UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE FÍSICA - LICENCIATURA

BRUNO FRANCISCO ANDRADE DA SILVA

MODELAGEM MATEMÁTICA DE FENÔMENOS FÍSICOS USANDO MATERIAIS DE BAIXO CUSTO

Caruaru
2021

BRUNO FRANCISCO ANDRADE DA SILVA

MODELAGEM MATEMÁTICA DE FENÔMENOS FÍSICOS USANDO MATERIAIS DE BAIXO CUSTO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de licenciado em Física.

Área de concentração: Mecânica Clássica, Física Experimental.

Orientador: Profº. Dr. João Francisco Liberato Freitas.

Caruaru

2021

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier - CRB/4 - 1242

S586m Silva, Bruno Francisco Andrade da.
Modelagem Matemática de Fenômenos Físicos usando materiais de baixo custo. / Bruno Francisco Andrade da Silva. – 2021.
73 f. ; il. : 30 cm.

Orientador: João Francisco Liberato de Freitas.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Física, 2021.
Inclui Referências.

1. Física – estudo e ensino. 2. Equações diferenciais ordinárias. 3. Física experimental. I. Freitas, João Francisco Liberato de (Orientador). II. Título.

CDD 371.12 (23. ed.) UFPE (CAA 2021-009)

BRUNO FRANCISCO ANDRADE DA SILVA

MODELAGEM MATEMÁTICA DE FENÔMENOS FÍSICOS USANDO MATERIAIS DE BAIXO CUSTO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de licenciado em Física.

Aprovada em: 10/03/2021.

BANCA EXAMINADORA

_____
Profº. Dr. João Francisco Liberato de Freitas (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco/NICEN

_____
Profº. Dr. João Eduardo Fernandes Ramos (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco/NFD

_____
Profº. Dr. Augusto César Lima Moreira (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco/NICEN

Dedico este trabalho a Deus; ao meu saudoso pai Sebastião Silva e minha mãe Maria Rita, ao meu irmão Danilo e aos demais parentes; aos meus amigos; a todos os servidores e colaboradores desta instituição, meus professores e orientadores e aos meus companheiros de jornada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus; ao meu saudoso pai Sebastião Silva, que mesmo enfrentando o processo de enfermidade, juntamente com minha mãe Maria Rita e meu irmão Danilo me incentivaram a conclusão do curso, me ajudaram na obtenção dos materiais para a confecção dos aparatos experimentais utilizados tanto no primeiro projeto quanto no desenvolvimento deste trabalho; aos colegas de trabalho pelo incentivo na conclusão do curso; aos colegas de graduação pelo companheirismo; aos demais familiares, que lutaram juntamente comigo para que eu conseguisse vencer mais uma etapa da minha vida; as pessoas que passaram pela minha vida e me deram a sua contribuição para crescimento pessoal e profissional; a cada servidor e colaborador desta Instituição de Ensino; a todos os meus professores da graduação e seus esforços na construção do conhecimento e incentivo na formação discente e qualificação como profissional; aos professores e alunos que nortearam as minhas primeiras experiências na docência, prof. Valdir que por dois períodos me orientou na monitoria da disciplina de Matemática Básica, prof. Paulo que me deu a oportunidade de participar e contribuir no Programa de Iniciação à Docência Interdisciplinar, aos professores que ministraram as disciplinas de Estágio Supervisionado e aos professores supervisores na Escola Felisberto de Carvalho, professores Delmiro e Luciano, que sempre me ajudaram nas observações e intervenções em suas respectivas aulas e a gestora da época da Escola Sebastião Cabral, prof. Mari; aos professores que procuravam nos estimular a participarmos dos eventos científicos, professores Charlie, Augusto e Ernesto e prof. Gislene no Encontro de Físicos do Norte e Nordeste; instituições que ofereceram a oportunidade de participação em cursos de extensão, a exemplo do curso de Lógica Matemática ministrada pelo prof. Alci no IFPE Caruaru; ao coordenador do curso prof. João Eduardo, foi receptivo quando pedi contribuições na escrita deste trabalho; professor Augusto que me orientou no primeiro momento em um projeto inicial; professor João Freitas pela paciência e grande apoio nesta reta final e contribuições oferecidas para escrita deste trabalho; um agradecimento especial a Banca Examinadora da minha defesa de monografia.

RESUMO

Tem sido constatado que a educação formal tradicional não tem proporcionado motivação para uma eficaz construção do aprendizado dos educandos nas ciências da natureza. Então, para contornar esse problema educacional, uma alternativa interessante é a inserção do lúdico como ferramenta pedagógica partindo de procedimentos experimentais usando brinquedos e modelando as relações matemáticas envolvidas nesses aparatos a fim de problematizar tanto as formas de pesquisa quanto o aprendizado conceitual científico. No ensino de física, essa aplicabilidade objetiva renovar o olhar receptor do discente instigando-o à curiosidade epistemológica e a interagir com brinquedos sob novas perspectivas propondo uma postura crítica e contextualizada muito além dos processos sistemáticos e metódicos que o formalismo tradicional vem promovendo no sistema educacional vigente. Então, foram adquiridos um lançador e esferas de plástico e um ioiô para serem usados em dois aparatos experimentais como proposta de aplicação da modelagem matemática. No primeiro, foram realizadas ações de registrar valores, calcular, comparar e analisar as variáveis envolvidas no movimento de um projétil. No segundo, com o intuito de catalogar, mensurar, equiparar e explorar as variáveis presentes na dinâmica considerando o rolamento sem deslizamento de um ioiô, visto como um corpo rígido. Desse modo, observou-se que os resultados obtidos experimentalmente, em sua maioria, foram satisfatórios. Os resultados sugerem que a resistência do ar não interfere significativamente quando foram comparados valores previstos e obtidos auxiliando, então, na validação dos modelos teóricos. Apresentaram-se numa confiabilidade razoável o que permite concluir que essas propostas de modelagem matemática podem ser aplicadas na educação básica, a partir de modelo teórico que despreza os efeitos das forças de atrito, e superior. Embora seja um caso particular, os experimentos realizados com materiais simples e de baixo custo e com uma linguagem matemática mais acessível tornam possível elucidar o aprendizado dos conceitos associados a posição, velocidade, aceleração, altura máxima, alcance, forças que envolvem o sistema físico e relações de simetria com momento de inércia.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Ensino de Física. Equações Diferenciais Ordinárias. Física Experimental.

ABSTRACT

It has been found that traditional formal education hasn’t provided motivation for an effective construction of learner’s learning in the natural sciences So, to get around this educational problem, an interesting alternative is the insertion of playfulness as a pedagogical tool starting from experimental procedures using toys and modeling the mathematical relationships involved in these devices in order to problematize both forms of research and scientific conceptual learning. In the teaching of physics, this applicability aims to renew the receptive look of the student, instigating him to epistemological curiosity and interaction with toys from new perspectives, proposing a critical and contextualized posture far beyond the systematic and methodical processes that traditional formalism has been promoting the current educational system. Then, a children's kit was acquired, containing a launcher and plastic balls, and a yo-yo to be used in two experimental apparatus as a proposal for applying mathematical modeling. In the first, actions were taken to record values, calculate, compare and analyze the variables involved in the movement of a projectile. In the second, in order to catalog, measure, equate and explore the variables involved in the dynamics involving the rolling without sliding a yo-yo, being seen as a rigid body. Thus, it was observed that the results obtained experimentally, for the most part, were satisfactory. The results suggest that air resistance does not significantly interfere when predicted and obtained values were compared, thus helping in the validation of theoretical models. They were presented with reasonable reliability, which allows us to conclude that these proposals for mathematical modeling can be applied in basic education, based on a theoretical model that disregards the effects of frictional forces, and higher. Although it is a particular case, the experiments carried out with simple and low-cost materials and with a more accessible mathematical language make it possible to elucidate the learning of the concepts associated with position, speed, acceleration, maximum height, range, forces that involve the physical system and symmetry relations with moment of inertia.

Keywords: Mathematical Modeling. Physics Teaching. Ordinary Differential Equations. Experimental Physics.

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Valores de alcance calculados pelo método da perturbação em função da força de retardo constante k; θ =30° ; $\boldsymbol{v_0 = 5,1\ m/s}$ 47

Gráfico 2 – Valores de alcance calculados pelo método da perturbação em função da força de retardo constante k; $\boldsymbol{\theta}$ =45° ; $\boldsymbol{v_0 = 4,8\ m/s}$ 48

Gráfico 3 – Valores de alcance calculados pelo método da perturbação em função da força de retardo constante k; $\boldsymbol{\theta}$ =60° ; $\boldsymbol{v_0 = 4,96\ m/s}$ 49

Gráfico 4 – Valores de alcance calculados pelo método da perturbação em função da força de retardo constante k; $\boldsymbol{\theta}$ =75° ; $\boldsymbol{v_0 = 6,1\ m/s}$ 50

Gráfico 5 – Gráfico comparativo: A linha vermelha indica o resultado experimental da trajetória da bola considerando os efeitos resistivos para valores de $\boldsymbol{\theta}$ **=30° ;** $\boldsymbol{v_0 = 5,1\ m/s}$. A linha azul ignora os efeitos da resistência do ar para os mesmos valores de ângulo e velocidade inicial 52

Gráfico 6 – Gráfico comparativo: A linha vermelha indica o resultado experimental da trajetória da bola considerando os efeitos resistivos para valores de $\boldsymbol{\theta}$ =45° ; $\boldsymbol{v_0 = 4,8\ m/s}$. A linha azul ignora os efeitos da resistência do ar para os mesmos valores de ângulo e velocidade inicial 53

Gráfico 7 – Gráfico comparativo: A linha vermelha indica o resultado experimental da trajetória da bola considerando os efeitos resistivos para valores de $\boldsymbol{\theta}$ =60° ; $\boldsymbol{v_0 = 4,96\ m/s}$. A linha azul ignora os efeitos da resistência do ar para os mesmos valores de ângulo e velocidade inicial 54

Gráfico 8 – Gráfico comparativo: A linha vermelha indica o resultado experimental da trajetória da bola considerando os efeitos resistivos para valores de $\boldsymbol{\theta}$ =75° ; $\boldsymbol{v_0 = 6,1\ m/s}$. A linha

azul ignora os efeitos da resistência do ar para os mesmos valores de ângulo e velocidade inicial 55

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Alcances obtidos em função do ângulo de lançamento	42
Tabela 2 –	Comparação entre resultados previstos e obtidos	43
Tabela 3 –	Velocidade inicial da bola plástica ejetada por uma pistola em função do ângulo de lançamento	44
Tabela 4 –	Tempo total de voo da bola de plástico em um lançamento oblíquo	45
Tabela 5 –	Altura máxima alcançada pela bola de plástico em função do ângulo de lançamento	45
Tabela 6 –	Valores calculados da constante de retardo em função do ângulo de lançamento	46
Tabela 7 –	Tabela comparativa entre os erros relativos considerando e ignorando os efeitos da resistência do ar	56
Tabela 8 –	Tempo total do percurso do ioiô em cada ângulo de inclinação da rampa	57
Tabela 9 –	Velocidades e aceleração de centro de massa calculados para cada ângulo situacional	58
Tabela 10 -	Coeficientes associados ao momento de inércia em cada ângulo situacional	58

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	**12**
2	**FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**	**16**
2.1	PROJÉTIL SOB ARRASTO LINEAR	20
2.1.1	**Componente Horizontal associado ao arrasto linear .....**	**20**
2.1.2	**Componente Vertical associado ao arrasto linear .....**	**23**
2.1.3	**Lançamento de projétil sob arrasto linear .....**	**24**
2.2	DINÂMICA DE UM CORPO RÍGIDO: ROLAMENTO	27
3	**METODOLOGIA**	**34**
3.1	PRIMEIRO APARATO EXPERIMENTAL	34
3.2	SEGUNDO APARATO EXPERIMENTAL	39
4	**ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS**	**42**
4.1	ALCANCE EM FUNÇÃO DA FORÇA DE RETARDO	47
4.2	GRÁFICOS COMPARATIVOS: MODELO TEÓRICO CONSIDERANDO A RESISTENCIA DO AR E MODELO QUE IGNORA OS EFEITOS DA FORÇA DE ARRASTO	51
4.3	COEFICIENTE ASSOCIADO AO MOMENTO DE INÉRCIA	57
5	**CONSIDERAÇÕES FINAIS**	**61**
	REFERÊNCIAS	**63**
	APÊNDICE A – DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES	**66**

1 INTRODUÇÃO

A ciência busca compreender os fenômenos da natureza por meio da elaboração e, de forma gradual, no aprimoramento de teorias que estão mais adequadas na descrição desses fenômenos e que procuram expor uma aproximação plausível da realidade baseada nos dados experimentais coletados. De acordo com Bassanezi (2016, pp.17-19), a partir dessas formas de descrição fenomenológica, avançamos no conhecimento sobre os processos naturais, organizando um método sistemático com ideais, abstrações, representação gráfica que interpretam dados e exprimem informações com detalhes complexos, significativos no campo lógico-matemático, com uma linguagem objetiva, que facilite e racionalize o pensamento, procurando substituir a visão simplista e ingênua por uma postura crítica e mais abrangente. Com base nisso, especificamente no contexto educacional, o estudante poderia, mediante o aprendizado dos conceitos e na interação com outros discentes, utilizar-se das teorias científicas para analisar os processos naturais e a sua própria realidade em âmbito sócio-educacional, instigando, assim, a sua postura crítica frente a realidade que o circunda. Todavia, a educação formal tradicional não tem proporcionado motivação para uma eficaz construção do aprendizado dos educandos. BRASIL (2002) mostra que, para os Parâmetros Curriculares Nacionais, "*o ensino de Física tem-se realizado frequentemente mediante a apresentação de conceitos, leis e fórmulas, de forma desarticulada, distanciados do mundo vivido por estudantes e professores*", gerando certas dificuldades, a exemplo da falta de dinamismo para construção e desenvolvimento do conhecimento e baixa interação dos discentes na sala de aula.

Uma proposta para contorno dessa situação é o uso de atividades lúdicas associadas com problemas investigativos assim como sugere a Base Nacional Comum Curricular. Segundo o documento *"o processo investigativo deve ser entendido como elemento central na formação dos estudantes, em um sentido mais amplo, e cujo desenvolvimento deve ser atrelado a situações didáticas planejadas ao longo de toda a educação básica, de modo a possibilitar aos alunos revisitar de forma reflexiva seus conhecimentos e sua compreensão acerca do mundo em que vivem*. " (BRASIL, 2017, p.318). Para Castellar (2016), o ensino por investigação caracteriza-se "*como uma prática em que os estudantes se engajam na resolução de um problema e se envolvem com alguns aspectos de natureza da ciência*" (CASTELLAR, 2016,

p.47). A partir disso, conforme Sasseron e Machado (2017), "*os estudantes desenvolvem melhor sua compreensão conceitual e aprendem mais acerca da natureza da ciência quando participam de investigações científicas porque por meio delas, oportunidades são criadas para que os alunos entrem em contato com elementos da cultura científica*". O trabalho prático, segundo Hodson(1994), "*nem sempre necessita incluir atividades que se desenvolvam em banco de laboratório*". Ou seja, há alternativas experimentais simples que demonstrem o conceito físico de forma prática.

A investigação, portanto, associada com modelagem de fenômenos e interação com o lúdico, possibilita problematizar tanto as formas de pesquisa quanto o aprendizado e sua aplicabilidade, tornando as aulas mais dinâmicas, explorar conceitos, análise de variáveis e de dados e que possibilitem a formulação de modelos teóricos simples e adequados relevantes no estudo da Mecânica Clássica a partir de dois experimentos usando brinquedos. Para que possamos atingir os objetivos, precisamos empregar uma metodologia alinhada a proposta de trabalho. O primeiro experimento consiste no lançamento de projéteis visto sob a ação de uma força de arrasto linear e, ao final, simplificar o modelo para as condições experimentais. Nesse aparato experimental foi usado uma pistola de brinquedo e bolas de plástico de mesma dimensão e de massa aproximada de 3 (três) gramas, diâmetro aproximado de 3,65 cm, volume aproximado de 25,5 cm^3 e densidade aproximada de 0,12 g/cm^3. A partir de um ângulo com a horizontal, primeiramente, sob os ângulos de 30 graus, posteriormente de 45 graus, 60 graus e, por fim, sob um ângulo de 75 graus, a esfera é ejetada da pistola com uma velocidade inicial v_0. Ao atingir a superfície, fica registrada uma marca na folha de papel sob o respectivo ângulo em relação a superfície horizontal. A distância, medida com uma trena, desse anteparo à extremidade da pistola fornece a posição x da esfera no instante do choque. A esfera foi lançada seis vezes. Ao final, foram catalogadas as coordenadas médias de cada ponto e calculados os valores esperados ou prováveis, que é a média aritmética entre os valores obtidos, de cada ângulo analisado. As etapas dos percursos são filmadas e com o auxílio do Tracker foi realizada a análise da trajetória do projetil. O segundo experimento, usando um ioiô acrílico, de massa aproximada de 26 gramas, diâmetro aproximado de 5,5 cm, diâmetro externo para personalização de 4 cm, a fim de analisar a dinâmica de corpos rígidos, conceito de rolamento e cálculo do coeficiente de momento de inércia desse ioiô e comparar os dados obtidos com o modelo teórico.

Nesse experimento, o ioiô é posicionado em uma na calha com comprimento de 1 metro, inclinada, inicialmente, 30º em relação a superfície e, a partir do repouso, soltá-lo. Mensura-se o tempo que o brinquedo gasta para atingir o final da calha. Esse procedimento é repetido, depois sob uma inclinação de 45º e logo após sob 60º, cinco vezes de maneira que seja obtido um valor médio do tempo de descida do ioiô para cada ângulo. Com base nas medidas anteriores, podem ser determinadas os valores experimentais da aceleração e da velocidade final do centro de massa do ioiô. Considerado que o brinquedo não desliza, foram calculados os valores experimentais da aceleração e da velocidade final do seu centro de massa.

