

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

DIEGO JONATA DE MEDEIROS

**IDENTIFICAÇÃO DAS IMAGENS E DEFINIÇÕES CONCEITUAIS
DOS DISCENTES DAS TURMAS DE CÁLCULO II E III DO CURSO DE
MATEMÁTICA-LICENCIATURA: UMA ANÁLISE DAS INFLUÊNCIAS
DO CONCEITO DE ÁREA NO DE INTEGRAL DEFINIDA**

CARUARU

2018

DIEGO JONATA DE MEDEIROS

**IDENTIFICAÇÃO DAS IMAGENS E DEFINIÇÕES
CONCEITUAIS DOS DISCENTES DAS TURMAS DE
CÁLCULO II E III DO CURSO DE MATEMÁTICA-
LICENCIATURA: UMA ANÁLISE DAS INFLUÊNCIAS DO
CONCEITO DE ÁREA NO DE INTEGRAL DEFINIDA**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado (a) ao
Curso de Graduação em Matemática- Licenciatura da
Universidade Federal de Pernambuco, como requisito
parcial para a graduação em Licenciatura em
Matemática.

Área de concentração: Ensino/ Matemática

Orientadora: Profa. Mra. Elizabeth Lacerda Gomes

Coorientadora: Profa. Mra. Cristiane de Arimatéa
Rocha

Caruaru
2018

Catálogo na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier - CRB/4 - 1242

M488i

Medeiros, Diego Jonata de.

Identificação das imagens e definições conceituais dos discentes das turmas de cálculo II e III do Curso de Matemática-Licenciatura: uma análise das influências do conceito de área no de integral definida. / Diego Jonata de Medeiros. - 2018. 65 f. ; il. : 30 cm.

Orientadora: Elizabeth Lacerda Gomes

Coorientadora: Cristiane de Arimatéa Rocha

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2018.

Inclui Referências.

1. Integrais definidas. 2. Conceitos. 3. Matemática – Estudo e ensino. 4. Cálculo integral. I. Gomes, Elizabeth Lacerda (Orientadora). II. Rocha, Cristiane Arimatéa (Coorientadora). III. Título.

371.12 CDD (23. ed.)

UFPE (CAA 2018-268)



Universidade Federal de Pernambuco

Centro Acadêmico do Agreste

Núcleo de Formação Docente

Matemática - Licenciatura



DIEGO JONATA DE MEDEIROS

**IDENTIFICAÇÃO DAS IMAGENS E DEFINIÇÕES CONCEITUAIS
DOS DISCENTES DAS TURMAS DE CÁLCULO II E III DO CURSO
DE MATEMÁTICA-LICENCIATURA: UMA ANÁLISE DAS
INFLUÊNCIAS DO CONCEITO DE ÁREA NO DE INTEGRAL
DEFINIDA**

Monografia submetida ao Corpo Docente do Curso de Matemática – Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco e aprovada em 30 de Novembro de 2018.

Banca Examinadora:

Profa. Mra. Elizabeth Lacerda Gomes
(Orientadora)

Prof. Mr. Paulo Roberto Câmara de Sousa
(Examinador Interno)

Prof. Mra. Tuanny da Silva Maciel
(Examinadora Externa)

Dedico este trabalho aos meus pais e ao meu irmão que sempre estiveram comigo me apoiando e incentivando mentalmente ou pessoalmente durante toda minha formação acadêmica e na minha vida.

AGRADECIMENTOS

Ao fim desta etapa tão sonhada e marcante na minha vida que foi a graduação, faz-se necessário agradecer àqueles que de alguma forma foram importantes durante a caminhada, seja desde o início, como também, durante ela.

Inicialmente, antes de qualquer outra coisa, agradeço a Deus pela minha vida e pelas pessoas que foram colocadas nela durante o período da graduação. Agradeço ao meu irmão, a pessoa com quem eu convivi por 21 anos e que Deus levou para perto Dele, mas que jamais sairá da minha mente e do meu coração. Agradeço aos meus pais, Adenilda Medeiros e Gilvan Florêncio, por tudo que fizeram/fazem por mim. Eles, com toda certeza, são os melhores. Além deles, minhas avós Cecília Oliveira e Maria Clarindo são como mães pra mim e agradeço a elas por todo o cuidado.

Agradeço a esse trio de amigos, Gilvaneide Evelyn, Rúben Félix e Edivanilson Silva, por sempre dividirem comigo os melhores momentos desde o primeiro período do curso. Estiveram ao meu lado durante todo esse tempo de graduação e compartilhamos diversos acontecimentos juntos.

Agradeço também a Pedro Santos, Miguel Albertino, Wesley Michael e Adonias Barros pelos momentos incríveis que compartilhamos no decorrer da graduação.

Não poderia deixar de agradecer ao meu trio de amigos da vida composto por Adailton, Lidiane e Milena, são 6 anos de muitas alegrias, tristezas e inúmeras situações memoráveis.

Agradeço à professora Cristiane Rocha por toda a ajuda neste trabalho durante as disciplinas de TCC1 e TCC2. Agradeço, também, às professoras Elizabeth Lacerda e Maria do Desterro por se preocuparem em me ajudar no momento que mais precisei, guardarei vocês no meu coração para sempre. Se importaram comigo em diversas situações e sempre me incentivaram a ver tudo pelo lado positivo, além disso, agradeço por me mostrarem uma nova forma de ver a matemática pura. Espero um dia me tornar um profissional no mesmo nível delas.

Agradeço à minha orientadora Elizabeth Lacerda e co-orientadora Cristiane Rocha, aos membros da banca examinadora e a todos aqueles que estiveram comigo compartilhando experiências inesquecíveis, nas monitorias, nos projetos, nas idas e vindas na van, nos congressos, enfim, durante toda a graduação. Agradeço aos professores do curso de Matemática-Licenciatura, a todos eles, pois por meio deles pude extrair contribuições

positivas para minha formação e me possibilitaram chegar até aqui. Em especial, à professora Jaqueline Lixandrão por possibilitar o estudo inclusivo; e à professora Iranete Lima por me aceitar e contribuir significativamente na minha formação como professor de diferentes tipos de escolas, dentre elas, a escola do campo. Enfim, agradeço a todos que ajudaram na minha formação profissional e pessoal.

RESUMO

O Cálculo Diferencial e Integral é uma disciplina comum nos cursos de graduação da área de exatas, com abrangência significativa na primeira parte desses cursos e com muitas aplicações na parte profissional, levando-nos a reflexão acerca de sua importância. Diante disto, faz-se necessário que a construção de todo o conceito envolvido no Cálculo seja aprendida de modo a possibilitar as devidas interpretações, haja vista suas aplicabilidades. Considerando a extensão da ementa da disciplina, optamos por trabalhar com a Integral Definida, por sua relação com outras áreas do conhecimento. Este trabalho objetivou investigar aspectos da imagem e definição conceituais que os estudantes que cursaram Cálculo II e III no curso de Licenciatura em Matemática do Centro Acadêmico do Agreste atribuem à interpretação geométrica do conceito de Integral Definida. Esses alunos foram escolhidos por já terem tido contato com a Integral Definida no Cálculo I. O caráter da pesquisa é qualitativo, pois não objetivamos realizar nenhum tipo de quantificação na coleta dos dados nem analisá-los utilizando técnicas estatísticas. Para a análise das informações nos fundamentamos nas teorias Conhecimento Procedimental e Conceitual e Imagem e Definição Conceituais. Concluímos que o conceito de área pouco influencia nas definições conceituais dos estudantes e que, além disso, a maioria deles apresentou um melhor domínio dos métodos de solução de Integrais Definidas do que do conceito em si.

Palavras-chave: Integral Definida. Imagem e Definição Conceituais. Conhecimento Procedimental e Conceitual. Interpretações do Conceito.

ABSTRACT

The differential and Integral Calculus is a common undergraduate discipline of exact area, with significant coverage in the first part of these courses and with many applications in the professional part, leading us to reflection about your importance. Thus, it is necessary that the construction of the whole concept involved in the calculation is complete so as to enable the necessary interpretations, considering your applications. Considering the extent of discipline syllabus, we chose to work with the definite Integral, by your relationship with other areas of knowledge. This assignment aimed to investigate aspects of image and concept definition to the graduating who took Calculus II and III of Degree in Mathematics of the Agrest Academic Center of attach to the geometrical interpretation of the concept of Definite Integral. These students were chosen because they have already been in contact with the Definite Integral in Calculus I. The character of the research is qualitative, because we do not intend to perform any type of quantification in data collection or analyze them using statistical techniques. For the analysis of information in our Procedural and Conceptual Knowledge theories and Conceptual Definition and image. We conclude that the concept of the area little influence on students ' conceptual definitions and that, moreover, most of them presented a better mastery of the methods of solution of Definite Integrals than the concept itself.

Keywords: Definite Integral. Image and Conceptual Rights. Procedural and Conceptual Knowledge. Interpretations of the Concept.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Partições do intervalo	23
Figura 2 - Representação geométrica da soma de Riemann	24
Figura 3 - Interpretação geométrica da Integral Definida	25
Figura 4 - Aproximação por retângulos e área sob a curva	26
Figura 5 - Erro cometido pelo aluno A2	32
Figura 6 - Erro cometido pelo aluno A19	33
Figura 8 - Resposta correta apresentada pelo aluno A2 no item a) da Questão 6	41
Figura 9 - Resposta errada apresentada pelo aluno A21 no item a) da Questão 6	42
Figura 10 - Acerto do aluno A3 no item b) da Questão 6	44
Figura 11 - Erro apresentado pelo aluno A7 no item b) da Questão 6	45

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Categorização por período	29
Gráfico 2 - Distribuição dos alunos por curso	30
Gráfico 3 - Categorização das Respostas	32
Gráfico 4 - Categorias das respostas sobre o conceito da Integral Definida	34
Gráfico 5 – Abordagem do conteúdo	35
Gráfico 6 - Formas de explanação do conteúdo	36
Gráfico 7 - Importância para o aprendizado	37
Gráfico 8 - Respostas para a função dita integrável	38
Gráfico 9 - Respostas para a função dita não integrável	39
Gráfico 10 – Representação geométrica da função e das retas do item a) da Questão 6	40
Gráfico 11 - Classificação das respostas dos estudantes no item a).	40
Gráfico 12 - Classificação das respostas dos estudantes do item b)	43
Gráfico 13 - Relações com outros conceitos	45

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
2 JUSTIFICATIVA.....	14
3 OBJETIVOS.....	15
3.1 Objetivo Geral	15
3.2 Objetivos Específicos	15
4 ALGUMAS PESQUISAS SOBRE O ENSINO-APRENDIZAGEM DA INTEGRAL DEFINIDA.....	16
5 IMAGEM CONCEITUAL E DEFINIÇÃO CONCEITUAL DA INTEGRAL DEFINIDA.....	19
5.1 Imagem Conceitual e Definição Conceitual.....	19
5.2 Integral Definida.....	22
6 METODOLOGIA.....	27
6.1 Questionário da Pesquisa.....	28
7 RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	29
7.1 Periodização.....	29
7.2 Aplicação da Integral Definida.....	30
7.3 Conceito de Integral Definida	33
7.4 Abordagem do Conceito de Integral Definida.....	35
7.5 Integrabilidade.....	38
7.6 Cálculo de Integrais.....	39
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	47
REFERÊNCIAS.....	49
ANEXO A – QUESTIONÁRIO.....	51
ANEXO B – TABELAS DAS RESPOSTAS DE CADA QUESTÃO DO QUESTIONÁRIO.....	54

1 INTRODUÇÃO

O Cálculo Diferencial e Integral é uma disciplina comum nos cursos de graduação da área de exatas, fato que nos faz pensar acerca da sua importância. Ele está presente em todas as engenharias, na Ciência da Computação, em Química, em Matemática, em Física, entre outros cursos onde é utilizado como ferramenta para a compressão e formulação de outros conceitos. Diante disto, é importante que a construção de todos os conceitos que permeiam o Cálculo seja feita de modo a possibilitar as devidas interpretações.

Segundo Barreto (1995 *apud* REIS, 2001, p.20), “o ensino de Cálculo nas universidades brasileiras tem sido objeto de questionamento em diversos fóruns em função das dificuldades apresentadas pelos alunos na sua aprendizagem, bem como pela alta evasão dos estudantes dos primeiros períodos”. Uma possível justificativa é trazida por D’Ambrosio ao questionar a didática empregada pelos professores no ensino da matemática em geral:

Sabe-se que a típica aula de matemática a nível de primeiro, segundo ou terceiro graus ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julgar importante. O aluno, por sua vez, copia da lousa para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor. Essa prática revela a concepção de que é possível aprender matemática através de um processo de transmissão de conhecimento. Mais ainda, de que a resolução de problemas reduz-se a procedimentos determinados pelo professor (1989, p.15).

Devido a esse paradigma que vem desde a educação básica de apenas aprender os métodos e não os conceitos, muitos alunos priorizam as técnicas de resolução do Cálculo¹, sejam elas referentes a limites, derivadas ou integrais, deixando de lado as interpretações, na maioria das vezes as geométricas, as quais são fundamentais para o aprendizado significativo.

Com o surgimento do grande número de questionamentos a respeito do ensino do Cálculo, muitos professores buscaram meios para reverter o insucesso da construção do conhecimento significativo, fato relatado por Barufi (1999, p. 162):

A fim de minimizar o insucesso na construção do conhecimento significativo, a saída, muitas vezes adotada, é a de privilegiar a aplicação do cálculo, apresentando um grande número de problemas e exercícios, muitas vezes repetitivos, onde o aluno acaba memorizando, de alguma forma, processos de resolução. Nesse sentido, reduz-se a ideia, o conceito, ao algoritmo e sobra aquela eterna pergunta dos estudantes, não respondida e “odiada” pelos professores: para que serve isto?

¹ Utilizaremos a palavra Cálculo para substituir Cálculo Diferencial e Integral com o intuito de simplificar nossa escrita.

Durante o processo de aprendizagem de um conteúdo os alunos podem desenvolver dois tipos de conhecimentos: os processuais e os conceituais. Os primeiros são os necessários para resolver uma tarefa e os segundos são as ligações que o aluno consegue fazer com os outros conhecimentos que detém. A partir deles, trabalharemos com as teorias de Tall e Vinner (1981), as quais utilizam dois termos, *definição e imagem conceituais*, em que este último se relaciona aos aspectos cognitivos da representação mental criada pelo sujeito, ou seja, a forma como o aluno interpreta determinado conteúdo, e o outro diz respeito à forma como essa interpretação passa a ser uma definição.

