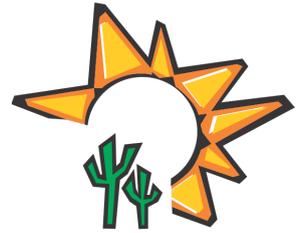




UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE  
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE  
FÍSICA-LICENCIATURA



# **Contextualizando o ensino de Geometria Analítica com aplicação na construção de Objetos Fractais**

**Felipe Camargo Marcolino**

Caruaru-PE  
Janeiro de 2016

**Felipe Camargo Marcolino**

***Contextualizando o ensino de Geometria Analítica com  
aplicação na construção de Objetos Fractais***

Monografia de Graduação apresentada ao Curso de Física-Licenciatura do Núcleo de Formação Docente do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Física.

Orientador

Prof. Dr. Gustavo Camelo Neto

Núcleo Interdisciplinar de Ciências Exatas e Inovação Tecnológica

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE - NFD

Caruaru - PE

Janeiro de 2016

Catálogo na fonte:  
Bibliotecária - Simone Xavier CRB/4-1242

M321c Marcolino, Felipe Camargo.  
Contextualizando o ensino da geometria analítica com aplicação na construção de objetos fractais. / Felipe Camargo Marcolino. - Caruaru: O Autor, 2016.  
64f. il. ; 30 cm.

Orientador: Gustavo Camelo Neto.  
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Física, 2016.  
Inclui referências bibliográficas

1. Geometria analítica. 2. Ensino superior. 3. Fractais. I. Camelo Neto, Gustavo. (Orientador). II. Título

371.12 CDD (23. ed.) UFPE (CAA 2016-001)

Monografia de Graduação sob o título *Contextualizando o ensino de Geometria Analítica com aplicação na construção de Objetos Fractais* apresentada por Felipe Camargo Marcolino e aceita pelo Núcleo de Formação Docente do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco, sendo aprovada por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

---

Paulo H. R. Peixoto  
Coordenador do curso de Física-Licenciatura

---

Gustavo Camelo Neto  
Orientador e 1º Examinador

---

Paulo H. R. Peixoto  
2º Examinador

---

Augusto C. L. Moreira  
3º Examinador

Caruaru - PE, 11 de Janeiro de 2016.

*À minha avó Josefa Amância, que sempre me  
indicou o caminho que me levaria à vitória.*

# *Agradecimentos*

Agradeço a Deus pela oportunidade de mais uma vez estar aqui buscando minha evolução e por ter me proporcionado momentos de tanta alegria e felicidade.

Agradeço a todos da minha família por terem me apoiado em todas as minhas decisões.

Agradeço à minha esposa Rafaela Mendes por sempre ter sido meu porto seguro durante toda a minha graduação.

Agradeço aos amigos de curso que estiveram presentes nos principais momentos da minha formação, em especial Thiago Silva, Hugo Deleon, Renato Santos, Gladistony Lins e Marianne Stely.

Agradeço a todos os meus professores do ensino médio e fundamental, em especial Wagner Santos, Urbano Sercundes, Regivaldo Farias e Marcos Sabino, que proporcionaram os primeiros contatos com essa ciência maravilhosa e que no início de tudo me mostraram o quanto eu era capaz de conseguir realizar todos os meus sonhos.

Agradeço a todos os professores que durante a graduação me apoiaram e me indicaram os melhores caminhos para o meu aprimoramento profissional.

Agradeço também ao meu orientador, que durante suas aulas e orientações sempre me mostrou que eu poderia me tornar não só um pesquisador, mas também um bom professor de física.

*Se cheguei até aqui foi porque me apoiei no ombro dos gigantes.*

Isaac Newton

## RESUMO

A Geometria Fractal é uma área recente que vem alcançando destaque, seja pela beleza de suas estruturas, seja pela sua importância ao descrever, de forma mais precisa do que a Geometria Euclidiana, os diversos objetos encontrados na natureza. Dessa maneira, o estudo dos fractais encontra interesse nos mais diversos ramos das ciências, particularmente na Física, na Matemática, na Biologia e na Medicina; assim como aplicações importantes em Engenharia. A Geometria Analítica, por sua vez, é o ramo da Matemática que estuda a Geometria através da Álgebra e da Análise, associando expressões algébricas a objetos geométricos. Dessa forma, a Geometria Analítica possui grau de abstração superior ao da própria Geometria, sendo necessário esforço superior do estudante para compreender como uma relação algébrica é capaz de descrever um objeto geométrico e vice-versa. A proposta deste trabalho é apresentar uma contextualização da Geometria Analítica através do estudo de alguns fractais elementares, fornecendo também uma introdução à Geometria Fractal. Os resultados obtidos podem ser utilizados como motivação tanto para o estudo da Geometria Analítica como para o estudo de Programação. Neste momento, entretanto, focalizaremos na motivação para o estudo da Geometria Analítica, pois esse é o primeiro passo para a construção de fractais em computadores.

*Palavras-chave:* Ensino Superior, Geometria Analítica, Geometria Fractal.

# *Lista de Figuras*

2.1	Ilha do Campeche e Conjunto de Julia . . . . .	p. 16
2.2	Estrutura fina do conjunto de Mandelbrot . . . . .	p. 17
2.3	Exemplo de autossimilaridade exata observada na curva de von Koch . . . . .	p. 18
2.4	Medindo a dimensão topológica . . . . .	p. 19
2.5	Dois exemplos de $\delta$ -cobertura do conjunto $F$ . . . . .	p. 20
2.6	Comportamento da medida de Hausdorff. . . . .	p. 21
2.7	Dimensão de um segmento de reta . . . . .	p. 22
2.8	Dimensão de um quadrado . . . . .	p. 23
2.9	Dimensão de um cubo . . . . .	p. 24
2.10	Método de contagem de caixas. . . . .	p. 25
2.11	Construção da Poeira de Cantor . . . . .	p. 26
2.12	Construção da Curva de von Koch. . . . .	p. 28
2.13	Construção da Gaxeta de Sierpinski . . . . .	p. 30
2.14	Construção do Tapete de Sierpinski . . . . .	p. 32
2.15	Três antenas fractais. . . . .	p. 33
2.16	Representação do conjunto de Mandelbrot . . . . .	p. 34
2.17	Representação de alguns dos conjuntos de Julia . . . . .	p. 35
3.1	Representação de um ponto no plano . . . . .	p. 38
3.2	Distância entre dois pontos . . . . .	p. 38
3.3	Ponto médio de um segmento . . . . .	p. 39
3.4	Projeções de um ponto sobre os eixos cartesianos. . . . .	p. 41
3.5	Três pontos alinhados. . . . .	p. 42

3.6	Reta no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ . . . . .	p. 44
4.1	Construção do segmento base . . . . .	p. 46
4.2	Divisão do segmento $\overline{AB}$ em três partes iguais. . . . .	p. 46
4.3	Primeira e Segunda iteração da Poeira de Cantor. . . . .	p. 47
4.4	Construção da curva de von Koch. . . . .	p. 48
4.5	Projeções dos segmentos sobre os eixos ordenados. . . . .	p. 49
4.6	Primeira iteração da Curva de von Koch. . . . .	p. 49
4.7	Ângulos da primeira iteração da Curva de von Koch. . . . .	p. 50
4.8	Primeiro passo da segunda iteração. . . . .	p. 52
4.9	Descrição dos ângulos utilizados na segunda iteração. . . . .	p. 52
4.10	Segunda iteração. . . . .	p. 53
4.11	Construção do quadrado inicial. . . . .	p. 55
4.12	Quadrado totalmente preenchido com os lados divididos em três segmentos de mesmo comprimento. . . . .	p. 56
4.13	Primeira e segunda iterações do Tapete de Sierpinsk. . . . .	p. 57
4.14	Triângulo equilátero de lados L. . . . .	p. 58
4.15	Triângulo totalmente preenchido. . . . .	p. 58
4.16	Quatro triângulos equiláteros. . . . .	p. 59
4.17	Primeira e segunda iterações da Gaxeta de Sierpinsk. . . . .	p. 60

## *Lista de Tabelas*

- 2.1 Tamanho e número de segmentos da Poeira de Cantor . . . . . p.27
- 2.2 Tamanho e número de segmentos da Curva de von Koch. . . . . p.29
- 2.3 Tamanho dos lados e número de triângulos da Gaxeta de Sierpinski. . . . . p.31
- 2.4 Tamanho dos lados e número de quadrados do Tapete de Sierpinski. . . . . p.32

# *Sumário*

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 13
<b>2</b>	<b>Introdução à Geometria Fractal</b>	p. 15
2.1	Propriedades dos Fractais . . . . .	p. 16
2.2	Algumas definições de dimensão . . . . .	p. 18
2.2.1	Dimensão Topológica . . . . .	p. 18
2.2.2	Dimensão de Hausdorff . . . . .	p. 19
2.2.3	Dimensão para objetos autossimilares exatos . . . . .	p. 22
2.2.4	Dimensão de contagem de caixas . . . . .	p. 24
2.3	Alguns fractais determinísticos . . . . .	p. 26
2.3.1	Poeira de Cantor . . . . .	p. 26
2.3.2	Curva de von Koch . . . . .	p. 28
2.3.3	Gaxeta de Sierpinski . . . . .	p. 30
2.3.4	Tapete de Sierpinski . . . . .	p. 31
2.3.5	Conjunto de Mandelbrot e Conjuntos de Julia . . . . .	p. 34
<b>3</b>	<b>Revisão de alguns conceitos de Geometria Analítica</b>	p. 37
3.1	Sistema cartesiano . . . . .	p. 37
3.2	O Ponto . . . . .	p. 37
3.2.1	Distância entre dois pontos . . . . .	p. 38
3.2.2	Ponto Médio de um segmento . . . . .	p. 39
3.2.3	Projeção de um ponto sobre os eixos cartesianos . . . . .	p. 40
3.2.4	Condição de alinhamento entre três pontos . . . . .	p. 41

3.3	Reta . . . . .	p. 43
3.3.1	Equação geral da reta . . . . .	p. 43
<b>4</b>	<b>Fractais e Geometria Analítica</b>	<b>p. 45</b>
4.1	Poeira de Cantor . . . . .	p. 45
4.2	Curva de von Koch . . . . .	p. 47
4.3	Tapete de Sierpinski . . . . .	p. 54
4.4	Gaxeta de Sierpinski . . . . .	p. 57
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>p. 61</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>p. 62</b>

# *1 Introdução*

A Geometria Fractal [1–5] surgiu da necessidade de se estudar objetos não descritos pela Geometria Euclidiana tradicional, tais como linhas costeiras, leitos de rios, nuvens, paisagens, etc. Retas, triângulos e esferas não se mostraram capazes de representar, por exemplo, os detalhes de uma árvore, o leito de um rio ou as formas de montanhas. Linhas costeiras ou fronteiriças possuem detalhes que se realçam ou desaparecem quando observadas em diferentes escalas, podendo, inclusive, apresentar comprimentos diferentes em distintas escalas.

Baseado nessas observações, B. Mandelbrot [5] propôs que a natureza seria melhor descrita por objetos fractais. Embora várias estruturas fractais tenham sido descobertas já na segunda metade do século XIX por matemáticos como Weierstrass, Cantor, Peano, Helge von Koch, etc, tais estruturas eram consideradas apenas curiosidades matemáticas, exemplos de curvas não retificáveis, contínuas, mas sem derivada em nenhum ponto [4, 6]. O estudo da Geometria Fractal, no entanto, ganhou impulso a partir do ensaio de Mandelbrot [5], relacionando a Geometria Fractal com as formas encontradas na natureza.

Não há uma definição matemática definitiva de fractal, mas uma descrição baseada em um conjunto de propriedades, tais como autossimilaridade, estrutura fina, irregularidade e dimensão fractal superior à sua dimensão topológica. A dimensão fractal pode ser definida de várias maneiras, a forma mais tradicional é através da dimensão de Hausdorff, e representa uma medida de como o objeto ocupa o espaço. Fractais ideais são, na maioria das vezes, construídos através de processos iterativos, que podem ser realizados com o uso de um computador. Neste caso, é preciso encontrar os pontos que representam o fractal em termos de coordenadas cartesianas para cada iteração, sendo necessário para isso a utilização de conceitos de Geometria Analítica.

Muitos fractais apresentam grande beleza, atraindo, em geral, a atenção de quem os vê pela primeira vez e despertando o interesse em tentar reproduzi-los, seja em papel, seja através do uso de computadores. Além disso, após uma reflexão cuidadosa, fica claro que a Geometria Fractal apresenta uma conexão com a natureza, como será mostrado no capítulo 2, muito mais íntima que a Geometria Euclidiana. Com base nesses fatos, é proposta uma contextualização do

ensino de Geometria Analítica com o uso da Geometria Fractal. Utilizando a beleza dos fractais para atrair a atenção dos alunos, pode-se direcionar os conceitos já estudados em um curso de Geometria Analítica, mostrando uma aplicação prática do uso da mesma, ilustrando então que a Geometria Analítica pode ser utilizada para construir figuras diferentes das figuras geométricas euclidianas tradicionais.

No capítulo 1, é apresentada uma introdução à Geometria Fractal, ilustrando suas principais características, definição e métodos para a obtenção da dimensão fractal e exemplos de fractais matemáticos idealizados.

No capítulo 2, é apresentado um resumo de alguns conceitos de Geometria Analítica que são importantes para o cálculo das coordenadas dos pontos que compõem cada iteração de um fractal ideal.

No capítulo 3, é apresentada a construção das primeiras iterações de alguns fractais ideais utilizando os conceitos de Geometria Analítica.

Finalmente, são apresentadas as conclusões e perspectivas deste trabalho.

## 2 *Introdução à Geometria Fractal*

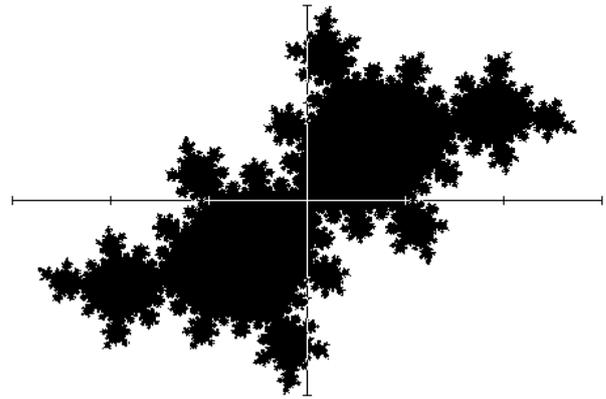
Desde a segunda metade do século XIX, com a proposta de Weierstrass de uma função contínua mas não diferenciável em nenhum ponto [6], matemáticos como Helge von Koch, Giuseppe Peano, George Cantor e Waclaw Sierpinski descobriram a existência de várias outras estruturas que escapavam aos padrões da Geometria Euclidiana, gerando assim uma ruptura entre a matemática clássica do século XIX e a matemática moderna do século XX [3, 5]. Graças a esse comportamento tais estruturas ficaram conhecidas como “casos patológicos” ou “monstros matemáticos”. Entretanto, o forte desenvolvimento da Geometria Fractal se deu a partir de Mandelbrot [5].

Benoit Mandelbrot, trabalhando na IBM, recebeu a responsabilidade de tentar resolver um problema que intrigava os engenheiros da empresa. Estes haviam observado a presença de um padrão de ruídos na transmissão de sinais por redes de computadores, mas devido à irregularidade e aleatoriedade do padrão não foram capazes de alcançar uma conclusão [7]. Mandelbrot, então, analisou a propagação dos sinais utilizando materiais com um maior índice de pureza, contudo, observou que os ruídos continuavam. Fazendo um estudo mais profundo do padrão de ruído, Mandelbrot observou que eles se agrupavam em blocos, os quais, quando ampliados apresentavam blocos menores, formando uma figura semelhante ao conjunto de Cantor [8] - um conjunto fractal descoberto por Cantor em 1883. Algum tempo depois, concluiu-se que os ruídos eram produzidos por efeitos quânticos, originados na própria estrutura cristalina do material.

Para Mandelbrot, a Geometria Fractal, opondo-se totalmente aos padrões da Geometria Euclidiana, possibilita uma descrição mais precisa das formas geométricas encontradas na natureza. Somente como ilustração, a figura 2.1 apresenta uma fotografia aérea da Ilha do Campeche, localizada ao sul de Florianópolis, SC, Brasil, em comparação livre com um dos vários conjuntos fractais denominados conjuntos de Julia. Os conjuntos de Julia, como será discutido na seção 2.3, são compostos por diferentes conjuntos de pontos no plano complexo.



(a) Ilha do Campeche



(b) Conjunto de Julia.

Figura 2.1: Ilha do Campeche, localizada ao sul de Florianópolis, SC, Brasil e um dos vários conjuntos de Julia, representado no plano complexo.

## 2.1 Propriedades dos Fractais

O termo fractal vem do adjetivo em latim *fractus*, e do correspondente verbo também em latim *frangere*, que significa quebrar. Mandelbrot estendeu o conceito de fractal afirmando que deveria, também, significar “irregular”, tendo, inicialmente, definido Fractal como um conjunto para o qual a *dimensão de Hausdorff-Besicovitch* é estritamente maior que a sua dimensão topológica [5]. Entretanto, a definição proposta por Mandelbrot excluiria vários objetos com características fractais; portanto, atualmente, não há uma definição precisa de fractal, mas um conjunto de propriedades as quais o objeto deve satisfazer. São elas [2]:

- (i) Possuem algum tipo de *estrutura fina*;
- (ii) Possuem *irregularidades* que não podem ser descritas pela Geometria Euclidiana;
- (iii) Possuem *autossimilaridade*, ou *autossemelhança*, exata ou aproximada;
- (iv) Têm dimensão fractal, definida de alguma forma (normalmente a dimensão de Hausdorff), maior que a dimensão topológica de seus elementos;
- (v) Na maioria dos casos é definido de maneira simples, geralmente de maneira recursiva.