Esses aparatos abordam conceitos vistos em mecânica através de materiais de baixo custo, buscando estimular no aluno experimentador, de acordo com os objetivos elencados por Bassanezi (2016, p.181), a construção de hipóteses, análise e validação de argumentos, instigar o discente à curiosidade epistemológica em relação à disciplina provendo uma aprendizagem significativa, a fim de converter as características usuais e correntes nas instituições formais de ensino para uma postura ativa, crítica, contextualizada, construtora de conhecimento, muito além dos processos sistemáticos e metódicos que o formalismo tradicional vem promovendo no sistema educacional vigente.

O nosso trabalho, cujo objetivo é expor duas propostas de modelagem matemática para discussão do ensino de física comparando os resultados obtidos experimentalmente com os valores teóricos previstos a fim de avaliar até que ponto podemos admitir com boa aproximação se os modelos matemáticos encontrados podem ser discutidos nas diferentes modalidades de ensino, está dividido em quatro partes principais que está esboçado a seguir:

No segundo tópico, a fundamentação teórica, apresentamos a definição, aplicações e as etapas do processo de modelagem matemática, além de sua importância no contexto científico e duas propostas de modelagem na descrição de dois experimentos, montagem, verificação das variáveis de contorno e resolução das equações diferenciais que regem o comportamento fenomenológico, após a resolução dos modelos temos uma discussão dos casos gerais, importantes para o contexto da educação superior e o caso particular que sugere aplicabilidade na educação básica.

No terceiro tópico, tratamos sobre a metodologia usada na confecção dos aparatos experimentais que originaram os exemplos de modelagem do segundo tópico, relatamos os recursos e materiais usados, as etapas de funcionamento de

cada experimento e procedimento para coleta de dados e o tratamento estatístico usando Tracker e Scidavis para posterior análise interpretativa e suas consequências na validação do processo de modelagem matemática.

No quarto tópico, tratando sobre os resultados e discussões dos valores alcançados, apresentamos os resultados obtidos experimentalmente dos dois experimentos dispostos em tabelas e gráficos a fim de que possam ser analisados com os valores teóricos previstos pelas equações descritas na fundamentação teórica, examinamos o erro relativo do valor da aceleração g fornecida pelo Scidavis em relação ao valor calculado da aceleração da gravidade em Belo Jardim, formulamos hipóteses para os poucos casos que apresentaram taxas de variação altas em relação às demais etapas do experimento objetivando, assim, validação ou reavaliação dos modelos matemáticos encontrados. No geral, os resultados experimentais apresentaram-se numa margem de confiabilidade razoável. Embora tenham havido algumas variações relacionadas a erros associados ao experimento ou imprecisão instrumental, as considerações feitas possibilitam aplicação experimental no contexto educacional onde não são exigidas uma linguagem matemática rigorosa e com resultados obtidos razoáveis dentro da proposta de estudo.

O uso experimental de materiais de baixo custo pode elucidar o aprendizado dos conceitos associados a posição, velocidade, altura máxima, alcance previsto, forças que envolvem o sistema físico e coeficiente associado ao momento de inércia. O trabalho busca incentivar a análise crítica entre os valores teóricos com os obtidos experimentalmente, mostrando assim a importância das etapas da modelagem nas ciências experimentais (Bassanezi, 2016, pp.26-31). A validação experimental possibilita a inserção do estudo da modelagem matemática como proposta de ensino de física no contexto do ensino superior, gerando interação e discussão em disciplinas básicas do eixo comum, aplicações nas disciplinas de cálculo e experimentais, evidenciando, assim, a relevância desse tema na formação docente e discente e na busca de alternativas para uma ação pedagógica que se mostre eficiente no desenvolvimento de processos de aprendizagem significativa (Bassanezi, 2016, pp.179-181).

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este tópico apresenta os conceitos e as teorias relevantes para o entendimento das propostas de modelagem matemática a partir de experimentos com brinquedos, o funcionamento de cada experimento e discussão física dos resultados experimentais esperados e validação do processo de modelagem matemática.

Bassanezzi (2004) define Modelagem Matemática como “um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de prever tendências. Portanto, consiste na transformação da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual”.

Nas pesquisas científicas, conforme argumenta Bassanezi (2016, p.19), o instrumento indispensável para que teorias fenomenológicas fundamentais possam ser estabelecidas é a linguagem matemática. Ou seja, uma teoria científica reconhecida é expressa matematicamente. Com isso, é possível afirmar que a Física está, em seus aspectos teóricos, amplamente matematizada, bem como também as consequentes analogias em seus diversos subtemas. A descrição do comportamento de algum sistema físico ocorre por meio da utilização de relações que envolvem taxas de variação, leis, quer sejam empíricas ou experimentais, ou princípios. Nesse processo, é comum selecionarmos variáveis essenciais e formalizá-lo por meio de um sistema artificial: o modelo. Alguns exemplos dessas descrições são vistos no estudo da taxa segundo a qual o corpo varia a sua temperatura, proporcional a temperatura do corpo e a temperatura do meio ambiente; o estudo das Leis de Kirchhoff com o intuito de realizar previsões teóricas de como ocorre a variação temporal da carga e o estudo da relação entre a corrente e a carga no capacitor, resistor ou indutor; o estudo de corpos em queda livre considerando a resistência do ar, dentre outros.

A Modelagem Matemática é um procedimento não-estático realizado a partir de etapas sequenciadas. De acordo com Bassanezi (2016,pp.26-30), a primeira atividade intelectual da modelagem é a experimentação, onde se processa a obtenção dos dados; Posteriormente, a abstração, que leva a formulação dos modelos matemáticos a partir da seleção de variáveis inter-relacionadas, a formulação de hipóteses, a criação de analogia de sistemas, que é fundamental para a formulação e desenvolvimento de modelos, a simplificação por meio de restrições as informações

do sistema, de modo que não desfigure o modelo a fim de torná-lo um problema matemático tratável. Outra etapa importante é a resolução, na qual podem ser obtidas as equações contínuas que interpretam as variações das quantidades essenciais ao problema proposto. Depois disso, os modelos e as hipóteses podem ser confrontados com os dados empíricos, comparando as soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real. Nessas soluções, o grau de aproximação será fator importante para a sua validação, que é a quarta etapa. É possível que durante esse processo, fatores como a falta de previsões corretas, por erros experimentais ou devido a hipóteses verdadeiras e insuficientes façam com que o modelo não seja validado e, portanto, seja preciso, na quinta etapa, modificá-lo. O estudo dessas sequências mostra que o aprofundamento de uma determinada teoria implica na reformulação dos modelos. As observações são acumuladas de forma que suscitem novos questionamentos, ou seja, não é permitido que o modelo seja considerado definitivo, e, portanto, é possível o aprimoramento. Um bom modelo proporciona a formulação de novos modelos.

Segundo Bassanezi (2016, p.31), o processo de modelagem mostra eficiência a partir do momento que o modelador tem consciência que está trabalhando com representações de um sistema, seja total ou parcial, que o permite realizar previsões, refletir, explicar e aplicar decisões naquele contexto que o procedimento está inserido. Esse método é apresentado neste trabalho como uma proposta de ensino aprendizagem compatível com a estrutura cognitiva e estágio de desenvolvimento dos educandos, a fim de estimular alunos e professores a desenvolverem suas próprias habilidades como modeladores. Do nível médio ao superior, a partir das evidências experimentais e disposição desses dados e ajuste de seus valores proporcionarão uma melhor visualização fenomenológica em estudo, a formulação de questões, propostas de problemas e formulação de hipóteses e possível elaboração de leis de formação. A transposição dessas etapas leva a formulação de modelos matemáticos.

O processo de modelagem inicia-se com a escolha do tema que será estudado. Neste trabalho, é explorado conceitos da Mecânica Clássica, buscando descrever mediante um conjunto de leis físicas que expressam uma modelagem matemática plausível dos movimentos dos corpos. E ao ser estudado sob a perspectiva das equações diferenciais permitirá que o modelo objeto seja analisado e dele seja possível extrair informações peculiares, interpretá-lo, e propor analogias a outros sistemas. A proposta consiste em dois exemplos de modelagem matemática a partir de experimentos usando brinquedos infantis, a saber, o lançamento de projéteis sob

a ação de uma força de arrasto linear e o processo de dinâmica de corpos rígidos em um movimento de rolamento sem considerar deslizamento a fim de encontrar o coeficiente de momento de inércia de um ioiô e comparar os dados obtidos com os modelos existentes. Caso essas implicações sejam verificadas e confirmadas pelo experimento, o postulado é denotado como lei física. Se essas inferências são incoerentes com as previsões teóricas, exclusos os casos por erros associados ao experimentador ou inerentes ao experimento, a teoria poderá ser modificada para tornar-se consistente aos fatos.

Conforme Thornton e Marion (2011, p.43), em termos modernos, a expressão das leis de Newton é suficiente para discussão da dinâmica clássica. Conceitos como distância e tempo são fundamentais nessas discussões clássicas. A partir da combinação desses termos, definimos os conceitos da velocidade e a aceleração de uma partícula ou sistema. Além de fazer uma conexão entre a massa e a inércia de um corpo. O vetor velocidade tem uma tendência natural a ser constante. E isso tem relação com a inércia. E a massa é a forma de quantificar essa inércia. Outro conceito importante é o de força que, muitas vezes, está relacionado a uma ação que altera a velocidade de um corpo. Vale salientar que esses termos são válidos em referenciais inerciais. Nesses referenciais, um objeto sobre o qual não tenha ação de nenhuma força, o vetor velocidade apresenta-se constante. Essa primeira lei implica dizer que existe, pelo menos, um referencial inercial. Consequentemente, qualquer referencial que se mova com velocidade constante em relação ao primeiro, também é referencial inercial. Uma segunda lei, nesse referencial inercial, expressa que a resultante das forças que atua sobre um sistema físico com massa constante provoca uma variação no seu momento linear. Esse conceito de momento linear é expresso por

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{1}$$

em outras palavras, num contexto da mecânica clássica e de referencial inercial, para massa constante, a segunda lei de Newton é expressa por

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{2}$$

ou ainda, pode ser relacionada como

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\,\vec{a} \tag{3}$$

embora a Terra esteja em movimento de translação e rotação, e portanto, o referencial está em movimento acelerado, a precisão dos experimentos realizados neste trabalho é pequena, oferecendo suporte para que a superfície do planeta seja considerada aproximadamente um bom referencial inercial para muitos dos problemas cotidianos mostrando que, em parte dos problemas abordados em mecânica, é possível obter as forças que atuam sobre o objeto, identificar as variáveis que provocam a evolução do sistema ao longo de um tempo t e elaborar um conjunto de hipóteses plausíveis descrevendo-as, conforme Zill (2011), em termos de uma equação diferencial ou um sistema de equações no qual é possível optar por não incluir todas as variáveis existentes devido ao nível de resolução, transformando, assim, um problema físico em um problema matemático cuja solução está na resolução da equação diferencial e cuja validação é condicionada na escolha de variáveis e formulação de hipóteses. Para alguns objetivos, a exemplo da aplicação dessa estratégia em um contexto educacional como veremos no quarto tópico, é razoável aceitar modelos de baixa resolução. Um exemplo seria a força retardadora de atrito com o ar, que em muitas situações, pode ser desprezada na modelagem do movimento de um corpo em queda livre estando próximo a superfície terrestre. Em contrapartida, em um contexto mais amplo, se um cientista necessita prever o percurso de um míssil, é necessário considerar a resistência do ar e a curvatura do planeta.

Na próxima seção, que trata da fundamentação teórica para o primeiro experimento, está exposto o processo de modelagem matemática do fenômeno físico de lançamento de projeteis. De forma prática, propostas investigativas podem ser modeladas a fim de encontrar a resolução do problema: em se tratando do movimento de um projétil em duas dimensões, calculemos o alcance desse móvel em um meio no qual a força de retardo é diretamente proporcional à velocidade. Iremos considerar, inicialmente, a velocidade do projétil no instante da ejeção como v_0 e o ângulo de elevação como θ. Após a modelagem, calcularemos a trajetória de um projétil real, utilizando uma pistola e uma esfera de plástico com massa de 5 g. Coletamos dados referente ao alcance médio e, por meio do Tracker, encontramos a velocidade inicial da bola de plástico no momento da ejeção em quatro situações de inclinação da pistola

em relação ao solo: 30°, 45°, 60° e 75°. Calculamos, pelo método da perturbação (THORNTON E MARION,2011, p.59), os valores de alcance e lançamos no gráfico como uma função da força de retardo constante k. Fizemos o gráfico da altura y *vs* a distância horizontal x tanto considerando quanto ignorando a resistência do ar e fizemos a comparação entre eles. Após a construção e resolução desse modelo, será analisada a possibilidade da aplicação desse modelo em um contexto educacional com o intuito de verificar a razoabilidade da aceitação de um modelo no qual a força retardadora de atrito com o ar pode ser desprezada na modelagem do movimento desse corpo em questão.

2.1 PROJÉTIL SOB ARRASTO LINEAR

De acordo com Sá Martins (2017), escrevemos a equação de movimento (e desenvolvemos a solução do problema no Apêndice A) que envolve um corpo se movendo em um fluído sob a ação gravitacional e sob a ação de uma força de resistência que está associada a viscosidade desse fluído, a força de arrasto linear. Conforme a Segunda Lei de Newton, escrevendo em uma equação diferencial de primeira ordem, temos

$$m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - b\vec{v} \tag{4}$$

esse problema pode ser decomposto em coordenadas cartesianas de modo que, essas componentes não interferem uma na outra. Antes de resolver o problema completo, é possível a resolução de cada componente como se fosse um problema em si. Temos como referencial um plano cartesiano cuja coordenada y é vertical e assim paralela ao vetor $\vec{g}$ e adotamos a coordenada x como horizontal.

2.1.1 Componente Horizontal associado ao arrasto linear

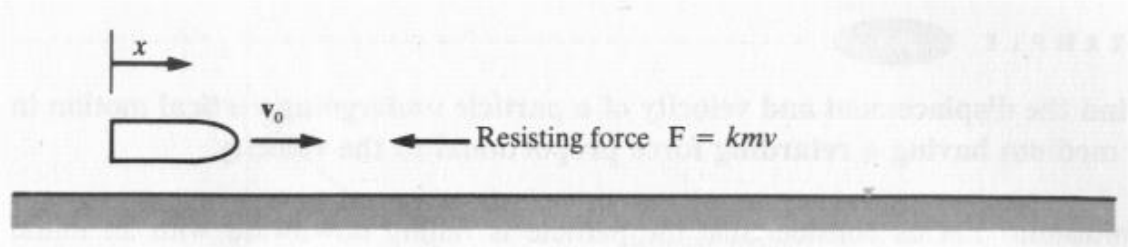

Figura 1. Movimento resistivo de uma partícula na componente horizontal
Fonte: THORNTON e MARION (2011,p.54)

A partir da imagem, encontraremos a velocidade e o deslocamento de uma partícula que se encontra em movimento horizontal em um meio que tem uma força de arrasto proporcional à velocidade. A componente x pode ser vista dessa forma

$$m\dot{v_x} = mg_x - bv_x \tag{5}$$

de acordo com Sá Martins (2017), como não há interferência da componente x no vetor g e adotando condições de contorno, tempo inicial sendo zero e a posição inicial do objeto sendo na origem e associado com uma velocidade inicial v_{x_0} , a equação de movimento mostra que

$$\dot{v_x} = -\frac{b}{m}v_x \tag{6}$$

e denotando o termo constante, a razão da constante b e massa m, de k, a expressão (6) torna-se

$$\dot{v_x} = -k\,dt \tag{7}$$

a seguir, está a solução da equação (7) como sendo uma variável v_x expresso como uma função de t. O desenvolvimento dessa solução encontra-se no primeiro tópico do apêndice A ao final deste trabalho.

$$v_x\,(t) = v_{x_0}e^{-kt} \tag{8}$$

integrando a equação da velocidade em função do tempo, encontramos a equação horária da posição em função do tempo. A resolução mais detalhada encontra-se no primeiro tópico do apêndice A. Assim,

$$x\,(t) = \frac{v_{x_0}}{k}\,(1 - e^{-kt}) \tag{9}$$

a partir de uma análise dimensional da expressão (9), notamos que o inverso de k tem dimensão de tempo. Sá Martins (2017) argumenta que uma combinação de relevantes parâmetros cuja dimensão é temporal, implica que a análise das características dos casos nos quais referem-se as suas escalas de tempo possa ser classificada em pequeno ou grande, e com isso, tenha sentido físico. A relevância desse termo denominado tempo característico τ torna-se mais evidente mediante estudo do seu valor associado. Se τ é grande, a exponencial decai lentamente e se for pequeno, decai muito rápido. Em um tempo experimental muito pequeno, como é o caso da primeira proposta, é possível usarmos a expansão polinomial da exponencial com duas parcelas

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{t}{\tau} \tag{10}$$

ao substituirmos essa expansão polinomial, com duas parcelas e para t pequeno, a equação (8) torna-se

$$v_x\,(t) \sim v_{x_0} - \frac{v_{x_0}}{\tau}\,t \tag{11}$$

o desenvolvimento dessa e da próxima solução encontram-se no segundo tópico do apêndice A. De acordo com Sá Martins (2017), essa expressão sugere uma dependência linear da velocidade com o tempo. Para t pequeno, o termo $\frac{v_{x_0}}{\tau}$ pode ser considerado como uma aceleração. Então, no início do movimento, numa aproximação de primeira ordem, a velocidade é constante e logo depois aparece um movimento com aceleração constante. Analogamente, desenvolvemos o raciocínio de expansão polinomial de uma exponencial e aplicando-a na equação da posição em função do tempo (9), encontramos

$$x\,(t) \sim v_{x_0} t\; - \frac{v_{x_0} k}{2}\; t^2 \tag{12}$$

o primeiro termo é o produto de uma velocidade constante com tempo externo e o segundo termo é um termo de dependência quadrática e sugerindo aceleração constante.

