



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
FÍSICA LICENCIATURA

JOSÉ WELLERSON DA SILVA

**OBJETO EDUCACIONAL PARA ENSINO DE COLISÕES ELÁSTICAS
BIDIMENSIONAIS DE DISCOS EM SUPERFÍCIE LISA**

Caruaru

2021

JOSÉ WELLERSON DA SILVA

**OBJETO EDUCACIONAL PARA ENSINO DE COLISÕES ELÁSTICAS
BIDIMENSIONAIS DE DISCOS EM SUPERFÍCIE LISA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Física.

Área de concentração: Ensino de Física.

Orientador: Prof^o. Dr. Ernesto Arcenio Valdés Rodriguez.

Caruaru

2021

Catálogo na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier - CRB/4 - 1242

S586o Silva, José Wellerson da.
Objeto educacional para ensino de colisões elásticas bidimensionais de discos em superfície lisa. / José Wellerson da Silva. – 2021.
64 f. ; il. : 30 cm.

Orientador: Ernesto Arcenio Valdés Rodriguez.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Física, 2021.
Inclui Referências.

1. Colisões (Física). 2. Física – Estudo e ensino. 3. Simuladores. I. Valdés Rodriguez, Ernesto Arcenio (Orientador). II. Título.

CDD 371.12 (23. ed.)

UFPE (CAA 2021-096)

JOSÉ WELLERSON DA SILVA

**OBJETO EDUCACIONAL PARA ENSINO DE COLISÕES ELÁSTICAS
BIDIMENSIONAIS DE DISCOS EM SUPERFÍCIE LISA**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Licenciatura em
Física da Universidade Federal de
Pernambuco, como requisito parcial para a
obtenção do título de Licenciado em Física.

Aprovada em: 04/06/2021

BANCA EXAMINADORA

Profº. Dr. Ernesto Arcenio Valdés Rodriguez (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Profº. Dr. João Eduardo Fernandes Ramos (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Profº. Dr. Gustavo Camelo Neto (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico este trabalho à minha mãe Elza, meu pai Vandeilson e minha avó materna Anastácia que são minha base e porto seguro. Minha companheira Letícia em quem encontro segurança e amor. À memória do meu sogro Wellington, exemplo de fé e de ser humano.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por todas as bênçãos e dádivas recebidas, e por não desistir de mim.

Ao meu pai Vandeilson e minha mãe Elza, por todo o apoio, carinho, amor, ensinamentos, por todos os momentos compartilhados e pela paciência comigo.

A minha companheira Letícia, pelo amor compartilhado, pela motivação, carinho, companheirismo e pela paciência comigo.

A minha família como um todo, por todo o incentivo, apoio e acolhimento, e também pelos momentos compartilhados.

Aos meus amigos, que são os melhores que alguém poderia ter, em especial aos de infância, aos que carrego comigo desde o ensino fundamental e médio, e aos que estiveram comigo durante a graduação.

A todos os professores com os quais já tive contato, por todas as lições aprendidas, ensinamentos e por me ajudarem a tornar-me quem sou hoje.

Ao meu orientador Ernesto, pelas orientações, conselhos, por tudo que pude aprender com ele, pela paciência e pela amizade.

What one fool can do, another can.

(THOMPSON; Silvanus Philips, 1910, prologue)

RESUMO

O trabalho apresenta um objeto educacional para ensino de colisões elásticas arbitrárias entre discos semelhantes numa superfície lisa. O objeto consiste numa mesa de colisões no estilo Air Hockey e um simulador de colisões desenvolvido na linguagem Python. A mesa pode ser utilizada junto ao software Tracker para estudo de colisões reais numa situação de discos semelhantes e leves numa superfície de baixo atrito enquanto o programa Python pode ser utilizado para simular colisões de discos ideais em superfícies ideais ou em condições controladas. Em nosso trabalho “colisão arbitrária” significa que os discos colidem com velocidades iniciais em qualquer direção e sentido em relação ao sistema de coordenadas do experimento. Este tipo de colisão não se encontra normalmente em livros didáticos de ensino médio ou superior. No trabalho também comparamos algumas colisões específicas feitas na mesa de flutuação com colisões semelhantes no simulador computacional. Os resultados apresentam uma margem de divergência que consideramos aceitável dentro das condições do experimento e damos algumas sugestões de como diminuir essa margem. O trabalho sugere como perspectiva futura construir uma sequência didática baseada no ensino por projetos ou por investigação que inclua este objeto educacional para ensino de colisões no ensino médio ou superior.

Palavras-chave: Colisões bidimensionais. Air Hockey. Tracker. Simulador Python.

ABSTRACT

The work presents an educational object for teaching arbitrary elastic collisions between similar disks on a smooth surface. The object consists of a collision table in the Air Hockey style and a collision simulator developed in the Python language. The table can be used in conjunction with the Tracker software to study real collisions in a situation of similar, lightweight disks on a low-friction surface while the Python program can be used to simulate ideal disk collisions on ideal surfaces or under controlled conditions. In our work “arbitrary collision” means that the disks collide at initial speeds in any direction and direction in relation to the experiment's coordinate system. This type of collision is not normally found in high school or undergraduate textbooks. In the work we also compared some specific collisions made on the float table with similar collisions in the computer simulator. The results present a margin of divergence that we consider acceptable under the conditions of the experiment and we give some suggestions on how to decrease this margin. The work suggests as a future perspective to build a didactic sequence based on teaching by projects or by research that includes this educational object for teaching collisions in high school or undergraduate school.

Keywords: Two-dimensional collisions. Air Hockey. Tracker. Python simulator.

