



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE ELETRÔNICA E SISTEMAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

LUCAS ARAÚJO DE ALMEIDA

**APROXIMAÇÕES DE BAIXA COMPLEXIDADE PARA A TRANSFORMADA  
DISCRETA DE HARTLEY**

Recife

2019

LUCAS ARAÚJO DE ALMEIDA

**APROXIMAÇÕES DE BAIXA COMPLEXIDADE PARA A TRANSFORMADA  
DISCRETA DE HARTLEY**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Comunicações.

Orientador: Prof. Dr. Renato J. Cintra

Recife

2019

Catálogo na fonte  
Bibliotecário Gabriel Luz, CRB-4 / 2222

A447a Almeida, Lucas Araújo de  
Aproximações de baixa complexidade para a transformada discreta de  
Hartley / Lucas Araújo de Almeida – Recife, 2019.  
116 f.: figs., tabs., abrev. e siglas, símbolos.

Orientador: Prof. Dr. Renato José de Sobral Cintra.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG.  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2019.  
Inclui referências e apêndices.

1. Engenharia Elétrica. 2. Transformadas discretas. 3. DHT. 4.  
Transformadas aproximadas. 5. Hartley. 6. Reconhecimento Facial. 7. Filtros  
MACE. I. Cintra, Renato José de Sobral (Orientador). II. Título.

UFPE

621.3 CDD (22. ed.)

BCTG / 2021 - 53

LUCAS ARAÚJO DE ALMEIDA

**APROXIMAÇÕES DE BAIXA COMPLEXIDADE PARA A TRANSFORMADA DISCRETA  
DE HARTLEY**

Dissertação apresentada ao Programa de pós graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre em Engenharia Elétrica.

Aprovada em: 30 / 08 / 2019.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Renato José de Sobral Cintra (Orientador)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Vítor de Andrade Coutinho (Examinador Externo)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Raydonal Ospina Martínez (Examinadora Externo)  
Universidade Federal de Pernambuco

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho representa uma grande conquista para minha vida profissional e acadêmica. Eu sou extremamente grato a todos os familiares, amigos e professores que contribuíram para que o caminho até aqui fosse possível. Agradeço em especial:

- A minha mãe, Mercêdes Araújo, por sempre vibrar com todas as minhas conquistas e continuar me incentivando a buscar a minha melhor versão, sua dedicação foi determinante na minha formação como pessoa.
- Ao meu pai, Sérgio Almeida, por ser minha maior referência e estar sempre presente para me aconselhar qual trajetória seguir, seu empenho é fundamental para que eu atinja meus objetivos.
- A minha companheira, Makarena Portugal, por representar novamente o suporte de uma âncora e estar ao meu lado em todas as situações, sua cumplicidade é uma virtude de que tenho a fortuna e felicidade de desfrutar.
- Ao Prof. Dr. Renato J. Cintra, pela orientação concedida e disponibilidade em compartilhar seu vasto conhecimento, seu entusiasmo com a ciência é inspirador.

## RESUMO

As transformadas discretas ganharam destaque nas últimas décadas com a evolução dos sistemas digitais. A comunidade de processamento de sinais direcionou esforços ao desenvolvimento de algoritmos rápidos capazes de implementar as transformadas de modo mais eficiente do que na forma direta. A vasta pesquisa nessa área tem resultado em algoritmos com complexidade multiplicativa próxima da cota mínima teórica. Assim, as transformadas aproximadas surgiram como um artifício matemático para evitar operações de multiplicação em seu cômputo. A presente dissertação aborda aproximações de baixa complexidade para uma transformada ainda pouco explorada neste sentido, a transformada discreta de Hartley (DHT). Dois métodos de busca baseados na parametrização da matriz da DHT são propostos e implementados. O Método I utiliza a representação matricial da DHT em sua forma não fatorada, enquanto o método II faz uso das fatorações de Winograd e Cooley-Tukey para derivar aproximações já na forma de algoritmos rápidos. As aproximações são obtidas por meio da solução de um problema de otimização que avalia três funções objetivo. Essas funções são métricas de similaridade entre as aproximações e a transformada exata. Duas das funções objetivo são conhecidas na literatura: erro de energia total e desvio de ortogonalidade; e a terceira métrica, denominada erro de involução, é proposta neste trabalho. Os métodos de busca derivam, no total, 44 novas aproximações de comprimento  $N = 3, 5, 7, 8, 16, 32$ . Uma aplicação de reconhecimento facial utilizando filtros MACE no domínio de Fourier foi adaptada para o domínio de Hartley. As dezoito aproximações de comprimento  $N = 32$  obtidas foram submetidas ao sistema de verificação facial e comparadas com a transformada da DHT exata. As aproximações apresentaram uma média de taxa de erro entre 0,32% e 0,50%, tendo algumas superado a DHT exata, a qual obteve média de taxa de erro de 0,36%.

**Palavras-chave:** Transformadas discretas. DHT. Transformadas aproximadas. Hartley. Reconhecimento Facial. Filtros MACE.

## ABSTRACT

In recent decades, discrete transforms have received increasing attention with the evolution of digital systems. The signal processing community has focused on developing fast algorithms capable of efficiently computing discrete transforms. The extensive research in this area has resulted in algorithms with multiplicative complexity close to the theoretical minimum limit. Thus, the approximate transforms emerged as a mathematical tool to avoid multiplication operations on its computation. The present dissertation investigates low complexity approximations for a transform with incipient exploration in this sense, the discrete Hartley transform (DHT). Two search methods based on the parameterization of the DHT matrix are proposed and implemented. The first method uses the DHT matrix in its non-factored representation, whereas the second method makes use of Winograd and Cooley-Tukey factorizations to derive approximations with their fast algorithms. The approximations are obtained by solving an optimization problem that evaluates three objective functions. These functions are metrics of similarity between the approximations and the exact transform. Two of the considered metrics are known from the literature: total energy error and orthogonal deviation; and the third metric, called involution error, is proposed in this work. Both search methods derive a total of 44 new approximations of length  $N = 3, 5, 7, 8, 16, 32$ . A facial recognition application using MACE filters in Fourier domain was adapted to the Hartley domain. The 18 approximations for the 32-point DHT were submitted to the face verification system and compared with the exact DHT transform. The approximations presented an average of error rate between 0.32% and 0.50%, some exceeding the exact DHT, which obtained an average of error rate of 0.36%.

**Keywords:** Discrete transforms. DHT. Approximate transforms. Hartley. Facial recognition. MACE filters.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	– Exemplo de correlação de um filtro MACE com uma imagem impostora, à esquerda, e com um imagem autêntica, à direita. . . . .	81
Figura 2	– Região de lóbulos laterais, centrada no pico de correlação. . . . .	82
Figura 3	– Diagrama de blocos do sistema de verificação facial no domínio de Hartley. . . . .	82
Figura 4	– Funções de base da 2D DHT, à esquerda, e de uma aproximação bidimensional obtida a partir de $\hat{\mathbf{H}}_{7,1}^{(1)}$ , à direita, ambas de tamanho $7 \times 7$ . . . . .	83
Figura 5	– Amostras das imagens de um dos indivíduos da base de dados [1]. . . . .	84

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Aproximações da série BAS. . . . .	44
Tabela 2	– Transformadas aproximadas da DCT associadas ao algoritmo de Feig-Winograd e vetores $\alpha$ correspondentes. . . . .	47
Tabela 3	– Tempo de execução dos algoritmos de busca, em segundos, para cada comprimento e método. . . . .	60
Tabela 4	– Aproximações obtidas para a DHT de comprimento $N = 3$ e as figuras de mérito correspondentes. . . . .	62
Tabela 5	– Aproximações obtidas para a DHT de comprimento $N = 5$ e as figuras de mérito correspondentes. . . . .	62
Tabela 6	– Aproximações obtidas para a DHT de comprimento $N = 7$ e as figuras de mérito correspondentes. . . . .	63
Tabela 7	– Aproximações obtidas para a DHT de comprimento $N = 8$ e as figuras de mérito correspondentes. . . . .	64
Tabela 8	– Aproximações obtidas para a DHT de comprimento $N = 16$ e as figuras de mérito correspondentes. . . . .	64
Tabela 9	– Aproximações obtidas para a DHT de comprimento $N = 32$ e as figuras de mérito correspondentes. . . . .	65
Tabela 10	– Complexidade aritmética das transformadas de comprimento $N = 3$ . . . . .	67
Tabela 11	– Complexidade aritmética das transformadas de comprimento $N = 5$ . . . . .	67
Tabela 12	– Complexidade aritmética das transformadas de comprimento $N = 7$ . . . . .	68
Tabela 13	– Complexidade aritmética das transformadas de comprimento $N = 8$ . . . . .	69
Tabela 14	– Complexidade aritmética das transformadas de comprimento $N = 16$ . . . . .	69
Tabela 15	– Complexidade aritmética das transformadas de comprimento $N = 32$ . . . . .	69
Tabela 16	– Quantidade de aproximações obtidas para cada comprimento e método. . . . .	70
Tabela 17	– Todas as aproximações obtidas e as figuras de mérito correspondentes. . . . .	70
Tabela 18	– Complexidade aritmética das transformadas selecionadas. . . . .	72
Tabela 19	– Média e desvio padrão da EER, em porcentagem, dos sistemas construídos com 3 imagens de treinamento para cada indivíduo e transformada de comprimento 32. . . . .	87

Tabela 20 – Média e desvio padrão da EER, em porcentagem, dos sistemas construídos com 5 imagens de treinamento para cada indivíduo e transformada de comprimento 32. . . . .	89
---	----

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BAS	Bouguezel-Ahmad-Swamy
BDCT	DCT binária
BDHT	DHT binária
DCT	Transformada discreta do cosseno
DFT	Transformada discreta de Fourier
DHT	Transformada discreta de Hartley
EER	Taxa de erro igual ( <i>equal error rate</i> )
FFT	Transformada rápida de Fourier
FHT	Transformada rápida de Hartley
FMR	Taxa de correspondência falsa ( <i>false match rate</i> )
FNMR	Taxa de não correspondência falsa ( <i>false non-match rate</i> )
FW	Feig-Winograd
LO	Lengwehasatit e Ortega
MACE	Mínima energia de correlação média ( <i>minimum average correlation energy</i> )
MF	Filtro casado ( <i>matched filter</i> )
MRDCT	DCT arredondada modificada
PSR	Razão entre pico e lóbulos laterais ( <i>peak-to-sidelobe ratio</i> )
RDCT	DCT arredondada
RDHT	DHT arredondada
RF	Radiofrequência
SDCT	DCT sinalizada

SDHT	DHT sinalizada
SDF	Função discriminante sintética
WHT	Transformada de Walsh-Hadamard
2D DFT	Transformada discreta de Fourier bidimensional
2D DHT	Transformada discreta de Hartley bidimensional

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathcal{P}$	Conjunto de elementos de baixa complexidade
$\mathcal{P}_+$	Subconjunto dos elementos não negativos de $\mathcal{P}$
$N$	Comprimento de bloco da transformada
$j$	Unidade imaginária
$\Re(\cdot)$	Retorna a parte real
$\Im(\cdot)$	Retorna a parte imaginária
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\top$	Transposição de um vetor ou matriz
$*$	Conjugado
$\dagger$	Conjugado transposto
$\mathbf{x}$	Vetor ou matriz de entrada
$x_n$	$n$ -ésimo coeficiente do vetor $\mathbf{x}$
$x_{m,n}$	$(m, n)$ -ésimo elemento da matriz $\mathbf{x}$
$\mathbf{X}$	Vetor ou matriz transformado
$X_k$	$k$ -ésimo coeficiente do vetor $\mathbf{X}$
$X_{k,l}$	$(k, l)$ -ésimo elemento da matriz $\mathbf{X}$
$\mathbf{F}_N$	Representação matricial da DFT de comprimento $N$
$\mathbf{H}_N$	Representação matricial da DHT de comprimento $N$
$\mathcal{F}$	Representa o domínio de Fourier
$\mathcal{H}$	Representa o domínio de Hartley

$\mathbf{x}_e$	Parte par de $\mathbf{x}$
$\mathbf{x}_o$	Parte ímpar de $\mathbf{x}$
$\mathbf{x}_-$	Vetor $\mathbf{x}$ revertido
$\mathbf{x}_m$	Vetor $\mathbf{x}$ deslocado em $m$ pontos
$((a))_b$	Operação ( $a$ módulo $b$ )
$\otimes$	Convolução circular
$\mathbf{H}_N$	Representação matricial da DHT de comprimento $N$
$\mathbf{A}_N$	Representação matricial de uma transformada arbitrária de comprimento $N$
$\hat{\mathbf{A}}_N$	Aproximação matricial para $\mathbf{A}_N$
$\hat{\mathbf{X}}$	Vetor aproximado
$\mathbf{T}_N$	Matriz de baixa complexidade
$\mathbf{S}$	Matriz diagonal de ajuste para matriz $\mathbf{T}$ ortogonal
$\hat{\mathbf{S}}$	Matriz diagonal de ajuste generalizada para $\mathbf{T}$ não ortogonal
$\text{diag}_m(\cdot)$	Retorna uma matriz diagonal, cuja diagonal é igual a da matriz de entrada
$\text{diag}_v(\cdot)$	Retorna uma matriz diagonal, cuja diagonal é igual ao vetor de entrada
$\mathbf{C}_N$	Representação matricial da DCT de comprimento $N$
$\gamma_k$	Elementos de entrada da matriz $\mathbf{C}_8$
$\mathbf{I}_N$	Matriz identidade de ordem $N$
$\mathbf{P}$	Matriz identidade de permutação
$\text{sign}(\cdot)$	Função sinal
$\text{round}(\cdot)$	Função de arredondamento
$\lfloor \cdot \rfloor$	Função <i>floor</i>
$\boldsymbol{\alpha}$	Vetor de parâmetros

$\alpha_k$	Parâmetros do vetor $\alpha$
$L$	Quantidade de parâmetros do vetor $\alpha$
$\mathcal{P}_+^L$	Espaço de busca dos vetores $\alpha$
$\alpha^*$	Conjunto Pareto-ótimo dos vetores $\alpha$
$\hat{\mathbf{H}}_N$	Aproximação matricial para $\mathbf{H}_N$
$\epsilon(\cdot)$	Erro de energia total
$\ \cdot\ _F$	Norma de Frobenius
$\phi(\cdot)$	Desvio de ortogonalidade
$\delta(\cdot)$	Desvio de diagonalidade
$\lambda(\cdot)$	Erro de involução
$\otimes$	Operador produto de Kronecker
$\odot$	Operador produto de Hadamard
$\hat{\mathbf{H}}_{N,n}^{(M)}$	$n$ -ésima aproximação da DHT de comprimento $N$ ; obtida pelo método $M \in \{\text{I}, \text{II}\}$
$\mathbf{h}$	Filtro de correlação
$\mathbf{x}_q$	Imagem de teste
$\tau$	Limiar de similaridade
$\#(\cdot)$	Cardinalidade do conjunto de entrada
$s_i$	Indivíduos da base de dados

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>1.2</b>	<b>Estrutura do Documento</b> . . . . .	<b>20</b>
<b>2</b>	<b>TRANSFORMADAS DISCRETAS</b> . . . . .	<b>22</b>
<b>2.1</b>	<b>Transformada Discreta de Fourier</b> . . . . .	<b>22</b>
2.1.1	Propriedades da DFT . . . . .	25
<b>2.2</b>	<b>Transformada Discreta de Hartley</b> . . . . .	<b>27</b>
2.2.1	Propriedades da DHT . . . . .	28
<b>2.3</b>	<b>Transformada Discreta de Fourier Bidimensional</b> . . . . .	<b>30</b>
<b>2.4</b>	<b>Transformada Discreta de Hartley Bidimensional</b> . . . . .	<b>31</b>
<b>2.5</b>	<b>Algoritmos Rápidos da DHT</b> . . . . .	<b>32</b>
2.5.1	Cooley-Tukey . . . . .	33
2.5.2	Winograd . . . . .	37
<b>3</b>	<b>TRANSFORMADAS APROXIMADAS</b> . . . . .	<b>38</b>
<b>3.1</b>	<b>Aproximações para Transformadas Discretas</b> . . . . .	<b>39</b>
<b>3.2</b>	<b>Aproximações para a DCT</b> . . . . .	<b>41</b>
<b>3.3</b>	<b>Aproximações para a DHT</b> . . . . .	<b>48</b>
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA DE BUSCA DE APROXIMAÇÕES PARA A DHT BASEADA EM PARAMETRIZAÇÃO</b> . . . . .	<b>50</b>
<b>4.1</b>	<b>Método I: Parametrização da DHT Não Fatorada</b> . . . . .	<b>50</b>
<b>4.2</b>	<b>Método II: Parametrização da DHT Fatorada</b> . . . . .	<b>51</b>
4.2.1	Winograd . . . . .	52
4.2.2	Cooley-Tukey: Dizimação no Tempo . . . . .	53
<b>4.3</b>	<b>Problema de Otimização Multiobjetivo</b> . . . . .	<b>55</b>
4.3.1	Figuras de Mérito . . . . .	56
4.3.2	Proposição do Problema . . . . .	57
<b>5</b>	<b>NOVAS APROXIMAÇÕES PARA A DHT</b> . . . . .	<b>59</b>

<b>5.1</b>	<b>Aproximações Propostas para a DHT</b> . . . . .	<b>60</b>
5.1.1	Comprimentos Curtos Primos . . . . .	61
5.1.2	Comprimentos de Potências de Dois . . . . .	63
<b>5.2</b>	<b>Complexidade Computacional</b> . . . . .	<b>66</b>
5.2.1	Comprimentos Curtos Primos . . . . .	66
5.2.2	Comprimentos de Potências de Dois . . . . .	68
<b>5.3</b>	<b>Síntese dos Resultados</b> . . . . .	<b>70</b>
<b>6</b>	<b>RECONHECIMENTO FACIAL</b> . . . . .	<b>74</b>
<b>6.1</b>	<b>Filtros de Correlação</b> . . . . .	<b>76</b>
6.1.1	Filtro MACE . . . . .	77
<b>6.2</b>	<b>Filtros de Correlação no Domínio de Hartley</b> . . . . .	<b>79</b>
6.2.1	Filtro MACE no domínio de Hartley . . . . .	79
<b>6.3</b>	<b>Verificação Facial com Filtros MACE</b> . . . . .	<b>81</b>
<b>6.4</b>	<b>Experimento Computacional</b> . . . . .	<b>83</b>
6.4.1	Taxa de Erro Igual (EER) . . . . .	84
6.4.2	Resultados . . . . .	85
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>90</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>92</b>
	<b>APÊNDICE A – PARAMETRIZAÇÃO DA MATRIZ DA DHT EXATA</b>	<b>102</b>
	<b>APÊNDICE B – ALGORITMOS RÁPIDOS</b> . . . . .	<b>111</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O crescente uso de tecnologias digitais nas mais distintas áreas, entre elas reconhecimento de padrões [2, 3], processamento de voz [4, 5] e criptografia de imagem [6–8], demanda um contínuo avanço no âmbito de processamento de sinais [9]. O desenvolvimento de algoritmos cada vez mais sofisticados e de novas plataformas computacionais proporcionou a rápida evolução dos sistemas de processamento de sinais [10]. Nesse contexto, as transformadas discretas tornaram-se ferramentas fundamentais em diversas aplicações, tais como processamento de imagens [11, 12], solução de equações diferenciais [13, 14] e tratamento de sinais biomédicos [15, 16].

No início do século XIX, Jean Baptiste Joseph Fourier publicou um trabalho sobre a propagação de calor em corpos sólidos [17]. Nesse trabalho, foi desenvolvida uma técnica para decompor sinais periódicos em termos de funções trigonométricas, a qual é atualmente conhecida como série de Fourier. Os conceitos empregados nesse método foram estendidos para sinais aperiódicos por meio da Transformada de Fourier, que é correspondente à série de Fourier de um sinal com período tendendo a infinito [18].

Com a evolução dos sistemas digitais e a conseqüente necessidade de ferramentas passíveis de serem implementadas em computadores, surgiram as transformadas discretas, sendo a transformada discreta de Fourier (DFT) uma das pioneiras [19]. A DFT é utilizada em sistemas digitais para analisar sinais discretos de duração finita, desempenhando um relevante papel em várias áreas como séries temporais [20, 21], estimação espectral [22, 23] e *beamforming* [24, 25].

Em 1942, uma nova transformada integral foi apresentada por Ralph Vinton Lyon Hartley como uma variante da transformada de Fourier [26]. Tal transformada, atualmente denominada transformada de Hartley, representa uma alternativa para análise de sinais e possui uma relação direta com a transformada de Fourier. A transformada proposta possui a propriedade de mapear sinais de um domínio real em outro domínio também real, dispensando o emprego da aritmética complexa usualmente necessária na análise de Fourier para sinais reais. Uma particularidade da transformada de Hartley é que a sua transformação inversa é calculada de modo idêntico à transformação direta, exceto por um fator de escala, essa propriedade é definida como involução.

Uma versão discreta para a transformada de Hartley foi introduzida em 1983 por Ronald Newbold Bracewell [27]. A transformada discreta de Hartley (DHT) preserva as propriedades

de domínio espectral real e de involução presentes na transformada integral. Tais propriedades possibilitam a implementação da DHT com uma menor quantidade de componentes de *hardware* do que a DFT [28]. A DHT apresenta utilidade em diferentes contextos práticos, tais como convolução [29, 30], filtragem adaptativa [31, 32] e óptica [33–35].

A extensa utilização das transformadas discretas em aplicações físicas se deve a disponibilidade de algoritmos rápidos, que têm como principal objetivo a redução da complexidade computacional em relação a implementação das transformadas pela definição matemática [36]. Conseqüentemente, os algoritmos podem proporcionar uma redução considerável no intervalo de tempo necessário para o cômputo das transformadas discretas.

O número de operações de multiplicação, denominado de complexidade multiplicativa, normalmente é a variável que mais contribui para a complexidade computacional de um algoritmo implementado em *hardware*, pois estas operações são as que mais demandam consumo de energia, tempo de execução e área de circuito [37]. Portanto, ao se projetar um algoritmo rápido, procura-se reduzir principalmente a quantidade de operações de multiplicação.

A teoria da complexidade multiplicativa aplicada aos algoritmos usados em processamento de sinais foi investigada por Heideman em [38]. O número mínimo de operações de multiplicação que um algoritmo teoricamente pode atingir foi determinado para diversas transformadas discretas. Em tal trabalho, foi demonstrado que a complexidade multiplicativa da DHT é idêntica a da DFT, ou seja, o limite inferior de multiplicações é igual para as transformadas discretas de Hartley e de Fourier de mesmo comprimento.

O campo de pesquisa de algoritmos rápidos se desenvolveu rapidamente em função do leque de aplicações das transformadas discretas [36]. O projeto de algoritmos sofisticados restringiu as possibilidades de minimização da quantidade de multiplicações, uma vez que as complexidades multiplicativas se aproximaram e até alcançaram as cotas mínimas previstas em [38].

A transformada discreta do cosseno (DCT) é um exemplo de transformada cuja redução da sua complexidade multiplicativa se tornou particularmente difícil por meio de novos algoritmos. A DCT possui grande relevância na área de compactação de energia [39, 40], sendo amplamente utilizada em padrões de compressão de imagem e vídeo, tais como JPEG [41], MPEG [42], H.264/AVC [43] e HEVC [44]. Por isso, uma coleção de algoritmos rápidos foram propostos para a DCT [45–51]. A DCT de comprimento  $N = 8$ , em particular, teve sua cota

mínima teórica de multiplicações alcançada pelo algoritmo de Loeffler [50].

Embora os algoritmos rápidos proporcionem uma significativa redução da complexidade multiplicativa das transformadas discretas, as operações de multiplicação permanecem como um fator indesejado para a complexidade computacional. A implementação em *hardware* de multiplicações por números irracionais exige o uso de aritmética de ponto flutuante, que eleva o consumo de energia e tempo [52]. Na prática, a maioria das implementações é realizada em aritmética de ponto fixo para reduzir a complexidade computacional e o tempo de execução [40].

Posteriormente, surgiram métodos de aproximação como alternativas para avançar na redução do custo computacional. Tais métodos consistem em aproximar as matrizes que representam as transformadas discretas [53]. As transformadas aproximadas são projetadas com o intuito de preservar as propriedades matemáticas das transformadas exatas, de modo que o erro introduzido pela aproximação seja pequeno e os resultados obtidos sejam semelhantes ao da forma exata. As operações de multiplicação podem ser completamente eliminadas usando racionais diádicos (frações cujos denominadores são potências de dois) em aproximações baseadas em *lifting scheme* [54, 55]. Essa técnica permite substituir as multiplicações por adições e deslocamentos de *bits*, que são operações consideravelmente menos custosas.

Um outro método para obter transformadas aproximadas livres de multiplicações, consiste em projetar matrizes cujos elementos estejam contidos em um conjunto do tipo  $\mathcal{P} = \{0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 2\}$  [56]. Uma vez que as multiplicações por tais elementos podem ser executadas apenas por meio de deslocamentos de *bits*, o número de operações de multiplicação é reduzido a zero, sem que haja incremento na quantidade de adições.

Devido ao grande interesse científico na área de compressão de imagem e vídeo, diversas aproximações livres de multiplicações foram desenvolvidas para a DCT [56–66]. No entanto, apesar da expressiva redução da complexidade computacional que as transformadas aproximadas propiciam, muitas transformadas discretas seguem pouco exploradas nesse âmbito. Aproximações para a DHT, por exemplo, foram investigadas apenas em [63, 67]. Dessa forma, este trabalho propõe a busca de novas aproximações para a DHT.

## 1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é:

Projetar aproximações de baixa complexidade para a DHT de comprimentos curtos e comprimentos de potências de dois, equipadas com algoritmos rápidos. Objetiva-se demonstrar em um contexto de reconhecimento facial a aplicabilidade das aproximações a serem derivadas.

Para alcançar o objetivo geral proposto, os seguintes objetivos específicos são listados:

1. Realizar uma revisão de literatura da DHT e da DFT e de suas versões bidimensionais, apresentando definições e a relação existente entre estas transformadas.
2. Exibir os algoritmos de dizimação no tempo e dizimação na frequência de Cooley-Tukey e o algoritmo de Winograd, adaptados para a DHT.
3. Apresentar uma revisão sobre as aproximações existentes para a DCT e a DHT.
4. Propor métodos de busca de transformadas aproximadas para a DHT baseados em parametrização.
5. Derivar novas aproximações para a DHT de comprimento  $N = 3, 5, 7, 8, 16, 32$ .
6. Realizar um experimento computacional com as transformadas aproximadas de comprimento  $N = 32$  no contexto de reconhecimento facial, comparando o desempenho com o da DHT exata.

## 1.2 Estrutura do Documento

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma. No Capítulo 2, as transformadas de Fourier e Hartley são apresentadas. Nas Seções 2.1 e 2.2, a relação existente entre a DFT e DHT é demonstrada, bem como a representação matricial, a complexidade computacional e as principais propriedades dessas transformadas. Nas Seções 2.3 e 2.4, respectivamente, as versões bidimensionais da DFT e da DHT são definidas. Por fim, na Seção 2.5, são apresentados alguns dos algoritmos rápidos mais conhecidos para a transformada de Hartley, o de Winograd e os de dizimação no tempo e dizimação na frequência de Cooley-Tukey.

No Capítulo 3, são apresentados métodos conhecidos para aproximar transformadas discretas e algumas das aproximações existentes na literatura. Na Seção 3.1, demonstra-se como obter aproximações a partir de racionais diádicos ou de elementos no conjunto  $\mathcal{P}$  e são definidos os conceitos de ortogonalidade e ortonormalidade de matrizes utilizados neste trabalho. Nas Seções 3.2 e 3.3 são exibidas algumas aproximações para a DCT e as duas transformadas aproximadas para a DHT encontradas na literatura, respectivamente.

No Capítulo 4, são apresentados dois métodos baseados em parametrização para derivar novas aproximações da DHT. O primeiro método, descrito na Seção 4.1, utiliza a representação

matricial da DHT em sua forma não fatorada e o segundo, descrito na Seção 4.2, emprega fatorações associadas aos algoritmos de Winograd e de Cooley-Tukey. Na Seção 4.3, é descrito um problema de otimização multiobjetivo e são apresentadas as figuras de mérito empregadas para estimar a similaridade das aproximações em relação à transformada exata.

No Capítulo 5, os resultados da implementação da metodologia de busca de aproximações são apresentados para os comprimentos  $N = 3, 5, 7, 8, 16, 32$ . Na Seção 5.1, são exibidas as novas transformadas aproximadas, geradas como soluções do problema de otimização proposto. As métricas de desempenho dessas aproximações são apresentadas em conjunto com os vetores de parametrização correspondentes. A complexidade computacional de algumas das transformadas aproximadas é comparada com a complexidade da DHT exata na Seção 5.2. Uma síntese das aproximações derivadas neste trabalho e a quantidade de aproximações obtidas para cada comprimento e método são apontadas na Seção 5.3.

No Capítulo 6, as aproximações de comprimento  $N = 32$  são avaliadas no contexto de reconhecimento facial. Assim, um método de verificação facial baseado em filtros de correlação no domínio da frequência de Hartley é proposto, em que as aproximações para a DHT obtidas são estendidas para transformadas bidimensionais. Na Seção 6.1, são abordados alguns filtros de correlação básicos, com destaque para o filtro de mínima energia de correlação média (MACE - *minimum average correlation energy*). Na Seção 6.2, é demonstrada uma expressão para projetar filtros MACE no domínio de Hartley. Nas Seções 6.3 e 6.4, é apresentado um sistema de verificação facial utilizando filtros MACE e um experimento computacional é conduzido para avaliar o desempenho das transformadas aproximadas de comprimento  $N = 32$  em comparação com a DHT exata.

Por fim, no Capítulo 7, são apresentadas as conclusões e principais contribuições da presente dissertação, assim como sugestões para trabalhos futuros.

## 2 TRANSFORMADAS DISCRETAS

A análise espectral é um importante campo no âmbito de processamento de sinais, no qual a transformada de Fourier dispõe de uma ampla gama de aplicações [19]. A utilidade da DFT consiste em passar um sinal temporal para o domínio da frequência e assim analisar seu conteúdo espectral em termos de amplitude e fase [68]. Essa possibilidade, decorre do fato que os coeficientes do sinal no domínio de Fourier representam funções seno e cosseno em uma determinada frequência [10].

