soluções obtidas após a aplicação da técnica de suavização, onde as curvas de produção de referência e as curvas obtidas pelo iMsCV praticamente se sobrepõem. Sendo possível prever o instante do *breakthrough* com maior precisão. Para critério de comparação, realizamos a simulação desse problema em uma malha quadrilateral não-estruturada com 45.236 elementos, utilizando o MPFA-D para o problema de fluxo e método FOU para o problema de transporte, essa solução é denominada de solução global. Os resultados dessa simulação estão apresentados na Figura 15 e são comparados com as soluções obtidas pelo iMsCV. Assim, podemos concluir que o método de ordem 3, CPR(P2), foi aquele que melhor aproximou a solução, ainda que apresente algumas oscilações espúrias, as quais estão em estudos a fim de determinar sua causa e uma solução para esse problema. À medida que a ordem do polinômio de aproximação aumenta espera-se obter soluções mais acuradas, no entanto, a solução obtida pelo método de ordem 4, CPR(P3), apresentou perda de acurácia. Isso pode ser explicado pelo fato desses métodos possuírem maior sensibilidade em relação a qualidade do campo de velocidade, e, possivelmente, para métodos de ordens maiores que 3, o campo de velocidades obtido não possui acurácia

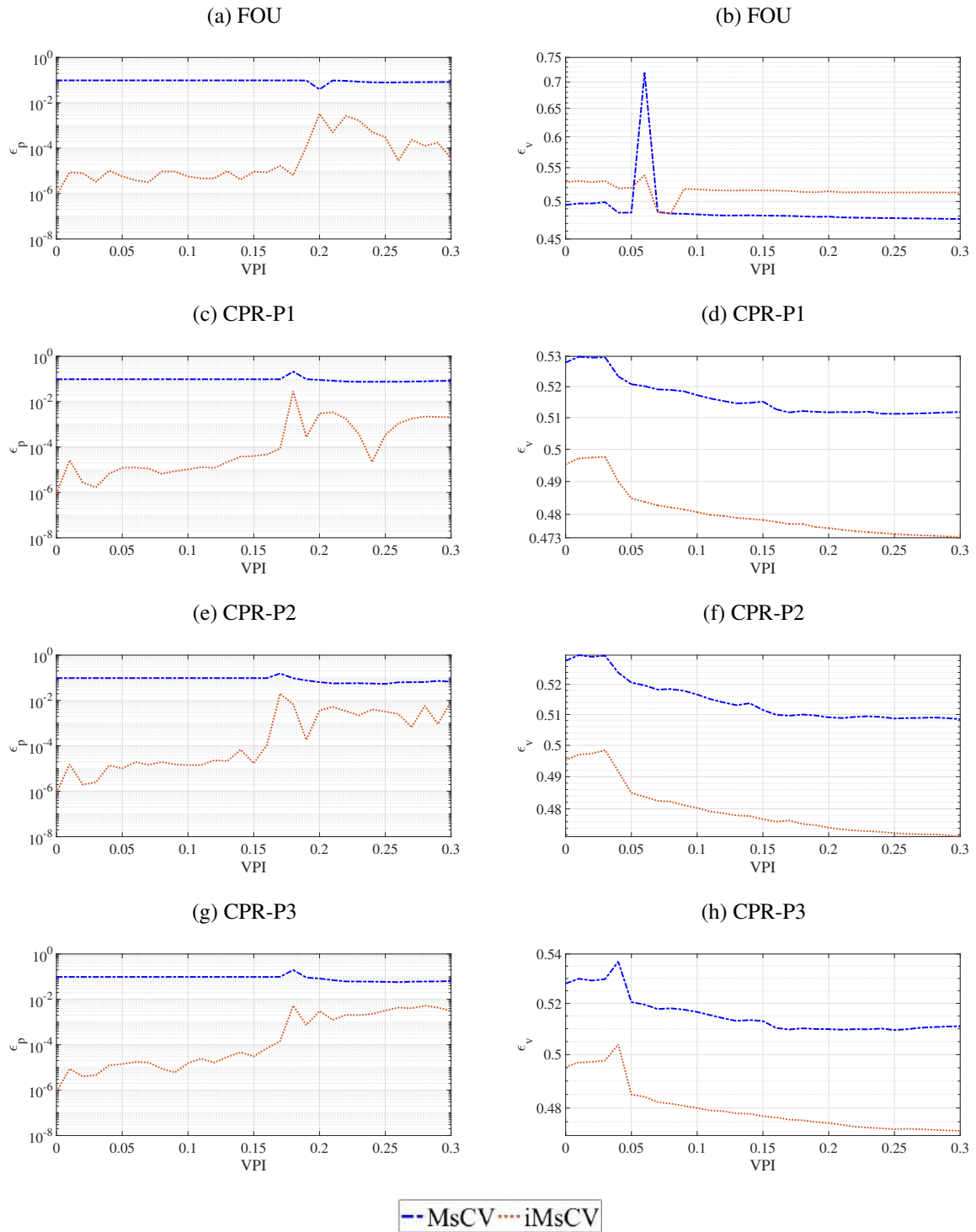
Figura 12 – Perfis de saturação para o $VPI = 0.3$ em uma configuração do tipo "1/4 de five-spot" em reservatório altamente heterogêneo e isotrópico: Perfis de saturação calculados usando os métodos FOU e CPR, com diferentes ordens, e para o cálculo da pressão utilizando o método MPFA-D (a, d, g e j), MsCV (b, e, h e k) e iMsCV (c, f, i e l).



Fonte: A Autora, (2021).