SUMÁRIO

| | | |
|--------------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 11 |
| 2 | RECURSOS COMPUTACIONAIS E EXPERIMENTAIS NO ENSINO DE FÍSICA | 13 |
| 2.1 | OUTROS SIMULADORES E PESQUISAS FEITAS NA TEMÁTICA DE COLISÕES | 14 |
| 3 | COLISÕES ELÁSTICAS UNIDIMENSIONAIS, BIDIMENSIONAIS E OS PRINCÍPIOS DE CONSERVAÇÃO | 18 |
| 3.1 | COLISÕES ELÁSTICAS UNIDIMENSIONAIS | 18 |
| 3.2 | COLISÕES ELÁSTICAS BIDIMENSIONAIS DE DISCOS EM UMA SUPERFÍCIE SEM ATRITO | 22 |
| 4 | PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DA MESA DE COLISÕES | 31 |
| 4.1 | IDEIAS E PROCEDIMENTOS INICIAIS | 31 |
| 4.2 | BUSCANDO UMA ALTERNATIVA MAIS VIÁVEL | 32 |
| 5 | CONSTRUÇÃO DO SIMULADOR DE COLISÕES | 37 |
| 5.1 | A BIBLIOTECA VPYTHON E A PLATAFORMA GLOWSCRIPT | 37 |
| 5.2 | PROGRAMANDO O SIMULADOR E AS DIFICULDADES ENCONTRADAS | 40 |
| 5.3 | MELHORIAS A SEREM FEITAS | 40 |
| 6 | EXEMPLOS DE COLISÕES REALIZADAS NA MESA E SUA ANÁLISE UTILIZANDO O TRACKER | 42 |
| 6.1 | A FERRAMENTA DE ANÁLISE TRACKER | 42 |
| 6.2 | ANÁLISES | 43 |
| 6.2.1 | Análise dos dois discos menores | 43 |
| 6.2.2 | Análise dos dois discos médios | 46 |
| 6.2.3 | Análise dos dois discos maiores | 48 |
| 6.3 | CONSIDERAÇÕES SOBRE OS RESULTADOS OBTIDOS E SUGESTÕES PARA A MELHORIA DO EXPERIMENTO | 50 |
| 7 | CONCLUSÃO | 52 |
| | REFERÊNCIAS | 54 |
| | APÊNDICE A – ROTAÇÃO DE EIXOS EM DUAS DIMENSÕES | 55 |
| | APÊNDICE B – CÓDIGO DO SIMULADOR | 60 |

1 INTRODUÇÃO

No presente trabalho expomos um objeto educacional que foi construído para ser utilizado no ensino de colisões elásticas em duas dimensões. O objeto consiste em dois produtos educacionais que podem ser usados simultaneamente junto a outros objetos e didáticas de ensino para discutir estes conteúdos. O primeiro é uma mesa de colisões inspirada nas tradicionais mesas de air hockey, feita com madeira MDF e um ventilador de mesa como propulsor de ar para que os discos flutuem. O segundo é um simulador de colisões programado em Python utilizando a biblioteca VPython através da plataforma online Glowscript que permite o fácil compartilhamento do simulador, que pode ser executado por qualquer pessoa com ou sem¹ conexão à internet. A ideia é trazer alternativas para que o professor possa explorar junto com os alunos esse tema tão pouco aprofundado, tanto no ensino médio, quanto no ensino superior² e que é de fundamental importância para trabalhar conteúdos que de alguma forma tem aplicações em diversos campos de pesquisa como: física de partículas, física nuclear, teoria de bilhares, entre outros.

Produtos educacionais similares já foram construídos e propostos por diversos autores e instituições, por exemplo, o simulador de colisões do conhecido site PhET Colorado³ simula colisões generalizadas, no sentido de que os discos podem ter qualquer posição, direção e sentido no plano da mesa no instante da colisão.

O nosso traz a simulação e o experimento real simultaneamente, de forma que podemos comparar resultados experimentais com resultados teóricos. O experimento real tem a virtude de que o aluno pode ver como são as colisões na prática, onde é impossível eliminar o atrito, as irregularidades da superfície e dos objetos que colidem, enquanto o experimento virtual tem a virtude de que o estudante pode ver como funcionam diferentes modelos teóricos que levem em consideração as variações no atrito, na massa e dimensões dos objetos.

A comparação entre um experimento real e virtual nos permite verificar a validade dos modelos teóricos e abre um enorme campo de diálogo professor-aluno sobre teoria e experimento. O presente trabalho foi motivado pelo desejo de contribuir com didáticas de ensino que facilitem este tipo de diálogo.

O modelo teórico que utilizamos neste trabalho para o cálculo das colisões arbitrarias bidimensionais foi o de colisões elásticas unidimensionais baseado nos princípios de conservação do momento linear e da energia cinética junto a técnica

1 Veja o Apêndice C

2 Como exemplos de livros de ensino superior que tratam desse assunto de maneira mais simples e pouco aprofundada temos Halliday, Resnick e Walker (2012), Nussenzveig (2013).

3 Pode ser acessado em: <https://phet.colorado.edu/en/simulation/collision-lab>

de matriz de rotação⁴. A partir dele é possível calcular as velocidades dos discos pós-colisão sabendo apenas as velocidades antes da colisão e o ponto de contato no instante dela.

Sendo assim, o objetivo principal deste trabalho foi desenvolver um objeto educacional constituído de mesa de flutuação e simulador computacional para discutir de forma teórica e experimental conteúdos de colisões bidimensionais arbitrárias de discos. Após o desenvolvimento do produto nos propusemos como objetivo secundário comparar resultados experimentais e teóricos de colisões reais com auxílio do analisador de vídeos Tracker.

Nos próximos capítulos serão discutidos o uso de recursos computacionais e experimentais no ensino de física, a fundamentação teórica do problema de colisões, a solução para o problema de colisões generalizadas em duas dimensões, o processo de construção dos produtos educacionais, a análise de algumas colisões utilizando o Tracker, as dificuldades encontradas durante o processo e três apêndices, um com o maquinário matemático necessário, outro com o código do simulador de colisões e outro sobre como fazer uso do simulador estando offline.

4 Veja o Apêndice A

2 RECURSOS COMPUTACIONAIS E EXPERIMENTAIS NO ENSINO DE FÍSICA

Com o avanço e o processo de modernização da sociedade e o surgimento de novas tecnologias a educação como um todo deve se reinventar. Cada vez mais aumenta o acesso e o contato direto dos estudantes com a internet e com ferramentas audiovisuais, abrindo novas possibilidades para o ensino de física aliado à tecnologia. Muitos recursos vem sendo desenvolvidos e utilizados por alunos, como exemplo disso temos o GeoGebra⁵, que permite ao usuário fazer as mais diversas manipulações gráficas e até animá-las com respeito a algum parâmetro.