A relevância da transformada de Fourier na análise de séries temporais é indiscutível, porém a necessidade de uso de aritmética complexa é uma desvantagem inerente ao seu cômputo [29]. Enquanto a maioria dos sinais observados em aplicações práticas são reais, a transformação desses sinais para o domínio da frequência de Fourier produz valores complexos [68].

A transformada de Hartley foi proposta inicialmente como uma alternativa para analisar um dado sinal em função de suas senóides [26]. Essa transformada fornece as mesmas informações espectrais que a transformada de Fourier, com a vantagem de mapear sinais reais em um domínio transformado também real [69]. Entretanto, a transformada de Hartley permaneceu relativamente desconhecida por um longo período até ser reapresentada por Bracewell em sua forma discreta, a DHT [27].

Nas próximas seções, são definidas as transformadas de Fourier e de Hartley. A relação existente entre a DFT e DHT é apresentada, bem como a representação matricial e a complexidade computacional dessas transformadas. Em seguida, são exibidas as principais propriedades da transformada de Hartley, e as versões bidimensionais da DFT e da DHT são definidas. Por fim, são apresentados alguns dos algoritmos rápidos mais tradicionais para a DHT.

### 2.1 Transformada Discreta de Fourier

A transformada de Fourier originou-se a partir do trabalho desenvolvido por Fourier sobre a propagação de ondas de calor em 1807 [17]. Uma função  $x(t)$ , em que  $t \in (-\infty, \infty)$ , tem sua transformada de Fourier definida por:

$$X(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (2.1)$$

se a integral convergir para um número [70]. Neste trabalho, a unidade imaginária é denotada por  $j \triangleq \sqrt{-1}$ . Uma condição suficiente para a existência da transformada de Fourier é que  $x(t)$  seja absolutamente integrável, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (2.2)$$

A transformada  $X(\omega)$  é uma função contínua no domínio da frequência  $\omega$ , sendo única para um dado sinal  $x(t)$ . As funções  $x(t)$  e  $X(\omega)$  formam um par de transformadas, que é representado por  $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$ . Em geral, a transformada de Fourier é complexa e pode ser apresentada da seguinte forma:

$$X(\omega) = \Re(X(\omega)) + j\Im(X(\omega)), \quad (2.3)$$

em que  $\Re(\cdot)$  e  $\Im(\cdot)$  retornam a parte real e imaginária de seus argumentos.

A transformada inversa é dada por:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.4)$$

No contexto de processamento digital de sinais, um sinal pode ser considerado um vetor  $N$ -dimensional dado por  $\mathbf{x} = [x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{N-1}]^T \in \mathbb{R}^N$ , em que  $N$  é um inteiro positivo [10]. A transformada discreta de Fourier de  $\mathbf{x}$  é dada por um vetor  $\mathbf{X}$  de mesma dimensão, cujos elementos são:

$$X_k \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi nk/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.5)$$

A transformada inversa é dada por:

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi nk/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.6)$$

Deste modo, os vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{X}$  formam um par de transformadas, denotado por  $\mathbf{x} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{X}$ .

### Representação Matricial

A DFT, assim como outras diversas transformadas discretas, é uma transformação linear entre espaços de dimensão finita  $N$ . Portanto, o mapeamento do vetor  $\mathbf{x}$  no vetor  $\mathbf{X}$  pode ser efetuado por meio da seguinte operação de multiplicação matricial:

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}_N \cdot \mathbf{x}, \quad (2.7)$$

em que  $\mathbf{F}_N$  é a representação matricial da DFT de comprimento  $N$  dada por:

$$\mathbf{F}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \cdots & \omega_N^{(N-1)} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \cdots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{(N-1)} & \omega_N^{2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

em que  $\omega_N \triangleq e^{-j2\pi/N}$ .

### Complexidade Computacional

Para calcular os coeficientes da DFT, conforme as Equações 2.5 ou 2.7, são necessárias no máximo  $N^2$  multiplicações complexas e  $N(N-1)$  adições complexas [36]. Uma multiplicação complexa pode ser expressa por

$$A + jB = (C + jD) \cdot (E + jF), \quad (2.9)$$

portanto são realizadas as seguintes operações:

$$A = CE - DF, \quad (2.10a)$$

$$B = CF + DE, \quad (2.10b)$$

demandando um total de quatro multiplicações reais e duas adições reais. E, como cada adição complexa requer duas adições reais, o cálculo da DFT pela definição requer no máximo  $4N^2$  multiplicações reais e  $4N(N-1/2)$  adições reais.

As Equações 2.10 podem ser realizadas de outro modo:

$$A = (C - D)F + C(E - F), \quad (2.11a)$$

$$B = (C - D)F + D(E + F). \quad (2.11b)$$

Assim, como o termo  $(C - D)F$  é repetido por duas vezes, uma operação de multiplicação é evitada, sendo necessário realizar apenas três multiplicações reais. Contudo, o número de adições reais aumenta para cinco, o que ainda pode ser vantajoso, uma vez que as operações de multiplicação são computacionalmente mais custosas [37].

Os elementos da representação matricial da DFT são constantes, por isso, algumas operações necessárias para realizar uma multiplicação podem ser computadas previamente. No contexto das Equações 2.11, se  $E$  e  $F$  são elementos da matriz da DFT, as operações  $(E + F)$  e  $(E - F)$  não precisam ser calculadas repetidas vezes. Portanto, considerando esta última abordagem, são necessárias três multiplicações e três adições reais para efetuar uma multiplicação complexa. Desse modo, o cálculo da DFT de comprimento  $N$  exige no máximo  $3N^2$  multiplicações reais e  $5N(N - 2/5)$  adições reais.

### 2.1.1 Propriedades da DFT

A seguir, são apresentadas algumas das principais propriedades da DFT. Outras propriedades, bem como as demonstrações destas, podem ser encontradas em [10].

#### Linearidade

Sejam  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  dois vetores, que formam os pares de transformadas  $\mathbf{x} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{X}$  e  $\mathbf{y} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{Y}$ . Então,

$$a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} a\mathbf{X} + b\mathbf{Y}, \quad (2.12)$$

em que  $a, b \in \mathbb{R}$ .

#### Reversão no Tempo

Dados os vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{X}$  que formam o par de transformadas  $\mathbf{x} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{X}$ , então a reversão do sinal no tempo acarreta na reversão do sinal na frequência de Fourier:

$$\mathbf{x}_- \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{X}_-, \quad (2.13)$$

em que  $\mathbf{x}_- = [x_0 \ x_{N-1} \ x_{N-2} \ \dots \ x_2 \ x_1]^\top$  e  $\mathbf{X}_- = [X_0 \ X_{N-1} \ X_{N-2} \ \dots \ X_2 \ X_1]^\top$ .

#### Simetrias Par e Ímpar

Seja  $\mathbf{x}$  um vetor real, é possível decompor tal vetor do seguinte modo:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_e + \mathbf{x}_o, \quad (2.14)$$

em que  $\mathbf{x}_e$  e  $\mathbf{x}_o$  são as partes par e ímpar de  $\mathbf{x}$ , respectivamente, e são calculadas por:

$$\mathbf{x}_e = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_-), \quad (2.15a)$$

$$\mathbf{x}_o = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_-). \quad (2.15b)$$

Dado o par de transformadas  $\mathbf{x} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{X}$ . A DFT de  $\mathbf{x}_e$  é a parte real de  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{x}_e \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Re(\mathbf{X}), \quad (2.16)$$

e a DFT de  $\mathbf{x}_o$  é obtida a partir da parte imaginária de  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{x}_o \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\Im(\mathbf{X}). \quad (2.17)$$

### Deslocamento Circular no Tempo

Seja  $\mathbf{x} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{X}$  um par de transformadas, o deslocamento circular do vetor temporal em  $m$  pontos leva ao seguinte par de transformadas:

$$\mathbf{x}_m \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j2\pi mk/N} \mathbf{X}, \quad (2.18)$$

em que  $\mathbf{x}_m = [x_{((-m))_N} \ x_{((1-m))_N} \ \dots \ x_{((N-1-m))_N}]^T$  e  $((a))_b$  representa a operação ( $a$  módulo  $b$ ).

### Convolução Circular e Produto

Dados os vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , a convolução circular entre os dois vetores é definida como [10]:

$$\mathbf{x} \circledast \mathbf{y} = \sum_{m=0}^{N-1} x_m y_{((n-m))_N}. \quad (2.19)$$

Sejam  $\mathbf{x} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{X}$  e  $\mathbf{y} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{Y}$  os pares de transformadas obtidos com os vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , a DFT da convolução circular desses sinais é dada por:

$$\mathbf{x} \circledast \mathbf{y} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{X}\mathbf{Y}, \quad (2.20)$$

e a DFT do produto dos sinais é representada por:

$$\mathbf{xy} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{N} \mathbf{X} \circledast \mathbf{Y}. \quad (2.21)$$

### Teorema de Parseval

O Teorema de Parseval para a transformada discreta de Fourier é dado por:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2, \quad (2.22)$$

em que a energia do sinal nos domínios do tempo e da frequência é preservada.

## 2.2 Transformada Discreta de Hartley

Em 1942, uma transformada integral foi introduzida por Hartley como uma alternativa mais simétrica para a Análise de Fourier [26]. Tal transformada, posteriormente denominada de Transformada de Hartley, é definida por:

$$X(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \text{cas}(\omega t) dt, \quad (2.23)$$

em que  $\text{cas}(t) \triangleq \cos(t) + \text{sen}(t)$ . A sua transformada inversa é dada por:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \text{cas}(\omega t) dt. \quad (2.24)$$

O par de transformadas  $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{H}} X(\omega)$ , definido nas Equações 2.23 e 2.24, é uma involução, ou seja, as relações direta e inversa são as mesmas a menos de um fator de escala. Além disso, o espectro de Hartley de um sinal real é também real, ao contrário do espectro de Fourier, que geralmente é complexo para sinais reais.

Assim como ocorreu com a transformada de Fourier, também foi proposta uma versão discreta para a transformada de Hartley [27]. A transformada discreta de Hartley e sua inversa formam o par de transformadas  $\mathbf{x} \xleftrightarrow{\mathcal{H}} \mathbf{X}$ , definido pelas seguintes expressões [27]:

$$X_k \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} x_n \text{cas} \left( \frac{2\pi nk}{N} \right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.25)$$

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \text{cas} \left( \frac{2\pi nk}{N} \right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.26)$$

A DHT de um sinal real pode ser obtida a partir de sua DFT. Para diferenciar os sinais transformados e os seus coeficientes, quando houver menção a ambos os domínios, os símbolos  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{F}$  sobrescritos serão utilizados para indicar Hartley e Fourier, respectivamente.

As Equações 2.25 e 2.5 podem ser reescritas como:

$$X_k^{\mathcal{H}} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \left[ \cos \left( \frac{2\pi nk}{N} \right) + \text{sen} \left( \frac{2\pi nk}{N} \right) \right] e \quad (2.27)$$

$$X_k^{\mathcal{F}} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \left[ \cos \left( \frac{2\pi nk}{N} \right) - j \text{sen} \left( \frac{2\pi nk}{N} \right) \right], \quad (2.28)$$

em que  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ . Assim, é possível deduzir que:

$$\mathbf{X}^{\mathcal{H}} = \Re(\mathbf{X}^{\mathcal{F}}) - \Im(\mathbf{X}^{\mathcal{F}}). \quad (2.29)$$

Por outro lado, a DFT também pode ser calculada por meio da DHT, uma vez que:

$$\mathbf{X}^{\mathcal{F}} = \mathbf{X}_e^{\mathcal{H}} - j\mathbf{X}_o^{\mathcal{H}}, \quad (2.30)$$

em que  $\mathbf{X}_e$  e  $\mathbf{X}_o$  são as partes par e ímpar de  $\mathbf{X}$ , obtidas conforme a Equação 2.15.

### Representação Matricial

A transformação de um sinal de entrada  $\mathbf{x}$  para o domínio espectral de Hartley pode ser realizada por meio da seguinte multiplicação matricial:

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}_N \cdot \mathbf{x}, \quad (2.31)$$

em que a matriz da DHT é dada por:

$$\mathbf{H}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & h_{1,1} & h_{1,1} & \cdots & h_{1,N-1} \\ 1 & h_{2,1} & h_{2,2} & \cdots & h_{2,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & h_{N-1,1} & h_{N-1,2} & \cdots & h_{N-1,N-1} \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

em que  $h_{n,k} \triangleq \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)$ .

### Complexidade Computacional

Para calcular a transformada discreta de Hartley pela definição da Equação 2.25, são necessárias no máximo  $N^2$  multiplicações reais e  $N(N - 1)$  adições reais. Inspeccionando a representação matricial da DHT, percebe-se que a primeira linha e a primeira coluna possuem apenas elementos 1, que não contribuem para o número de multiplicações. A depender do comprimento de bloco da transformada, existem outros elementos na matriz que permitem a redução de operações aritméticas.

#### 2.2.1 Propriedades da DHT

A seguir, são apresentadas algumas das principais propriedades da DHT. Outras propriedades, bem como as demonstrações destas, podem ser encontradas em [28].

### Linearidade

Sejam  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  dois vetores, que formam os pares de transformadas  $\mathbf{x} \xleftrightarrow{\mathcal{H}} \mathbf{X}$  e  $\mathbf{y} \xleftrightarrow{\mathcal{H}} \mathbf{Y}$ . Então,

$$a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \xleftrightarrow{\mathcal{H}} a\mathbf{X} + b\mathbf{Y}, \quad (2.33)$$

em que  $a, b \in \mathbb{R}$ .

### Reversão no Tempo

Dados os vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{X}$  que formam o par de transformadas  $\mathbf{x} \xleftrightarrow{\mathcal{H}} \mathbf{X}$ , então a reversão do sinal no tempo acarreta na reversão do sinal na frequência de Hartley:

$$\mathbf{x}_- \xleftrightarrow{\mathcal{H}} \mathbf{X}_-, \quad (2.34)$$

em que  $\mathbf{x}_- = [x_0 \ x_{N-1} \ x_{N-2} \ \dots \ x_2 \ x_1]^\top$  e  $\mathbf{X}_- = [X_0 \ X_{N-1} \ X_{N-2} \ \dots \ X_2 \ X_1]^\top$ .

### Simetrias Par e Ímpar

Dado o par de transformadas  $\mathbf{x} \xleftrightarrow{\mathcal{H}} \mathbf{X}$ , em que  $\mathbf{x}$  é real. A DHT de  $\mathbf{x}_e$  é a parte par de  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{x}_e \xleftrightarrow{\mathcal{H}} \mathbf{X}_e, \quad (2.35)$$

e a DHT de  $\mathbf{x}_o$  é a parte ímpar de  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{x}_o \xleftrightarrow{\mathcal{H}} \mathbf{X}_o. \quad (2.36)$$

### Deslocamento Circular no Tempo

Seja  $\mathbf{x} \xleftrightarrow{\mathcal{H}} \mathbf{X}$  um par de transformadas, o deslocamento circular da sequência temporal em  $m$  pontos leva ao seguinte par de transformadas:

$$\mathbf{x}_m \xleftrightarrow{\mathcal{H}} \cos\left(\frac{2\pi mk}{N}\right) \mathbf{X} + \text{sen}\left(\frac{2\pi mk}{N}\right) \mathbf{X}_-. \quad (2.37)$$

### Convolução Circular e Produto

Sejam  $\mathbf{x} \xleftrightarrow{\mathcal{H}} \mathbf{X}$  e  $\mathbf{y} \xleftrightarrow{\mathcal{H}} \mathbf{Y}$  os pares de transformadas obtidos com os vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , a DHT da convolução circular desses sinais é dada por:

$$\mathbf{x} \circledast \mathbf{y} \xleftrightarrow{\mathcal{H}} \frac{1}{2} (\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{X}_-\mathbf{Y}_- + \mathbf{X}_-\mathbf{Y} + \mathbf{X}\mathbf{Y}_-), \quad (2.38)$$

e a DHT do produto dos sinais é representada por:

$$\mathbf{xy} \xrightarrow{\mathcal{H}} \frac{1}{2N} (\mathbf{X} \circledast \mathbf{Y} - \mathbf{X}_- \circledast \mathbf{Y}_- + \mathbf{X}_- \circledast \mathbf{Y} + \mathbf{X} \circledast \mathbf{Y}_-). \quad (2.39)$$

### Teorema de Parseval

O Teorema de Parseval para a transformada discreta de Hartley é dado por:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2, \quad (2.40)$$

em que a energia do sinal nos domínios do tempo e da frequência é preservada.

### 2.3 Transformada Discreta de Fourier Bidimensional

No contexto de processamento de imagens digitais, em que uma imagem discreta é representada por uma matriz de dimensão  $M \times N$ :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \cdots & x_{0,N-1} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \cdots & x_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{M-1,0} & x_{M-1,1} & \cdots & x_{M-1,N-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{M \times N}, \quad (2.41)$$

a transformada discreta de Fourier bidimensional (2D DFT) de  $\mathbf{x}$  é dada por uma matriz  $\mathbf{X}$  de mesma dimensão, cujos elementos são [71]:

$$X_{k,l} \triangleq \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x_{m,n} e^{-j2\pi(km/M + nl/N)}, \quad (2.42)$$

em que  $k = 0, 1, \dots, M - 1$  e  $l = 0, 1, \dots, N - 1$ .

A transformada de Fourier bidimensional é separável em transformadas de Fourier unidimensionais. A equação anterior pode ser reescrita como:

$$X_{k,l} \triangleq \sum_{m=0}^{M-1} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x_{m,n} e^{-j2\pi nl/N} \right] e^{-j2\pi km/M}. \quad (2.43)$$

Dessa forma, é possível computar a 2D DFT de uma imagem aplicando a DFT às linhas e, em seguida, às colunas do resultado [71]. Na forma matricial, a 2D DFT pode ser calculada por meio da seguinte operação:

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}_M \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{F}_N, \quad (2.44)$$

em que a matriz  $\mathbf{F}$  foi definida na Equação 2.8.

## 2.4 Transformada Discreta de Hartley Bidimensional

A transformada discreta de Hartley bidimensional (2D DHT) de uma imagem  $\mathbf{x}$  de dimensão  $M \times N$  é uma matriz  $\mathbf{X}$  com coeficientes definidos por [72]:

$$X_{k,l} \triangleq \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x_{m,n} \operatorname{cas} \left[ 2\pi \left( \frac{km}{M} + \frac{nl}{N} \right) \right], \quad (2.45)$$

em que  $k = 0, 1, \dots, M - 1$  e  $l = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Ao contrário da transformada de Fourier, o núcleo da transformada de Hartley bidimensional não é separável em um único produto de fatores. Portanto, a 2D DHT não pode ser computada por meio da transformada das linhas e, seguidamente, das colunas [72].

A aplicação da identidade trigonométrica

$$\operatorname{cas}(a+b) = \frac{1}{2} [\operatorname{cas}(a) \operatorname{cas}(b) + \operatorname{cas}(-a) \operatorname{cas}(b) + \operatorname{cas}(a) \operatorname{cas}(-b) - \operatorname{cas}(-a) \operatorname{cas}(-b)] \quad (2.46)$$

na Equação 2.45 conduz à seguinte expressão:

$$\begin{aligned} X_{k,l} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x_{m,n} \operatorname{cas} \left( \frac{2\pi nl}{N} \right) \right] \operatorname{cas} \left( \frac{2\pi km}{M} \right) \right. \\ + \sum_{m=0}^{M-1} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x_{m,n} \operatorname{cas} \left( \frac{2\pi nl}{N} \right) \right] \operatorname{cas} \left( \frac{-2\pi km}{M} \right) \\ + \sum_{m=0}^{M-1} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x_{m,n} \operatorname{cas} \left( \frac{-2\pi nl}{N} \right) \right] \operatorname{cas} \left( \frac{2\pi km}{M} \right) \\ \left. - \sum_{m=0}^{M-1} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x_{m,n} \operatorname{cas} \left( \frac{-2\pi nl}{N} \right) \right] \operatorname{cas} \left( \frac{-2\pi km}{M} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Deste modo, o cálculo da 2D DHT pode ser efetuado por meio da seguinte operação matricial:

$$\mathbf{X} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{H}_M \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{H}_N + \mathbf{H}_M^{(c)} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{H}_N + \mathbf{H}_M \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{H}_N^{(c)} - \mathbf{H}_M^{(c)} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{H}_N^{(c)} \right), \quad (2.48)$$

em que  $\mathbf{H}$  foi definida na Equação 2.32 e  $\mathbf{H}^{(c)}$  é uma permutação da matriz  $\mathbf{H}$ , de modo que as colunas estão em ordem reversa, exceto pela primeira coluna.

A expressão anterior para o cálculo da 2D DHT pode ser reapresentada como:

$$\mathbf{X} = \frac{1}{2} \left[ \left( \mathbf{H}_M + \mathbf{H}_M^{(c)} \right) \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{H}_N + \left( \mathbf{H}_M - \mathbf{H}_M^{(c)} \right) \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{H}_N^{(c)} \right]. \quad (2.49)$$

Utilizando como exemplo uma imagem  $\mathbf{x}$  de dimensão  $4 \times 4$ , a sua transformada no domínio de Hartley é dada por:

$$\mathbf{X} = \frac{1}{2} \left[ \left( \mathbf{H}_4 + \mathbf{H}_4^{(c)} \right) \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{H}_4 + \left( \mathbf{H}_4 - \mathbf{H}_4^{(c)} \right) \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{H}_4^{(c)} \right], \quad (2.50)$$

em que

$$\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_4^{(c)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

As Equações 2.29 e 2.30, que relacionam a DHT com a DFT, também servem para relacionar a 2D DHT com a 2D DFT. Essa relação fica evidente ao se expandir as Equações 2.45 e 2.42 em função de senos e cossenos:

$$X_{k,l}^{\mathcal{H}} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x_{m,n} \left[ \cos\left(\frac{2\pi km}{M}\right) \cos\left(\frac{2\pi nl}{N}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi km}{M}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nl}{N}\right) + \cos\left(\frac{2\pi km}{M}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nl}{N}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi km}{M}\right) \cos\left(\frac{2\pi nl}{N}\right) \right], \quad (2.51)$$

$$X_{k,l}^{\mathcal{F}} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x_{m,n} \left\{ \cos\left(\frac{2\pi km}{M}\right) \cos\left(\frac{2\pi nl}{N}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi km}{M}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nl}{N}\right) - j \left[ \cos\left(\frac{2\pi km}{M}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nl}{N}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi km}{M}\right) \cos\left(\frac{2\pi nl}{N}\right) \right] \right\}. \quad (2.52)$$

em que  $k = 0, 1, \dots, M - 1$  e  $l = 0, 1, \dots, N - 1$ .

## 2.5 Algoritmos Rápidos da DHT

Um algoritmo rápido é um método para realizar uma operação matemática de modo computacionalmente mais eficiente [36]. A complexidade e eficiência de um algoritmo depende de uma série de parâmetros, que por vezes são difíceis de serem mensurados [36]. No contexto das transformadas discretas, o desempenho dos algoritmos rápidos é normalmente estimado em função do número de operações de adição e multiplicação, ou seja, a complexidade computacional de um algoritmo é avaliada pela complexidade aritmética [73].

As operações de multiplicação contribuem mais que as de adição para o tempo de execução e consumo de energia em implementações de algoritmos [37]. Dessa forma, os esforços no desenvolvimento de algoritmos rápidos são usualmente direcionados para a redução da complexidade multiplicativa, mesmo que em algumas situações seja necessário incrementar a complexidade aditiva [54].

A teoria da complexidade multiplicativa foi bem explorada por Heideman em [38] e se destina a várias transformadas discretas usadas em processamento de sinais. Em tal trabalho,

determinou-se o número mínimo de multiplicações para o cálculo de transformadas discretas de Fourier de comprimento  $N$ . Também foi comprovado que a DFT e a DHT são sistemas equivalentes em termos de complexidade multiplicativa, possuindo o mesmo limite inferior de operações de multiplicação. Em consequência, os algoritmos desenvolvidos para a DFT podem ser adaptados para a DHT [74].

Algoritmos para o cômputo da DFT são genericamente denominados de transformada rápida de Fourier (FFT). A maioria desses algoritmos possui uma versão correspondente para o cálculo da DHT [74], chamados de transformada rápida de Hartley (FHT). A seguir, são apresentados os algoritmos de dizimação no tempo e dizimação na frequência de Cooley-Tukey [75] e o algoritmo de Winograd [76], adaptados para a DHT.

A função  $\text{cas}(\cdot)$ , núcleo da transformada de Hartley, é bastante utilizada e manipulada algebricamente na próxima seção. Por isso, algumas de suas identidades trigonométricas são aqui exibidas:

$$\text{cas}(a + b) = \text{cas}(a) \text{cas}(b) - 2 \text{sen}(a) \text{sen}(b), \quad (2.53a)$$

$$\text{cas}(a + b) = \text{cas}(a) \cos(b) + \text{cas}(-a) \text{sen}(b), \quad (2.53b)$$

$$\text{cas}(-a) = \text{cas}(a) - 2 \text{sen}(a). \quad (2.53c)$$

### 2.5.1 Cooley-Tukey

Os algoritmos rápidos para transformadas discretas passaram a ter destaque a partir do trabalho desenvolvido por Cooley e Tukey em 1965 [75]. O algoritmo proposto consiste em realizar uma mudança de índices da DFT, de modo que uma transformada unidimensional seja mapeada em uma transformada bidimensional. Assim, uma transformada de comprimento composto  $N = LK$  pode ser decomposta em  $L$  transformadas de comprimento  $K$  e  $K$  transformadas de comprimento  $L$ . Um fato notável é que essa técnica já havia sido desenvolvida por Carl Friedrich Gauss ainda no século XIX, porém sua contribuição permaneceu despercebida por muitos anos, tendo sido publicada somente após ser redescoberta por Cooley e Tukey [77].

Uma versão do algoritmo de Cooley-Tukey para a DHT foi apresentada em [74]. Uma reindexação da Equação 2.25 é realizada da seguinte forma:

$$n = n_1 + Ln_2, \quad (2.54a)$$

$$k = k_1 + Kk_2, \quad (2.54b)$$

em que  $0 \leq n_1, k_2 < L$ ,  $0 \leq n_2, k_1 < K$  e  $N = LK$  é o comprimento da transformada. Desse modo, obtém-se:

$$X_{k_1+Kk_2} = \sum_{n_1=0}^{L-1} \sum_{n_2=0}^{K-1} x_{n_1+Ln_2} \operatorname{cas} \left( \frac{2\pi}{N} (n_1 + Ln_2) (k_1 + Kk_2) \right). \quad (2.55)$$

Fazendo uso de identidades trigonométricas a Equação 2.55 é expressa por:

$$\begin{aligned} X_{k_1+Kk_2} = \sum_{n_1=0}^{L-1} \sum_{n_2=0}^{K-1} x_{n_1+Ln_2} & \left[ \operatorname{cas} \left( \frac{2\pi}{N} n_1 k_1 \right) \operatorname{cas} \left( \frac{2\pi}{K} n_2 k_1 \right) \operatorname{cas} \left( \frac{2\pi}{L} n_1 k_2 \right) \right. \\ & - 2 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{K} n_2 k_1 \right) \cos \left( \frac{2\pi}{L} n_1 k_2 \right) \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{N} n_1 k_1 \right) \\ & - 2 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{K} n_2 k_1 \right) \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{L} n_1 k_2 \right) \cos \left( \frac{2\pi}{N} n_1 k_1 \right) \\ & - 2 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{K} n_2 k_1 \right) \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{L} n_1 k_2 \right) \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{N} n_1 k_1 \right) \\ & \left. - 2 \cos \left( \frac{2\pi}{K} n_2 k_1 \right) \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{L} n_1 k_2 \right) \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{N} n_1 k_1 \right) \right]. \quad (2.56) \end{aligned}$$

Para escolhas específicas, como  $L = 2$  ou  $K = 2$ , elimina-se alguns termos do somatório acima. Em seguida, são apresentados os casos particulares de dizimação no tempo e dizimação na frequência, em que os algoritmos fazem uso da decomposição do sinal temporal e do sinal transformado, respectivamente.

### Dizimação no Tempo

Uma decomposição para transformadas com comprimento de bloco  $N = 2^M$  foi proposta por Bracewell em [78]. Adotando  $L = 2$  e  $K = N/2$ , a Equação 2.56 torna-se:

$$X_{k_1+\frac{N}{2}k_2} = \sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n_2} \operatorname{cas} \left( \frac{2\pi}{N} 2n_2 k_1 \right) + (-1)^{k_2} \sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n_2+1} \operatorname{cas} \left( \frac{2\pi}{N} (2n_2 + 1) k_1 \right). \quad (2.57)$$

Fazendo as substituições  $k_1 = k - \frac{N}{2}k_2$  e  $n_2 = n$ , conduz à seguinte equação:

$$X_k = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n} \operatorname{cas} \left( \frac{2\pi}{N} 2nk \right) + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n+1} \operatorname{cas} \left( \frac{2\pi}{N} (2n + 1) k \right). \quad (2.58)$$

Utilizando no segundo somatório a propriedade apresentada na Equação 2.53b, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 X_k = & \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n} \operatorname{cas} \left( \frac{2\pi}{N/2} nk \right) + \\
 & \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n+1} \operatorname{cas} \left( \frac{2\pi}{N/2} nk \right) \cos \left( \frac{2\pi}{N} k \right) + \\
 & \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n+1} \operatorname{cas} \left( \frac{2\pi}{N/2} n (N - k) \right) \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{N} k \right).
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Na expressão acima, o vetor  $\mathbf{x}$  de comprimento  $N$  é separado em dois vetores menores,  $x_{2n}$  e  $x_{2n+1}$ , de comprimento  $\frac{N}{2}$ , cujos elementos são as amostras de índice par e ímpar, respectivamente. A Equação 2.59 pode ser reescrita de outra forma:

$$X_k = X_k^{(2n)} + X_k^{(2n+1)} \cos \left( \frac{2\pi}{N} k \right) + X_{N-k}^{(2n+1)} \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{N} k \right), \tag{2.60}$$

em que o primeiro termo após a igualdade corresponde à DHT dos componentes pares do vetor  $\mathbf{x}$ , o segundo termo é a DHT dos componentes ímpares multiplicada por fatores de ajuste, e o último termo é a DHT dos componentes ímpares revertida e também multiplicada por fatores de ajuste.