2.1.2 Componente Vertical associado ao arrasto linear

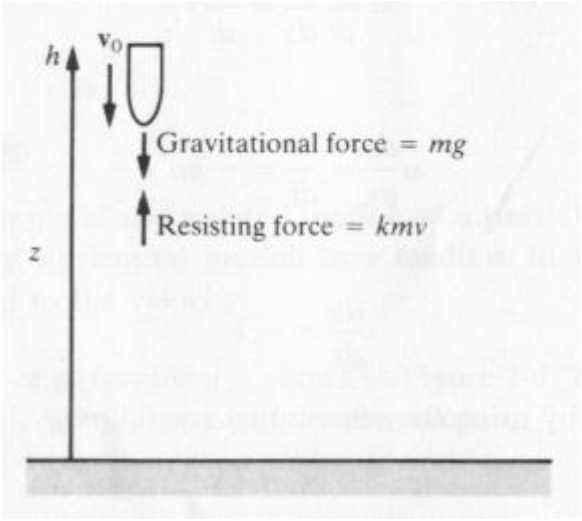

Figura 2. Movimento resistivo de uma partícula na componente vertical
Fonte: THORNTON e MARION (2011,p.55)

A partir da imagem, encontraremos o deslocamento e a velocidade de uma partícula que se encontra em movimento vertical em um meio que tem uma força de arrasto proporcional à velocidade. Com o eixo de orientação para baixo, a expressão da componente vertical pode ser escrita da seguinte forma

$$\dot{v_y} = \; g - \frac{b}{m} v_y \tag{13}$$

conforme Sá Martins (2017), a expressão (13) sugere que $\dot{v_y}$ vai diminuindo à medida que v_y cresce. Em um movimento de queda de um corpo a partir do repouso, v_y vai aumentando a tal ponto que chegará um momento que $\dot{v_y}$ torna-se nulo. Fisicamente,

então, a aceleração é nula, e partir daí, v_y torna-se constante. Então, na presença de um arrasto linear, no movimento de queda livre, a velocidade do móvel é crescente e apresenta um limite. É possível que o tempo de queda seja suficientemente pequeno para que esse limite não seja alcançado. Em vista disso, iremos denotar essa velocidade constante v_y como velocidade terminal do movimento de queda. Assim,

$$v_{ter} = \frac{mg}{b} \tag{14}$$

e ao multiplicarmos ambos os lados da equação (13) pelo fator temporal $\frac{m}{b}$, podemos reescrevê-la como

$$\frac{m}{b}\dot{v_y} = \ v_{ter} - \ v_y \tag{15}$$

A solução da equação (15) da componente y da velocidade é escrita como

$$v_y(t) = \ v_{ter} + (v_{y_0} - \ v_{ter})e^{-kt} \tag{16}$$

A fim de explorar situações referentes a posição variando em relação ao tempo, integramos a (16), componente vertical da velocidade. A posição passa a ser obtida pela expressão

$$y\ (t) \ = \ \ y_0 + \ v_{ter}\ t - (v_{y_0} - \ v_{ter})\frac{1}{k}\ \ (e^{-kt} - 1) \tag{17}$$

2.1.3 Lançamento de projétil sob arrasto linear

Esta seção oferece elementos suficientes para discussão em sala de aula as relações do alcance com ângulo de lançamento θ. Por exemplo, podemos estudar o que acontece com o alcance R quando o ângulo de lançamento está aumentando, útil no estudo de lançamento de pesos ou a relação do alcance com ângulos complementares.

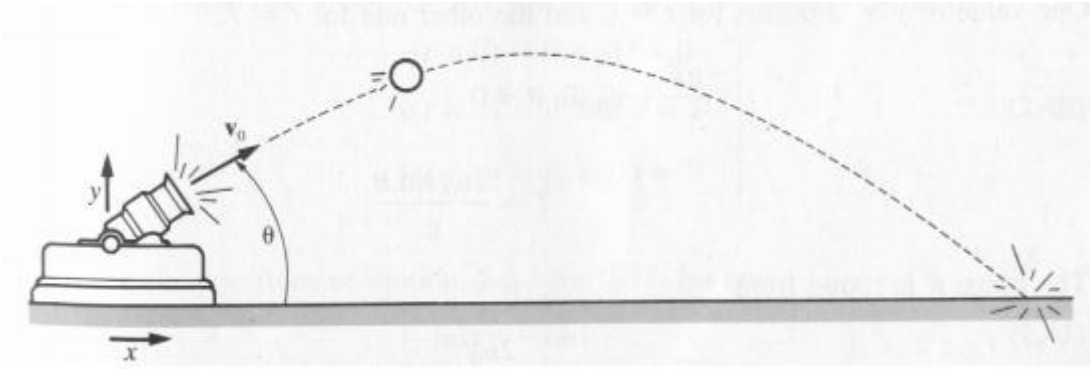

Figura 3. Movimento uma partícula em duas dimensões
Fonte: THORNTON e MARION (2011,p.57)

Baseado nessa imagem, trataremos o movimento do projétil em duas dimensões, e faremos o cálculo do alcance do projétil. O quarto tópico do apêndice A apresenta maiores detalhes desses cálculos. De acordo com Sá Martins (2017), a equação da trajetória do projétil pode ser obtida mediante combinação das equações (9) e (17) encontradas anteriormente. Admitimos que no início do movimento, o projétil sai da origem. E com o objetivo de isolar a variável t da equação (9) e conforme Sá Martins (2017), denotando $\frac{x}{x_\infty} = (1 - e^{-kt})$, isolamos a variável t

$$t = -\frac{1}{k} ln\left(1 - \frac{x}{x_\infty}\right) \tag{18}$$

e substituindo (18) na equação (17) e lembrando que $k = \frac{b}{m}$ e $x_\infty = v_{x_0}\tau = \frac{v_{x_0}}{k}$ a equação $y(x)$ é expressa como

$$y(x) = \left(\frac{v_{y_0} + v_{ter}}{v_{x_0}}\right)x + \frac{v_{ter}}{k} ln\left(1 - \frac{x}{x_\infty}\right) \tag{19}$$

a análise de Sá Martins (2017) nos elucida que, na coordenada x, a distância percorrida tem um limite e consequentemente a trajetória tem uma assíntota na vertical. Logo no início do movimento, há uma coincidência na trajetória do vácuo. Mas depois, a trajetória vai se diferenciando da curva obtida na trajetória no vácuo. O projétil acaba não alcançando uma altura grande porque a aceleração com que é freado é maior do que a aceleração gravitacional g. Observa-se também que a equação da trajetória é uma equação transcendente visto que há uma expressão de

logaritmo inserido. Um dado importante que se pode extrair dessa equação é o alcance R. Em lançamentos de projéteis, a distância percorrida segundo a horizontal chama-se alcance. Esse valor é encontrado impondo a condição que uma substituição feita no lugar do x resulta $y = 0$, ou seja, $Y\,(x = R) = 0$. Substituindo essa condição na equação (19), a equação pode ser escrita na forma

$$\left(\frac{v_{y_0} + v_{ter}}{v_{x_0}}\right) R + \frac{v_{ter}}{k} ln\left(1 - \frac{R}{x_\infty}\right) = 0 \tag{20}$$

a equação (20) não tem solução analítica. Portanto, para verificar se há como solucionar é necessário admitir como hipótese, e depois averiguar, se com $\frac{R}{x_\infty} \ll 1$, o resultado da equação torna-se aceitável. Então, aplicando a expansão de Taylor em (20), a equação da trajetória fica, portanto,

$$R = R_{vac}\left[1 - \frac{4}{3}\frac{v_{y_0}}{v_{ter}}\right] \tag{21}$$

onde

$$R_{vac} = \frac{2 v_{x_0} v_{y_0}}{g} \tag{22}$$

a partir de (21), é possível construir iterações, procedimentos repetitivos que geram valores de R cada vez mais precisos. A sequência de aproximações são cada uma dependente da etapa anterior. A expressão é semelhante ao alcance em função da força de retardo k apresentado pelo método da perturbação em THORNTON E MARION (2011, p.61). Nota-se que R < R_{vac}. A correção depende apenas de $\frac{v_{y_0}}{v_{ter}}$ ou seja, se esse termo é muito menor que 1, o arrasto é muito pequeno e pode ser ignorado. Ou seja, na ordem zero, para o caso particular onde considera-se o alcance do projétil não sofrendo efeitos da resistência do ar, obtém-se

$$R = R_{vac} \tag{23}$$

Na próxima seção, está exposto o processo de modelagem matemática do fenômeno físico associado ao rolamento de corpos rígidos. A segunda proposta investigativa será modelada a fim de encontrar a resolução do problema: em um rolamento considerando-o sem deslizamento, calculemos a velocidade e aceleração do centro de massa de um ioiô e o seu parâmetro β associado ao momento de inércia. Após a construção desse modelo, é analisada a sua aplicação em um contexto educacional a fim de verificar a razoabilidade e aceitação desse modelo quando comparados os valores obtidos com os valores esperados.

2.2 DINÂMICA DE UM CORPO RÍGIDO: ROLAMENTO

Outra aplicação interessante dos conceitos da Mecânica Clássica é no sistema chamado corpo rígido. Conforme Sá Martins (2017), trata-se de um aglomerado de partículas, no qual a distância entre pares dessas partículas nunca seja alterada. Nesse sistema, a princípio, é admitido que não há deformação. Ou seja,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\left|\vec{r}_{\alpha}-\vec{r}_{\beta}\right|\right)=0 \tag{24}$$

onde α e β indicam as partículas existentes nesse sistema em particular. Essa expressão sugere que a orientação pode até mudar, mas o tamanho do $r_{\alpha}-r_{\beta}$ não muda. Em um corpo rígido, as forças Inter atômicas centrais são nulas. Ou seja, a parcela interna da energia potencial será constante. Portanto, será contado somente, para efeito da força total, a energia potencial externa devido a fatores externos que influenciam o sistema. Então,

$$U=\sum_{\alpha=1}^{N} U^{ext}\left(\vec{r}_{\alpha}\right) \tag{25}$$

e de acordo com Copelli (2015), para calcularmos a energia cinética de um corpo rígido em rolamento, é preciso, inicialmente, estabelecer os parâmetros de posição linear.

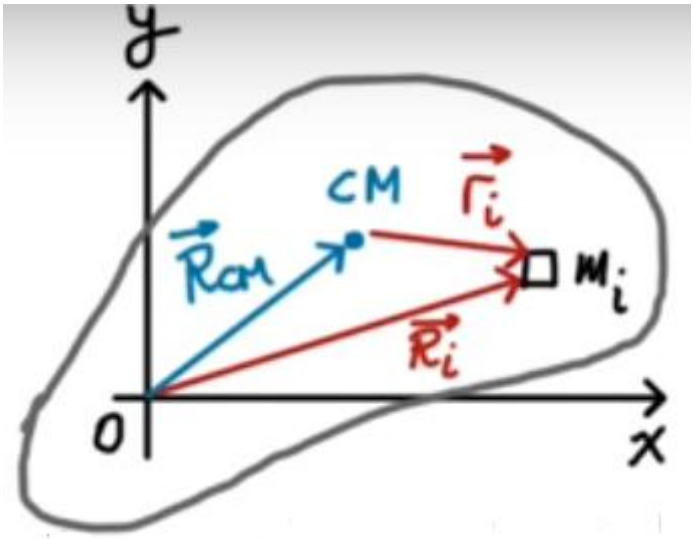

Figura 4. Representação de um corpo rígido
Fonte: Copelli (2015,videoaula 11.2)

A partir dessa imagem, conforme Copelli (2015), supondo que exista um corpo rígido genérico girando em torno de um ponto que passa na origem O de um plano cartesiano. Cada integrante das massas m_i tem vetor posição $\vec{R}_i$ em relação ao ponto O. $\vec{\mathrm{R}}_{CM}$ é o vetor posição do centro de massa do corpo em relação a origem O e $\vec{\mathrm{r}}_i$ é o vetor posição da massa m_i em relação ao centro de massa. Esses três vetores, então, satisfazem a seguinte relação

$$\vec{R}_i = \vec{\mathrm{R}}_{CM} + \vec{\mathrm{r}}_i \tag{26}$$

A taxa de variação temporal dessa expressão (26) é dada por

$$\vec{V}_i = \vec{\mathrm{V}}_{CM} + \vec{v}_i \tag{27}$$

na qual, $\vec{v_i}$ é a e velocidade de m_i em relação ao centro de massa. A energia cinética E_c desse corpo rígido, então, pode ser escrita, de acordo com Copelli(2015)

$$E_c = \frac{1}{2} M \mathrm{V}_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 \tag{28}$$

onde M é a massa total do corpo e a velocidade considerada é a do centro de massa. O desenvolvimento para se chegar a (28) encontra-se no quinto tópico do apêndice

A. No caso particular do rolamento sem deslizamento, é possível reescrever a energia cinética do corpo rígido em função apenas da velocidade do centro de massa ou apenas da velocidade angular.

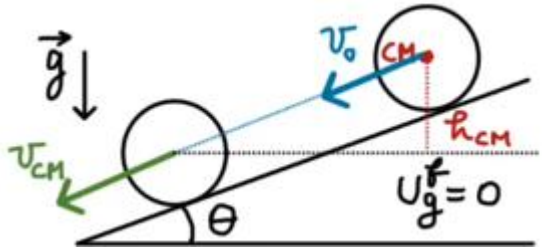

Figura 5. Representação de um corpo rígido
Fonte: Copelli (2015,videoaula 11.3)

A partir dessa imagem, iremos considerar, de acordo com Copelli (2015), um corpo rígido que possui um centro de massa O e o seu movimento será analisado, considerando um rolamento sobre um plano inclinado supondo sem deslizamento. Isso implica dizer que a força de atrito é estática. Como o ponto de contato está em repouso instantâneo, a potência do atrito é $F_{at} \, . v = 0$ e a partir disso, infere-se que a força de atrito, cujo papel é converter energia cinética de translação em rotação, não realiza trabalho e isso é condição suficiente para garantir que a energia mecânica do sistema seja conservada. Conforme Campos, Alves e Speziali (2008, p.64), o ioiô gira com velocidade angular ω em torno de seu eixo, enquanto seu centro de massa se desloca com velocidade $v = \omega r$ onde r é a distância do centro de massa ao ponto de contato com a superfície. Campos, Alves e Speziali (2008, p.67) ainda argumentam que esse movimento de rotação e translação combinados, denotado rolamento, são muito comuns no dia a dia, como por exemplo, as rodas dos veículos rodam ao mesmo tempo que se deslocam para a frente ou para trás. Campos, Alves e Speziali (2008, p.67) expõem que objetos com distribuição de massa com simetria cilíndrica ou esférica tem o momento de inércia dado pela expressão

$$I = \beta M R^2 \tag{29}$$

em que M é a massa do ioiô, R é o seu raio e β é o parâmetro que depende apenas da simetria de distribuição de massa do objeto que teoricamente é igual a 1/2 pra cilindro.

Portanto, nesse caso quando supomos rolamento sem deslizamento, é possível usar o teorema da conservação da energia mecânica mesmo quando há força de atrito não-nula, que está melhor detalhado no sexto tópico do apêndice A, que nos fornece a seguinte equação

$$\frac{1}{2}v^2\left(1+\frac{I_{CM}}{MR^2}\right)=\frac{1}{2}{v_0}^2\left(1+\frac{I_{CM}}{MR^2}\right)+Mgh_{CM} \tag{30}$$

se $h_{CM}=L\,sen\,\theta$ onde L é a distância percorrida pelo objeto no plano inclinado, então a velocidade final com que o corpo chega no final da trajetória.

$$v_{CM}=\sqrt{v_0^2+\frac{2\,g\,sen\theta}{\left(1+\frac{I_{CM}}{MR^2}\right)}\,L} \tag{31}$$

ou

$$v_{CM}=\sqrt{v_0^2+\frac{2gsen\theta}{(1+\beta)}\,L} \tag{32}$$

onde L é a distância percorrida pelo móvel e g é a aceleração da gravidade. De acordo com Campos, Alves e Speziali (2008, pp.66-68), nessa expressão, a velocidade com que um corpo de seção circular atinge o final da rampa não depende de sua massa ou raio, mas apenas da maneira como essa massa é distribuída em torno de um eixo central, que passa pelo centro de massa. Considerando a força de atrito a mesma durante o percurso, a força resultante sobre o móvel e também a aceleração serão constantes. Isso possibilita o cálculo da velocidade e da aceleração de acordo com as equações da cinemática para o movimento uniformemente variado. Tanto a aceleração quanto a velocidade do centro de massa do ioiô estarão relacionadas com a distância percorrida e o tempo gasto pelo brinquedo para percorrê-la.

$$x=\frac{1}{2}\,a_{CM}\,t^2 \tag{33}$$

$$v_{CM}=a_{CM}\,t \tag{34}$$

Buscando aprimorar o estudo referente ao movimento de rolamento, um caso interessante e muito importante consiste na análise das forças envolvidas nesse movimento de sistemas não tracionados.