A utilização de simuladores no ensino de física se justifica por diversos fatores: Fator financeiro, já que adquirir maquinários para realizações de experimentos é inviável para muitas escolas que infelizmente não possuem recursos suficientes, permite ao aluno explorar sua autonomia e buscar aprender com o simulador mesmo após o momento em sala de aula, é um bom primeiro contato principalmente para assunto mais abstratos por ajudar na visualização dos fenômenos, permite ao professor dar dinamicidade aos sistemas muitas vezes ilustrados de maneira estática na lousa, "a experiência tem mostrado que em muitos casos essas ilustrações não têm sido de grande ajuda" (MEDEIROS; MEDEIROS, 2002, p. 78). Podemos pontuar também o ganho de tempo de aula por não ser necessário se deslocar para outro ambiente, permite também o contato dos estudantes com situações mais difíceis deles presenciarem como uma reação de fissão nuclear.

Mas o uso de simuladores deve ser feito com cautela, há limitações que devem ser pontuadas. O simulador pode conter erros ou imprecisões em relação ao mundo real, por falta de cuidado no momento de seu desenvolvimento ou falta do arcabouço teórico em física, conduzindo os estudantes a pensarem de maneira incorreta, de modo que a construção de uma simulação computacional pressupõe a existência de um modelo que lhe dá suporte, mas é importante ressaltar que mesmo o modelo representa apenas uma situação aproximada (MEDEIROS; MEDEIROS, 2002). Pode ocorrer também do desejo por parte do professor ou dos estudantes de substituir os experimentos reais por simulações, mas é importante lembrar que há uma diferença significativa entre observar o fenômeno com um experimento real e com uma simulação, o fenômeno real conta com diversos fatores para se levar em consideração, por melhor que a simulação seja ela representa apenas uma aproximação e deve ter seus limites de validade expostos, pois efeitos significativos podem passar despercebidos ou serem ignorados pelos estudantes, prejudicando o processo de aprendizagem (MEDEIROS; MEDEIROS, 2002). Sendo assim, é

⁵ <https://www.geogebra.org/>

fundamental aliar a prática experimental ao uso de simuladores, garantindo uma compreensão mais profunda dos conteúdos propostos.

De acordo com Medeiros e Medeiros (2002, p. 84):

O ato educativo é por demais complexo para que o profissional da educação em Física possa optar por um único recurso pedagógico. O ato educativo deveria, ao contrário, ser focalizado de uma forma holística em múltiplas possibilidades trazidas pela realidade concreta, pela interação humana e, também, pelas simulações.

Sendo assim, é importante que o profissional da educação considere a utilização dos mais diversos recursos em sua aula, sejam simuladores com animações, experimentos, filmes, quadrinhos, entre outros, de modo que ela possa ser enriquecida, atendendo as particularidades individuais dos alunos.

2.1 OUTROS SIMULADORES E PESQUISAS FEITAS NA TEMÁTICA DE COLISÕES

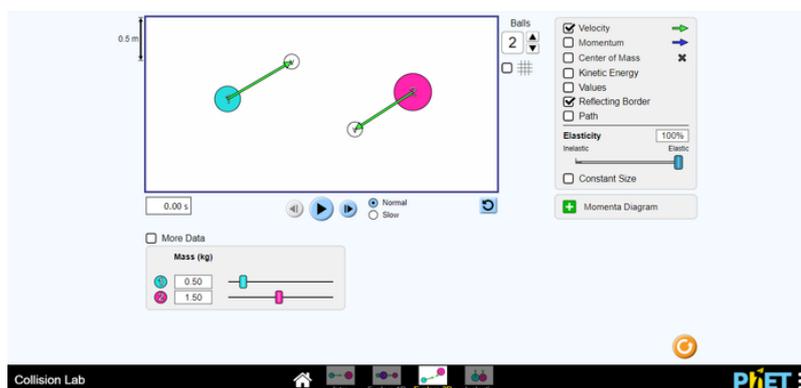
Diversos produtos educacionais que representam simulações de fenômenos e sistemas físicos já foram produzidos. Provavelmente o site mais famoso nesse sentido seja o PhET Colorado⁶, que conta com simuladores nas áreas da física, química, matemática, ciências da terra e biologia.

Falando especificamente de simuladores de colisões, houve diversas instituições e pessoas que desenvolveram programas capazes de simular diversas situações, desde colisões elásticas às inelásticas, unidimensionais e bidimensionais, com base nas pesquisas feitas por Fonseca (2019) junto a outras feitas na ferramenta de busca google, podemos citar:

PhET Colorado: Site com diversos simuladores, entre eles um de colisões em duas dimensões com velocidades arbitrárias podendo ter qualquer direção e sentido, é possível alterar a massa dos corpos, o quão elástica uma colisão será, as posições dos corpos, colocar até quatro corpos ao mesmo tempo para colidir e ver os vetores associados a quantidades de interesse físico como o momento linear, a velocidade e o centro de massa (veja a Figura 1). É possível também explorar colisões unidimensionais e baixar o simulador para utilizá-lo offline.

⁶ Veja: <https://phet.colorado.edu/>

Figura 1 — Instantâneo feito no simulador de colisões do PhET Colorado



Fonte: PhET Colorado (2021)

Walter Fendt⁷: É um site que conta com diversos aplicativos de física, possuindo um sobre colisões unidimensionais, onde são explorados os casos elásticos e inelásticos, sendo possível alterar as massas e as velocidades dos carrinhos que colidem (veja a Figura 2).