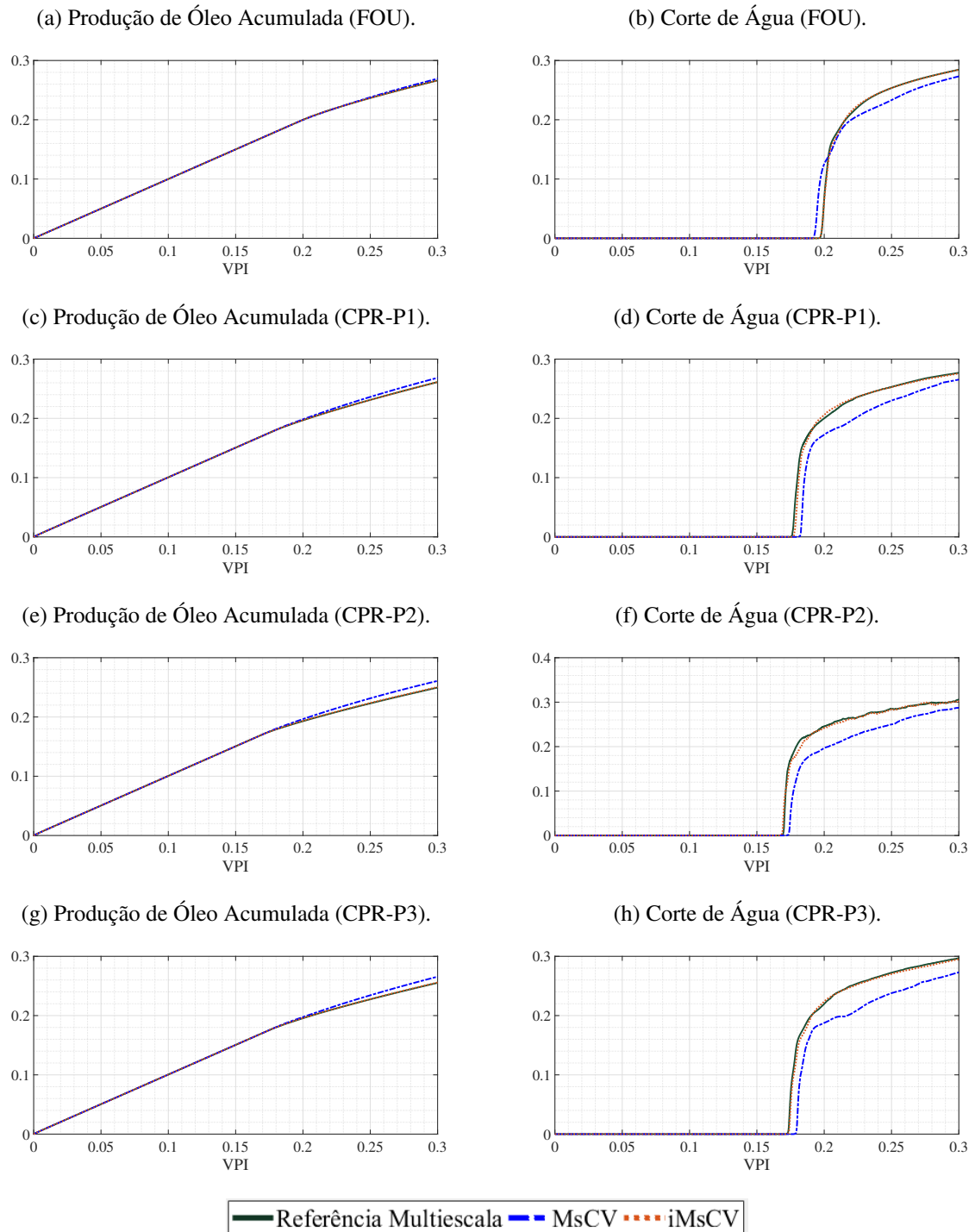
necessária para que estes apresentem o desempenho esperado.

Figura 13 – Escoamento bifásico em reservatório altamente heterogêneo e isotrópico: Norma Euclidiana do erro para os campos de pressão (a, c, e, g) e de velocidade (b, d, f, h).



Fonte: A Autora, (2021).

Figura 14 – Escoamento bifásico em reservatório altamente heterogêneo e isotrópico: Curvas de produção.

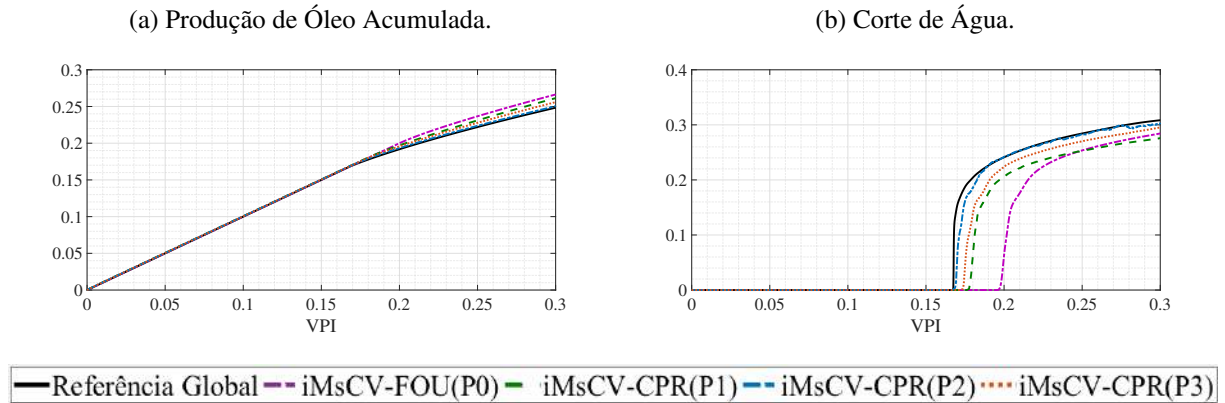


Fonte: A Autora, (2021).

4.3 ESCOAMENTO BIFÁSICO EM RESERVATÓRIO HETEROGÊNEO COM TENSOR DE PERMEABILIDADE DESCONTÍNUO E COM ALTA RAZÃO DE ANISOTROPIA

Esse exemplo foi adaptado de Galindez-Ramirez et al. (2020) e Souza et al. (2020), o domínio computacional consiste em um quadrado com dimensões unitárias $[0, 1]^2$, representando

Figura 15 – Escoamento bifásico em reservatório altamente heterogêneo e isotrópico: Curvas de produção obtidas pelo método iterativo (iMsCV).