Inferir sobre os aspectos da imagem e definição conceituais apresentados pelos sujeitos pesquisados é importante quando se está trabalhando com o Cálculo devido ao fato das interpretações e conclusões serem fundamentais para se chegar a uma aprendizagem significativa. Isso contribui para um melhor entendimento das dificuldades apresentadas no processo da aquisição de conceitos. Tendo em vista a grande variedade dos assuntos desta disciplina, em particular trabalharemos com a Integral Definida, a qual tem diversas aplicabilidades em inúmeras áreas do conhecimento, o que implica que, todas as relações usando-a devem ser bem articuladas.

Diante disto, nosso problema de pesquisa é: quais as influências do conceito de área na imagem e na definição conceituais dos estudantes que estão cursando Cálculo II e III no curso de Matemática - Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste na definição do conceito de Integral Definida?

Este trabalho tem caráter qualitativo e fundamenta-se nas concepções teóricas sobre conhecimentos processuais e conceituais de Hiebert e Lefevre (1986) interligados com o papel das definições em Matemática trazido na pesquisa de Vinner (1991), que juntas complementam a teoria de Tall e Vinner (1981) que trata da imagem e definição conceituais.

Além desta introdução, o trabalho está organizado em seis capítulos. No segundo, tecemos nossa justificativa de pesquisa e no terceiro, seus objetivos. No quarto discutimos sobre o contexto no qual o estudo se encontra, apresentando outras pesquisas realizadas.

No cinco descrevemos a fundamentação teórica utilizada nas análises. No capítulo seis explanamos o percurso metodológico da análise qualitativa realizada elucidando o tipo de pesquisa que desenvolvemos. No sétimo apresentamos os resultados da pesquisa e as análises construídas sobre os dados coletados. Por fim, trazemos nossas considerações finais, retomando os principais resultados do estudo.

2 JUSTIFICATIVA

O Cálculo Diferencial e Integral é uma das disciplinas temidas durante as graduações da área de exatas. Muitos alunos temem antes mesmo de cursá-lo devido aos comentários a respeito do grande número de reprovações. Uma possível justificativa para a retenção é alguns discentes não terem domínio em Função, conteúdo do ensino básico que é amplamente aprofundado nas disciplinas de Cálculo. Logo, é necessário possuir um conhecimento prévio sobre ele.

Dentre os conceitos principais do Cálculo, demos enfoque às Integrais, em particular a Integral Definida, por se mostrarem importantes em estudos da física, da matemática, na probabilidade e no desenvolvimento de outras teorias dentro da própria matemática. Isso nos leva a refletir que, mais do que saber resolvê-las, é necessário compreender seu conceito, pois é a interpretação do problema e dos dados envolvidos que farão com que ela seja bem utilizada.

A relevância dada às interpretações dos conceitos envolvidos na Integral Definida é pertinente devido ao fato da exatidão das contas não serem suficientes para sua compreensão. Ademais, sua ausência implica na incapacidade dos estudantes em resolver corretamente determinadas aplicações do conteúdo, como por exemplo, pode-se calcular erroneamente a área limitada por uma curva e o resultado ser um valor negativo.

Entende-se, no entanto, que estudar a realidade do ensino e a compreensão da Integral Definida em todos os lugares onde o assunto é abordado é algo impossível. Diante disto, fomos levados a investigar aspectos relevantes que busquem entender a forma como um grupo de alunos compreendem o conceito de Integral Definida à luz da imagem e definição conceituais com o intuito de auxiliar a encontrar uma possível maneira de produzir uma aprendizagem significativa deste conceito.

3 OBJETIVOS

3.1 Objetivo Geral

Este trabalho tem por objetivo investigar como a imagem e definição conceituais influenciam o conceito de integral definida dos discentes das turmas de Cálculo II e III do curso de Matemática - Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste.

3.2 Objetivos Específicos

Estes são os objetivos específicos:

- Identificar as imagens e definições conceituais que os estudantes apresentam sobre a Integral Definida;
- Analisar como o conceito de área está influenciando nas definições apresentadas pelos discentes sobre o conceito acima;
- Analisar os procedimentos apresentados pelos discentes em situações de integrais definidas;
- Verificar se os discentes sabem dar uma resposta formal a respeito da definição deste conceito.

4 ALGUMAS PESQUISAS SOBRE O ENSINO-APRENDIZAGEM DA INTEGRAL DEFINIDA

Durante as disciplinas de Cálculo cursadas como aluno de graduação, foi possível identificar várias dificuldades da turma, entre as quais a mais frequente era a de resolver questões um pouco mais contextualizadas que fugiam do método tradicional (apenas a aplicação das fórmulas prontas) e que geralmente eram consideradas muito difíceis. Alguns afirmavam que a falta de compreensão do enunciado se dava pelo professor não ter abordado questões parecidas em sala ou por não saberem encontrar derivada pela definição de limite, identificar se devem utilizar integral ou derivada, ou o porquê da questão pedir a área e o resultado encontrado ser negativo.

Muitos alunos aparentavam não saber a definição de integral. Quando eram questionados sobre tal definição, respondiam que era a área abaixo de uma curva, justificando assim, a não compreensão das questões que exigiam um pouco mais que calcular a área. Apresentamos a seguir algumas pesquisas que evidenciam fatores que podem justificar o não aprendizado do conceito de integral, meios para o melhor aprendizado e pesquisas que apresentam a quantidade de reprovações.

Silva (2004) analisa, em dois livros didáticos (Guidorizzi e Stewart), o conteúdo Integral à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval. Resumidamente a teoria trata da “representação de uma ideia ou um objeto do saber, construída a partir da mobilização de um sistema de sinais.” (HENRIQUES, A.; ALMOULOU, S. A., 2016). Ao analisar os livros, Silva tinha como objetivo descobrir se eles utilizam estes registros, quais tratamentos que realizam em um mesmo registro e as conversações entre si utilizadas. Os resultados mostram que, se os livros forem bem explorados, podem levar o aluno a construir um conhecimento mais aguçado do conteúdo por meio da utilização das conversões com visualização gráfica dos conceitos em uma situação contextualizada e motivadora. Os dois livros estudados apresentam o assunto na mesma sequência: antiderivada ou primitiva, definição de integral, técnicas de integração e aplicações.

Um pouco mais recente, Dietrich (2009) em seu trabalho desenvolveu uma pesquisa com alunos do curso de Licenciatura em Matemática matriculados na disciplina de Cálculo II de uma Universidade do Rio Grande do Sul. A sua principal base para a investigação foi a análise das possibilidades de aquisição dos conceitos básicos de integral definida, por meio da metodologia da Engenharia Didática, sob a luz da teoria imagem e definição conceituais

proposta por Tall e Vinner (1976). Dietrich (2009) desenvolveu uma pesquisa muito parecida com a de Silva (2004), analisou livros didáticos utilizados pelos professores de Cálculo II. No entanto, ele aplicou uma avaliação diagnóstica para os alunos. Os resultados dessa investigação demonstraram que a sequência didática proposta nos livros contribuiu para a criação de imagens conceituais e favoreceu a compreensão dos conceitos e propriedades da integral definida.

Em meados de 2008, Escarlata em sua dissertação de mestrado ressalta que os alunos quando foram questionados sobre o conceito da integral definida mostraram não entender corretamente, relacionando sempre a integral diretamente com a área. No mesmo trabalho o autor defende, nas definições que são dadas quando os alunos são questionados a respeito da definição de integral, que “no contexto do cálculo, o conceito de integral é anterior ao de área, sendo o primeiro imprescindível para definir o segundo. Assim, a afirmação de que “a integral é a área sob a curva” pode ser admitida como uma definição para área, não para integral”, pois segundo ele, para podermos afirmar que a integral é a área abaixo da curva devemos relacionar diretamente com o processo infinitesimal, como a construção da integral de Riemann. Ele afirma que esta incoerência matemática pode causar problemas pedagógicos, dentre eles, o fato do aluno relacionar a integral apenas como mais uma ferramenta para o cálculo da área de figuras planas.

Em Cargnin (2013) as justificativas apresentadas para a não compreensão dos princípios básicos do Cálculo e que levavam à reprovação eram a falta de tempo e a forma incorreta de estudar. A autora buscou resolver este problema utilizando a hipótese de que novas metodologias de ensino contribuem para o aprendizado dos discentes. Concernente ao que foi visto, a autora buscou responder o seguinte problema de pesquisa: em que medida os Mapas Conceituais contribuem para acompanhar o desenvolvimento da conceitualização da Integral de Riemann? Para isso, ela utilizou como base metodológica a teoria da Engenharia Didática, a qual, segundo Artigue (1988), é um modelo de trabalho didático equivalente ao trabalho do engenheiro que, na formulação de um projeto, utiliza os conhecimentos científicos de seu domínio, concorda em se submeter a um controle científico, mas ao mesmo tempo, é obrigado a trabalhar objetos mais complexos que os objetos já analisados pela ciência. Os mapas conceituais foram usados como instrumento de avaliação e obtiveram resultados que permitiram identificar concepções que podem se tornar obstáculos ontogenéticos, dentre elas destacamos duas: a concepção de que o infinito é algo finito e inalcançável e que soma de Riemann é a quantidade de retângulos necessários para fechar toda a área. Segundo Cargnin

(2013, p. 345) “essa concepção de infinito potencial pode atrapalhar a compreensão do conceito de integral definida”.

Melo (2002, p.1) em seu trabalho comentou que “os conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, na maioria das vezes têm sido ‘ensinados e aprendidos’ por meio de aulas que valorizam a memorização e aplicação de técnicas, regras e algoritmos”. Muitos alunos, segundo Melo (2002), não conseguem aplicar o conceito de domínio e imagem de função em outros contextos, não entendem a noção de infinito, a noção de aproximação e infinitesimal, entre outras dificuldades apresentadas.

As pesquisas acima nos fazem refletir acerca da importância de se ter uma concepção bem formulada do conceito de integral definida, bem como nos fazem pensar sobre como a má formulação influencia na quantidade de reprovações, o que nos deu motivação suficiente para investigar como o conceito de área está influenciando nas definições de integral.

5 IMAGEM CONCEITUAL E DEFINIÇÃO CONCEITUAL DA INTEGRAL DEFINIDA

Neste capítulo abordaremos a teoria de Tall e Vinner (1981) sobre Imagem e Definição Conceituais, aspectos a respeito do ensino-aprendizagem da Integral Definida nos cursos de graduação e mostraremos a definição da Integral Definida e como pode ser interpretada em forma de área.

5.1 Imagem Conceitual e Definição Conceitual

Na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral existe um número bastante expressivo de aprovações quando as avaliações são desenvolvidas visando à aplicação direta dos métodos. Este fato é trazido por Amit e Vinner (1990), os quais tiveram como referência a pesquisa desenvolvida por Tufte (1988). Esta pesquisa evidenciou que, quando as atividades propostas para os alunos são as que exigem apenas os métodos processuais, elas têm uma quantidade entre 73% e 92% de acertos, enquanto as atividades relativas ao conceito não são tão expressivas, situadas na margem de 7% a 22% de acertos.

Estes resultados, segundo Meyer (2003), salientam ainda mais o debate que há sobre a existência de dois tipos de conhecimentos matemáticos: os cabíveis para compreender os conceitos e os necessários para resolver atividades, como, por exemplo, resolver uma integral usando algum método. Tendo em vista estes dois termos, temos as definições de Hiebert e Lefevre (1986), as quais descrevem de uma forma consistente os dois tipos de conhecimentos, respectivamente.

Conhecimento processual é formado de duas partes distintas. Uma parte é composta da linguagem formal, ou sistema de representação simbólica da matemática. A outra parte consiste dos algoritmos, ou regras, para completar tarefas matemáticas. (HIEBERT e LEFREVRE, 1986, p. 6).

O conhecimento conceitual é caracterizado mais claramente como conhecimento que é rico em relações. Pode ser pensando como uma teia conectada de conhecimentos, uma cadeia na qual as relações são tão proeminentes quanto às partes discretas da informação. Relações penetram os fatos individuais e proposições de forma que todas as partes da informação estão ligadas a alguma cadeia. De fato, uma unidade do conhecimento conceitual não pode ser uma parte isolada da informação; por definição, é uma parte do conhecimento conceitual somente se o proprietário reconhece suas relações com outras partes da informação. (HIEBERT e LEFREVRE, 1986, p. 3-4)

Hiebert e Lefevre (1986) orientam que se deve estabelecer relações entre os conceitos e os procedimentos, pois a matemática incorpora ambos. No entanto, existem conhecimentos que não seguem esta linha de raciocínio descrita, como, por exemplo, na sociologia onde muitas respostas são subjetivas, não precisando assim de uma definição formal para ser estudada. Neste sentido, os autores trazem uma explicação para estes aspectos:

Nem todo conhecimento pode ser proveitosamente descrito como conceitual ou processual. Algum conhecimento parece ser um pouco de ambos, e algum conhecimento parece ser nenhum dos dois tipos. Contudo, nós acreditamos que é possível distinguir entre os dois tipos de conhecimento e que tal distinção provê uma forma de interpretar o processo de aprendizagem que pode ajudar-nos a melhor entender as falhas e sucessos dos estudantes. (HIEBERT e LEFEVRE, 1986, p. 3).

Na distinção desses dois tipos de conhecimentos as ideias de Tall e Vinner (1981) sugerem que um determinado conceito matemático não deve ser apresentado de uma única maneira, a formal, ou seja, a definida e impressa nos livros, mas sim, que o professor deve buscar alternativas didático-pedagógicas e reformular sua prática sempre que necessário, possibilitando o avanço cognitivo dos alunos.

Segundo Vinner (1991, p. 65), “o ensino deve levar em conta os processos psicológicos comuns de aquisição de conceitos e raciocínio lógico”. Ele elenca algumas considerações a respeito da importância que é dada às definições nos livros didáticos:

- 1 Os conceitos são adquiridos principalmente por meio de suas definições;
- 2 Os alunos usarão definições para resolver problemas e provar os teoremas quando necessário do ponto de vista matemático;
- 3 As definições devem ser mínimas;
- 4 É desejável que as definições sejam elegantes;
- 5 Definições são arbitrárias. As definições são "feitas pelo homem". Definir em matemática é estar dando um nome. ²(VINNER, 1991, p. 65)

O autor ao descrever estes cinco tópicos afirma que os mesmos não representam todas as formas que as definições trazem no ensino superior, e ainda ressalta que “ao defender que é possível não usar essas definições formais, não ignoramos a necessidade, em uma fase posterior, de saber disso”. (VINNER, 1991, p. 66)

Segundo Tall e Vinner (1981, p. 152) “durante os processos mentais de recordar e manipular um conceito, muitos processos associados são trazidos ao jogo, consciente e

² 1 - Concepts are mainly acquired by means of their definitions;

2 - Students will use definitions to solve problems and prove theorems when necessary from a mathematical point of view;

3 - Definitions should be minimal;

4 - It is desirable that definitions will be elegante;

5 - Definitions are arbitrary. Definitions are “man made”. Defining in mathematics is giving a name.

inconscientemente afetando o significado e uso³”. Isto é algo que os professores devem refletir no momento que estão definindo um novo conceito matemático, pois os estudantes nem sempre conseguem criar uma imagem conceitual daquela definição dada, ou ainda, pensam que esta definição está limitada apenas para um contexto, por exemplo, quando se define integral, se o professor não deixar claro que a integral de um caso específico, com uma função positiva e contínua de um ponto “ a ” até “ b ” geometricamente representa a área abaixo da curva, os educandos irão construir uma imagem errônea sobre o conceito, confundindo a definição formal de integral com a área abaixo de uma curva.