Figura 2 — Instantâneo do simulador de colisões do Walter Fendt

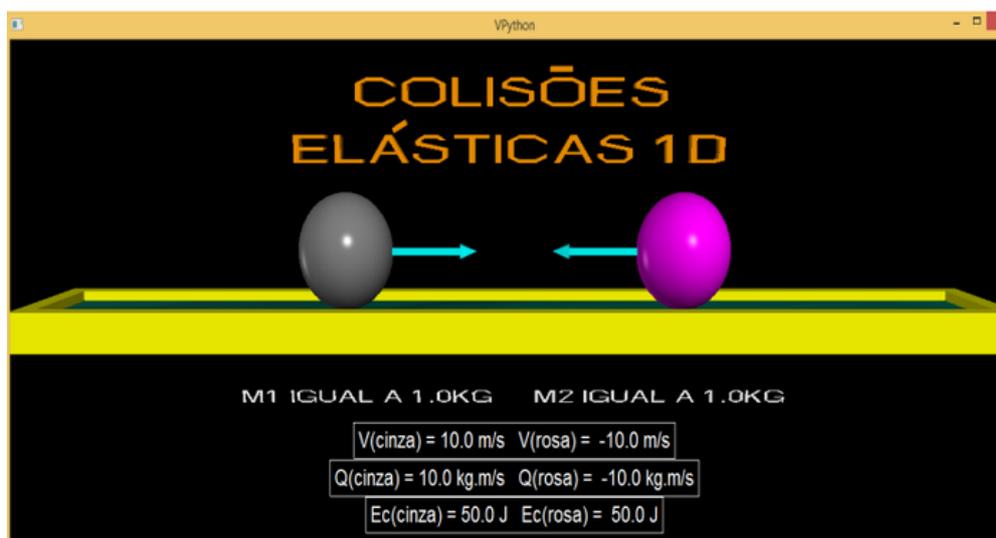


Fonte: Walter Fendt (1998)

Paes (2016) utilizando também a biblioteca Vpython criou simulações de colisões em uma e duas dimensões (limitando-se ao caso em que um dos corpos está em repouso) que foram utilizadas junto a atividades para os alunos. Nas simulações é possível escolher as massas e as velocidades dos corpos, além de imprimir na tela os valores da energia cinética e da quantidade de movimento (momento linear) de cada um dos corpos (veja as Figuras 3 e 4).

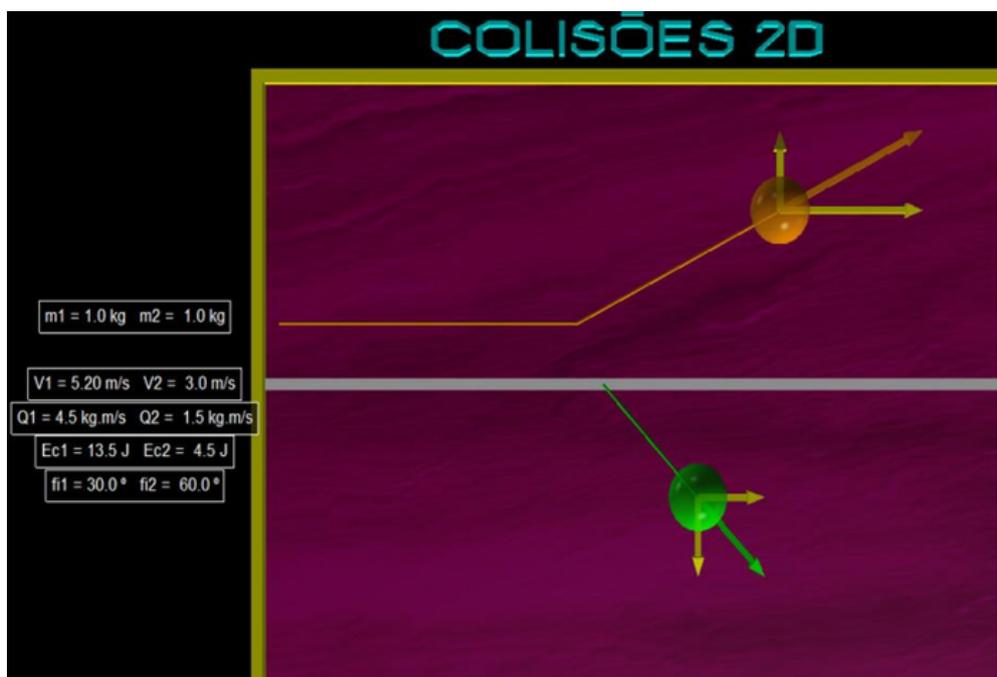
⁷ <https://www.walter-fendt.de/html5/phpt/>

Figura 3 — Instantâneo do simulador de colisões de Paes (unidimensional)



Fonte: Paes (2016)

Figura 4 — Instantâneo do simulador de colisões de Paes (bidimensional)



Fonte: Paes (2016)

Além de que podemos citar também Fonseca (2019), que em sua dissertação de mestrado programou um simulador⁸ de colisões que abarca o caso unidimensional e o bidimensional com um dos corpos em repouso, além de um roteiro para sua aplicação. O simulador permite escolher a massa dos corpos, o

⁸ Pode ser acessado no link: http://www2.ifrn.edu.br/mnpef/ColSim.html?fbclid=IwAR3iV3s80gdR1x7rpc93tyCtN7nB2LEg3zTfXlxUNcshwV9E_nuv5sGg5Q

parâmetro de impacto (distância entre os dois centros), a velocidade de um dos corpos e o coeficiente de restituição. A escolha é feita através de controles deslizantes (veja a Figura 5).

Figura 5 — Instantâneo do simulador de colisões de Fonseca



Fonte: Fonseca (2019)

O nosso se diferencia por tratar de um caso mais geral em que os dois discos estão em movimento e as velocidades deles podem ter qualquer direção e sentido, aliado também à prática experimental proporcionado pela mesa de colisões, dando ao professor alternativas diversas sobre como trabalhar o assunto em sala e como fazer o uso da melhor forma dos produtos educacionais.

Outros trabalhos na temática que podem ser citados são:

Filho (2010) apresenta em seu trabalho os pressupostos para a produção de aplicativos que serão utilizados no ensino de física, quais os padrões para produzi-los e expõe um relato com avaliação preliminar do seu uso em um ambiente escolar.