Fonte: A Autora, (2021).

um reservatório heterogêneo composto por 4 camadas, com tensor de permeabilidade descontínuo e com alta razão de anisotropia, correspondente à Figura 16 (a). Conforme mostrado por Contreras et al. (2016), os tensores de permeabilidades utilizados nesse exemplo são resultantes da rotação em 45° (camada 1 e 4), 0° (camada 2) e 90° (camada 3). E são, respectivamente, representados por:

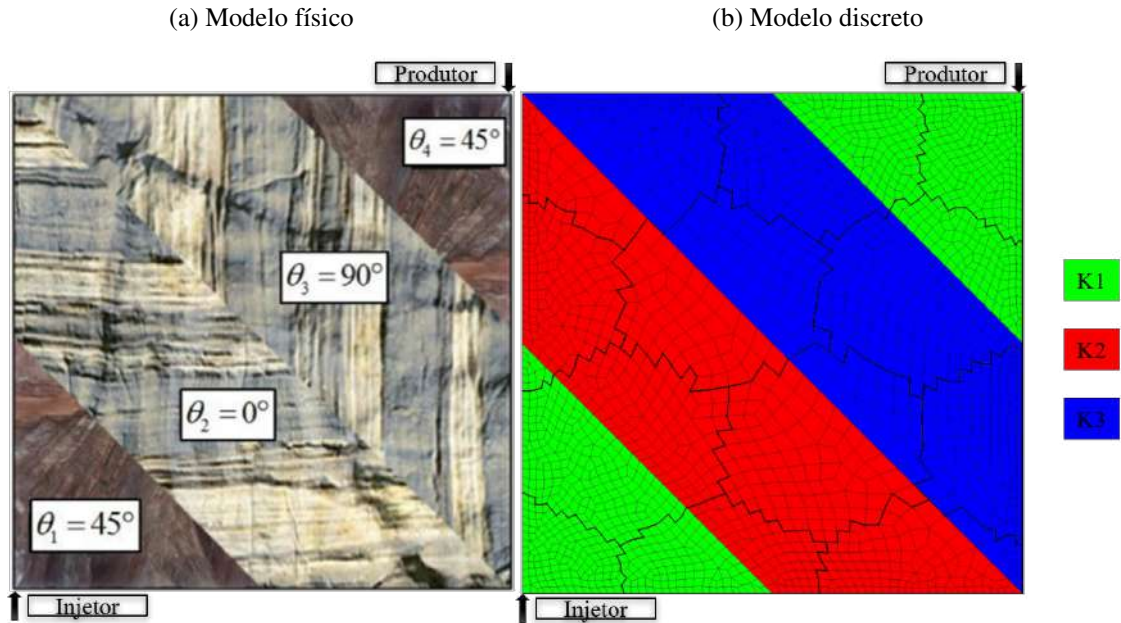
$$K_1 = \begin{bmatrix} 505 & 495 \\ 505 & 495 \end{bmatrix} K_2 = \begin{bmatrix} 1.000 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} K_3 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1.000 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Para essa simulação foi utilizada uma malha não-estruturada na escala fina com 2.084 elementos quadrilaterais representado pela malha mais densa (Figura 16 (b)) e uma malha primal da escala de menor resolução com 12 elementos, representada pela malha menos densa (Figura 16 (b)).

A estrutura do meio em camadas altamente anisotrópicas deve canalizar o fluxo entre os poços de injeção e de produção em forma de escada com muito pouco fluxos transversais. Nesse problema, adotamos, na etapa iterativa, uma tolerância $\|r\|_2 \leq 10^{-7}$, em concordância com os argumentos apresentados nos capítulos anteriores que enfatizam a necessidade de se obter uma boa aproximação do campo de velocidades para os métodos de ordens mais altas. Semelhante ao caso anterior, seção 4.2, também foi realizado um teste com modelo monofásico afim de determinar o suavizador a ser utilizado para esse problema. O *solver* multiescala utilizando os suavizadores *ilu(0)* e BSOR atingiram a tolerância de 10^{-9} após 2 iterações levando, respectivamente, 0,6341 e 0,1567 segundos. Assim adotamos, para esse caso,

o suavizador BSOR que apresentou menor custo computacional e que entrega a solução com mesmo nível de acurácia.

Figura 16 – Escoamento bifásico em reservatório heterogêneo com tensor de permeabilidade descontínuo e com alta razão de anisotropia: Ângulos de rotação do tensor anisotrópico descontínuo (esquerda); malha fina quadrilateral não-estruturada e malha poligonal não estruturada primal na escala grossa (direita).



Fonte: Adaptado de Contreras et al. (2016).

Como mencionado anteriormente, a solução de referência dentro do contexto multiescala é aquela obtida na malha de maior resolução. Apenas para fins de comparação, resolvemos esse problema usando o método MPFA-D junto com o método FOU em uma malha quadrilateral não-estruturada mais refinada com 32.752 volumes de controle. A solução obtida nessa configuração será referida como a solução de referência global e a solução obtida pelo método diretamente na malha fina, com 2.084 elementos, será denominada solução de referência multiescala.