Diante desta questão, Tall e Vinner definem uma relação concernente ao conceito, definida como imagem conceitual:

[...] a estrutura cognitiva total que é associada com o conceito, que inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. Ela é construída ao longo dos anos por meio das experiências de todos os tipos, mudando quando o sujeito encontra novos estímulos e amadurece (TALL & VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa).⁴

Por exemplo, a imagem conceitual de um aluno sobre Integral Definida pode englobar exemplos prototípicos, tais como a área abaixo de uma curva de uma função, o volume de um sólido, o espaço percorrido em certo intervalo de tempo variável, ou seja, a imagem deste conceito pode ser considerada como sendo tudo que existe na mente do sujeito, consciente ou inconscientemente, relacionado à ideia de Integral Definida. Essas concepções sofrem modificações em conformidade com as experiências vivenciadas pelo educando no que diz respeito ao conceito e que ocorrem sob a forma de exercícios, problemas contextualizados, teoremas e assim por diante. Podemos citar também as experiências externas aos processos de aprendizagem do conceito, como por exemplo, experiências do dia a dia, onde o discente pode se deparar com situações que envolvam as integrais definidas.

A teoria salienta que uma imagem do conceito bem formulada leva a uma compressão adequada da definição formal. Isto é, a definição tem o papel de formalizar um objeto já conhecido. Por outro lado, uma imagem do conceito não adequadamente construída pode levar o estudante a não compreensão dos alicerces da matemática (os aceitos pela comunidade matemática) mesmo que consiga descrevê-los.

³During the mental processes of recalling and manipulating a concept, many associated processes are brought into play, consciously and unconsciously affecting the meaning and usage.

⁴To describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures.

Diante disto, nota-se que a teoria imagem conceitual é uma construção subjetiva do sujeito, ocasionando alguns conflitos no momento da definição do conceito, pois nela permeiam todas as imagens que o sujeito detém de um determinado conteúdo, as quais segundo Tall e Vinner (1981) não necessariamente são as suficientes para chegar a um todo coerente.

A definição conceitual pode ser explicada como sendo:

[...] a forma que as palavras foram utilizadas para especificar aquele conceito. Ele pode ser aprendido por um sujeito de uma forma rotineira ou aprendido mais significativamente e relacionado, em maior ou menor grau, com o conceito. Também pode ser uma reconstrução pessoal do estudante de uma definição (TALL & VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa).⁵

Os autores enfatizam que “para cada indivíduo um conceito definição gera seu próprio conceito imagem. Em alguns indivíduos pode estar vazio ou virtualmente inexistente. Em outros, ele pode, ou não, ser coerentemente relacionado a outras partes do conceito imagem⁶”. (TALL e VINNER, 1981, p.152).

Ou seja, em relação ao conceito de Integral Definida, se o aluno só se deparar com questões envolvendo métodos de integração criará uma imagem conceitual limitada sobre o assunto, a qual pode ser descrita erroneamente como: integral é aplicar os métodos até chegar ao fim das contas, enquanto que a integral definida de uma função positiva pode ser entendida geometricamente como uma soma de Riemann das áreas de retângulos aproximantes para a área limitada por uma curva. Isso explica o fato de que a definição conceitual do aluno pode não ser tão consistente se relacionada com a definição formal.

Neste trabalho, abordaremos o conceito de Integral Definida com enfoque nas respostas dos alunos sobre a definição e a área abaixo de uma curva à luz da teoria de imagem e definição conceituais, discutindo suas implicações para o ensino e a aprendizagem.

5.2 Integral Definida

⁵ Concept definition to be a form of words used to specify that concept. It may be learnt by an individual in a rote fashion or more meaningfully learnt and related to a greater or lesser degree to the concept as a whole. It may also be a personal reconstruction by the student of a definition. It is then the form of words that the student uses for his own explanation of his (evoked) concept image.

⁶ For each individual a concept definition generates its own concept. In some individuals it may be empty, or virtually non-existent. In others it may, or may not, be coherently related to other parts of the concept image.

Haja vista o que foi explanado no capítulo anterior sobre as diversas imagens conceituais do conceito de Integral Definida, nesta seção iremos apresentar sua definição formal para facilitar para o leitor a associação com o aspecto que escolhemos analisar.

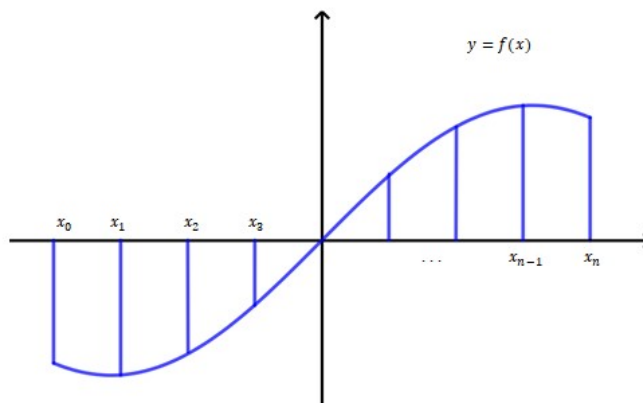
Embora a continuidade não seja necessária para definir a integral de Riemann, assumiremos que a função tem esta propriedade por ser a forma como geralmente é tratado este tipo de integral no Cálculo I.

Inicialmente, seja f uma função contínua a valores reais definida num intervalo $[a, b]$. Dividiremos este intervalo em subintervalos que não necessariamente têm a mesma medida. Consideramos $x_0 = a$ e $x_n = b$ e escolheremos $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ em $[a, b]$ de modo que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

A Figura 1 ilustra as partições do intervalo.

Figura 1 - Partições do intervalo



Fonte: criada pelo autor

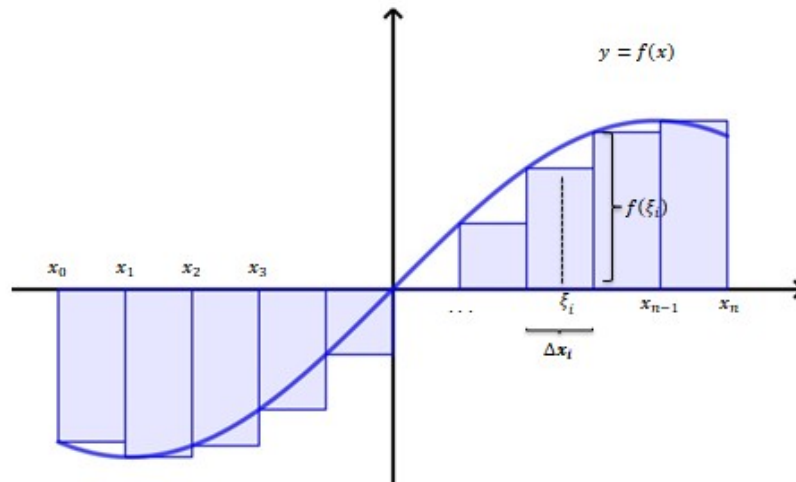
Definimos os comprimentos dos subintervalos como $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. O conjunto $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ é chamado *partição* de $[a, b]$. A partição possui n subintervalos e, com relação ao comprimento destes intervalos, podemos definir o que chamamos de norma da partição, que é o maior dos comprimentos dos subintervalos de Δ e será denotado por $\|\Delta\|$.

Vamos escolher, em cada subintervalo da partição, um ponto ξ_i , de forma que:

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b.$$

Em seguida consideramos os retângulos de base Δx_i e altura $|f(x_i)|$.

Figura 2 - Representação geométrica da soma de Riemann



Fonte: criada pelo autor.

Assim, construiremos a soma:

$$f(\xi_1)\Delta_1x + f(\xi_2)\Delta_2x + \dots + f(\xi_n)\Delta_nx = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i x.$$

Ela recebe o nome de Soma de Riemann. A partir dela definimos a noção de integrabilidade de uma função.

Definição. Seja f uma função a valores reais contínua cujo domínio contém o intervalo $[a,b]$. Dizemos que f é integrável em $[a,b]$ se existe um número L satisfazendo: para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que toda partição Δ com $\|\Delta\| < \delta$ e $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, tivermos:

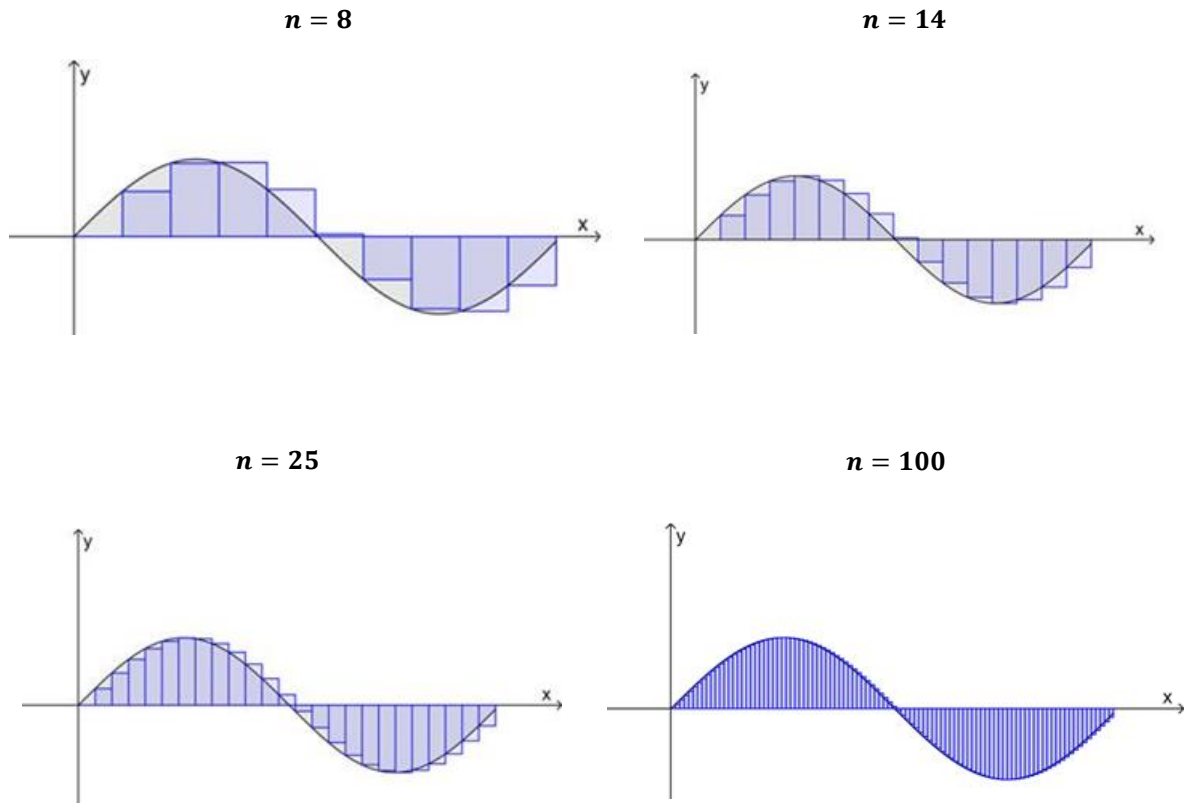
$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - L \right| < \varepsilon.$$

Equivalentemente, podemos escrever:

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = L.$$

A Figura 3 a seguir ilustra a interpretação geométrica da Integral Definida. O número n acima das figuras indica quantidade de retângulos.

Figura 3 - Interpretação geométrica da Integral Definida



Fonte: criada pelo autor

Observe que, a diminuição da medida do intervalo de aproximação é equivalente ao aumento da quantidade de retângulos. Haja vista essa interpretação geométrica, podemos definir formalmente esse processo.

Definição. Se f for uma função a valores reais contínua definida no intervalo $[a,b]$ então a integral definida de f de a até b , será dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum f(\xi_i) \Delta_i x$$

Complementamos que, se a função for positiva, então a soma de Riemann pode ser interpretada como uma soma de áreas de retângulos aproximantes (veja a Figura 1). Com isso, a integral definida pode ser interpretada como a área sob a curva é limitada pelas retas $y = 0$, $x = a$ e $x = b$. (veja a Figura 4).

Figura 4 - Aproximação por retângulos e área sob a curva



Fonte: criada pelo autor.

Após essa breve explanação do conceito de Integral Definida, iremos apresentar os procedimentos metodológicos do nosso trabalho.

6 METODOLOGIA

O caráter da pesquisa é qualitativo, pois não objetivamos realizar nenhum tipo de quantificação na coleta dos dados nem analisá-los utilizando técnicas estatísticas.

A pesquisa qualitativa não procura enumerar e/ou medir os eventos estudados, nem emprega material estatístico na análise de dados. Parte de questões ou focos de interesse amplos, que vão se definindo à medida que o estudo se desenvolve. Envolve a obtenção de dados descritivos [...] pelo contato direto do pesquisador com a situação estudada, procurando compreender os fenômenos segundo as perspectivas dos sujeitos, ou seja, dos participantes da situação em estudo. (GODOY, 1995, p. 62-63)

Os sujeitos desta pesquisa foram alunos que cursaram as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral II e III no segundo semestre de 2018 do curso de Matemática - Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste. A escolha dessas turmas se deu pelo fato de que, segundo a teoria de Tall e Vinner (1981) sobre imagem e definição conceituais, os estudantes tiveram a oportunidade de ver novamente algumas outras interpretações da integral definida, influenciando assim na sua imagem conceitual a respeito do tema.

Salientamos que todos os participantes/colaboradores foram informados sobre os objetivos e procedimentos metodológicos da pesquisa. Ao fim deste estudo, nós, pesquisadores comprometidos com a segurança dos dados, com o estudo feito e da não identificação dos sujeitos participantes, manteremos os dados armazenados por 5 anos.