Fonseca Filho (2019) propõe um produto educacional que é composto por uma sequência didática para o conteúdo de quantidade de movimento que foi ministrada com o auxílio dos softwares pré-existent PhET e do Kahoot, este último é uma plataforma de aprendizagem que se baseia em jogos de perguntas e respostas de múltipla escolha.

3 COLISÕES ELÁSTICAS UNIDIMENSIONAIS, BIDIMENSIONAIS E OS PRINCÍPIOS DE CONSERVAÇÃO

Inicialmente começaremos com o caso mais simples para introduzir alguns conceitos importantes, tendo por base o livro do Nussenzveig (2013, p. 214-217) de mecânica. Colisões elásticas são caracterizadas pela conservação da energia e pela conservação do momento linear (quando não há atuação de forças externas ele se conserva em qualquer tipo de colisão, diferentemente da energia mecânica que se conserva apenas quando a colisão é elástica), princípios que servem de base para a resolução dos problemas. A questão fundamental é: dadas as condições antes da colisão, determinar qual o valor das grandezas de interesse após a colisão.

É muito importante destacar que neste trabalho estamos propondo um método de solução da colisão bidimensional de discos em superfície sem atrito baseado na utilização da matriz de rotação de sistema de coordenadas cartesianas. Este método, como veremos mais adiante, nos permite resolver o problema bidimensional utilizando as soluções obtidas para o caso unidimensional, de modo que é importante iniciarmos este capítulo apresentando a solução do problema da colisão elástica unidimensional encontrado facilmente em livros didáticos.

3.1 COLISÕES ELÁSTICAS UNIDIMENSIONAIS

Considerando que duas partículas movendo-se em linha reta colidem, possuindo massas e velocidades iniciais dadas por: $(m_1, m_2, v_{1i}, v_{2i})$, sendo as partículas sujeitas apenas às forças internas, temos que o momento se conserva, e assim:

$$P_i = p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2f} = P_f \quad (1)$$

Como a colisão é elástica e não há forças externas ou internas que transformem a energia cinética em outra forma de energia ela irá se conservar. Podemos relacioná-la ao momento linear da seguinte forma:

$$T = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad (2)$$

A conservação da energia cinética na colisão nos retorna:

$$T_i = \frac{p_{1i}^2}{2m_{1i}} + \frac{p_{2i}^2}{2m_{2i}} = \frac{p_{1f}^2}{2m_{1f}} + \frac{p_{2f}^2}{2m_{2f}} = T_f \quad (3)$$

Reescrevendo as equações 1 e 3:

$$p_{2f} - p_{2i} = p_{1i} - p_{1f} \quad (4)$$

$$p_{2f}^2 - p_{2i}^2 = \lambda(p_{1i}^2 - p_{1f}^2) \quad (5)$$

Onde λ é um fator adimensional dado pela razão entre as massas:

$$\lambda = \frac{m_2}{m_1} \quad (6)$$

Podemos reescrever a equação 5 da seguinte maneira:

$$(p_{2f} - p_{2i})(p_{2f} + p_{2i}) = \lambda(p_{1i} - p_{1f})(p_{1i} + p_{1f}) \quad (7)$$

E dividindo pela equação 4, ficamos com:

$$(p_{2f} + p_{2i}) = \lambda(p_{1i} + p_{1f}) \quad (8)$$

Que pode ser reescrita como:

$$v_{2f} - v_{1f} = -(v_{2i} - v_{1i}) \quad (9)$$

Mostrando que a velocidade relativa das partículas se inverte, consequência característica de uma colisão frontal.

Multiplicando a equação 8 por -1 e somando à equação 4, ficamos com:

$$-2v_{2i} = v_{1i} \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) - v_{1f} \left(\frac{1}{\lambda} + 1 \right) \quad (10)$$

Que após algumas manipulações resulta em:

$$v_{1f} = \frac{2\lambda}{1 + \lambda} v_{2i} + \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} v_{1i} \quad (11)$$

Substituindo o valor de λ e fazendo mais algumas manipulações, chegamos a:

$$v_{1f} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (12)$$

Utilizando a expressão encontrada para v_{1f} podemos encontrar v_{2f} :

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \quad (13)$$

E assim, conseguimos escrever as velocidades finais das partículas após a colisão em função de suas velocidades iniciais. Podemos perceber que se m

$m_1 = m_2$, então $v_{1f} = v_{2i}$ e $v_{2f} = v_{1i}$. Se temos a partícula 2 em repouso e a partícula 1 se movendo em direção a ela, provocando uma colisão, para o caso $m_1 \ll m_2$:

$$v_{1f} \approx -v_{1i} \quad (14)$$

$$v_{2f} \approx 2 \frac{m_1}{m_2} v_{1i} \ll v_{1i} \quad (15)$$

A partícula 1 é praticamente refletida. Pela equação 15 podemos notar também que:

$$p_{2f} \approx 2p_{1i} \quad (16)$$

Que vem da conservação do momento, como $p_{1f} \approx -p_{1i}$, temos que $\Delta p_1 \approx -2p_1$, de modo que o momento transferido à partícula 2 é aproximadamente o dobro do momento inicial da partícula 1.

Para $m_1 \gg m_2$, com a partícula 2 em repouso, temos:

$$v_{1f} \approx v_{1i} \quad (17)$$

$$v_{2f} \approx 2v_{1i} \quad (18)$$

Percebemos que a partícula 1 praticamente não é freada devido a sua grande massa, já a mais leve é lançada para frente com aproximadamente o dobro da

velocidade inicial da partícula mais pesada.

3.2 COLISÕES ELÁSTICAS BIDIMENSIONAIS DE DISCOS EM UMA SUPERFÍCIE SEM ATRITO

O caso bidimensional é aquele em que as velocidades antes e depois da colisão dos objetos envolvidos têm componentes em dois eixos de coordenadas, normalmente na superfície horizontal. Comumente estudamos objetos circulares, mas poderia ser de interesse o estudo de objetos diversos, por exemplo, objetos com superfícies planas ou superfícies cônicas em sentido geral, tais como hipérbolas ou elipses. É importante notar que as equações apresentadas na seção 3.1 não valem apenas para discos, poderiam ser objetos de superfícies planas ou elípticas, sempre quando a colisão não mude a direção de movimento dos objetos. A direção de movimento inicial, a geometria dos objetos e o ponto de colisão é o que determina se a colisão será unidimensional ou bidimensional. No caso da colisão bidimensional de discos é evidente que o ponto de colisão determina a direção do movimento após a colisão.