A estrutura fina se apresenta como a riqueza de detalhes existentes em um fractal [1]. Ou seja, quando partes de um fractal são ampliadas, novas estruturas são reveladas. Essas estruturas podem ser idênticas ao fractal visto como um todo, como no caso de fractais exatamente autossimilares, ou não, como no caso da autossimilaridade aproximada. Isso pode ser observado na figura 2.2, onde o conjunto de Mandelbrot é representado no plano Complexo. Sua estrutura fina

é revelada numa sequência de ampliações, iniciada na figura superior esquerda, onde o conjunto de Mandelbrot completo é apresentado. A parte circulada é, então, ampliada na figura central da linha superior; esta, por sua vez, tem a parte circulada ampliada na terceira figura da primeira linha. Na linha inferior, novas ampliações são realizadas, sempre da direita para a esquerda.

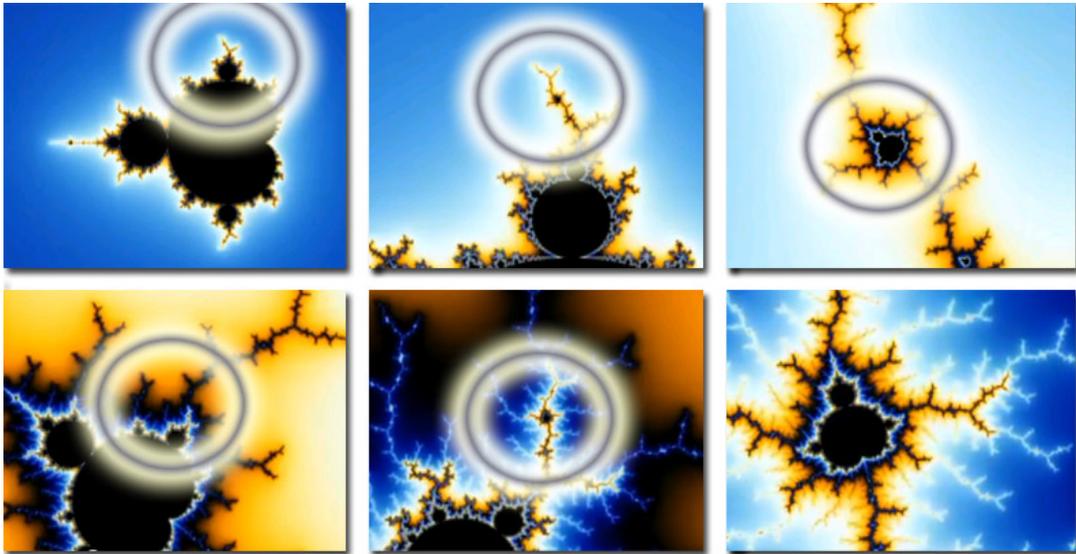


Figura 2.2: Estrutura fina do conjunto de Mandelbrot sendo revelada através de ampliações de regiões no plano complexo. A sequência de ampliações ocorre da esquerda para a direita e de cima para baixo. Figura extraída de [http://www.s-world.biz/Sparta\\_Rises\\_Again/EEE-14Billion\\_Years.htm](http://www.s-world.biz/Sparta_Rises_Again/EEE-14Billion_Years.htm), em 16/12/2015.

Autossimilaridade, ou autossemelhança, é a propriedade que caracteriza a invariância por escala de um fractal. Ou seja, se uma pequena parte de um fractal for retirada e ampliada, a mesma figura do fractal original será observada. A autossemelhança pode ser exata ou aproximada [9]. Quando é exata, o fractal gerado a cada etapa é uma cópia idêntica da figura anterior, ou seja, as proporções e ângulos são mantidas. Os fractais que possuem autossemelhança exata são chamados fractais determinísticos ou simplesmente autossimilares. Quando a autossemelhança é aproximada, as proporções originais não são mantidas, esses são chamados fractais autoafins [1, 9]. A maioria dos fractais encontrados na natureza são autoafins.

A autossemelhança é muitas vezes resultado da forma recursiva como um fractal determinístico é formado, sendo suas partes menores, cópias reduzidas das partes maiores. Essa propriedade é observada na figura 2.3, onde é representada a *curva de von Koch*, que será tratada mais adiante, na seção 2.3.

A dimensão de um objeto fractal é, sem dúvida, uma de suas características mais importantes. Intuitivamente, estamos familiarizados com a noção de dimensão euclidiana, a qual nos remete sempre a valores inteiros. Contudo, no caso desses objetos singulares, a dimensão pode

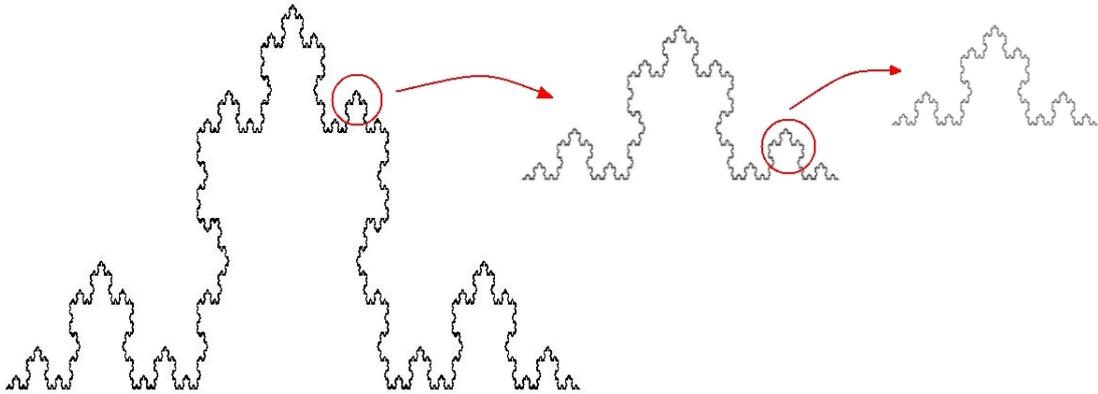


Figura 2.3: Exemplo de autossimilaridade exata observada na curva de von Koch. Observe que as ampliações destacadas reproduzem a mesma figura em escala reduzida.

ser não-inteira, de onde se origina o termo dimensão fractal [1, 4, 5]. Devido à sua importância, o conceito de dimensão será abordado mais detalhadamente na seção seguinte.

## 2.2 Algumas definições de dimensão

Nesta seção, serão discutidas as definições de *Dimensão Topológica* e de *Dimensão de Hausdorff*, procurando esclarecer suas sutilezas sem retirar o rigor matemático. Em seguida, dois métodos práticos e importantes para o cálculo ou estimativa da dimensão fractal de objetos autossimilares e autoafins também serão introduzidos.

A ideia geral de dimensão está relacionada à forma como os objetos ocupam o espaço [2–4, 8, 9]. Há várias definições de dimensão. Serão apresentadas aqui apenas aquelas necessárias para a correta compreensão dos conceitos discutidos neste trabalho.

### 2.2.1 Dimensão Topológica

Uma definição formal e rigorosa de dimensão topológica, também conhecida como dimensão de cobertura de Lebesgue, requer a compreensão de temas que vão além do escopo deste trabalho. Daremos, aqui, no entanto, uma ideia intuitiva da dimensão topológica citando alguns exemplos.

De modo geral, baseado na ideia de ocupação do espaço, a dimensão topológica de um *espaço topológico* [10], o qual, neste trabalho, será um conjunto de pontos que formam uma figura, é definida a partir da maneira como seria possível recobrir totalmente esse conjunto de pontos com bolas abertas, de tal modo que o número  $n$  de bolas abertas com uma interseção não-vazia comum com bolas adjacentes seja mínimo. A dimensão topológica, ou de cobertura

de Lebesgue [8, 9],  $d$ , será  $d = n - 1$ , ou seja, o número mínimo de bolas com uma interseção comum menos uma unidade. Por bolas abertas, entenda-se uma região aberta do espaço, por exemplo, um intervalo aberto em um espaço euclidiano unidimensional.

Assim, um conjunto de pontos isolados (desconexos) pode ser recoberto por bolas abertas suficientemente pequenas, sem que haja interseções entre elas; logo, haverá uma única bola com elementos “em comum”. Assim, a dimensão topológica de um conjunto de pontos será  $d = 0$  (figura 2.4(a)). Por outro lado, para uma linha (reta ou curva) contínua, para bolas suficientemente pequenas, sempre haverá uma interseção entre pares de bolas adjacentes, de modo que  $n = 2$ . Logo, a dimensão topológica de uma linha será  $d = 1$  (figura 2.4(b)). Para uma superfície, haverá interseção entre três bolas:  $n = 3$ , logo,  $d = 2$  (figura 2.4(c)). Para um volume, teremos  $n = 4$ , assim  $d = 3$ . As bolas possuirão a mesma dimensão do espaço euclidiano onde o objeto está descrito.

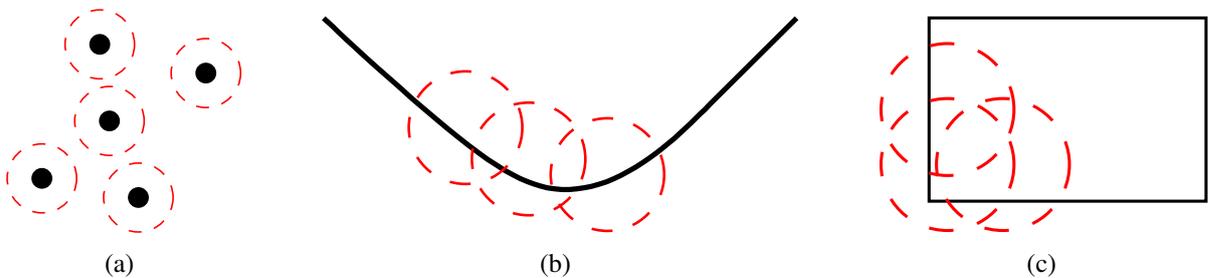


Figura 2.4: Medindo a dimensão topológica de um conjunto de pontos, de uma linha e de um plano. Embora estejam sendo utilizadas bolas abertas circulares nos três casos, a dimensão da bola dependerá da dimensão do espaço euclidiano utilizado. A dimensão é o número de bolas que formam uma interseção comum, a menos de uma unidade.

### 2.2.2 Dimensão de Hausdorff

A dimensão de Hausdorff, também conhecida como dimensão de Hausdorff-Besicovitch [2], é uma das mais antigas e importantes formas de determinar a dimensão fractal de um conjunto [2]. Como outras definições, ela também está associada ao conceito de cobertura [4]. A seguir será mostrado, por completeza, uma definição formal da definição de Hausdorff, o leitor que não estiver interessado nessa definição pode ir diretamente para a seção 2.2.3.

A dimensão de Hausdorff [2] está bem definida para qualquer conjunto, e é de fácil manipulação matemática; contudo, é difícil de ser estimada por meios computacionais. Será apresentada uma definição formal, mas restrita a conjuntos no  $\mathbb{R}^n$ , que são os de interesse para este trabalho.

Seja  $F$  um subconjunto do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Deseja-se cobrir esse subconjunto com

outros subconjuntos de diâmetro no máximo  $\delta$ . O diâmetro de um conjunto  $U$  é dado por

$$|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}, \quad (2.1)$$

onde  $|x - y|$  é alguma distância, a distância euclidiana usual por exemplo, entre os pontos  $x$  e  $y \in \mathbb{R}^n$  e  $\sup(x)$  representa o *supremo*. De forma intuitiva, o diâmetro de um conjunto é “a maior” distância entre dois pontos quaisquer desse conjunto.

A diferença existente entre o máximo e o supremo de um conjunto, está no fato de que o máximo deve pertencer ao conjunto em estudo, ao passo que o supremo de um conjunto pode ou não pertencer ao conjunto. Por exemplo, no intervalo aberto  $(0, 1)$ , o 1 não pertence ao conjunto, logo não é um máximo, mas é o supremo do intervalo. Contudo, no intervalo  $(0, 1]$ , 1 é tanto o máximo quanto o supremo. No sentido oposto, mas de forma similar, define-se o ínfimo de um conjunto  $U$ , simbolizado matematicamente por  $\inf(U)$ . Assim,  $\inf[(0, 1)] = 0$ .

A coleção  $\{U_i\}$  dos subconjuntos de diâmetro no máximo  $\delta$  que cobrem  $F$  é chamada de  $\delta$ -cobertura de  $F$ . A figura 2.5 ilustra dois exemplos de  $\delta$ -coberturas do conjunto  $F$ . Na parte superior, é observado um conjunto de pontos  $F$ , o diâmetro máximo  $\delta$  está representado na parte inferior central da figura. À direita é mostrada uma forma de recobrir  $F$ , com laços de diâmetro não-maior que  $\delta$ , à esquerda uma outra forma de recobrir  $F$ .

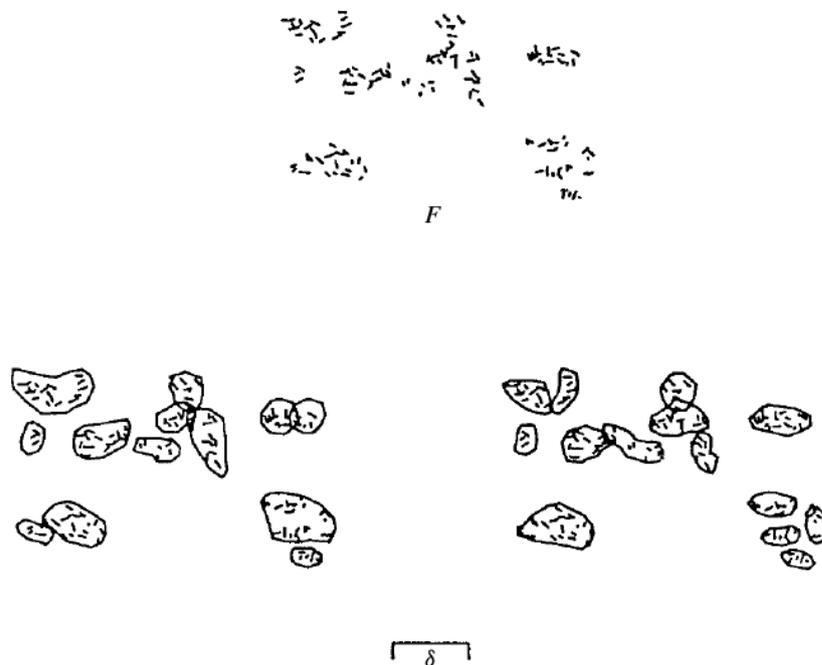


Figura 2.5: Dois exemplos de  $\delta$ -cobertura do conjunto  $F$ . Na parte superior, é observado um conjunto de pontos  $F$ , o diâmetro máximo  $\delta$  está representado na parte inferior central da figura. À direita é mostrada uma forma de recobrir  $F$ , com laços de diâmetro não-maior que  $\delta$ , à esquerda uma outra forma de recobrir  $F$ . Figura extraída de [2].

A partir da figura 2.5, observa-se que pode haver para um mesmo  $\delta$  uma quantidade muito grande de possíveis coberturas de  $F$ . À medida que o  $\delta$  diminui o número dessas coberturas possíveis também diminui, pois fica cada vez mais difícil reajustar os elementos da cobertura.

Seja  $s$  um número não-negativo; para qualquer  $\delta > 0$ , define-se

$$\mathcal{H}_\delta^s = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s; \quad \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ é } \delta\text{-cobertura de } F \right\}, \quad (2.2)$$

ou seja, o ínfimo da soma das  $s$ -ésimas potências dos diâmetros de todas as  $\delta$ -coberturas possíveis de  $F$ .

A medida de Hausdorff  $s$ -dimensional de  $F$  é então definida como

$$\mathcal{H}^s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s, \quad (2.3)$$

que satisfaz todas as propriedades de uma medida. É interessante observar que para um subconjunto do  $\mathbb{R}^n$ , as medidas de Hausdorff e de Lebesgue são proporcionais [2].

Visto que  $\delta \rightarrow 0$ , os diâmetros dos elementos das  $\delta$ -coberturas se tornam igualmente pequenos, assim, para  $s$  muito pequeno os termos da soma em (2.2) serão grandes, enquanto que para  $s$  muito grande, os termos serão pequenos. Dessa maneira, o limite (2.3) em geral será  $\infty$  ou 0. Existe, entretanto, um valor crítico de  $s$  para o qual  $\mathcal{H}^s$  passa de  $\infty$  para 0. Esse valor é chamado de dimensão de Hausdorff de  $F$ , denotado por  $\dim_H(F)$ . A figura 2.6 ilustra graficamente esse comportamento.

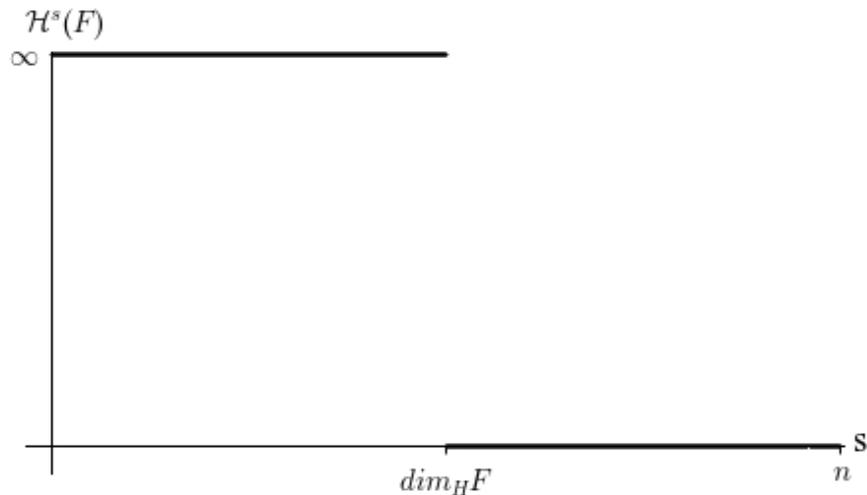


Figura 2.6: Comportamento da medida de Hausdorff. A dimensão de Hausdorff é definida como o valor crítico de  $s$  para o qual a medida de Hausdorff passa de 0 para  $\infty$ .