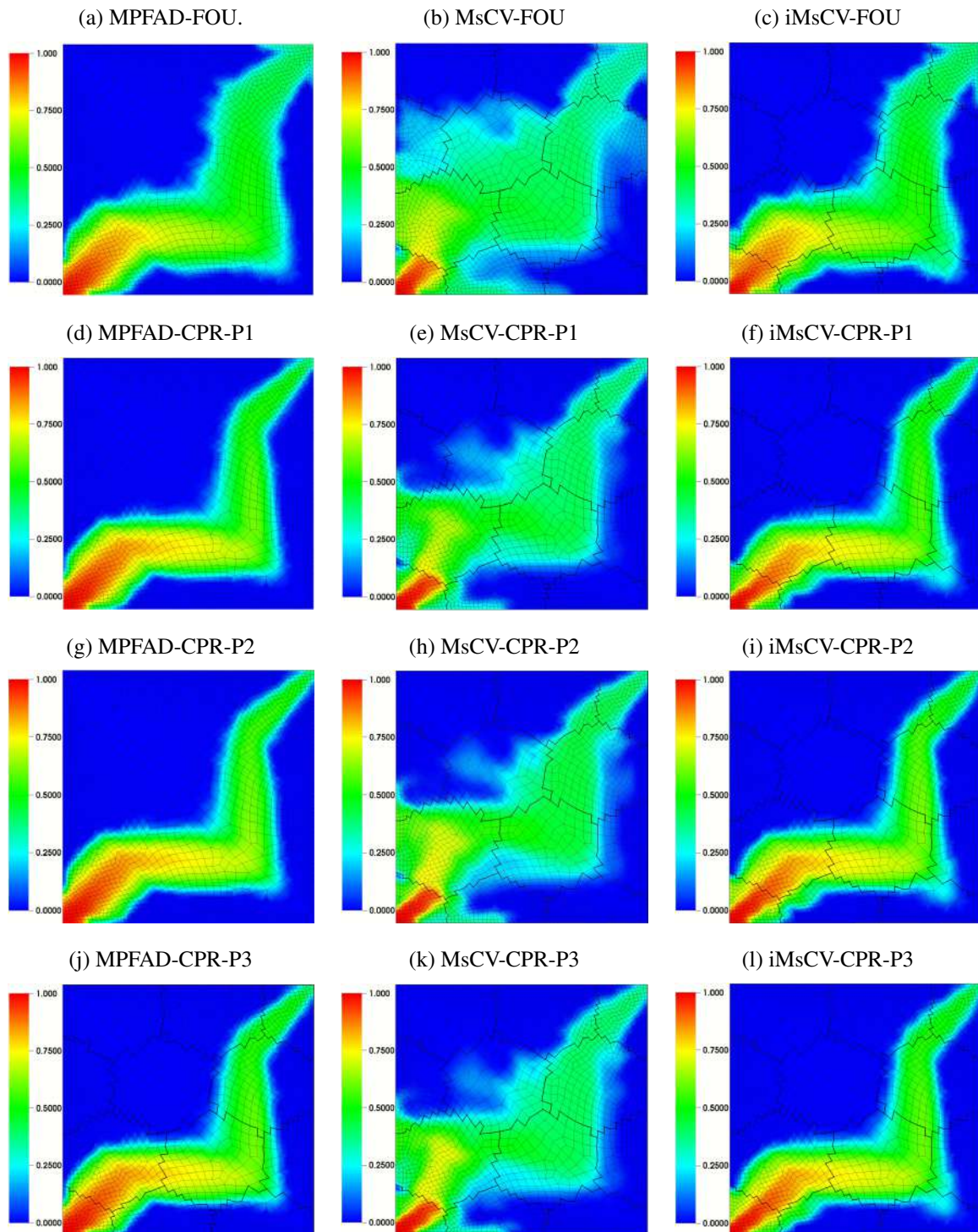
Considerando apenas as soluções de referência multiescala do perfil de saturação para os métodos de baixa e alta ordem apresentadas nas Figuras 17 (a, d, g, j), fica evidente que as soluções obtidas pelo método multiescala sem aplicação de suavizadores (MsCV), nas Figuras 17 (b, e, h, k), apresentam difusão artificial significativa, somado a isso, o método produz um campo de velocidades inacurado comprometendo o desempenho do método em representar de forma satisfatória a física do problema. Essa característica é algo intrínseco ao método multiescala, no entanto, foi possível ser mitigado ao aplicar o método multiescala iterativo proposto neste

trabalho (iMsCV) como pode ser observado nas Figuras 17 (c, f, i, l). Como esperado, a solução obtida por meio dos métodos de alta ordem apresentam menor difusão quando comparadas com o FOU, pois esses possuem mais graus de liberdade.

Analisando com base nas soluções de referência multiescala para as curvas de produção acumulada, Figuras 18 (a, c, e, g) e corte de água, Figuras 18 (b, d, f, h), é possível verificar que, em geral, as soluções obtidas pelo iMsCV convergem para a solução na malha fina. Espera-se que os métodos de ordens mais elevadas nos levem a obter as melhores soluções, no entanto, o método de baixa ordem apresentou um melhor resultado quando comparado com os métodos de alta ordem, no sentido de recuperar melhor o resultado obtido na escala fina. Isso ocorre devido à qualidade do campo de velocidades que não foi recuperado com a acurácia necessária para que o método CPR obtivesse desempenho máximo. Por outro lado, se considerarmos a solução de referência global na Figura 19, os métodos de alta ordem representam uma melhor aproximação do problema físico em questão, o que pode ser observado na maior acurácia da previsão do *breakthrough*.