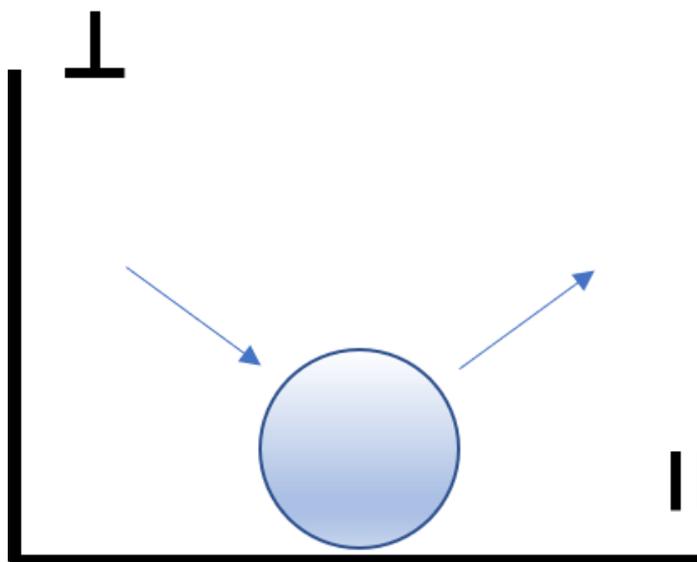
O método de solução que apresentamos aqui leva em consideração não apenas a velocidade dos discos antes da colisão, mas também o ponto no momento dela, ou seja, a posição exata de cada disco no momento da colisão.

O procedimento para o caso bidimensional faz uso de algumas suposições e utiliza a rotação do sistema de coordenadas, de modo que possamos encontrar as velocidades finais dos discos em função das velocidades iniciais. Durante o desenvolvimento do problema supomos que as massas dos discos são iguais e seus raios também.

A colisão elástica da qual tratamos aqui é uma colisão ideal e instantânea em que as superfícies não deslizam durante o instante da colisão, sendo assim, qualquer forma de atrito é estático pelo qual não há perda de energia cinética durante a colisão. Com isto, podemos analisar de forma relativamente simples as duas componentes do plano de colisão. Na direção ortogonal do plano, ou seja, aquela perpendicular à tangente ao ponto de colisão na superfície dos discos, a colisão satisfaz as mesmas condições da colisão unidimensional. Já na direção paralela ou nada acontece com as velocidades dos discos, precisamente porque não há forças tangenciais que alterem a energia cinética dos objetos.

Como exemplo, podemos colocar uma colisão ideal de um disco com uma parede, o que acontece é que o disco inverte a componente da velocidade ortogonal à parede (veja a Figura 6), enquanto a componente tangencial permanece inalterada. Isso ocorre porque a força normal exercida pelo disco na parede é igual em magnitude à normal que a parede exerce sobre o disco.

Figura 6 — Colisão de um disco com uma parede ideal



Fonte: O autor (2021)

Algo semelhante ocorre quando temos a colisão de dois discos (veja a Figura 7), temos que as velocidades na direção paralela à tangente ao ponto de colisão não irão se alterar, enquanto as velocidades na direção ortogonal serão alternadas, assim:

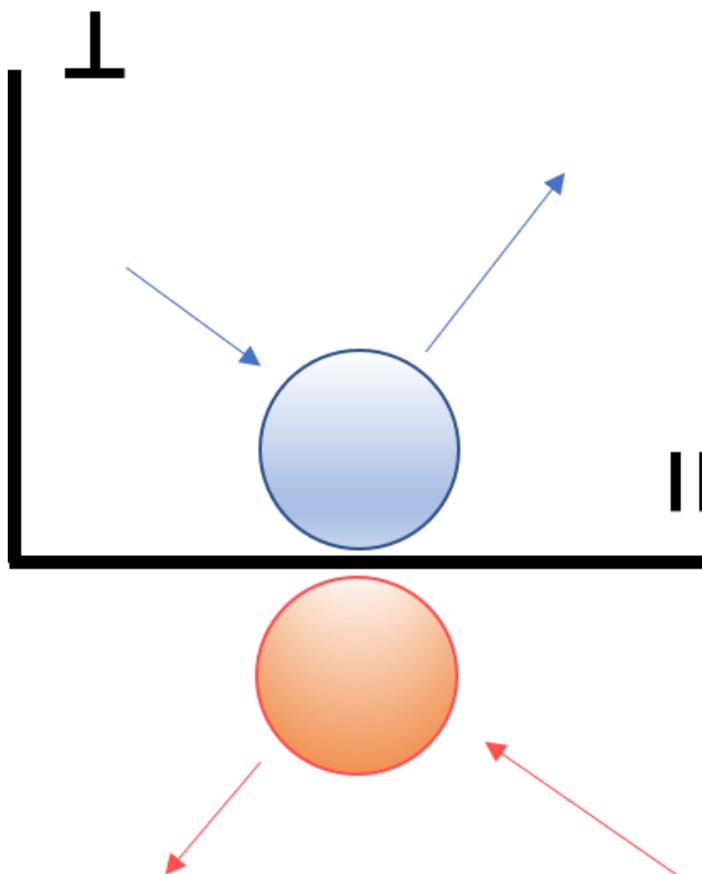
$$v_{1f\parallel} = v_{1i\parallel} \quad (19)$$