As complexidades multiplicativa e aditiva da transformada discreta de Hartley para comprimentos pares são dadas por:

$$M_R = M_R \left( \frac{N}{2} \right) + N, \tag{2.61a}$$

$$A_R = A_R \left( \frac{N}{2} \right) + 2N. \tag{2.61b}$$

Quando o comprimento do bloco é do tipo  $N = 2^M$ , as transformadas de comprimento  $\frac{N}{2}$  podem ser decompostas em outras duas transformadas de comprimento  $\frac{N}{4}$ , assim, a decomposição é aplicada recursivamente até que sejam obtidas transformadas de comprimento 2. Resolvendo as Equações 2.61, obtém-se as seguintes cotas superiores:

$$M_R = N \log_2 N, \tag{2.62a}$$

$$A_R = 2N \log_2 N. \tag{2.62b}$$

Algumas multiplicações e adições ainda podem ser evitadas na implementação deste algoritmo de dizimação no tempo, sendo possível reduzir as complexidades aritméticas para [74]:

$$M_R = N \log_2 N - 3N + 4, \quad (2.63a)$$

$$A_R = \frac{3}{2}N \log_2 N - \frac{3}{2}N + 2. \quad (2.63b)$$

### Dizimação na Frequência

A dizimação na frequência é o oposto da dizimação no tempo, em termos dos fatores de decomposição do comprimento  $N$ . Para comprimentos de bloco  $N = 2^M$ , atribui-se  $L = N/2$  e  $K = 2$  e a Equação 2.56 torna-se [74]:

$$X_{2k_2+k_1} = \sum_{n_1=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[ x_{n_1} + (-1)^{k_1} x_{n_1+\frac{N}{2}} \right] \text{cas} \left( \frac{2\pi}{N} n_1 (k_1 + 2k_2) \right). \quad (2.64)$$

As componentes de índice par do vetor  $\mathbf{X}$  no domínio de Hartley são obtidas quando  $k_1 = 0$  e substituindo  $n_1 = n$  e  $k_2 = k$ :

$$X_{2k} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left( x_n + x_{n+\frac{N}{2}} \right) \text{cas} \left( \frac{2\pi}{N/2} nk \right). \quad (2.65)$$

Para  $k_1 = 1$ , obtém-se as componentes ímpares do vetor transformado  $\mathbf{X}$ . Substituindo  $k_2 = k$  e usando a propriedade apresentada na Equação 2.53a, tem-se que:

$$\begin{aligned} X_{2k+1} = & \sum_{n_1=0}^{\frac{N}{2}-1} \left( x_{n_1} - x_{n_1+\frac{N}{2}} \right) \text{cas} \left( \frac{2\pi}{N/2} n_1 k \right) \cos \left( \frac{2\pi}{N} n_1 \right) + \\ & \sum_{n_1=0}^{\frac{N}{2}-1} \left( x_{n_1} - x_{n_1+\frac{N}{2}} \right) \text{cas} \left( \frac{2\pi}{N/2} (N - n_1) k \right) \text{sen} \left( \frac{2\pi}{N} n_1 \right). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Substituindo  $n_1 = n$  no primeiro somatório e  $n_1 = \frac{N}{2} - n$  no segundo somatório, a expressão torna-se:

$$X_{2k+1} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[ \left( x_n - x_{n+\frac{N}{2}} \right) \cos \left( \frac{2\pi}{N} n \right) + \left( x_{\frac{N}{2}-n} - x_{N-n} \right) \text{sen} \left( \frac{2\pi}{N} n \right) \right] \text{cas} \left( \frac{2\pi}{N/2} nk \right). \quad (2.67)$$

Os somatórios apresentados nas Equações 2.65 e 2.66 são transformadas discretas de Hartley de comprimento  $\frac{N}{2}$ . Cada uma dessas transformadas pode ser decomposta de modo

similar em transformadas menores. As complexidades multiplicativa e aditiva para este algoritmo são idênticas às complexidades do algoritmo de dizimação no tempo. A escolha de um desses algoritmos em detrimento do outro deve ser baseada na viabilidade da implementação, uma vez que o desempenho deles é o mesmo.

### 2.5.2 Winograd

O método proposto por Winograd consiste em calcular a DFT para pequenos comprimentos de bloco [76]. No algoritmo de Winograd, a matriz da DFT é expressa por [76]:

$$\mathbf{F}_N = \mathbf{CDA}, \quad (2.68)$$

em que  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{C}$  são matrizes puramente reais, de pré-adição e pós-adição, respectivamente, e  $\mathbf{D}$  é uma matriz de multiplicação, que usualmente é complexa.

As matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{C}$  possuem elementos apenas no conjunto  $\{0, \pm 1\}$  e, portanto, não contribuem para a complexidade multiplicativa. A matriz  $\mathbf{D}$  representa as multiplicações do algoritmo e pode ser decomposta nas partes real e imaginária. Logo, a matriz da DFT pode ser representada por:

$$\mathbf{F}_N = \mathbf{C} (\Re(\mathbf{D}) + j\Im(\mathbf{D})) \mathbf{A} = \mathbf{C}\Re(\mathbf{D}) \mathbf{A} + j\mathbf{C}\Im(\mathbf{D}) \mathbf{A}. \quad (2.69)$$

A partir da Equação 2.29, a representação matricial da DHT é obtida subtraindo a parte imaginária da parte real:

$$\mathbf{H}_N = \mathbf{C}\Re(\mathbf{D}) \mathbf{A} - \mathbf{C}\Im(\mathbf{D}) \mathbf{A} = \mathbf{C} (\Re(\mathbf{D}) - \Im(\mathbf{D})) \mathbf{A}. \quad (2.70)$$

Dessa forma, o algoritmo de Winograd adaptado para Hartley é dado por [74]:

$$\mathbf{H}_N = \mathbf{CBA}, \quad (2.71)$$

em que  $\mathbf{B} = \Re(\mathbf{D}) - \Im(\mathbf{D})$ .

Um fato curioso é que a matriz  $\mathbf{D}$  é uma matriz diagonal com elementos puramente reais ou puramente imaginários [36]. Portanto, o algoritmo de Winograd para a DHT tem a mesma complexidade multiplicativa que o algoritmo para a DFT.

### 3 TRANSFORMADAS APROXIMADAS

Os algoritmos rápidos discutidos anteriormente proporcionam uma significativa redução das multiplicações necessárias para o cálculo da transformada discreta de Hartley. Conforme demonstrado em [38], a complexidade multiplicativa da DHT é limitada inferiormente por um valor que depende do comprimento de bloco da transformada. O avanço nesta área de pesquisa culminou no surgimento de algoritmos rápidos que atingiram as cotas inferiores de operações de multiplicação, ou valores muito próximos a elas.

A quantidade de operações de multiplicação, ainda que bastante reduzida, permanece como um dos fatores de maior peso para a complexidade computacional [37]. A implementação em *hardware* de multiplicações por números irracionais exige o uso de aritmética de ponto flutuante, que eleva o consumo de energia e o tempo de execução [52]. Uma alternativa para eliminar completamente as multiplicações é considerar métodos de aproximação capazes de derivar transformadas aproximadas que não estão sujeitas aos limites teóricos da complexidade multiplicativa.

Transformadas aproximadas podem ser obtidas a partir da aproximação dos elementos contidos na representação matricial de uma transformada discreta [53]. O desenvolvimento dessas transformadas é fundamentado na preservação das propriedades matemáticas da transformada exata. Assim, o cálculo das aproximações é computacionalmente menos custoso, enquanto o desempenho obtido é similar em termos de determinados critérios práticos.

Em virtude da vasta utilidade da DCT no contexto de compressão de imagem e vídeo, foram propostas várias aproximações livre de multiplicações para seu cômputo [56–66]. No entanto, aproximações para a DHT ainda seguem pouco exploradas na literatura, sendo investigadas apenas em [63, 67].

Nas próximas seções, são apresentados métodos conhecidos para aproximar transformadas discretas, algumas das aproximações existentes para a DCT e duas transformadas aproximadas da DHT disponíveis na literatura.

### 3.1 Aproximações para Transformadas Discretas

Um método conhecido para aproximar transformadas discretas emprega racionais diádicos como elementos de entrada das matrizes aproximadas [40]. O conjunto dos racionais diádicos é definido como:

$$\frac{p}{2^k}, \quad p, k \in \mathbb{Z}, \quad p \nmid 2, \quad (3.1)$$

ou seja, é o conjunto das frações que possuem denominadores na forma de potência de dois.

Em circuitos digitais, as operações de multiplicação ou divisão por potências de dois são implementadas por meio de deslocamento de *bits*. Dessa forma, uma multiplicação por um racional diádico pode ser realizada usando apenas deslocamento de *bits* e adições [40], o que requer um menor custo de implementação do que multiplicações [37]. Um valor  $x$  multiplicado pelo racional diádico  $29/32$ , por exemplo, pode ser representado por:

$$\frac{29}{32}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2^2}x + \frac{1}{2^3}x + \frac{1}{2^5}x, \quad \text{ou} \quad (3.2a)$$

$$\frac{29}{32}x = 1 - \frac{3}{32}x = 1 - \frac{1}{2^4}x - \frac{1}{2^5}x. \quad (3.2b)$$

A primeira expressão requer três adições e quatro deslocamentos, enquanto a segunda requer duas adições e dois deslocamentos.

Essa forma de representar os racionais diádicos viabilizou a elaboração de aproximações sem multiplicações, baseadas em *lifting scheme* [54, 55]. Contudo, o uso de tal metodologia implica no incremento do número de adições e deslocamento de *bits*.

Uma alternativa para obter transformadas aproximadas de ordem  $N$ , sem aumentar a complexidade aditiva, consiste em projetar matrizes quadradas  $\mathbf{T}_N$  de baixa complexidade com elementos definidos no conjunto  $\mathcal{P} = \{0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 2\}$  [56]. Em termos de aritmética digital, uma operação de multiplicação por um elemento em  $\{\pm 1/2, \pm 2\}$  demanda um deslocamento de *bits* e uma multiplicação por um elemento em  $\{0, \pm 1\}$  não requer nenhuma operação.

Considerando  $\mathbf{A}_N$  a matriz que representa uma transformada discreta arbitrária, uma aproximação matricial para essa transformada,  $\hat{\mathbf{A}}_N$ , é definida de modo que:

$$\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{A}}_N \cdot \mathbf{x} \approx \mathbf{A}_N \cdot \mathbf{x} = \mathbf{X}. \quad (3.3)$$

Portanto, de acordo com alguns critérios de desempenho predeterminados,  $\hat{\mathbf{X}} \approx \mathbf{X}$  [40]. As matrizes aproximadas  $\hat{\mathbf{A}}_N$  podem ser obtidas a partir de matrizes de baixa complexidade  $\mathbf{T}_N$ .

A busca por aproximações deve ser baseada na redução da complexidade computacional e na preservação das propriedades da transformada exata.

### Ortogonalidade

Uma característica importante de algumas transformadas discretas é a ortogonalidade, por isso, é desejável que aproximações para tais transformadas conservem essa propriedade. Para uma matriz ortogonal, sua inversa pode ser obtida a partir de sua transposta. Assim, se a transformada de baixa complexidade for ortogonal, sua inversa também será de baixa complexidade. A seguir, são apresentadas duas definições usadas neste trabalho para a ortogonalidade e a ortonormalidade de matrizes reais.

**Definição 3.1.** Uma matriz  $\mathbf{T}$  é dita ser **ortogonal** se  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^\top$  resulta em uma matriz diagonal.

**Definição 3.2.** Uma matriz  $\mathbf{T}$  é dita ser **ortonormal** se  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^\top$  resulta em uma matriz identidade.

As transformadas discretas de Hartley e Fourier, conforme apresentadas neste trabalho, são ortogonais. Tais transformadas também podem ser representadas na forma ortonormal, em que suas matrizes são multiplicadas por um fator de escala. Dessa forma, é interessante derivar aproximações para essas transformadas que também sejam ortonormais.

Se uma dada matriz de baixa complexidade  $\mathbf{T}_N$  for ortogonal, é possível obter uma matriz ortonormal  $\hat{\mathbf{A}}_N$  baseada em  $\mathbf{T}_N$ , por meio de decomposição polar [79, 80]. Este método de ortonormalização calcula uma matriz diagonal de ajuste

$$\mathbf{S} = \sqrt{(\mathbf{T}_N \cdot \mathbf{T}_N^\top)^{-1}}, \quad (3.4)$$

em que  $\sqrt{\cdot}$  denota a raiz quadrada matricial [81]. Assim, uma aproximação ortonormal é dada por:

$$\hat{\mathbf{A}}_N = \mathbf{S} \cdot \mathbf{T}_N. \quad (3.5)$$

Em algumas aplicações, como em compressão de imagens, a matriz  $\mathbf{S}$  pode ser incorporada na etapa de quantização [64, 65, 82]. Desse modo, não há incremento na complexidade computacional do processamento.

Para casos em que a matriz de baixa complexidade  $\mathbf{T}_N$  não é ortogonal, a matriz  $\mathbf{S}$ , calculada por meio da Equação 3.4, não é diagonal. Nessa situação, o uso de  $\mathbf{S}$  implica no aumento do custo computacional de  $\hat{\mathbf{A}}_N$ . Uma alternativa ao caso não ortogonal é substituir os

elementos fora da diagonal  $\mathbf{T}_N \cdot \mathbf{T}_N^\top$  por zero [83]. Assim, o cálculo da matriz diagonal de ajuste pode então ser generalizado por:

$$\hat{\mathbf{S}} = \sqrt{[\text{diag}_m(\mathbf{T}_N \cdot \mathbf{T}_N^\top)]^{-1}}, \quad (3.6)$$

em que  $\text{diag}_m(\cdot)$  retorna uma matriz diagonal, cuja diagonal é igual a da matriz de entrada. Uma aproximação não ortonormal baseada em  $\mathbf{T}_N$  não ortogonal é dada por

$$\hat{\mathbf{A}}_N = \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{T}_N. \quad (3.7)$$

Observando que para  $\mathbf{T}_N$  ortogonal,  $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{S}$ , a Equação 3.7 pode ser sempre utilizada para derivar uma aproximação, independente de  $\mathbf{T}_N$  ser ortogonal ou não.

A seguir, são apresentadas algumas aproximações conhecidas para DCT e DHT. As matrizes de baixa complexidade  $\mathbf{T}_N$ , com elementos no conjunto  $\mathcal{P}$ , são exibidas sem a matriz diagonal de ajuste.

### 3.2 Aproximações para a DCT

A transformada discreta do cosseno, em particular a de comprimento de bloco 8, é bastante utilizada em processamento de imagem e vídeo, como nos padrões de compressão JPEG [41], MPEG [42] e HEVC [44]. A representação matricial da DCT de ordem 8 é denotada por:

$$\mathbf{C}_8 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \gamma_3 & \gamma_3 \\ \gamma_0 & \gamma_2 & \gamma_4 & \gamma_6 & -\gamma_6 & -\gamma_4 & -\gamma_2 & -\gamma_0 \\ \gamma_1 & \gamma_5 & -\gamma_5 & -\gamma_1 & -\gamma_1 & -\gamma_5 & \gamma_5 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & -\gamma_6 & -\gamma_0 & -\gamma_4 & \gamma_4 & \gamma_0 & \gamma_6 & -\gamma_2 \\ \gamma_3 & -\gamma_3 & -\gamma_3 & \gamma_3 & \gamma_3 & -\gamma_3 & -\gamma_3 & \gamma_3 \\ \gamma_4 & -\gamma_0 & \gamma_6 & \gamma_2 & -\gamma_2 & -\gamma_6 & \gamma_0 & -\gamma_4 \\ \gamma_5 & -\gamma_1 & \gamma_1 & -\gamma_5 & -\gamma_5 & \gamma_1 & -\gamma_1 & \gamma_5 \\ \gamma_6 & -\gamma_4 & \gamma_2 & -\gamma_0 & \gamma_0 & -\gamma_2 & \gamma_4 & -\gamma_6 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

em que  $\gamma_k = \cos(2\pi(k+1)/32)$  [39].

### Transformada de Walsh-Hadamard (WHT)

A transformada de Walsh-Hadamard (WHT) de ordem  $N$  é representada pela matriz binária  $\mathbf{T}_{\text{WHT}-N}$ , com elementos apenas em  $\{\pm 1\}$ , e satisfaz a seguinte expressão [84]:

$$\mathbf{T}_{\text{WHT}-N} \cdot \mathbf{T}_{\text{WHT}-N}^\top = N \cdot \mathbf{I}_N, \quad (3.9)$$

em que  $\mathbf{I}_N$  é a matriz identidade de ordem  $N$ . A equação anterior denota que a WHT é uma transformada ortogonal.

A WHT de comprimento 8 é dada por [85]:

$$\mathbf{T}_{\text{WHT-8}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Por ter entradas apenas em  $\{\pm 1\}$ , a WHT é inerentemente de baixa complexidade e requer apenas operações de adição para sua implementação. Embora a WHT não tenha sido originalmente proposta como uma aproximação para a DCT, essa transformada é amplamente utilizada em processamento de imagem, devido ao seu bom desempenho e facilidade de implementação [84, 86].

### DCT Sinalizada (SDCT)

A DCT sinalizada (SDCT) proposta por Haweel foi a primeira aproximação para a DCT contendo somente elementos do conjunto  $\mathcal{P}$  [56]. A SDCT é calculada por:

$$\mathbf{T}_{\text{SDCT}} = \text{sign}(\mathbf{C}_N), \quad (3.11)$$

em que  $\text{sign}(\cdot)$  é a função sinal definida por:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

A função sinal opera elemento a elemento, quando aplicada sobre matrizes. Assim, a representação matricial da SDCT para  $N = 8$  é expressa por:

$$\mathbf{T}_{\text{SDCT}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

A  $\mathbf{T}_{\text{SDCT}}$  de comprimento 8 possui entradas em  $\{\pm 1\}$  e, portanto, requer apenas adições para sua implementação. Embora essa aproximação não seja ortogonal, sua transformada inversa é fortuitamente de baixa complexidade.

### Aproximação de Nível 1 de Lengwehasatit e Ortega

Lengwehasatit e Ortega introduziram cinco níveis de aproximações para a DCT em [57]. Dentre essas transformadas, a aproximação de nível 1 é a que possui menor complexidade. Tal transformada é ortogonal e é representada por:

$$\mathbf{T}_{\text{LO}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

### Série de Aproximações BAS

As aproximações para a DCT introduzidas por Bouguezel, Ahmad e Swamy são aqui denominadas de série de aproximações BAS [58–63]. Na Tabela 1, são apresentadas seis transformadas aproximadas da série BAS.

Tabela 1 – Aproximações da série BAS.

Transformada	Representação Matricial	Comentário
$\mathbf{T}_{\text{BAS-1}}$ [58]	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Obtida a partir da introdução de 0s e $\frac{1}{2}$ s na $\mathbf{T}_{\text{SDCT}}$ .
$\mathbf{T}_{\text{BAS-2}}$ [59]	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	Obtida a partir da introdução de 0s na $\mathbf{T}_{\text{SDCT}}$ . Única aproximação não ortogonal da série BAS.
$\mathbf{T}_{\text{BAS-3}}$ [60]	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Obtida a partir da introdução de 0s na $\mathbf{T}_{\text{SDCT}}$ .
$\mathbf{T}_{\text{BAS-4}}$ [61]	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 1 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$	Obtida a partir da DCT inteira de ordem 4.
$\mathbf{T}_{\text{BAS-5}}(a)$ [62]	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & -a & -1 & -1 & -a & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ a & -1 & 1 & -a & -a & 1 & -1 & a \end{bmatrix}$	Obtida a partir da introdução de um parâmetro $a$ na $\mathbf{T}_{\text{BAS-1}}$ , em que $a = 0, \frac{1}{2}, 2$ .
$\mathbf{T}_{\text{BAS-6}}$ [63]	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	Obtida a partir de uma permutação da matriz de Hadamard baseada na $\mathbf{T}_{\text{SDCT}}$ . É idêntica a matriz de Walsh-Hadamard, $\mathbf{T}_{\text{WHT-8}}$ .

### DCT Arredondada (RDCT)

A DCT arredondada (RDCT), proposta por Cintra e Bayer [64], é obtida por meio da seguinte função de arredondamento:

$$\text{round}(x) = \text{sign}(x) \cdot \lfloor |x| + 0,5 \rfloor, \quad (3.15)$$

em que  $\lfloor x \rfloor$  é o maior inteiro não superior a  $x$ . Essa função opera elemento a elemento, quando aplicada sobre matrizes.

A RDCT é definida por:

$$\mathbf{T}_{\text{RDCT}} = \text{round}(2 \cdot \mathbf{C}_N). \quad (3.16)$$

Efetuada o cálculo da expressão anterior para  $N = 8$ , a matriz da RDCT é dada por:

$$\mathbf{T}_{\text{RDCT}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Esta transformada é ortogonal e requer somente operações de adição para sua implementação.

### DCT Arredondada Modificada (MRDCT)

A DCT arredondada modificada (MRDCT) foi introduzida por Bayer e Cintra em [65]. A MRDCT é uma matriz ortogonal, obtida com a inserção de zeros na matriz da RDCT. Sua representação matricial é denotada por:

$$\mathbf{T}_{\text{MRDCT}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Devido a esparsidade da matriz da MRDCT, esta transformada possui o menor custo computacional dentre as aproximações para a DCT registradas na literatura.

### Aproximação para *RF Imaging*

Uma transformada aproximada para uso em imagens de radiofrequência (*RF imaging*) foi proposta em [66]. Esta aproximação é obtida a partir do seguinte problema de otimização:

$$\mathbf{T}_{\text{RF}} = \arg \min_{\mathbf{T}'} \epsilon(\mathbf{T}'), \quad (3.19)$$

em que  $\epsilon(\cdot)$  é o erro de energia total, uma métrica de proximidade apresentada na Seção 4.3.1.

As possíveis soluções para o problema de otimização são as matrizes com a configuração da Equação 3.8, em que as entradas,  $\gamma_k$ , podem assumir os valores no conjunto  $\{0, 1, 2\}$ . A resolução do problema conduz a uma transformada ortogonal dada por:

$$\mathbf{T}_{\text{RF}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

### Aproximações associadas ao algoritmo de Feig-Winograd

Uma classe de aproximações associada ao algoritmo de Feig-Winograd [51] foi proposta por Tablada, Cintra e Bayer [82]. As transformadas aproximadas foram obtidas por meio da parametrização da representação matricial da DCT de comprimento 8. A fatoração adotada foi definida como [82]:

$$\mathbf{C}_8(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{K}(\gamma) \cdot \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{B}_3, \quad (3.21)$$

em que  $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_6)$ , as matrizes  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$  e  $\mathbf{B}_3$  de adição e  $\mathbf{P}$  de permutação são de baixa complexidade, com elementos apenas em  $\{0, \pm 1\}$ , e a matriz  $\mathbf{K}(\gamma)$  é dada por:

$$\mathbf{K}(\gamma) = \begin{bmatrix} \gamma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_5 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_1 & \gamma_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_6 & -\gamma_4 & -\gamma_2 & -\gamma_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_4 & \gamma_0 & \gamma_6 & -\gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_0 & \gamma_2 & -\gamma_4 & \gamma_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_2 & -\gamma_6 & \gamma_0 & -\gamma_4 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

As aproximações foram obtidas com a substituição do vetor  $\gamma$  por um vetor  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_6)$ , em que a escolha dos elementos desse vetor, ficou restrita aos valores no conjunto  $\mathcal{P}$ .

Um problema de otimização foi proposto para identificar as aproximações ótimas, em termos de figuras de mérito relevantes para compressão de imagem. Seis novas aproximações, aqui denominadas  $\mathbf{T}_{\text{FW-}i}$ , com  $i = 1, 2, \dots, 6$ , foram derivadas como solução do problema de otimização e outras três transformadas já registradas na literatura foram obtidas, a RDCT, a MRDCT e a aproximação de nível 1 de Lengwehasatit e Ortega. Na Tabela 2, são apresentados os vetores  $\alpha$  referentes às novas aproximações.

Tabela 2 – Transformadas aproximadas da DCT associadas ao algoritmo de Feig-Winograd e vetores  $\alpha$  correspondentes.

Transformada	Vetor $\alpha$
$\mathbf{T}_{\text{FW-1}}$	(1, 2, 0, 1, 0, 1, 0)
$\mathbf{T}_{\text{FW-2}}$	(0, 1, 1, 1, 1, 0, 0)
$\mathbf{T}_{\text{FW-3}}$	(0, 2, 1, 1, 1, 1, 0)
$\mathbf{T}_{\text{FW-4}}$	(0, 2, 2, 1, 1, 1, 0)
$\mathbf{T}_{\text{FW-5}}$	(2, 2, 0, 1, 0, 1, 1/2)
$\mathbf{T}_{\text{FW-6}}$	(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)

### 3.3 Aproximações para a DHT

Em oposição às diversas aproximações propostas para a DCT, poucos métodos foram empregados para derivar transformadas aproximadas para a DHT. Prosseguindo com o mesmo comprimento de bloco,  $N = 8$ , duas aproximações para a DHT existentes na literatura são apresentadas a seguir. A representação matricial da DHT exata de ordem 8, calculada por meio da Equação 2.32, é denotada por:

$$\mathbf{H}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 & -1 & -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \sqrt{2} & -1 & 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 & 0 & -1 & \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -\sqrt{2} & -1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

#### DHT arredondada (RDHT)

Em [67], Cintra propôs um método para obter aproximações de transformadas trigonométricas utilizando racionais diádicos. Uma função de arredondamento é usada para derivar diferentes níveis de aproximação. A DHT arredondada (RDHT) é obtida com a aplicação da função de arredondamento de ordem zero, de acordo com a expressão a seguir:

$$\mathbf{T}_{\text{RDHT}} = \text{round} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathbf{H}_N \right). \quad (3.24)$$

Esta aproximação da DHT possui elementos de entrada somente no conjunto  $\mathcal{P}$ .

A matriz da RDHT de comprimento 8 é dada por:

$$\mathbf{T}_{\text{RDHT}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

### DHT binária (BDHT)

A sexta aproximação da série BAS foi intitulada em seu artigo original de DCT binária (BDCT) por conter apenas elementos  $-1$  e  $+1$  [63]. Conforme descrito na Tabela 1, a  $\mathbf{T}_{\text{BAS-6}}$  ou  $\mathbf{T}_{\text{BDCT}}$  é derivada a partir de uma permutação da matriz de Hadamard baseada na  $\mathbf{T}_{\text{SDCT}}$ . Nesse mesmo artigo [63], foi proposta a DHT binária (BDHT), uma aproximação para a DHT que é obtida pelo mesmo método empregado com a BDCT.

A BDHT é uma permutação da matriz de Hadamard baseada na DHT sinalizada (SDHT), em que a matriz da SDHT é definida como:

$$\mathbf{T}_{\text{SDHT}} = \text{sign}(\mathbf{H}_N). \quad (3.26)$$

Coincidentemente, verifica-se que para  $N = 8$ :

$$\mathbf{T}_{\text{SDHT}} = \mathbf{T}_{\text{RDHT}}. \quad (3.27)$$

Por meio da comparação das linhas da matriz da SDHT com as da matriz de Hadamard, obtém-se a matriz da BDHT:

$$\mathbf{T}_{\text{BDHT}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

A BDHT, por se tratar de uma permutação da matriz de Hadamard, é uma transformada ortogonal com entradas  $-1$  e  $+1$ .

## 4 METODOLOGIA DE BUSCA DE APROXIMAÇÕES PARA A DHT BASEADA EM PARAMETRIZAÇÃO

Neste capítulo, a metodologia introduzida por Tablada, Cintra e Bayer em [82] é adaptada para derivar novas aproximações de baixo custo computacional para a DHT. Dois métodos baseados em parametrização são utilizados com o objetivo de produzir transformadas aproximadas  $\hat{\mathbf{H}}_N$  de diversos comprimentos:

1. Método I: Parametriza a representação matricial da DHT em sua forma não fatorada, obtendo matrizes  $\mathbf{T}_N$  de baixa complexidade com elementos somente no conjunto  $\mathcal{P} = \{0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 2\}$ .
2. Método II: Parametriza a representação matricial da DHT associada a um algoritmo rápido, obtendo matrizes  $\mathbf{T}_N$  de baixa complexidade, definidas pelo produto de matrizes com elementos somente no conjunto  $\mathcal{P} = \{0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 2\}$ .

Em ambos os métodos, a implementação das matrizes  $\mathbf{T}_N$  não requer operações de multiplicação. Assim, as aproximações de baixa complexidade para a DHT são calculadas por:

$$\hat{\mathbf{H}}_N = \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{T}_N, \quad (4.1)$$

em que  $\hat{\mathbf{S}} = \sqrt{[\text{diag}_m(\mathbf{T}_N \cdot \mathbf{T}_N^\top)]^{-1}}$  é a matriz diagonal de ajuste, vide Equação 3.6. O cálculo de  $\hat{\mathbf{S}}$  demanda que  $\text{diag}_m(\mathbf{T}_N \cdot \mathbf{T}_N^\top)$  seja inversível.

Estes dois métodos geram diversas aproximações para cada comprimento  $N$ . Por isso, é necessário selecionar as transformadas aproximadas de melhor desempenho em termos de métricas objetivas a serem definidas. Para esse fim, é apresentado um problema de otimização multiobjetivo que tem como solução as aproximações ótimas em termo das figuras de mérito.

### 4.1 Método I: Parametrização da DHT Não Fatorada

A matriz da DHT na sua forma não fatorada foi apresentada na Equação 2.32. Observando sua estrutura, percebe-se que  $\mathbf{H}_N$  é igual a sua transposta e também apresenta outras simetrias que resultam na repetição de diversos elementos. Neste método, a representação matricial da DHT é parametrizada com o objetivo de mapear suas entradas iguais em um mesmo valor do conjunto  $\mathcal{P}$ .