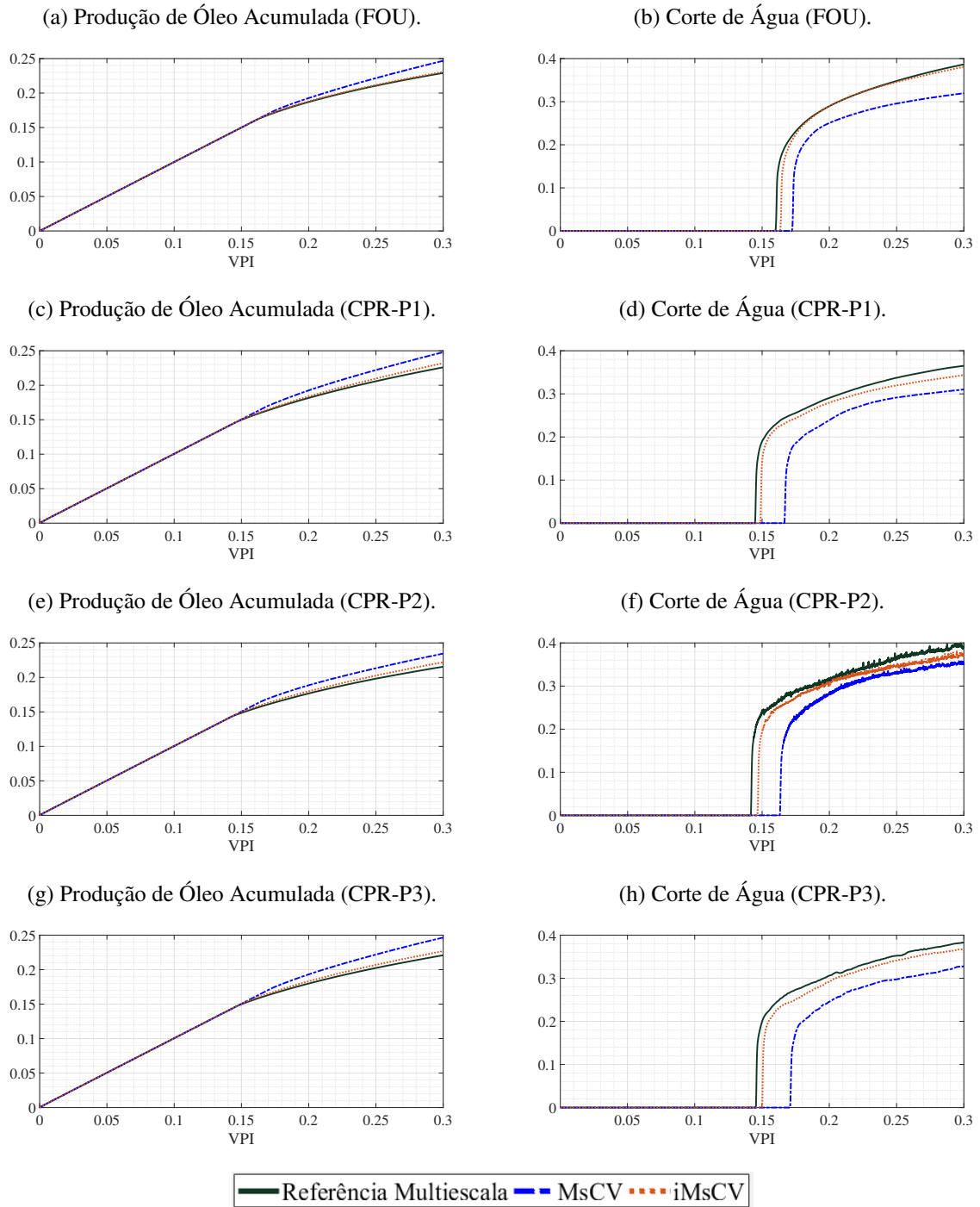
Os métodos lineares de MPFA apresentam problemas de monotonicidade para tensores de permeabilidades severamente anisotrópicos e malhas muito distorcidas, levando à criação de oscilações espúrias no campo de pressão. Ao utilizar o MPFA-D, é possível reduzir ou eliminar esse problema nos casos de baixa complexidade física. No entanto, o MPFA-D ainda é suscetível à violar o DMP e perder a monotonicidade ao lidar com altos gradientes de permeabilidade e meios de elevada anisotropia, similar ao apresentado neste exemplo. Somado a isso, sabemos que formulações explícitas podem ocasionar severas oscilações em volumes de controle associados aos poços devido à variações bruscas na variável primária (SOUZA, 2015). As oscilações apresentadas nas soluções aproximadas pelo método de terceira ordem, CPR-P2, (Figuras 18 (f) e 19 (b)) estão sendo estudadas a fim de determinar a sua causa, espera-se que elas sejam reduzidas ao aplicar uma formulação implícita para contornar o problema de rigidez do poço.

Figura 17 – Escoamento bifásico em reservatório heterogêneo com tensor de permeabilidade descontínuo e com alta razão de anisotropia: perfis de saturação para o pvi de 0.3 para os métodos, de solução da saturação de diferentes ordens, na malha fina (esquerda), MsCV (centro) e iMscv (direita).



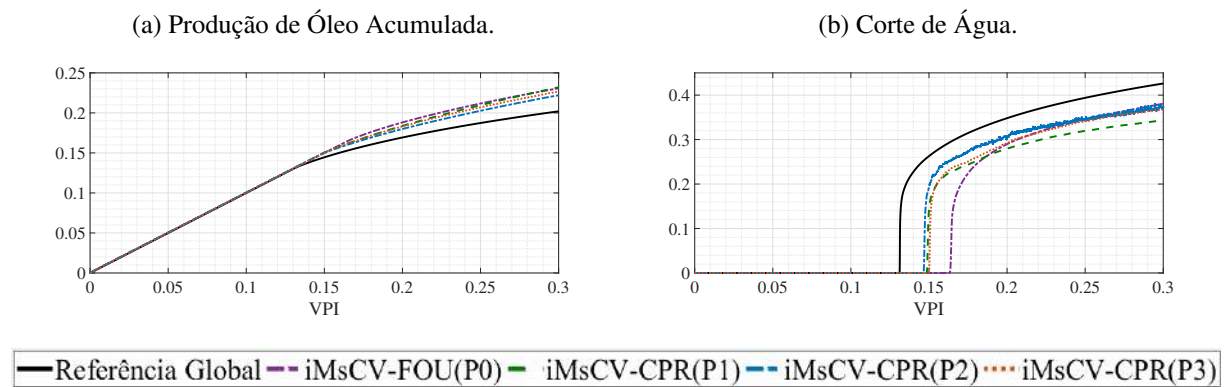
Fonte: A Autora, (2021).

Figura 18 – Escoamento bifásico em reservatório heterogêneo com tensor de permeabilidade descontínuo e com alta razão de anisotropia: Curvas de produção.



Fonte: A Autora, (2021).

Figura 19 – Escoamento bifásico em reservatório heterogêneo com tensor de permeabilidade descontínuo e com alta razão de anisotropia: Comparação das curvas de produção obtidas por diferentes ordens de aproximação na solução da saturação com a solução de referência global.



Fonte: A Autora, (2021).