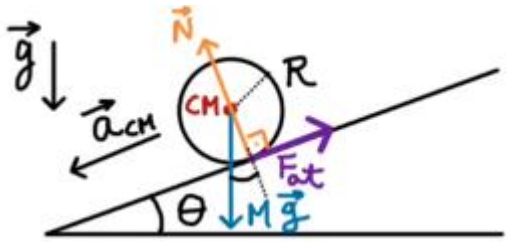

Figura 6. Representação de um corpo rígido
Fonte: Copelli (2015,videoaula 11.3)

A partir da figura 6, conforme argumenta Copelli (2015), podemos fazer a análise do movimento de um corpo de secção transversal circular de raio R, massa M, momento de inércia em relação ao centro de massa I_{CM} e supondo que esse corpo rígido esteja rolando sem deslizar sob a interação da aceleração gravitacional g constante sobre um plano inclinado com ângulo θ. A partir desses dados, é possível calcular a aceleração do centro de massa e a força de atrito. É preciso, inicialmente, identificar as forças agindo sobre o sistema. São evidentes as ações da força peso apontando pra baixo, força normal para cima e força de atrito paralela ao plano e contrária ao sentido convencional do movimento, ou seja, plano acima. Conforme Copelli (2015), pela Segunda lei de Newton, o movimento de translação é visto da seguinte maneira

$$Ma_{CM} = Mgsen\theta - F_{at} \tag{35}$$

supondo que não há deslizamento, a força de atrito é estática. Assim, o valor associado a ela pode ser encontrada através das leis de Newton. Esse problema apresenta duas incógnitas, a aceleração do centro de massa e a força de atrito estático. Então, para resolver esse sistema, é preciso obter mais uma equação que será encontrada a partir da Segunda Lei de Newton para rotações. Para isso, reconhecemos que o problema sugere que o torque da força peso é nulo porque a força peso está sendo aplicada no próprio centro de massa. O torque da força normal também é nulo porque a força normal está sendo aplicada apontando para o eixo. Já

o torque associado a força de atrito é calculável porque o ponto de aplicação da força em relação ao eixo está a uma distância R e a um ângulo de 90 graus. Portanto,

$$\tau_{res} = \tau_{F_{at}} = F_{at}\, R = I_{CM}\alpha \tag{36}$$

supomos, no caso particular, considerar que não ocorre deslizamento, então

$$\alpha = \frac{a_{CM}}{R} \tag{37}$$

substituindo-a na equação (36), associada a força de atrito, é encontrada a seguinte expressão

$$F_{at} = \frac{a_{CM} I_{CM}}{R^2} \tag{38}$$

aplicando a expressão (38) da força de atrito na Segunda Lei de Newton para translação (35), é encontrada a relação

$$a_{CM} = \frac{g\ sen\theta}{\left(1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}\right)} \tag{39}$$

Copelli (2015) esclarece que uma análise qualitativa do termo $\frac{I_{CM}}{MR^2}$ evidencia que quanto maior for o momento de inércia em relação ao centro de massa, menor será a aceleração do corpo rígido em torno do centro de massa. O movimento continua sendo uniformemente acelerado, mas a aceleração é reduzida pelo fator no denominador da equação em relação à do deslizamento puro devido a energia cinética adicional de rotação que tem que ser gerada.

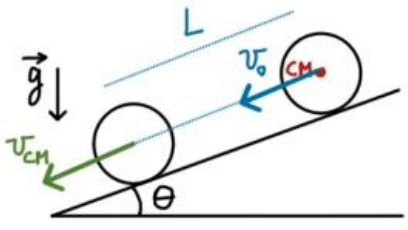

Figura 7. Representação de um corpo rígido

Fonte: Copelli (2015,videoaula 11.3)

De acordo com a figura 7, no caso particular, se v(0) = v_0 , então, após percorrer uma distância L ao longo do plano, a velocidade do centro de massa será

$$v_{CM} = \sqrt{v_0^2 + \frac{2\ g\ sen\theta}{\left(1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}\right)}\ L} \tag{40}$$

Após a formulação desses modelos, é preciso identificar o método mais razoável para verificar se suas soluções são plausíveis com os dados experimentais objetivando conhecimento do comportamento ou da evolução temporal desse sistema.

No próximo tópico, as metodologias dos dois procedimentos experimentais estão descritas de modo que a construção, análise e verificação dessas propostas de modelagem matemática possam ser vistas como proposta alternativa para as modalidades do ensino de física.

3 METODOLOGIA

Nesta seção, estão descritas de forma minuciosa as maneiras de construção, análise e verificação das propostas de modelagem matemática como uma proposta alternativa para o ensino de física. Uma proposta é a modelagem matemática do lançamento de projétil usando uma pistola de brinquedo com uma esfera de plástico em seu interior e a outra proposta é a dinâmica de um ioiô sobre uma rampa inclinada.

3.1 METODOLOGIA PARA O PRIMEIRO APARATO EXPERIMENTAL

Inicialmente, foi necessário fazer um levantamento bibliográfico com o objetivo de aprofundamento teórico dos elementos conceituais sobre a temática escolhida. Para isso, usamos alguns artigos científicos, a exemplo de um publicado na revista brasileira de ensino de física: a variação da aceleração da gravidade com a latitude e altitude de um município, publicado por LOPES (2008), consultado para calcularmos, com os dados extraídos do site da prefeitura municipal, a gravidade local na cidade de Belo Jardim/PE. Outros artigos relacionados a ensino de física por investigação, Cogo e Leite (2019) e trabalho de laboratório, Hodson (1994); Página web sobre recurso computacional para videoanálises, o Tracker (Brown,2011), e aplicativo para cálculos estatísticos, o Scidavis, Standish (2017); Videoaulas disponibilizadas em canais do Youtube da disciplina de Mecânica Clássica ministrada pelo professor Jorge Sá Martins (2017) da UFF e Mauro Copelli (2015) da UFPE. Além desses recursos, foram analisados referenciais nas produções bibliográficas de Física Básica, Mecânica Clássica, Física Experimental Universitária e aplicada ao cotidiano com uso de materiais de baixo custo, bibliografias de Cálculo Diferencial, Equações Diferenciais e dois livros de Rodney Carlos Bassanezi sobre ensino aprendizagem com Modelagem Matemática.

O primeiro experimento consiste na proposta lúdica de modelagem matemática de um fenômeno no intuito de registrar e analisar o movimento de um projétil. Nessa análise, inicialmente, são definidos os ângulos de lançamento em cada situação e posteriormente, após ejeção, determinar o ponto de contato do projétil com a superfície do solo e com auxílio de recurso computacional disponibilizado no site do Laboratório Didático de Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, o software Tracker, é obtida a velocidade inicial do experimento.

PIACENTINI et al. (2008,p.27) argumenta que a maior parte das análises de dados consiste em se determinar uma expressão analítica ou um modelo matemático que melhor descreva um conjunto de resultados experimentais. O ajuste da curva aos dados experimentais pode ser feito pelo método dos mínimos quadrados a fim de achar a melhor curva que se ajusta a um conjunto de pontos experimentais, minimizando a soma dos quadrados das distâncias verticais dos pontos experimentais a reta que queremos encontrar. Esse procedimento pode demonstrar que a trajetória do objeto é parabólica, e que pode ser descrita por uma função $Y(x) = A*x^2 + B*x + C$ e, conforme PIACENTINI et al. (2008,p.28) sabendo que a função quadrática é linear nos parâmetros a,b e c, podem ser facilmente determinados por meio dos métodos mínimos quadrados, então mediante recurso computacional do Scidavis (Standish, 2017), software disponibilizado na página web do projeto SourceForge, especificamos as constantes A, B e C em função de valores de contorno como velocidade inicial, ângulo de lançamento situacional θ e o valor da aceleração da gravidade local g e comparar esses valores obtidos experimentalmente com os valores previstos teoricamente. Preferimos usar os recursos do Scidavis na obtenção das constantes da função polinomial ao invés do Tracker por questões de facilidade e de gosto pessoal. Até então, estávamos mais habituados no manuseio dos recursos estatísticos oferecidos pelo Scidavis por utilizá-lo em todas as disciplinas experimentais da graduação. Logo após, foi feita a análise dos valores calculados para constantes da força de retardo k e também comparação dos valores obtidos e previstos dos alcances em função dos ângulos, e depois, a verificação se os efeitos da resistência do ar são consideráveis sob as condições de contorno do problema e verificar se essa conclusão oferece suporte para uma modelagem matemática desse fenômeno físico ser considerada proposta educacional destinada as mais variadas modalidades de ensino.

Para alcançar esses objetivos, inicialmente, foi montado o primeiro aparato experimental constituído por uma pistola de brinquedo e três bolas de plástico de mesma dimensão e de massa aproximada de 3 (três) gramas, diâmetro aproximado de 3,65 cm, volume aproximado de 25,5 cm^3 e densidade aproximada de 0,12 g/cm^3, conforme Figura 8. Além de materiais como lápis de quadro, folhas de papel branco, folhas de papel carbono, dispositivo de gravação, trena e transferidor.

Em um ambiente amplo, a esfera é ejetada da pistola com uma velocidade inicial v_0, que a princípio não é conhecida. Nesse ambiente, foram fixadas folhas de

papel em branco, coberta por folhas de papel-carbono. Quando a esfera atinge a superfície do ambiente, fica registrada uma marca na folha de papel. A distância, medida com uma trena, desse anteparo à extremidade da pistola fornece a posição x da esfera no instante do choque. Foram realizados alguns lançamentos preliminares, de forma que a altura inicial da esfera gerasse uma parábola de tamanho razoável. Definida a primeira marca com a extremidade superior da pistola correspondente à origem do sistema de coordenadas (0,0), a esfera foi lançada cinco vezes, a fim dos erros aleatórios inerentes ao processo serem minimizados para o registro de cada marca sob o respectivo ângulo em relação a superfície horizontal. Ao final de cada um desses lançamentos, utilizando uma trena, foram medidas as coordenadas médias de cada ponto e uma tabela construída a partir dos valores obtidos.

Simultaneamente, a fim de obter a trajetória descrita pelo projétil, com o uso do transferidor, foram definidas quatro situações nas quais a pistola fixada na superfície a partir de um ângulo com a horizontal, primeiramente, sob os ângulos de 30 graus, posteriormente de 45 graus, 60 graus e, por fim, sob um ângulo de 75 graus, ejeta a bola de plástico. Cada processo dos percursos nessas quatro situações distintas no que tange o ângulo formado com o eixo horizontal é registrado, mediante a filmagem feita por uma câmera de celular desde a ejeção, o tempo de voo do projétil até o choque com a superfície. Ao final do processo experimental, conforme a imagem abaixo, com a gravação do experimento e com o auxílio do Tracker, foi possível realizar a análise da trajetória do projetil. O Tracker sinalizou as velocidades iniciais de cada ejeção.

Figura 8. Pistola de brinquedo e esferas de plástico usadas no primeiro experimento

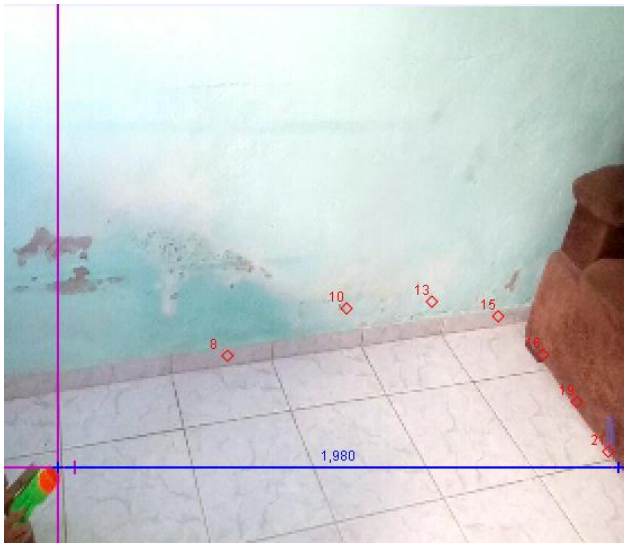

Figura 9. Lançamento de projétil: usando uma pistola de brinquedo ejetando uma esfera de plástico

Executando o arquivo de gravação do experimento no recurso computacional, o Tracker informou as velocidades iniciais de cada lançamento. Ainda mais, sinalizou cada instante t em função das posições vertical e horizontal do projétil de massa A conforme imagens abaixo

Dados ◇ massa A

t	x	y
0,000	3,480E-3	-3,480E-3
0,160	4,524E-2	3,132E-2
0,200	0,354	0,248
0,320	0,598	0,391
0,400	1,020	0,559
0,520	1,321	0,583
0,600	1,555	0,530
0,640	1,714	0,395
0,760	1,833	0,228
0,840	1,944	5,371E-2

Figura 10. Dados informados pelo Tracker a partir da análise da gravação do experimento do lançamento de projétil

Conforme tutorial do aplicativo disponibilizado no site do Laboratório Didático de Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, o Tracker é um software livre utilizado na extração dos valores de variáveis, como tempo e espaço, a partir de um vídeo contendo um experimento físico. Esse software está disponibilizado gratuitamente na internet e precisa ser executado associado a

plataforma Java. De posse dos procedimentos experimentais em arquivo de vídeo, os arquivos são importados e abertos nessa plataforma e são configurados a partir das funções disponíveis em menu. Por exemplo, na aba vídeo é possível ativar funções de reprodução de todos os passos ou de frames do vídeo, e mais, editar perspectivas de redimensionamento, rotações e adições. O experimentador tem a seu dispor uma fita métrica para definir ou revisar as configurações, indicando os ajustes de corte do arquivo em quadros inicial e final, tratados como as medidas que serão analisadas pelo software. É importante, na análise do vídeo, definir a origem do sistema e preferencialmente, verificar o local no arquivo que fornece valores cujas coordenadas x e y são positivas a fim de facilitar a análise dos dados. Para fazer a correlação entre os valores das coordenadas do plano com as medidas do mundo real, é necessário realizar a calibração marcando o local do vídeo cuja dimensão é conhecida no sistema do mundo real a fim de realizar uma transformação de valores das coordenadas no sistema do plano para valores do mundo real correlacionados com suas respectivas unidades. Com esses procedimentos executados, já se torna possível mensurar as medidas extraídas a partir do comportamento do objeto. O software oferece um gráfico que estabelece uma relação do móvel de massa não desprezível entre a sua posição, componentes de posição, unidade temporal adotada, velocidades e acelerações, bem como suas respectivas componentes (Brown,2011). É possível, também, exportar os resultados de todas as células para formato e análise de outro software. Então, concluídas as atividades do Tracker, neste trabalho referentes as informações das posições verticais, horizontais no decorrer do tempo e velocidades iniciais de cada ejeção, preferimos utilizar o Scidavis a fim de plotar, com os pontos encontrados, um gráfico y versus x. Fizemos o gráfico da altura y vs a distância horizontal x tanto considerando quanto ignorando a resistência do ar e fizemos a comparação entre eles. Em seguida, determinada uma função polinomial do tipo $y(x) = A*x^2 + B*x + C$ que melhor se ajustasse aos dados experimentais obtidos. Calculamos, pelo método da perturbação (THORNTON E MARION,2011, p.59), os valores de alcance e lançamos no gráfico como uma função da força de retardo constante k.

Conforme Bassanezi (2016, p.56), o método de ajustes de curvas é fundamental para a validação dos modelos. A validação do modelo consiste na verificação se os dados experimentais não estão ‘muito longe’ daqueles fornecidos pelo modelo. E por fim, foi analisada a possibilidade de sua aplicação no contexto educacional no intuito de verificar a aceitação do modelo simplificado.

3.2 METODOLOGIA PARA O SEGUNDO APARATO EXPERIMENTAL

Para confeccionarmos o segundo aparato experimental é importante a aquisição de uma rampa de comprimento de um metro com suporte para elevação de um dos lados, um ioiô como da Figura 11, e um celular com cronômetro.

Figura 11. Diâmetro do Ioiô sendo mensurado

Com esse material, é possível realizar o experimento e fundamentar um modelo teórico que combine os movimentos de rotação e translação e a partir disso, calcular os valores de velocidade e aceleração de centro de massa do ioiô. Associando esses dados calculados e os que foram coletados experimentalmente, a análise do movimento do ioiô considerando o rolamento sem deslizamento e a determinação experimental do parâmetro β associado ao momento de inércia tornam-se possíveis.

Figura 12. Ioiô sendo solto de uma altura h sobre uma rampa inclinada

Esse experimento consiste em posicionar o ioiô acrílico, de massa aproximada de 26 gramas, diâmetro aproximado de 5,5 cm e diâmetro externo para personalização de 4 cm, em uma na calha com comprimento de 1 metro, inclinada, aproximada e inicialmente, 30° em relação à mesa e, a partir do repouso, soltá-lo. O tempo gasto para atingir o final da calha é então mensurado com a ajuda de um cronômetro de celular. Esse procedimento é repetido cinco vezes de maneira que seja obtido um valor médio do tempo de descida do ioiô. Com esse procedimento inicial, o experimento possibilita mensurar duas variáveis, tempo e distância percorrida pelo ioiô. Com base nessas medidas, podem ser determinadas os valores experimentais da aceleração e da velocidade final do centro de massa. As características do ioiô que serão consideradas nesse experimento são a massa m, o raio r, o raio do eixo principal chamado de R e precisa-se considerar também o θ que é o ângulo de inclinação da calha em relação a horizontal. Durante o movimento do brinquedo, notamos que as forças que atuam nele são o seu peso P, a força de atrito F_{at} e a força normal N que a calha exerce em cada um de seus eixos. Grandezas essas representadas na figura abaixo

Conforme Campos, Alves e Speziali (2008, p.63), é a força de atrito, perpendicular as linhas que passam pelo eixo de rotação, produzindo torque, consequentemente, faz com que o móvel gire. Dependendo da inclinação da calha e do atrito entre ela e o ioiô pode ocorrer o seguinte tipo de movimento: durante a descida, se a f_a for menor que a força de atrito estático máxima, segundo Campos, Alves e Speziali (2008, p.64), o móvel não deslizará pela rampa. Neste experimento, consideramos que o ioiô não desliza e com base nisso e tendo a disposição das medidas do tempo médio que o móvel percorre a calha inclinada de 1 metro, foram calculados os valores experimentais da aceleração e da velocidade final do centro de massa. Posteriormente, ajustando o ângulo de inclinação da calha para aproximadamente 45° e foram repetidos os procedimentos descritos anteriormente e logo após, com a rampa com ângulo de inclinação 60º. Ao final, concluindo a parte experimental, foram discutidas as diferenças entre os resultados obtidos em cada um dos três ângulos propostos. Essas discussões estão no quarto tópico deste trabalho.