Para a coleta dos dados foi aplicado um questionário. Segundo Vianna (2007), este meio de coleta, por se tratar de um instrumento de “levantamento de informação”, proporciona por meio de suas respostas, conhecimentos ao pesquisador referente à população pesquisada. Neste estudo, utilizamos o questionário com questões abertas, o qual é, segundo Viana (2007), caracterizado pelos respondentes apresentarem suas respostas livremente, utilizando suas próprias palavras ou cálculos, sem se limitarem a escolha dentre um rol de alternativas. No questionário optamos em colocar um cabeçalho que informa qual a justificativa da pesquisa e sua finalidade. Além disso, solicitamos que os estudantes fossem sinceros e honestos, com o intuito de preservar a seriedade das informações e, como último esclarecimento, garantimos o anonimato dos sujeitos na nossa análise.

Há duas amostragens de indivíduos participantes dessa pesquisa: 1ª) O primeiro grupo foi formado por 11 estudantes da turma de Cálculo II de diferentes períodos de Matemática-

Licenciatura e outros cursos; 2ª) O segundo grupo foi formado por 15 alunos da turma de Cálculo III do curso de Matemática-Licenciatura com estudantes de diversos cursos, como das engenharias e das licenciaturas.

6.1 Questionário da Pesquisa

O questionário foi aplicado no dia 17 de setembro de 2018 com 11 estudantes da disciplina de Cálculo II e 15 de Cálculo III do curso de Matemática – Licenciatura. Salientamos que os alunos desta turma não são necessariamente do curso de Matemática, pois, a disciplina, por ter equivalências com outros cursos, é comum à Engenharia Civil e de Produção, Licenciatura em Física e em Química.

Após a aplicação, a análise do questionário foi feita à luz da teoria de Tall e Vinner (Imagem e Definição conceituais). O questionário se encontra no Anexo A. Neste trabalho optamos por apresentar os enunciados e seus objetivos juntamente com as análises das respostas.

Resumidamente, na primeira questão procuramos identificar o semestre e ano em que o Cálculo 1 foi cursado. Na segunda foi pedido que a temperatura média do um arame fosse determinada. Na terceira solicitamos uma definição formal do conceito de Integral Definida. Na quarta procuramos saber se o conteúdo foi abordado em sala, como foi abordado e qual foi o mais importante: o estudo individual ou as aulas. Na quinta buscamos verificar como distinguem uma função integrável da não integrável. Na sexta foi solicitado que os estudantes resolvem duas integrais e, por fim, há um questionamento sobre a existência de algum conceito relacionado com o resultado dos cálculos.

7 RESULTADOS E DISCUSSÃO

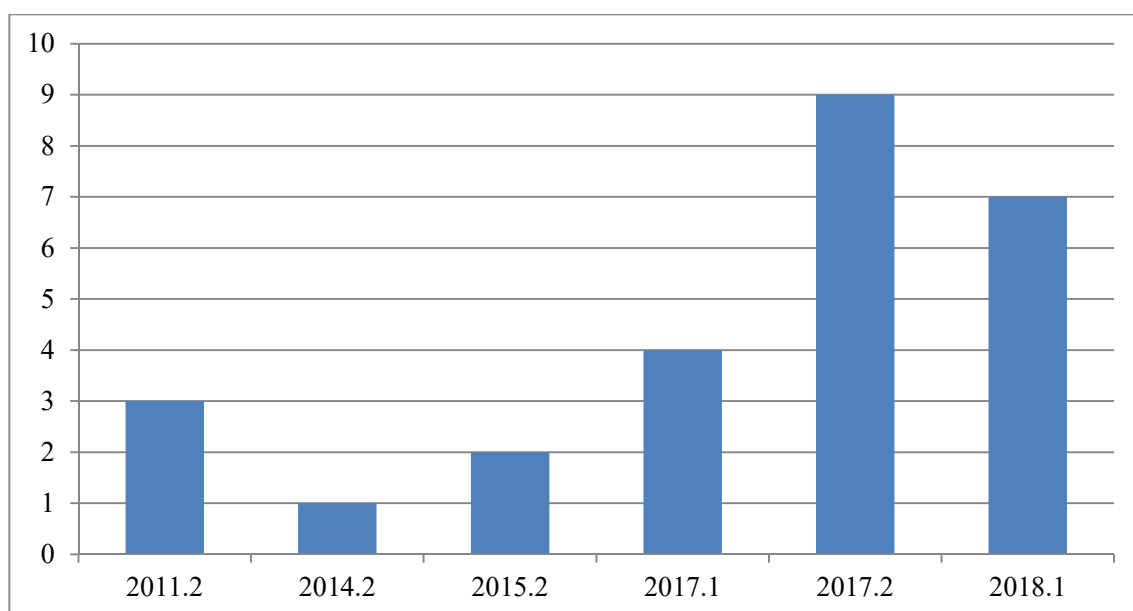
A seguir, apresentamos as respostas juntamente com as interpretações pessoais e análises à luz da teoria Imagem e Definição Conceituais de cada questão. Os alunos foram enumerados de A1 a A26. Os dados foram organizados em gráficos para uma melhor visualização. As tabelas com as respostas individuais são apresentadas nos anexos.

7.1 Periodização

A primeira questão perguntava o ano e semestre em que o Cálculo I foi cursado. Seu objetivo era verificar se o intervalo do tempo que cursou a disciplina à data que respondeu este questionário pode ter influência ou não na definição do conceito. Nela os alunos foram categorizados de duas formas: por período e por curso.

A primeira categoria foi feita para atingir o objetivo da questão.

Gráfico 1 - Categorização por período



Fonte: acervo da pesquisa.

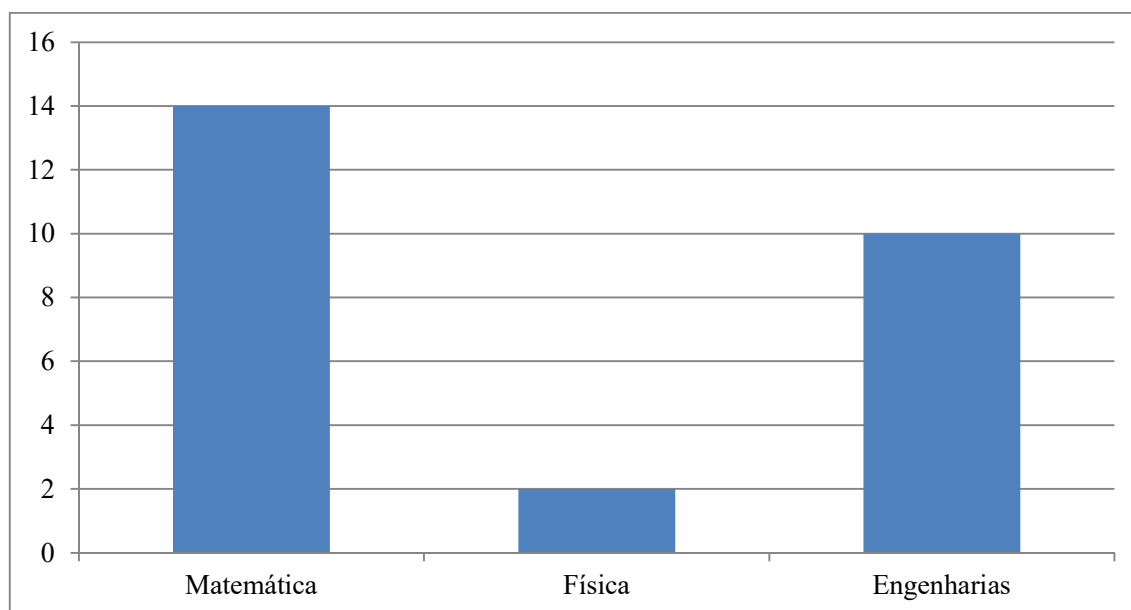
Analisando o Gráfico 1 observamos que aproximadamente 34,62% dos alunos cursaram a disciplina de Cálculo I no segundo semestre de 2017 e que aproximadamente 27%

a cursaram no primeiro semestre de 2018. Destes alunos, esperamos que as definições conceituais não tenham sofrido tantas influências negativas ao passar do tempo.

A segunda categoria procurava identificar os diferentes cursos e auxiliar nas análises seguintes por poder ilustrar como as respostas variam de acordo com o intuito de cada curso. O Gráfico 2 contém a quantidade de estudantes categorizados por período.

Três cursos foram identificados: Matemática, Física e Engenharia.

Gráfico 2 - Distribuição dos alunos por curso



Fonte: acervo da pesquisa, 2018.

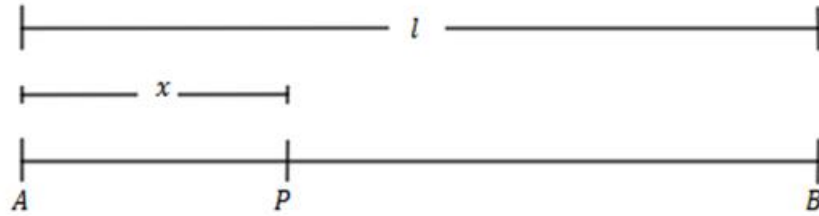
Destacamos o grande número de estudantes do curso de Engenharia (38,46%). Este fato pode ser explicado por muitos desses alunos migrarem para as turmas de Matemática com o intuito de não atrasar seu curso, o qual é integral com disciplinas pela manhã e pela tarde.

No geral, as respostas dos alunos podem apresentar imagens conceituais diversificadas, pois no Cálculo II e no Cálculo III, o conceito de Integral Definida é aplicado em outras situações, como por exemplo, em cálculos de volume de sólidos, em área de superfícies, dentre outros.

7.2 Aplicação da Integral Definida

Propomos a seguinte situação problema: a figura abaixo representa um arame de metal de extremidades A e B e de comprimento l . A temperatura em um ponto P sobre o arame

depende da distância x até a extremidade A do arame e é dada pela função $T(x) = x^2$. Determine a temperatura média do arame.



FONTE: ESCARLATE(2008)

Seu objetivo era observar se o estudante seria capaz de resolver uma questão sobre integral sem que houvesse relação explícita com a área. Destacamos o conceito de Física presente, algo bastante explanado nos cursos da área de exatas, fator que nos fez escolhê-la.

Esperávamos que respondessem de uma das formas seguintes. A temperatura total pode ser calculada por meio da integral definida da função ao longo do intervalo e a temperatura média é o valor da integral dividido pelo comprimento do arame.

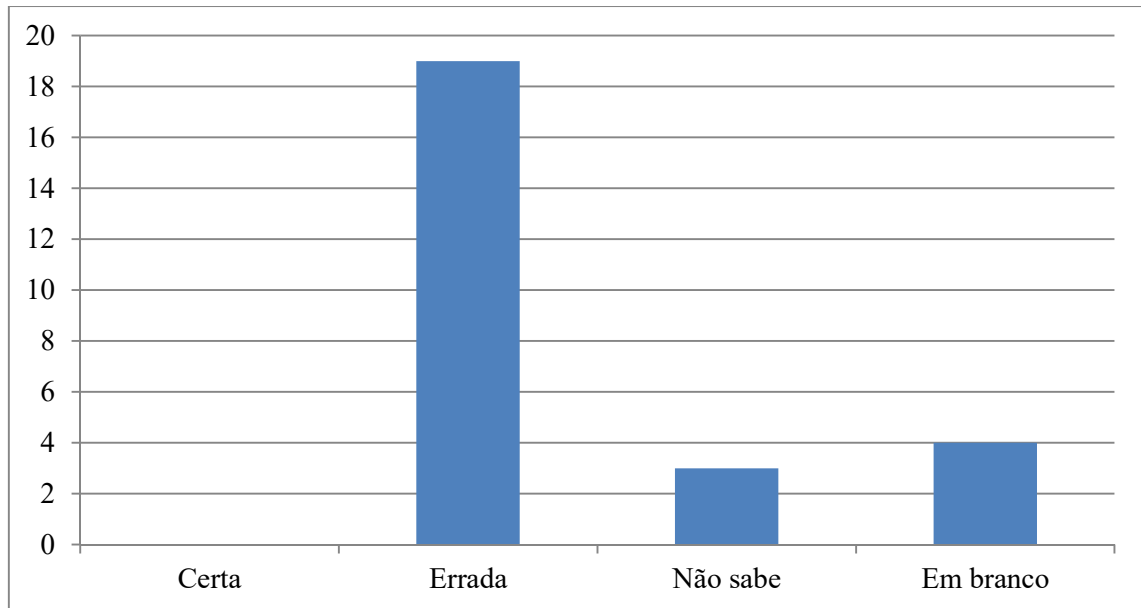
Uma vez que a medida do intervalo é l , poderia ser feito $x_0 = 0$ e $x_1 = l$. Outra forma era utilizar os limites $x_0 = A$ e $x_1 = B$. A seguir apresentamos os dois cálculos. Primeira solução.

$$T = \int_0^l x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^l = \frac{l^3}{3} \quad \Rightarrow \quad T_m = \frac{\frac{l^3}{3}}{l} = \frac{l^2}{3}.$$

Segunda solução.

$$T = \int_A^B x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_A^B = \frac{B^3}{3} - \frac{A^3}{3} = \frac{B^3 - A^3}{3} \quad \Rightarrow \quad T_m = \frac{\frac{B^3 - A^3}{3}}{B - A} = \frac{B^3 - A^3}{3(B - A)}.$$

O Gráfico 3 apresenta a categorização das respostas em certa, errada, em branco ou não sabe. Acreditávamos que os alunos de Engenharia e da Física, por serem cursos que buscam com mais afinco a aplicação dos conteúdos do Cálculo em outras áreas, respondessem corretamente.

Gráfico 3 - Categorização das Respostas

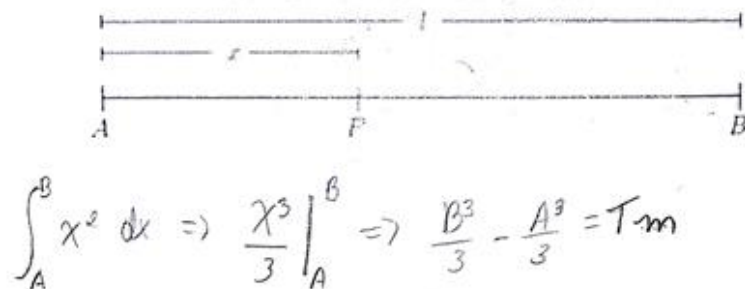
Fonte: acervo da pesquisa, 2018.

De posse desses dados, observamos que nenhum aluno conseguiu responder corretamente. Consideramos que essa foi uma questão que exigia um pouco mais de compreensão da soma de Riemann. Um erro comum apresentado por seis estudantes das engenharias foi o ilustrado na Figura 5.

Figura 5 - Erro cometido pelo aluno A2 na Questão 2

- 2) A figura abaixo representa um arame de metal de extremidades A e B e de comprimento L . A temperatura em um ponto P sobre o arame depende da distância x até a extremidade A do arame e é dada pela função $T(x) = x^2$. Determine a temperatura média do arame.