A parametrização da matriz da DHT é obtida com a substituição das entradas não nulas por parâmetros  $\pm\alpha_k$ , em que  $\alpha_k > 0$ , enquanto as entradas nulas permanecem inalteradas. Qualquer elemento não nulo de  $\mathbf{H}_N$  é parametrizado, ainda que este elemento esteja contido em  $\mathcal{P}$ . Dessa forma, uma entrada de valor 1, por exemplo, pode ser escalada para os valores  $\frac{1}{2}$  ou 2, concebendo mais aproximações matriciais. Os parâmetros podem ser conjuntamente representados pelo vetor

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_L), \quad (4.2)$$

em que  $L$  é o número de elementos não nulos e distintos em módulo da matriz  $\mathbf{H}_N$ .

As matrizes  $\mathbf{T}_N$ , que geram aproximações  $\hat{\mathbf{H}}_N$  por meio da Equação 4.1, são obtidas por:

$$\mathbf{T}_N(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{H}_N(\boldsymbol{\alpha}), \quad (4.3)$$

em que  $\mathbf{H}_N(\boldsymbol{\alpha})$  é a matriz da DHT parametrizada e os elementos do vetor  $\boldsymbol{\alpha}$  somente podem assumir os valores no conjunto  $\mathcal{P}_+ = \{0, 1/2, 1, 2\}$ .

Analisando o caso particular em que  $N = 8$ , cuja matriz foi apresentada na Equação 3.23, verifica-se que existem apenas dois elementos distintos em valor absoluto e diferentes de zero. Em sua forma parametrizada, a matriz da DHT de ordem oito é dada por:

$$\mathbf{H}_8(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & -\alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & -\alpha_1 & -\alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 & -\alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 & \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_1 & -\alpha_1 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 & -\alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & -\alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & -\alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_1 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

em que  $\boldsymbol{\alpha} = (1, \cos \theta)$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

## 4.2 Método II: Parametrização da DHT Fatorada

No Capítulo 2, foi discutida a relevância dos algoritmos rápidos para uma implementação eficiente de transformadas discretas. Uma transformada pode ser representada matricialmente de formas diferentes para cada algoritmo que possui. Neste método, realiza-se a parametrização da matriz da DHT na forma fatorada, assim, as aproximações geradas também encontram-se

fatoradas com a mesma estrutura. São consideradas as representações matriciais de dois tipos de algoritmo rápido, Winograd e dizimação no tempo de Cooley-Tukey.

#### 4.2.1 Winograd

A representação matricial da DHT associada ao algoritmo de Winograd foi apresentada na Equação 2.71, sendo definida por [74]:

$$\mathbf{H}_N = \mathbf{CBA}. \quad (4.5)$$

As matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{C}$ , de pré-adição e pós-adição, respectivamente, podem ser representadas por matrizes ou produto de matrizes de baixa complexidade que contêm apenas elementos em  $\{0, \pm 1\}$ . Em contrapartida,  $\mathbf{B}$  é uma matriz diagonal, que normalmente possui elementos irracionais e, portanto, não é de baixa complexidade.

A parametrização da fatoração de Winograd para a DHT é realizada de forma similar ao método anterior, a diferença é que apenas a matriz  $\mathbf{B}$  é parametrizada, enquanto as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{C}$  são mantidas. O procedimento consiste em substituir as entradas não nulas de  $\mathbf{B}$  por parâmetros  $\pm\alpha_k$ , em que  $\alpha_k > 0$ , enquanto as entradas nulas permanecem inalteradas. Os parâmetros obtidos são representados pelo vetor  $\alpha$  apresentado na Equação 4.2, em que  $L$  é o número de elementos não nulos e distintos em módulo da matriz  $\mathbf{B}$ .

As matrizes  $\mathbf{T}_N$  são obtidas por:

$$\mathbf{T}_N(\alpha) = \mathbf{H}_N(\alpha) = \mathbf{CB}(\alpha)\mathbf{A}, \quad (4.6)$$

em que os elementos do vetor  $\alpha$  somente podem assumir os valores no conjunto  $\mathcal{P}_+$ .

Considerando como exemplo a DHT de comprimento de bloco  $N = 5$ , a fatoração de Winograd é representada por [36]:

$$\mathbf{H}_5(\alpha) = \mathbf{CB}(\alpha)\mathbf{A}, \quad (4.7)$$

em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_6 \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

$\boldsymbol{\alpha} = (1, 1 - \frac{1}{2}(\cos \theta + \cos 2\theta), \frac{1}{2}(\cos \theta - \cos 2\theta), \sin \theta, \sin \theta + \sin 2\theta, \sin \theta - \sin 2\theta)$  e  $\theta = \frac{2\pi}{5}$ . A matriz  $\mathbf{B}$  possui seis elementos distintos em valor absoluto e diferentes de zero, por isso,  $M = 6$ .

#### 4.2.2 Cooley-Tukey: Dizimação no Tempo

O algoritmo rápido de dizimação no tempo foi utilizado com o intuito de obter aproximações para comprimentos de bloco  $N = 2^q$ , em que  $q > 2$ . Uma representação matricial associada a este algoritmo foi derivada com base em [28]:

$$\mathbf{H}_N = \left( \prod_{i=1}^{q-2} \mathbf{C}_i \mathbf{B}_i \mathbf{A}_i \right) \mathbf{C}_{q-1} \mathbf{C}_q \mathbf{P}, \quad (4.10)$$

As matrizes  $\mathbf{B}_i$  possuem elementos irracionais e não são de baixa complexidade. De outro modo, as matrizes  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{C}_i$  e  $\mathbf{A}_i$  possuem apenas elementos em  $\{0, \pm 1\}$ , sendo de baixa complexidade.

A matriz  $\mathbf{P}$  é uma permutação da matriz identidade  $\mathbf{I}_N$ , as matrizes  $\mathbf{C}_i$  são calculadas por:

$$\mathbf{C}_i = \mathbf{I}_{2^{i-1}} \otimes \mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{I}_{N/2^i}, \quad (4.11)$$

em que o operador  $\otimes$  é o produto de Kronecker e  $\mathbf{H}_2$  é a matriz da DHT de ordem 2:

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

e as matrizes  $\mathbf{A}_i$  são obtidas como:

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{I}_{2^{i-1}} \otimes \mathbf{D}_{N'}, \quad (4.13)$$

em que  $\mathbf{D}_{N'}$  é uma matriz de ordem  $N' = N/2^{i-1}$ , com elementos  $d_{m,n}$ ,  $m, n \in \{0, 1, \dots, N' - 1\}$ , igual a matriz identidade  $\mathbf{I}_{N'}$ , exceto pelos seguintes elementos:

$$d_{\frac{5}{8}N', \frac{7}{8}N'} = 1, \quad d_{\frac{7}{8}N', \frac{5}{8}N'} = 1, \quad d_{\frac{7}{8}N', \frac{7}{8}N'} = -1. \quad (4.14)$$

Para parametrizar essa fatoração de Cooley-Tukey, as matrizes  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{C}_i$  e  $\mathbf{A}_i$  são conservadas e as matrizes  $\mathbf{B}_i$  são parametrizadas. As entradas não nulas das matrizes  $\mathbf{B}_i$  são substituídas por parâmetros  $\pm\alpha_k$ , em que  $\alpha_k > 0$ , enquanto as entradas nulas permanecem inalteradas. Os parâmetros obtidos são representados pelo vetor  $\boldsymbol{\alpha}$  da Equação 4.2. Um aspecto importante da matriz  $\mathbf{B}_1$  é que ela possui todos os parâmetros do vetor  $\boldsymbol{\alpha}$  e, por esse motivo, o valor de  $L$  é dado pelo número de elementos não nulos e distintos em módulo da matriz  $\mathbf{B}_1$ .

As matrizes  $\mathbf{T}_N$  são obtidas por:

$$\mathbf{T}_N(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{H}_N(\boldsymbol{\alpha}) = \prod_{i=1}^{q-2} (\mathbf{C}_i \mathbf{B}_i(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{A}_i) \mathbf{C}_{q-1} \mathbf{C}_q \mathbf{P}, \quad (4.15)$$

em que os elementos do vetor  $\boldsymbol{\alpha}$  somente podem assumir os valores no conjunto  $\mathcal{P}_+$ .

Examinado o comprimento  $N = 8$  ( $q = 3$ ) como um exemplo, a fatoração da DHT associada ao algoritmo de Cooley-Tukey [28] é definida por:

$$\mathbf{H}_8(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_1(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3 \mathbf{P}, \quad (4.16)$$

em que a matriz  $\mathbf{P}$  é uma permutação entre linhas, duas a duas, dos pares de linhas (2, 5) e (4, 7) da matriz identidade  $\mathbf{I}_8$ , as matrizes  $\mathbf{C}_i$  são obtidas a partir da Equação 4.11:

$$\mathbf{C}_3 = \mathbf{I}_4 \otimes \mathbf{H}_2, \quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{I}_2, \quad \mathbf{C}_1 = \mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{I}_4,$$

a matriz  $\mathbf{A}_1$  é dada pela Equação 4.13:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{D}_8,$$

e a matriz parametrizada é calculada por:

$$\mathbf{B}_1(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = (1, \cos \theta) \text{ e } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

As matrizes de baixa complexidade são representadas a seguir:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

### 4.3 Problema de Otimização Multiobjetivo

Um problema de otimização multiobjetivo tem como proposta atender duas ou mais restrições simultaneamente [87,88]. Esse tipo de problema não necessariamente tem uma solução única, podendo existir um conjunto de soluções que satisfaçam os critérios exigidos.

Dado um problema com  $r$  restrições e soluções viáveis no espaço de busca  $\mathcal{X}$ , procura-se uma solução eficiente,  $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ , que otimiza as  $r$  funções objetivo,  $(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_r(\mathbf{x}))$ ,

simultaneamente. Este problema de otimização é definido da seguinte forma [87, 88]:

$$\mathbf{x}^* = \arg \operatorname{opt}_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_r(\mathbf{x})), \quad (4.18)$$

As soluções viáveis podem ser avaliadas por conceitos de dominância de Pareto [88], formalmente descritos a seguir.

**Definição 4.1.** Uma solução viável  $\mathbf{y}$  domina outra solução viável  $\mathbf{z}$  se:

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}, f_i(\mathbf{y}) &\leq f_i(\mathbf{z}), \text{ e} \\ \exists j \in \{1, 2, \dots, r\} \mid f_j(\mathbf{y}) &< f_j(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

**Definição 4.2.** Uma solução  $\mathbf{x}^*$  é dita eficiente ou Pareto-ótima se não for dominada por nenhuma outra solução viável no espaço de busca  $\mathcal{X}$ .

De outro modo, a Definição 4.2 estabelece que uma solução Pareto-ótima não pode ser melhorada em relação a nenhum objetivo sem que haja piora em pelo menos outro objetivo. O conjunto das soluções ótimas de Pareto em  $\mathcal{X}$  é denominado de conjunto eficiente ou Pareto-ótimo.

### 4.3.1 Figuras de Mérito

De posse de matrizes candidatas a aproximação para a DHT, se faz necessário avaliá-las quanto a proximidade em relação à matriz exata na forma ortonormal. Uma boa transformada aproximada deve preservar as propriedades da DHT, a fim de que seu uso em contextos práticos reproduza um desempenho similar. Na literatura, existem métricas utilizadas para estimar a proximidade de matrizes em determinados aspectos, tais como erro de energia total e desvio de ortogonalidade. A seguir, são apresentadas as figuras de mérito utilizadas como funções objetivo no problema de otimização proposto neste trabalho.

#### Erro de energia total

O erro de energia total é uma medida de similaridade espectral entre uma transformada aproximada e a transformada exata correspondente, seu valor é calculado como [56, 64]:

$$\epsilon(\hat{\mathbf{H}}_N) = \pi \cdot \left\| \hat{\mathbf{H}}_N - \mathbf{H}_N \right\|_F^2, \quad (4.19)$$

em que  $\|\cdot\|_F$  é a norma de Frobenius, definida por [89]:

$$\|\mathbf{A}_N\|_F \triangleq \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2}, \quad (4.20)$$

em que  $a_{i,j}$  é o  $(i, j)$ -ésimo elemento da matriz  $\mathbf{A}_N$ .

### Desvio de Ortogonalidade

De acordo com a Definição 3.1, o produto de uma matriz ortogonal pela sua transposta é uma matriz diagonal. Dessa forma, o desvio de ortogonalidade de uma matriz pode ser definido como [83]:

$$\phi(\hat{\mathbf{H}}_N) = \delta(\hat{\mathbf{H}}_N \cdot \hat{\mathbf{H}}_N^\top), \quad (4.21)$$

em que  $\delta(\cdot)$  é o desvio de diagonalidade, uma medida de proximidade de uma matriz em relação a sua diagonal, dado por [90]:

$$\delta(\mathbf{A}_N) = 1 - \frac{\|\text{diag}_m(\mathbf{A}_N)\|_F}{\|\mathbf{A}_N\|_F}. \quad (4.22)$$

As matrizes ortogonais possuem desvio de ortogonalidade zero, já as matrizes que apresentam desvio muito pequeno, próximo a zero, podem ser classificadas como quase-ortogonais [83].

### Erro de Involução

Neste trabalho, é proposta uma nova figura de mérito, o erro de involução. Considerando que a DHT é uma transformada involutiva, seria interessante derivar aproximações que preservassem essa propriedade. Dessa forma, ao invés de buscar aproximações de baixa complexidade com transformada inversa também de baixa complexidade, procura-se transformadas aproximadas da DHT que funcionem como a própria inversa em contextos práticos.

O erro de involução foi definido como a norma de Frobenius da diferença entre o quadrado da matriz aproximada, ou seja, duas aproximações em cascata, e a matriz identidade:

$$\lambda(\hat{\mathbf{H}}_N) = \left\| \hat{\mathbf{H}}_N^2 - \mathbf{I}_N \right\|_F. \quad (4.23)$$

#### 4.3.2 Proposição do Problema

No contexto da busca de transformadas aproximadas para a DHT, o problema de otimização constitui-se em encontrar por meio de força bruta os vetores de parâmetros, que derivam as melhores aproximações em termos das figuras de mérito apresentadas. O problema é proposto da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\alpha}^* = \arg \min_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}_+^L} \left( \epsilon(\hat{\mathbf{H}}_N(\boldsymbol{\alpha})), \phi(\hat{\mathbf{H}}_N(\boldsymbol{\alpha})), \lambda(\hat{\mathbf{H}}_N(\boldsymbol{\alpha})) \right), \quad (4.24)$$

em que  $\mathcal{P}_+^L$  é o espaço formado pelo vetores  $\alpha$  de tamanho  $L$  com elementos em  $\mathcal{P}_+$  e  $\alpha^*$  são as soluções eficientes que compõem o conjunto Pareto-ótimo dos vetores de parâmetros, ou seja, o conjunto de soluções do problema, que geram as aproximações ótimas procuradas.

## 5 NOVAS APROXIMAÇÕES PARA A DHT

Neste capítulo, são apresentados os resultados da implementação da metodologia definida anteriormente. Os comprimentos de bloco  $N$  selecionados para realizar a busca por aproximações da DHT foram divididos em dois grupos:

- Comprimentos curtos primos:  $N = 3, 5, 7$ .
- Comprimentos de potências de dois:  $N = 8, 16, 32$ .

As transformadas de comprimento curto apresentam relevância para compor blocos utilizados na implementação de algoritmos rápidos de matrizes de maior dimensão [36]. Enquanto as transformadas de comprimento de potência de dois são usualmente empregadas em vários métodos de processamentos de sinal [58, 91–94]

Para cada comprimento  $N$ , a busca é realizada por meio dos dois métodos. No Método I, a abordagem é a mesma para qualquer comprimento, visto que a matriz é parametrizada na forma direta. Enquanto no Método II, é empregada a fatoração de Winograd com os comprimentos curtos e a fatoração de Cooley-Tukey com os comprimentos de potências de dois.

A busca computacional do conjunto de soluções eficientes foi implementada com a linguagem de programação julia v1.0.1 em um computador com processador Intel(R) Core(TM) i5-8250U CPU @ 1.60GHz, 8GB de memória RAM e sistema operacional Ubuntu 18.04.1 LTS. Na Tabela 3, são apresentados os tempos de execução para cada comprimento e método utilizados. Esses valores de tempo ilustram os cálculos envolvidos de forma qualitativa, pois o desempenho da implementação depende de muitas outras variáveis como por exemplo linguagem, interpretador, gerenciamento de memória e sistema operacional.

Tabela 3 – Tempo de execução dos algoritmos de busca, em segundos, para cada comprimento e método.

Comprimento $N$	Método	
	I	II
3	0,014	0,008
5	0,039	0,044
7	0,319	2,413
8	0,011	0,021
16	0,115	0,113
32	25,193	55,766

As parametrizações da DHT exata nas formas não fatorada e fatorada para os comprimentos utilizados é demonstrada no Apêndice A. A seguir, são apresentadas as aproximações obtidas como soluções do problema de otimização, em conjunto com as respectivas métricas de avaliação. Posteriormente, a complexidade computacional de algumas das transformadas aproximadas é comparada com a complexidade da DHT exata.

### 5.1 Aproximações Propostas para a DHT

As aproximações encontradas são representadas por  $\hat{\mathbf{H}}_{N,n}^{(M)}$  indicando que a matriz foi obtida a partir do método  $M \in \{I, II\}$  e que trata-se da  $n$ -ésima transformada aproximada de comprimento  $N$  derivada neste trabalho. Por exemplo,  $\hat{\mathbf{H}}_{3,1}^{(I)}$  representa a primeira aproximação de comprimento 3 proposta, a qual foi derivada a partir do Método I.

Algumas das aproximações foram selecionadas mais de uma vez por um mesmo método. Esse fato ocorreu com matrizes obtidas a partir de vetores de parâmetros idênticos a menos de um fator de escala. Citando  $\hat{\mathbf{H}}_{3,3}^{(II)}$  como exemplo, tal aproximação foi obtida pelo Método II com os vetores  $\alpha_a = (1/2, 1, 1/2)$  e  $\alpha_b = 2\alpha_a = (1, 2, 1)$ .

Considerando um caso geral em que  $\alpha_b = c_1\alpha_a$ , com  $c_1$  real e positivo, as matrizes produzidas por estes vetores  $\mathbf{T}_b$  e  $\mathbf{T}_a$  se relacionam da seguinte forma:

$$\mathbf{T}_b = \mathbf{T}(\alpha_b) = \mathbf{T}(c_1\alpha_a) = c_2\mathbf{T}(\alpha_a) = c_2\mathbf{T}_a, \quad (5.1)$$

em que  $c_2 = c_1$  para o Método I e Método II com a fatoração de Winograd e  $c_2 = c_1^{q-2}$  para o Método II com a fatoração de Cooley-Tukey. Neste trabalho, tais matrizes são denominadas de

matrizes equivalentes. A seguinte proposição enuncia que duas matrizes equivalentes fornecem, de fato, a mesma aproximação para a DHT.

**Proposição 5.1.** Se  $\mathbf{T}_b$  e  $\mathbf{T}_a$  são transformadas equivalentes, então  $\mathbf{T}_b$  e  $\mathbf{T}_a$  derivam a mesma aproximação para a DHT.

*Demonstração.* A aproximação obtida a partir de  $\mathbf{T}_b$  é calculada pela Equação 3.7 como:

$$\hat{\mathbf{H}} = \sqrt{[\text{diag}_m(\mathbf{T}_b \cdot \mathbf{T}_b^\top)]^{-1}} \cdot \mathbf{T}_b, \quad (5.2)$$

Utilizando na expressão acima, a relação  $\mathbf{T}_b = c\mathbf{T}_a$ , com  $c$  real e positivo, se obtém que:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}} &= \sqrt{[\text{diag}_m(c\mathbf{T}_a \cdot c\mathbf{T}_a^\top)]^{-1}} \cdot c\mathbf{T}_a \\ &= \sqrt{[\text{diag}_m(\mathbf{T}_a \cdot \mathbf{T}_a^\top)]^{-1}} \cdot \mathbf{T}_a, \end{aligned} \quad (5.3)$$

ou seja, a mesma aproximação obtida a partir de  $\mathbf{T}_a$ .  $\square$

Para as aproximações obtidas mais de uma vez por matrizes equivalentes, optou-se por exibir os vetores de parâmetros com a maior quantidade de elementos 1, no intuito de reduzir os deslocamentos de *bits*.

### 5.1.1 Comprimentos Curtos Primos

A busca por aproximações de comprimentos curtos retornou três, sete e nove matrizes para os comprimentos  $N = 3, 5$ , e  $7$ , respectivamente. As métricas avaliadas para estas matrizes e os vetores de parâmetros correspondentes são apresentados nas Tabelas 4, 5 e 6 para cada um dos comprimentos, os melhores resultados de cada métrica encontram-se em negrito.

As transformadas aproximadas de comprimento 3 obtidas pelo Método I,  $\hat{\mathbf{H}}_{3,1}^{(I)}$  e  $\hat{\mathbf{H}}_{3,2}^{(I)}$ , apresentam os menores valores para as métricas avaliadas. Enquanto a única aproximação derivada pelo Método II,  $\hat{\mathbf{H}}_{3,3}^{(II)}$ , possui o pior desempenho em termos destas medidas.

Tabela 4 – Aproximações obtidas para a DHT de comprimento  $N = 3$  e as figuras de mérito correspondentes.

Aproximação	Desvio de ortogonalidade	Erro de energia total	Erro de involução	Vetor de parâmetros
$\hat{\mathbf{H}}_{3,n}^{(M)}$	$\phi\left(\hat{\mathbf{H}}_{3,n}^{(M)}\right)$	$\epsilon\left(\hat{\mathbf{H}}_{3,n}^{(M)}\right)$	$\lambda\left(\hat{\mathbf{H}}_{3,n}^{(M)}\right)$	$\alpha$
$\hat{\mathbf{H}}_{3,1}^{(I)}$	0.0253	<b>0.1512</b>	0.2975	(2, 1/2, 2)
$\hat{\mathbf{H}}_{3,2}^{(I)}$	<b>0.0219</b>	0.1696	<b>0.2712</b>	(1, 1/2, 2)
$\hat{\mathbf{H}}_{3,3}^{(II)}$	0.0532	0.4573	0.5195	(1, 2, 1)

Entre as aproximações derivadas para o comprimento  $N = 5$ , duas foram provenientes do Método I,  $\hat{\mathbf{H}}_{5,1}^{(I)}$  e  $\hat{\mathbf{H}}_{5,2}^{(I)}$ , estas transformadas possuem os melhores valores para as figuras de mérito quando comparadas com as cinco aproximações obtidas pelo Método II.

Tabela 5 – Aproximações obtidas para a DHT de comprimento  $N = 5$  e as figuras de mérito correspondentes.

Aproximação	Desvio de Ortogonalidade	Erro de energia total	Erro de involução	Vetor de parâmetros
$\hat{\mathbf{H}}_{5,n}^{(M)}$	$\phi\left(\hat{\mathbf{H}}_{5,n}^{(M)}\right)$	$\epsilon\left(\hat{\mathbf{H}}_{5,n}^{(M)}\right)$	$\lambda\left(\hat{\mathbf{H}}_{5,n}^{(M)}\right)$	$\alpha$
$\hat{\mathbf{H}}_{5,1}^{(I)}$	0.0217	<b>0.2254</b>	0.3324	(2, 2, 1/2, 2, 1)
$\hat{\mathbf{H}}_{5,2}^{(I)}$	<b>0.0063</b>	0.9687	<b>0.2155</b>	(1, 1, 0, 2, 1/2)
$\hat{\mathbf{H}}_{5,3}^{(II)}$	0.0378	2.5401	0.6165	(1, 1, 1/2, 1, 1, 1)
$\hat{\mathbf{H}}_{5,4}^{(II)}$	0.0758	1.0048	0.7232	(1, 1, 1/2, 1, 2, 1/2)
$\hat{\mathbf{H}}_{5,5}^{(II)}$	0.0958	1.5712	0.6950	(1/2, 1, 1/2, 1, 2, 1/2)
$\hat{\mathbf{H}}_{5,6}^{(II)}$	0.0753	1.6290	0.6256	(1, 1, 1/2, 1, 1, 1/2)
$\hat{\mathbf{H}}_{5,7}^{(II)}$	0.0643	1.2917	0.8392	(1, 1, 1/2, 1, 2, 0)

Para o comprimento  $N = 7$ , foram derivadas dez aproximações. A transformada  $\hat{\mathbf{H}}_{7,3}^{(I)}$  exibe os menores valores de desvio de ortogonalidade e erro de involução, porém, possui o maior erro de energia total, atingindo um valor sete vezes acima do erro de outras aproximações de comprimento 7. Em contrapartida, as transformadas  $\hat{\mathbf{H}}_{7,4}^{(I)}$ ,  $\hat{\mathbf{H}}_{7,5}^{(I)}$  e  $\hat{\mathbf{H}}_{7,6}^{(I)}$  não possuem os melhores

valores em cada métrica avaliada, contudo, destacam-se pelo bom desempenho em termos das três medidas simultaneamente.

Tabela 6 – Aproximações obtidas para a DHT de comprimento  $N = 7$  e as figuras de mérito correspondentes.

Aproximação	Desvio de ortogonalidade	Erro de energia total	Erro de involução	Vetor de parâmetros
$\hat{\mathbf{H}}_{7,n}^{(M)}$	$\phi\left(\hat{\mathbf{H}}_{7,n}^{(M)}\right)$	$\epsilon\left(\hat{\mathbf{H}}_{7,n}^{(M)}\right)$	$\lambda\left(\hat{\mathbf{H}}_{7,n}^{(M)}\right)$	$\alpha$
$\hat{\mathbf{H}}_{7,1}^{(I)}$	0.0414	<b>0.4294</b>	0.6787	(2, 2, 1, 1, 2, 2, 1/2)
$\hat{\mathbf{H}}_{7,2}^{(I)}$	0.0372	0.4346	0.6023	(2, 2, 1, 1/2, 2, 2, 1/2)
$\hat{\mathbf{H}}_{7,3}^{(I)}$	<b>0.0047</b>	3.0699	<b>0.2546</b>	(1, 2, 0, 1/2, 1, 1, 1/2)
$\hat{\mathbf{H}}_{7,4}^{(I)}$	0.0273	0.4372	0.4540	(2, 2, 1, 1/2, 2, 2, 0)
$\hat{\mathbf{H}}_{7,5}^{(I)}$	0.0215	0.4767	0.4774	(1, 2, 1, 1/2, 2, 2, 0)
$\hat{\mathbf{H}}_{7,6}^{(I)}$	0.0133	0.8620	0.3776	(1, 1, 1, 1/2, 1, 1, 0)
$\hat{\mathbf{H}}_{7,7}^{(II)}$	0.0347	1.3203	0.6170	(2, 2, 2, 1/2, 1, 1, 1, 1, 2)
$\hat{\mathbf{H}}_{7,8}^{(II)}$	0.0306	1.6877	0.6488	(1, 1, 1, 0, 1, 1/2, 0, 1, 1)
$\hat{\mathbf{H}}_{7,9}^{(II)}$	0.0315	0.7324	0.6664	(1, 1, 1, 0, 1, 1/2, 1/2, 1/2, 1)
$\hat{\mathbf{H}}_{7,10}^{(II)}$	0.0211	1.9342	0.5443	(2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2)

### 5.1.2 Comprimentos de Potências de Dois

A busca por aproximações de comprimento  $N = 8$  retornou apenas uma matriz em cada método. Quando comparadas, verificou-se que eram idênticas e que correspondiam a RDHT:

$$\hat{\mathbf{H}}_{8,1}^{(I)} = \hat{\mathbf{H}}_{8,2}^{(II)} = \hat{\mathbf{H}}_{\text{RDHT-8}}. \quad (5.4)$$

Essa é a única aproximação derivada por ambos os métodos. As figuras de mérito dessa transformada aproximada e os vetores de parâmetros associados a cada método são apresentados na Tabela 7.

Tabela 7 – Aproximações obtidas para a DHT de comprimento  $N = 8$  e as figuras de mérito correspondentes.

Aproximação	Desvio de ortogonalidade	Erro de energia total	Erro de involução	Vetor de parâmetros
$\hat{\mathbf{H}}_{8,n}^{(M)}$	$\phi\left(\hat{\mathbf{H}}_{8,n}^{(M)}\right)$	$\epsilon\left(\hat{\mathbf{H}}_{8,n}^{(M)}\right)$	$\lambda\left(\hat{\mathbf{H}}_{8,n}^{(M)}\right)$	$\alpha$
$\hat{\mathbf{H}}_{8,1}^{(I)}$	<b>0.0267</b>	<b>0.3619</b>	<b>0.5639</b>	(1, 1)
$\hat{\mathbf{H}}_{8,2}^{(II)}$	<b>0.0267</b>	<b>0.3619</b>	<b>0.5639</b>	(1, 1/2)

A busca por transformadas aproximadas de comprimento  $N = 16$  retornou três matrizes em cada método. As aproximações obtidas pelo Método I apresentam um melhor desempenho em termos das figuras de mérito do que as do Método II, conforme representado na Tabela 8.

Tabela 8 – Aproximações obtidas para a DHT de comprimento  $N = 16$  e as figuras de mérito correspondentes.