$$v_{2f\parallel} = v_{2i\parallel} \quad (20)$$

$$v_{1f\perp} = v_{2i\perp} \quad (21)$$

$$v_{2f\perp} = v_{1i\perp} \quad (22)$$

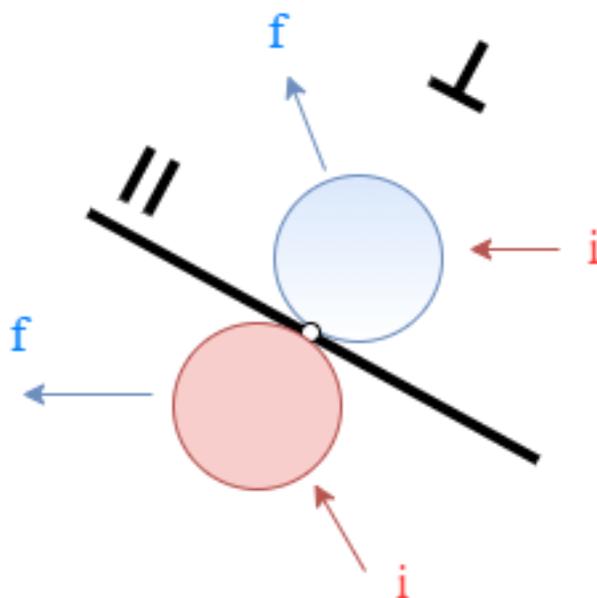
Figura 7 — Quando dois discos colidem há a troca das velocidades na direção ortogonal



Fonte: O autor (2021)

Podemos rotacionar o sistema de coordenadas de modo que os novos eixos x' e y' fiquem na direção das componentes ortogonais e paralelas das velocidades respectivamente, como ilustrado nas Figuras 8 e 9:

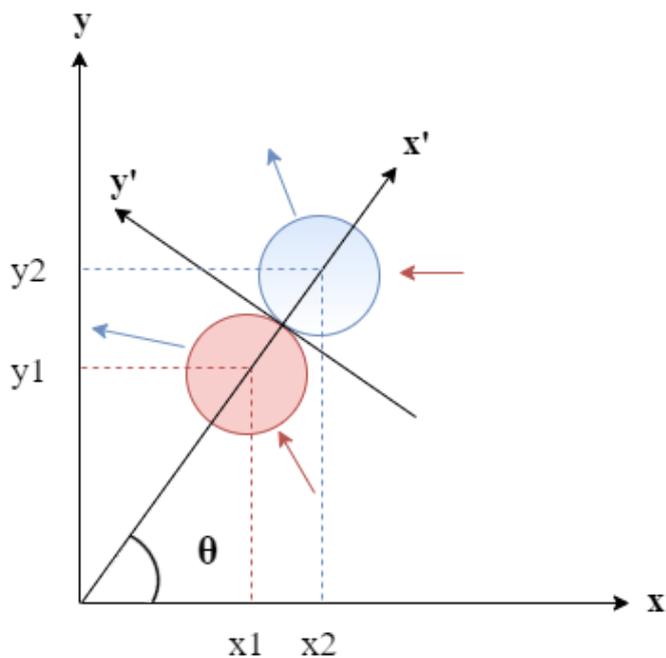
Figura 8 — Uma colisão qualquer no plano



Fonte: O autor (2021)

A figura 8 mostra a linha que passa pelo ponto de colisão que está em branco.

Figura 9 — Rotação de eixos



Fonte: O autor (2021)

Levando em consideração a suposição feita no início da sessão de que os raios são iguais, pela figura 9 é possível perceber que:

$$\text{sen } \theta = \frac{\Delta y}{2R} \quad (23)$$

$$\text{cos } \theta = \frac{\Delta x}{2R} \quad (24)$$

Escrevendo as componentes das velocidades na direção dos eixos do sistema rotacionado⁹ em função das componentes no sistema padrão:

$$\begin{pmatrix} v_{1ix'} \\ v_{1iy'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{cos } \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \text{cos } \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1ix} \\ v_{1iy} \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{pmatrix} v_{2ix'} \\ v_{2iy'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{cos } \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \text{cos } \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2ix} \\ v_{2iy} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Fazendo o produto matricial ficamos com:

$$v_{1ix'} = v_{1ix} \text{cos } \theta + v_{1iy} \text{sen } \theta \quad (27)$$

$$v_{1iy'} = -v_{1ix} \text{sen } \theta + v_{1iy} \text{cos } \theta \quad (28)$$

⁹ Para mais detalhes veja o Apêndice A

$$v_{2ix'} = v_{2ix} \cos \theta + v_{2iy} \sin \theta \quad (29)$$

$$v_{2iy'} = -v_{2ix} \sin \theta + v_{2iy} \cos \theta \quad (30)$$

Sabendo que as velocidades ortogonais (direção de x') são alternadas e as paralelas (direção de y') mantidas, usando as equações 27, 28, 29 e 30, temos que:

$$v_{1fx'} = v_{2ix'} = v_{2ix} \cos \theta + v_{2iy} \sin \theta \quad (31)$$

$$v_{1fy'} = v_{1iy'} = -v_{1ix} \sin \theta + v_{1iy} \cos \theta \quad (32)$$

$$v_{2fx'} = v_{1ix'} = v_{1ix} \cos \theta + v_{1iy} \sin \theta \quad (33)$$

$$v_{2fy'} = v_{2iy'} = -v_{2ix} \sin \theta + v_{2iy} \cos \theta \quad (34)$$

Com as velocidades dos discos escritas em termos do sistema de coordenadas rotacionado podemos voltar ao sistema de coordenadas original utilizando a matriz de rotação inversa e encontrar as velocidades finais dos discos em função das velocidades iniciais. Assim:

$$\begin{pmatrix} v_{1fx} \\ v_{1fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1fx'} \\ v_{1fy'} \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$\begin{pmatrix} v_{2fx} \\ v_{2fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2fx'} \\ v_{2fy'} \end{pmatrix} \quad (36)$$