Atividade retirada de: ESCARLATE, A. C. Uma Investigação sobre a Aprendizagem de Integral. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.



Fonte: acervo da pesquisa, 2018

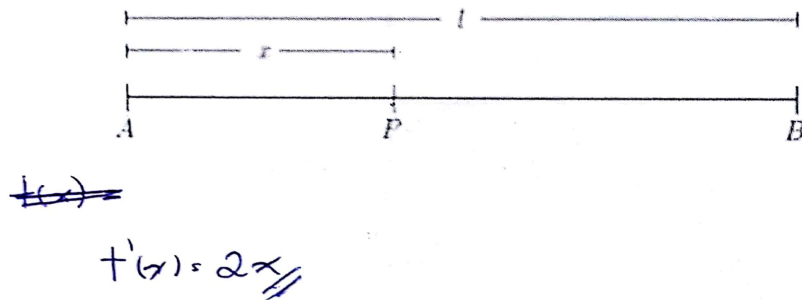
Analisando a Figura 5, observamos que uma possível causa desse erro foi a não interpretação do conceito de integral como soma de Riemann, pois quando se faz a integração não chegará a uma média, mas sim a temperatura total. Logo, os estudantes teriam que dividir o resultado final pela medida do intervalo para obter a média. Destacamos que só os alunos das engenharias utilizaram o método apresentado na Figura 6.

Dentre os das licenciaturas, um dos erros mais frequente foi o seguinte:

Figura 6 - Erro cometido pelo aluno A19 na Questão 2

- 2) A figura abaixo representa um arame de metal de extremidades A e B e de comprimento L . A temperatura em um ponto P sobre o arame depende da distância x até a extremidade A do arame e é dada pela função $T(x) = x^2$. Determine a temperatura média do arame.

Atividade retirada de: ESCARLATE, A. C. *Uma Investigação sobre a Aprendizagem de Integral*. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.



Fonte: acervo da pesquisa, 2018.

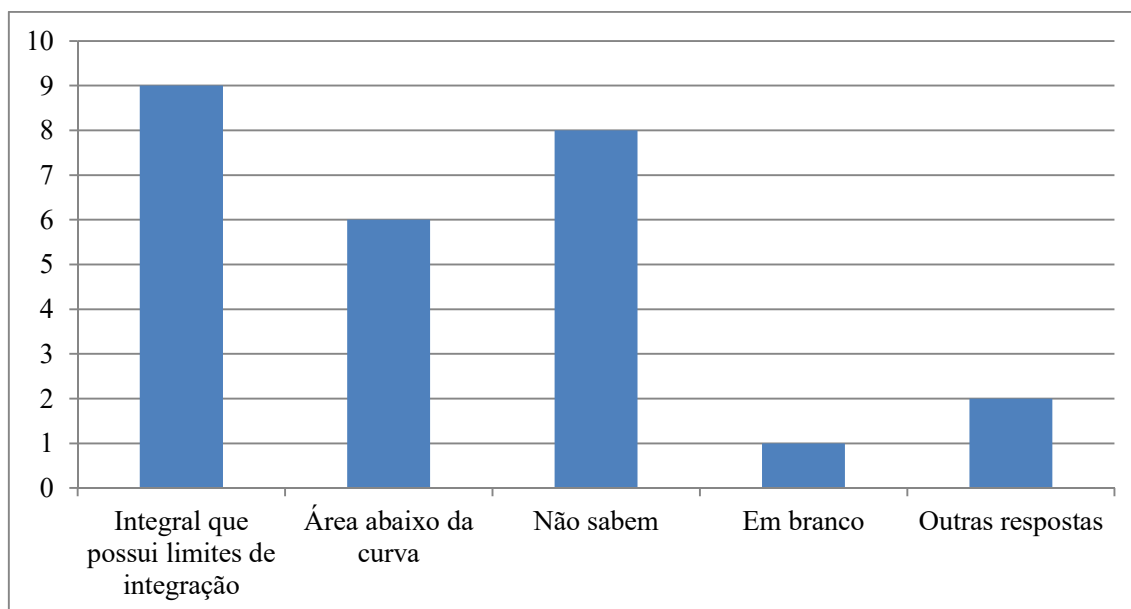
Na Figura 6 percebemos uma confusão de dois conceitos: derivada e integral. Uma possível justificativa é que a derivada pode ser compreendida como uma taxa de variação e, por isso, foi relacionada com a variação da temperatura. Os demais alunos que responderam a questão, apenas montaram a integral com ou sem os limites de integração.

7.3 Conceito de Integral Definida

Perguntamos aos estudantes se eles sabiam qual o conceito de Integral Definida. Queríamos investigar se conseguiam conceitua-la formalmente e identificar as imagens conceituais que estão o influenciando. Esperávamos que eles respondessem algo próximo da definição que apresentamos em 5.2.

Identificamos duas imagens conceituais: integral que possui limites de integração e área abaixo da curva. Para uma melhor visualização dos dados, no Gráfico 4 apresentamos a quantidade de respostas para cada imagem conceitual detectada.

Gráfico 4 - Categorias das respostas sobre o conceito da Integral Definida



Fonte: acervo da pesquisa, 2018.

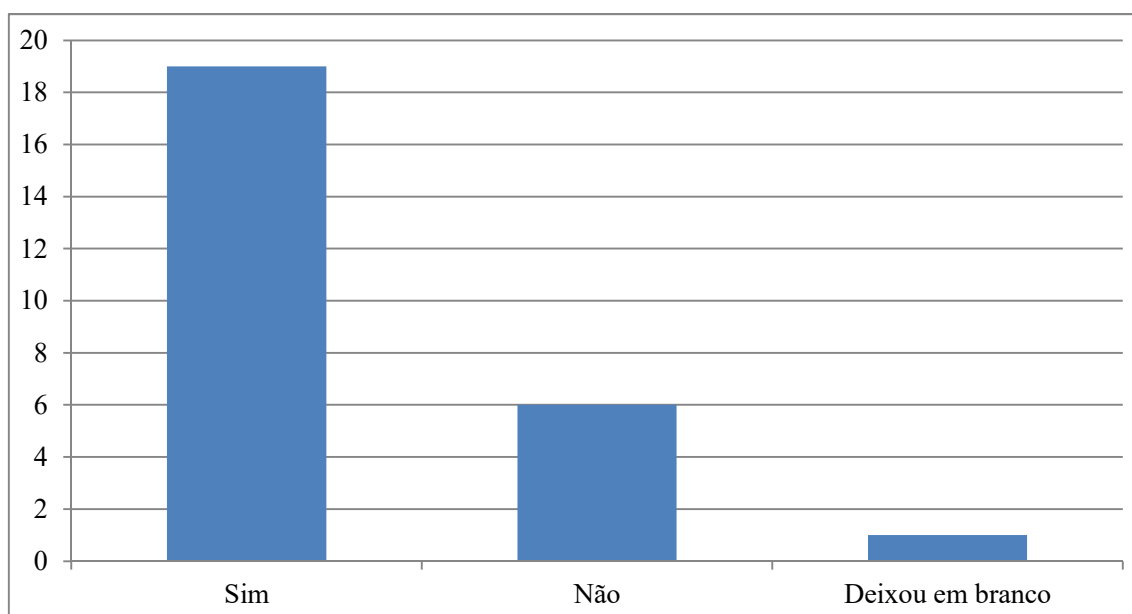
Podemos observar que aproximadamente 30,8% dos alunos afirmaram não saber o conceito. Excluindo estas e as respostas em branco percebemos que as demais se encontram em sua maioria em duas categorias: integral que possui limites de integração e área abaixo da curva, que juntas representam 57,7%, mais especificamente 34,6% dos alunos estão com uma imagem conceitual atrelada à primeira e 23,1% à segunda.

No que diz respeito às respostas da primeira categoria, acreditamos que os estudantes estejam com sua imagem conceitual atrelada ao símbolo da integral, não ao conceito. No que concerne à segunda categoria, os alunos confundiram uma aplicação do conceito com a definição formal. No geral, nenhum participante acertou a questão. Estes resultados nos mostram que o uso da integral definida vinculada à noção de área está presente na imagem de conceito de alguns alunos, embora esses não sejam a maioria.

7.4 Abordagem do Conceito de Integral Definida

A questão continha três perguntas. A primeira indagava se o conceito de integral definida foi abordado no Cálculo I. No Gráfico 5 classificamos as respostas em três categorias: foi abordado pelo docente, não foi, ou se o estudante deixou em branco. Estas respostas podem nos auxiliar nas análises posteriores.

Gráfico 5 - Abordagem do conteúdo



Fonte: acervo da pesquisa, 2018.

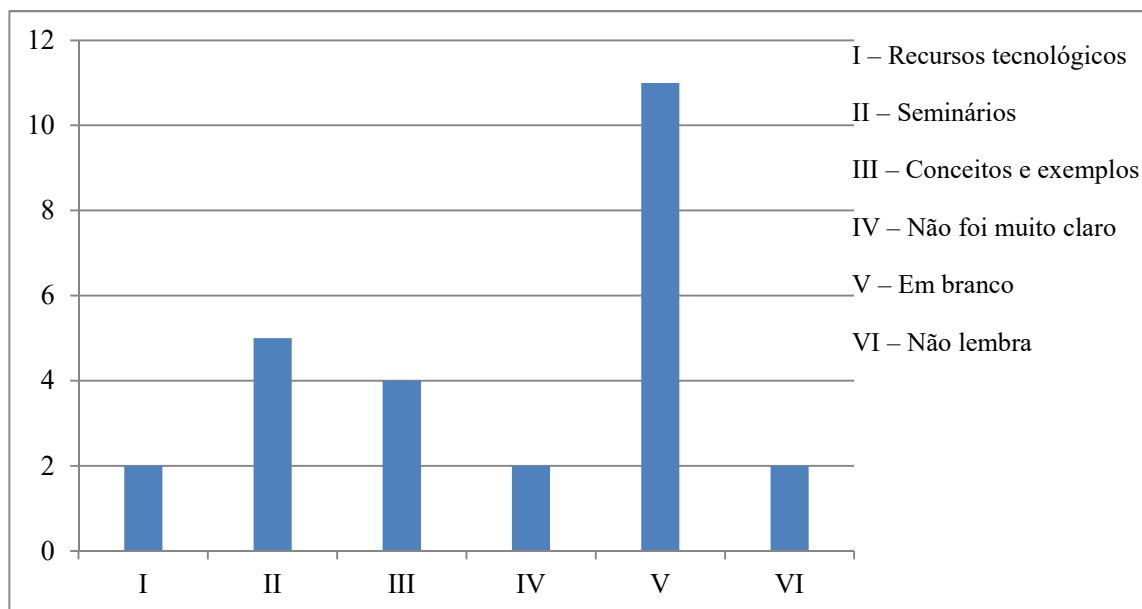
Dentre os 26 alunos, 19 relataram que o conteúdo foi trabalhado em sala. Os estudantes A16, A17, A19, A23, A24, A25, todos do curso de Matemática, afirmaram que o conteúdo não foi visto em Cálculo I, o que é preocupante. Esses discentes deixaram em branco a Questão 3 que se relacionava ao conceito.

Algumas justificativas podem ser conjecturadas para a não abordagem. Uma delas é que no Cálculo I há uma sequência de conteúdos que começa por limite, segue com continuidade, derivada e finaliza com integrais. A ementa da disciplina é muito extensa e, além disso, muitos alunos chegam sem saber a matemática básica, principalmente sobre funções, a base do cálculo. Decorrente disto, o docente se vê obrigado a fechar as lacunas de um conteúdo já visto em outras disciplinas e no ensino médio, gastando tempo considerável.

A não abordagem deste conceito, principalmente no Cálculo I e no curso de Matemática é muito prejudicial, pois no Cálculo II há uma expansão das aplicações dele, como, por exemplo, em integrais duplas sobre regiões gerais, em coordenadas polares, áreas de superfícies, dentre outras.

Também perguntamos como o assunto foi explanado. Os resultados foram organizados como segue.

Gráfico 6 - Formas de explanação do conteúdo



Fonte: acervo da pesquisa, 2018.

Note que dois alunos relataram que recursos tecnológicos foram utilizados para demonstrar como a aplicação da integral age sob a superfície, além de explicar sua função aplicando em exemplos. Consideramos pertinente esse novo modo de explanar o conteúdo, pois vivemos em um mundo tecnológico e o uso de instrumentos que adaptem a metodologia de ensino para torna-la mais eficaz é bem-vindo. As ideias de Tall e Vinner defendem essa busca de alternativas didático-pedagógicas para possibilitar o avanço cognitivo dos alunos.

Os alunos A1, A5, A6, A7 e A9 são todos da mesma turma e afirmaram que o conteúdo foi explanado na forma de seminários apresentados por eles. Acreditamos que esta é uma forma construtiva, no entanto, defendemos que deva haver outras além dessa, todas organizadas em conjunto.

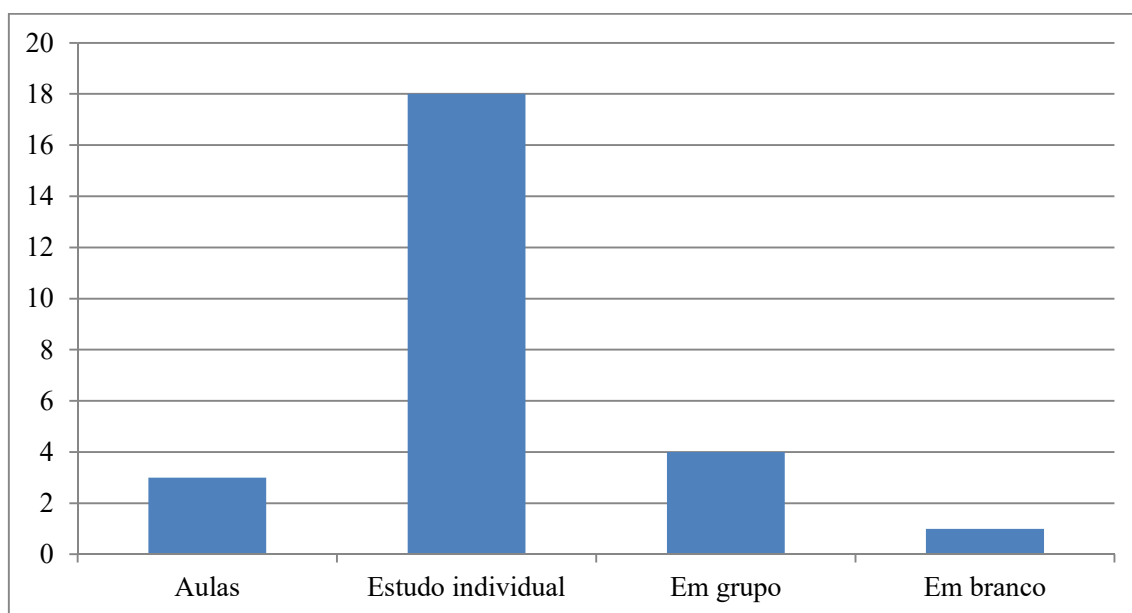
Analisando especificamente a resposta de A2, o qual relatou que o conteúdo foi abordado com o cálculo de áreas de superfícies com extremidades definidas, acreditamos que ele apresentou a forma que o conteúdo foi abordado na disciplina de Cálculo II ou III.