Esses aparatos, por mais simples que sejam, mostram a necessidade de se trabalhar com uma base de dados mais precisa possível para que as ocorrências de taxas de variação anormais sejam minimizadas, caso contrário dificultaria a análise desses dados e consequentemente as discussões e conclusões prejudicando, assim,

o alcance dos objetivos. Sabemos que não existem medidas perfeitas, devido a ocorrência de erros imprevisíveis ou atrelados ao experimento, erros estatísticos, ou do próprio experimentador. Então, de acordo com Lima (2010), a Teoria dos Erros proporciona métodos e ferramentas estatísticas que podem minimizar o efeito desses erros e a experimentação apresentar resultados próximo da realidade. Conhecidas essas medições, foram aplicadas à Estatística, para que fosse calculado o valor provável. Cálculos envolvendo os valores prováveis consistiram na média aritmética entre os valores obtidos, valor esperado para a posição x, variável tempo t. Quando tratamos sobre o erro relativo entre a aceleração gravitacional fornecida pelo Scidavis com a gravidade local, usamos o valor de 9.7795 m/s² calculado conforme fórmula da gravidade em função da altitude e latitude de LOPES(2008), referente a gravidade na cidade de Belo Jardim/PE em função da altitude (607 m) e latitude (8° 20′ 9″ Sul) do município, valores disponibilizados no site da prefeitura municipal.

Concernente aos resultados finais, eles foram discutidos a partir da análise comparativa, com uso de tabelas e gráficos, entre o valor encontrado e o provável, dispersão desses valores em relação ao valor provável, estudo percentual dos erros relativos e ao final, foram feitas possíveis explicações para casos nos quais foram detectadas taxas de variação mais alta em relação aos demais dados encontrados.
O trabalho evidencia a pertinência do estudo dos valores estatísticos nas ciências experimentais. Então, concluída a parte experimental e coleta de dados, no próximo tópico, estão discutidas as diferenças e/ou nuances entre os resultados obtidos a partir da análise comparativa, usando tabelas e gráficos, entre o valor encontrado e o provável, dispersão desses dados em relação ao valor provável, estudo percentual dos erros relativos e ao final, foram feitas possíveis explicações para os casos que foram detectados taxa de variação relevantes em relação aos demais dados encontrados.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Na presente seção, estão descritos os resultados obtidos dos dois experimentos e que estão dispostos em tabelas e gráficos a fim de que possam ser comparados com os valores teóricos previstos objetivando confirmar os modelos matemáticos encontrados e avaliar a possibilidade de discussão no contexto educacional.

O primeiro experimento foi realizado mediante fixação de uma bola de plástico na pistola de brinquedo em uma sequência de quatro ângulos de inclinação com a superfície a começar de trinta graus e variando-os, de quinze em quinze graus, ao passo que havia anotação dos valores de seis lançamentos obtidos em cada um desses ângulos. Os valores do alcance encontrados após ejeção da bola de plástico em função do ângulo foram anotados e expressos na seguinte tabela.

Ângulo (°)	Alcance I (m)	Alcance II (m)	Alcance III (m)	Alcance IV (m)	Alcance V (m)	Alcance VI (m)
30	2,090	2,190	2,240	2,285	2,000	2,505
45	2,280	2,300	2,600	2,190	2,260	2,465
60	1,970	2,175	2,170	2,255	2,095	2,405
75	1,675	1,870	1,795	2,015	2,140	1,970

Tabela 1. Alcances obtidos em função do ângulo de lançamento

Nota-se, com os dados obtidos, que os maiores alcances, assim como já sinaliza o modelo teórico que relaciona o alcance com o seno do dobro do ângulo de lançamento, são os valores encontrados em função do ângulo de 45 graus. A partir desses valores encontrados, acreditamos que o mais razoável seja trabalhar com os valores que permeiam um valor médio do alcance, obtido pela média aritmética entre os seis valores encontrados, considerando que seja o mais próximo do valor real associado ao ângulo dentro de um modelo considerando a resistência do ar. Uma variável importante no estudo de movimento de projéteis é o alcance que o móvel

alcança. De acordo com Halliday, Resnick e Walker (2001), o alcance A corresponde a distância horizontal ΔS percorrida pelo corpo. Em um modelo que ignora os efeitos da resistência do ar, o movimento que o corpo faz na horizontal trata-se, então, de um movimento uniforme. O alcance é calculado pela expressão

$$A = V_x \, \Delta t = \, v_0 \cos\theta \, \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

$$A = \frac{{v_0}^2}{g} \, sen\, 2\theta \qquad (41)$$

e a partir da equação (41), calculamos o alcance em função de cada ângulo relativo a inclinação com a superfície utilizado no procedimento experimental, admitindo velocidades iniciais e aceleração gravitacional constantes. A tabela 2 mostra uma comparação entre o alcance médio, calculado a partir da média aritmética dos valores obtidos experimentalmente os quais estão considerando os efeitos da resistência do ar, e o valor do alcance teórico previsto, calculado com a equação anterior, o qual é suposto um experimento teórico no vácuo.

Ângulo (°)	**Alcance médio R' (m) (resistência do ar)**	**Alcance teórico previsto R (m) (sem resistência)**
30	2,28	2,30
45	2,34	2,35
60	2,18	2,18
75	1,91	1,90

Tabela 2. Comparação entre resultados previstos e obtidos

Esta tabela comparativa sugere que existe uma boa aproximação entre os resultados obtidos e os previstos teoricamente. Portanto, o uso de materiais de baixo custo contendo um projétil de massa pequena e tempo de execução do experimento relativamente pequeno sugerem que o ar oferece baixa resistência ao lançamento de projeteis, evidenciando que a modelagem matemática desses experimentos pode ser

analisada em sala de aula como modelo teórico simples, por exemplo, desconsiderando os efeitos da força resistiva.

Um considerável facilitador no processo de análise do modelo teórico é o uso de métodos computacionais (Bassanezi, 2016, p.30) que fornecem alguns valores e coeficientes mediante análise das gravações audiovisuais dos experimentos. O Tracker, informou os valores da velocidade inicial aproximada em função de cada ângulo analisado. A seguir estão expostos os resultados fornecidos

Ângulo (°)	**Velocidade inicial (m/s)**
30	5,10
45	4,80
60	4,96
75	6,10

Tabela 3. Velocidade inicial de bola plástica ejetada por uma pistola em função do ângulo

A partir dos dados informados na tabela 3 e usando um modelo que ignora os efeitos da resistência do ar, verificamos que o projétil, após ser ejetado, sai da superfície com a componente vertical da velocidade em função da velocidade inicial e do seno do ângulo no qual a pistola está inclinada em relação com a horizontal. E mediante manipulações algébricas das equações a seguir, encontramos o tempo que o projétil alcança a altura máxima. De acordo com Halliday, Resnick e Walker (2001), temos

$$t = \frac{v_0 \ \operatorname{sen}\theta}{g} \tag{42}$$

o tempo de subida é o mesmo da descida. Assim sendo, o tempo total de voo é o dobro do valor encontrado na equação anterior. O tempo total de voo, denotado T, é o dobro do valor encontrado na equação anterior. Ou seja,

$$T = \frac{2v_0 \ \operatorname{sen}\theta}{g} \tag{43}$$

e a partir da equação (43), calculamos o tempo de voo da bola de plástico após ejeção

Ângulo (°)	Tempo total de voo (s)
30	0,52
45	0,69
60	0,88
75	1,20

Tabela 4. Tempo total de voo da bola de plástico em um lançamento oblíquo

Esses resultados já mostram o quão rápido ocorre o experimento de lançamento de projétil. Tempos experimentais muito rápidos sugerem que as influências na resistência do ar não interferem significativamente.

Outra variável importante a ser considerada em um lançamento obliquo é a previsão da altura máxima que o móvel consegue atingir. Para tal, conforme Halliday, Resnick e Walker (2001), a partir da equação de Torricelli para as componentes vertical da velocidade é possível encontrar a expressão que relaciona a altura máxima H, velocidade e aceleração gravitacional *g* e lembrando que na altura máxima a componente *y* da velocidade é nula e o valor da aceleração é o valor da gravidade *g* no sentido contrário ao movimento. Portanto,

$$H = \frac{{v_0}^2 \ \mathrm{sen}^2\,\theta}{2g} \tag{44}$$

e a partir da equação (44), foi encontrada a altura máxima prevista obtida para cada lançamento da bola de plástico em função de cada ângulo de lançamento. Os dados calculados estão expostos na tabela a seguir

Ângulo (°)	Altura máxima prevista (m)
30	0,33
45	0,59
60	0,94
75	1,77

Tabela 5. Altura máxima alcançada pela bola de plástico em função do ângulo de lançamento

Analisando os resultados na tabela 2, entre os alcances previstos e obtidos experimentalmente, de acordo com a fundamentação teórica, THORNTON e MARION (2011, pg. 59) demonstra a relação entre o alcance obtido com o alcance teórico na seguinte expressão

$$R' = R\left(\frac{1 - 4kV}{3g}\right) \tag{45}$$

a partir da relação (45), calculamos os valores possíveis da constante de retardo em função do ângulo em cada situação. Esses valores estão expressos na tabela abaixo

Ângulo (°)	**K (constante de retardo) s^{-1}**
30	0,0218
45	0,0062
60	0,0002
75	0,0054

Tabela 6. Valores calculados da constante de retardo em função do ângulo de lançamento

Com esses dados, percebe-se mais uma vez, que os efeitos da resistência do ar nesse experimento não são influentes. Valores de constante de retardo entre 0,0002 a 0,02 s^{-1} sugerem que a resistência do ar não interfere significativamente na trajetória do projétil e quando são comparados os valores previstos com os obtidos experimentalmente das variáveis como alcance, velocidade da esfera de plástico são mais evidências da inexpressiva interferência da resistência do ar, possibilitando, então, para facilidade de cálculos e aplicações mais acessíveis no contexto educacional, elaborar e analisar um caso particular do modelo teórico do movimento de projetil sob a ação de uma força de arrasto linear, o modelo teórico do movimento de projetil quando $k = 0$, ou seja, movimento de projetil sem considerar a resistência do ar. Para corroborar com essa perspectiva, na próxima secção, estarão representados os gráficos do alcance experimental em função da constante de retardo calculada. PIACENTINI et al. (2008, p.28) argumenta que quando a função f é linear nos parâmetros que se deseja ajustar, esse sistema de equações tem solução analítica. Nos primeiros quatro gráficos, faremos o ajuste linear de pontos, considerando que o conjunto de pontos segue uma relação do tipo $y = ax + b$, onde a e b são os coeficientes que precisam ser encontrados.

4.1 ALCANCE EM FUNÇÃO DA FORÇA DE RETARDO

No primeiro caso, a partir dos dados obtidos experimentalmente, e tendo como referencial o modelo teórico da trajetória do móvel considerando a resistência do ar, o Scidavis ajustou os valores dos coeficientes integrantes de uma função linear decrescente que representa o comportamento do alcance em função da constante de retardo e tendo como premissas os valores de um ângulo de 30 graus e velocidade inicial de 5,1 m/s constantes. São os coeficientes

$B = 2{,}303 \text{ +/- } 1{,}54e\text{-}11$

$A = -0{,}80 \text{ +/- } 7{,}02e\text{-}11$

Os erros padrão na coordenada Y, referente ao alcance atingido pela bola de plástico, após a ejeção, são razoavelmente ínfimos, da ordem 10^{-11}, e os valores da constante de retardo analisados estão entre 0,02 a 0,38 s^{-1}. A seguir, está plotado, por meio do Scidavis, o gráfico do alcance em função da constante de retardo de um projétil ejetado a partir da inclinação da pistola no ângulo de 30 graus

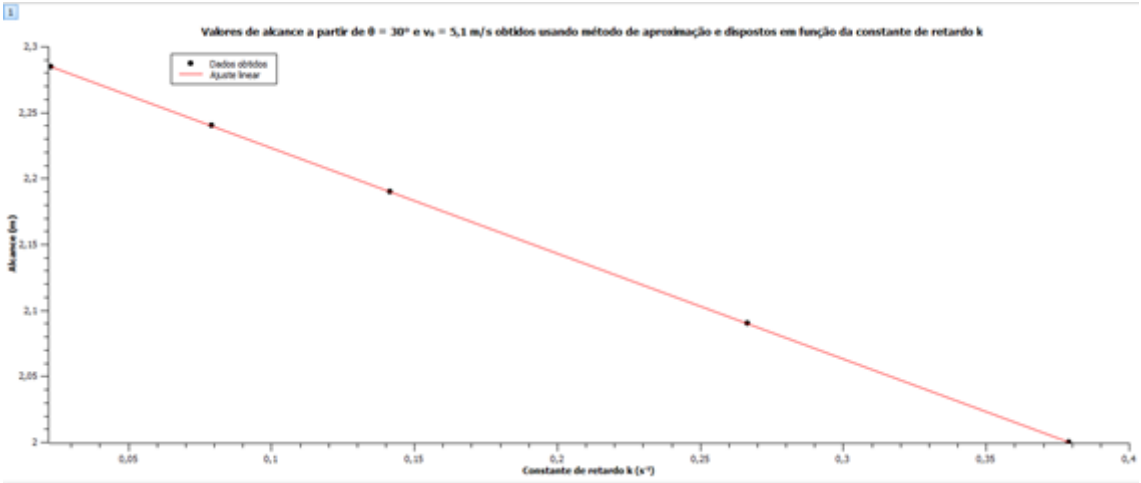

Gráfico 1. Valores de alcance calculados pelo método da perturbação em função da força de retardo constante k; $\theta = 30°$; $v_0 = 5,1\ m/s$; cálculo usando equação (45)

A equação que expressa o comportamento do alcance A em função da constante de retardo k é $A(k) = -0{,}80*k+2{,}30$

Dessa equação é possível inferir que no caso particular, quando k assume o valor 0, ocorrendo quando os efeitos da resistência do ar são desprezados, o alcance máximo

para o ângulo de 30 graus é 2,30 m semelhante ao resultado previsto pela equação do movimento uniforme.

No segundo caso, a partir dos dados obtidos experimentalmente, e tendo como referencial o modelo teórico da trajetória do móvel considerando a resistência do ar, o Scidavis ajustou os valores dos coeficientes integrantes de uma função linear decrescente que representa o comportamento do alcance em função da constante de retardo e tendo como premissas o ângulo de 45 graus e velocidade inicial de 4,8 m/s. os coeficientes informados são

B = 2,35 +/- 1,46e-07

A = -1,09 +/- 1,49e-06

Os erros padrão na coordenada Y, que refere-se o alcance atingido pela bola de plástico ejetada, são razoavelmente ínfimos, da ordem 10^{-6}, e os valores da constante de retardo analisados estão entre 0,05 a 0,15 s^{-1}. O gráfico plotado a seguir é do alcance em função da constante de retardo de uma bola ejetada pela pistola inclinada em 45 graus

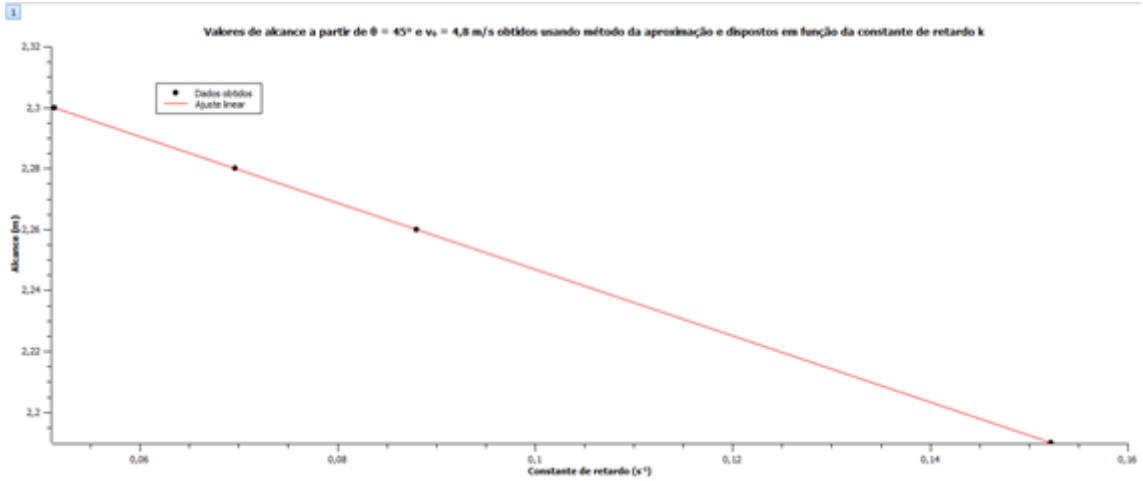

Gráfico 2. Valores de alcance calculados pelo método da perturbação em função da força de retardo constante k; $\theta = 45°$; $v_0 = 4,8\ m/s$; cálculo usando equação (45)

A equação que expressa o comportamento do alcance A em função da constante de retardo *k* é *A(k) = -1,09*k+2,36*

Dessa equação é possível inferir que no caso particular, quando *k* assume o valor 0, ocorrendo quando os efeitos da resistência do ar são desprezados, o alcance máximo

para o ângulo de 45 graus é 2,36 m semelhante ao resultado previsto pela equação do movimento uniforme.