Aproximação	Desvio de ortogonalidade	Erro de energia total	Erro de involução	Vetor de parâmetros
$\hat{\mathbf{H}}_{16,n}^{(M)}$	$\phi\left(\hat{\mathbf{H}}_{16,n}^{(M)}\right)$	$\epsilon\left(\hat{\mathbf{H}}_{16,n}^{(M)}\right)$	$\lambda\left(\hat{\mathbf{H}}_{16,n}^{(M)}\right)$	$\alpha$
$\hat{\mathbf{H}}_{16,1}^{(I)}$	0.0295	1.1761	0.8622	(1, 2, 2, 1/2)
$\hat{\mathbf{H}}_{16,2}^{(I)}$	0.0310	<b>0.8523</b>	0.8548	(1, 1, 1, 1/2)
$\hat{\mathbf{H}}_{16,3}^{(I)}$	<b>0.0280</b>	2.8713	<b>0.8475</b>	(1/2, 1, 1, 0)
$\hat{\mathbf{H}}_{16,4}^{(II)}$	0.0395	1.3654	1.0554	(2, 2, 1, 1/2)
$\hat{\mathbf{H}}_{16,5}^{(II)}$	0.0423	1.2283	1.0002	(1, 1, 1, 1/2)
$\hat{\mathbf{H}}_{16,6}^{(II)}$	0.0392	2.9714	1.4257	(1, 1, 1/2, 0)

O maior número de aproximações foi obtido para o comprimento  $N = 32$ . Na Tabela 9, verifica-se que foram derivadas dez matrizes pelo Método I e oito pelo Método II. Novamente as aproximações produzidas pelo Método I apresentam melhores medidas de similaridade. A matriz  $\hat{\mathbf{H}}_{32,9}^{(I)}$  exibe os menores valores de desvio de ortogonalidade e erro de involução, porém, possui o maior erro de energia total entre as aproximações de mesmo comprimento, assim como ocorre com a matriz  $\hat{\mathbf{H}}_{7,3}^{(I)}$ . Em oposição, as matrizes  $\hat{\mathbf{H}}_{32,1}^{(I)}$  e  $\hat{\mathbf{H}}_{32,2}^{(I)}$  possuem valores baixos para as três figuras de mérito simultaneamente.

Analisando as matrizes de comprimento 32, pode-se observar que as aproximações  $\hat{\mathbf{H}}_{32,14}^{(II)}$  e  $\hat{\mathbf{H}}_{32,17}^{(II)}$  possuem os mesmos valores para as métricas avaliadas, apesar de serem matrizes distintas. Esta foi a única ocorrência deste tipo verificada.

Tabela 9 – Aproximações obtidas para a DHT de comprimento  $N = 32$  e as figuras de mérito correspondentes.

Aproximação	Desvio de ortogonalidade	Erro de energia total	Erro de involução	Vetor de parâmetros
$\hat{\mathbf{H}}_{32,n}^{(M)}$	$\phi\left(\hat{\mathbf{H}}_{32,n}^{(M)}\right)$	$\epsilon\left(\hat{\mathbf{H}}_{32,n}^{(M)}\right)$	$\lambda\left(\hat{\mathbf{H}}_{32,n}^{(M)}\right)$	$\alpha$
$\hat{\mathbf{H}}_{32,1}^{(I)}$	0.0284	<b>1.7205</b>	1.1434	(2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1/2)
$\hat{\mathbf{H}}_{32,2}^{(I)}$	0.0255	2.4161	1.1187	(1, 2, 2, 2, 2, 1, 1/2, 1/2)
$\hat{\mathbf{H}}_{32,3}^{(I)}$	0.0250	5.7363	1.1076	(1, 2, 2, 2, 2, 1, 0, 1/2)
$\hat{\mathbf{H}}_{32,4}^{(I)}$	0.0242	8.1737	1.0858	(1, 2, 2, 1, 2, 2, 1/2, 0)
$\hat{\mathbf{H}}_{32,5}^{(I)}$	0.0230	12.1986	1.0801	(1, 2, 2, 1/2, 2, 2, 1/2, 0)
$\hat{\mathbf{H}}_{32,6}^{(I)}$	0.0243	3.0676	1.1274	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1/2, 0)
$\hat{\mathbf{H}}_{32,7}^{(I)}$	0.0220	15.6260	1.0516	(1, 2, 2, 1/2, 2, 2, 0, 0)
$\hat{\mathbf{H}}_{32,8}^{(I)}$	0.0235	11.5455	1.0697	(1/2, 1, 1, 1/2, 1, 1, 0, 0)
$\hat{\mathbf{H}}_{32,9}^{(I)}$	<b>0.0217</b>	21.2621	<b>1.0506</b>	(1/2, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0)
$\hat{\mathbf{H}}_{32,10}^{(I)}$	0.0241	7.1600	1.1696	(1/2, 1/2, 1, 1, 1, 1/2, 0, 0)
$\hat{\mathbf{H}}_{32,11}^{(II)}$	0.0472	3.3524	1.5513	(2, 2, 2, 2, 2, 1, 1/2, 1/2)
$\hat{\mathbf{H}}_{32,12}^{(II)}$	0.0459	4.1536	1.7149	(2, 2, 2, 2, 2, 1/2, 1/2, 1/2)
$\hat{\mathbf{H}}_{32,13}^{(II)}$	0.0456	7.7907	2.1359	(2, 2, 2, 2, 1, 1/2, 0, 1/2)
$\hat{\mathbf{H}}_{32,14}^{(II)}$	0.0454	9.3730	2.3522	(2, 2, 2, 2, 1, 0, 0, 1/2)
$\hat{\mathbf{H}}_{32,15}^{(II)}$	0.0458	5.0439	1.8631	(2, 2, 2, 2, 2, 1/2, 1/2, 0)
$\hat{\mathbf{H}}_{32,16}^{(II)}$	0.0457	7.3295	2.1896	(2, 2, 2, 2, 1, 0, 1/2, 0)
$\hat{\mathbf{H}}_{32,17}^{(II)}$	0.0454	9.3730	2.3522	(2, 2, 2, 2, 1, 1/2, 0, 0)
$\hat{\mathbf{H}}_{32,18}^{(II)}$	0.0453	10.9554	2.5388	(1, 1, 1, 1, 1/2, 0, 0, 0)

## 5.2 Complexidade Computacional

A complexidade computacional das aproximações propostas pode ser calculada pela complexidade aritmética, obtida pelo número de multiplicações, adições e deslocamentos de *bits* necessários para sua implementação. Para cada comprimento de bloco, pretende-se derivar um algoritmo rápido para a aproximação obtida pelo Método I com menor erro de energia total. A complexidade aritmética dessas aproximações é apresentada em conjunto com a complexidade das aproximações geradas pelo Método II, que já encontram-se fatoradas. É apresentada também a complexidade da DHT exata com os algoritmos de Winograd e de Cooley-Tukey para os comprimentos curtos e de potência de dois, respectivamente.

### 5.2.1 Comprimentos Curtos Primos

As aproximações com melhor desempenho em termos de erro de energia total foram  $\hat{\mathbf{H}}_{3,1}^{(I)}$ ,  $\hat{\mathbf{H}}_{5,1}^{(I)}$  e  $\hat{\mathbf{H}}_{7,1}^{(I)}$ . Foram derivadas fatorações para essas transformadas, porém as complexidades obtidas não são inferiores a forma direta, assim, optou-se por deixar na forma não fatorada. A representação matricial de tais aproximações é apresentada a seguir, desconsiderando a matriz diagonal de ajuste:

$$\hat{\mathbf{H}}_{3,1}^{(I)} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{4} & -1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{5,1}^{(I)} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{4} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{7,1}^{(I)} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{4} & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

As complexidades aritméticas da DHT exata com o algoritmo de Winograd [36], da aproximação com o menor erro de energia total e das aproximações obtidas pelo Método II são apresentadas nas Tabelas 10, 11 e 12 para os comprimentos  $N = 3, 5, 7$ , respectivamente.

Para os três comprimentos, verifica-se que as aproximações possuem complexidade aditiva similar à da transformada exata e que são livres de multiplicações. O número de adições das aproximações derivadas pelo Método II pode ser reduzido em relação ao da transformada exata, se algum parâmetro multiplicativo for substituído por zero, ou seja, se um ou mais coeficientes do vetor de parâmetros for nulo, o que ocorre com  $\hat{\mathbf{H}}_{5,7}^{(II)}$ , por exemplo. Além disso, nota-se que as transformadas obtidas pelo Método I apresentam a maior quantidade de adições e deslocamentos de *bits*, em virtude de não estarem fatoradas.

As aproximações derivadas pelo Método II

Tabela 10 – Complexidade aritmética das transformadas de comprimento  $N = 3$ .

Transformada	Adições	Multiplicações	Deslocamentos de <i>bits</i>
$\mathbf{H}_3$ [36]	6	2	0
$\hat{\mathbf{H}}_{3,1}^{(I)}$	6	0	2
$\hat{\mathbf{H}}_{3,3}^{(II)}$	6	0	1

Tabela 11 – Complexidade aritmética das transformadas de comprimento  $N = 5$ .

Transformada	Adições	Multiplicações	Deslocamentos de <i>bits</i>
$\mathbf{H}_5$ [36]	17	5	0
$\hat{\mathbf{H}}_{5,1}^{(I)}$	20	0	8
$\hat{\mathbf{H}}_{5,3}^{(II)}$	17	0	1
$\hat{\mathbf{H}}_{5,4}^{(II)}$	17	0	3
$\hat{\mathbf{H}}_{5,5}^{(II)}$	17	0	3
$\hat{\mathbf{H}}_{5,6}^{(II)}$	17	0	2
$\hat{\mathbf{H}}_{5,7}^{(II)}$	15	0	2

Tabela 12 – Complexidade aritmética das transformadas de comprimento  $N = 7$ .

Transformada	Adições	Multiplicações	Deslocamentos de <i>bits</i>
$\mathbf{H}_7$ [36]	40	8	0
$\hat{\mathbf{H}}_{7,1}^{(I)}$	42	0	18
$\hat{\mathbf{H}}_{7,7}^{(II)}$	40	0	5
$\hat{\mathbf{H}}_{7,8}^{(II)}$	32	0	1
$\hat{\mathbf{H}}_{7,9}^{(II)}$	36	0	3
$\hat{\mathbf{H}}_{7,10}^{(II)}$	40	0	4

### 5.2.2 Comprimentos de Potências de Dois

Um algoritmo rápido para a transformada  $\hat{\mathbf{H}}_{8,1}^{(I)} = \hat{\mathbf{H}}_{\text{RDHT-8}}$  foi proposto em [67], a complexidade aditiva desse algoritmo é de 22 adições. A mesma aproximação derivada pelo Método II,  $\hat{\mathbf{H}}_{8,2}^{(II)} = \hat{\mathbf{H}}_{\text{RDHT-8}}$ , demanda 26 operações de adição com o algoritmo de Cooley-Tukey. Isso deve-se ao fato de que o Método II não altera a estrutura da fatoração utilizada para obter a aproximação. Assim, é possível que a complexidade aditiva das matrizes geradas a partir desse método seja reduzida por meio de outros algoritmos rápidos.

As aproximações de comprimento 16 e 32 com o menor erro de energia total foram  $\hat{\mathbf{H}}_{16,2}^{(I)}$  e  $\hat{\mathbf{H}}_{32,1}^{(I)}$ . Para essas aproximações, foram propostos algoritmos rápidos que estão apresentados no Apêndice B.

As complexidades aritméticas da DHT exata com o algoritmo de Cooley-Tukey [28], da aproximação com o menor erro de energia total e das aproximações obtidas pelo Método II são apresentadas nas Tabelas 13, 14 e 15 para os comprimentos  $N = 8, 16, 32$ , respectivamente.

Para esses comprimentos de potências de dois, verifica-se novamente que as aproximações possuem complexidade aditiva semelhante à da DHT exata e que são livres de multiplicações. Entretanto, os algoritmos rápidos das transformadas obtidas pelo Método I proporcionam uma menor complexidade aditiva, em comparação com as aproximações do Método II.

Tabela 13 – Complexidade aritmética das transformadas de comprimento  $N = 8$ .

Transformada	Adições	Multiplificações	Deslocamentos de <i>bits</i>
$\mathbf{H}_8$ [28]	26	2	0
$\hat{\mathbf{H}}_{8,1}^{(I)}$ [67]	22	0	0
$\hat{\mathbf{H}}_{8,2}^{(II)}$	26	0	2

Tabela 14 – Complexidade aritmética das transformadas de comprimento  $N = 16$ .

Transformada	Adições	Multiplificações	Deslocamentos de <i>bits</i>
$\mathbf{H}_{16}$ [28]	74	14	0
$\hat{\mathbf{H}}_{16,2}^{(I)}$	60	0	4
$\hat{\mathbf{H}}_{16,4}^{(II)}$	74	0	10
$\hat{\mathbf{H}}_{16,5}^{(II)}$	74	0	4
$\hat{\mathbf{H}}_{16,6}^{(II)}$	70	0	6

Tabela 15 – Complexidade aritmética das transformadas de comprimento  $N = 32$ .

Transformada	Adições	Multiplificações	Deslocamentos de <i>bits</i>
$\mathbf{H}_{32}$ [28]	194	54	0
$\hat{\mathbf{H}}_{32,1}^{(I)}$	162	0	20
$\hat{\mathbf{H}}_{32,11}^{(II)}$	194	0	20
$\hat{\mathbf{H}}_{32,12}^{(II)}$	194	0	20
$\hat{\mathbf{H}}_{32,13}^{(II)}$	182	0	22
$\hat{\mathbf{H}}_{32,14}^{(II)}$	178	0	18
$\hat{\mathbf{H}}_{32,15}^{(II)}$	190	0	16
$\hat{\mathbf{H}}_{32,16}^{(II)}$	186	0	26
$\hat{\mathbf{H}}_{32,17}^{(II)}$	178	0	18
$\hat{\mathbf{H}}_{32,18}^{(II)}$	174	0	14

### 5.3 Síntese dos Resultados

Na Tabela 16 é exibida a quantidade de matrizes obtidas para cada comprimento e método. Em seguida, nas Tabelas 17 e 18, são rerepresentadas de forma condensada todas as aproximações derivadas neste trabalho e a complexidade aritmética de algumas transformadas selecionadas. No próximo capítulo, as aproximações de comprimento  $N = 32$  são avaliadas no contexto de reconhecimento facial.

Tabela 16 – Quantidade de aproximações obtidas para cada comprimento e método.

Comprimento $N$	Método		
	I	II	Todos
3	2	1	3
5	2	5	7
7	6	4	10
8	1	1	1
16	3	3	6
32	10	8	18
Todos comprimentos	24	22	45

Tabela 17 – Todas as aproximações obtidas e as figuras de mérito correspondentes.

Aproximação	Desvio de ortogonalidade	Erro de energia total	Erro de involução	Vetor de parâmetros
$\hat{\mathbf{H}}_{N,n}^{(M)}$	$\phi \left( \hat{\mathbf{H}}_{N,n}^{(M)} \right)$	$\epsilon \left( \hat{\mathbf{H}}_{N,n}^{(M)} \right)$	$\lambda \left( \hat{\mathbf{H}}_{N,n}^{(M)} \right)$	$\alpha$
$\hat{\mathbf{H}}_{3,1}^{(I)}$	0.0253	<b>0.1512</b>	0.2975	(2, 1/2, 2)
$\hat{\mathbf{H}}_{3,2}^{(I)}$	<b>0.0219</b>	0.1696	<b>0.2712</b>	(1, 1/2, 2)
$\hat{\mathbf{H}}_{3,3}^{(II)}$	0.0532	0.4573	0.5195	(1, 2, 1)
$\hat{\mathbf{H}}_{5,1}^{(I)}$	0.0217	<b>0.2254</b>	0.3324	(2, 2, 1/2, 2, 1)
$\hat{\mathbf{H}}_{5,2}^{(I)}$	<b>0.0063</b>	0.9687	<b>0.2155</b>	(1, 1, 0, 2, 1/2)
$\hat{\mathbf{H}}_{5,3}^{(II)}$	0.0378	2.5401	0.6165	(1, 1, 1/2, 1, 1, 1)
$\hat{\mathbf{H}}_{5,4}^{(II)}$	0.0758	1.0048	0.7232	(1, 1, 1/2, 1, 2, 1/2)

Tabela 17 – Continuação da página anterior

$\hat{H}_{N,n}^{(M)}$	$\phi \left( \hat{H}_{N,n}^{(M)} \right)$	$\epsilon \left( \hat{H}_{N,n}^{(M)} \right)$	$\lambda \left( \hat{H}_{N,n}^{(M)} \right)$	$\alpha$
$\hat{H}_{5,5}^{(II)}$	0.0958	1.5712	0.6950	(1/2, 1, 1/2, 1, 2, 1/2)
$\hat{H}_{5,6}^{(II)}$	0.0753	1.6290	0.6256	(1, 1, 1/2, 1, 1, 1/2)
$\hat{H}_{5,7}^{(II)}$	0.0643	1.2917	0.8392	(1, 1, 1/2, 1, 2, 0)
$\hat{H}_{7,1}^{(I)}$	0.0414	<b>0.4294</b>	0.6787	(2, 2, 1, 1, 2, 2, 1/2)
$\hat{H}_{7,2}^{(I)}$	0.0372	0.4346	0.6023	(2, 2, 1, 1/2, 2, 2, 1/2)
$\hat{H}_{7,3}^{(I)}$	<b>0.0047</b>	3.0699	<b>0.2546</b>	(1, 2, 0, 1/2, 1, 1, 1/2)
$\hat{H}_{7,4}^{(I)}$	0.0273	0.4372	0.4540	(2, 2, 1, 1/2, 2, 2, 0)
$\hat{H}_{7,5}^{(I)}$	0.0215	0.4767	0.4774	(1, 2, 1, 1/2, 2, 2, 0)
$\hat{H}_{7,6}^{(I)}$	0.0133	0.8620	0.3776	(1, 1, 1, 1/2, 1, 1, 0)
$\hat{H}_{7,7}^{(II)}$	0.0347	1.3203	0.6170	(2, 2, 2, 1/2, 1, 1, 1, 1, 2)
$\hat{H}_{7,8}^{(II)}$	0.0306	1.6877	0.6488	(1, 1, 1, 0, 1, 1/2, 0, 1, 1)
$\hat{H}_{7,9}^{(II)}$	0.0315	0.7324	0.6664	(1, 1, 1, 0, 1, 1/2, 1/2, 1/2, 1)
$\hat{H}_{7,10}^{(II)}$	0.0211	1.9342	0.5443	(2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2)
$\hat{H}_{8,1}^{(I)}$	<b>0.0267</b>	<b>0.3619</b>	<b>0.5639</b>	(1, 1)
$\hat{H}_{8,2}^{(II)}$	<b>0.0267</b>	<b>0.3619</b>	<b>0.5639</b>	(1, 1/2)
$\hat{H}_{16,1}^{(I)}$	0.0295	1.1761	0.8622	(1, 2, 2, 1/2)
$\hat{H}_{16,2}^{(I)}$	0.0310	<b>0.8523</b>	0.8548	(1, 1, 1, 1/2)
$\hat{H}_{16,3}^{(I)}$	<b>0.0280</b>	2.8713	<b>0.8475</b>	(1/2, 1, 1, 0)
$\hat{H}_{16,4}^{(II)}$	0.0395	1.3654	1.0554	(2, 2, 1, 1/2)
$\hat{H}_{16,5}^{(II)}$	0.0423	1.2283	1.0002	(1, 1, 1, 1/2)
$\hat{H}_{16,6}^{(II)}$	0.0392	2.9714	1.4257	(1, 1, 1/2, 0)
$\hat{H}_{32,1}^{(I)}$	0.0284	<b>1.7205</b>	1.1434	(2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1/2)
$\hat{H}_{32,2}^{(I)}$	0.0255	2.4161	1.1187	(1, 2, 2, 2, 2, 1, 1/2, 1/2)
$\hat{H}_{32,3}^{(I)}$	0.0250	5.7363	1.1076	(1, 2, 2, 2, 2, 1, 0, 1/2)
$\hat{H}_{32,4}^{(I)}$	0.0242	8.1737	1.0858	(1, 2, 2, 1, 2, 2, 1/2, 0)
$\hat{H}_{32,5}^{(I)}$	0.0230	12.1986	1.0801	(1, 2, 2, 1/2, 2, 2, 1/2, 0)
$\hat{H}_{32,6}^{(I)}$	0.0243	3.0676	1.1274	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1/2, 0)
$\hat{H}_{32,7}^{(I)}$	0.0220	15.6260	1.0516	(1, 2, 2, 1/2, 2, 2, 0, 0)
$\hat{H}_{32,8}^{(I)}$	0.0235	11.5455	1.0697	(1/2, 1, 1, 1/2, 1, 1, 0, 0)
$\hat{H}_{32,9}^{(I)}$	<b>0.0217</b>	21.2621	<b>1.0506</b>	(1/2, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0)

Tabela 17 – Continuação da página anterior

$\hat{\mathbf{H}}_{N,n}^{(M)}$	$\phi \left( \hat{\mathbf{H}}_{N,n}^{(M)} \right)$	$\epsilon \left( \hat{\mathbf{H}}_{N,n}^{(M)} \right)$	$\lambda \left( \hat{\mathbf{H}}_{N,n}^{(M)} \right)$	$\alpha$
$\hat{\mathbf{H}}_{32,10}^{(I)}$	0.0241	7.1600	1.1696	(1/2, 1/2, 1, 1, 1, 1/2, 0, 0)
$\hat{\mathbf{H}}_{32,11}^{(II)}$	0.0472	3.3524	1.5513	(2, 2, 2, 2, 2, 1, 1/2, 1/2)
$\hat{\mathbf{H}}_{32,12}^{(II)}$	0.0459	4.1536	1.7149	(2, 2, 2, 2, 2, 1/2, 1/2, 1/2)
$\hat{\mathbf{H}}_{32,13}^{(II)}$	0.0456	7.7907	2.1359	(2, 2, 2, 2, 1, 1/2, 0, 1/2)
$\hat{\mathbf{H}}_{32,14}^{(II)}$	0.0454	9.3730	2.3522	(2, 2, 2, 2, 1, 0, 0, 1/2)
$\hat{\mathbf{H}}_{32,15}^{(II)}$	0.0458	5.0439	1.8631	(2, 2, 2, 2, 2, 1/2, 1/2, 0)
$\hat{\mathbf{H}}_{32,16}^{(II)}$	0.0457	7.3295	2.1896	(2, 2, 2, 2, 1, 0, 1/2, 0)
$\hat{\mathbf{H}}_{32,17}^{(II)}$	0.0454	9.3730	2.3522	(2, 2, 2, 2, 1, 1/2, 0, 0)
$\hat{\mathbf{H}}_{32,18}^{(II)}$	0.0453	10.9554	2.5388	(1, 1, 1, 1, 1/2, 0, 0, 0)

Tabela 18 – Complexidade aritmética das transformadas selecionadas.

Transformada	Adições	Multiplicações	Deslocamentos de <i>bits</i>
$\mathbf{H}_3$ [36]	6	2	0
$\hat{\mathbf{H}}_{3,1}^{(I)}$	6	0	2
$\hat{\mathbf{H}}_{3,3}^{(II)}$	6	0	1
$\mathbf{H}_5$ [36]	17	5	0
$\hat{\mathbf{H}}_{5,1}^{(I)}$	20	0	8
$\hat{\mathbf{H}}_{5,3}^{(II)}$	17	0	1
$\hat{\mathbf{H}}_{5,4}^{(II)}$	17	0	3
$\hat{\mathbf{H}}_{5,5}^{(II)}$	17	0	3
$\hat{\mathbf{H}}_{5,6}^{(II)}$	17	0	2
$\hat{\mathbf{H}}_{5,7}^{(II)}$	15	0	2
$\mathbf{H}_7$ [36]	40	8	0
$\hat{\mathbf{H}}_{7,1}^{(I)}$	42	0	18
$\hat{\mathbf{H}}_{7,7}^{(II)}$	40	0	5
$\hat{\mathbf{H}}_{7,8}^{(II)}$	32	0	1
$\hat{\mathbf{H}}_{7,9}^{(II)}$	36	0	3
$\hat{\mathbf{H}}_{7,10}^{(II)}$	40	0	4

Tabela 18 – Continuação da página anterior

Transformada	Adições	Multiplicações	Deslocamentos de <i>bits</i>
$\mathbf{H}_8$ [28]	26	2	0
$\hat{\mathbf{H}}_{8,1}^{(I)}$ [67]	22	0	0
$\hat{\mathbf{H}}_{8,2}^{(II)}$	26	0	2
$\mathbf{H}_{16}$ [28]	74	14	0
$\hat{\mathbf{H}}_{16,2}^{(I)}$	60	0	4
$\hat{\mathbf{H}}_{16,4}^{(II)}$	74	0	10
$\hat{\mathbf{H}}_{16,5}^{(II)}$	74	0	4
$\hat{\mathbf{H}}_{16,6}^{(II)}$	70	0	6
$\mathbf{H}_{32}$ [28]	194	54	0
$\hat{\mathbf{H}}_{32,1}^{(I)}$	162	0	20
$\hat{\mathbf{H}}_{32,11}^{(II)}$	194	0	20
$\hat{\mathbf{H}}_{32,12}^{(II)}$	194	0	20
$\hat{\mathbf{H}}_{32,13}^{(II)}$	182	0	22
$\hat{\mathbf{H}}_{32,14}^{(II)}$	178	0	18
$\hat{\mathbf{H}}_{32,15}^{(II)}$	190	0	16
$\hat{\mathbf{H}}_{32,16}^{(II)}$	186	0	26
$\hat{\mathbf{H}}_{32,17}^{(II)}$	178	0	18
$\hat{\mathbf{H}}_{32,18}^{(II)}$	174	0	14

## 6 RECONHECIMENTO FACIAL

Uma das habilidades mais notáveis da visão humana é a capacidade de realizar o reconhecimento facial. Ela se desenvolve ao longo da infância, sendo importante em vários aspectos da vida social, como interpretar a expressão das pessoas com as quais se interage. Essa e outras habilidades relacionadas desempenharam um papel importante no curso da evolução humana [95].

Um sistema automatizado de reconhecimento facial é útil para a identificação humana e encontra aplicações em interfaces de usuário interativas, indústria de publicidade, serviços de entretenimento e codificação de vídeo [96]. Em virtude das inúmeras aplicações possíveis, o reconhecimento facial automático tornou-se uma área de pesquisa muito ativa [97].

Em sistemas de vigilância, a tecnologia de reconhecimento facial possui a vantagem de poder ser utilizada em locais com grande número de pessoas [98]. Em comparação com outros sistemas biométricos, que usam impressão digital e escaneamento de íris, o reconhecimento facial tem vantagens distintas devido ao seu processo sem contato direto. As imagens faciais podem ser capturadas à distância e o procedimento não requer interação com o indivíduo que está sendo identificado [99].

Um sistema de reconhecimento facial tem como objetivo a verificação ou a identificação de pessoas. A verificação facial é um problema de autenticação, em que o sistema aceita ou rejeita a identidade reivindicada da face utilizada como entrada. De outro modo, em problemas de identificação o sistema determina a identidade da face consultada a partir de uma base de dados de pessoas conhecidas [98].

Um sistema de reconhecimento facial completo deve executar os seguintes três estágios: detecção facial, extração de características e reconhecimento facial [96]. O primeiro estágio consiste em detectar as faces em uma imagem. No estágio intermediário, o objetivo é extrair características pertinentes da imagem localizada na etapa anterior. Finalmente, o último estágio envolve a classificação das imagens faciais com base nas características obtidas [100]. Cada uma dessas etapas é uma área separada de estudo [96].

Em geral, os métodos de reconhecimento facial são divididos em duas categorias: holísticos e baseados em características [97, 101]. Os métodos holísticos, também chamados de

globais ou baseados em aparência, utilizam toda a informação disponível de uma imagem facial para obter uma padrão de referência [102]. Normalmente, nesse tipo de abordagem, procura-se reduzir a dimensionalidade dos dados, conservando as variações entre as faces [103]. Alguns dos algoritmos mais conhecidos baseados em métodos holísticos são o Eigenfaces [104] e o Fisherfaces [105], que utilizam análise de componentes principais (PCA) e análise de discriminantes lineares (LDA), respectivamente.

Nos métodos baseados em características, também denominados de locais, a imagem de entrada é processada para extrair características faciais, como olhos, nariz, boca e sobrancelhas. As relações geométricas entre as características são usadas em abordagens de reconhecimento de padrões para identificar os indivíduos [103]. As particularidades da face permitem o reconhecimento mesmo na presença de ruídos como chapéus, óculos e cabelo [100]. Enquanto os métodos holísticos usualmente empregam análise estatística, os métodos baseados em características exploram mais as áreas de processamento de imagens e visão computacional [102]. Duas das técnicas mais populares para a extração de características faciais são baseadas em Gabor wavelets [106–108] e padrão binário local (LBP) [109–111].

Reconhecimento facial se tornou um dos temas mais investigados na área de identificação biométrica, além das abordagens mencionadas anteriormente, outras diversas foram desenvolvidas [98, 102, 103, 112, 113]. A aplicação de filtros de correlação [114] se mostrou uma alternativa relevante para o reconhecimento facial no domínio da frequência de Fourier em oposição aos tradicionais métodos existentes no domínio do espaço [115].

Savvides e colaboradores foram os primeiros a constatar um bom desempenho dos filtros de correlação para reconhecimento facial [116]. Os filtros de correlação apresentam vantagens como baixa degradação em situações com faces parcialmente oclusas e invariância ao deslocamento, eliminando a necessidade de centrar as imagens faciais [115]. Uma desvantagem dos filtros de correlação é a complexidade de implementação inerente ao cômputo de 2D DFTs, o que pode inviabilizar a aplicação destes filtros em procedimentos de larga escala [115].

Neste capítulo, é proposto um método de reconhecimento facial baseado em filtros de correlação no domínio da frequência de Hartley. As aproximações para a transformada de Hartley obtidas no capítulo anterior são estendidas para transformadas aproximadas bidimensionais e utilizadas com o intuito de diminuir a complexidade do algoritmo de reconhecimento, preservando o desempenho ao máximo.

## 6.1 Filtros de Correlação

Em processamento de sinais, a correlação é uma métrica de similaridade entre dois sinais [117]. Em aplicações de reconhecimento de padrões, a correlação é usualmente empregada para avaliar a correspondência entre um sinal de teste e um sinal de referência [114]. O valor máximo da correlação entre dois sinais (pico de correlação) pode ser usado para caracterizar a similaridade entre os sinais. Picos de correlação elevados indicam que esses sinais apresentam um comportamento semelhante no tempo ou no espaço [118]. Se os sinais comparados apresentam um deslocamento relativo, então o pico do sinal de correlação é equitativamente deslocado em relação à origem [115].

Filtros de correlação foram empregados com êxito em uma série de aplicações tais como rastreamento facial [119], reconhecimento de impressões digitais [120], localização de pedestres [121] e reconhecimento de íris [122]. Os filtros de correlação são padrões de referência (*templates*) projetados de acordo com critérios prefixados [118].