O rigor matemático exigido no cálculo da dimensão de Hausdorff faz com que outras maneiras mais intuitivas de se obter a dimensão fractal de um objeto tenham sido propostas. Duas delas serão apresentadas adiante.

### 2.2.3 Dimensão para objetos autossimilares exatos

Uma forma intuitiva pode ser utilizada para se obter a dimensão de objetos autossimilares. A ideia é baseada em definir uma cobertura simples do objeto, levando-se em conta sua autossimilaridade. Observe três casos elementares: um segmento de reta, um quadrado e um cubo.

Considere um segmento de reta de comprimento  $L$ . Esse segmento pode ser dividido em  $N$  segmentos de comprimento  $l$ , conforme ilustrado na figura 2.7. A razão  $\varepsilon = l/L$  é chamada de fator de escala [9].

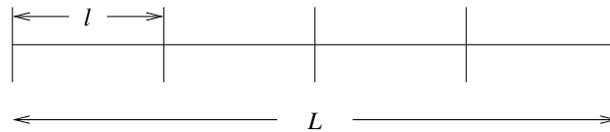


Figura 2.7: Dimensão de um segmento de reta. O segmento de comprimento  $L$  é repartido em  $N$  partes iguais de comprimento  $l$ . Essa partição define uma  $l$ -cobertura para o segmento.

O conjunto das partes que dividem esse segmento forma uma  $l$ -cobertura. O comprimento total  $L$  do segmento pode ser obtido através de

$$L = Nl,$$

de modo que

$$N = \frac{L}{l}.$$

Assim, o número de elementos de comprimento linear  $l$  necessários para recobrir o segmento é,

$$N = \varepsilon^{-1}. \quad (2.4)$$

Observa-se, portanto, que em um objeto de dimensão  $D = 1$  o número de elementos  $N$  é proporcional ao fator de escala  $\varepsilon$  elevado ao expoente  $-1$ .

Agora, considere um quadrado de lado  $L$ . Esse quadrado possui área  $A = L^2$ . Podemos repartir esse quadrado em  $N$  quadradinhos de lado  $l$ , cada qual com área  $a = l^2$ , conforme ilustrado na figura 2.8.

O conjunto das partes que dividem esse quadrado também forma uma  $l$ -cobertura. Vemos

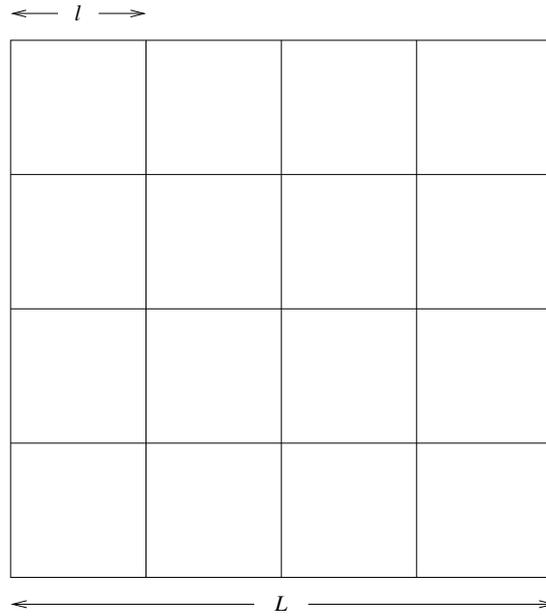


Figura 2.8: Dimensão de um quadrado. O quadrado de lados  $L$  é repartido em  $N$  quadrados menores iguais de lados  $l$ . Isso define uma  $l$ -cobertura para o quadrado.

que a área do quadrado de lados  $L$  está relacionada com a área dos quadrados de lados  $l$  através de

$$A = Na,$$

de modo que,

$$N = \frac{A}{a}.$$

Dessa maneira, é possível relacionar o número de quadrados menores com o lado  $l$ :

$$N = \left(\frac{L}{l}\right)^2,$$

de modo que

$$N = \epsilon^{-2}. \quad (2.5)$$

Assim, o quadrado possui dimensão  $D = 2$ , como esperado.

De maneira análoga, tomando-se um cubo de lados  $L$  e volume  $V$ , esse pode ser repartido em cubos menores e iguais de lados  $l$  e volume  $v$ , conforme ilustrado na figura 2.9. Definindo uma  $l$ -cobertura para o cubo de lado  $L$ . O número  $N$  de cubos de lados  $l$  está relacionado com  $l$  através de

$$N = \frac{V}{v} = \left(\frac{L}{l}\right)^3 = \epsilon^{-3}, \quad (2.6)$$

de modo que o cubo possui dimensão  $D = 3$ .

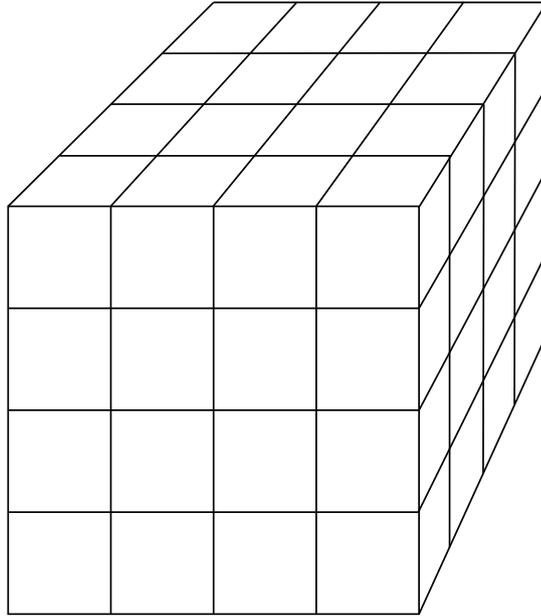


Figura 2.9: Dimensão de um cubo. O cubo de lados  $L$  é repartido em  $N$  cubos menores e iguais de lados  $l$ . Isso define uma  $l$ -cobertura para o cubo.

Pode-se concluir, portanto, que, para um objeto qualquer,

$$N = \varepsilon^{-D}, \quad (2.7)$$

onde  $D$  é a dimensão desse objeto. Dessa forma teremos que,

$$D = -\frac{\log(N)}{\log(\varepsilon)}. \quad (2.8)$$

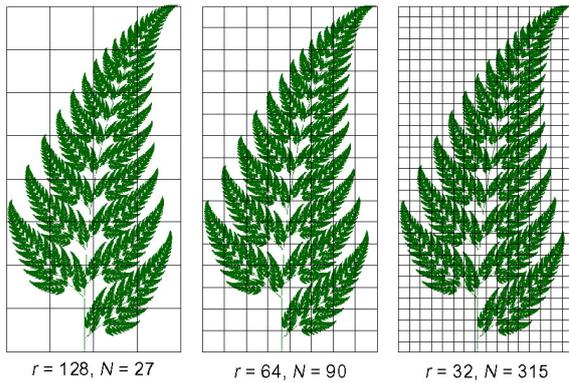
A expressão (2.8) fornece um modo analítico para se calcular a dimensão de objetos autossimilares.

Será visto adiante que a ideia do método de contagem de caixas é baseada no mesmo princípio. Aqui, entretanto, a restrição para objetos autossimilares permite encontrar uma relação exata entre  $N$  e  $l$ , a qual não se observa em objetos em geral. Na seção 2.3, esta técnica será utilizada na determinação da dimensão de alguns fractais bem conhecidos.

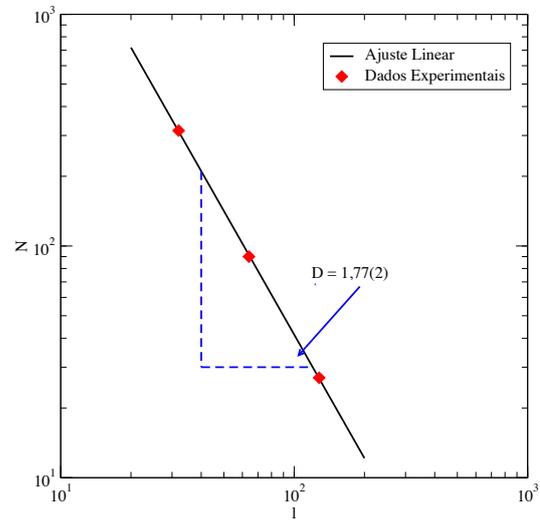
## 2.2.4 Dimensão de contagem de caixas

O método da contagem de caixas é um dos mais utilizados para estimar a dimensão fractal de um objeto autoafim [2]. Este método pode ser generalizado para um espaço de qualquer dimensão euclidiana, aqui, entretanto, exemplificaremos em um espaço euclidiano bidimensional. O método consiste em colocar sobre o objeto que se deseja calcular a dimensão uma malha

quadriculada. Cada quadrado dessa malha tem um comprimento  $l$  e essa medida dos lados dos quadrados que compõem a malha serão variadas de modo que  $l \rightarrow 0$ . A figura 2.10(a) ilustra três malhas diferentes sobre um mesmo objeto genérico.



(a) Método de contagem de caixas aplicado a um ramo fractal. Na figura  $l = r$  e  $N$  são, respectivamente, o lado e o número de caixas preenchidas.



(b) Obtenção da dimensão pelo método de contagem de caixas. O número de caixas,  $N$ , de tamanho  $l$  ocupadas por qualquer parte do objeto é representada graficamente em escala logarítmica.

Figura 2.10: Método de contagem de caixas aplicado a um ramo fractal. Sua dimensão é obtida através da estimativa do coeficiente linear da reta, o que pode ser feito utilizando-se uma régua para medir os catetos do triângulo retângulo em 2.10(b). Imagem extraída de <http://www.theomparticle.com/HomogeneityAndFractality.html> em 04/06/2015.

Para cada valor de  $l$  são contados o número de caixas,  $N$ , que contêm algum elemento do objeto, definindo assim uma  $l$ -cobertura para o objeto. Diferentemente do que acontece com objetos autossimilares, não há uma relação exata entre  $N$  e  $l$ , desse modo, os dados são, representados em um gráfico em escala logarítmica, conforme ilustrado na figura 2.10(b). Com base em (2.8) é esperado um comportamento linear de  $\log N \times \log l$ , onde a inclinação da reta em módulo será a dimensão fractal do objeto.

O comportamento linear, entretanto, pode não estar presente em toda a região de valores de  $l$ , isso somente será verdade em objetos autossimilares. Experimentalmente, há, em geral, efeitos de saturação tanto para valores grandes quanto para valores pequenos de  $l$ , relacionados ao tamanho finito do objeto e à falta de detalhes em pequena escala, respectivamente. Neste caso observa-se visualmente a representação gráfica para selecionar a região onde o comportamento linear é de fato observado.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Computacionalmente, é realizada uma regressão linear dos dados em escala logarítmica, na região onde o comportamento esperado é observado.

## 2.3 Alguns fractais determinísticos

Nesta seção, alguns fractais conhecidos serão introduzidos, tais como os fractais Conjunto de Mandelbrot e os Conjuntos de Julia, a poeira de Cantor, a curva de von Koch, a Gaxeta e o Tapete de Sierpinski. A dimensão fractal de alguns deles será obtida exatamente.

### 2.3.1 Poeira de Cantor

A Poeira ou Conjunto de Cantor, o fractal descoberto por Mandelbrot ao estudar ruído em linhas de transmissão de dados de computadores na IBM, é obtida através de um processo iterativo muito simples. Inicialmente, considere um segmento de reta de comprimento  $L$ , ilustrado na primeira linha da figura 2.11. Esse segmento é chamado de segmento base, ou de ordem 0. Num primeiro passo, esse segmento é dividido em três partes iguais, de comprimento,

$$l_1 = \frac{L}{3},$$

sendo, então, retirado o terço central, resultando em dois segmentos de comprimento  $l_1$  separados por uma distância também  $l_1$ , conforme pode ser visto na segunda linha da figura 2.11. Esses são segmentos ordem 1.



Figura 2.11: Três primeiras iterações do processo de construção da Poeira de Cantor. Em cada passo, os segmentos são divididos em três partes iguais, sendo a parte central retirada.

Na segunda iteração, cada segmento de ordem 1 será novamente dividido em três partes iguais de comprimento,

$$l_2 = \frac{l_1}{3} = \frac{L}{9} = \frac{L}{3^2},$$

sendo, novamente, retirado o terço central de cada segmento. Os segmentos restantes serão de ordem 2, e o resultado pode ser visto na terceira linha da figura 2.11. O processo é repetido para cada segmento em cada ordem, indefinidamente. A poeira, ou conjunto, de Cantor, será o conjunto de pontos remanescentes no limite de infinitas iterações. São ilustradas as três primeiras iterações da construção do conjunto de Cantor na figura 2.11.

O número de iterações, o comprimento dos segmentos em cada ordem e o número de segmentos em cada iteração estão relacionados, conforme pode ser observado na tabela 2.1.

Iteração	$N_{\text{segmentos}}$	$l_{\text{segmento}}$
1	2	$\frac{L}{3}$
2	4	$\frac{L}{9}$
3	8	$\frac{L}{27}$
4	16	$\frac{L}{81}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$2^n$	$\frac{L}{3^n}$

Tabela 2.1: Relação entre o número de iterações, o número de segmentos e seu tamanho durante o processo de construção da Poeira de Cantor.

É observado que na  $n$ -ésima iteração haverá  $N_n = 2^n$  segmentos de comprimento  $l_n = L/3^n$ . Assim, considerando,  $L = 1$  e utilizando-se a equação (2.8) obtém-se que a dimensão da poeira de Cantor é

$$\begin{aligned}
 D &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2^n)}{\log\left(\frac{1}{3^n}\right)} \\
 &= \frac{\log(2)}{\log(3)} = 0,6309\dots
 \end{aligned}$$

Como o comprimento dos segmentos se anula, o conjunto de Cantor é formado por um conjunto de pontos, portanto possui dimensão topológica  $d = 0$ , entretanto, sua dimensão fractal é  $D > d$ , implicando um grau de ocupação do espaço superior ao de pontos isolados, porém inferior ao de uma linha contínua. Ou seja, o conjunto de Cantor não pode ser representado em um espaço euclidiano de dimensão nula, porém não é capaz de ocupar regiões contínuas do espaço euclidiano unidimensional.

Observa-se que após infinitas iterações os únicos pontos que sobraram e que por consequência formarão a Poeira de Cantor serão os pontos das extremidades dos segmentos das iterações anteriores.

### 2.3.2 Curva de von Koch

A curva de von Koch é um exemplo de curva contínua, mas sem inclinação bem definida em nenhum ponto. Para a construção da curva de von Koch considera-se, inicialmente, um segmento de reta de comprimento  $L$ , conforme apresentado na primeira linha da figura 2.12.

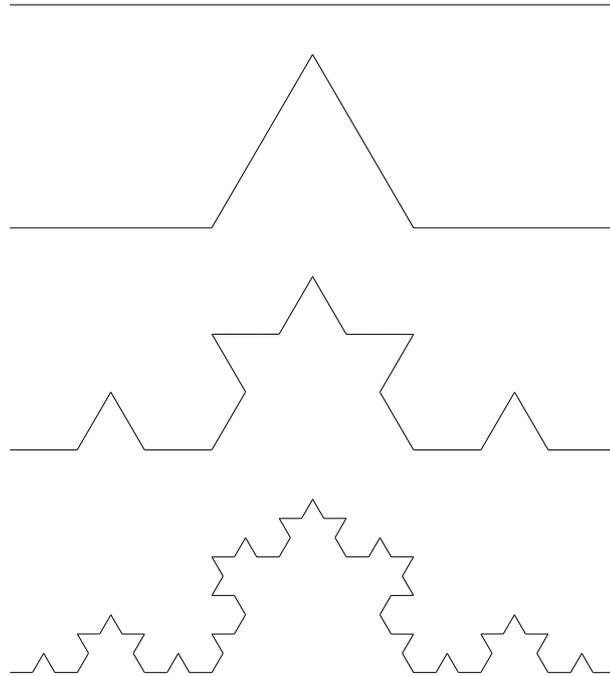


Figura 2.12: Três primeiras iterações do processo de construção da curva de von Koch. Em cada passo, os segmentos são divididos em três partes iguais, sendo a parte central substituída por um “V” invertido, apropriadamente colocado.

De maneira análoga ao processo para construção da Poeira de Cantor, esse segmento é dividido em três partes de mesmo comprimento,

$$l_1 = \frac{L}{3}.$$

Em seguida, substitui-se o terço central por um “V” invertido, conforme ilustra a segunda linha da figura 2.12, obtendo-se um objeto composto por quatro segmentos de lado  $l_1$ . Na segunda iteração, o processo se repete em cada um desses quatro segmentos, levando ao apresentado na terceira linha da figura 2.12. O processo é, então, repetido indefinidamente, sendo apresentadas na figura 2.12 as três primeiras iterações. A curva de von Koch é obtida quando o número de iterações tende ao infinito.

Para se obter a dimensão fractal da curva de von Koch, são utilizados os dados dispostos na tabela 2.2, onde é ilustrado o número de segmentos e seus respectivos comprimentos em cada iteração do processo de construção da curva de von Koch. Novamente, tomando-se  $L = 1u$ , de

Iteração	$N_{\text{segmentos}}$	$l_{\text{segmento}}$
1	4	$\frac{L}{3}$
2	16	$\frac{L}{9}$
3	64	$\frac{L}{27}$
4	256	$\frac{L}{81}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$4^n$	$\frac{L}{3^n}$

Tabela 2.2: Relação entre o número de iterações, o número de segmentos e seu tamanho durante o processo de construção da Curva de von Koch.

modo que a dimensão fractal da curva de von Koch é

$$D = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(4^n)}{\log\left(\frac{1}{3^n}\right)},$$

ou seja,

$$D = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1,2619\dots$$

Embora o comprimento dos segmentos se anule, diferentemente do que ocorre na Poeira de Cantor não há criação de descontinuidades; portanto, a curva de von Koch, sendo formada por segmentos de reta, possui dimensão topológica  $d = 1$ . Entretanto, sua dimensão fractal é  $D > d$ , apresentando, de forma análoga à Poeira de Cantor, um grau de ocupação do espaço superior ao de retas (ou linhas retificáveis), porém inferior ao plano euclidiano bidimensional.