Consideramos a forma de abordagem do conteúdo apresentada por A12 pertinente e construtiva. Ele relatou que o professor “*explanou o conteúdo a partir da soma de riemann*”. Abordar essa soma é visto por nós como essencial.

Outras duas formas foram identificadas: fazendo uso de limites de integração e aulas teóricas.

Por fim perguntamos o que teve maior importância na aprendizagem: as aulas ou o estudo individual. Queríamos identificar qual a preferência de estudos dos alunos. No Gráfico 7 há a frequência absoluta das respostas.

Gráfico 7 - Importância para o aprendizado



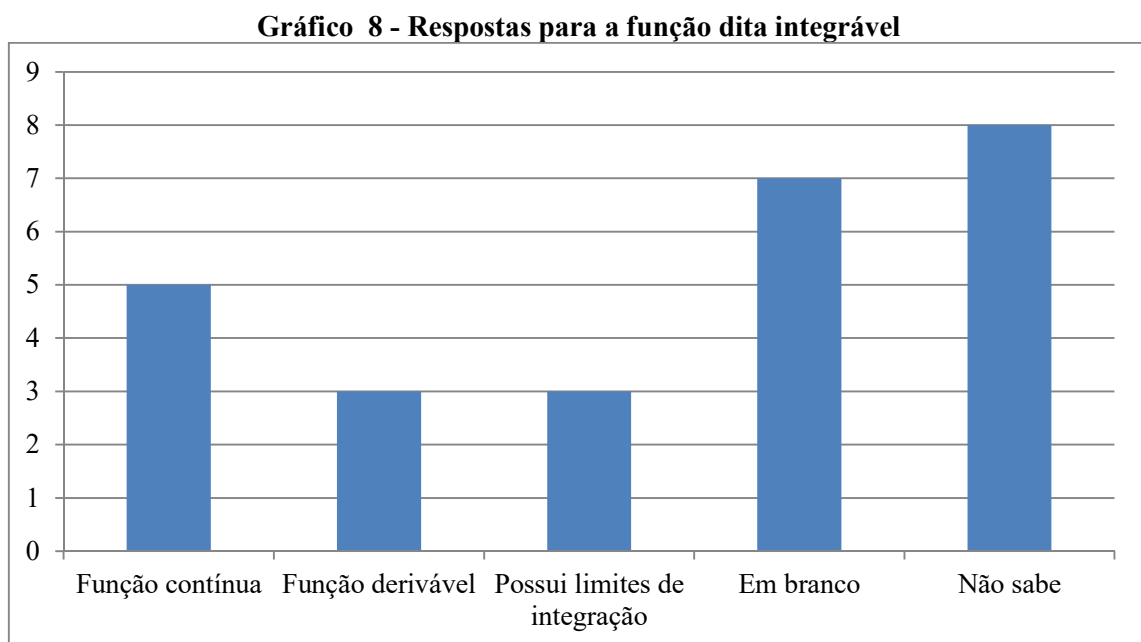
Fonte: acervo da pesquisa

Nota-se que o estudo individual prevalece nessas duas turmas, com 69,23% de preferência. Em contrapartida, apenas 11,54% consideram as aulas pertinentes para o aprendizado.

Quase todos os estudantes que não viram o assunto em sala de aula também não estudaram em casa. A partir disto, acreditamos que eles veem as aulas como algo necessário para se ter uma ordem cronológica de estudo. Observamos ainda que todos que viram a conteúdo por meio de seminários também preferiram o estudo individual. Todos eles justificaram isto pelo fato que no momento da apresentação dos demais grupos, eles estavam revisando para o seu, pois seria o próximo. Os que preferiram as aulas relataram que dispunham de pouco tempo para estudar em casa.

7.5 Integrabilidade

Perguntamos quando uma função é integrável e quando não é. O intuito era verificar se os estudantes conseguem, pelo menos, identificar quando se pode calcular uma integral definida. Esperávamos que aparecessem respostas que fizessem referência à existência do limite de uma soma de Riemann ou alguma relação com o teorema segundo o qual se f for contínua em $[a, b]$, ou tiver apenas um número finito de descontinuidades do tipo salto, então f é integrável em $[a, b]$; ou seja, a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ existe.

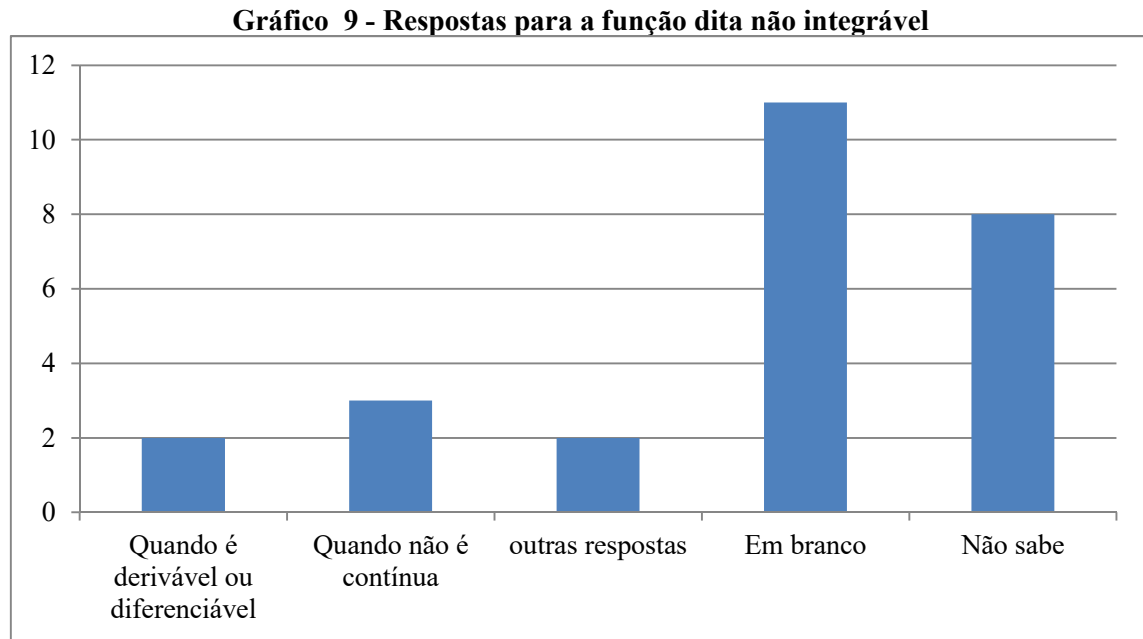


Fonte: acervo da pesquisa, 2018.

Nenhum estudante respondeu corretamente. Os alunos A2, A3, A9 só afirmaram que é integrável quando é derivável, o que pode estar relacionado com o Teorema Fundamental do Cálculo, onde os dois conceitos estão intimamente ligados. Algumas respostas foram atreladas ao símbolo da integral, relatando que a função é integrável quando possui limite de integração. O aluno A4 afirmou que o assunto foi abordado usando limites de integração, algo que possivelmente influenciou na sua resposta na Questão 3 sobre o conceito de integral, onde conceituou de forma parecida. Observamos neste caso algo evidenciado por Tall e Vinner (1981), em que a imagem do conceito errônea corroborou para uma definição conceitual inconsistente.

Quatro alunos afirmaram ser a continuidade da função um critério para garantir se a dada função é integrável ou não, o que não está de todo correto, visto que a continuidade

garante a integrabilidade da função, mas podemos ter funções descontínuas e integráveis. O conteúdo foi abordado para eles por meio do conceito e exemplos. Nesse cenário, se um aluno apenas trabalhar com funções contínuas, ficará com essa imagem conceitual sobre o assunto. Acreditamos que essa possa ser uma justificativa para os quatro participantes terem respondido da forma supracitada.



Fonte: acervo da pesquisa, 2018

Analisando o Gráfico 9, observamos um fato preocupante: 30,8% afirmaram não saber e outros 42,31% deixaram em branco. Analisando detalhadamente os dados percebemos que dois alunos apresentaram uma confusão dos conceitos de derivada e integral definida, o que, como já foi citado, pode estar relacionado com o Teorema Fundamental do Cálculo.

Destacamos a resposta de A4, A22 e A26. Estes alunos compreendem a continuidade com uma condição necessária. “*Ela não é integrável quando não é definida (contínua)*”.

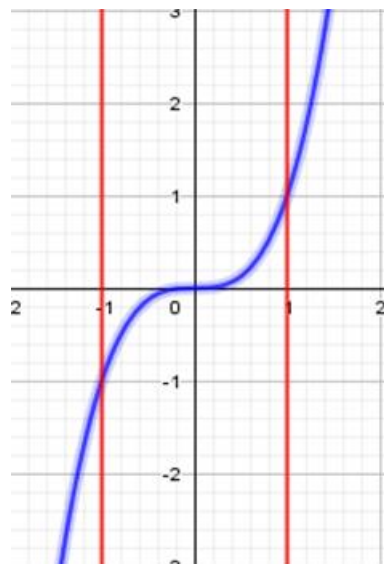
No geral, notamos que a maioria que respondeu o primeiro item apenas apresentou o contrário no segundo, o que estaria correto se a primeira resposta estivesse.

7.6 Cálculo de Integrais

A questão tem dois itens. No primeiro pedimos para calcular a integral da função $f(x) = x^3$ entre as retas $x = -1$ e $x = 1$. Para auxiliar na resposta e com o intuito de

verificar se e os estudantes fazem a ligação com o conceito de área, inserimos o gráfico a seguir.

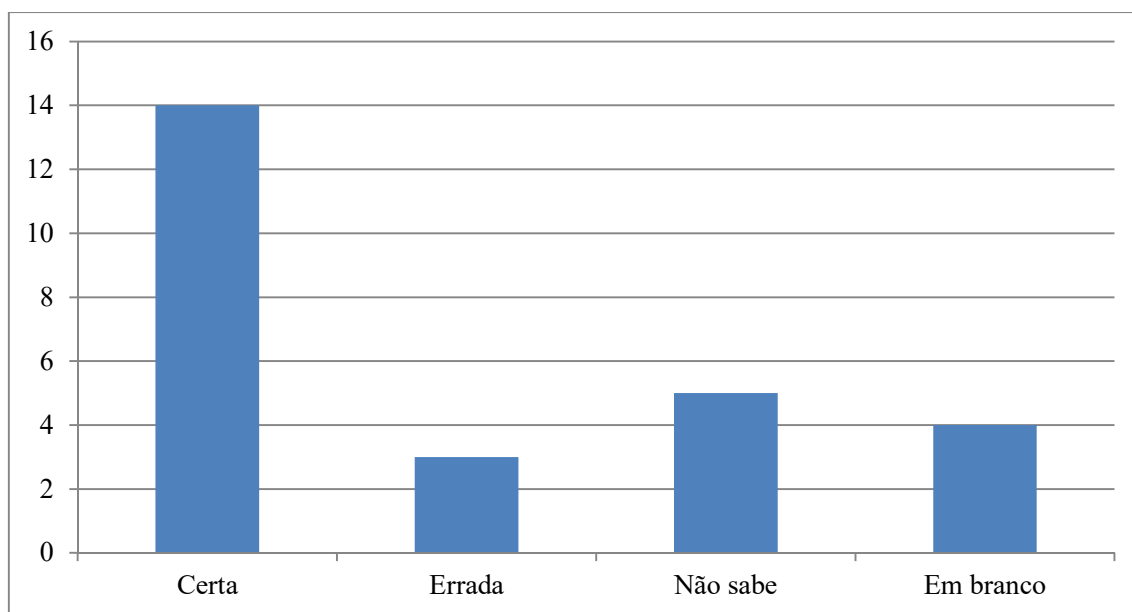
Gráfico 10 – Representação geométrica da função e das retas do item a) da Questão 6



Fonte: criada pelo autor.

O Gráfico 11 apresenta a classificação das respostas de cada aluno, se está certa, errada, se deixou em branco ou se afirmou não saber.

Gráfico 11 - Classificação das respostas dos estudantes no item a).



Fonte: acervo da pesquisa, 2018.

Considerando os que foram contabilizados nas opções Certa e Errada observamos que 82,35% conseguiram calcular corretamente o valor da integral. Este bom aproveitamento nas

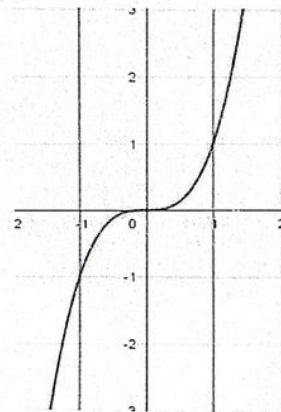
respostas conjecturamos ser devido à função ser polinomial (a mais simples de ser integrada), e, além disso, acreditamos que o gráfico auxiliou os alunos a enxergarem a representação geométrica da função e o intervalo onde deveria ser integrada.

Mostraremos alguns recortes das soluções que mais apareceram e as que mais nos despertaram curiosidade durante o procedimento. O excerto abaixo representa todas as respostas corretas do item a).

Figura 7 - Resposta correta apresentada pelo aluno A2 no item a) da Questão 6

6) Calcule a integral das funções abaixo nos seus respectivos intervalos. É possível relacionar esse resultado com algum outro conceito?

a) Entre o eixo x , as retas $x = -1$ e $x = 1$, e a curva $y = x^3$.

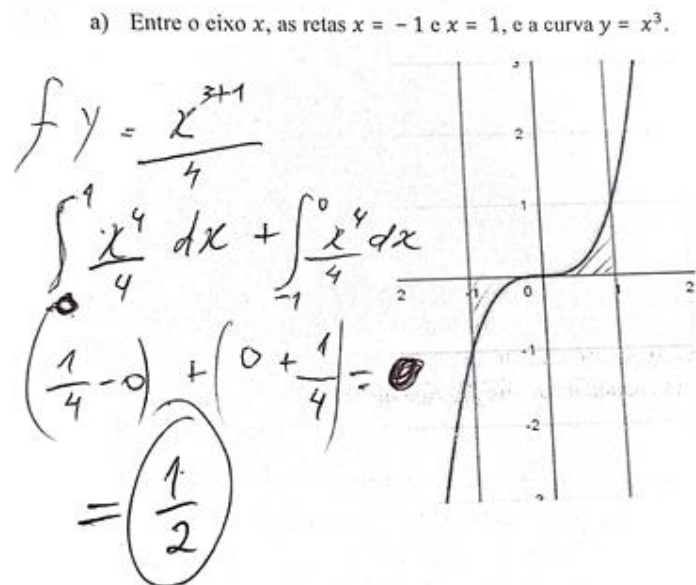


$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^3 dx &\Rightarrow \\ \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 &\Rightarrow \\ \left(\frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} \right) &\Rightarrow \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4} &= 0 \end{aligned}$$

Fonte: acervo da pesquisa, 2018.