Uma imagem de teste  $x_q$  é correlacionada com um filtro  $h$  produzindo o plano de correlação  $g$ . Esta operação pode ser realizada com eficiência no domínio da frequência de Fourier da seguinte forma [118]:

$$\mathbf{G} = \mathbf{X} \odot \mathbf{H}^*, \quad (6.1)$$

em que o operador  $\odot$  é o produto de Hadamard,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{H}$  são as 2D DFTs da correlação de saída, da imagem de teste e do filtro de correlação, respectivamente.

O filtro de correlação mais básico é o filtro casado (MF - *matched filter*), que é simplesmente a 2D DFT de uma imagem facial usada como padrão de referência. Este filtro apresenta bom desempenho para detectar a imagem de referência deslocada e na presença de ruído branco aditivo. Entretanto, quando as imagens de teste e referência divergem de qualquer outra maneira, como por exemplo rotação ou mudança de escala, o filtro deixa de ter um bom desempenho [116].

No reconhecimento facial, as imagens de teste de um indivíduo tendem a diferir da imagem de referência deste mesmo indivíduo devido a variações normais, como mudança de expressão, envelhecimento e posicionamento da face [123]. Dessa forma, uma solução teórica seria utilizar um MF para cada possível aparência de um mesma face. Evidentemente, a quantidade necessária de filtros para representar todas as variações faciais torna esta abordagem computacionalmente inviável [115].

Com o objetivo de usar menos filtros de correlação para o reconhecimento de padrões,

foi introduzido o filtro de função discriminante sintética (SDF) [124], que emprega uma série de imagens faciais de treinamento na sua composição. O filtro SDF é uma combinação linear de filtros casados em que os coeficientes de combinação são escolhidos de modo que a correlação com as imagens de treinamento gere picos na origem de valor predeterminado.

Um filtro SDF típico exibe pico de correlação na origem igual a 1 para as imagens de treinamento autênticas e igual a 0 para as imagens de treinamento impostoras [115]. Assim, espera-se que a correlação na origem do filtro resultante com imagens de teste produza valores próximos a 1 para imagens autênticas e próximos a 0 para imagens impostoras.

O filtro SDF é desenvolvido para produzir picos de valor predefinido apenas na origem, por isso não há nenhum controle sobre o restante do plano de correlação. Picos de correlação em regiões distintas da origem são comuns e podem inclusive ser maiores que o pico da origem, o que resulta em classificações errôneas se as imagens de teste não estão devidamente centralizadas [116].

Em uma tentativa de reduzir os lóbulos laterais produzidos na correlação com o filtro SDF, Mahalanobis e colaboradores propuseram o filtro de mínima energia de correlação média (MACE - *minimum average correlation energy*) [125]. Esse filtro minimiza a energia do plano de correlação de modo que o máximo absoluto esteja na origem para as imagens de treinamento autênticas e centralizadas.

A correlação de um filtro MACE bem projetado com imagens de entrada autênticas normalmente exibe um pico acentuado, que destaca-se em relação ao plano de correlação. Dessa forma, a centralização de tal pico é dispensável, pois a sua detecção e localização podem ser efetuadas de maneira relativamente simples e robusta [115]. O filtro MACE foi escolhido para ser o filtro de correlação usado no procedimento de reconhecimento facial neste trabalho. Na próxima seção, é explicado o processo de construção deste filtro.

### 6.1.1 Filtro MACE

O filtro MACE é projetado a partir de  $N$  imagens de treinamento, representadas por matrizes  $\mathbf{x}_i$  de tamanho  $d \times d$  [116]. Primeiramente, calcula-se a 2D DFT das imagens e, em seguida, as matrizes resultantes são organizadas em vetores unidimensionais  $\mathbf{X}_i$  por meio de um ordenamento lexicográfico. Os vetores  $\mathbf{X}_i$  possuem comprimento  $d^2$  e são usados para compor

as colunas da matriz

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 | \mathbf{X}_2 | \cdots | \mathbf{X}_N], \quad (6.2)$$

de tamanho  $d^2 \times N$ .

O filtro MACE é representado por um vetor coluna  $\mathbf{h}$  com  $d^2$  elementos. Exige-se que a resposta do filtro às imagens de treinamento gere valores predeterminados  $u_i$  na origem do plano de correlação, estas restrições são expressas por:

$$\mathbf{X}^\dagger \mathbf{h} = \mathbf{u}, \quad (6.3)$$

em que  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^\top$  e o símbolo  $\dagger$  sobrescrito representa o conjugado transposto.

A correlação do filtro com uma imagem de treinamento é representada por:

$$\mathbf{g}_i = \text{diag}_v(\mathbf{X}_i^*) \cdot \mathbf{h}, \quad (6.4)$$

em que  $\text{diag}_v(\cdot)$  retorna uma matriz diagonal, cuja diagonal é igual ao vetor de entrada. Portanto, a energia de correlação de  $\mathbf{h}$  com  $\mathbf{X}_i$  é calculada por:

$$E_i = \mathbf{g}_i^\dagger \mathbf{g}_i = \mathbf{h}^\dagger \cdot \text{diag}_v(\mathbf{X}_i) \cdot \text{diag}_v(\mathbf{X}_i^*) \cdot \mathbf{h}, \quad (6.5)$$

a expressão acima pode ser reescrita como:

$$E_i = \mathbf{h}^\dagger \mathbf{D}_i \mathbf{h}, \quad (6.6)$$

em que a matriz diagonal  $\mathbf{D}_i = \text{diag}_v(\mathbf{X}_i) \cdot \text{diag}_v(\mathbf{X}_i^*)$  contém o espectro de potência de  $\mathbf{x}_i$  em sua diagonal.

As energias de correlação  $E_i$ , correspondentes às imagens  $\mathbf{x}_i$ , não podem ser simultaneamente minimizadas, estando sujeitas à restrição da Equação 6.3. Ao invés disso, minimiza-se a energia de correlação média, ou seja, o valor médio de  $E_i$ :

$$E_{avg} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{h}^\dagger \mathbf{D}_i \mathbf{h} = \mathbf{h}^\dagger \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{D}_i \right) \mathbf{h} = \mathbf{h}^\dagger \mathbf{D} \mathbf{h}, \quad (6.7)$$

em que a matriz diagonal  $\mathbf{D} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{D}_i$  contém a média do espectro de potência das imagens de treinamento ao longo de sua diagonal.

A minimização do termo quadrático  $\mathbf{h}^\dagger \mathbf{D} \mathbf{h}$  submetido às restrições lineares  $\mathbf{X}^\dagger \mathbf{h} = \mathbf{u}$  conduz à seguinte solução de forma fechada [125]:

$$\mathbf{h} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{X} (\mathbf{X}^\dagger \mathbf{D}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{u}. \quad (6.8)$$

Conforme descrito anteriormente, o filtro  $\mathbf{h}$  projetado é um vetor unidimensional com  $d^2$  elementos, portanto, o filtro de correlação bidimensional é obtido com o reordenamento do vetor coluna em uma matriz.

## 6.2 Filtros de Correlação no Domínio de Hartley

As imagens utilizadas neste trabalho são representadas por sinais reais, portanto, para evitar operações com números complexos, propõe-se a construção e aplicação de filtros de correlação no domínio da frequência Hartley. A correlação  $\mathbf{g}$  entre um imagem de teste  $\mathbf{x}_q$  e um filtro  $\mathbf{h}$  é realizada no domínio de Hartley por [126]:

$$\mathbf{G} = \mathbf{X}_e \odot \mathbf{H}_e + \mathbf{X}_o \odot \mathbf{H}_e + \mathbf{X}_o \odot \mathbf{H}_o - \mathbf{X}_e \odot \mathbf{H}_o, \quad (6.9)$$

em que  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{H}$  são as 2D DHTs da correlação de saída, da imagem de teste e do filtro de correlação, respectivamente, e os índices  $e$  e  $o$  referem-se as partes par e ímpar. A expressão da correlação pode ser representada de forma mais concisa por:

$$\mathbf{G} = \mathbf{X} \odot \mathbf{H}_e - \mathbf{X}_d \odot \mathbf{H}_o, \quad (6.10)$$

em que  $\mathbf{X}_d = (\mathbf{X}_e - \mathbf{X}_o)$ .

### 6.2.1 Filtro MACE no domínio de Hartley

Nesta seção demonstra-se como projetar uma versão do filtro MACE no domínio de Hartley a partir da 2D DHT de  $N$  imagens de treinamento, representadas por matrizes  $\mathbf{x}_i$  de tamanho  $d \times d$ . Utilizando a Equação 2.29 a expressão para o filtro no domínio de Hartley é obtida por:

$$\mathbf{h}^{\mathcal{H}} = \Re(\mathbf{h}^{\mathcal{F}}) - \Im(\mathbf{h}^{\mathcal{F}}), \quad (6.11)$$

em que

$$\mathbf{h}^{\mathcal{F}} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{X}^{\mathcal{F}} \left( \mathbf{X}^{\mathcal{F}\dagger} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{X}^{\mathcal{F}} \right)^{-1} \mathbf{u}, \quad (6.12)$$

é o filtro no domínio de Fourier, vide Equação 6.8.

A fim de se obter as partes real e imaginária de  $\mathbf{h}^{\mathcal{F}}$ , é necessário derivar matrizes  $\mathbf{X}^{\mathcal{H}}$ ,  $\mathbf{X}_e^{\mathcal{H}}$  e  $\mathbf{X}_o^{\mathcal{H}}$  baseadas na 2D DHT das imagens  $\mathbf{x}_i$ , que satisfaçam as seguintes relações:

$$\mathbf{X}^{\mathcal{F}} = \mathbf{X}_e^{\mathcal{H}} - j\mathbf{X}_o^{\mathcal{H}}, \quad (6.13a)$$

$$\mathbf{X}^{\mathcal{H}} = \mathbf{X}_e^{\mathcal{H}} + \mathbf{X}_o^{\mathcal{H}}. \quad (6.13b)$$

Para tal, calcula-se a 2D DHT das imagens e as suas partes par e ímpar, em seguida, as matrizes resultantes são organizadas em vetores unidimensionais  $\mathbf{X}_i^{\mathcal{H}}$ ,  $\mathbf{X}_{i_e}^{\mathcal{H}}$  e  $\mathbf{X}_{i_o}^{\mathcal{H}}$  por meio de um ordenamento lexicográfico. De modo análogo à Equação 6.2, os vetores calculados de tamanho  $d^2$  são utilizados para compor as colunas das matrizes:

$$\mathbf{X}^{\mathcal{H}} = [\mathbf{X}_1^{\mathcal{H}} | \mathbf{X}_2^{\mathcal{H}} | \dots | \mathbf{X}_N^{\mathcal{H}}], \quad (6.14a)$$

$$\mathbf{X}_e^{\mathcal{H}} = [\mathbf{X}_{1_e}^{\mathcal{H}} | \mathbf{X}_{2_e}^{\mathcal{H}} | \dots | \mathbf{X}_{N_e}^{\mathcal{H}}], \quad (6.14b)$$

$$\mathbf{X}_o^{\mathcal{H}} = [\mathbf{X}_{1_o}^{\mathcal{H}} | \mathbf{X}_{2_o}^{\mathcal{H}} | \dots | \mathbf{X}_{N_o}^{\mathcal{H}}]. \quad (6.14c)$$

A Equação 6.12 pode ser reescrita como:

$$\mathbf{h}^{\mathcal{F}} = \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{X}_e^{\mathcal{H}} - j\mathbf{X}_o^{\mathcal{H}}) \left[ (\mathbf{X}_e^{\mathcal{H}} + j\mathbf{X}_o^{\mathcal{H}})^{\top} \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{X}_e^{\mathcal{H}} - j\mathbf{X}_o^{\mathcal{H}}) \right]^{-1} \mathbf{u}. \quad (6.15)$$

Analisando separadamente o termo entre colchetes:

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}_e^{\mathcal{H}} + j\mathbf{X}_o^{\mathcal{H}})^{\top} \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{X}_e^{\mathcal{H}} - j\mathbf{X}_o^{\mathcal{H}}) &= \mathbf{X}_e^{\mathcal{H}\top} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{X}_e^{\mathcal{H}} + \mathbf{X}_o^{\mathcal{H}\top} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{X}_o^{\mathcal{H}} \\ &\quad - j \left[ \mathbf{X}_e^{\mathcal{H}\top} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{X}_o^{\mathcal{H}} - (\mathbf{X}_e^{\mathcal{H}\top} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{X}_o^{\mathcal{H}})^{\top} \right], \end{aligned} \quad (6.16)$$

verifica-se que ele é puramente real, pois

$$\mathbf{X}_e^{\mathcal{H}\top} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{X}_o^{\mathcal{H}} = 0. \quad (6.17)$$

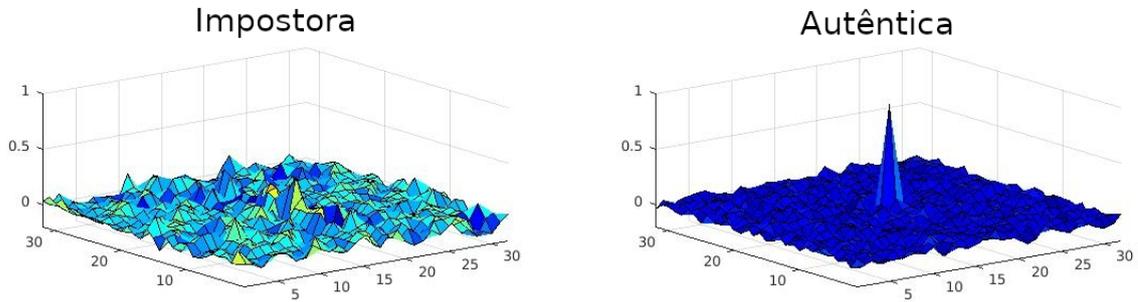
Dessa forma, obtém-se que:

$$\mathbf{h}^{\mathcal{F}} = \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{X}_e^{\mathcal{H}} - j\mathbf{X}_o^{\mathcal{H}}) \left( \mathbf{X}_e^{\mathcal{H}\top} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{X}_e^{\mathcal{H}} + \mathbf{X}_o^{\mathcal{H}\top} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{X}_o^{\mathcal{H}} \right)^{-1} \mathbf{u}. \quad (6.18)$$

Por fim, ao aplicar a expressão anterior à Equação 6.11 resulta no filtro MACE no domínio de Hartley:

$$\mathbf{h}^{\mathcal{H}} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{X}^{\mathcal{H}} \left( \mathbf{X}_e^{\mathcal{H}\top} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{X}_e^{\mathcal{H}} + \mathbf{X}_o^{\mathcal{H}\top} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{X}_o^{\mathcal{H}} \right)^{-1} \mathbf{u}. \quad (6.19)$$

Figura 1 – Exemplo de correlação de um filtro MACE com uma imagem impostora, à esquerda, e com um imagem autêntica, à direita.



### 6.3 Verificação Facial com Filtros MACE

Savvides e colaboradores [116] demonstraram o bom desempenho dos filtros MACE para verificação de faces com diferentes expressões faciais. A correlação de um filtro MACE com uma imagem de teste autêntica deve gerar um pico acentuado, enquanto a correlação com uma imagem de teste impostora não produz nenhum pico significativo. A probabilidade de uma imagem ser autêntica é maior para valores altos de pico [118]. Na Figura 1, é ilustrado um exemplo de correlação de um filtro MACE com uma imagem impostora, à esquerda, e com um imagem autêntica, à direita.

Uma outra métrica relevante para verificar se uma imagem de teste é autêntica ou impostora é a razão entre pico e lóbulos laterais (PSR - *peak-to-sidelobe ratio*) [118]. O cálculo da PSR da correlação de uma imagem de teste  $\mathbf{x}_q$  com um filtro  $\mathbf{h}$  é definido como [116]:

$$PSR(\mathbf{x}_q, \mathbf{h}) \triangleq \frac{v_p - \mu_{sl}}{\sigma_{sl}}, \quad (6.20)$$

em que  $\mu_{sl}$  e  $\sigma_{sl}$  são a média e o desvio padrão de correlação da região de lóbulos laterais, e  $v_p$  é o valor do pico de correlação. A região de lóbulos laterais é centrada no pico de correlação e possui dimensão  $a \times a$  com exclusão da região central de dimensão  $b \times b$ , conforme exibido na Figura 2.

O diagrama de blocos do sistema de verificação facial no domínio de Hartley desenvolvido neste trabalho é ilustrado na Figura 3. O filtro MACE, projetado a partir da 2D DHT de  $N$  imagens de treinamento, é correlacionado com a 2D DHT das imagens de teste. O plano de correlação resultante é avaliado em termos da métrica PSR e de um limiar de similaridade  $\tau$ . Se a PSR é superior ou igual a  $\tau$ , o sistema classifica a imagem como de identidade igual a do filtro,

Figura 2 – Região de lóbulos laterais, centrada no pico de correlação.

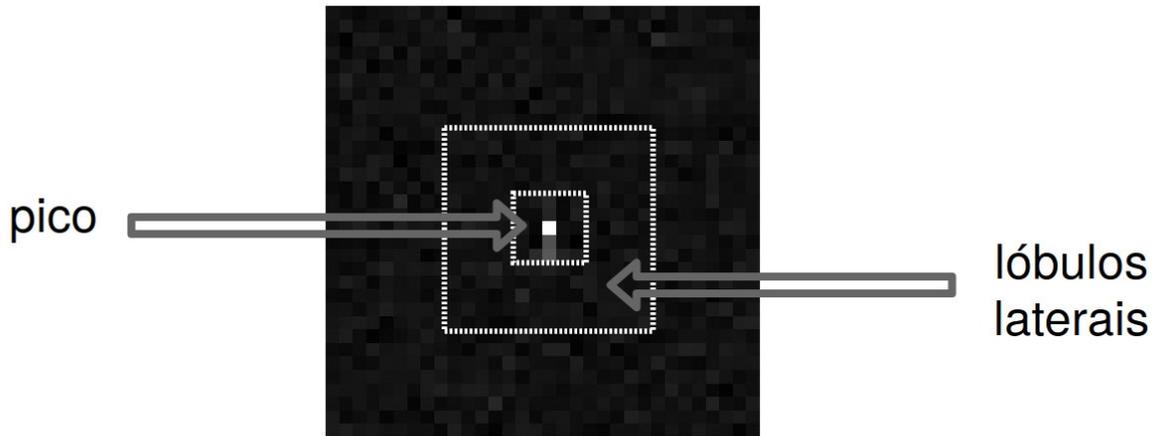
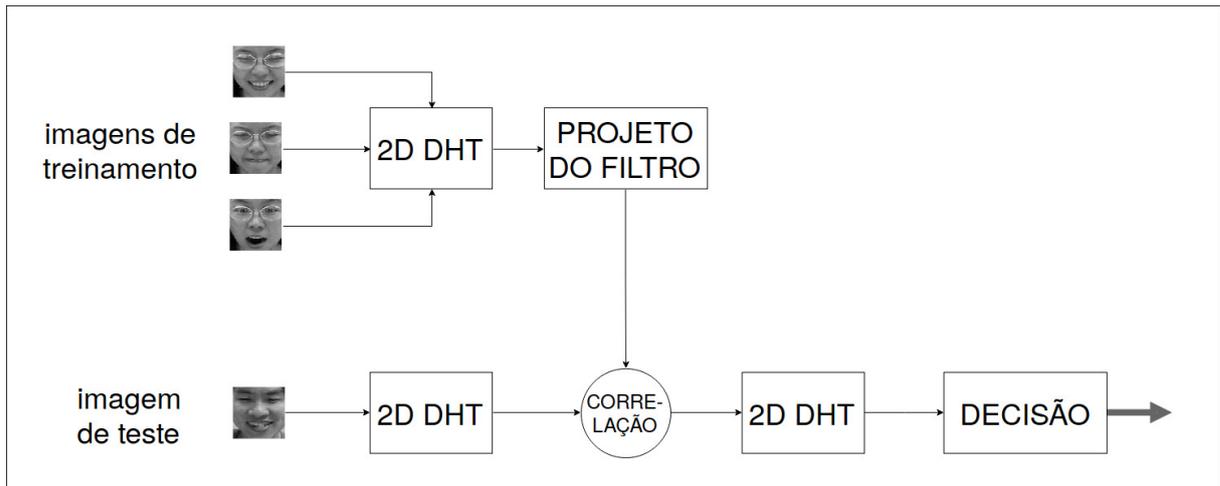


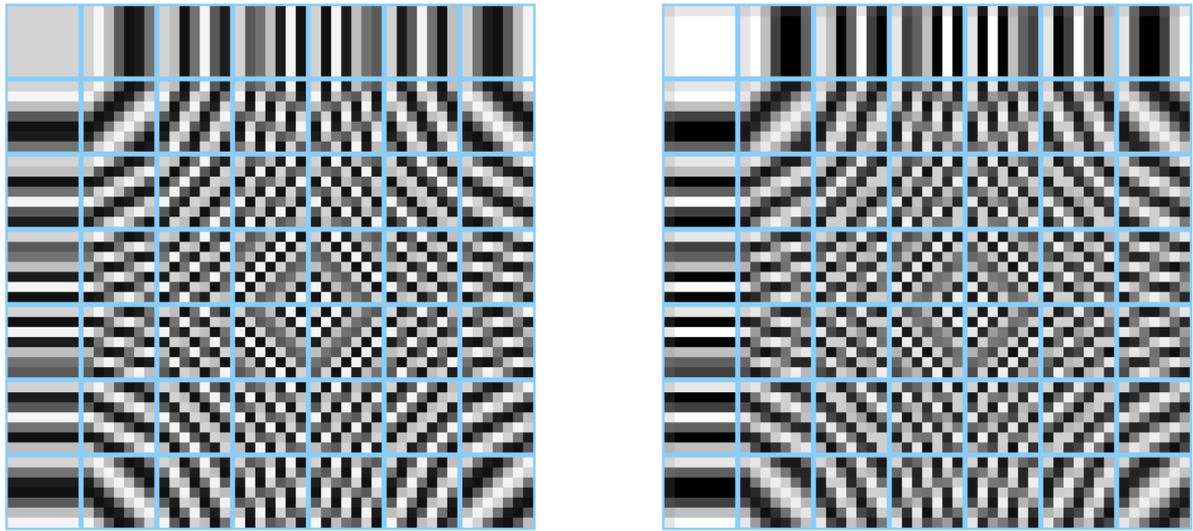
Figura 3 – Diagrama de blocos do sistema de verificação facial no domínio de Hartley.



caso contrário, a identidade da imagem não é reconhecida como a mesma do filtro.

A saída produzida pelo sistema de verificação facial no domínio de Hartley é idêntica ao do sistema análogo no domínio de Fourier. A seguir, esse sistema de verificação facial é implementado e comparado com versões modificadas, nas quais os blocos que computam a 2D DHT exata são substituídos por blocos que utilizam extensões bidimensionais das aproximações para a DHT, que foram derivadas no capítulo anterior. A fim de exemplificar a semelhança espectral entre as transformadas exatas e as aproximadas, são ilustradas as funções de base da 2D DHT e de uma aproximação bidimensional obtida a partir de  $\hat{\mathbf{H}}_{7,1}^{(1)}$ , ambas de tamanho  $7 \times 7$ , na Figura 4.

Figura 4 – Funções de base da 2D DHT, à esquerda, e de uma aproximação bidimensional obtida a partir de  $\hat{H}_{7,1}^{(I)}$ , à direita, ambas de tamanho  $7 \times 7$ .



#### 6.4 Experimento Computacional

A metodologia e valores adotados no experimento foram definidos com base no trabalho de Savvides e colaboradores [116]. As simulações computacionais foram realizadas no ambiente MATLAB com uma base de dados de expressões faciais da Universidade Carnegie Mellon [1, 116]. Os dados são imagens faciais de 13 indivíduos, capturadas com expressões variadas. Cada indivíduo da base de dados possui 75 imagens de expressões faciais diferentes, totalizando 975 imagens. Algumas amostras das imagens de um dos indivíduos é apresentada na Figura 5. As imagens são de tamanho  $64 \times 64$  e foram extraídas de uma sequência de vídeo. As imagens foram redimensionadas para  $32 \times 32$  e para a região dos lóbulos laterais foram adotados os valores  $a = 11$  e  $b = 3$ .

O experimento consistiu em projetar filtros MACE no domínio de Hartley a partir de um conjunto de três imagens de treinamento. As imagens foram escolhidas aleatoriamente, com a restrição de estarem a uma distância mínima de 20 imagens uma da outra, na sequência da base de dados. Para cada pessoa foram elaborados 50 filtros gerados a partir de 50 conjuntos distintos de três imagens. Em seguida, as 975 imagens da base de dados foram utilizadas como entrada em cada um dos sistemas e a PSR de cada saída foi calculada e armazenada.

O procedimento descrito acima foi primeiramente realizado com a DHT exata de comprimento 32, na sequência o mesmo experimento foi repetido 18 vezes substituindo apenas a transformada utilizada pelas aproximações de comprimento 32 propostas. O desempenho dos

Figura 5 – Amostras das imagens de um dos indivíduos da base de dados [1].



sistemas de verificação foi avaliado em termos de uma medida de erro apresentada a seguir.

#### 6.4.1 Taxa de Erro Igual (EER)

Tipicamente podem ocorrer dois tipos de erro de decisão em um sistema de verificação, erro de correspondência falsa e erro de não correspondência falsa [127]. Neste trabalho, adota-se as seguintes designações de erro:

1. Correspondência falsa, quando o sistema afirma que uma imagem de teste impostora possui a mesma identidade do filtro.
2. Não correspondência falsa, quando o sistema nega que uma imagem de teste autêntica possui a mesma identidade do filtro.

Para cada um destes erros é possível calcular uma métrica em função do limiar de similaridade  $\tau$ , a taxa de correspondência falsa (FMR - *false match rate*) e a taxa de não correspondência falsa (FNMR - *false non-match rate*), definidas por [127]:

$$\text{FMR}(\tau) = \frac{\#\{\mathbf{x}_q \mid \mathbf{x}_q \in X^0, \text{PSR}(\mathbf{x}_q, \mathbf{h}) \geq \tau\}}{\#\{X^0\}}, \quad (6.21)$$

$$\text{FNMR}(\tau) = \frac{\#\{\mathbf{x}_q \mid \mathbf{x}_q \in X^1, \text{PSR}(\mathbf{x}_q, \mathbf{h}) < \tau\}}{\#\{X^1\}}, \quad (6.22)$$

em que  $\#(\cdot)$  retorna a cardinalidade do conjunto de entrada,  $X^0$  é o conjunto das imagens de teste impostoras e  $X^1$  é o conjunto das imagens de teste autênticas. Portanto,  $\#(X^0) = 900$  e  $\#(X^1) = 75$ .

As funções  $FMR(\tau)$  e  $FNMR(\tau)$  são monótonas decrescente e crescente, respectivamente, não sendo possível minimizar os dois erros simultaneamente. O valor em que as taxas de correspondência e não correspondência se igualam ( $FNMR(\tau) = FMR(\tau)$ ) é denominado de taxa de erro igual (EER - *equal error rate*) [127]. Por ser uma métrica simples e efetiva, que resume o desempenho de um sistema de verificação, a EER foi escolhida para comparar os sistemas de verificação implementados neste experimento.

Na prática um ponto de igualdade entre a FMR e a FNMR pode não existir. Um procedimento funcional para o cálculo da EER é definido a seguir [127]. Seja:

$$\tau_1 = \max_{\tau \in \{\text{PSR}(\mathbf{x}_q, \mathbf{h})\}} (\tau \mid FNMR(\tau) \leq FMR(\tau)), \text{ e} \quad (6.23)$$

$$\tau_2 = \min_{\tau \in \{\text{PSR}(\mathbf{x}_q, \mathbf{h})\}} (\tau \mid FNMR(\tau) \geq FMR(\tau)). \quad (6.24)$$

O valor da EER é estimado por:

$$EER = \begin{cases} \frac{1}{2} [FNMR(\tau_1) + FMR(\tau_1)], & \text{se } FNMR(\tau_1) + FMR(\tau_1) \leq FNMR(\tau_2) + FMR(\tau_2), \\ \frac{1}{2} [FNMR(\tau_2) + FMR(\tau_2)], & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (6.25)$$

#### 6.4.2 Resultados

Foram projetados 50 sistemas de verificação para cada combinação de um indivíduo da base de dados com uma transformada utilizada. Na Tabela 19, são apresentados a média e o desvio padrão da EER, em porcentagem, dos 50 sistemas de cada uma das combinações. Para cada transformada utilizada, foram projetados 650 sistemas (13 pessoas  $\times$  50 sistemas), cuja média e desvio padrão da EER são exibidos na última coluna da Tabela 19. Na última linha da Tabela 19, são apresentados a média e o desvio padrão da EER dos 950 sistemas (19 transformadas  $\times$  50 sistemas) construídos para cada indivíduo da base de dados.

Analisando na Tabela 19, a coluna referente a todos os indivíduos, percebe-se que a média da taxa de erro igual foi baixa para todas as transformadas. O maior valor obtido foi 0,501% com a transformada  $\hat{\mathbf{H}}_{32,5}^{(I)}$  e o menor foi 0,315% com a transformada  $\hat{\mathbf{H}}_{32,11}^{(II)}$ . Em termos absolutos, o desempenho foi similar com uma diferença inferior a 0,2% entres esses casos

extremos. As quatro transformadas com os melhores resultados foram  $\hat{\mathbf{H}}_{32,11}^{(II)}$ ,  $\hat{\mathbf{H}}_{32,15}^{(II)}$ ,  $\hat{\mathbf{H}}_{32,12}^{(II)}$  e  $\hat{\mathbf{H}}_{32,17}^{(II)}$  sendo todas derivadas a partir do Método II, enquanto a DHT exata,  $\mathbf{H}_{32}$ , apresentou o sétimo melhor desempenho, 0,363%.