A curva de von Koch é um fractal idealizado, contudo, apresenta uma propriedade encontrada em linhas costeiras, ela não possui um comprimento bem definido [11]. É fácil observar que o comprimento da curva de von Koch é dada pelo produto do número de segmentos e do comprimento dos segmentos, ou seja,  $(4/3)^n L$ , assim, no limite  $n \rightarrow \infty$  o comprimento da curva diverge. O mesmo acontece com linhas costeiras ou de fronteira, ao se aumentar a precisão de medida o comprimento da linha aumenta, pois sempre serão percebidas reentrâncias não observadas anteriormente.

### 2.3.3 Gaxeta de Sierpinski

A gaxeta de Sierpinski, a exemplo da poeira de Cantor, é construída por exclusão de partes. Inicialmente considera-se um triângulo equilátero de lados  $L$ , totalmente preenchido, conforme ilustrado na primeira coluna da figura 2.13, o qual será o triângulo base. Então, divide-se cada lado do triângulo base ao meio, interligando-os para formar um novo triângulo de lados

$$l_1 = \frac{L}{2}.$$

Finalmente, esse triângulo central é retirado, resultando em três triângulos equiláteros de lados  $l_1$ , numa configuração como apresentada na segunda coluna da figura 2.13. O processo se repete para cada triângulo preenchido remanescente de maneira indefinida, sendo a gaxeta de Sierpinski obtida quando o número de iterações tende ao infinito. A figura 2.13 ilustra as três primeiras iterações do processo de construção da gaxeta de Sierpinski.

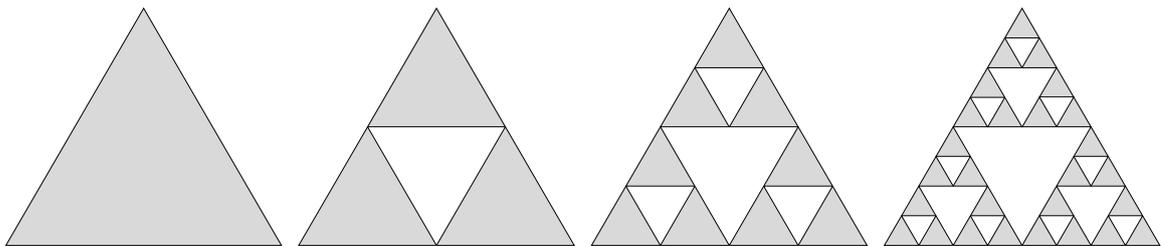


Figura 2.13: Três primeiras iterações do processo de construção da Gaxeta de Sierpinski. Em cada passo, dos triângulos preenchidos é retirado um triângulo central invertido.

O cálculo da dimensão fractal da gaxeta de Sierpinski é realizado de maneira análoga aos fractais anteriormente apresentados. Encontra-se uma relação entre o número de iterações, o número de objetos e seu tamanho linear, no caso, os objetos serão os triângulos remanescentes e o tamanho linear o comprimento de seus lados. A tabela 2.3 apresenta as relações obtidas, ou seja, o número de triângulos e o comprimento dos seus lados em cada iteração.

Dessa forma, utilizando-se (2.8) e tomando-se  $L = 1\text{u}$ , tem-se que,

$$\begin{aligned} D &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(3^n)}{\log\left(\frac{1}{2^n}\right)} \\ &= \frac{\log(3)}{\log(2)} = 1,58496\dots \end{aligned}$$

Embora um triângulo seja um objeto bidimensional, durante o processo de construção foram criados “buracos” em sua estrutura, de modo que o grau de ocupação espacial da gaxeta de Sierpinski é menor que o grau de ocupação do triângulo original. A dimensão obtida é, portanto,

Iteração	$N_{\text{triangulos}}$	$l_{\text{triangulo}}$
1	3	$\frac{L}{2}$
2	9	$\frac{L}{4}$
3	27	$\frac{L}{8}$
4	81	$\frac{L}{16}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$3^n$	$\frac{L}{2^n}$

Tabela 2.3: Relação entre o número de iterações, o número de triângulos e o comprimento de seus lados durante o processo de construção da gaxeta de Sierpinski.

consistente.

Apesar de não ser óbvio numa primeira análise, restarão apenas segmentos na gaxeta de Sierpinski, de modo que ela terá dimensão topológica  $d = 1$ , portanto  $D > d$  também para a gaxeta de Sierpinski.

### 2.3.4 Tapete de Sierpinski

O tapete de Sierpinski, a exemplo da gaxeta de Sierpinski, é construído por exclusão de elementos. Contudo, neste caso, desenha-se, inicialmente, um quadrado de lados  $L$  totalmente preenchido, conforme ilustrado primeira coluna da figura 2.14. Esse quadrado inicial, denominado quadrado base, é, então, dividido em quadrados menores de lados,

$$l_1 = \frac{L}{3},$$

retirando-se, então, o quadrado central. O resultado é visto na segunda coluna da figura 2.14. Aplica-se, então, o mesmo processo para cada um dos quadrados menores remanescentes em cada iteração. A figura 2.14 ilustra as três primeiras iterações. O tapete de Sierpinski é obtido quando o número de iterações tende ao infinito.

O cálculo da dimensão fractal é realizado encontrando-se uma relação entre o número de iterações, o número de quadrados e o lado desses quadrados. A tabela 2.4 ilustra o número

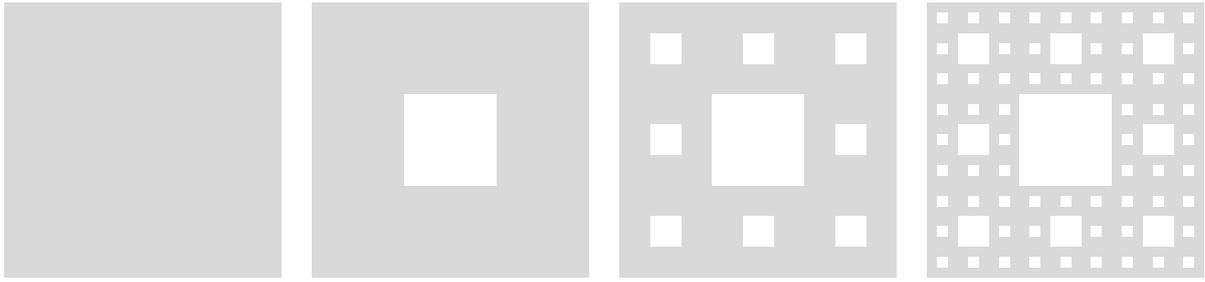


Figura 2.14: Três primeiras iterações do processo de construção do Tapete de Sierpinski. Em cada passo, dos quadrados preenchido é retirado um quadrado central.

de quadrados e o comprimento de seus lados em cada iteração.

Iteração	$N_{\text{quadrados}}$	$l_{\text{quadrado}}$
1	8	$\frac{L}{3}$
2	64	$\frac{L}{9}$
3	512	$\frac{L}{27}$
4	4096	$\frac{L}{81}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$8^n$	$\frac{L}{3^n}$

Tabela 2.4: Relação entre o número de iterações, o número de quadrados e o comprimento de seus lados durante o processo de construção do tapete de Sierpinski.

Fazendo,  $L = 1u$ , a partir de (2.8) a dimensão fractal do Tapete de Sierpinski é encontrada,

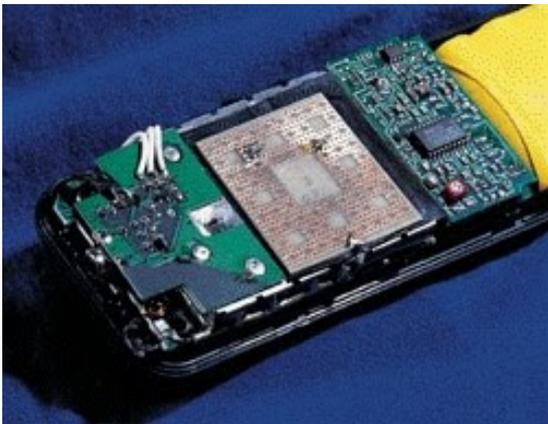
$$\begin{aligned}
 D &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(8^n)}{\log\left(\frac{1}{3^n}\right)} \\
 &= \frac{\log(8)}{\log(3)} = 1,8928\dots
 \end{aligned}$$

É interessante observar que a dimensão fractal do tapete é superior àquela da gaxeta de Sierpinski, mostrando que o tapete ocupa mais espaço que a gaxeta. Contudo, o tapete de

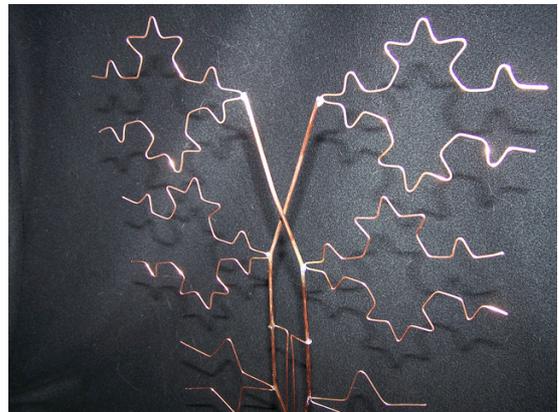
Sierpinski ainda não ocupa totalmente o espaço euclidiano bidimensional.

Assim como para a gaxeta, o tapete de Sierpinski possui dimensão topológica  $d = 1$ , pois no processo de limite restarão apenas segmentos. Como esperado para um fractal,  $D > d$ .

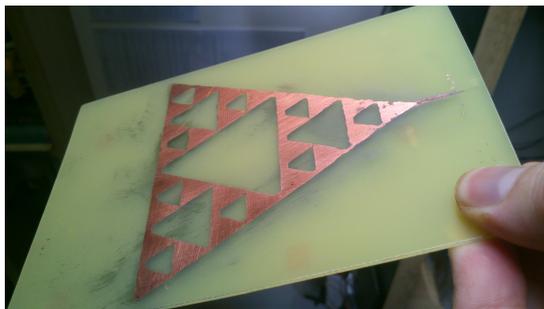
Os fractais, além de sua beleza e complexidade, possuem propriedades físicas interessantes. Por exemplo, o Tapete e a Gaxeta de Sierpinski podem ser utilizados como antena em aparelhos de telefonia móvel modernos [1], o fractal Curva de von Koch pode ser utilizada como antena para televisões digitais, apresentando resultados muito melhores que as antenas tradicionais, visto que ocupam menos espaço e possuem múltiplas faixas de frequência [12].



(a) Tapete de Sierpinski como modelo para antena fractal. Figura extraída de [1].



(b) Curva de von Koch como modelo para antena fractal. Figura extraída de <http://makezine.com/2012/01/30/diy-fractal-antenna-for-digital-tv/> em 13/01/16.



(c) Gaxeta de Sierpinski como modelo para antena fractal. Figura extraída de <http://www.modulo0tutoriales.com/antenas-fractales-una-nueva-tendencia/> em 13/01/16.

Figura 2.15: Três antenas fractais.

### 2.3.5 Conjunto de Mandelbrot e Conjuntos de Julia

O conjunto de Mandelbrot e os conjuntos de Julia [2–4] são definidos como o conjunto de pontos no plano complexo para os quais a sequência,

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + c, n = 0, 1, \dots, \quad (2.9)$$

permanece finita quando  $n \rightarrow \infty$ . Onde  $Z_n$  e  $c$  são números complexos.

Para obter o conjunto de Mandelbrot, toma-se  $Z_0 = 0$ , procurando o conjunto dos números  $c \in \mathbb{C}$  tais que (2.9) permanece finita quando  $n \rightarrow \infty$ . A figura 2.16 apresenta uma representação geométrica do conjunto de Mandelbrot no plano complexo, obtida iterando-se (2.9) numericamente com o uso de um computador.

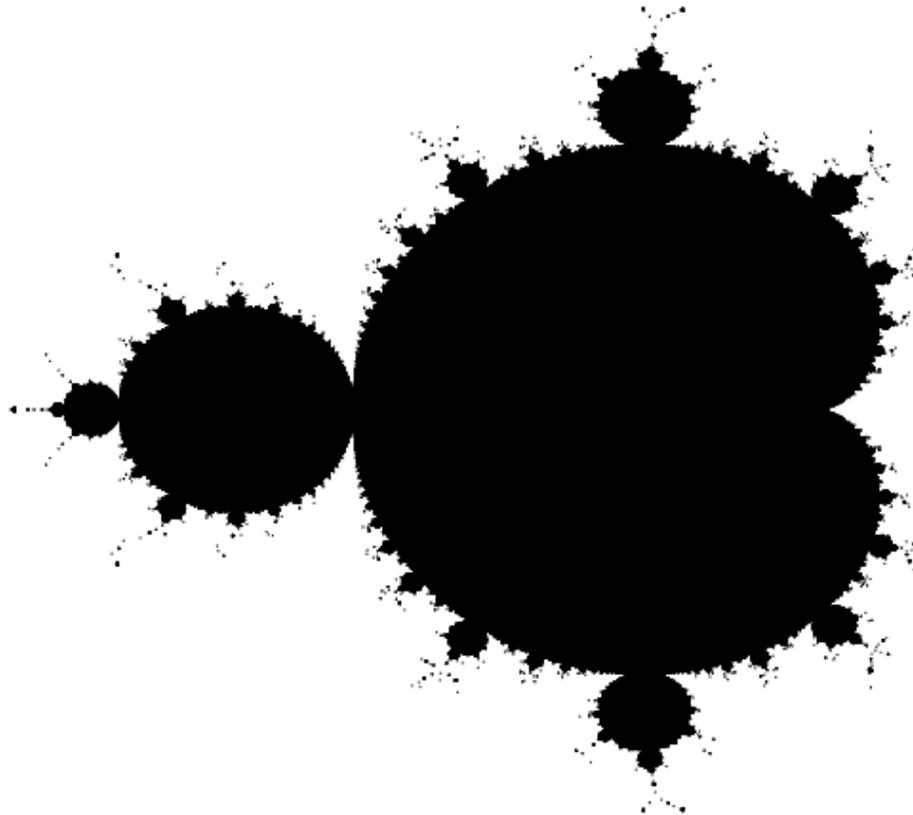


Figura 2.16: Representação do conjunto de Mandelbrot no plano complexo, obtido computacionalmente.

Os conjuntos de Julia, por sua vez, são obtidos tomando-se  $c \in \mathbb{C}$  constante em (2.9), procurando o conjunto dos números  $Z_0 \in \mathbb{C}$  para os quais a relação de recorrência permanece finita quando  $n \rightarrow \infty$ . Assim, para cada valor de  $c \in \mathbb{C}$  haverá um diferente conjunto  $\{Z_0\} \subset \mathbb{C}$  que mantém (2.9) finita quando  $n \rightarrow \infty$ . A figura 2.17 apresenta alguns dos conjuntos de Julia, em comparação com o conjunto de Mandelbrot, representados no plano complexo. As linhas

indicam o ponto correspondente ao respectivo valor de  $c$ .

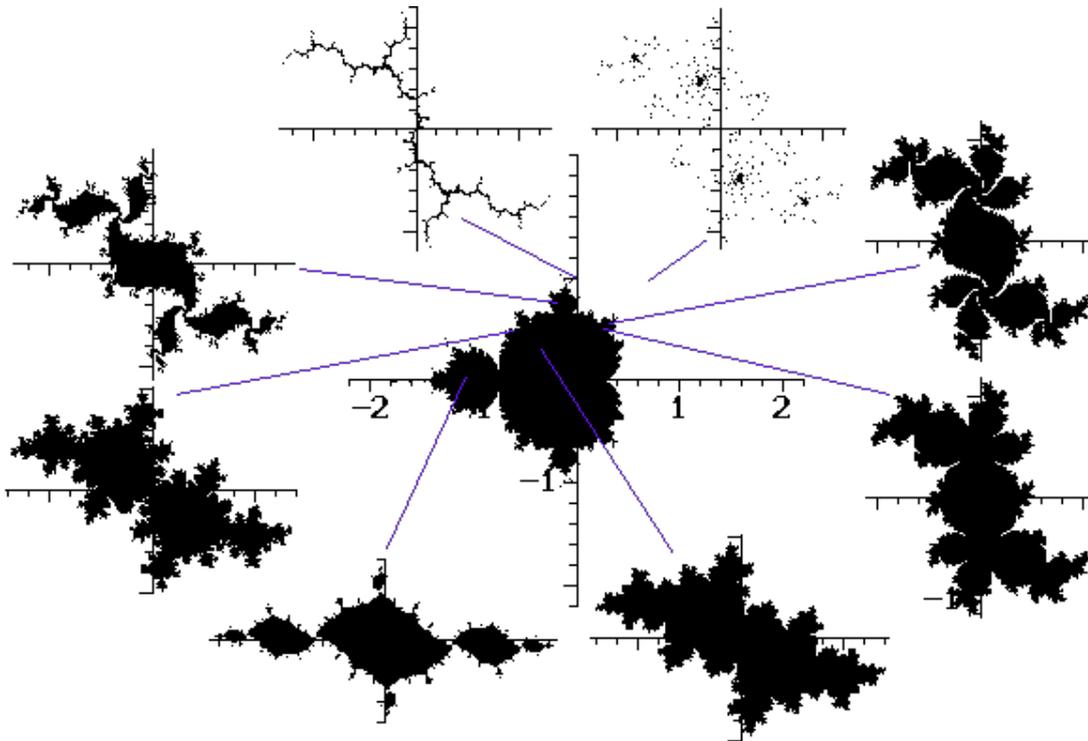


Figura 2.17: Representação de alguns dos conjuntos de Julia no plano Complexo em relação ao conjunto de Mandelbrot, para diferentes valores da constante complexa  $c$ . As linhas indicam o ponto correspondente ao respectivo valor de  $c$ . Figura extraída de <http://www.dma.fi.upm.es/docencia/cursosanteriores/99-00/segundociclo/sistdin/sdmandelbrot.html>, em 16/12/2015.