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

A primeira contribuição desta pesquisa foi analisar e comparar o desempenho de diferentes suavizadores aplicados em quatro métodos iterativos dentro do contexto multiescala. Nesse sentido, foi possível concluir que, com base nos testes realizados e apresentados nesse trabalho, o suavizador construído pela fatorização incompleta, $ilu(0)$, apresentou os melhores resultados para todos os *solvers* iterativos estudados, no entanto, apresenta maior custo computacional que os demais suavizadores. Diante disso, uma opção, para problemas que não apresentem heterogeneidade e anisotropia excessivamente elevada, é adotar o suavizador BSOR que apresenta um menor custo computacional e entrega resultados satisfatórios, como vimos nos problemas apresentados no capítulo 4 deste trabalho.

A segunda contribuição foi desenvolver uma metodologia para resolver as equações governantes do fluxo bifásico água-óleo em reservatórios de petróleo usando malhas não estruturadas. Nessa metodologia, as equações de pressão e saturação são resolvidas pelos métodos iMsCV e CPR, respectivamente, de maneira segregada adotando a metodologia IMPES.

As soluções obtidas pelo iMsCV acoplado ao método CPR para resolver os problemas de fluxo bifásico apresentaram excelente concordância com as soluções numéricas de referência.

Considerando a solução de referência multiescala (i.e. a solução diretamente na malha fina), em geral, as soluções obtidas pelo método de primeira ordem mostraram-se mais acuradas. No entanto, confrontando as soluções multiescala, para os métodos de baixa e alta ordem, com a solução de referência global (i.e. solução "convergida") é evidente que os métodos de alta ordem conseguiram resultados significativamente superiores aos obtidos pelo método de primeira ordem. Como a solução multiescala converge para a solução obtida diretamente na malha fina (solução de referência multiescala) e os métodos de alta ordem possuem mais graus de liberdade, consequentemente produzem soluções mais acuradas.

Os resultados mostram que a metodologia proposta é capaz de produzir excelentes resultados, representando melhor a física dos problemas em relação aos métodos de primeira ordem. No entanto, é importante buscar na literatura por métodos e suavizadores mais sofisticados a fim de melhorar ainda mais o campo de velocidade para que os métodos de ordens mais elevadas ($ordem > 3$) consigam produzir soluções com acurácia esperada.

Vale ressaltar que, além da maior sensibilidade dos métodos de alta ordem em relação a

qualidade do campo de velocidade, o que resulta em soluções pobres do problema, a acurácia da solução também é afetada pela escolha das malhas, fina e grossa, algo comum a em alguns dos métodos multiescala. Essa dependência torna a definição das malhas uma tarefa delicada e pode levar um tempo considerável, dependendo do caso a ser simulado. Somados a isso, ainda existe o problema das oscilações espúrias presentes na solução obtida pelo método de ordem 3, que ainda encontra-se em investigação e espera-se ser solucionada junto com o problema de rigidez do poço ao adotar um esquema totalmente implícito.

Por fim, seguem algumas sugestões a serem exploradas em trabalhos futuros:

- Solucionar o problema das oscilações espúrias geradas nas soluções dos métodos de ordem 3, CPR(P2).
- Investigar e implementar métodos iterativos e suavizadores mais elaborados.
- Desenvolver e implementar a metodologia h-p adaptativo na metodologia proposta.
- Estender a metodologia proposta para resolver problemas de escoamento multifásico em modelos tridimensionais.

REFERÊNCIAS

- AAVATSMARK, I. et al. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. part i: Derivation of the methods. *SIAM Journal on Scientific Computing*, SIAM, v. 19, n. 5, p. 1700–1716, 1998. Citado na pag 16.
- ABOU-KASSEM, J. et al. *Advanced Petroleum Reservoir Simulations*. [S.l.]: Scrivener Publishing LLC, 2010. Citado na pag 22.
- AHMED, T. Reservoir engineering. *Handbook*. (2nd ed.). Houston, TX: Gulf Professional Publishing, 2001. Citado 2 vezes nas pag(s) 20 e 21.
- BARBOSA, L. et al. An iterative modified multiscale control volume method for the simulation of highly heterogeneous porous media flow. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Springer, v. 40, n. 2, p. 71, 2018. Citado 3 vezes nas pag(s) 15, 16 e 36.
- BARBOSA, L. M. C. Formulações multiescala localmente conservativas para a simulação de reservatórios de petróleo muito heterogêneos e anisotrópicos. Universidade Federal de Pernambuco, 2017. Citado na pag 16.
- BENZI, M. Preconditioning techniques for large linear systems: A survey. *Journal of Computational Physics*, v. 182, n. 54, p. 418–477, 2002. Citado na pag 17.
- BOSMA, S. et al. Multiscale finite volume method for discrete fracture modeling on unstructured grids (ms-dfm). *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 351, p. 145–164, 2017. Citado 2 vezes nas pag(s) 17 e 43.
- BROOKS, R. H.; COREY, A. T. Hydraulic properties of porous media. *Hydrology Papers*, Colorado State University, n. March, 1964. Citado na pag 22.
- CARVALHO, D. K. d. *Uma Formulação do Método dos Volumes Finitos com Estrutura de Dados por Aresta para a Simulação de Escoamentos em Meios Porosos*. Tese (Doutorado) — Tese de Doutorado, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, in Portuguese., 2005. Citado 4 vezes nas pag(s) 25, 26, 27 e 29.
- CAVALCANTE, T. d. M. *A finite volume scheme coupled with a hybrid-grid method for the 2-d simulation of two-phase flows in naturally fractured reservoirs*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2019. Citado na pag 25.
- CHEN, Q.-Y. et al. Enriched multi-point flux approximation for general grids. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 227, n. 3, p. 1701–1721, 2008. Citado na pag 16.
- CHEN, Z.; HOU, T. A mixed multiscale finite element method for elliptic problems with oscillating coefficients. *Mathematics of Computation*, v. 72, n. 242, p. 541–576, 2003. Citado na pag 15.
- CHEN, Z.; HUAN, G.; MA, Y. *Computational methods for multiphase flows in porous media*. [S.l.]: SIAM, 2006. v. 2. Citado 3 vezes nas pag(s) 22, 29 e 35.
- CHILDS, H. et al. Visit: An end-user tool for visualizing and analyzing very large data. *Scientific Discovery through Advanced Computing*, July 2011. Citado na pag 29.