Observando os resultados de cada indivíduo separadamente, verifica-se que os sistemas para os indivíduos  $s_1$ ,  $s_4$ ,  $s_9$ ,  $s_{10}$ ,  $s_{11}$ ,  $s_{12}$  e  $s_{13}$  obtiveram EER nula e para os indivíduos  $s_6$  e  $s_7$  a EER foi nula para a maioria das transformadas e próxima a zero para as demais. Na linha referente a todas as matrizes da Tabela 19, nota-se que as médias dos indivíduos  $s_3$ ,  $s_5$  e  $s_8$  foram semelhantes. Entretanto, cada transformada apresentou um desempenho diferente para esses indivíduos. Por fim, o indivíduo  $s_2$  exibiu valores bastante altos quando comparados a qualquer outro indivíduo. Esses resultados de  $s_2$  eram esperados devido as mudanças bruscas de expressão facial presentes nas imagens, conforme relatado por Savvides e colaboradores [116].

Tabela 19 – Média e desvio padrão da EER, em porcentagem, dos sistemas construídos com 3 imagens de treinamento para cada indivíduo e transformada de comprimento 32.

Transformada	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	s <sub>3</sub>	s <sub>4</sub>	s <sub>5</sub>	s <sub>6</sub>	s <sub>7</sub>	s <sub>8</sub>	s <sub>9</sub>	s <sub>10</sub>	s <sub>11</sub>	s <sub>12</sub>	s <sub>13</sub>	Todos indivíduos
$\mathbf{H}_{32}$	0	4.510 ± 3.216	0.064 ± 0.215	0	0	0.003 ± 0.017	0	0.134 ± 0.330	0	0	0	0	0	0.363 ± 1.493
$\hat{\mathbf{H}}_{32,1}^{(I)}$	0	4.564 ± 3.315	0.006 ± 0.023	0	0	0.004 ± 0.025	0	0.181 ± 0.441	0	0	0	0	0	0.366 ± 1.523
$\hat{\mathbf{H}}_{32,2}^{(I)}$	0	4.708 ± 2.836	0.069 ± 0.266	0	0	0	0	0.337 ± 0.721	0	0	0	0	0	0.393 ± 1.488
$\hat{\mathbf{H}}_{32,3}^{(I)}$	0	4.353 ± 2.603	0.070 ± 0.135	0	0	0	0	0.110 ± 0.429	0	0	0	0	0	0.349 ± 1.366
$\hat{\mathbf{H}}_{32,4}^{(I)}$	0	6.004 ± 3.087	0.262 ± 0.628	0	0.007 ± 0.029	0	0	0.072 ± 0.206	0	0	0	0	0	0.488 ± 1.816
$\hat{\mathbf{H}}_{32,5}^{(I)}$	0	6.207 ± 3.022	0.177 ± 0.424	0	0.107 ± 0.375	0	0	0.017 ± 0.056	0	0	0	0	0	0.501 ± 1.853
$\hat{\mathbf{H}}_{32,6}^{(I)}$	0	4.189 ± 2.720	0	0	0.016 ± 0.045	0	0	0.428 ± 0.853	0	0	0	0	0	0.356 ± 1.361
$\hat{\mathbf{H}}_{32,7}^{(I)}$	0	4.963 ± 2.950	0.124 ± 0.328	0	0.338 ± 0.502	0	0	0.004 ± 0.025	0	0	0	0	0	0.418 ± 1.555
$\hat{\mathbf{H}}_{32,8}^{(I)}$	0	4.773 ± 3.136	0.288 ± 0.549	0	0.004 ± 0.025	0	0	0.012 ± 0.039	0	0	0	0	0	0.391 ± 1.541
$\hat{\mathbf{H}}_{32,9}^{(I)}$	0	5.019 ± 2.913	0.038 ± 0.124	0	0.397 ± 0.599	0	0	0	0	0	0	0	0	0.420 ± 1.564
$\hat{\mathbf{H}}_{32,10}^{(I)}$	0	4.970 ± 2.632	0.153 ± 0.301	0	0	0	0	0.134 ± 0.480	0	0	0	0	0	0.404 ± 1.513
$\hat{\mathbf{H}}_{32,11}^{(II)}$	0	3.917 ± 2.531	0	0	0	0	0.031 ± 0.205	0.152 ± 0.337	0	0	0	0	0	0.315 ± 1.257
$\hat{\mathbf{H}}_{32,12}^{(II)}$	0	4.009 ± 2.632	0.021 ± 0.055	0	0	0	0.054 ± 0.377	0.187 ± 0.355	0	0	0	0	0	0.329 ± 1.295
$\hat{\mathbf{H}}_{32,13}^{(II)}$	0	4.686 ± 2.734	0.006 ± 0.026	0	0.054 ± 0.120	0	0	0.091 ± 0.343	0	0	0	0	0	0.372 ± 1.459
$\hat{\mathbf{H}}_{32,14}^{(II)}$	0	4.819 ± 2.618	0.003 ± 0.013	0	0.052 ± 0.119	0	0	0.087 ± 0.328	0	0	0	0	0	0.382 ± 1.473
$\hat{\mathbf{H}}_{32,15}^{(II)}$	0	3.871 ± 2.517	0.008 ± 0.030	0	0	0	0.054 ± 0.377	0.180 ± 0.465	0	0	0	0	0	0.316 ± 1.250
$\hat{\mathbf{H}}_{32,16}^{(II)}$	0	5.002 ± 3.047	0.143 ± 0.331	0	0.468 ± 0.707	0	0	0.090 ± 0.326	0	0	0	0	0	0.439 ± 1.584
$\hat{\mathbf{H}}_{32,17}^{(II)}$	0	4.103 ± 2.655	0.020 ± 0.085	0	0.331 ± 0.728	0	0	0.103 ± 0.439	0	0	0	0	0	0.351 ± 1.331
$\hat{\mathbf{H}}_{32,18}^{(II)}$	0	4.362 ± 2.501	0.004 ± 0.015	0	0.297 ± 0.698	0	0	0.101 ± 0.463	0	0	0	0	0	0.367 ± 1.365
Todas transformadas	0	4.686 ± 2.873	0.077 ± 0.278	0	0.109 ± 0.380	0.000 ± 0.007	0.007 ± 0.131	0.127 ± 0.420	0	0	0	0	0	0

### Experimento com mais imagens de treinamento

A taxa de erro do sistema de verificação tende a diminuir à medida que o número de imagens de treinamento aumenta [116]. Por isso, o experimento foi realizado novamente, dessa vez utilizando cinco imagens de treinamento escolhidas aleatoriamente, com uma distância mínima de 10 imagens uma da outra, na sequência da base de dados.

Na Tabela 20, são apresentados os resultados do segundo experimento. Verifica-se que de modo geral houve uma redução das médias da taxa de erro. Para nove indivíduos, a média da EER foi nula com todas as transformadas, enquanto os outros quatro obtiveram médias da EER inferior ao experimento anterior. Analisando as transformadas separadamente, na última coluna da Tabela 20, observa-se que a média da taxa de erro ficou entre 0,192% com  $\hat{H}_{32,15}^{(II)}$  e 0,368% com  $\hat{H}_{32,5}^{(I)}$ , e a DHT exata apresentou média da EER de 0,198%, o quinto menor valor.

Tabela 20 – Média e desvio padrão da EER, em porcentagem, dos sistemas construídos com 5 imagens de treinamento para cada indivíduo e transformada de comprimento 32.

Transformada	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	s <sub>3</sub>	s <sub>4</sub>	s <sub>5</sub>	s <sub>6</sub>	s <sub>7</sub>	s <sub>8</sub>	s <sub>9</sub>	s <sub>10</sub>	s <sub>11</sub>	s <sub>12</sub>	s <sub>13</sub>	Todos indivíduos
$\hat{H}_{32}$	0	2.517 ± 2.551	0.009 ± 0.055	0	0	0	0	0.053 ± 0.135	0	0	0	0	0	0.198 ± 0.971
$\hat{H}_{32,1}^{(I)}$	0	2.493 ± 2.632	0.027 ± 0.189	0	0.002 ± 0.011	0	0	0.034 ± 0.103	0	0	0	0	0	0.197 ± 0.983
$\hat{H}_{32,2}^{(I)}$	0	2.827 ± 2.149	0.029 ± 0.189	0	0	0	0	0.169 ± 0.537	0	0	0	0	0	0.233 ± 0.968
$\hat{H}_{32,3}^{(I)}$	0	2.698 ± 1.963	0.024 ± 0.084	0	0	0	0	0.001 ± 0.008	0	0	0	0	0	0.210 ± 0.899
$\hat{H}_{32,4}^{(I)}$	0	4.159 ± 2.523	0.104 ± 0.364	0	0	0	0	0.007 ± 0.027	0	0	0	0	0	0.329 ± 1.310
$\hat{H}_{32,5}^{(I)}$	0	4.718 ± 2.218	0.060 ± 0.276	0	0	0	0	0.001 ± 0.008	0	0	0	0	0	0.368 ± 1.399
$\hat{H}_{32,6}^{(I)}$	0	2.549 ± 2.479	0.001 ± 0.008	0	0.010 ± 0.027	0	0	0.100 ± 0.313	0	0	0	0	0	0.205 ± 0.965
$\hat{H}_{32,7}^{(I)}$	0	3.286 ± 2.408	0.053 ± 0.206	0	0.082 ± 0.270	0	0	0.004 ± 0.025	0	0	0	0	0	0.264 ± 1.100
$\hat{H}_{32,8}^{(I)}$	0	2.870 ± 2.586	0.112 ± 0.322	0	0.001 ± 0.008	0	0	0.006 ± 0.032	0	0	0	0	0	0.230 ± 1.047
$\hat{H}_{32,9}^{(I)}$	0	3.569 ± 2.051	0.009 ± 0.045	0	0.034 ± 0.108	0	0	0	0	0	0	0	0	0.278 ± 1.106
$\hat{H}_{32,10}^{(I)}$	0	3.414 ± 2.150	0.059 ± 0.147	0	0	0	0	0.002 ± 0.016	0	0	0	0	0	0.267 ± 1.085
$\hat{H}_{32,11}^{(I)}$	0	2.464 ± 1.755	0	0	0	0	0	0.050 ± 0.130	0	0	0	0	0	0.193 ± 0.815
$\hat{H}_{32,12}^{(II)}$	0	2.397 ± 1.812	0.003 ± 0.024	0	0	0	0	0.108 ± 0.291	0	0	0	0	0	0.193 ± 0.813
$\hat{H}_{32,13}^{(II)}$	0	3.100 ± 2.299	0	0	0.024 ± 0.053	0	0	0	0	0	0	0	0	0.240 ± 1.040
$\hat{H}_{32,14}^{(II)}$	0	3.186 ± 2.236	0	0	0.020 ± 0.049	0	0	0	0	0	0	0	0	0.247 ± 1.048
$\hat{H}_{32,15}^{(II)}$	0	2.412 ± 1.830	0.003 ± 0.024	0	0	0	0	0.077 ± 0.230	0	0	0	0	0	0.192 ± 0.818
$\hat{H}_{32,16}^{(II)}$	0	3.053 ± 2.178	0.031 ± 0.083	0	0.312 ± 0.605	0	0	0	0	0	0	0	0	0.261 ± 1.022
$\hat{H}_{32,17}^{(II)}$	0	2.696 ± 2.152	0.001 ± 0.008	0	0.086 ± 0.141	0	0	0	0	0	0	0	0	0.214 ± 0.931
$\hat{H}_{32,18}^{(II)}$	0	2.812 ± 2.068	0	0	0.071 ± 0.127	0	0	0	0	0	0	0	0	0.222 ± 0.941
Todas transformadas	0	3.012 ± 2.287	0.028 ± 0.159	0	0.034 ± 0.175	0	0	0.032 ± 0.178	0	0	0	0	0	0

## 7 CONCLUSÃO

Neste trabalho, uma revisão de literatura das transformadas de Hartley e Fourier foi realizada. As definições dessas transformadas, em uma e duas dimensões, e a forma como elas se relacionam foram apresentadas. Além disso, alguns dos algoritmos rápidos mais conhecidos para a transformada de Hartley foram discutidos.

A metodologia de busca de aproximações baseada em parametrização [82] foi adaptada para gerar transformadas aproximadas da DHT. Um primeiro método foi proposto para parametrizar a matriz da DHT na forma não fatorada e um segundo método foi desenvolvido com o intuito de parametrizar a representação matricial da DHT associada aos algoritmos de Winograd e Cooley-Tukey. As aproximações derivadas por esses dois métodos foram submetidas a um problema de otimização multiobjetivo para selecionar as transformadas ótimas em termos de métricas de avaliação.

A figura de mérito denominada erro de involução foi proposta neste trabalho para avaliar o desempenho das aproximações em substituição à própria transformada inversa. Essa métrica em conjunto com o erro de energia total e o desvio de ortogonalidade foram utilizados como funções objetivo do problema de otimização. A busca por transformadas aproximadas foi efetuada para os comprimentos  $N = 3, 5, 7, 8, 16, 32$ . Ao total, 44 novas aproximações da DHT foram obtidas para esses comprimentos. Foram derivados algoritmos rápidos para duas transformadas, uma de comprimento 16 e outra de comprimento 32, e suas complexidades aritméticas foram comparadas com as complexidades de outras aproximações e da DHT exata.

A fim de avaliar o desempenho das novas transformadas aproximadas em um contexto prático, as dezoito aproximações obtidas de comprimento  $N = 32$  foram utilizadas em uma aplicação de verificação facial baseada em filtros de correlação. Uma expressão para o cálculo de filtros de correlação MACE no domínio de Hartley foi demonstrada. As transformadas aproximadas de comprimento 32 e a DHT exata foram empregadas na construção de sistemas de verificação facial com esse tipo de filtro. Os sistemas projetados com cada transformada foram avaliados em termos de uma medida erro. As aproximações obtiveram média da taxa de erro entre 0,32% e 0,50%, valores próximos ao da DHT exata que foi de 0,36%.

**As principais contribuições derivadas neste trabalho são enumeradas a seguir:**

1. Uma metodologia de busca de aproximações para a DHT foi desenvolvida. Dois métodos baseados em parametrização foram utilizados para explorar a matriz da DHT na forma direta e na forma de algoritmos rápidos;
2. Uma nova figura de mérito, denominada erro de involução, foi proposta para avaliar a proximidade das transformadas em relação a propriedade de involução da DHT;
3. A busca por aproximações da DHT foi realizada para os comprimentos  $N = 3, 5, 7, 8, 16, 32$  e gerou como resultado 44 novas transformadas aproximadas;
4. Um sistema de verificação facial baseado em filtros de correlação MACE foi projetado integralmente no domínio de Hartley;
5. As dezoito transformadas aproximadas de comprimento  $N = 32$  foram comparadas com a DHT exata no contexto de reconhecimento facial. Seis dessas aproximações apresentaram um desempenho melhor do que o da transformada exata na aplicação realizada.

**Para trabalhos futuros, sugere-se:**

- Empregar o Método I para buscar novas aproximações de outras transformadas discretas, de comprimentos variados, já que esse método pode ser facilmente adaptado para qualquer transformada real;
- Investigar se a quantidade de elementos não nulos da matriz aproximada, ao ser utilizada como uma figura de mérito no problema de otimização, retorna novas aproximações com menor complexidade aditiva e bom desempenho;
- Reduzir a complexidade computacional das aproximações geradas a partir do Método II, por meio de novas fatorações;
- Utilizar a relação entre a DCT e a DHT [128] para derivar transformadas aproximadas da DCT a partir das novas aproximações obtidas neste trabalho;
- Analisar se existe uma relação entre as aproximações  $\hat{\mathbf{H}}_{32,14}^{(II)}$  e  $\hat{\mathbf{H}}_{32,17}^{(II)}$ , que justifique os valores idênticos obtidos para as métricas avaliadas dessas transformadas. Caso essa relação seja verificada, espera-se derivar uma expressão aplicável a um caso geral.

## REFERÊNCIAS

- 1 Advanced Multimedia Processing Lab web page at Electrical and Computer Engineering Department at CMU. *Face Expression Database*. Disponível em: <<http://chenlab.ece.cornell.edu/projects/FaceAuthentication/#Download>>. Citado 3 vezes nas páginas 7, 83 e 84.
- 2 KAFAI, M.; ESHGHI, K.; BHANU, B. Discrete Cosine Transform Locality-Sensitive Hashes for Face Retrieval. *IEEE Transactions on Multimedia*, v. 16, n. 4, p. 1090–1103, June 2014. ISSN 1520-9210. Citado na página 17.
- 3 MIYAZAWA, K. et al. An Effective Approach for Iris Recognition Using Phase-Based Image Matching. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 30, n. 10, p. 1741–1756, Oct 2008. ISSN 0162-8828. Citado na página 17.
- 4 BREITHAUPT, C.; GERKMANN, T.; MARTIN, R. Cepstral Smoothing of Spectral Filter Gains for Speech Enhancement Without Musical Noise. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 14, n. 12, p. 1036–1039, Dec 2007. ISSN 1070-9908. Citado na página 17.
- 5 ZHANG, F.; CHEN, Y. Q.; BI, G. Adaptive harmonic fractional Fourier transform. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 6, n. 11, p. 281–283, Nov 1999. ISSN 1070-9908. Citado na página 17.
- 6 HWANG, H.-E. An optical image cryptosystem based on Hartley transform in the Fresnel transform domain. *Optics Communications*, v. 284, n. 13, p. 3243 – 3247, 2011. ISSN 0030-4018. Citado na página 17.
- 7 ABUTURAB, M. R. Color image security system based on discrete Hartley transform in gyrator transform domain. *Optics and Lasers in Engineering*, v. 51, n. 3, p. 317 – 324, 2013. ISSN 0143-8166. Citado na página 17.
- 8 LIU, Z. et al. Optical color image hiding scheme based on chaotic mapping and Hartley transform. *Optics and Lasers in Engineering*, v. 51, n. 8, p. 967 – 972, 2013. ISSN 0143-8166. Citado na página 17.
- 9 PRIEMER, R. *Introductory Signal Processing*. River Edge, NJ, USA: World Scientific Publishing Co., Inc., 1991. ISBN 9971509202. Citado na página 17.
- 10 OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. *Discrete-Time Signal Processing*. 3rd. ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall Press, 2009. ISBN 0131988425, 9780131988422. Citado 5 vezes nas páginas 17, 22, 23, 25 e 26.
- 11 TAO, L.; KWAN, H. K. Fast Parallel Approach for 2-D DHT-Based Real-Valued Discrete Gabor Transform. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 18, n. 12, p. 2790–2796, Dec 2009. ISSN 1057-7149. Citado na página 17.
- 12 BROWN, R. A.; ZHU, H.; MITCHELL, J. R. Distributed vector Processing of a new local MultiScale Fourier transform for medical imaging applications. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, v. 24, n. 5, p. 689–691, May 2005. ISSN 0278-0062. Citado na página 17.

- 13 SHEN, C. Y. et al. The discrete fourier transform method of solving differential-integral equations in scattering theory. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 37, n. 8, p. 1032–1041, Aug 1989. ISSN 0018-926X. Citado na página 17.
- 14 LIU, Q. H. et al. Applications of nonuniform fast transform algorithms in numerical solutions of differential and integral equations. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 38, n. 4, p. 1551–1560, July 2000. ISSN 0196-2892. Citado na página 17.
- 15 JOSKO, A.; RAK, R. J. Effective simulation of signals for testing ECG analyzer. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, v. 54, n. 3, p. 1019–1024, June 2005. ISSN 0018-9456. Citado na página 17.
- 16 GUMERY, P. Y. et al. An adaptive detector of genioglossus EMG reflex using Berkner transform for time latency measurement in OSA pathophysiological studies. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 52, n. 8, p. 1382–1389, Aug 2005. ISSN 0018-9294. Citado na página 17.
- 17 DOMINGUEZ, A. Highlights in the History of the Fourier Transform [Retrospectroscope]. *IEEE Pulse*, v. 7, n. 1, p. 53–61, Jan 2016. ISSN 2154-2287. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 22.
- 18 OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. S.; NAWAB, S. H. *Signals & Systems*. 2nd. ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1996. ISBN 0-13-814757-4. Citado na página 17.
- 19 BRACEWELL, R. *The Fourier transform and its applications*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1965. (McGraw-Hill Electrical and Electronic engineering series). ISBN 9780070070158. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 22.
- 20 SCARGLE, J. D. Studies in astronomical time series analysis. III - Fourier transforms, autocorrelation functions, and cross-correlation functions of unevenly spaced data. *The Astrophysical Journal*, v. 343, p. 874–887, ago. 1989. Citado na página 17.
- 21 DHAMALA, M.; RANGARAJAN, G.; DING, M. Estimating Granger Causality from Fourier and Wavelet Transforms of Time Series Data. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 100, p. 018701, Jan 2008. Citado na página 17.
- 22 WELCH, P. The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, v. 15, n. 2, p. 70–73, June 1967. ISSN 0018-9278. Citado na página 17.
- 23 BAXA, E. G. On implementation of the discrete Fourier transform - The STUSE algorithm for spectral estimation. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 37, n. 11, p. 1763–1765, Nov 1989. ISSN 0096-3518. Citado na página 17.
- 24 HAN, Y. et al. DFT-Based Hybrid Beamforming Multiuser Systems: Rate Analysis and Beam Selection. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, v. 12, n. 3, p. 514–528, June 2018. ISSN 1932-4553. Citado na página 17.
- 25 CHI, C.; LI, Z.; LI, Q. Fast Broadband Beamforming Using Nonuniform Fast Fourier Transform for Underwater Real-Time 3-D Acoustical Imaging. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, v. 41, n. 2, p. 249–261, April 2016. ISSN 0364-9059. Citado na página 17.

- 26 HARTLEY, R. V. L. A More Symmetrical Fourier Analysis Applied to Transmission Problems. *Proceedings of the IRE*, v. 30, n. 3, p. 144–150, March 1942. ISSN 0096-8390. Citado 3 vezes nas páginas 17, 22 e 27.
- 27 BRACEWELL, R. N. Discrete Hartley transform. *Journal of the Optical Society of America*, OSA, v. 73, n. 12, p. 1832–1835, Dec 1983. Citado 3 vezes nas páginas 17, 22 e 27.
- 28 BRACEWELL, R. *The Hartley Transform*. [S.l.]: Oxford University Press, 1986. (Oxford engineering science series). ISBN 9780195039696. Citado 10 vezes nas páginas 18, 28, 53, 54, 68, 69, 73, 105, 107 e 108.
- 29 DUHAMEL, P.; VETTERLI, M. Improved fourier and hartley transform algorithms: Application to cyclic convolution of real data. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 35, n. 6, p. 818–824, June 1987. ISSN 0096-3518. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 22.
- 30 HU, N. C.; LU, F. F. Fast computation of the two-dimensional generalised Hartley transforms. *IEE Proceedings - Vision, Image and Signal Processing*, v. 142, n. 1, p. 35–39, Feb 1995. ISSN 1350-245X. Citado na página 18.
- 31 BONDYOPADHYAY, P. K. Application of running Hartley transform in adaptive digital filtering. *Proceedings of the IEEE*, v. 76, n. 10, p. 1370–1372, Oct 1988. ISSN 0018-9219. Citado na página 18.
- 32 WONG, T. W.; KWONG, C. P. Adaptive filtering using Hartley transform and overlap-save method. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 39, n. 7, p. 1708–1711, July 1991. ISSN 1053-587X. Citado na página 18.
- 33 VILLASENOR, J. D. Optical Hartley transforms. *Proceedings of the IEEE*, v. 82, n. 3, p. 391–399, March 1994. ISSN 0018-9219. Citado na página 18.
- 34 MOREOLO, M. S.; MUNOZ, R.; JUNYENT, G. Novel Power Efficient Optical OFDM Based on Hartley Transform for Intensity-Modulated Direct-Detection Systems. *Journal of Lightwave Technology*, v. 28, n. 5, p. 798–805, March 2010. ISSN 0733-8724. Citado na página 18.
- 35 HAJOMER, A. A. E.; YANG, X.; HU, W. Secure OFDM Transmission Precoded by Chaotic Discrete Hartley Transform. *IEEE Photonics Journal*, v. 10, n. 2, p. 1–9, April 2018. ISSN 1943-0655. Citado na página 18.
- 36 BLAHUT, R. E. *Fast Algorithms for Signal Processing*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. Citado 12 vezes nas páginas 18, 24, 32, 37, 52, 59, 67, 68, 72, 102, 103 e 104.
- 37 JANG, J. W.; CHOI, S. B.; PRASANNA, V. K. Energy- and time-efficient matrix multiplication on FPGAs. *IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems*, v. 13, n. 11, p. 1305–1319, Nov 2005. ISSN 1063-8210. Citado 5 vezes nas páginas 18, 24, 32, 38 e 39.
- 38 HEIDEMAN, M.; BURRUS, C. *Multiplicative complexity, convolution, and the DFT*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1988. (Signal Processing and Digital Filtering). ISBN 9780387968100. Citado 3 vezes nas páginas 18, 32 e 38.

- 39 RAO, K. R.; YIP, P. *Discrete Cosine Transform: Algorithms, Advantages, Applications*. [S.l.]: Academic Press, 1990. ISBN 9780125802031,0-12-580203-X. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 41.
- 40 BRITANAK, V.; YIP, P. C.; RAO, K. R. *Discrete Cosine and Sine Transforms: General Properties, Fast Algorithms and Integer Approximations*. [S.l.]: Academic Press, 2007. ISBN 9780080464640,9780123736246,0123736242. Citado 3 vezes nas páginas 18, 19 e 39.
- 41 WALLACE, G. K. The JPEG still picture compression standard. *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, v. 38, n. 1, p. xviii–xxxiv, Feb 1992. ISSN 0098-3063. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 41.
- 42 LE GALL, D. J. The MPEG video compression algorithm. *Signal Processing: Image Communication*, v. 4, n. 2, p. 129 – 140, 1992. ISSN 0923-5965. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 41.
- 43 LUTHRA, A.; SULLIVAN, G. J.; WIEGAND, T. Introduction to the special issue on the H.264/AVC video coding standard. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, v. 13, n. 7, p. 557–559, July 2003. ISSN 1051-8215. Citado na página 18.
- 44 POURAZAD, M. T. et al. HEVC: The New Gold Standard for Video Compression: How Does HEVC Compare with H.264/AVC? *IEEE Consumer Electronics Magazine*, v. 1, n. 3, p. 36–46, July 2012. ISSN 2162-2248. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 41.
- 45 CHEN, W.-H.; SMITH, C.; FRALICK, S. A Fast Computational Algorithm for the Discrete Cosine Transform. *IEEE Transactions on Communications*, v. 25, n. 9, p. 1004–1009, Sep. 1977. Citado na página 18.
- 46 VETTERLI, M.; EURASIP member; NUSSBAUMER, H. J. Simple FFT and DCT algorithms with reduced number of operations. *Signal Processing*, v. 6, n. 4, p. 267 – 278, 1984. ISSN 0165-1684. Citado na página 18.
- 47 WANG, Z. Fast algorithms for the discrete W transform and for the discrete Fourier transform. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 32, n. 4, p. 803–816, August 1984. Citado na página 18.
- 48 LEE, B. A new algorithm to compute the discrete cosine Transform. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 32, n. 6, p. 1243–1245, December 1984. Citado na página 18.
- 49 HOU, H. A fast recursive algorithm for computing the discrete cosine transform. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 35, n. 10, p. 1455–1461, October 1987. Citado na página 18.
- 50 LOEFFLER, C.; LIGTENBERG, A.; MOSCHYTZ, G. S. Practical fast 1-D DCT algorithms with 11 multiplications. In: *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. [S.l.: s.n.], 1989. p. 988–991 vol.2. ISSN 1520-6149. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- 51 FEIG, E.; WINOGRAD, S. Fast algorithms for the discrete cosine transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 40, n. 9, p. 2174–2193, Sep. 1992. ISSN 1053-587X. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 46.

- 52 GOWREESRINIVAS, K. V.; SAMUNDISWARY, P. Comparative performance analysis of multiplexer based single precision floating point multipliers. In: *2017 International conference of Electronics, Communication and Aerospace Technology (ICECA)*. [S.l.: s.n.], 2017. v. 2, p. 430–435. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 38.
- 53 ORAINTARA, S.; CHEN, Y. J.; NGUYEN, T. Q. Integer fast Fourier transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 50, n. 3, p. 607–618, March 2002. ISSN 1053-587X. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 38.
- 54 TRAN, T. D. The binDCT: fast multiplierless approximation of the DCT. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 7, n. 6, p. 141–144, June 2000. ISSN 1070-9908. Citado 3 vezes nas páginas 19, 32 e 39.
- 55 LIANG, J.; TRAN, T. D. Fast multiplierless approximations of the DCT with the lifting scheme. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 49, n. 12, p. 3032–3044, Dec 2001. ISSN 1053-587X. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 39.
- 56 HAWHEEL, T. I. A new square wave transform based on the DCT. *Signal Processing*, v. 81, n. 11, p. 2309 – 2319, 2001. ISSN 0165-1684. Citado 5 vezes nas páginas 19, 38, 39, 42 e 56.
- 57 LENGWEHASATIT, K.; ORTEGA, A. Scalable variable complexity approximate forward DCT. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, v. 14, n. 11, p. 1236–1248, Nov 2004. ISSN 1051-8215. Citado 3 vezes nas páginas 19, 38 e 43.
- 58 BOUGUEZEL, S.; AHMAD, M. O.; SWAMY, M. N. S. Low-complexity 8 times;8 transform for image compression. *Electronics Letters*, v. 44, n. 21, p. 1249–1250, October 2008. ISSN 0013-5194. Citado 5 vezes nas páginas 19, 38, 43, 44 e 59.
- 59 BOUGUEZEL, S.; AHMAD, M. O.; SWAMY, M. N. S. A multiplication-free transform for image compression. In: *2008 2nd International Conference on Signals, Circuits and Systems*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 1–4. Citado 4 vezes nas páginas 19, 38, 43 e 44.
- 60 BOUGUEZEL, S.; AHMAD, M. O.; SWAMY, M. N. S. A fast  $8 \times 8$  transform for image compression. In: *2009 International Conference on Microelectronics - ICM*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 74–77. ISSN 2159-1660. Citado 4 vezes nas páginas 19, 38, 43 e 44.
- 61 BOUGUEZEL, S.; AHMAD, M. O.; SWAMY, M. N. S. A novel transform for image compression. In: *2010 53rd IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 509–512. ISSN 1558-3899. Citado 4 vezes nas páginas 19, 38, 43 e 44.
- 62 BOUGUEZEL, S.; AHMAD, M. O.; SWAMY, M. N. S. A low-complexity parametric transform for image compression. In: *2011 IEEE International Symposium of Circuits and Systems (ISCAS)*. [S.l.: s.n.], 2011. p. 2145–2148. ISSN 2158-1525. Citado 4 vezes nas páginas 19, 38, 43 e 44.
- 63 BOUGUEZEL, S.; AHMAD, M. O.; SWAMY, M. N. S. Binary Discrete Cosine and Hartley Transforms. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, v. 60, n. 4, p. 989–1002, April 2013. ISSN 1549-8328. Citado 5 vezes nas páginas 19, 38, 43, 44 e 49.
- 64 CINTRA, R. J.; BAYER, F. M. A DCT Approximation for Image Compression. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 18, n. 10, p. 579–582, Oct 2011. ISSN 1070-9908. Citado 5 vezes nas páginas 19, 38, 40, 45 e 56.