Já no terceiro caso, mediante uso dos dados obtidos experimentalmente e do modelo teórico da trajetória do móvel considerando a resistência do ar, o Scidavis ajustou os valores dos coeficientes integrantes de uma função linear decrescente que representa o comportamento do alcance em função da constante de retardo e tendo como premissas os valores de um ângulo de 60 graus e velocidade inicial de 4,96 m/s. São os coeficientes

$B = 2{,}17 +/- 1{,}29e\text{-}16$

$A = -1{,}27 +/- 1{,}46e\text{-}15$

Os erros padrão na coordenada Y, referentes ao alcance atingido pela bola de plástico, após a ejeção, são razoavelmente ínfimos, da ordem 10^{-16}, e os valores da constante de retardo analisados estão entre 0,002 a 0,16 s^{-1}. A seguir, está plotado, por meio do Scidavis, o gráfico do alcance em função da constante de retardo de um projétil ejetado a partir da inclinação da pistola em um ângulo de 60 graus.

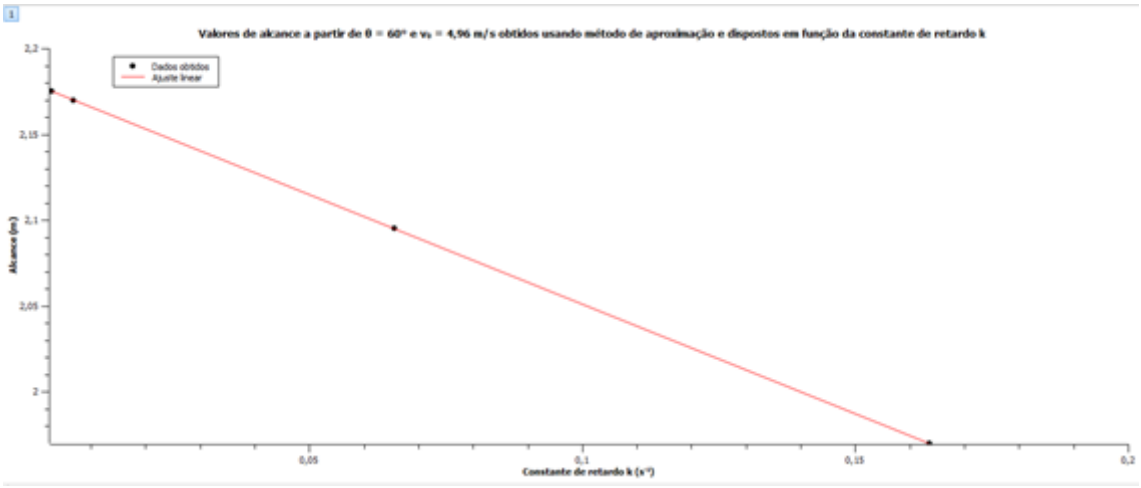

Gráfico 3. Valores de alcance calculados pelo método da perturbação em função da força de retardo constante k; $\theta = 60°$; $v_0 = 4,96\ m/s$; cálculo usando equação (45)

A equação que expressa o comportamento do alcance A em função da constante de retardo k é $A(k) = -1{,}27*k+2{,}18$

Dessa equação é possível inferir que no caso particular, quando k assume o valor 0, ocorrendo quando os efeitos da resistência do ar são desprezados, o alcance máximo para o ângulo de 60 graus é 2,18 m, valor semelhante ao resultado previsto pela equação do movimento uniforme.

No último caso, tendo como referencial o modelo teórico da trajetória do móvel considerando a resistência do ar, o Scidavis ajustou os valores dos coeficientes integrantes da função que representa o comportamento do alcance em função da constante de retardo e tendo como premissas os valores de um ângulo de 75 graus e velocidade inicial de 6,1 m/s. São os coeficientes

B = 1,90 +/- 1,72e-16
A = -1,52 +/- 1,80e-15

Os erros padrão na coordenada Y, referentes ao alcance atingido pela bola de plástico ejetada, são razoavelmente ínfimos, da ordem 10^{-16}, e os valores da constante de retardo analisados estão entre 0,02 a 0,14 s^{-1}. O gráfico plotado a seguir é o alcance em função da constante de retardo de um projétil ejetado a partir da inclinação da pistola em um ângulo de 75 graus.

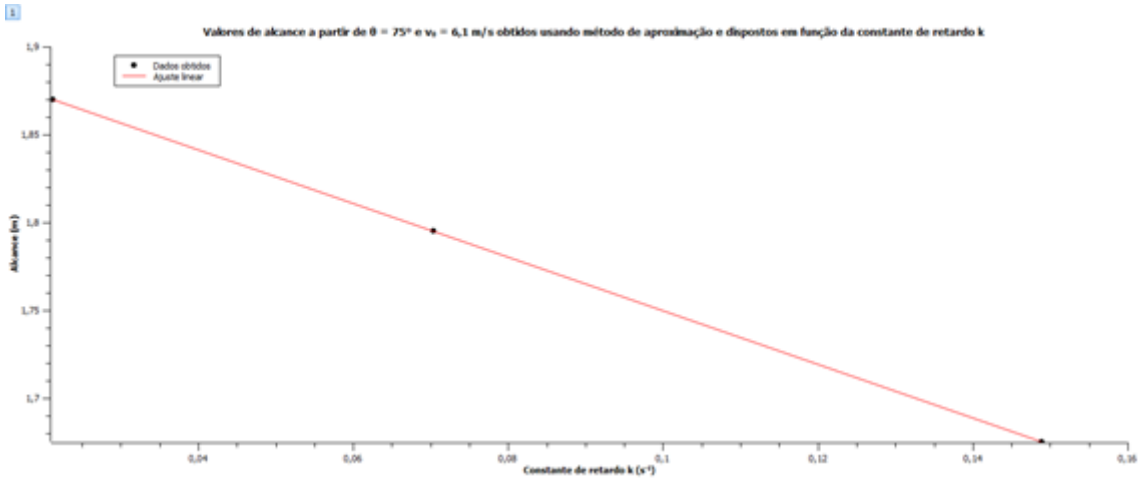

Gráfico 4. Valores de alcance calculados pelo método da perturbação em função da força de retardo constante k; $\theta = 75°$; $v_0 = 6,1\ m/s$; cálculo usando equação (45)

A equação que expressa o comportamento do alcance A em função da constante de retardo k é *A(k) = -1,52 *k+1,90*

Dessa equação é possível inferir que no caso particular, quando k assume o valor 0, ocorrendo quando os efeitos da resistência do ar são desprezados, o alcance máximo para o ângulo de 75 graus é 1,90 m, valor semelhante ao resultado previsto pela equação do movimento uniforme.

Em vista disso, mediante análise desses valores e fatores que mostram a inexpressividade da interferência da resistência do ar no processo experimental. Portanto, na próxima secção, para cada ângulo situacional, estarão representados os gráficos da trajetória do projétil, associando os alcances previstos com as alturas previstas que a bola de plástico adquiriu ao ser ejetada pela pistola de brinquedo, porque fica razoável admitir com boa aproximação a modelagem matemática dos resultados experimentais fundamentando-os no modelo teórico que ignora os efeitos da resistência do ar.

4.2 GRÁFICOS COMPARATIVOS: MODELO TEÓRICO CONSIDERANDO A RESISTENCIA DO AR E MODELO QUE IGNORA OS EFEITOS DA FORÇA DE ARRASTO

A partir dos dados obtidos, tanto os calculados quanto os previstos, e tendo como referenciais, o modelo teórico da trajetória do móvel desconsiderando a resistência do ar, e no segundo momento, o modelo teórico da trajetória da bolinha considerando os efeitos da resistência do ar. O Scidavis ajustou os valores dos coeficientes integrantes de uma função polinomial que melhor representa o comportamento da trajetória do móvel com os termos da altura em função do alcance nos dois casos. A seguir, estão descritos tanto o comportamento da trajetória da esfera de plástico considerando os efeitos da resistência do ar quanto o comportamento da trajetória desconsiderando os efeitos resistivos ao ar. Os valores postados e os gráficos plotados estão expostos para fins comparativos e serem verificados se os números são ou não discrepantes de forma significativa nesse processo experimental. Os erros padrão na coordenada Y, referentes a altura atingida pelo móvel, não são conhecidos, nem puderam ser calculados pelo Scidavis em todos os gráficos. Ao final, das equações obtidas, pudemos extrair erros relativos a algumas constantes já conhecidas, a saber, os erros relativos a aceleração gravitacional calculada na cidade de Belo Jardim e a velocidade inicial do projétil. No primeiro caso, tendo como

premissas os valores de um ângulo de 30 graus e velocidade inicial de 5,1 m/s constantes. Ignorando os efeitos da resistência do ar, foram fornecidos os coeficientes

a_0 = *-1,80e-16*

a_1 = *0,57*

a_2 = *-0,25*

e de acordo com os dados experimentais obtidos, foram fornecidos os coeficientes

a_0 = *-3,18e-16*

a_1 = *0,58*

a_2 = *-0,25*

De acordo com o Scidavis, os valores de alcance x estão entre 0 e aproximadamente 2,28 m. A seguir, está representado o gráfico comparativo da altura em função do alcance de um projétil ejetado sob um ângulo de 30 graus com e sem a resistência do ar

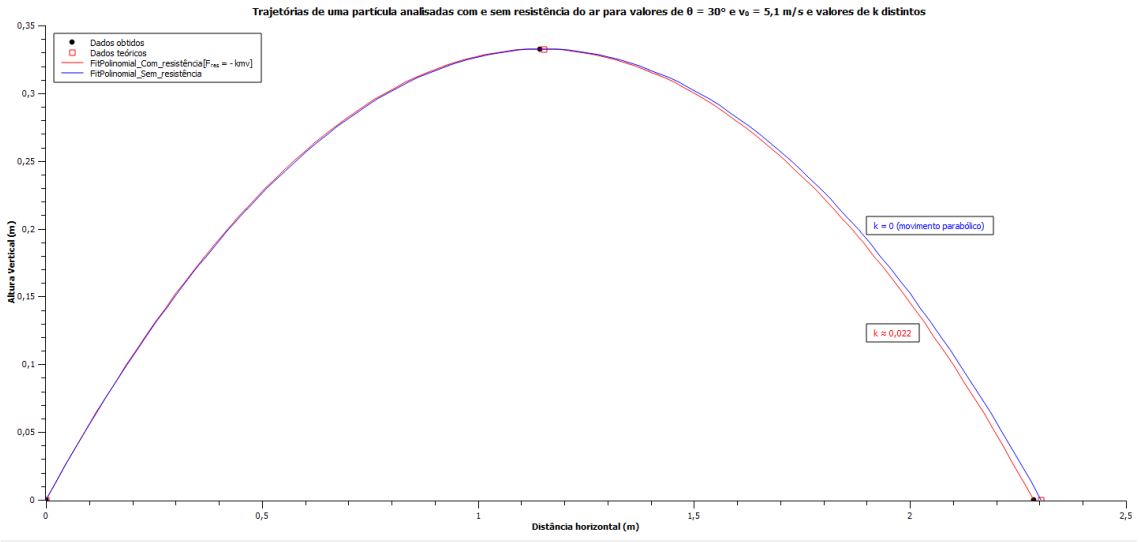

Gráfico 5. Gráfico comparativo: A linha vermelha indica o resultado experimental da trajetória da bola considerando os efeitos resistivos para valores de $\theta = 30°$; $v_0 = 5,1\ m/s$; cálculo usando equação (21); A linha azul ignora os efeitos da resistência do ar para os mesmos valores de ângulo e velocidade inicial; cálculo usando equação (22)

A equação que prevê o comportamento da trajetória desse projétil no vácuo é

*Y(x) = (-1,80e-16) + 0,57*x - 0,25*x²*

A equação que melhor define o comportamento da trajetória considerando a resistência do ar é *Y(x) = (-3,18e-16) + 0,58*x - 0,25*x²*

Notamos que as duas curvas apresentam coeficientes levemente diferentes. O fator de arrasto é muito pequeno. Por isso, concluímos que é mais uma evidência de que considerar o modelo teórico de não interferência da força de arrasto linear pode ser tratado como razoável na resolução do problema.

No segundo caso, tendo como premissas os valores de um ângulo de 45 graus e velocidade inicial de 4,8 m/s constantes. Ignorando os efeitos da resistência do ar, foram fornecidos os coeficientes

a_0 = *-3,26e-17*

a_1 = *1,00*

a_2 = *-0,43*

e de acordo com os dados experimentais obtidos, foram fornecidos os coeficientes

a_0 = *5,84e-17*

a_1 = *1,00*

a_2 = *-0,43*

De acordo com o Scidavis, os valores de alcance x estão entre 0 e aproximadamente 2,35 m. A seguir, está representado o gráfico da altura em função do alcance de um projétil ejetado sob um ângulo de 45 graus com e sem a resistência do ar

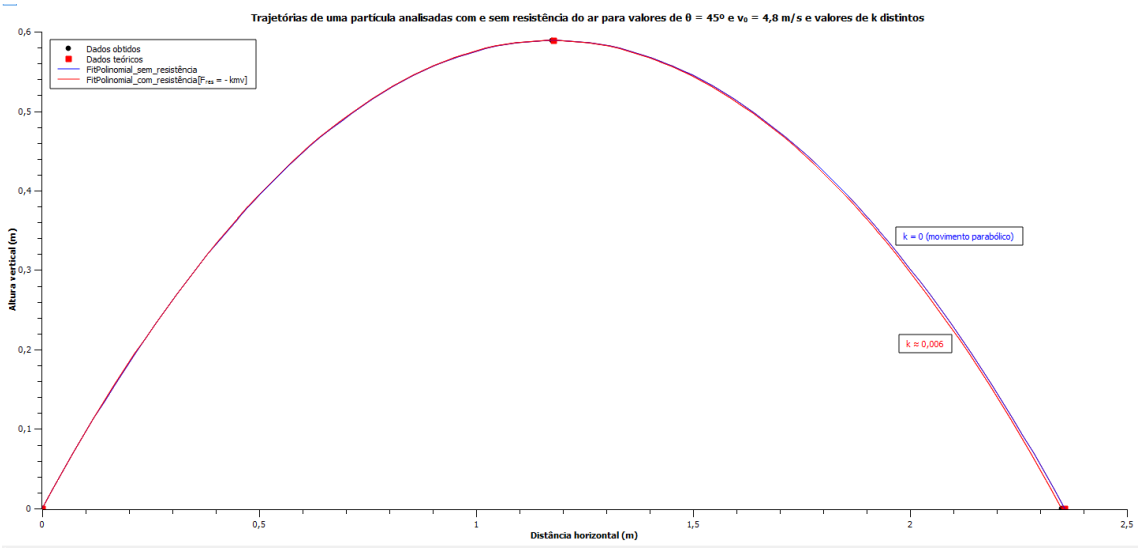

Gráfico 6. Gráfico comparativo: A linha vermelha indica o resultado experimental da trajetória da bola considerando os efeitos resistivos para valores de $\theta = 45°$; $v_0 = 4,8\ m/s$; cálculo usando equação (21); A linha azul ignora os efeitos da resistência do ar para os mesmos valores de ângulo e velocidade inicial; cálculo usando equação (22);

A equação que melhor define o comportamento da trajetória desse projétil, no vácuo, é $Y(x) = (3{,}26e\text{-}17) + 1{,}00*x - 0{,}43*x^2$

A equação que melhor define o comportamento da trajetória considerando a resistência do ar $Y(x) = (5{,}84e\text{-}17) + 1{,}00*x \ -0{,}43*x^2$

Nota-se que as duas curvas apresentam coeficientes levemente diferentes. O fator de arrasto é muito pequeno.