É comum obter representações em cores dos conjuntos de Mandelbrot e Julia. Para tanto, associa-se uma determinada cor ao número de iterações necessárias para verificar se o ponto em questão não pertence ao conjunto. Um exemplo foi apresentado na figura 2.2.

Apesar de sua complexidade, os fractais apresentados aqui são relativamente fáceis de serem construídos utilizando conceitos básicos de Geometria Euclidiana, possibilitando novos caminhos para o ensino de matemática em diversos níveis, inclusive no ensino médio e fundamental [7, 8, 13], onde os conceitos da Geometria Fractal já vêm sendo aplicados como **ferramenta para o ensino**. Citando Ivana Côrtes [8]:

“... a Geometria Fractal permite explorar diversos conceitos matemáticos de uma forma mais dinâmica e criativa, através da construção de modelos e tabelas com os resultados das iterações, chegando a uma dedução geral do que está ocorrendo.”  
( [8], Resumo)

Nosso objetivo, portanto, parece estar alinhado às atuais tendências do ensino de Ma-

temática, particularmente de Geometria. Utilizar a Geometria Fractal como motivação para a aprendizagem de conceitos elementares de Geometria Analítica. Neste sentido, no capítulo 4 será feito o estudo da construção, com base em Geometria Analítica, dos fractais discutidos neste capítulo. Antes, contudo, alguns conceitos de Geometria Analítica serão revisados no capítulo 3.

## 3 *Revisão de alguns conceitos de Geometria Analítica*

No capítulo 3, a Geometria Analítica será utilizada para o estudo da construção de alguns fractais matemáticos, especificamente aqueles discutidos nas seções 2.3.1 a 2.3.4. Neste capítulo, portanto, será feita uma breve revisão sobre os conceitos de Geometria Analítica que serão utilizados. Os fractais que serão analisados estão inseridos no  $\mathbb{R}^2$ ; assim, todo o estudo realizado neste capítulo será feito também no  $\mathbb{R}^2$ .

Na seção 3.2 será feito um estudo sobre o ponto, na seção 3.3 serão abordadas as bases necessárias sobre retas.

### 3.1 Sistema cartesiano

O sistema cartesiano é formado por dois eixos orientados, representados por  $x$  e  $y$  e denominados eixo das abscissas e eixo das ordenadas, respectivamente. Esses eixos são linearmente independentes e normalmente ortogonais. A intersecção desses eixos é chamada de origem do sistema e será representada pela letra  $O$ . É comum posicionar o eixo  $x$ , ou das abscissas, na direção horizontal e o eixo  $y$ , ou das ordenadas, na direção vertical.

### 3.2 O Ponto

O ponto é um conceito fundamental da Geometria, não é possível medir qualquer tamanho em qualquer direção, ele possui dimensão topológica nula. Para se conhecer a localização de um ponto no sistema cartesiano é necessário conhecer o valor de dois números: a coordenada  $x$  e a coordenada  $y$  do ponto. Assim, a cada ponto  $P$  do plano cartesiano está associado um par de coordenadas reais  $(x_P, y_P)$ , uma em cada eixo [14–16]. Geometricamente, essas coordenadas representam projeções do ponto sobre os eixos, ou seja, a intersecção de uma reta perpendicular ao eixo correspondente que passe pelo ponto  $P$ .

A figura 3.1 ilustra a representação de um ponto no sistema cartesiano.

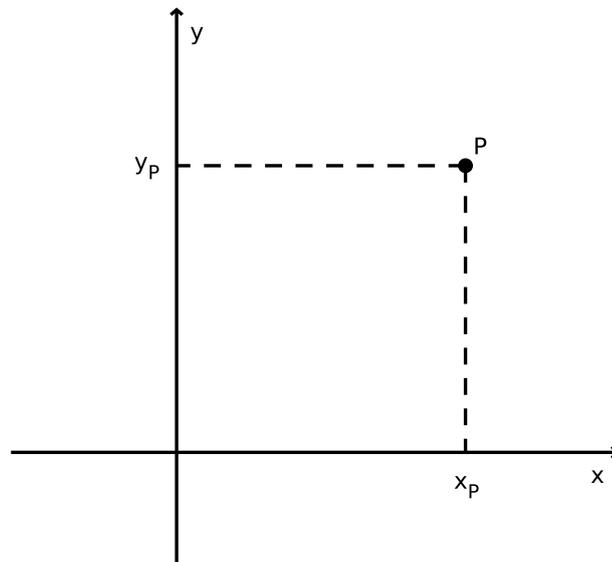


Figura 3.1: Representação de um ponto no sistema de coordenadas cartesiano ortogonal plano. Observe que o ponto  $P$  é projetado sobre os eixos cartesianos  $x$  e  $y$ , definindo suas coordenadas.

### 3.2.1 Distância entre dois pontos

Sejam  $A$ ,  $B$  dois pontos de coordenadas  $(x_A, y_A)$  e  $(x_B, y_B)$  no plano cartesiano e ilustrados na figura 3.2. Define-se distância entre dois pontos como a medida do segmento de reta que tem os dois pontos por extremidades [16].

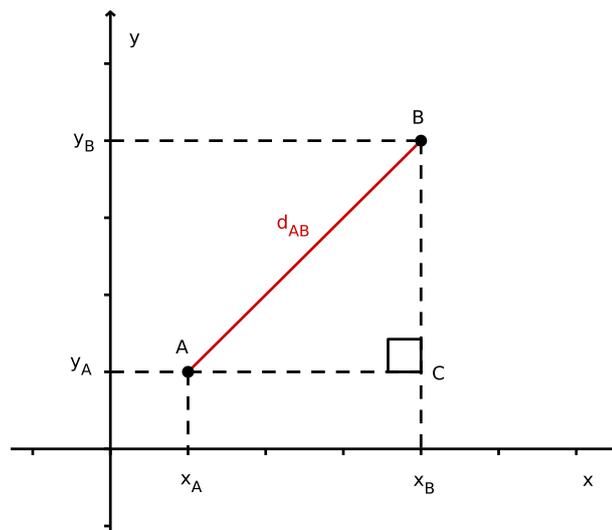


Figura 3.2: Obtenção da distância entre dois pontos no sistema cartesiano. Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  formam um triângulo retângulo, possibilitando a utilização do *Teorema de Pitágoras*.

O triângulo ilustrado na figura 3.2 é retângulo, dessa maneira pode-se utilizar o teorema

de Pitágoras para obter a distância entre os pontos  $A$  e  $B$  [14–16]:

$$d_{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2. \quad (3.1)$$

Observa-se que  $\overline{AC}$  é  $(x_B - x_A)$  e  $\overline{BC}$  é  $(y_B - y_A)$ , visto que  $x_C = x_B$  e  $y_C = y_A$ . Substituindo esses resultados na equação (3.1), tem-se:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}. \quad (3.2)$$

A equação (3.2) fornece a distância entre dois pontos quaisquer no plano. Espaços que possuem uma definição de distância são chamados espaços métricos. A distância definida em (3.2) é chamada de *distância euclidiana*, ou distância usual.

### 3.2.2 Ponto Médio de um segmento

Conforme visto na seção 3.2.1, a distância entre dois pontos é a medida do segmento de reta que liga esses dois pontos. Isso pode ser utilizado para se obter as coordenadas do ponto médio do segmento.

A figura 3.3 ilustra dois pontos  $A$  e  $B$  conhecidos.  $M$  é o ponto médio do segmento delimitado por  $A$  e  $B$ . Observando que os triângulos  $ABC$  e  $AMD$  ilustrados na figura são

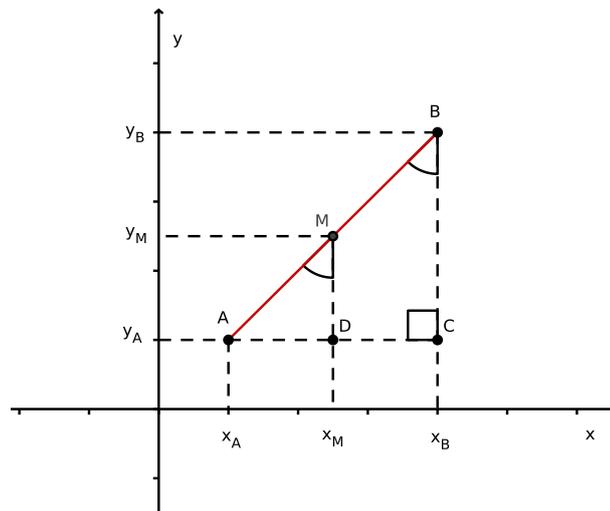


Figura 3.3: Ponto médio de um segmento

retângulos e semelhantes, pode-se utilizar semelhança de triângulos para obter as coordenadas do ponto médio, assim:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}. \quad (3.3)$$

Como  $\overline{AB} = 2\overline{AM}$ , pois M é o ponto médio,  $\overline{AC} = x_B - x_A$  e  $\overline{AD} = x_M - x_A$ . Então

$$\begin{aligned}\frac{2\overline{AM}}{\overline{AM}} &= \frac{x_B - x_A}{x_M - x_A} \Rightarrow \\ 2x_M - 2x_A &= x_B - x_A \Rightarrow \\ x_M &= \frac{x_A + x_B}{2}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Procedimento análogo pode ser feito para se obter  $y_M$ . Para isso:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{MD}}.\tag{3.5}$$

mas  $\overline{BC} = y_B - y_A$  e  $\overline{MD} = y_M - y_A$ , logo

$$\begin{aligned}\frac{2\overline{AM}}{\overline{AM}} &= \frac{y_B - y_A}{y_M - y_A} \Rightarrow \\ 2y_M - 2y_A &= y_B - y_A \Rightarrow \\ y_M &= \frac{y_A + y_B}{2}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Dessa forma as coordenadas do ponto médio do segmento que liga os pontos A e B são:

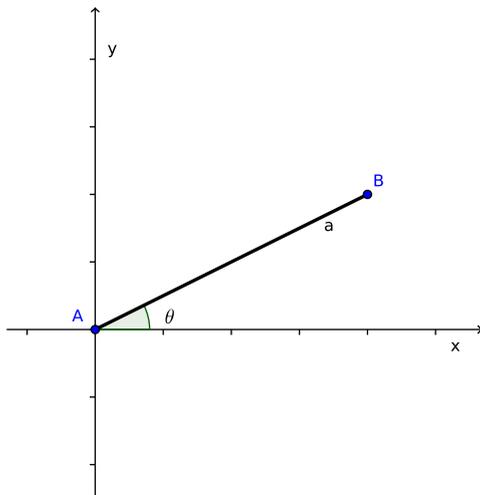
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2},$$

ou seja, as coordenadas do ponto médio são as médias aritmética das coordenadas dos pontos extremos.

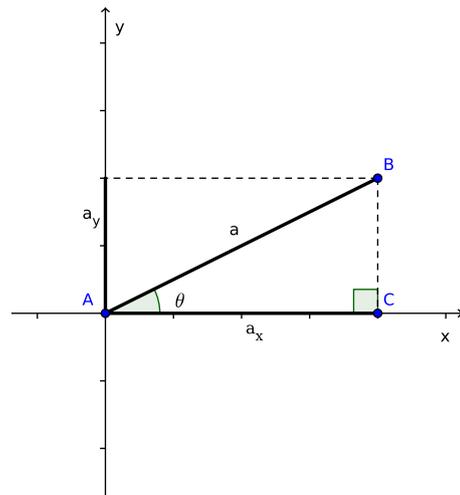
### 3.2.3 Projeção de um ponto sobre os eixos cartesianos

Seja  $\overline{AB}$  um segmento de reta de comprimento  $a$  que faz um ângulo  $\theta$  com o eixo das abcissas  $x$ , conforme ilustrado na figura 3.4(a). O ponto A é posicionado na origem do sistema cartesiano.

As projeções do ponto  $B$  sobre os eixos cartesianos  $x$  e  $y$  são os pontos de intersecção de cada eixo com retas perpendiculares ao respectivo eixo que passam pelo ponto  $B$ . Ou seja, a projeção de  $B$  sobre  $x$  é definida pelo ponto  $C$ , definido pela intersecção da reta que define o segmento  $\overline{BC}$ , conforme ilustrado na figura 3.4(b), analogamente para a projeção de  $B$  sobre  $y$ . Pode-se utilizar trigonometria no triângulo retângulo para um estudo da projeções. Analisando



(a) Segmento  $\overline{AB}$  formando um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$ .



(b) Triângulo retângulo formado pelo segmento de comprimento  $a$ , que faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$ .

Figura 3.4: Projeções de um ponto  $B$  sobre os eixos cartesianos.

a figura 3.4(b), observa-se que as projeções de  $B$  sobre os eixos cartesianos são

$$x = a \cos \theta, \quad (3.7)$$

$$y = a \sin \theta, \quad (3.8)$$

ou seja, as projeções de  $B$  sobre os eixos serão suas coordenadas. É visto, também, na figura 3.4(b), que a projeção de  $B$  sobre  $x$ , o ponto  $C$ , define um segmento  $\overline{AC}$ , de comprimento

$$a_x = a \cos \theta.$$

Esse segmento é a projeção do segmento  $\overline{AB}$  sobre o eixo  $x$ . De forma análoga, a projeção de  $\overline{AB}$  sobre o eixo  $y$  terá comprimento

$$a_y = a \sin \theta.$$

### 3.2.4 Condição de alinhamento entre três pontos

A figura 3.5 ilustra três pontos alinhados:

Para que isso aconteça é necessário que haja uma relação entre as coordenadas desses três pontos. Para obter essa relação, observa-se que os triângulos ACE e ABD são semelhantes. Assim,

$$\frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_A}. \quad (3.9)$$

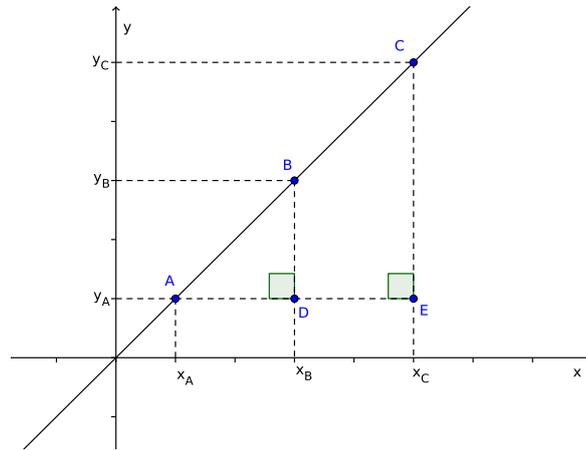


Figura 3.5: Três pontos alinhados.

Logo,

$$\begin{aligned}
 (x_C - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A) &= 0, \\
 x_C y_B - x_C y_A - x_A y_B + x_A y_A - x_B y_C + x_B y_A + x_A y_C - x_A y_A &= 0, \\
 x_C y_B - x_C y_A - x_A y_B - x_B y_C + x_B y_A + x_A y_C &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por  $-1$  e reorganizando a equação 3.10,

$$x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A = 0. \tag{3.11}$$

Observe o desenvolvimento do seguinte determinante pela regra de Sarrus,

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A, \tag{3.12}$$

que é igual à equação 3.10. Logo, se três pontos estão alinhados, então:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.13}$$

Esta é a condição de alinhamento de três pontos.

### 3.3 Reta

Uma reta é formada por infinitos pontos alinhados e de forma contínua, de tal maneira que, dados dois pontos quaisquer da reta, sempre haverá infinitos pontos entre eles. Por um único ponto passam infinitas retas, cada qual com inclinação diferente. Por isso, para se determinar univocamente uma reta são necessários dois pontos não coincidentes.

#### 3.3.1 Equação geral da reta

Todos os pontos sobre uma reta estão alinhados. Desse modo, conhecidas as coordenadas de dois pontos da reta pode-se obter sua equação geral. Ou seja, se dois pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  definem uma reta, então qualquer outro ponto,  $(x, y)$  pertence a reta se

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Esse determinante tem como solução:

$$x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1y_2 - x_2y_1 = 0. \quad (3.14)$$

Reagrupando os termos e definindo as constantes  $a$ ,  $b$  e  $c$ , as quais dependem apenas dos pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ , obtêm-se a equação geral da reta

$$ax + by + c = 0,$$

onde,  $a = y_1 - y_2$ ,  $b = x_2 - x_1$  e  $c = x_1y_2 - x_2y_1$ .

A equação geral pode ser reduzida a uma forma funcional, isolando-se a variável  $y$ , ou seja, para  $b \neq 0$ ,

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}. \quad (3.15)$$

Definindo-se  $m \equiv -\frac{a}{b}$  e  $n \equiv -\frac{c}{b}$ , tem-se:

$$y = mx + n, \quad (3.16)$$

onde  $m$  é chamado coeficiente angular da reta, com o qual se obtém o ângulo formado entre a reta e o eixo das abscissas, e  $n$  é o coeficiente linear. Graficamente,  $n$  é o ponto de toque da reta

no eixo das ordenadas. Observe que em termos dos pontos,

$$m = -\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}, \quad (3.17)$$

$$n = -\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2 - x_1}. \quad (3.18)$$

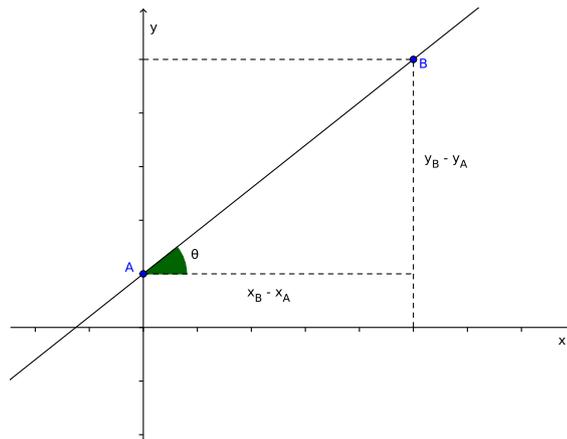


Figura 3.6: Reta no plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ .

Geometricamente, da figura 3.6, o coeficiente angular da reta é obtido através da expressão

$$m = \operatorname{tg}\theta, \quad (3.19)$$

enquanto o coeficiente linear é dado pela ordenada do ponto A.

A partir da equação 3.17 é possível escrever uma expressão para a equação da reta. Para isso é necessário saber as coordenadas de um ponto da reta e o seu coeficiente angular. Assim, seja  $r$  uma reta que passa pelo ponto  $P(x_P, y_P)$  e que tem coeficiente angular  $m$ . Da equação 3.17:

$$\begin{aligned} m &= -\frac{y - y_P}{x_P - x} \Rightarrow \\ y - y_P &= m(x - x_P). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Como  $m = \operatorname{tg}\theta$ , então

$$y - y_P = \operatorname{tg}\theta(x - x_P). \quad (3.21)$$

## 4 *Fractais e Geometria Analítica*

Na seção 2.3 mostrou-se os procedimento para a construção de alguns fractais matemáticos autossimilares. Esses mesmos fractais podem ser construídos utilizando-se os conceitos de Geometria Analítica visto no capítulo 3.

Neste capítulo será mostrado como esses conceitos podem ser utilizados nas construções desses fractais.

### 4.1 Poeira de Cantor

Conforme visto na seção 2.3.1, todo o procedimento para a obtenção da Poeira de Cantor ocorre sobre um segmento de reta. Com isso, para a construção desse fractal utilizando-se a Geometria Analítica serão utilizados os conceitos de coordenadas de um ponto e distância entre pontos.

Inicialmente, escolhe-se dois pontos quaisquer no plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ , ligando-os em seguida por um segmento de reta, chamado de segmento base para a primeira iteração, conforme ilustrado na figura 4.1.

Por simplicidade preferiu-se colocar os dois pontos com a mesma coordenada  $y$ , essa escolha justifica-se pelo fato de todo o procedimento ser feito sobre um mesmo segmento de reta, evitando-se assim trabalhar com as coordenadas  $y$ .

O comprimento do segmento base  $\overline{AB}$  é igual à distância entre os pontos  $A$  e  $B$ . Assim, seja  $L$  o comprimento do segmento base, utilizando as coordenadas dos pontos  $A$  e  $B$  e a equação 3.2, têm-se que,

$$L = d_{AB} = x_B - x_A.$$

Dividindo o segmento base  $\overline{AB}$  em três partes de mesmo comprimento, observa-se o surgimento de dois pontos  $C$  e  $D$  e por consequência a geração de três segmentos de comprimento,

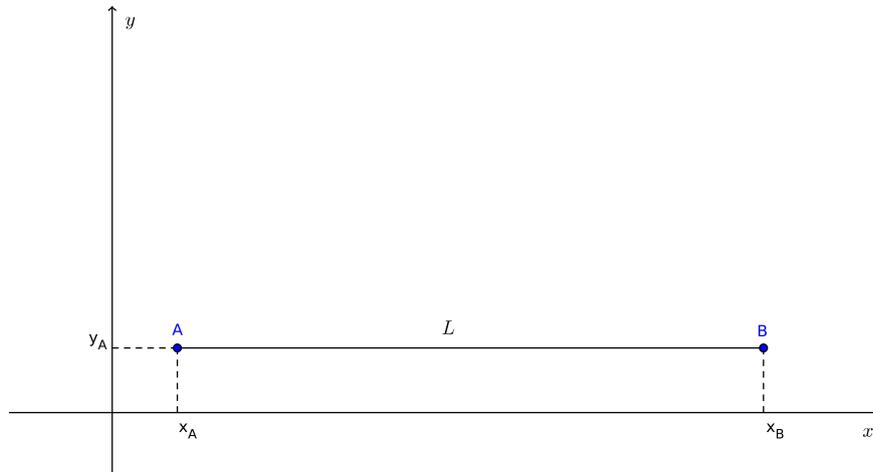


Figura 4.1: Construção do segmento base

$$l_1 = \frac{L}{3}, \quad (4.1)$$

conforme ilustrado na figura 4.2.

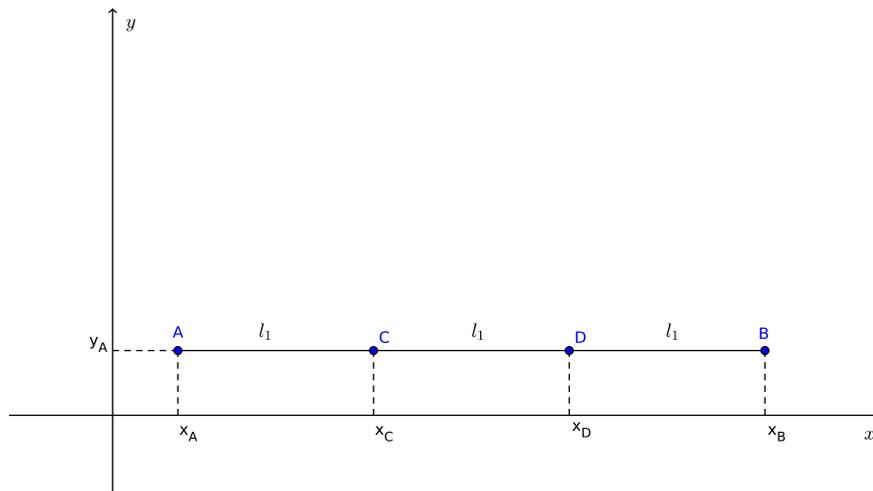


Figura 4.2: Divisão do segmento  $\overline{AB}$  em três partes iguais.

Uma análise da figura 4.2 mostra que as coordenadas dos pontos C e D podem ser obtidas através das coordenadas do ponto A. A relação se dá através das equações

$$x_C = x_A + l_1 \quad \text{e} \quad y_C = y_A, \quad (4.2)$$

$$x_D = x_A + 2 \cdot l_1 \quad \text{e} \quad y_D = y_A. \quad (4.3)$$

Retirando-se o terço central, ou seja, o segmento  $\overline{CD}$ , está concluída a primeira iteração. Isso pode ser visto na figura 4.3(a).

Os segmentos remanescentes  $\overline{AC}$  e  $\overline{DB}$  serão os segmentos base para a segunda iteração, isso significa que eles passarão pelos mesmos procedimentos no segmento base  $\overline{AB}$ . O resultado da segunda iteração está ilustrada na figura 4.3(b).

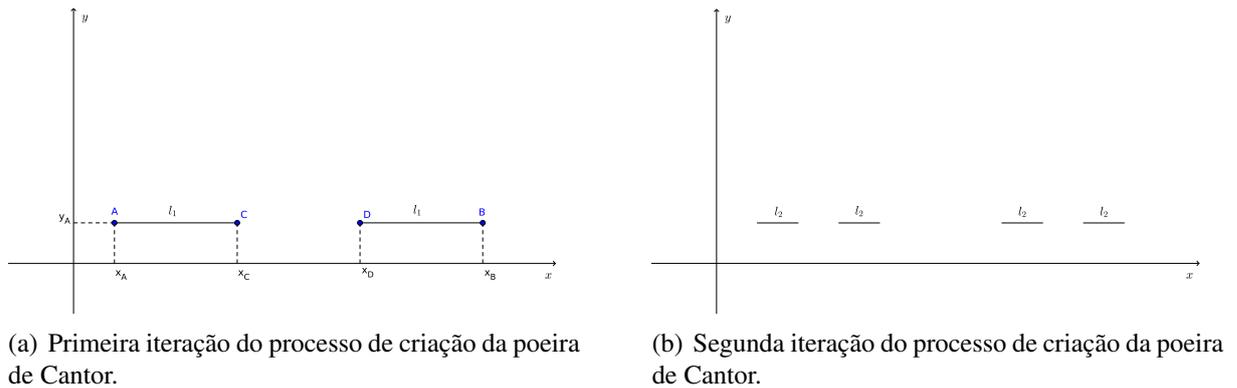


Figura 4.3: Primeira e Segunda iteração da Poeira de Cantor.

A poeira de Cantor é obtida quando o número de iterações é infinito. A partir do processo de construção descrito acima, observa-se que à medida que o número de iterações aumenta, o comprimento dos segmentos que formam a Poeira de Cantor diminui. Assim, quando o número de iterações tender ao infinito o que se verá serão pontos. Por esse comportamento é que esse fractal ficou conhecido como poeira.

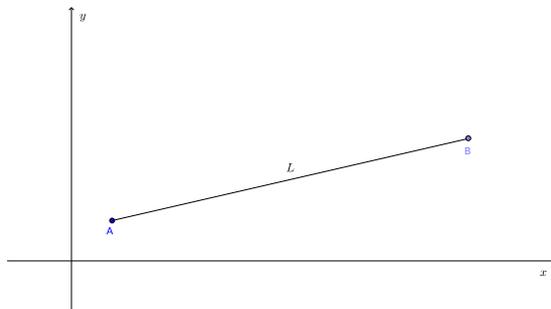
## 4.2 Curva de von Koch

Diferentemente da Poeira de Cantor, a construção da curva de von Koch requer a obtenção, em cada passo da construção, de pontos que não estão sobre uma mesma reta (segmento). Há, entretanto, um segmento base em cada iteração; neste caso é preciso conhecer o ângulo cujo segmento base de cada iteração faz com o eixo padrão das abcissas (horizontal), obter as posições dos pontos adicionados em cada iteração e suas coordenadas em relação aos eixos das abcissas (horizontal) e das ordenadas (vertical).

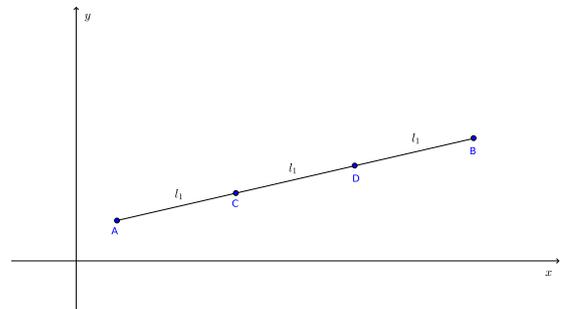
Para determinação do segmento base inicial, escolhe-se dois pontos distintos no  $\mathbb{R}^2$ , ligando-os em seguida por um segmento de reta, chamado de segmento base para a primeira iteração. Todo o procedimento inicial será feito sobre esse segmento. A figura 4.4(a) ilustra os dois pontos escolhidos e o respectivo segmento base definido por esses dois pontos. Seja  $L$  O comprimento do segmento base, esse comprimento pode ser obtido utilizando-se a equação 3.2

e as coordenadas dos pontos A e B:

$$L = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$



(a) Construção do segmento base da curva de von Koch.



(b) Divisão do segmento base em três partes de mesmo comprimento.

Figura 4.4: Construção da curva de von Koch.

Dividindo-se o segmento base  $\overline{AB}$  em três partes de mesmo comprimento, são gerados dois pontos C e D, e por consequência três segmentos  $\overline{AC}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{DB}$ , conforme ilustrado na figura 4.4(b). O comprimento desses segmentos é,

$$l_1 = \frac{L}{3}. \quad (4.4)$$

Para uma completa descrição do objeto, deve-se obter as coordenadas dos pontos C e D. Uma maneira de obter essas coordenadas é projetar o segmento base  $\overline{AB}$  sobre o eixo das abcissas e sobre o eixo das ordenadas; isso pode ser observado na figura 4.5.

Os triângulos  $ACC'$ ,  $ADD'$  e  $ABB'$  são retângulos, assim, projetando o segmento base  $\overline{AB}$  e utilizando a trigonometria no triângulo retângulo, obtêm-se que,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x_C - x_A}{l_1} \Rightarrow \\ x_C &= x_A + l_1 \cdot \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.5)$$

O ângulo  $\theta$  pode ser calculado, a partir de  $x_A$ ,  $y_A$ ,  $x_B$  e  $y_B$  utilizando-se trigonometria no triângulo retângulo e a equação 4.4.

De modo análogo para a projeção sobre o eixo das ordenadas,

$$\begin{aligned} \sen \theta &= \frac{y_C - y_A}{l_1} \Rightarrow \\ y_C &= y_A + l_1 \cdot \sen \theta. \end{aligned} \quad (4.6)$$

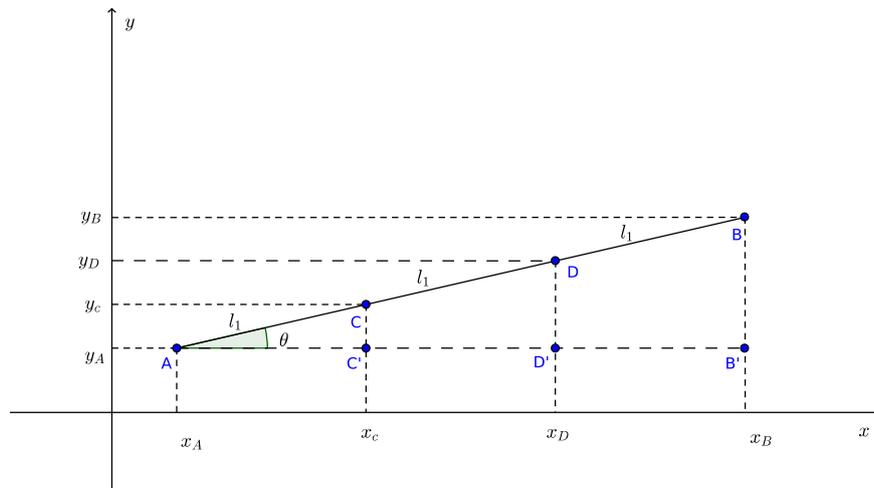


Figura 4.5: Projeções dos segmentos sobre os eixos ordenados.

Análise semelhante pode ser feita para a obtenção das coordenadas do ponto D:

$$x_D = x_A + 2 \cdot l_1 \cdot \cos\theta, \quad (4.7)$$

$$y_D = y_A + 2 \cdot l_1 \cdot \sin\theta. \quad (4.8)$$

O próximo passo é substituir o terço central por um V invertido de lados  $l_1$ , conforme ilustrado na figura 4.6. Com isso, surge o ponto E, de coordenadas desconhecidas. É, portanto, necessário obter as coordenadas desse ponto.

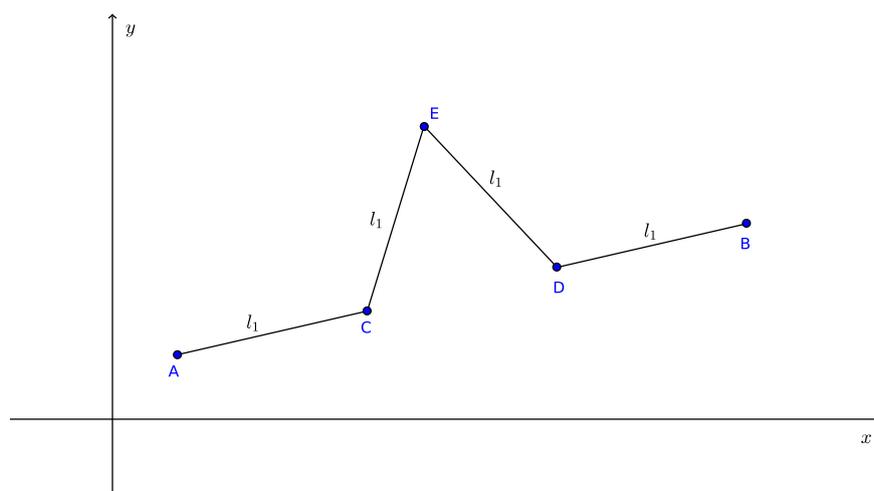


Figura 4.6: Primeira iteração da Curva de von Koch.

Antes do estudo sobre as coordenadas do ponto E, será feita uma análise da figura 4.7, que ilustra alguns ângulos importantes para a continuação da construção da Curva de von Koch.

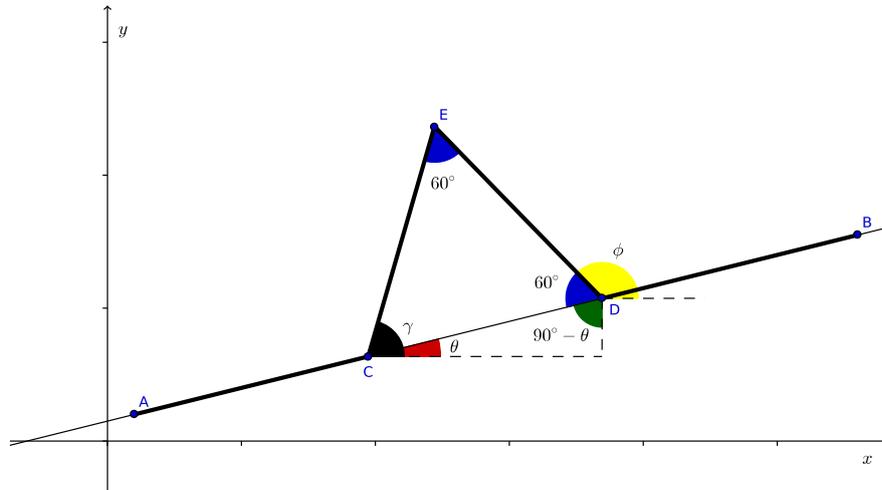


Figura 4.7: Ângulos da primeira iteração da Curva de von Koch.

Conforme observado na figura 4.7, o ângulo  $\gamma$  (ângulo entre o segmento CE e o eixo das abcissas) é dado pela equação,

$$\gamma = \theta + 60^\circ. \quad (4.9)$$

Como já se conhece o ângulo  $\theta$  pode-se facilmente determinar o ângulo  $\gamma$ .