Analisando a Figura 8, temos que A2 mostra um bom domínio sobre o método adotado para se calcular uma integral simples de uma função polinomial. Não só ele, como também os demais que responderam da mesma forma. Um ponto crucial que ressaltamos é que o mesmo grupo não respondeu corretamente qual o conceito de Integral Definida, mas sabem calcular. Nesse cenário, acreditamos que ele possui um conhecimento mais processual do que conceitual, ou seja, faz os cálculos, mas não sabe o seu significado. Os estudantes que não conseguiram responder a questão apresentaram erros procedimentais, deixaram em branco ou colocaram que não sabiam. Dentre as três respostas erradas, a do aluno A21 nos chamou a atenção.

Figura 8 - Resposta errada apresentada pelo aluno A21 no item a) da Questão 6

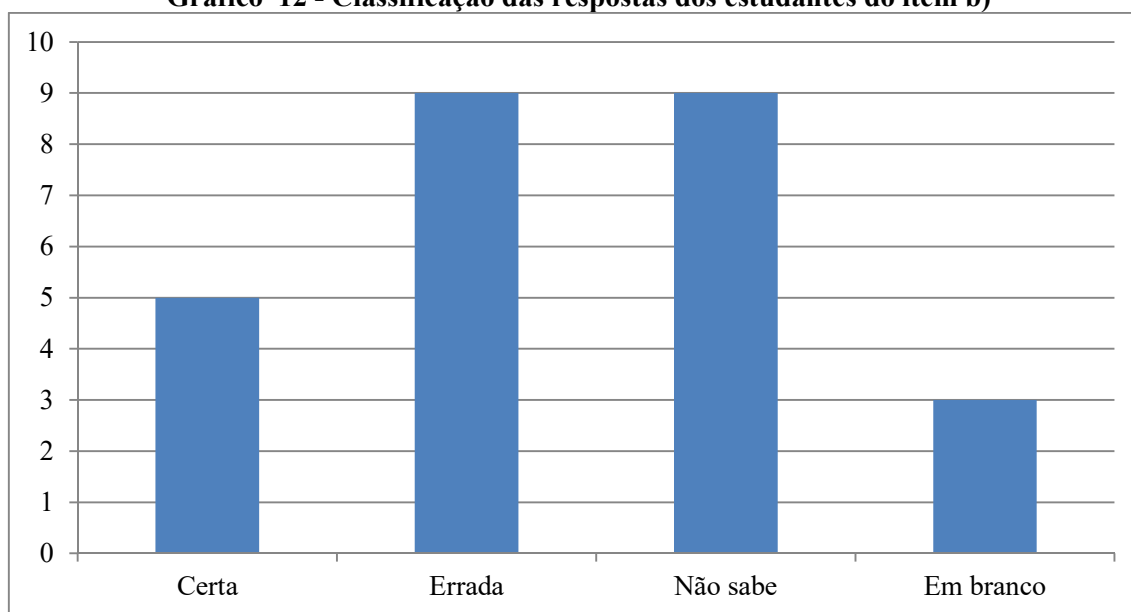


Fonte: acervo da pesquisa, 2018.

Observamos alguns erros matemáticos, como por exemplo, na linha dois, onde continuou utilizando o símbolo da integral mesmo já tendo feito o cálculo da primitiva. Além disso, notamos que ele utilizou um procedimento desnecessário e que é comumente utilizado quando se quer calcular a área limitada por um gráfico de uma função que não é sempre positiva. Neste caso deveria ter usado o sinal de menos entre as duas integrais. Comparamos com a resposta apresentada por ele na Questão 3, onde afirmou que o conceito de Integral Definida é a área abaixo da curva. Percebemos que a imagem conceitual do conceito de integral definida está sendo refletida no seu cálculo.

No segundo item pedimos para calcular a integral da função $f(x) = \sin(x) + 1$ entre as retas $x = 0$ e $x = 3$. Neste não fornecemos o gráfico com o intuito de verificar se os estudantes fazem a ligação com o conceito de área. Além disso, perguntamos se há algum outro conceito que possa ser associado ao resultado do cálculo.

No Gráfico 12 apresentamos a classificação das respostas dos estudantes em quatro categorias: certa, errada, não sabe e deixou em branco.

Gráfico 12 - Classificação das respostas dos estudantes do item b)

Fonte: acervo da pesquisa, 2018.

Nota-se que 14 alunos tentaram responder a questão. Destes, 64,29% erraram os cálculos. Acreditamos que o menor aproveitamento de respostas certas comparando com o item a) se deu pelo fato da função ser um pouco mais complicada de achar a primitiva, embora seja bastante corriqueira no Cálculo.

O aluno A18 afirmou: “*Não consigo fazer os cálculos. Necessito de muita revisão do conteúdo*”. A resposta dele é esperada, haja vista que cursou a disciplina em 2011.2, quase sete anos atrás. Possivelmente sua imagem conceitual sobre o conteúdo foi afetada pelo tempo.

A seguir, apresentamos as respostas que mais apareceram e as que consideramos pertinentes para a discussão à luz da fundamentação teórica. Na Figura 10 está ilustrada a resposta correta apresentada pelos estudantes.

Figura 9 - Acerto do aluno A3 no item b) da Questão 6

b) Entre o eixo x , as retas $x = 0$ e $x = 3$, e a curva $y = \sin(x) + 1$.

$$\begin{aligned} \int_0^3 \sin(x) + 1 &= \int_0^3 \sin(x) + \int_0^3 1 \\ &= \cos(x) \Big|_0^3 + x \Big|_0^3 \\ &= -\cos(3) - \cos(0) + 3 - 0 \\ &= -\cos(3) + 1 + 3 \\ &= -\cos(3) + 4 \end{aligned}$$

Fonte: acervo da pesquisa, 2018.

Ela mostra que os alunos que responderam dessa forma o item b) possuem certo domínio sobre os métodos de solução para integrais definidas. Analisando especificamente a de A3 e comparando-a com a solução apresentada na Questão 3, notamos que o aluno tem a imagem conceitual do conteúdo atrelado à ideia de limites de integração, algo que não é suficiente para definir a Integral Definida. Destacamos a ausência de resposta para a segunda pergunta da Questão 6 pelo estudante A3.

Na Figura 11 ilustramos um modelo de resposta dado pelos que tentaram responder e não acertaram. Nela notamos um erro procedimental: a aplicação incorreta dos limites de integração. Houve a troca da ordem de aplicação. Este modelo apareceu na maioria dos que tentaram responder e erraram. Além disso, destacamos que muitos apenas aplicaram os limites de integração em uma das funções. O aluno A7 na Questão 3 relatou que a integral definida é a que possui limites de integração. Já na resposta da segunda pergunta da Questão 6, acreditava que o resultado encontrado tem relação com a área, mas não conseguia identificar. Observamos que o estudante tem uma imagem conceitual do conteúdo atrelada aos dois aspectos.

Figura 10 - Erro apresentado pelo aluno A7 no item b) da Questão 6

b) Entre o eixo x , as retas $x = 0$ e $x = 3$, e a curva $y = \text{sen}(x) + 1$.

$$\int_0^3 (\text{sen}(x) + 1) dx = \int_0^3 \text{sen } x dx + \int_0^3 1 dx$$

$$= -\cos x \Big|_0^3 + x \Big|_0^3$$

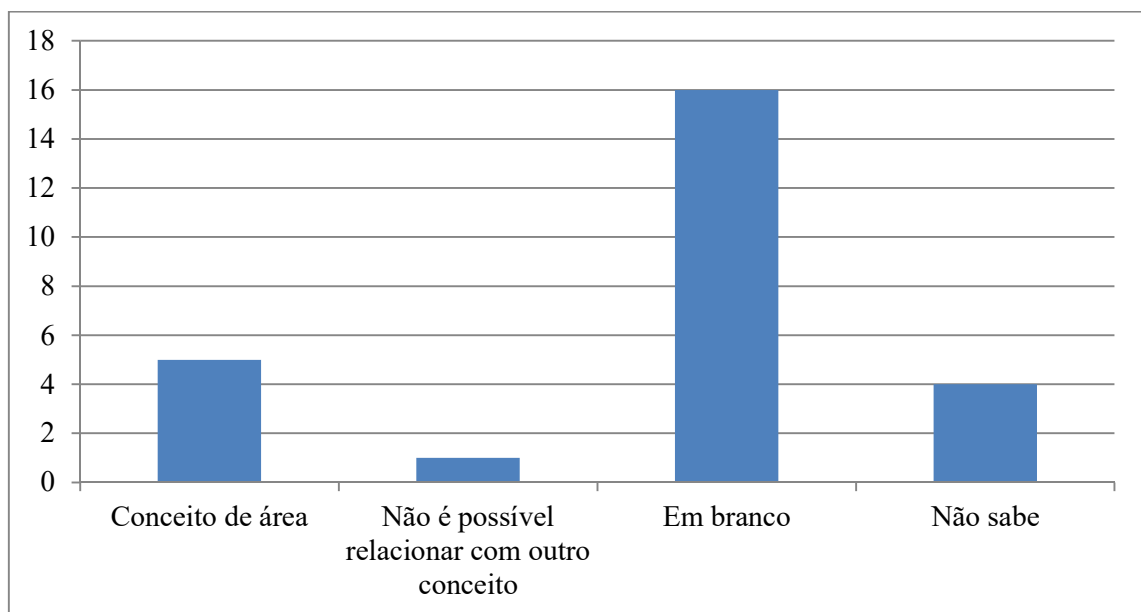
$$= [-\cos 0 + \cos 3] + 0 - 3$$

$$= [-\cos 0 + \cos 3 - 3]$$

Fonte: acervo da pesquisa, 2018.

No Gráfico 13 temos a categorização das relações que os demais alunos conseguiram estabelecer.

Gráfico 13 - Relações com outros conceitos



Fonte: acervo da pesquisa, 2018.

Aqui buscamos de maneira espontânea os conceitos que conseguiam relacionar com a resposta final dos cálculos nos itens a) e b). Notamos que quatro participantes afirmaram estar relacionado com o conceito de área. Destes, apenas o aluno A9 respondeu na Questão 3 que o conceito de integral definida era a área abaixo da curva. Os outros três afirmaram ser a integral que possui limites ou intervalos de integração.

Uma curiosidade é que um dos estudantes relatou que “*não é possível relacionar com outro conceito*”. Isto demonstra o que Hiebert Lefevre (1986) argumenta sobre conhecimento processual, mais conhecido como mecânico.

No que concerne à ausência de respostas dos alunos A16, A17, A19, A23, A24, A25 acreditamos que foi ocasionado devido ao fato de não ter sido trabalhado com eles o conteúdo de Integral Definida no Cálculo I. O aluno A23 relatou: “*Não consigo associar a outro conceito devido a falta de abordagem do conteúdo no cálculo I.*”.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento deste trabalho possibilitou uma investigação acerca das imagens e definições conceituais apresentadas pelos estudantes das turmas de Cálculo II e III do curso de Matemática-Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste sobre a Integral Definida. Esta pesquisa contribui para um melhor entendimento das dificuldades apresentadas no processo da aquisição de conceitos por parte dos alunos. Inferir sobre os aspectos da imagem e definição conceituais apresentados pelos sujeitos pesquisados é importante quando se está trabalhando com o Cálculo devido ao fato das interpretações e conclusões serem fundamentais para aprender.

No decorrer do trabalho foram consultadas e estudadas diversas bibliografias que nos subsidiaram a compreender a teoria sobre Conhecimento Procedimental e Conceitual de Hiebert e Lefevre (1986) e a teoria de Tall e Vinner (1981) sobre Imagem e Definição conceituais, a qual defende que uma imagem conceitual bem construída favorece a uma definição conceitual consistente.

De maneira geral, concluímos que o conceito de área pouco influencia nas definições conceituais dos estudantes, algo que esperávamos ser diferente, visto que a construção do conceito é motivada pelas somas de Riemann. Identificamos que eles agregam o conceito de Integral Definida, na maioria das vezes, apenas ao que está presente no símbolo, a exemplo dos limites de integração.

Ao término da pesquisa chegamos à conclusão que a maioria dos estudantes participantes apresentam um melhor domínio dos métodos de solução de Integrais Definidas do que do conceito em si, embora as questões que trouxemos não sejam suficientes para afirmar com certeza que este domínio é real. Observamos que a maioria dos estudantes apontou o estudo individual como o meio mais importante para o seu aprendizado, algo que pode justificar o fato anterior, pois nesse tipo de estudo os métodos costumam ser mais fáceis de assimilar do que a teoria envolvida no conceito. Além disso, conseguimos dados importantes sobre o aproveitamento dos estudantes. Acrescentamos que, quando muitos afirmam que não sabem ou deixam as questões em branco, percebemos um preocupante déficit na aprendizagem, pois as integrais são ferramentas recorrentes nos Cálculos II e III e, portanto, o conhecimento ao menos dos métodos é primordial.

Dada a importância da temática abordada, principalmente em pesquisas no ensino superior, seriam interessantes investigações sobre como as imagens conceituais influenciam

nas definições conceituais em outros conteúdos do próprio Cálculo ou em outras áreas do saber. Esperamos que este trabalho motive novas pesquisas relacionadas ao tema. Investigar as imagens e definições conceituais nos permite um universo de avaliações e investigações, nos quais temos convicção que cada estudante apresentará imagens conceituais diferenciadas a depender das experiências por eles vividas. Além disso, compreender quais as relações que estão sendo criadas na construção de um conceito podem auxiliar a entender a base para erros e assim encontrar uma forma de adaptar os processos de ensino e aprendizagem. Por fim, a realização de estudos como este que procurem identificar as imagens e definições conceituais que estão sendo feitas já nos primeiros conteúdos do Cálculo provavelmente ajudariam a diminuir as más formulações posteriores.