No terceiro caso, tendo como premissas os valores de um ângulo de 60 graus e velocidade inicial de 4,96 m/s constantes. Ignorando os efeitos da resistência do ar, foram fornecidos os coeficientes

$a_0 = -7{,}25e\text{-}16$

$a_1 = 1{,}73$

$a_2 = -0{,}795$

e de acordo com os dados experimentais obtidos, foram fornecidos os coeficientes

$a_0 = -5{,}15e\text{-}16$

$a_1 = 1{,}07$

$a_2 = -0{,}795$

A seguir, está representado o gráfico da altura em função do alcance de um projétil ejetado sob um ângulo de 60 graus com e sem a resistência do ar

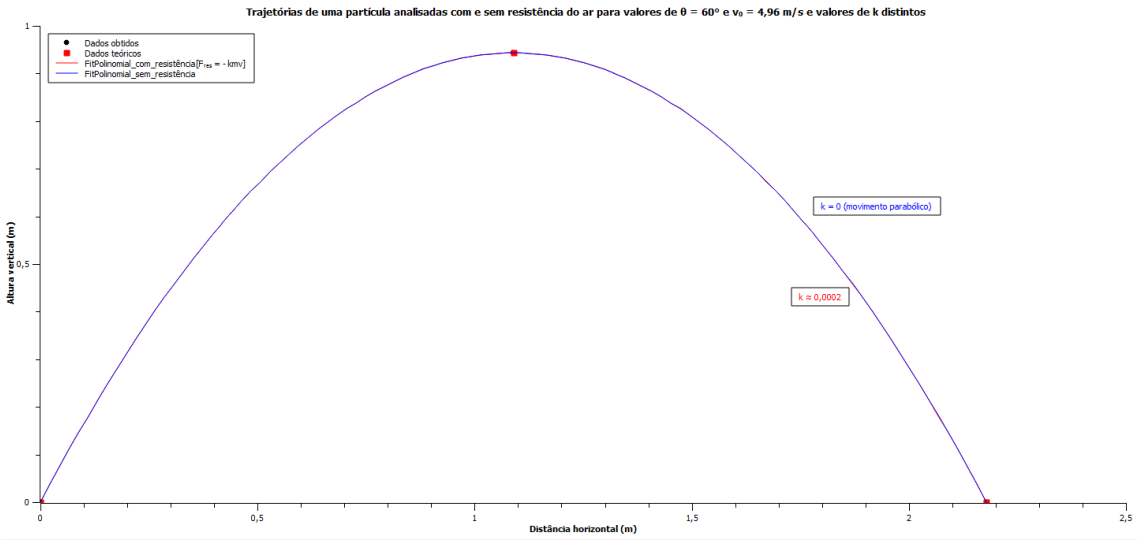

Gráfico 7. Gráfico comparativo: A linha vermelha indica o resultado experimental da trajetória da bola considerando os efeitos resistivos para valores de $\theta = 60°$; $v_0 = 4{,}96\ m/s$; cálculo usando equação (21); A linha azul ignora os efeitos da resistência do ar para os mesmos valores de ângulo e velocidade inicial; cálculo usando equação (22);

A equação que prevê o comportamento da trajetória desse projétil no vácuo é $Y(x) = (-7{,}25e\text{-}16) + 1{,}73*x - 0{,}795*x^2$

A equação que melhor define o comportamento da trajetória considerando a resistência do ar $Y(x) = (-5{,}15e\text{-}16) + 1{,}73*x - 0{,}795*x^2$

Notamos que de todos os gráficos, esse aparenta ter as curvas com os coeficientes mais parecidos. Consideramos o fator de arrasto é ainda considerado muito pequeno.

No último caso, tendo como premissas os valores de um ângulo de 75 graus e velocidade inicial de 6,10 m/s constantes. Ignorando os efeitos da resistência do ar, foram fornecidos os coeficientes

$a_0 = 2{,}51e\text{-}17$

$a_1 = 3{,}73$

$a_2 = -1{,}96$

e de acordo com os dados experimentais obtidos, foram fornecidos os coeficientes

$a_0 = -2{,}33e\text{-}16$

$a_1 = 3{,}72$

$a_2 = -1{,}94$

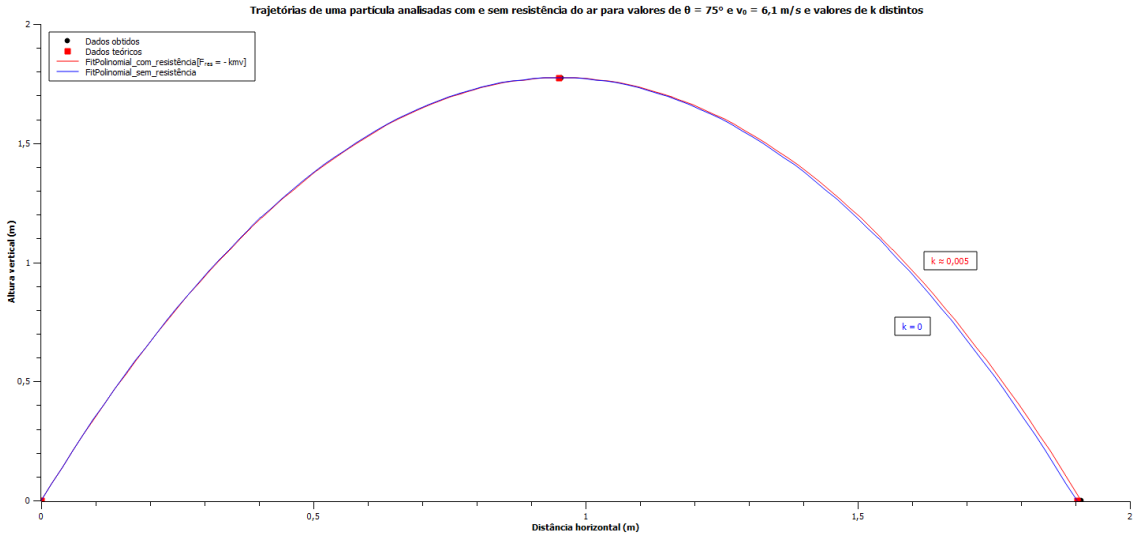

Gráfico 8. Gráfico comparativo: A linha vermelha indica o resultado experimental da trajetória da bola considerando os efeitos resistivos para valores de $\theta = 75°$; $v_0 = 6{,}1\ m/s$; cálculo usando equação (21); A linha azul ignora os efeitos da resistência do ar para os mesmos valores de ângulo e velocidade inicial; cálculo usando equação (22);

A equação que melhor define o comportamento da trajetória desse projétil, no vácuo, é $Y(x) = (2{,}51e\text{-}17) + 3{,}73*x - 1{,}96*x^2$

A equação que melhor define o comportamento da trajetória considerando a resistência do ar $Y(x) = (-2{,}33e\text{-}16) + 3{,}72*x - 1{,}94*x^2$

Nota-se que as duas curvas apresentam coeficientes levemente diferentes. O fator de arrasto é muito pequeno. Por isso, a conclusão de mais uma evidência que considerar o modelo teórico de não interferência da força de arrasto linear como razoável a resolução do problema.

A partir das equações fornecidas, é possível extrair erros relativos a algumas constantes já conhecidas. São os erros relativos a aceleração gravitacional e a velocidade inicial do projétil. Seguem na tabela a seguir

Ângulo (°)	**Ignorando os efeitos da resistência do ar**		**Considerando os efeitos da resistência do ar**	
	Erro relativo a aceleração gravitacional (%)	**Erro relativo a velocidade inicial do projétil (%)**	**Erro relativo a aceleração gravitacional (%)**	**Erro relativo a velocidade inicial do projétil (%)**
30	0,74	2,20	1,530	0,760
45	1,05	0,08	0,580	0,290
60	0,01	0,01	0,001	0,001
75	0,01	0,01	0,880	0,440

Tabela 7. Tabela comparativa entre os erros relativos considerando e ignorando os efeitos da resistência do ar

Comparando os quatro gráficos são percebidas taxas das variações dos resultados previstos muito razoáveis, ou logicamente plausíveis, em comparação com o modelo teórico proposto, ou seja, são encontrados erros em relação ao valor da aceleração gravitacional que flutuam de menos de 0,001% a um pouco mais de 2%. Teoricamente, os resultados do procedimento experimental apresentou-se numa confiabilidade razoável, racionalmente plausível, sugerindo que essa proposta de modelagem matemática pode ser aplicada na educação básica com resultados próximos aos valores esperados pelo modelo teórico que despreza os efeitos da força de resistência do ar. Embora seja um caso particular, o experimento realizado com materiais simples e de baixo custo, pode elucidar o aprendizado dos conceitos

associados a posição, velocidade, altura máxima, alcance previsto, forças que envolvem o sistema físico.

A confiabilidade experimental foi tão generosa que embora houvesse variações relacionadas ao erro sistemático, a imprecisão instrumental, erro escalar associado ao instrumento de mensuração, presença de erro aleatório, escalar atrelado a medida e as considerações feitas durante o processo, a exemplo do sistema físico suposto ideal no qual a massa do corpo não influencia no experimento, a resistência do ar não interferiu significativamente no experimento, o atrito com o ar não afetou em grandes proporções, propiciando validade ao modelo teórico inicialmente descrito e cujos valores encontrados não se distanciaram significativamente dos valores reais obtidos (Bassanezi, 2016, p.30). Ao levar em consideração a rapidez com que o projétil de massa relativamente pequena se choca na superfície do ambiente, podemos constatar que nessas condições a resistência do ar não interfere de maneira significativa no movimento do projétil. Na próxima seção, estão expostos os resultados encontrados do segundo procedimento experimental como proposta de modelagem matemática no ensino de física.

4.3 COEFICIENTE ASSOCIADO AO MOMENTO DE INÉRCIA

O segundo experimento foi realizado mediante soltura de um ioiô em repouso sobre o ponto mais alto duma rampa inclinada em uma sequência de três ângulos de inclinação com a superfície. A começar de trinta graus e variando-os, de quinze em quinze graus, anotou-se seis valores de tempo obtidos em cada um desses ângulos e ao final dessas medições foi extraída a média do tempo a fim de obter um valor mais realístico no processo. Os valores do tempo médio de descida do ioiô para percorrer a rampa foram anotados e expressos na seguinte tabela.

Ângulo (°)	**Tempo total de percurso (s)**
30	0,80
45	0,72
60	0,48

Tabela 8. Tempo total do percurso do ioiô em cada ângulo de lançamento da rampa

A partir desses valores do tempo médio de descida do móvel, é possível por meio das equações de movimento acelerado, calcular os valores de velocidade e aceleração do centro de massa. A seguir, está exposto os valores calculados

Ângulo (°)	Velocidade do centro de massa (m/s)	Aceleração do centro de massa (m/s²)
30	2,5	3,125
45	2,78	3,858
60	4,17	8,680

Tabela 9. Velocidades e aceleração de centro de massa calculados para cada ângulo situacional; cálculos usando equação (39) e (40)

A partir da tabela anterior, foi calculado o coeficiente associado ao momento de inercia para cada ângulo situacional e foi verificado a validade dos valores encontrados.

Ângulo (°)	Seno do ângulo	Coeficiente do momento de inércia
30	0,5	0,56
45	0,71	0,79
60	0,87	0,03

Tabela 10. Coeficientes associados ao momento de inércia em cada ângulo situacional

De acordo com NUSSENZVEIG(1998), supondo que um disco seja decomposto em anéis circulares concêntricos delgados de raio R’ e largura infinitesimal dR’, onde R’ varia de 0 a R. A massa dm de um desses anéis está para massa total M do disco assim como o volume do anel está para o disco, ou seja

$$\frac{dm}{M} = \frac{2\pi R' dR'}{\pi R^2} = \frac{2}{R^2}\, R'\, dR'$$

Sendo $I = \int R'^2 \ dm$,então

$$I = \int R'^2 \ dm = \frac{2M}{R^2} \int_0^R R'^3 \ dR' = \frac{2M}{R^2} \left[\frac{R'^4}{4} - 0 \right] = \frac{2M \ R^4}{4R^2}$$

Ou

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

Dentre os três ângulos analisados, extraímos os erros relativos a constante associado ao momento de inércia já prevista de acordo com o modelo acima. Então, por hipótese, admitimos considerar o ioiô como um corpo de secção circular, possuindo, então, conforme Campos, Alves e Speziali (2008, p.67), o coeficiente associado ao momento de inércia equivalente a um meio. No primeiro caso, o erro relativo ao coeficiente de momento de inércia em função do ângulo de 30 graus é 12% a mais do coeficiente previsto. No segundo caso, o erro relativo ao coeficiente de momento de inércia em função do ângulo de 30 graus é 58% a mais do coeficiente previsto. No terceiro caso, o erro relativo ao coeficiente de momento de inércia em função do ângulo de 30 graus é 95% a menos do coeficiente previsto.

Comparando os três resultados, diferentemente do primeiro experimento, são percebidas que dois resultados apresentam taxas das variações em relação a constante prevista muito desproporcionais em comparação com o modelo teórico proposto, ou seja, são encontrados erros superiores a 50%, o que representa algo que não é aceitável dentro da estatística experimental(LIMA,2010). Portanto, é necessário reavaliar o processo experimental para que essa proposta de modelagem matemática possa ser aplicada na educação básica com resultados próximos aos valores esperados pelo modelo teórico (Bassanezi, 2016, p.30). O que o experimento sugere é que um ângulo menor do que 30 graus pode ser que se aproxime mais do coeficiente associado ao momento de inércia.

Provavelmente ocorreu essas discrepâncias devido a variações relacionadas ao erros, que segundo Lima (2010) podem ser: sistemático, erro escalar associado ao instrumento de mensuração, presença de erro aleatório, erro escalar atrelado a medida, também a imprecisão instrumental e considerações feitas durante o processo, talvez não tenha sido razoável a idealização do sistema físico, a admissão da não interferência da resistência do ar. Conforme Bassanezi (2016, p.31), é preciso

reavaliar o modelo porque pode ser que as hipóteses e os dados, apesar de verdadeiros, estão insuficientes e alguma das variáveis envolvidas na situação real não terem sido utilizados no modelo teórico. A validação do modelo teórico (Bassanezi, 2016, p.30) ocorreu sob perspectiva de apenas um ângulo de inclinação, por isso é preciso rever essa proposta quanto ao resultado obtido. Quanto a parte experimental, compreende um estudo acessível de modelagem matemática como proposta de ensino de física porque esses erros, de acordo com Bassanezi (2016), estimulam os alunos formulem perguntas, hipóteses e suposições sobre o assunto em estudo, além do estimulo em buscar e coletar informações por meio da observação direta e indireta, da experimentação, o confronto das suposições individuais e coletivas com as informações obtidas, e reelaborar as ideias diante das evidências apresentadas e estimulam a interpretação das informações por meio do estabelecimento de relações e função.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em se tratando de uma ciência experimental, na qual existem erros arraigados ao próprio experimento, o modelador precisa estar consciente que o experimento precisa ser aperfeiçoado progressivamente, com instrumentos mais precisos a fim de minimizar erros escalares e sistemáticos, e possibilitar uma representação mais realística da natureza, possibilitando evolução no campo experimental. Os resultados experimentais apresentaram-se numa margem de confiabilidade adequada sugerindo que as propostas de modelagem matemática podem ser aplicadas no contexto educacional com resultados próximos aos valores esperados pelo modelo teórico numa perspectiva do caso particular, a qual despreza os efeitos da força de resistência do ar. Embora seja um caso particular, o uso experimental de materiais simples e de baixo custo, pode elucidar o aprendizado dos conceitos associados a posição, velocidade, altura máxima, alcance previsto, forças que envolvem o sistema físico, coeficiente associado ao momento de inércia. Mesmo que tenha existido algumas variações relacionadas a erro sistemático, escalar, aleatório e a imprecisão instrumental, considerações feitas durante o processo a exemplo do sistema físico suposto ideal com massa não influenciável e não interferência significativa das forças de atrito possibilitaram a validação dos modelos teóricos inicialmente descritos e também a possibilidade de aplicação experimental no contexto educacional sob situações nas quais não são exigidas uma linguagem matemática rigorosa com resultados obtidos razoáveis e não tão divergentes dos resultados esperados dentro da proposta de estudo.

Essa validação experimental é muito importante porque possibilita o estudo da modelagem matemática como proposta de ensino de física no contexto do ensino superior, e os casos particulares para discussão no contexto do ensino médio. As discussões provenientes dos experimentos vistos neste trabalho fornecem subsídios para estudo de tópicos relevantes da física, assim como elencam Maceti, Levada e Lautenschleguer (2012), para o ensino médio: movimento uniforme, movimento uniformemente variado, composição de movimentos, princípios da independência de movimentos simultâneos e da conservação da energia mecânica e conceito de centro de massa. Além de que poderia ser considerado no ensino médio como tendo caráter de discussão interdisciplinar. As propostas de modelagem apresentadas neste

trabalho podem também ser discutidas em disciplinas básicas do eixo comum, no ensino superior, como fundamentos de física 1, mecânica clássica, aplicações nas disciplinas de cálculo diferencial e integral e equações diferenciais, além das disciplinas experimentais de física. Relevantes na formação docente e discente (Bassanezi, 2016, pp. 179-181), são alternativas para uma ação pedagógica que se mostra eficiente no desenvolvimento de processos de aprendizagem significativa. De acordo com Bassanezi (2016, pp. 35-38, p.181), o uso da modelagem como método de ensino propicia ao educando o uso da matemática como uma ferramenta de formulação de perguntas, hipóteses, suposições e resolução de problemas em diferentes situações e áreas; desenvolve a capacidade criativa e atitude crítica dos alunos desde a escolha do tema para a modelagem, fazendo com que sintam-se responsáveis por seu próprio aprendizado, bem como na compreensão dos argumentos matemáticos e na incorporação de conceitos e resultados mediante construção de consideráveis relações matemáticas em cada etapa da modelagem, de modo que, assim, o estudante, instigado pelo amadurecimento de suas habilidades, possa entender e interpretar a física matemática e encontrar o momento oportuno para inserir a sistematização e analogias e utilizá-las adequadamente. Com isso, o que espera-se alcançar é que, conforme argumenta Bassanezi (2016, pp. 36-37), o estudante seja um participante ativo no processo, procurando renovar essa perspectiva tradicional, cujo alicerce ainda permanece na autotransmissão evidenciada na resolução de questões e memorização para exames, sem a efetiva estruturação cognitiva discente a respeito do fenômeno abordado. A análise da educação brasileira apresenta evidências de que a maior ênfase tem sido aplicada ao produto em detrimento ao processo, o que implica a qualidade insatisfatória do primeiro. E com isso suscita a preocupação de como ensinar a Física, buscando tornar o assunto, como qualifica Bassanezi (2016, p. 177), agradável, funcional, formal e aplicável, para a maioria dos alunos e professores. Consequentemente, será possível criar situações-problemas, dando lugar a criatividade em propor modelos adequados a essas situações.

REFERÊNCIAS

ANALISANDO imagens e vídeos com o computador. **IF-UFRGS**, 2021.Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/cref/uab/lab/tracker.html>. Acesso em: 27 de jan. de 2021

BASSANEZI, R. C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia**. 4ª ed.1ª reimpressão. São Paulo: Contexto, 2016.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem Matemática – teoria e prática**. 2ª ed. São Paulo: Contexto, 2004.