Observa-se também que o ângulo  $\phi - \theta$  é igual a  $120^\circ$ , visto que  $\phi - \theta$  é o ângulo suplementar do ângulo de  $60^\circ$ . Assim,

$$\begin{aligned} \phi - \theta &= 120^\circ \Rightarrow \\ \phi &= 120^\circ + \theta. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Conforme visto na figura 4.7, o ponto E está na interseção dos segmentos  $\overline{CE}$  e  $\overline{ED}$ . Com isso, para obter as coordenadas da interseção, é necessário conhecer quais são as equações das retas suportes desses segmentos; para isso, utiliza-se a equação 3.21, vista na seção 3.3.1 para construir essas equações. Com isso, a equação da reta suporte do segmento  $\overline{CE}$  é

$$y - y_C = (x - x_C) \operatorname{tg} \gamma. \quad (4.11)$$

De modo análogo, a equação da reta suporte do segmento  $\overline{ED}$  é

$$y - y_D = (x - x_D) \operatorname{tg} \phi. \quad (4.12)$$

Na interseção das retas elas possuem as mesmas componentes  $x$  e  $y$ . Assim, igualando

as componentes  $y$ , têm-se

$$y_C + (x_E - x_C) \cdot \operatorname{tg} \gamma = y_D + (x_E - x_D) \cdot \operatorname{tg} \phi \Rightarrow$$

$$x_E = \frac{y_D - y_C + x_C \operatorname{tg} \gamma - x_D \operatorname{tg} \phi}{\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \phi}. \quad (4.13)$$

Agora pode-se utilizar uma das equações das retas obtidas e a coordenada  $x_E$  para determinar a coordenada  $y$  do ponto E,

$$y_E = y_C + (x_E - x_C) \cdot \operatorname{tg} \gamma,$$

ou

$$y_E = y_D + (x_E - x_D) \cdot \operatorname{tg} \phi.$$

Com isso está concluída a primeira iteração. Na segunda iteração os segmentos  $\overline{AC}$ ,  $\overline{CE}$ ,  $\overline{ED}$  e  $\overline{DB}$  são os novos segmentos base, passando, então, pelo mesmo tratamento dado ao segmento base  $\overline{AB}$  da primeira iteração.

Partindo para uma análise da segunda iteração, observa-se que os segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{DB}$  estão sobre a mesma reta suporte de  $\overline{AB}$ , sendo o procedimento idêntico ao anterior, exceto pelo novo valor do comprimento das partes envolvidas, sempre  $1/3$  do comprimento anterior. De modo geral, pode-se concluir que o comprimento dos segmentos em cada iteração é dado por:

$$l_n = \frac{L}{3^n}, \quad (4.14)$$

onde  $n$  é a iteração e pode assumir os valores  $1, 2, 3, \dots$

Sendo assim, considerando o segmento CE, quando esse segmento for dividido em três partes iguais, surgirão dois novos pontos, I e J, ilustrados na figura 4.9.

Analisando a figura 4.9, observa-se que o segmento  $\overline{CE}$ , no qual estão os pontos I e J, forma um ângulo  $\gamma$  com o eixo das abcissas. Assim pode-se novamente utilizar a projeção do segmento  $\overline{CE}$  sobre os eixos das abcissas e ordenadas e a trigonometria no triângulo retângulo para mostrar que as coordenadas dos pontos I são,

$$x_I = x_C + l_2 \cos \gamma,$$

$$y_I = y_C + l_2 \operatorname{sen} \gamma.$$

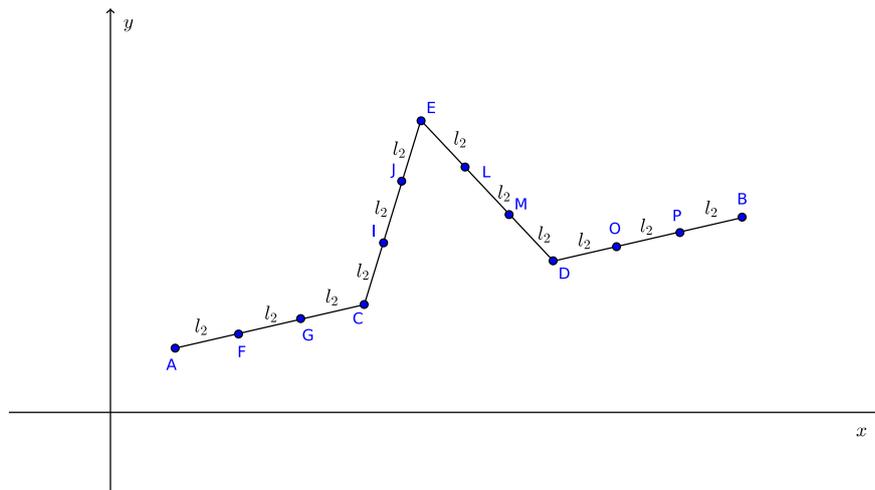


Figura 4.8: Primeiro passo da segunda iteração.

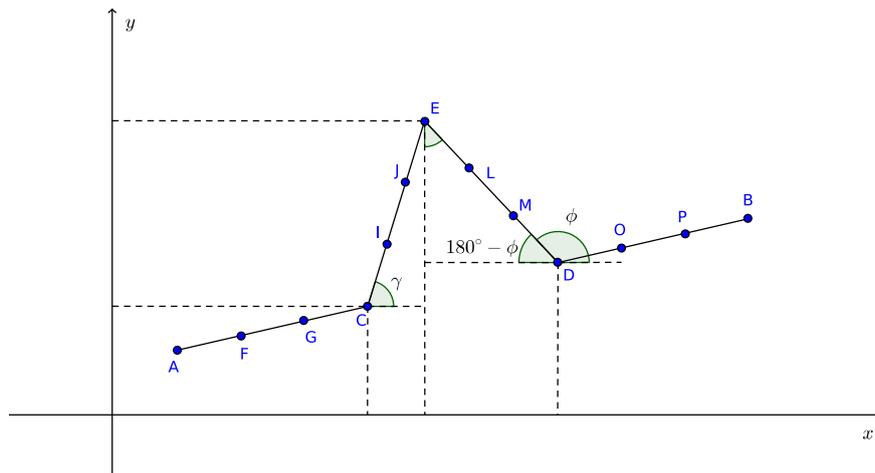


Figura 4.9: Descrição dos ângulos utilizados na segunda iteração.

De modo análogo, as coordenadas do ponto J são,

$$x_J = x_C + 2l_2 \cos \gamma,$$

$$y_J = y_C + 2l_2 \sin \gamma.$$

Procedimento semelhante pode ser feito para obter as coordenadas dos pontos L e M, gerados na divisão do segmento  $\overline{ED}$ . Destaca-se que o ângulo formado entre esse segmento e o eixo das abcissas é  $\phi$ ; dessa forma,

$$x_M = x_D - l_2 \cos(180^\circ - \phi), \quad (4.15)$$

$$y_M = y_D + l_2 \sin(180^\circ - \phi). \quad (4.16)$$

Semelhantemente, as coordenadas do ponto L são

$$x_L = x_D - 2l_2 \cos(180^\circ - \phi), \quad (4.17)$$

$$y_L = y_D + 2l_2 \sin(180^\circ - \phi), \quad (4.18)$$

Os sinais negativos que aparecem nas equações 4.15 e 4.17 devem-se ao fato dos pontos L e M estarem à esquerda do ponto D, logo possuem abcissa menor.

Após a divisão, substitui-se todos os terços centrais por V's de comprimento  $l_2$ , com isso obtém-se a figura 4.10.

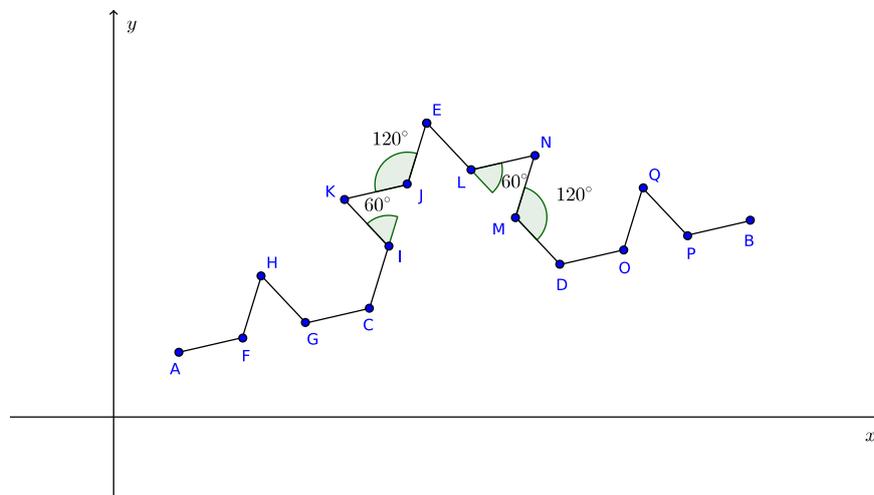


Figura 4.10: Segunda iteração.

A discussão feita para os ângulos formados entre os segmentos  $\overline{FH}$ ,  $\overline{HG}$ ,  $\overline{OQ}$ ,  $\overline{QP}$  e o eixo das abcissas é a mesma para o ângulo formado entre os segmentos  $\overline{CE}$ ,  $\overline{ED}$  e o eixo das abcissas.

O ângulo  $\gamma_1$  formado entre o segmento  $\overline{IK}$  e o eixo das abcissas é dado por:

$$\gamma_1 = \gamma + 60^\circ. \quad (4.19)$$

Da mesma forma, o ângulo  $\gamma_2$  entre o segmento  $\overline{KJ}$  e o eixo das abcissas é:

$$\gamma_2 = \gamma + 120^\circ. \quad (4.20)$$

Com isso, pode-se determinar as equações das retas suporte dos segmentos  $\overline{IK}$  e  $\overline{JK}$ .

Utilizando as coordenadas de um dos pontos desses segmentos e a equação 3.21,

$$\begin{aligned}y_{IK} &= y_I + (x - x_I) \cdot \operatorname{tg} \gamma_1, \\y_{JK} &= y_J + (x - x_J) \cdot \operatorname{tg} \gamma_2.\end{aligned}$$

Com a interseção dessas retas determina-se as coordenadas do ponto K, e de modo análogo, com a interseção das retas dos segmentos  $\overline{LN}$  e  $\overline{MN}$  determina-se as coordenadas do ponto N. Destaca-se que o ângulo  $\phi_1$  formado entre o segmento  $\overline{LN}$  e o eixo das abcissas é dado por

$$\phi_1 = \phi - 120^\circ. \quad (4.21)$$

De modo análogo, o ângulo formado entre o eixo das abcissas e o segmento  $\overline{NM}$  é dado por:

$$\phi_2 = \phi - 60^\circ. \quad (4.22)$$

Assim, as equações das retas suportes são

$$\begin{aligned}y_{LN} &= y_L + (x_N - x_L) \cdot \operatorname{tg} \phi_1 \\y_{MN} &= y_M + (x_N - x_M) \cdot \operatorname{tg} \phi_2.\end{aligned}$$

Esse processo é iterativo, podendo ser repetido indefinidamente. Todo o procedimento descrito acima pode ser utilizado para a construção desse fractal no papel milimetrado ou num computador, desde que se conheça alguma linguagem de programação.

### 4.3 Tapete de Sierpinski

Nesse fractal, todo o procedimento será feito em um quadrado. Assim, escolhe-se no  $\mathbb{R}^2$  um ponto A de coordenadas  $(x_A, y_A)$ . O ponto A é um dos vértices do quadrado, os outros vértices serão obtidos através das coordenadas do ponto A. A figura 4.11 ilustra uma possível escolha do quadrado descrito acima.

Seja  $L$  o lado do quadrado. Observa-se a partir da figura 4.11 que os pontos A e B estão sobre o mesmo segmento de reta paralelo ao eixo das abcissas, logo esses pontos possuem a mesma ordenada  $y_B = y_A$ . A coordenada  $x_B$  é

$$x_B = x_A + L. \quad (4.23)$$

Assim, as coordenadas do ponto B são  $(x_A + L, y_A)$ . Os pontos A e C estão sobre o

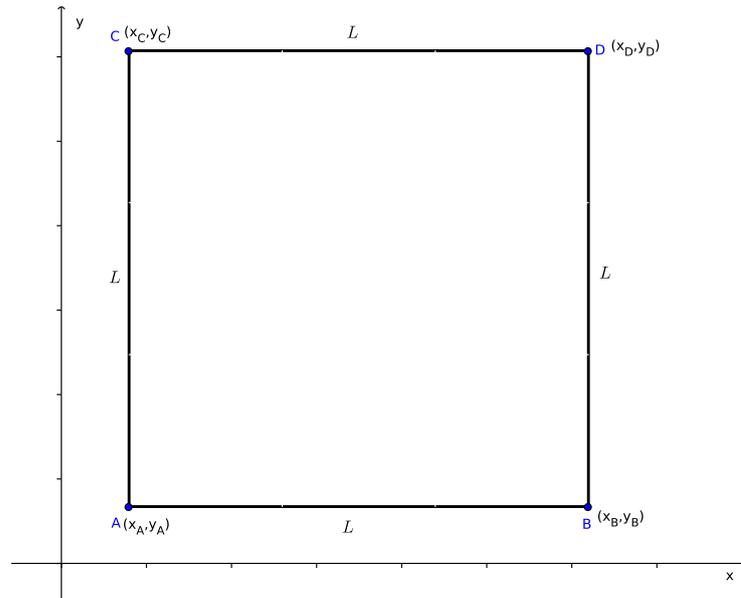


Figura 4.11: Construção do quadrado inicial.

mesmo segmento de reta paralelo ao eixo das ordenadas, dessa forma possuem a mesma abcissa,  $x_C = x_A$ . O valor de  $y_C$  pode ser obtido através da equação

$$y_C = y_A + L. \quad (4.24)$$

Com isso, o ponto C tem as coordenadas  $(x_A, y_A + L)$ . Os pontos D e B estão sobre o mesmo segmento de reta paralelo ao eixo das ordenadas, enquanto que os pontos D e C estão sobre o mesmo segmento paralelo ao eixo das abcissas. Assim, a abcissa do ponto D é igual à abcissa do ponto B e sua ordenada é igual à do ponto C.

$$x_D = x_A + L, \quad y_D = y_A + L \quad (4.25)$$

O próximo passo é preencher toda a área interna do quadrado. Após o preenchimento, divide-se os lados do quadrado em três partes de mesmo tamanho, como pode ser visto na figura 4.12.

A divisão fez surgir dois novos pontos em cada lado do quadrado. Ligando os pontos E e F, H e J, G e I, K e M, por segmentos de reta, como visto na figura 4.12, observa-se a formação de 9 (nove) quadrados de lados  $l_1$ ,

$$l_1 = \frac{L}{3}. \quad (4.26)$$

Utilizando o mesmo procedimento feito para obter as coordenadas dos pontos B, C e D, pode-se obter as coordenadas dos pontos E, F, G, H, I, J, K, M em função das coordenadas do

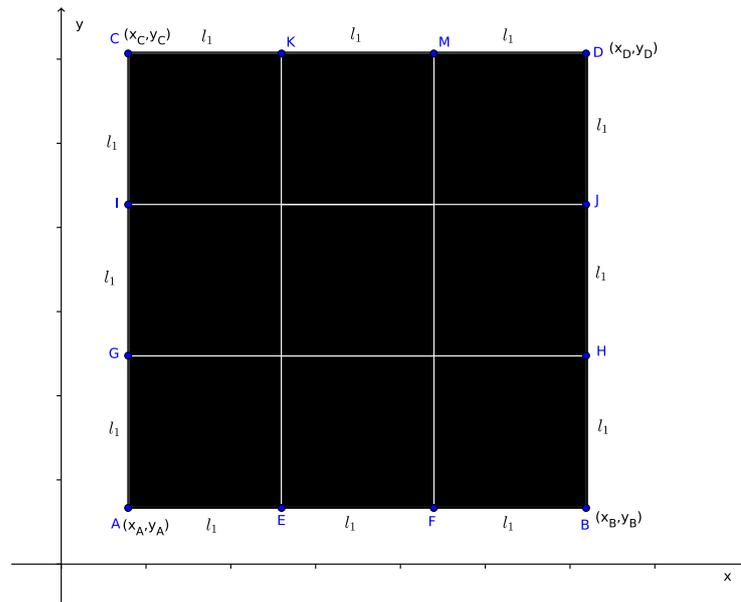


Figura 4.12: Quadrado totalmente preenchido com os lados divididos em três segmentos de mesmo comprimento.

ponto A. Assim,

$$\begin{aligned}
 x_E &= x_A + l_1, & y_E &= y_A, \\
 x_F &= x_A + 2l_1, & y_F &= y_A, \\
 x_G &= x_A, & y_G &= y_A + l_1, \\
 x_H &= x_A + 3l_1, & y_H &= y_A + l_1, \\
 x_I &= x_A, & y_I &= y_A + 2l_1, \\
 x_J &= x_A + 3l_1, & y_J &= y_A + 2l_1, \\
 5x_K &= x_A + l_1, & y_K &= y_A + 3l_1, \\
 x_M &= x_A + 2l_1, & y_M &= y_A + 3l_1.
 \end{aligned}$$

Com a retirada do quadrado central está concluída a primeira iteração, ilustrada na figura 4.13(a).

Na segunda iteração, cada quadrado remanescente da primeira iteração terá novamente seus lados divididos em três partes de mesmo comprimento, gerando, assim, dois novos pontos em cada lado dos quadrados. Com a ligação dos pontos opostos e a retirada do quadrado central, está concluída a segunda iteração, ilustrada na figura 4.13(b).