REFERÊNCIAS

- AMIT, M; VINNER, S. **Some Misconceptions in Calculus-Anecdotes or the Tip of Iceberg?**. In: PROCEEDINGS FOURTEENTH PME CONFERENCE. 14, v.1. 1990. México. p. 3-10.
- BARBOSA, O. B.; NETO, H. B. **Raciocínio Lógico Formal e Aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral: O caso da Universidade Federal do Ceará**. Temas e Debates, Blumenau: SBM, v. VII, n.6, p. 61-69, 1995.
- BARUFI, M. C. B. **A construção de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese de Doutorado em Educação. Faculdade de Educação. USP. São Paulo, 1999.
- CARGNIN, C. **Ensino e aprendizagem da integral de Riemann de funções de uma variável real: possibilidades de articulação da utilização de Mapas Conceituais com a teoria dos Registros de Representações Semióticas**. 2013. 416 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.
- D'AMBROSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates**. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989, p. 15-19, 1989.
- DIETRICH, P. S. **Ensino e Aprendizagem da Integral Definida: Contribuições da Engenharia Didática**. 2009. Dissertação (Mestrado). UNIFRA, Santa Maria.
- ESCARLATE, A. C. **Uma Investigação sobre a Aprendizagem de Integral**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.
- GODOY, A. S. **Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades**. Revista de Administração de Empresas, São Paulo, vol. 35, n. 2, 1995, p. 57-63.
- HIEBERT, J.; LEFEVRE, P. **Conceptual and procedural knowledge in mathematics: Na introductory anlysis** In: HIEBERT, J.(Ed.). Conceptual and Procedural Knowledge: The case for Mathematics. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erbaum Associates, 1986, p. 1-27.
- MÁXIMO, G. C. MURTA, J. L. **Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos de Engenharia da UFOP: Estratégias e Desafios no Ensino Aprendizagem**. COBENGE: Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia. Brasília DF, 2004.
- MELO, J. M. R. **Conceito de Integral: Uma proposta Computacional para o ensino e aprendizagem**. Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2002.

MEYER, C. **Derivada/Reta Tangente: Imagem Conceitual e Definição Conceitual**. 2003. 159f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2003.

MICOTTI, M. C. O. **O ensino e as propostas pedagógicas**. In: BICUDO, M. A. V. Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

REIS, F. da S. **A Tensão entre o Rigor e a Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos**. Tese de Doutorado em Educação. Campinas: UNICAMP, 2001.

SILVA, C. A. **A noção de Integral em livros didáticos e os registros de representação semiótica**. 2004. 157p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

TALL, D. O.; VINNER, S. **Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with Special Reference to Limits and Continuity**. Educational Studies in Mathematics, nº 12, 1981, p. 151 – 169.

VIANNA, M. H. Metodologia da observação: validade e confiabilidade. In: VIANNA, M. H. **Pesquisa em Educação: a observação**, 1º Edição, Liber Livro Editora, 2007, p. 62-70

VINNER, S. **The Role of Definitions in the Teaching and Learning Mathematics**. In: TALL, D. (Ed.). Advanced Mathematical Thinking, ed. Dordrecht: Kluwer, 1991, p. 65-81.

ANEXO A – QUESTIONÁRIO



Universidade Federal de Pernambuco

Centro Acadêmico do Agreste

Núcleo de Formação Docente

Matemática - Licenciatura



Você está sendo convidado a participar de um estudo intitulado **Integral Definida: Imagem e Definição Conceituais**, que está sendo desenvolvido por **DIEGO JONATA DE MEDEIROS**, aluno do Curso de Graduação em Matemática - Licenciatura, da Universidade Federal de Pernambuco - Centro Acadêmico do Agreste; sob a orientação da professora Mr^a. Elizabeth Lacerda Gomes.

Este estudo justifica-se devido a grande dificuldade dos alunos no que tange as questões que envolvem o cálculo de integrais. Seu objetivo geral é investigar como a imagem e definição conceituais influenciam o conceito de integral definida dos licenciandos em matemática.

Deixamos claro que, se qualquer informação for divulgada em relatório ou publicação, isto será feito de forma sigilosa, para que a confidencialidade e privacidade dos seus participantes sejam mantidas conforme preconizado pela [Resolução nº 510/2016 - estabelecida pelo Conselho Nacional de Saúde](#), que aborda trabalhos envolvendo seres humanos. Isto significa que as informações fornecidas por você terão sua privacidade garantida pelos pesquisadores responsáveis. Os sujeitos da pesquisa não serão identificados em nenhum momento, mesmo quando os resultados desta pesquisa forem divulgados em qualquer forma.

É importante que os alunos justifiquem suas respostas e respondam da forma mais sincera e honesta (para que se preze a seriedade da análise dos dados).

Obrigado pela participação

Dados do Aluno (a)

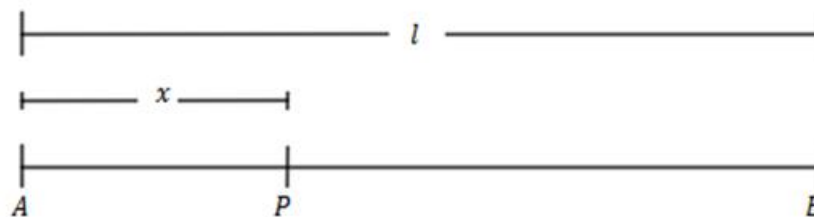
Nome: _____

Período: _____ Idade: _____

Questionário

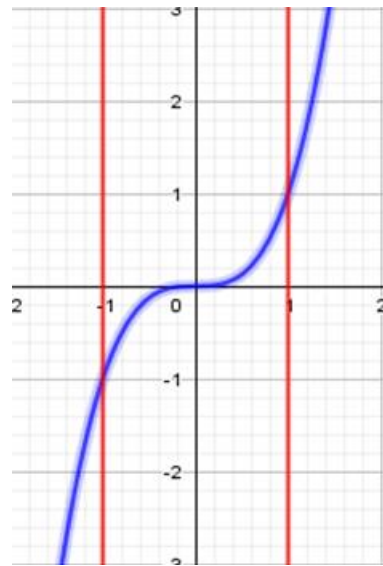
- 1) Em qual ano e semestre você cursou a disciplina de Cálculo I?
- 2) A figura abaixo representa um arame de metal de extremidades A e B e de comprimento L . A temperatura em um ponto P sobre o arame depende da distância x até a extremidade A do arame e é dada pela função $T(x) = x^2$. Determine a temperatura média do arame.

Atividade retirada de: ESCARLATE, A. C. **Uma Investigação sobre a Aprendizagem de Integral**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.



- 3) Saberá dizer qual o conceito de Integral Definida?
- 4) O conceito de Integral Definida foi abordado no Cálculo I? Como o professor explicou o conteúdo? Qual foi o mais importante, as aulas ou o estudo individual, para que você aprendesse?
- 5) Em relação ao conceito de Integral Definida, quando uma função é dita integrável? E não integrável?
- 6) Calcule a integral das funções abaixo nos seus respectivos intervalos. É possível relacionar esse resultado com algum outro conceito?

- a) Entre o eixo x , as retas $x = -1$ e $x = 1$, e a curva $y = x^3$.



- b) Entre o eixo x , as retas $x = 0$ e $x = 3$, e a curva $y = \sin(x) + 1$.

ANEXO B – TABELAS DAS RESPOSTAS DE CADA QUESTÃO DO QUESTIONÁRIO

Tabela 1- Categorização por período

ALUNOS	PERÍODOS						
	2011.2	2014.1	2014.2	2015.2	2017.1	2017.2	2018.1
A1							X
A2					X		
A3						X	
A4						X	
A5							X
A6							X
A7							X
A8							X
A9							X
A10					X		
A11							X
A12				X			
A13	X						
A14				X			
A15	X						
A16						X	
A17						X	
A18	X						
A19						X	
A20						X	
A21					X		
A22			X				
A23						X	
A24						X	
A25						X	
A26					X		

Fonte: acervo da pesquisa, 2018

Tabela 2 - Distribuição dos alunos por curso

ALUNOS	CURSOS		
	MATEMÁTICA	FÍSICA	ENGENHARIA
A1	X		
A2			X
A3			X
A4	X		
A5	X		
A6	X		
A7	X		
A8	X		
A9	X		
A10			X
A11			X
A12			X
A13		X	
A14			X
A15			X
A16	X		
A17	X		
A18	X		
A19	X		
A20			X
A21			X
A22		X	
A23	X		
A24	X		
A25	X		
A26			X

Fonte: acervo da pesquisa, 2018.

Tabela 3 - Categorização das Respostas

ALUNOS	RESPOSTAS			
	CERTO	ERRADO	EM BRANCO	NÃO SABE
A1		X		
A2		X		
A3		X		
A4		X		
A5			X	
A6		X		
A7		X		
A8		X		
A9		X		
A10				X
A11		X		
A12		X		
A13		X		
A14		X		
A15		X		
A16		X		
A17				X
A18			X	
A19		X		
A20		X		
A21			X	
A22		X		
A23		X		
A24				X
A25			X	
A26		X		

Fonte: acervo da pesquisa, 2018.

Tabela 4 - Imagens conceituais detectadas

Tipos de Imagens conceituais detectadas					
Alunos	Integral que possui limites de integração ou intervalos de integração	Área abaixo da curva	Outras imagens	Em branco	Não sabe
A1	X				
A2	X				
A3	X				
A4	X				
A5	X				
A6			X		
A7	X				
A8			X		
A9		X			
A10		X			
A11		X			
A12		X			
A13				X	
A14	X				
A15					X
A16					X
A17					X
A18					X
A19					X
A20		X			
A21		X			
A22	X				
A23					X
A24					X
A25					X
A26	X				

Fonte: acervo da pesquisa, 2018.

A5 - Integral definida dentro de um domínio.

A8 - Seria a volta da derivação, que equivale a aceleração, onde integral de $f(x)dx$ tem que ser definida no ponto.

Tabela 5 - abordagem do conteúdo

Alunos	Abordagem do conteúdo		
	Sim	Não	Deixou em branco
A1	X		
A2	X		
A3	X		
A4	X		
A5	X		
A6	X		
A7	X		
A8	X		
A9	X		
A10	X		
A11	X		
A12	X		
A13	X		
A14	X		
A15	X		
A16		X	
A17		X	
A18	X		
A19		X	
A20	X		
A21			X
A22	X		
A23		X	
A24		X	
A25		X	
A26	X		

Fonte: acervo da pesquisa, 2018.

Tabela 6 - Formas de explanação do conteúdo

Explanação do conteúdo							
Alunos	Recursos tecnológicos	Seminários	Conceito e exemplos	Não foi muito claro	Outras formas	Em branco	Não lembra
A1		X					
A2					X		
A3			X				
A4					X		
A5		X					
A6		X					
A7		X					
A8					X		
A9		X					
A10	X						
A11	X						
A12					X		
A13							X
A14			X				
A15			X				
A16							
A17							
A18							X
A19							
A20			X				
A21							
A22				X			
A23							
A24							
A25							
A26				X			

Fonte: acervo da pesquisa, 2018.

A2 - Com o cálculo de áreas de superfícies com extremidades definidas.

A4 - Abordando através de limites de integração.

A8 - Aulas teóricas.

A12 - Explanou o conteúdo a partir da soma de rieman

Tabela 7 - Preferência de estudo

Qual o mais importante?					
Alunos	Estudo individual	As aulas	Outras formas	Em branco	Não sabe
A1	X				
A2	X				
A3	X				
A4		X			
A5	X				
A6	X				
A7	X				
A8		X			
A9	X				
A10		X			
A11	X				
A12	X				
A13	X				
A14	X				
A15			X		
A16	X				
A17				X	
A18				X	
A19				X	
A20	X				
A21	X				
A22	X				
A23	X				
A24				X	
A25	X				
A26	X				

Fonte: acervo da pesquisa, 2018.

A15 - O estudo com grupo e vídeo aulas.

Tabela 8 - Respostas para a função dita integrável

Alunos	Integrável				
	Função contínua	Função Derivável	Possui limite de integração	Em branco	Não sabe
A1			X		
A2		X			
A3		X			
A4			X		
A5					X
A6					X
A7					X
A8				X	
A9		X			
A10			X		
A11				X	
A12	X				
A13				X	
A14	X				
A15	X				
A16					X
A17					X
A18					X
A19					
A20	X				
A21	X				
A22				X	
A23				X	
A24					X
A25					X
A26				X	

Fonte: acervo da pesquisa, 2018.

Tabela 9 – Respostas para a função dita não integrável

Não Integrável						
Alunos	Quando é derivável ou diferenciável	Quando não é contínua	Se o limite da função não existir	Outras respostas	Em branco	Não sabe
A1					X	
A2	X					
A3	X					
A4		X				
A5						X
A6						X
A7						X
A8					X	
A9					X	
A10				X		
A11					X	
A12					X	
A13					X	
A14					X	
A15					X	
A16						X
A17						X
A18						X
A19				X		
A20					X	
A21					X	
A22		X				
A23					X	
A24						X
A25						X
A26		X				

Fonte: acervo da pesquisa, 2018

A10 - Os intervalos da função interferem.

A19 - Não há possibilidade de ser integrada.

Tabela 10 – Classificação das respostas dos estudantes no item a).

Alunos	Classificação das respostas			
	Certo	Errado	Em branco	Não sabe
A1	X			
A2	X			
A3	X			
A4	X			
A5	X			
A6	X			
A7	X			
A8	X			
A9	X			
A10			X	
A11	X			
A12	X			
A13			X	
A14	X			
A15			X	
A16				X
A17				X
A18				X
A19			X	
A20	X			
A21		X		
A22	X			
A23		X		
A24				X
A25			X	
A26		X		

Fonte: acervo da pesquisa, 2018.

Tabela 11 - Classificação das respostas dos estudantes do item b).

Alunos	Classificação das respostas			
	Certo	Errado	Em branco	Não sabe
A1		X		
A2	X			
A3	X			
A4		X		
A5	X			
A6		X		
A7		X		
A8			X	
A9		X		
A10			X	
A11	X			
A12	X			
A13			X	
A14		X		
A15			X	
A16				X
A17				X
A18				X
A19			X	
A20		X		
A21			X	
A22			X	
A23		X		
A24				
A25			X	
A26		X		

Fonte: acervo da pesquisa, 20018.

Tabela 12 - Relações com outros conceitos

Categorias apresentadas sobre as relações com outros conceitos				
Alunos	Conceito de Área	Não é possível relacionar com outro conceito	Em branco	Não sabe
A1	X			
A2			X	
A3			X	
A4			X	
A5	X			
A6				X
A7	X			
A8			X	
A9	X			
A10			X	
A11		X		
A12			X	
A13			X	
A14			X	
A15			X	
A16			X	
A17				X
A18	X			
A19			X	
A20			X	
A21			X	
A22			X	
A23				X
A24				X
A25			X	
A26			X	

Fonte: acervo da pesquisa, 2018.