BRASIL, **Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Parte III (Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias), 2000b. (Disponível em http://portal.mec.gov.br, acesso em 15/7/20).

BRASIL, MEC, **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular**, Brasília: Secretaria da Educação Básica, 2017.

BROWN, D. Video Analysis and Modeling Tool for Physics Education. Disponível em: <https://physlets.org/tracker/>. Acesso em: 17 mar. 2021.

CAMPOS, A.A.G.; ALVES, E.S.; SPEZIALI, N.L. **Física experimental básica na universidade**. 2ª ed. Belo Horizonte: ed. UFMG, 2008

CASTELLAR, Sonia M.V.(Org).**Metodologias ativas: ensino por investigação**. São Paulo: FTD, 2016.

COGO, T.C.; LEITE, R. F. Ensino de Ciências por Investigação: Uma análise conceitual da BNCC. **Fag**,2019. Disponível em: <https://www.fag.edu.br/novo/pg/congressoeducacao/arquivos/2019/ENSINO-DE-CIENCIAS-POR-INVESTIGACAO-UMA-ANALISE-CONCEITUAL-DA-BNCC.pdf> acesso em: 27 de jan. de 2021.

COPELLI, M. **Rolamento – Cinemática**. 2015; Curso introdutório de mecânica (Física 1). Rolamento sem considerar deslizamento. Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=pqH0EvGVVXE>. Acesso em: 01 nov. 2020.

COPELLI, M. **Rolamento – Energia Cinética**. 2015; Curso introdutório de mecânica (Física 1).Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=IWtL8g9DDUw>. Acesso em: 01 nov. 2020.

COPELLI, M. **Rolamento – Forças**. 2015; Curso introdutório de mecânica (Física 1). Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=6_s9ncv3OAs>. Acesso em: 01 nov. 2020.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos da física: mecânica**. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

HISTORIA. **Belo Jardim**, 2021. Disponível em: <https://belojardim.pe.gov.br/a-cidade/historia/#:~:text=Em%20divis%C3%A3o%20territorial%20datada%20de%201%2DI%2D1979%2C%20o,divis%C3%A3o%20territorial%20datada%20de%202005.&text=Localiza%2Dse%20a%20uma%20latitude,uma%20altitude%20de%20608%20metros>. Acesso em: 27 de jan. de 2021

HODSON, D. **Hacia um Enfoque más critico Del Trabajo de laboratório**. Enseñanza de Las Ciências, 12(3), p.299-313, 1994.

LIMA,T.S. **Introdução a Teoria de Erros**. São José dos Campos, SP, 2010. <http://educacaoespacial.files.wordpress.com/2010/10/erros.pdf>. Acesso em: 01 nov. 2020

LOPES, W. **Variação da aceleração da gravidade com a latitude e altitude**. Caderno Brasileiro de Ensino de Física, V. 25, N. 3: p.561-568, dez. 2008. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/9106/0> acesso em 29 de julho de 2020

MACETI, H.; LEVADA, C. L. ; LAUTENSCHLEGUER, I. J. **Considerações sobre o alcance no lançamento oblíquo**. UEFS, 2012. Disponível em: < http://dfisweb.uefs.br/caderno/vol10n12/a1LevadaLobliquo.pdf> acesso em 15 de mar. de 2021

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: Mecânica vol. 1**. 1ª ed. São Paulo: Editora Blucher, 1998.

PIACENTINI, J. J.; GRANDI, B. C. S.; HOFMANN, M. P.; LIMA, F. R. R.; ZIMMERMANN, E. **Introdução ao Laboratório de Física**. 3ª ed. Florianópolis: ed. UFSC, 2008

PROJETO AIUTA. **Mecânica Clássica: única partícula**. Santa Maria, 2004. Disponível em: <http://jararaca.ufsm.br/websites/petfisica/download/Arquivos/Capitulo%202.pdf> Acesso em: 27 de jan. de 2021

Sá Martins, J.S.. **Aula 5.3 - Projétil sob ação de arrasto linear: equações de movimento**. Curso de Mecânica Clássica, UFF. 2017. (9m21s). Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=0IEXmCDIiK8>. Acesso em: 01 nov. 2020.

Sá Martins, J.S.. **Aula 5.5 - Projétil sob ação de arrasto linear: equação horária da coordenada horizontal**. Curso de Mecânica Clássica, UFF. 2017. (9m50s). Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=X4XpJG6VdJU>. Acesso em: 01 nov. 2020.

Sá Martins, J.S.. **Aula 6.4 - Equação horária para a componente vertical**. Curso de Mecânica Clássica, UFF. 2017. (6m55s). Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=cmWzpDd-D9k>. Acesso em: 01 nov. 2020.

Sá Martins, J.S.. **Aula 6.5 - Equação da trajetória**. Curso de Mecânica Clássica, UFF. 2017. (15m44s). Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=ltikGSz2UAw>. Acesso em: 01 nov. 2020.

Sá Martins, J.S.. **Curso de Mecânica Clássica**. UFF. 2017. Notas de Aula.

SASSERON, L.H.; MACHADO, V.F. (2017). **Alfabetização científica na prática: inovando a forma de ensinar Física**. São Paulo: Livraria da Física.

SCARPA, D.L.; GERALDI, A.M. (2016). **Metodologias ativas: ensino por investigação**. São Paulo: FTD.

STANDISH, R. What is SciDAVis?. **Scidavis**, 2017. Disponível em: <http://scidavis.sourceforge.net/> acesso em: 27 de jan. de 2021

THORNTON, S.;MARION, J. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. 1ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. 2ª ed. São Paulo: Cengage, 2011.

APÊNCIDE A - DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES

1) A componente *x*: equação horária da posição sob arrasto linear

De acordo com Sá Martins (2017), a componente *x* pode ser vista da seguinte forma

$$m\dot{v_x} = mg_x - bv_x$$

$$\dot{v_x} = -\frac{b}{m}v_x$$

Denotando o termo constante, a razão da constante *b* e massa *m*, de *k* , a expressão anterior torna-se

$$\frac{dv_x}{v_x} = -k\,dt$$

A solução dessa equação é uma variável v_x expresso como uma função de t. Integrando ambos os lados da equação diferencial, a expressão fica

$$\int_{v_{x_0}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = \int_0^t -k\,dt$$

$$v_x\,(t) = v_{x_0}e^{-kt}$$

Integrando a equação da velocidade em função do tempo encontrada anteriormente, é possível encontrar a equação horária da posição em função do tempo.

$$\frac{dx}{dt} = v_{x_0}e^{-kt}$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_{x_0}e^{-kt}\,dt$$

$$x\,(t) = \frac{v_{x_0}}{k}\,(1 - e^{-kt})$$

2) Casos particulares: inserção do tempo característico

De acordo com Sá Martins (2017), a distância percorrida quando a variável tempo tende a infinito é

$$x(t \to \infty) = \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{v_{x_0}}{k} (1 - e^{-kt}) = \frac{v_{x_0}}{k} = v_{x_0} \frac{m}{b}$$

Fazendo uma análise dimensional da expressão encontrada, nota-se que o inverso de *k* tem dimensão de tempo. Então, a expressão anteriormente encontrada também pode ser escrita como

$$x(t \to \infty) = v_{x_0} \tau$$

onde τ é o tempo característico ou uma escala de tempo associada a esse problema. Ao inserirmos o termo do tempo característico na equação da velocidade em função do tempo, a equação torna-se

$$v_x (t) = v_{x_0} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Em um tempo muito pequeno, é possível usar a expansão polinomial da exponencial com duas parcelas

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{t}{\tau}$$

Ao substituir essa expansão polinomial, com duas parcelas e para *t* pequeno, a equação da velocidade em função do tempo torna-se

$$v_x (t) \sim v_{x_0} - \frac{v_{x_0}}{\tau} t$$

Analogamente, é possível desenvolver o raciocínio de expansão polinomial de uma exponencial e aplicando na equação da posição em função do tempo

$$x (t) \sim \frac{v_{x_0}}{k} \left[kt - \frac{k^2 t^2}{2} \right]$$

$$x\,(t) \sim v_{x_0} t\; - \frac{v_{x_0} k}{2}\; t^2$$

3) A componente *y*: equação horária do lançamento horizontal sob arrasto linear

$$m\dot{v_y} = \; - m g_y - b v_y$$

De acordo com Sá Martins (2017), a expressão acima pode ser reescrita na forma

$$\dot{v_y} = \;\; g - \frac{b}{m} v_y$$

A velocidade constante v_y pode ser denotada como velocidade terminal do movimento de queda. Assim,

$$v_{ter} = \; \frac{mg}{b}$$

Ao multiplicarmos ambos os lados pelo fator temporal $\frac{m}{b}$, a equação pode ser reescrita como

$$\frac{m}{b} \dot{v_y} = \;\; v_{ter} - \; v_y$$

A solução da equação da componente *y* da velocidade é escrita como

$$v_y(t) = \; v_{ter} + (v_{y_0} - \; v_{ter}) e^{-kt}$$

Quando a variável associada a viscosidade do fluido tende a infinito, o argumento da exponencial torna-se muito pequeno, então, é possível utilizar a série de Taylor. Portanto, quando *kt* << 1

$$e^{-kt} = 1 - kt$$

$$v_y(t) = \;\; v_{y_0} - v_{y_0} kt + \; v_{ter}\; kt$$

Nesse caso, o termo $v_{y_0} kt$ tende a zero e o produto entre a velocidade terminal e o *k* é justamente a aceleração gravitacional *g*, portanto

$$v_y(t) = \ v_{y_0} + \ gt$$

Representando o caso na qual a equação da velocidade um movimento uniformemente acelerado. A fim de explorar situações referentes a posição variando em relação ao tempo, é preciso integrar a componente vertical da velocidade, a posição pode ser obtida como

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t v_{ter} + (v_{y_0} - \ v_{ter}) e^{-kt}\, dt$$

$$y\ (t) \ = \ y_0 + \ v_{ter}\ t - (v_{y_0} - \ v_{ter}) \frac{1}{k} \ (e^{-kt} - 1)$$

4) Equação da trajetória: combinação das equações encontradas anteriormente

$$x\ (t) = \frac{v_{x_0}}{k}\ (1 - e^{-kt})$$

$$y(t) = y_0 + v_{ter} t - \left(v_{y_0} - v_{ter}\right) \frac{1}{k} (1 - e^{-kt})$$

De acordo com Sá Martins (2017), admitindo que no início do movimento, o projétil sai da origem. E com o objetivo de isolar a variável *t* da segunda equação, então

$$y(t) = \left(v_{y_0} + v_{ter}\right) \frac{1}{k} (1 - e^{-kt}) \ - v_{ter} t$$

A partir da seguinte relação, podemos isolar a variável *t*

$$\frac{x}{x_\infty} = \ (1 - e^{-kt})$$

$$-kt = ln\left(1 - \frac{x}{x_\infty}\right)$$

$$t = -\frac{1}{k} ln\left(1 - \frac{x}{x_\infty}\right)$$

Substituindo *t* na equação *y(t)* a equação é reescrita como

$$y(x) = \left(v_{y_0} + v_{ter}\right)\frac{1}{k}\frac{x}{x_\infty} + \frac{v_{ter}}{k} ln\left(1 - \frac{x}{x_\infty}\right)$$

Lembrando que $k = \frac{b}{m}$ e $x_\infty = v_{x_0}\tau = \frac{v_{x_0}}{k}$ então a equação acima pode ser reescrita como

$$y(x) = \left(\frac{v_{y_0} + v_{ter}}{v_{x_0}}\right)x + \frac{v_{ter}}{k} ln\left(1 - \frac{x}{x_\infty}\right)$$

Em lançamentos de projéteis, a distância percorrida segundo a horizontal chama-se alcance. Esse valor é encontrado impondo a condição que uma substituição feita no lugar do *x* resulta *y = 0*, ou seja, *Y (x = R) = 0*. Substituindo essa condição na equação, a equação pode ser escrita na forma

$$\left(\frac{v_{y_0} + v_{ter}}{v_{x_0}}\right)R + \frac{v_{ter}}{k} ln\left(1 - \frac{R}{x_\infty}\right) = 0$$

A equação não tem solução analítica. Portanto, Para verificar se há como solucionar é necessário admitir como hipótese e depois averiguar se $\frac{R}{x_\infty} \ll 1$ o resultado da equação torna-se aceitável. Pela expansão de Taylor para o logaritmo

$$ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots$$

Aplicando a expansão de Taylor, a equação da trajetória fica portanto

$$\left(\frac{v_{y_0}+v_{ter}}{v_{x_0}}\right)R - v_{ter}\frac{R}{v_{x_0}}\left[1+\frac{1}{2}\frac{R}{x_\infty}+\frac{1}{3}\left(\frac{R}{x_\infty}\right)^2\right]=0$$

É possível dividir por *R* visto que R = 0 é inadmissível nessa equação. Portanto,

$$\frac{v_{y_0}}{v_{x_0}} - \frac{v_{ter}}{v_{x_0}}\left[\frac{1}{2}\frac{R}{x_\infty}+\frac{1}{3}\left(\frac{R}{x_\infty}\right)^2\right]=0$$

$$R = \frac{2x_\infty v_{y_0}}{v_{ter}} - \frac{1}{3}\frac{2x_\infty}{v_{ter}}v_{ter}\left(\frac{R}{x_\infty}\right)^2$$

Sabendo que $x_\infty = v_{x_0}\tau = \frac{v_{x_0}}{k}$ e que $v_{ter} = g\tau = \frac{g}{k}$ então

$$R = \frac{2v_{x_0}v_{y_0}}{g} - \frac{1}{3}\frac{2v_{x_0}v_{y_0}}{g}\frac{v_{ter}}{v_{y_0}}\left(\frac{R}{x_\infty}\right)^2$$

Denotando $R_{vac} = \frac{2v_{x_0}v_{y_0}}{g}$ então

$$R = R_{vac}\left[1-\frac{1}{3}\frac{gk}{v_{y_0}}\frac{1}{{v_{x_0}}^2}R^2\right]$$

A partir dessa equação, é possível construir iterações, procedimentos repetitivos que geram valores de R cada vez mais precisos. As sequência de aproximações são cada uma dependente da etapa anterior. Na ordem zero, para o caso particular onde considera-se o alcance do projétil não sofrendo efeitos da resistência do ar, obtém-se

$$R = R_{vac}$$

Na ordem um, obtém-se

$$R = R_{vac}\left[1-\frac{4}{3}\frac{v_{y_0}}{v_{ter}}\right]$$

5) A energia cinética E_c do corpo rígido

Conforme Copelli (2015), a energia cinética E_c de um corpo rígido pode ser escrita como

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i {V_i}^2 = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \left(\vec{\mathrm{V}}_{CM} + \vec{v_i}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \left(\vec{\mathrm{V}}_{CM} + \vec{v_i}\right).\left(\vec{\mathrm{V}}_{CM} + \vec{v_i}\right)$$

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \left[\mathrm{V}_{CM}^2 + \mathrm{V}_i^2 + 2\vec{\mathrm{V}}_{CM}.\vec{v_i}\right] = \frac{1}{2}M\mathrm{V}_{CM}^2 + \frac{1}{2}\sum_i^N m_i v_i^2 + \vec{\mathrm{V}}_{CM}.\sum_i^N m_i\vec{v_i}$$

Num corpo rígido, m_i só pode girar em torno do centro de massa. Portanto, o fator multiplicativo do último termo é nulo. Então, a energia cinética de um corpo rígido é

$$E_c = \frac{1}{2}M\mathrm{V}_{CM}^2 + \frac{1}{2}\sum_i^N m_i v_i^2$$

Onde a parcela $\frac{1}{2}M\mathrm{V}_{CM}^2$ está associada a translação em torno do centro de massa e a parcela $\frac{1}{2}\sum_i^N m_i v_i^2$ está associada a rotação em torno do centro de massa.

Sabendo que

$$v_i = \omega r_i$$

Então

$$\frac{1}{2}\sum_i^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i(\omega r_i)^2 = \frac{1}{2}\omega^2\sum_i^N m_i {r_i}^2$$

Sendo que o momento de inércia do centro de massa é $\sum_i^N m_i {r_i}^2$ então

$$\frac{1}{2}\sum_i^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

Portanto, a energia cinética de um corpo rígido pode ser reescrita como

$$E_c = \frac{1}{2}M\mathrm{V}_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

Onde M é a massa total do corpo e a velocidade considerada é a do centro de massa.

6) Velocidade do centro de massa: uso do teorema da conservação da energia mecânica apesar de força de atrito não-nula

Conforme Copelli (2015),

$$E_M^i = E_M^f$$

$$K_i + U_g^i = K_f + U_g^f$$

$$K_i + U_g^i = K_f$$

$$\frac{1}{2}M\mathrm{v}_0^2 + \frac{1}{2}I_{CM}{\omega_0}^2 + Mgh_{CM} = \frac{1}{2}M\mathrm{v}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

$$\frac{1}{2}v^2\left(1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}\right) = \frac{1}{2}{v_0}^2\left(1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}\right) + Mgh_{CM}$$

Se $h_{CM} = L\ sen\ \theta$ onde L é a distância percorrida pelo objeto no plano inclinado, então

$$v^2 = {v_0}^2 + \frac{2\ g\ sen\ \theta}{\left(1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}\right)}\ L$$

Associando essas ideias, é possível calcular, por exemplo, a velocidade final com que o corpo chega no final da trajetória

$$v_{CM} = \sqrt{v_0^2 + \frac{2\ g\ sen\theta}{\left(1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}\right)}\ L}$$