A construção do Tapete de Sierpinski é um processo recursivo. Assim, as demais iterações seguem o mesmo procedimento descrito na primeira e segunda iterações, e são feitas nos qua-

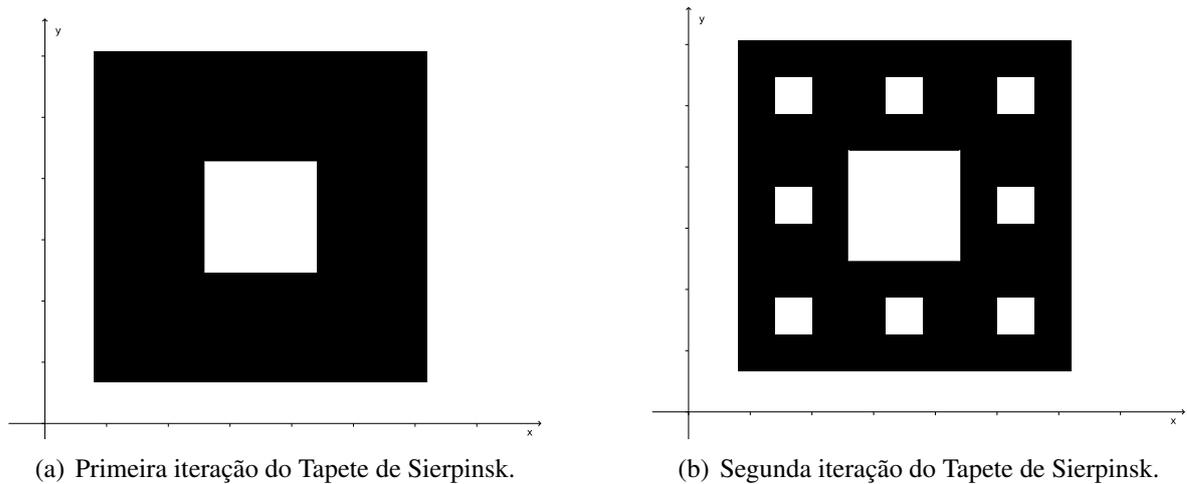


Figura 4.13: Primeira e segunda iterações do Tapete de Sierpinski.

drados remanescentes da iteração anterior.

## 4.4 Gaxeta de Sierpinsk

Inicialmente constrói-se um triângulo equilátero. Para isso serão escolhidos dois pontos A e B no  $\mathbb{R}^2$ . Esses pontos são dois dos vértices do triângulo. Ligando-se esses pontos por um segmento de reta construiu-se um dos lados do triângulo. Seja  $L$  o comprimento do segmento  $\overline{AB}$ ; o valor de  $L$  pode ser obtido através da equação 3.2:

$$d_{AB} = L = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}. \quad (4.27)$$

Por simplicidade, o ponto A foi colocado na origem dos eixos coordenados e o ponto B sobre o eixo x. Um terceiro ponto C é então determinado, de modo que o triângulo ABC seja equilátero. A figura 4.14 ilustra os pontos A, B e C.

Deseja-se descobrir as coordenadas do ponto C, o outro vértice do triângulo. Para isso, observa-se que num triângulo equilátero todos os lados são iguais e todos os ângulos internos são iguais a  $60^\circ$ . Com isso, pode-se projetar o segmento  $\overline{AC}$  sobre os eixos cartesianos e utilizar noções de trigonometria no triângulo retângulo para obter as coordenadas do ponto C. São elas:

$$x_C = L \cdot \cos 60^\circ = \frac{L}{2}.$$

e

$$y_C = L \cdot \sin 60^\circ = \frac{L \cdot \sqrt{3}}{2}. \quad (4.28)$$

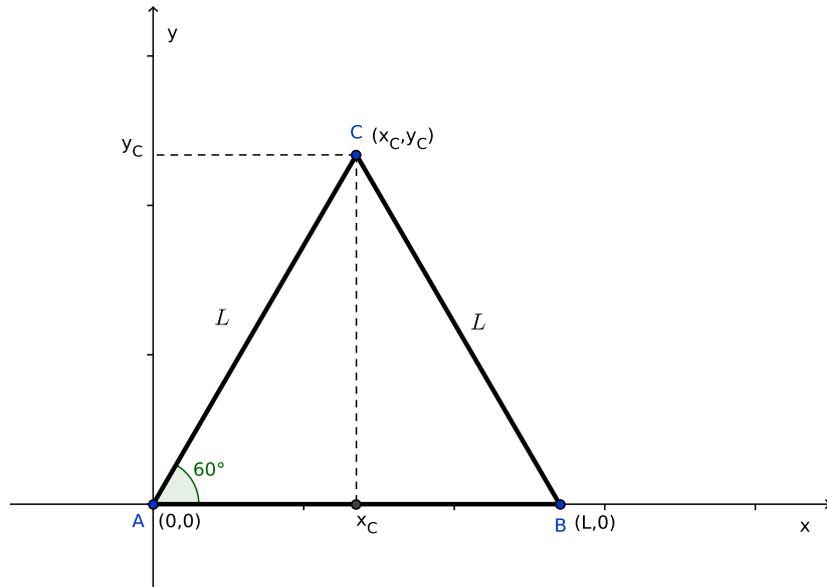


Figura 4.14: Triângulo equilátero de lados  $L$ .

Preenchendo-se a área interna do triângulo  $ABC$ , obtém-se o triângulo ilustrado na figura 4.15.

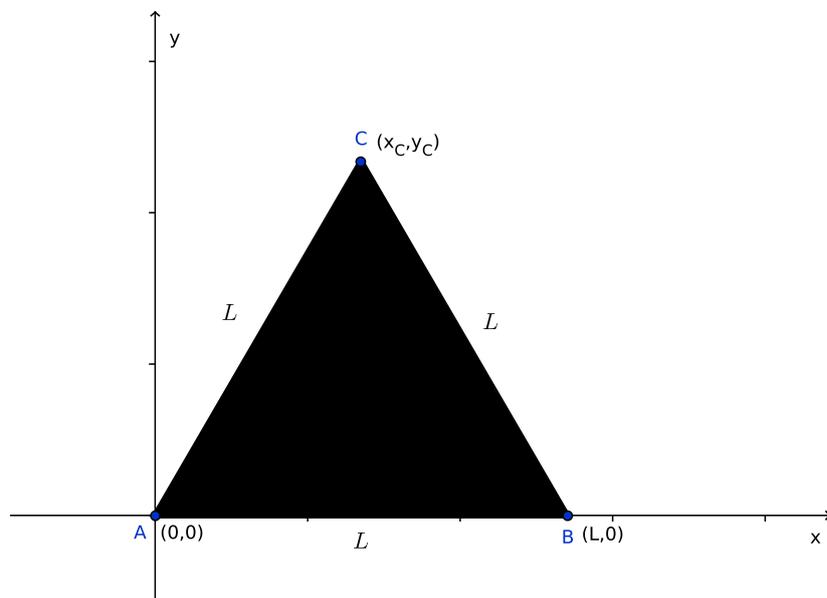


Figura 4.15: Triângulo totalmente preenchido.

O próximo passo é dividir cada lado do triângulo em duas partes de mesmo comprimento. Observa-se que a divisão é feita no ponto médio de cada lado do triângulo, assim, pode-se utilizar as equações (3.4) e (3.6) e as coordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  para determinar as

coordenadas dos pontos médios dos lados. Dessa forma,

$$x_{M_{AC}} = \frac{x_A + x_C}{2} \quad \text{e} \quad y_{M_{AC}} = \frac{y_A + y_C}{2}, \quad (4.29)$$

$$x_{M_{AB}} = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{e} \quad y_{M_{AB}} = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad (4.30)$$

$$x_{M_{BC}} = \frac{x_B + x_C}{2} \quad \text{e} \quad y_{M_{BC}} = \frac{y_B + y_C}{2}. \quad (4.31)$$

Em seguida, os pontos médios são ligados por segmentos de reta, como ilustrado na figura 4.16.

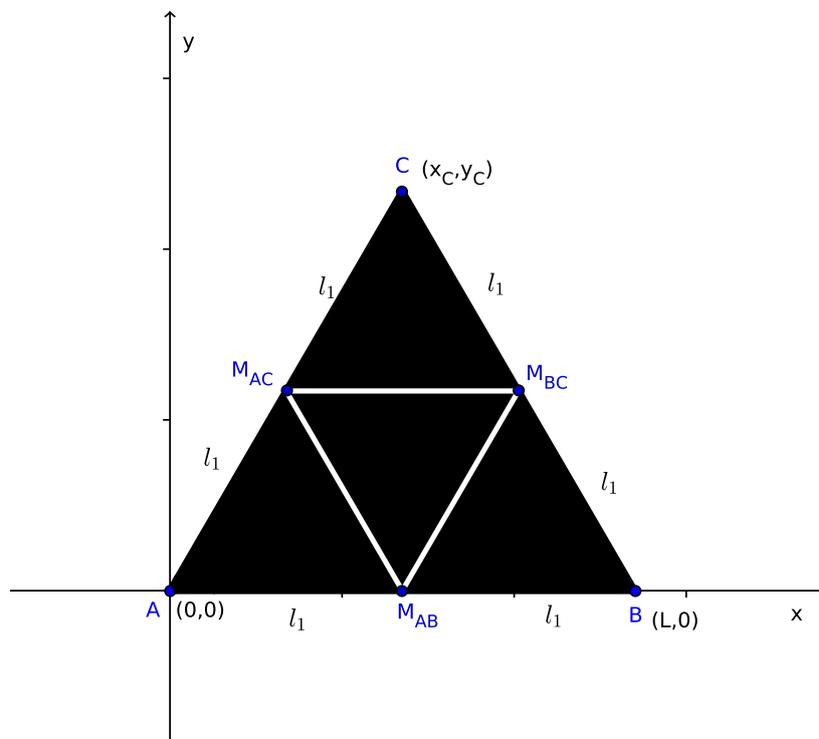


Figura 4.16: Quatro triângulos equiláteros.

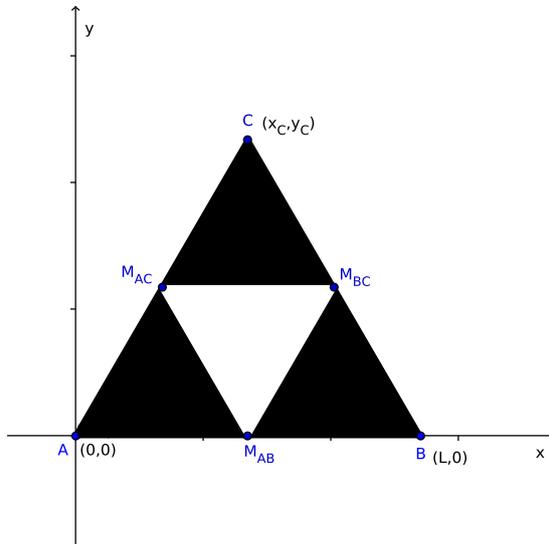
Observa-se na figura 4.16 que a ligação dos pontos médios gerou quatro novos triângulos também equiláteros, de lados  $l_1 = l/2$ . Deve-se retirar o triângulo central, obtendo-se a figura 4.17(a).

Com isso está finalizada a primeira iteração da construção da gaxeta de Sierpinski. De modo geral, o comprimento dos lados do triângulo em cada iteração são dados por:

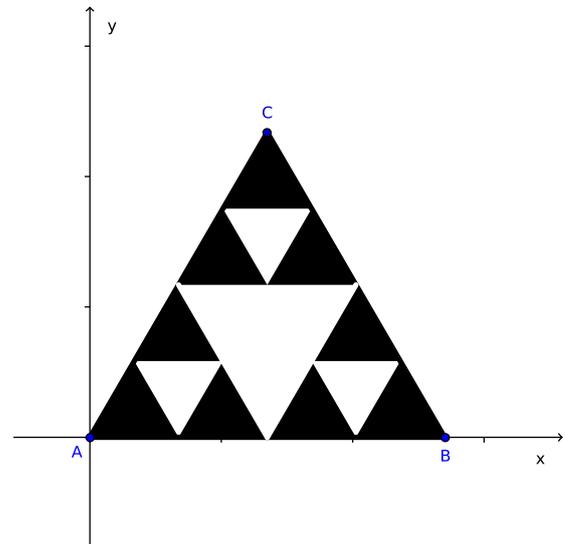
$$l_n = \frac{L}{2^n}. \quad (4.32)$$

Na segunda iteração, o mesmo procedimento da primeira iteração será feito para cada um dos triângulos remanescentes. Assim, o processo de construção da Gaxeta de Sierpinski é

recursivo, e as demais iterações seguem o mesmo procedimento descrito na primeira. A segunda iteração está ilustrada na figura 4.17(b):



(a) Primeira iteração da Gaxeta de Sierpinski.



(b) Segunda iteração da Gaxeta de Sierpinski.

Figura 4.17: Primeira e segunda iterações da Gaxeta de Sierpinski.

## 5 *Conclusão*

A Geometria Fractal apresenta uma formulação moderna e contextualizada das formas encontradas na natureza. Atrai principalmente pela beleza de suas formas, mas, também, pelo seu controverso formalismo. Dessa maneira, a Geometria Fractal pode funcionar como motivador para o estudo da Geometria Analítica.

Inserir a Geometria Fractal no contexto da Geometria Analítica, além de introduzir os alunos aos conceitos elementares de uma geometria moderna, mais apropriada para descrever as formas encontradas na natureza, incentiva o aluno a pesquisar sobre aplicações desse novo conteúdo.

Este trabalho mostra que a Geometria Fractal pode ser inserida no ensino de Geometria Analítica nas salas de aula, trazendo um conjunto de relações nas quais é possível interligar esses dois conteúdos. Particularmente, naqueles conteúdos que se referem ao estudo do ponto e da reta.

A construção dos fractais pode ser feita tanto com papel milimetrado e caneta, como também pode ser feita em um computador. Assim, dependendo do grau da formação escolar na qual a proposta está sendo aplicada é possível ser utilizada simultaneamente com o estudo de alguma linguagem de programação. Linguagem de programação seria, portanto, um pré-requisito neste caso.

Por tudo exposto acima, conclui-se que é possível fazer uma ligação entre o ensino de Geometria Analítica e a Geometria Fractal, sendo feita essa ligação através de uma contextualização da Geometria Analítica na Geometria Fractal.

## *Referências Bibliográficas*

- [1] ASSIS, T. A. et al. Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 30, n. 2, p. 2304.1–2304.10, 2008. Disponível em: < [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1806-11172008000200005&lng=en&nrm=iso&tlng=pt](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172008000200005&lng=en&nrm=iso&tlng=pt) >. Acesso em: 15 Agosto 2014.
- [2] FALCONER, K. **Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications**. 2 ed. Reino Unido: Wiley, 2003.
- [3] FEDER, J. **Fractals**. New York: Plenum Press, 1988.
- [4] GOUYET, J. F. **Physics and Fractal Structures**. 1 ed. Springer, 1996.
- [5] MANDELBROT, B. B. **The Fractal Geometry of Nature**. Nova Iorque: W. H. Freeman and Company, 1983.
- [6] BERRY, M. V.; LEWIS, Z. V. On the weierstrass-mandelbrot fractal function. **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 370, p. 459–484, 1980. Disponível em: < <https://michaelberryphysics.files.wordpress.com/2013/07/berry090.pdf> >. Acesso em: 15 Dezembro 2015.
- [7] VALIM, J. C. M.; COLUCCI, V. Geometria Fractal no Ensino Fundamental e Médio. In: Semana Acadêmica da Matemática, 21., 2008, Cascavel. **Artigos...** Cascavel: UNIOESTE, 2008. p. 1 – 10. Disponível em: < <http://projetos.unioeste.br/cursos/cascavel/matematica/xxiisam/artigos/13.pdf> >. Acesso em: 22 Maio 2015.
- [8] CÔRTEZ, I. R. C. **Geometria Fractal no Ensino Médio : Teoria e Prática**. Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: < [http://www2.unirio.br/unirio/ccet/profmat/tcc/TCC\\_IVANA.pdf](http://www2.unirio.br/unirio/ccet/profmat/tcc/TCC_IVANA.pdf) >. Acesso em: 01 Abril 2015.
- [9] NUNES, R. S. R. **Geometria Fractal e Aplicações**. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2006. Disponível em: < <http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf> >. Acesso em: 01 Abril 2015.
- [10] VILCHES, M. A. **Topologia geral**. Disponível em: < <http://www.ime.uerj.br/calculo/LivroVI/topologia.pdf> >. Acesso em: 29 Junho 2015.
- [11] MANDELBROT, B. B. How long is the coast of britain. **Science**, v. 156, Iss. 3775, p. 636–638, 1967. Disponível em: < <http://science.sciencemag.org/content/156/3775/636> >. Acesso em: 04 Jan. 2016.

- [12] MATOS, R. O. **Antenas Multibandas Utilizando a Geometria Fractal do Triângulo de Sierpinski**. Instituto Nacional de Telecomunicações – INATEL, 2012. Disponível em: < [http://www.inatel.br/biblioteca/index.php/material-didatico/pos-graduacao2/cat\\_view/275-producao-cientifica/276-dissertacoes-de-mestrado/1014-2012?start=5](http://www.inatel.br/biblioteca/index.php/material-didatico/pos-graduacao2/cat_view/275-producao-cientifica/276-dissertacoes-de-mestrado/1014-2012?start=5) >. Acesso em: 04 Jan. 2016.
- [13] BAIER, T. **O nexó geometria fractal-produção da ciência contemporânea tomado como núcleo do currículo de matemática do ensino básico**. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2005. Disponível em: < [http://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/102079/baier\\_t\\_dr\\_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/102079/baier_t_dr_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y) >. Acesso em: 03 Jan. 2016.
- [14] DANTE, L. R.. **Coleção Matemática, 3ª série**. 1 ed. São Paulo: Ática, 2004.
- [15] GIOVANNI, J. R. ; BONJORNO, J. R. ; GIOVANNI-JÚNIOR, J. R. Jr. **Matemática Completa: Ensino Médio: Volume único**. São Paulo: FTD, 2002.
- [16] IEZZI, G. et al.. **Matemática Volume único**. 2 ed. São Paulo: Atual, 2002.