CHRISTIE, M.; BLUNT, M. Tenth spe comparative solution project: A comparison of upscaling techniques. *SPE Reservoir Evaluation and Engineering*, v. 4, p. 308–317, 2001. Citado na pag 49.

CONTRERAS, F. et al. A cell-centered multipoint flux approximation method with a diamond stencil coupled with a higher order finite volume method for the simulation of oil–water displacements in heterogeneous and anisotropic petroleum reservoirs. *Computers & Fluids*, Elsevier, v. 127, p. 1–16, 2016. Citado 9 vezes nas pag(s) 16, 25, 26, 27, 31, 32, 33, 61 e 62.

CONTRERAS, F. R.; LYRA, P. R.; CARVALHO, D. K. de. A new multipoint flux approximation method with a quasi-local stencil (mpfa-ql) for the simulation of diffusion problems in anisotropic and heterogeneous media. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 70, p. 659–676, 2019. Citado na pag 16.

CORTINOVIS, D.; JENNY, P. Zonal multiscale finite-volume framework. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 337, p. 84–97, 2017. Citado na pag 15.

DIMOV, I.; FIDANOVA, S.; LIRKOV, I. *Numerical Methods and Applications: 8th International Conference, NMA 2014, Borovets, Bulgaria, August 20-24, 2014, Revised Selected Papers*. [S.l.]: Springer, 2015. v. 8962. Citado 2 vezes nas pag(s) 17 e 44.

EDWARDS, M. G.; ROGERS, C. F. Finite volume discretization with imposed flux continuity for the general tensor pressure equation. *Computational geosciences*, Springer, v. 2, n. 4, p. 259–290, 1998. Citado 2 vezes nas pag(s) 16 e 25.

ERTEKIN, T.; ABOU-KASSEM, J. H.; KING, G. R. *Basic applied reservoir simulation*. [S.l.]: Richardson, TX: Society of Petroleum Engineers, 2001. Citado 3 vezes nas pag(s) 21, 23 e 24.

EWING, R. E. *The mathematics of reservoir simulation*. [S.l.]: SIAM, 1983. Citado na pag 29.

EWING, R. E. *The mathematics of reservoir simulation*. [S.l.]: Society for Industrial Mathematics, 1984. v. 1. Citado 2 vezes nas pag(s) 24 e 27.

F., B.; REICHEL, L. A stable richardson iteration method for complex linear systems. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Springer-Verlag, n. 54, p. 225–242, 1988. Citado na pag 17.

FANCHI, J. R. *Principles of applied reservoir simulation*. [S.l.]: Gulf Professional Publishing, 2005. Citado 2 vezes nas pag(s) 23 e 24.

GALINDEZ-RAMIREZ, G. *Numerical simulation of two-phase flow in petroleum reservoirs using high-order CPR method coupled to a non-orthodox MPFA-D finite volume scheme*. Tese (Doutorado) — Tese de Doutorado, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife., 2018. Citado 3 vezes nas pag(s) 29, 30 e 34.

GALINDEZ-RAMIREZ, G. et al. Numerical simulation of two-phase flows in 2-d petroleum reservoirs using a very high-order cpr method coupled to the mpfa-d finite volume scheme. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Springer, v. 192, 2020. Citado 3 vezes nas pag(s) 45, 47 e 60.

GALINDEZ-RAMIREZ, G. et al. Numerical simulation of 1-d oil and water displacements in petroleum reservoirs using the spectral finite volume method. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Springer, v. 39, n. 7, p. 2687–2700, 2017. Citado 2 vezes nas pag(s) 18 e 47.

GAO, Z.; WU, J. A linearity-preserving cell-centered scheme for the heterogeneous and anisotropic diffusion equations on general meshes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley Online Library, v. 67, n. 12, p. 2157–2183, 2010. Citado 3 vezes nas pag(s) 16, 31 e 32.

GENUCHTEN, M. T. V. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils 1. *Soil science society of America journal*, Soil Science Society of America, v. 44, n. 5, p. 892–898, 1980. Citado na pag 22.

GEUZAIN, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: A 3-d finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 79, n. 11, p. 1309–1331, 2009. Citado na pag 29.

GONÇALVES, T. M. P. et al. Comparação entre o método da sobre-relaxação sucessiva, gauss-jacobi e gauss-seidel. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 6, n. 2, 2018. Citado na pag 40.

HÆGLAND, H. et al. Improved streamlines and time-of-flight for streamline simulation on irregular grids. *Advances in Water Resources*, Elsevier, v. 30, n. 4, p. 1027–1045, 2007. Citado na pag 33.

HAJIBEYGI, H. et al. Iterative multiscale finite-volume method. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 227, n. 19, p. 8604–8621, 2008. Citado na pag 17.

HELMIG, R. *Multiphase flow and transport processes in the subsurface*. [S.l.]: Springer Berlin, 1997. v. 6. Citado 3 vezes nas pag(s) 22, 24 e 25.

HESTHAVEN, J.; WARBURTON, T. Nodal discontinuous galerkin methods. *Texts in Applied Mathematics*, v. 54, 2008. Citado na pag 47.

HIRSCH, C. *Numerical computation of internal and external flows: the fundamentals of computational fluid dynamics*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2007. v. 1. Citado na pag 47.

HOU, T. Y.; WU, X.-H. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 134, n. 1, p. 169–189, 1997. Citado na pag 15.

HUYNH, H. A flux reconstruction approach to high-order schemes including discontinuous galerkin methods. *AIAA paper*, v. 4079, p. 2007, 2007. Citado 3 vezes nas pag(s) 18, 45 e 46.

JENNY, P.; LEE, S.; TCHELEPI, H. Adaptive fully implicit multi-scale finite-volume method for multi-phase flow and transport in heterogeneous porous media. *Journal of Computational Physics*, v. 217, n. 2, p. 627–641, 2006. Citado 2 vezes nas pag(s) 35 e 37.

JENNY, P.; LEE, S.; TCHELEPI, H. A. Multi-scale finite-volume method for elliptic problems in subsurface flow simulation. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 187, n. 1, p. 47–67, 2003. Citado na pag 16.