- 65 BAYER, F. M.; CINTRA, R. J. DCT-like transform for image compression requires 14 additions only. *Electronics Letters*, v. 48, n. 15, p. 919–921, July 2012. ISSN 0013-5194. Citado 4 vezes nas páginas 19, 38, 40 e 45.
- 66 POTLURI, U. S. et al. Multiplier-free DCT approximations for RF multi-beam digital aperture-array space imaging and directional sensing. *Measurement Science and Technology*, IOP Publishing, v. 23, n. 11, p. 114003, oct 2012. Citado 3 vezes nas páginas 19, 38 e 46.
- 67 CINTRA, R. J. An Integer Approximation Method for Discrete Sinusoidal Transforms. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, v. 30, n. 6, p. 1481, May 2011. ISSN 1531-5878. Citado 6 vezes nas páginas 19, 38, 48, 68, 69 e 73.
- 68 RODRIGUEZ, G. Hartley transform: Basic theory and applications in oceanographic time series analysis. *WIT Transactions on Ecology and the Environment*, v. 58, p. 191–200, 01 2002. Citado na página 22.
- 69 SUNDARARAJAN, N. Fourier and Hartley transforms - A mathematical twin. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, Indian National Science Academy, v. 28, n. 10, p. 1361–1365, 10 1997. ISSN 0019-5588. Citado na página 22.
- 70 CHAMPENEY, D. C. *A Handbook of Fourier Theorems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1987. Citado na página 23.
- 71 GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E. *Digital Image Processing*. 3rd. ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 2008. ISBN 9780131687288 013168728X. Citado na página 30.
- 72 BRACEWELL, R. N. et al. Fast Two-Dimensional Hartley Transform. *Proceedings of the IEEE*, v. 74, n. 9, p. 1282–1283, Sep. 1986. ISSN 0018-9219. Citado na página 31.
- 73 WINOGRAD, S. *Arithmetic complexity of computations*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1980. v. 33. (CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, v. 33). ISBN 0–89871–163–0. Citado na página 32.
- 74 SORENSEN, H. et al. On computing the discrete Hartley transform. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 33, n. 5, p. 1231–1238, October 1985. ISSN 0096-3518. Citado 4 vezes nas páginas 33, 36, 37 e 52.
- 75 COOLEY, G.; TUKEY, J. An Algorithm for the Machine Computation of Complex Fourier Series. *Mathematics of Computation*, v. 19, p. 297–301, 01 1965. Citado na página 33.
- 76 WINOGRAD, S. On Computing the Discrete Fourier Transform. *Mathematics of Computation*, American Mathematical Society, v. 32, n. 141, p. 175–199, 1978. ISSN 00255718, 10886842. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 37.
- 77 HEIDEMAN, M.; JOHNSON, D.; BURRUS, C. Gauss and the History of the Fast Fourier Transform. *IEEE ASSP Magazine*, v. 1, n. 4, p. 14–21, October 1984. ISSN 0740-7467. Citado na página 33.
- 78 BRACEWELL, R. N. The fast Hartley transform. *Proceedings of the IEEE*, v. 72, n. 8, p. 1010–1018, Aug 1984. ISSN 0018-9219. Citado na página 34.
- 79 HIGHAM, N. Computing the Polar Decomposition—with Applications. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, v. 7, n. 4, p. 1160–1174, 1986. Citado na página 40.

- 80 HIGHAM, N.; SCHREIBER, R. Fast Polar Decomposition of an Arbitrary Matrix. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, v. 11, n. 4, p. 648–655, 1990. Citado na página 40.
- 81 HIGHAM, N. J. Computing Real Square Roots of a Real Matrix. *Linear Algebra and its Applications*, v. 88-89, p. 405 – 430, 1987. ISSN 0024-3795. Citado na página 40.
- 82 TABLADA, C.; BAYER, F.; CINTRA, R. A class of DCT approximations based on the Feig–Winograd algorithm. *Signal Processing*, v. 113, p. 38 – 51, 2015. ISSN 0165-1684. Citado 4 vezes nas páginas 40, 46, 50 e 90.
- 83 CINTRA, R.; BAYER, F.; TABLADA, C. Low-complexity 8-point DCT approximations based on integer functions. *Signal Processing*, v. 99, p. 201 – 214, 2014. ISSN 0165-1684. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 57.
- 84 HORADAM, K. J. *Hadamard Matrices and Their Applications*. [S.l.]: Princeton University Press, 2006. ISBN 069111921X,9780691119212. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.
- 85 BEER, T. Walsh transforms. *American Journal of Physics*, v. 49, n. 5, p. 466–472, 1981. Citado na página 42.
- 86 TALLIA, R.; MORELLO, P.; CASTELLANO, G. The Walsh-Hadamard transform: An alternative means of obtaining phase and amplitude maps. *Journal of Nuclear Medicine*, v. 25, p. 608–12, 06 1984. Citado na página 42.
- 87 MIETTINEN, K. *Nonlinear Multiobjective Optimization*. Massachusetts, USA: Kluwer Academic Publishers, 1999. (International Series in Operations Research & Management Science). Citado 2 vezes nas páginas 55 e 56.
- 88 EHRGOTT, M. *Multicriteria Optimization*. 2nd. ed. Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 2005. (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems). ISBN 3540213988. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 56.
- 89 WATKINS, D. S. *Fundamentals of Matrix Computations*. 2nd. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 2002. (Pure and applied mathematics). ISBN 0-471-61414-9. Citado na página 56.
- 90 FLURY, B.; GAUTSCHI, W. An Algorithm for Simultaneous Orthogonal Transformation of Several Positive Definite Symmetric Matrices to Nearly Diagonal Form. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, v. 7, n. 1, p. 169–184, 1986. Citado na página 57.
- 91 BAYER, F. M. et al. A digital hardware fast algorithm and FPGA-based prototype for a novel 16-point approximate DCT for image compression applications. *Measurement Science and Technology*, IOP Publishing, v. 23, n. 11, p. 114010, oct 2012. Citado na página 59.
- 92 SUN, H. et al. A low-cost approximate 32-point transform architecture. In: *2017 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 1–4. ISSN 2379-447X. Citado na página 59.
- 93 CHIU, C. et al. A 64-point Fourier transform chip for video motion compensation using phase correlation. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, v. 31, n. 11, p. 1751–1761, Nov 1996. ISSN 0018-9200. Citado na página 59.

- 94 LE BA, N.; KIM, T. T. An Area Efficient 1024-Point Low Power Radix-22FFT Processor With Feed-Forward Multiple Delay Commutators. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, v. 65, n. 10, p. 3291–3299, Oct 2018. ISSN 1549-8328. Citado na página 59.
- 95 BRUNELLI, R.; POGGIO, T. Face recognition: features versus templates. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 15, n. 10, p. 1042–1052, Oct 1993. ISSN 0162-8828. Citado na página 74.
- 96 GHARIBA, B.; JLEED, H. Face Recognition System Based on Template Matching in Frequency Domain. In: *BCS International IT Conference 2013*. [S.l.: s.n.], 2013. Citado na página 74.
- 97 SINGH, R.; KAUR, M. Face Recognition and Detection using Viola-Jones and Cross Correlation Method. *International Journal of Science and Research (IJSR)*, v. 4, n. 1, p. 2498 – 2501, January 2015. Citado na página 74.
- 98 ABATE, A. F. et al. 2D and 3D face recognition: A survey. *Pattern Recognition Letters*, v. 28, n. 14, p. 1885 – 1906, 2007. ISSN 0167-8655. Citado 2 vezes nas páginas 74 e 75.
- 99 KOUR, A. Face Recognition using Template Matching. *International Journal of Computer Applications*, v. 115, n. 8, p. 10–13, April 2015. Citado na página 74.
- 100 BOUZALMAT, A.; ZARGHILI, A.; KHARROUBI, J. Facial Face Recognition Method using Fourier Transform Filters Gabor and R\_LDA. *IJCA Special Issue on Intelligent Systems and Data Processing*, p. 18–24, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 74 e 75.
- 101 LU, J. et al. Learning Compact Binary Face Descriptor for Face Recognition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 37, n. 10, p. 2041–2056, Oct 2015. ISSN 0162-8828. Citado na página 74.
- 102 CHAO, W.-L. Face recognition. *GICE, National Taiwan University*, 2010. Citado na página 75.
- 103 RANGANATHA, S.; GOWRAMMA, Y. P. Face Recognition Techniques: A Survey. *International Journal for Research in Applied Science & Engineering Technology (IJRASET)*, v. 3, n. 4, p. 630–635, 04 2015. Citado na página 75.
- 104 TURK, M.; PENTLAND, A. Eigenfaces for Recognition. *Journal of Cognitive Neuroscience*, v. 3, n. 1, p. 71–86, 1991. Citado na página 75.
- 105 BELHUMEUR, P. N.; HESPANHA, J. P.; KRIEGMAN, D. J. Eigenfaces vs. Fisherfaces: recognition using class specific linear projection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 19, n. 7, p. 711–720, July 1997. ISSN 0162-8828. Citado na página 75.
- 106 LADES, M. et al. Distortion invariant object recognition in the dynamic link architecture. *IEEE Transactions on Computers*, v. 42, n. 3, p. 300–311, March 1993. ISSN 0018-9340. Citado na página 75.
- 107 WISKOTT, L. et al. Face recognition by elastic bunch graph matching. In: *Proceedings of International Conference on Image Processing*. [S.l.: s.n.], 1997. v. 1, p. 129–132 vol.1. Citado na página 75.

- 108 SHEN, L.; BAI, L. A Review on Gabor Wavelets for Face Recognition. *Pattern Anal. Appl.*, Springer-Verlag, London, UK, UK, v. 9, n. 2-3, p. 273–292, out. 2006. ISSN 1433-7541. Citado na página 75.
- 109 OJALA, T.; PIETIKAINEN, M.; MAENPAA, T. Multiresolution gray-scale and rotation invariant texture classification with local binary patterns. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 24, n. 7, p. 971–987, July 2002. ISSN 0162-8828. Citado na página 75.
- 110 AHONEN, T.; HADID, A.; PIETIKAINEN, M. Face Recognition with Local Binary Patterns. In: *Pajdla T., Matas J. (eds) Computer Vision - ECCV 2004*. [S.l.: s.n.], 2004. v. 3021, p. 469–481. Citado na página 75.
- 111 AHONEN, T.; HADID, A.; PIETIKAINEN, M. Face Description with Local Binary Patterns: Application to Face Recognition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 28, n. 12, p. 2037–2041, Dec 2006. ISSN 0162-8828. Citado na página 75.
- 112 JAFRI, R.; ARABNIA, H. R. A Survey of Face Recognition Techniques. *Journal of Information Processing Systems*, v. 5, n. 2, p. 41–68, 2009. Citado na página 75.
- 113 SHARIF, M. et al. Face Recognition: A Survey. *Journal of Engineering Science and Technology Review*, v. 10, n. 2, p. 166–177, 2017. Citado na página 75.
- 114 VIJAYA KUMAR, B. V. K. Tutorial survey of composite filter designs for optical correlators. *Appl. Opt.*, OSA, v. 31, n. 23, p. 4773–4801, Aug 1992. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 76.
- 115 VIJAYA KUMAR, B. V. K.; SAVVIDES, M.; XIE, C. Correlation Pattern Recognition for Face Recognition. *Proceedings of the IEEE*, v. 94, n. 11, p. 1963–1976, Nov 2006. ISSN 0018-9219. Citado 3 vezes nas páginas 75, 76 e 77.
- 116 SAVVIDES, M.; VIJAYA KUMAR, B. V. K.; KHOSLA, P. Face verification using correlation filters. In: *3rd IEEE Automatic Identification Advanced Technologies*. [S.l.: s.n.], 2002. p. 56–61. Citado 7 vezes nas páginas 75, 76, 77, 81, 83, 86 e 88.
- 117 USORO, A. E. Some basic properties of cross-correlation functions of n-dimensional vector time series. *Journal of Statistical and Econometric Methods*, v. 4, n. 1, p. 1–3, 2015. Citado na página 76.
- 118 VIJAYA KUMAR, B. V. K. et al. Recent advances in correlation filter theory and application. In: *Proc. SPIE 9094, Optical Pattern Recognition XXV*. [S.l.: s.n.], 2014. v. 9094. Citado 2 vezes nas páginas 76 e 81.
- 119 BOLME, D. S. et al. Visual object tracking using adaptive correlation filters. In: *2010 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 2544–2550. ISSN 1063-6919. Citado na página 76.
- 120 VIJAYA KUMAR, B. V. K. et al. Biometric verification with correlation filters. *Appl. Opt.*, OSA, v. 43, n. 2, p. 391–402, Jan 2004. Citado na página 76.
- 121 BOLME, D. S. et al. Simple real-time human detection using a single correlation filter. In: *2009 Twelfth IEEE International Workshop on Performance Evaluation of Tracking and Surveillance*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 1–8. Citado na página 76.

- 122 THORNTON, J.; SAVVIDES, M.; VIJAYA KUMAR, B. V. K. A Bayesian Approach to Deformed Pattern Matching of Iris Images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 29, n. 4, p. 596–606, April 2007. ISSN 0162-8828. Citado na página 76.
- 123 TORRES, L. Is there any hope for face recognition? In: *In Proc. of the 5 th International Workshop on Image Analysis for Multimedia Interactive Services, WIAMIS*. [S.l.: s.n.], 2004. p. 21–23. Citado na página 76.
- 124 HESTER, C. F.; CASASENT, D. Multivariant technique for multiclass pattern recognition. *Appl. Opt.*, OSA, v. 19, n. 11, p. 1758–1761, Jun 1980. Citado na página 77.
- 125 MAHALANOBIS, A.; VIJAYA KUMAR, B. V. K.; CASASENT, D. Minimum average correlation energy filters. *Appl. Opt.*, OSA, v. 26, n. 17, p. 3633–3640, Sep 1987. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 78.
- 126 SUN, H. The Hartley transform applied to particle image velocimetry. *Measurement Science and Technology*, IOP Publishing, v. 13, n. 12, p. 1996–2000, nov 2002. Citado na página 79.
- 127 WAYMAN, J. L. et al. *Biometric Systems: Technology, Design, and Performance Evaluation*. 1st. ed. [S.l.]: Springer, 2005. ISBN 1852335963,9781852335960. Citado 2 vezes nas páginas 84 e 85.
- 128 MALVAR, H. Fast computation of discrete cosine transform through fast Hartley transform. *Electronics Letters*, v. 22, n. 7, p. 352–353, March 1986. ISSN 0013-5194. Citado na página 91.

## APÊNDICE A – PARAMETRIZAÇÃO DA MATRIZ DA DHT EXATA

### Comprimento $N = 3$ na Forma Direta

A matriz da transformada discreta de Hartley de comprimento  $N = 3$  é representada na forma parametrizada por:

$$\mathbf{H}_3(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_3 \\ \alpha_1 & -\alpha_3 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

em que  $\boldsymbol{\alpha} = (1, \cos \theta, -\cos 2\theta)$  e  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ .

### Comprimento $N = 3$ com a Fatoração de Winograd

A parametrização de  $\mathbf{H}_3$  associada à fatoração de Winograd [36], é definida por:

$$\mathbf{H}_3(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2, \quad (\text{A.2})$$

em que

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

$\boldsymbol{\alpha} = (1, 1 - \cos \theta, \sin \theta)$  e  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ .

### Comprimento $N = 5$ na Forma Direta

A matriz da DHT de comprimento  $N = 5$  é representada na forma parametrizada por:

$$\mathbf{H}_5(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 \\ \alpha_1 & -\alpha_3 & -\alpha_5 & \alpha_2 & -\alpha_4 \\ \alpha_1 & -\alpha_4 & \alpha_2 & -\alpha_5 & -\alpha_3 \\ \alpha_1 & -\alpha_5 & -\alpha_4 & -\alpha_3 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

em que  $\boldsymbol{\alpha} = (1, \cos \theta, -\cos 2\theta, -\cos 3\theta, -\cos 4\theta)$  e  $\theta = \frac{2\pi}{5}$ .

### Comprimento $N = 5$ com a Fatoração de Winograd

A parametrização de  $\mathbf{H}_5$  associada à fatoração de Winograd [36], é definida por:

$$\mathbf{H}_5(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3 \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3, \quad (\text{A.5})$$

em que

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_6 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \left( 1, 1 - \frac{1}{2}(\cos \theta + \cos 2\theta), \frac{1}{2}(\cos \theta - \cos 2\theta), \sin \theta, \sin \theta + \sin 2\theta, \sin \theta - \sin 2\theta \right) \text{ e } \theta = \frac{2\pi}{5}.$$

### Comprimento $N = 7$ na Forma Direta

A matriz da DHT de comprimento  $N = 7$  é representada na forma parametrizada por:

$$\mathbf{H}_7(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & -\alpha_6 & -\alpha_7 \\ \alpha_1 & \alpha_3 & -\alpha_5 & -\alpha_7 & \alpha_2 & -\alpha_4 & -\alpha_6 \\ \alpha_1 & -\alpha_4 & -\alpha_7 & \alpha_3 & -\alpha_6 & \alpha_2 & -\alpha_5 \\ \alpha_1 & -\alpha_5 & \alpha_2 & -\alpha_6 & \alpha_3 & -\alpha_7 & -\alpha_4 \\ \alpha_1 & -\alpha_6 & -\alpha_4 & \alpha_2 & -\alpha_7 & -\alpha_5 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & -\alpha_7 & -\alpha_6 & -\alpha_5 & -\alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

em que  $\boldsymbol{\alpha} = (1, \cos \theta, \cos 2\theta, -\cos 3\theta, -\cos 4\theta, -\cos 5\theta, -\cos 6\theta)$  e  $\theta = \frac{2\pi}{7}$ .

### Comprimento $N = 7$ com a Fatoração de Winograd

A parametrização de  $\mathbf{H}_7$  associada à fatoração de Winograd [36], é definida por:

$$\mathbf{H}_7(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2, \quad (\text{A.8})$$

em que

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_9 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \left( 1, 1 - \frac{1}{3}(\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta), \frac{1}{3}(2 \cos \theta - \cos 2\theta - \cos 3\theta), \right. \\ \left. \frac{1}{3}(\cos \theta - 2 \cos 2\theta + \cos 3\theta), \frac{1}{3}(\cos \theta + \cos 2\theta - 2 \cos 3\theta), \right. \\ \left. \frac{1}{3}(\sin \theta + \sin 2\theta - \sin 3\theta), \frac{1}{3}(2 \sin \theta - \sin 2\theta + \sin 3\theta), \right. \\ \left. \frac{1}{3}(\sin 2\theta + \sin 3\theta - \sin \theta), \frac{1}{3}(\sin \theta + \sin 2\theta + 2 \sin 3\theta) \right) \text{ e } \theta = \frac{2\pi}{7}.$$

### Comprimento $N = 8$ na Forma Direta

A matriz da DHT de comprimento  $N = 8$  é representada na forma parametrizada por:

$$\mathbf{H}_8(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & -\alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & -\alpha_1 & -\alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 & -\alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 & \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_1 & -\alpha_1 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 & -\alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & -\alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & -\alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_1 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

em que  $\boldsymbol{\alpha} = (1, \cos \theta)$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

### Comprimento $N = 8$ com a Fatoração de Cooley-Tukey

A parametrização de  $\mathbf{H}_8$  associada à fatoração de Cooley-Tukey [28], é definida por:

$$\mathbf{H}_8(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_1(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3 \mathbf{P}, \quad (\text{A.11})$$

em que a matriz  $\mathbf{P}$  é uma permutação entre linhas, duas a duas, dos pares de linhas (2, 5) e (4, 7) da matriz identidade  $\mathbf{I}_8$ , as matrizes  $\mathbf{C}_i$  são obtidas a partir da Equação 4.11:

$$\mathbf{C}_3 = \mathbf{I}_4 \otimes \mathbf{H}_2, \quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{I}_2, \quad \mathbf{C}_1 = \mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{I}_4,$$

a matriz  $\mathbf{A}_1$  é dada pela Equação 4.13:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{D}_8,$$

e a matriz parametrizada é calculada por:

$$\mathbf{B}_1(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

$$\boldsymbol{\alpha} = (1, \cos \theta) \text{ e } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

### Comprimento $N = 16$ na Forma Direta

A matriz da DHT de comprimento  $N = 16$  é representada na forma parametrizada por:

$$\mathbf{H}_{16}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_4 & 0 & -\alpha_4 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 & -\alpha_4 & 0 & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_1 & 0 & -\alpha_1 & -\alpha_3 & -\alpha_1 & 0 & \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_1 & 0 & -\alpha_1 & -\alpha_3 & -\alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & -\alpha_2 & -\alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_4 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & \alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_4 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & -\alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & -\alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & -\alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & -\alpha_1 & -\alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_4 & -\alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & \alpha_2 & -\alpha_1 & -\alpha_4 & \alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_1 & \alpha_2 & 0 & -\alpha_2 \\ \alpha_1 & 0 & -\alpha_1 & \alpha_3 & -\alpha_1 & 0 & \alpha_1 & -\alpha_3 & \alpha_1 & 0 & -\alpha_1 & \alpha_3 & -\alpha_1 & 0 & \alpha_1 & -\alpha_3 \\ \alpha_1 & -\alpha_4 & 0 & \alpha_4 & -\alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_3 & \alpha_2 & -\alpha_1 & \alpha_4 & 0 & -\alpha_4 & \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ \alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_1 & -\alpha_1 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_4 & 0 & \alpha_4 & -\alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_3 & \alpha_2 & -\alpha_1 & \alpha_4 & 0 & -\alpha_4 \\ \alpha_1 & -\alpha_3 & \alpha_1 & 0 & -\alpha_1 & \alpha_3 & -\alpha_1 & 0 & \alpha_1 & -\alpha_3 & \alpha_1 & 0 & -\alpha_1 & \alpha_3 & -\alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & \alpha_2 & -\alpha_1 & -\alpha_4 & \alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_1 & \alpha_2 & 0 & -\alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_4 & -\alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1 & -\alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & -\alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & -\alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & -\alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & -\alpha_4 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & -\alpha_2 & -\alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_4 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & 0 & -\alpha_1 & -\alpha_3 & -\alpha_1 & 0 & \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_1 & 0 & -\alpha_1 & -\alpha_3 & -\alpha_1 & 0 & \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 & 0 & -\alpha_4 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 & -\alpha_4 & 0 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

$$\text{em que } \boldsymbol{\alpha} = (1, \cos \theta, \cos 2\theta, \cos 5\theta) \text{ e } \theta = \frac{\pi}{8}.$$

### Comprimento $N = 16$ com a Fatoração de Cooley-Tukey

A parametrização de  $\mathbf{H}_{16}$  associada à fatoração de Cooley-Tukey [28], é definida por:

$$\mathbf{H}_{16}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_1(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_2(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{A}_2 \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_4 \mathbf{P}, \quad (\text{A.14})$$

em que a matriz  $\mathbf{P}$  é uma permutação entre linhas, duas a duas, dos pares de linhas (2, 9), (3, 5), (4, 13), (6, 11), (8, 15), e (12, 14) da matriz identidade  $\mathbf{I}_{16}$ , as matrizes  $\mathbf{C}_i$  são obtidas a partir da Equação 4.11:

$$\mathbf{C}_4 = \mathbf{I}_8 \otimes \mathbf{H}_2, \quad \mathbf{C}_3 = \mathbf{I}_4 \otimes \mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{I}_2, \quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{I}_4, \quad \mathbf{C}_1 = \mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{I}_8,$$

as matrizes  $\mathbf{A}_i$  são dadas pela Equação 4.13:

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{D}_8, \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{D}_{16},$$

e as matrizes parametrizadas são calculadas por:

$$\mathbf{B}_2(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{B}_1(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_4 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & -\alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.16})$$

$$\boldsymbol{\alpha} = (1, \cos \theta, \cos 2\theta, \cos 3\theta) \text{ e } \theta = \frac{\pi}{8}.$$

### Comprimento $N = 32$ na Forma Direta

A matriz da DHT de comprimento  $N = 32$ , em sua forma parametrizada, contém oito parâmetros  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$ . Todos os parâmetros estão presentes na segunda linha da matriz.

Portanto, apenas a segunda linha da matriz  $\mathbf{H}_{32}(\boldsymbol{\alpha})$  é representada a seguir:

$$\begin{aligned} (h_{1,0}, h_{1,1}, \dots, h_{1,31}) = & (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \\ & \alpha_1, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, 0, -\alpha_8, -\alpha_7, -\alpha_6, \\ & -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, -\alpha_4, -\alpha_5, -\alpha_4, -\alpha_3, -\alpha_2, \\ & -\alpha_1, -\alpha_6, -\alpha_7, -\alpha_8, 0, \alpha_8, \alpha_7, \alpha_6), \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

em que  $\boldsymbol{\alpha} = (1, \cos \theta, \cos 2\theta, \cos 3\theta, \cos 4\theta, \cos 9\theta, \cos 10\theta, \cos 11\theta)$  e  $\theta = \frac{\pi}{16}$ . O restante da matriz parametrizada é completamente representado pelo vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\alpha}$ .

### Comprimento $N = 32$ com a Fatoração de Cooley-Tukey

A parametrização de  $\mathbf{H}_{32}$  associada à fatoração de Cooley-Tukey [28], é definida por:

$$\mathbf{H}_{32}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_1(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_2(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{A}_2 \mathbf{C}_3 \mathbf{B}_3(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{A}_3 \mathbf{C}_4 \mathbf{C}_5 \mathbf{P}, \quad (\text{A.18})$$

em que a matriz  $\mathbf{P}$  é uma permutação entre linhas, duas a duas, dos pares de linhas (2, 17), (3, 9), (4, 25), (6, 21), (7, 13), (8, 29), (10, 19), (12, 27), (14, 23), (16, 31), (20, 26) e (24, 30) da matriz identidade  $\mathbf{I}_{32}$ , as matrizes  $\mathbf{C}_i$  são obtidas a partir da Equação 4.11:

$$\mathbf{C}_5 = \mathbf{I}_{16} \otimes \mathbf{H}_2, \quad \mathbf{C}_4 = \mathbf{I}_8 \otimes \mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{I}_2, \quad \mathbf{C}_3 = \mathbf{I}_4 \otimes \mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{I}_4, \quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{I}_8, \quad \mathbf{C}_1 = \mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{I}_{16},$$

as matrizes  $\mathbf{A}_i$  são dadas pela Equação 4.13:

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{I}_4 \otimes \mathbf{D}_8, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{D}_{16}, \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{D}_{32},$$

e as matrizes parametrizadas são calculadas por:

$$\mathbf{B}_3(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{I}_4 \otimes \left[ \begin{array}{c|c} \alpha_1 \mathbf{I}_4 & \mathbf{0}_{4 \times 4} \\ \hline \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{R}_3(\boldsymbol{\alpha}) \end{array} \right], \quad (\text{A.19a})$$

$$\mathbf{B}_2(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{I}_2 \otimes \left[ \begin{array}{c|c} \alpha_1 \mathbf{I}_8 & \mathbf{0}_{8 \times 8} \\ \hline \mathbf{0}_{8 \times 8} & \mathbf{R}_2(\boldsymbol{\alpha}) \end{array} \right], \quad (\text{A.19b})$$

$$\mathbf{B}_1(\boldsymbol{\alpha}) = \left[ \begin{array}{c|c} \alpha_1 \mathbf{I}_{16} & \mathbf{0}_{16 \times 16} \\ \hline \mathbf{0}_{16 \times 16} & \mathbf{R}_1(\boldsymbol{\alpha}) \end{array} \right], \quad (\text{A.19c})$$

em que

$$\mathbf{R}_3(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_5 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{R}_2(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_7 \\ 0 & 0 & \alpha_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_7 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & -\alpha_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_5 & 0 \\ 0 & \alpha_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbf{R}_1(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix}
\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_8 \\
0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_6 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_7 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_8 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \alpha_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \alpha_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_3 & 0 \\
0 & \alpha_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_2
\end{bmatrix}, \tag{A.22}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = (1, \cos \theta, \cos 2\theta, \cos 3\theta, \cos 4\theta, \cos 5\theta, \cos 6\theta, \cos 7\theta) \text{ e } \theta = \frac{\pi}{16}.$$







### Algoritmo Rápido para $\hat{\mathbf{H}}_{32,1}^{(1)}$

Um algoritmo rápido para a aproximação  $\hat{\mathbf{H}}_{32,2}^{(1)}$ , desconsiderando a matriz diagonal de ajuste, é definido por:

$$\hat{\mathbf{H}}_{32,1}^{(1)} = \mathbf{P} \left[ \begin{array}{c|c} 2\hat{\mathbf{H}}_{16,2}^{(1)} & \mathbf{0}_{16 \times 16} \\ \hline \mathbf{0}_{16 \times 16} & \mathbf{R}_{16} \end{array} \right] \mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{I}_{16} \quad (\text{B.7})$$

em que  $\mathbf{P}$  é uma matriz de permutação cujos elementos não nulos são  $p(2i+1, i+16) = p(2i, i) = 1$ ,  $i = 0, 1, \dots, 15$ ,

$$\mathbf{R}_{16} = \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{B} \mathbf{A}, \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.9})$$



$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix}. \quad (\text{B.12})$$