JUNQUEIRA, L. A. C. M. *Estudo de suavizadores para o método Multigrid algébrico baseado em wavelet*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2008. Citado 2 vezes nas pag(s) 17 e 38.

LYRA, P. R. M.; MORGAN, K. A review and comparative study of upwind biased schemes for compressible flow computations: Part ii: One dimensional higher-order schemes. *Archives of Computational Methods in Engineering - State of the Art Reviews*, v. 7, p. 333–377, 2000. ISSN 1886-1784. Citado na pag 47.

MAGRI, V. A. P. et al. Pré-condicionador multiescala algébrico aplicado à simulação de reservatórios de petróleo. 2015. Citado 3 vezes nas pag(s) 17, 40 e 41.

MATRINGE, S. F.; JUANES, R.; TCHELEPI, H. A. Robust streamline tracing for the simulation of porous media flow on general triangular and quadrilateral grids. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 219, n. 2, p. 992–1012, 2006. Citado na pag 33.

MØYNER, O.; LIE, K.-A. A multiscale restriction-smoothed basis method for high contrast porous media represented on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 304, p. 46–71, 2016. Citado 3 vezes nas pag(s) 16, 17 e 35.

MOYNER, O.; LIE, K.-A. et al. The multiscale finite volume method on unstructured grids. In: SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. *SPE Reservoir Simulation Symposium*. [S.l.], 2013. Citado na pag 16.

MØYNER, O.; LIE, K.-A. A multiscale restriction-smoothed basis method for high contrast porous media represented on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, v. 304, p. 46–71, 2016. ISSN 0021-9991. Citado 3 vezes nas pag(s) 35, 37 e 43.

PARK, J. S.; KIM, C. Hierarchical multi-dimensional limiting strategy for correction procedure via reconstruction. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 308, p. 57–80, 2016. Citado na pag 47.

PEACEMAN, D. W. *Fundamentals of numerical reservoir simulation*. [S.l.]: Elsevier, 1977. v. 6. Citado 5 vezes nas pag(s) 20, 24, 25, 26 e 27.

RAVIART, P.; THOMAS, J. A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems. *Mathematical Aspects of Finite Element Methods*, Springer, p. 292–315, 1977. Citado 2 vezes nas pag(s) 30 e 33.

RICHARDSON, L. F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations with application to the stress to a masonry dam. *Royal Society*, v. 210, p. 307–357, 1910. ISSN 0264-3952. Citado 2 vezes nas pag(s) 17 e 42.

ROSA, A. J.; CARVALHO, R. de S.; XAVIER, J. A. D. *Engenharia de reservatórios de petróleo*. [S.l.]: Interciência, 2006. Citado 3 vezes nas pag(s) 21, 23 e 24.

SAAD, Y. *Iterative methods for sparse linear systems*. [S.l.]: SIAM, 2000. Citado 2 vezes nas pag(s) 38 e 41.

SOUZA, A. C. d. R. *A MsCV Framework using a non-orthodox MPFA-D for the simulation of two-phase flows on truly unstructured grids*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2018. Citado 4 vezes nas pag(s) 29, 35, 36 e 37.

SOUZA, A. C. R. et al. A multiscale control volume framework using the multiscale restriction smooth basis and a non-orthodox multi-point flux approximation for the simulation of two-phase flows on truly unstructured grids. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Elsevier, v. 188, p. 106851, 2020. Citado 9 vezes nas pag(s) 15, 16, 36, 37, 38, 50, 51, 55 e 60.

SOUZA, M. R. *Simulação Numérica de Escoamento Bifásico em Reservatórios de Petróleo Heterogêneos e Anisotrópicos Utilizando um Método de Volumes Finitos Verdadeiramente Multidimensional com Aproximação de Alta Ordem*. Tese (Doutorado) — Tese de Doutorado, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, in Portuguese., 2015. Citado 2 vezes nas pag(s) 32 e 63.

SOUZA, M. R. et al. A higher-resolution flow-oriented scheme with an adaptive correction strategy for distorted meshes coupled with a robust mpfa-d method for the numerical simulation of two-phase flow in heterogeneous and anisotropic petroleum reservoirs. *SPE Journal*, Society of Petroleum Engineers, 2018. Citado na pag 47.

SRINIVASAN, G.; LIPNIKOV, K. On the reconstruction of darcy velocity in finite-volume methods. *Transport in porous media*, Springer, v. 96, n. 2, p. 337–351, 2013. Citado na pag 30.

THE MATHWORKS, INC. *MATLAB version 9.3.0.713579 (R2017b)*. Natick, Massachusetts, 2017. Citado na pag 29.

THOMAS, J. E. *Fundamentos de engenharia de petróleo*. [S.l.]: Interciência, 2001. Citado na pag 21.

TOWLER, B. F. Fundamental principles of reservoir engineering. Henry L. Doherty Memorial Fund of AIME, Society of Petroleum Engineers . . . , 2002. Citado 2 vezes nas pag(s) 21 e 22.

VIANA, E. O. *Utilização da perfilagem de poços para caracterização geofísica do Campo de Namorado*. Dissertação (B.S. thesis) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2017. Citado na pag 21.

WANG, Z.; GAO, H. A unifying lifting collocation penalty formulation including the discontinuous galerkin, spectral volume/difference methods for conservation laws on mixed grids. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 228, n. 21, p. 8161–8186, 2009. Citado na pag 18.

WANG, Z.; GAO, H.; HAGA, T. A unifying discontinuous formulation for hybrid meshes. *Adaptive High-Order Methods in Computational Fluid Dynamics*, Edited by ZJ Wang, World Scientific Publishing, World Scientific, 2011. Citado na pag 18.

WANG, Z. J. *Adaptive high-order methods in computational fluid dynamics*. [S.l.]: World Scientific, 2011. v. 2. Citado na pag 45.

ZHOU, H.; TCHELEPI, H. Operator-based multiscale method for compressible flow. *SPE Journal*, v. 13, n. 2, p. 267–273, 2008. Citado na pag 35.