Com as devidas manipulações, utilizando as equações 31, 32, 33 e 34, ficamos com:

$$v_{1fx} = v_{1ix} \text{sen}^2 \theta + v_{2ix} \cos^2 \theta + (v_{2iy} - v_{1iy}) \text{sen } \theta \cos \theta \quad (37)$$

$$v_{1fy} = v_{1iy} \cos^2 \theta + v_{2iy} \text{sen}^2 \theta + (v_{2ix} - v_{1ix}) \text{sen } \theta \cos \theta \quad (38)$$

$$v_{2fx} = v_{1ix} \cos^2 \theta + v_{2ix} \text{sen}^2 \theta + (v_{1iy} - v_{2iy}) \text{sen } \theta \cos \theta \quad (39)$$

$$v_{2fy} = v_{1iy} \sin^2 \theta + v_{2iy} \cos^2 \theta + (v_{1ix} - v_{2ix}) \sin \theta \cos \theta \quad (40)$$

Que são nossas equações de interesse, capaz de nos dar as velocidades finais dos discos a partir das velocidades iniciais e da posição do centro dos discos no momento da colisão. Vale a pena fazer a análise do resultado obtido para casos já conhecidos, para $\theta=0$ (colisão frontal em uma linha paralela ao eixo x), utilizando as equações 37, 38, 39 e 40, temos que:

$$v_{1fx} = v_{2ix} \quad (41)$$

$$v_{1fy} = v_{1iy} = 0 \quad (42)$$

$$v_{2fx} = v_{1ix} \quad (43)$$

$$v_{2fy} = v_{2iy} = 0 \quad (44)$$

Subtraindo a equação 41 da equação 43:

$$v_{2fx} - v_{1fx} = -(v_{2ix} - v_{1ix}) \quad (45)$$

Que é exatamente o resultado obtido na seção 3.1.

4 PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DA MESA DE COLISÕES

A idealização e construção da mesa, assim como todo projeto, passou por muitas etapas até chegar a sua forma final, diversas foram as ideias para qual seria a superfície utilizada, os materiais colidores e sua geometria, métodos de gravação e de propulsão dos discos. Desde o começo, a ideia foi construir um material que fosse de certa maneira fácil de se reproduzir e acessível financeiramente, a seguir cito as idealizações em ordem cronológica até o produto final.

4.1 IDEIAS E PROCEDIMENTOS INICIAIS

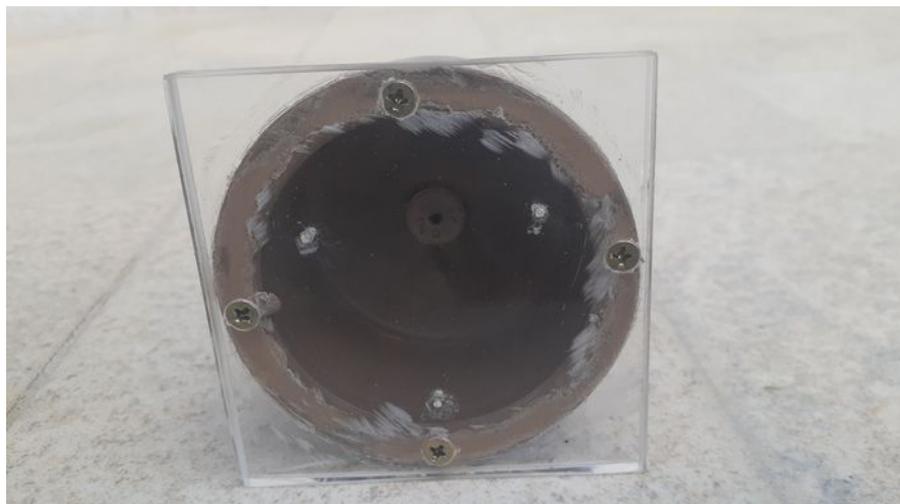
A primeira ideia era construir a mesa utilizando uma cerâmica branca, os “discos” seriam tampões de canos de água de 7,5 centímetros de diâmetro que preencheríamos com ar através de uma válvula de pneu de bicicleta e na parte de baixo selaríamos com acrílico, nesse acrílico ficariam os furos que permitiriam que o disco “flutuasse”, diminuindo o atrito com a superfície da mesa. Fizemos pequenos furos com auxílio de uma furadeira e uma broca de 1 milímetro, mas de cara o procedimento inicial mostrou-se infrutífero, devido à alta pressão dentro do “disco” gerada ao bombearmos o ar para dentro, todo o ar escapava muito rapidamente, mesmo os furos feitos com a broca sendo muito pequenos, de modo que não era possível realizar sequer uma colisão.

Figura 10 — Protótipo inicial



Fonte: O autor (2021)

Figura 11 — Parte de baixo onde é possível ver os furos



Fonte: O autor (2021)

4.2 BUSCANDO UMA ALTERNATIVA MAIS VIÁVEL

Com o insucesso do procedimento inicial, pensamos em construir uma mesa com superfície de cerâmica e com furos por onde o ar passaria, de modo que pudéssemos resolver os problemas que surgiram ao colocar o ar nos discos. O ar que fluiria pela mesa seria alimentado por um compressor.

Decidimos não seguir em frente com a ideia devido à dificuldade de encontrar brocas diamantadas ideais para fazer os furos e por termos encontrado um tutorial que ensinava passo-a-passo como fazer uma mesa nesse estilo utilizando madeira, inspirada na clássica de air hockey. O tutorial, disponível na internet, foi feito pelo Iberê Thenório, proprietário do Canal: Manual do Mundo, que pode ser encontrado facilmente no YouTube¹⁰. Fomos atrás de alguma empresa que trabalhasse com MDF e compramos a madeira já cortada nas medidas certas, utilizando o vídeo como referência, para facilitar o trabalho e a montagem da mesa. O custo médio ficou de aproximadamente R\$ 200,00.

Quando as peças de madeira chegaram demos início ao processo de construção. Os materiais utilizados foram: A madeira, lápis grafite, régua, cola amarela, lixa de água, parafusos, chaves de fenda, furadeira e parafusadeira, serra tico-tico, alicate, abraçadeiras de nylon e um ventilador de mesa Mondial de 40 cm de diâmetro. Uma outra possibilidade seria utilizar várias ventoinhas de computador, inclusive nas mesas de Air Hockey profissionais é utilizada apenas uma ventoinha com alta vazão de ar.

O processo de montagem foi semelhante ao apresentado no vídeo.

¹⁰ Veja: <https://youtu.be/dhs--lzkwPM>

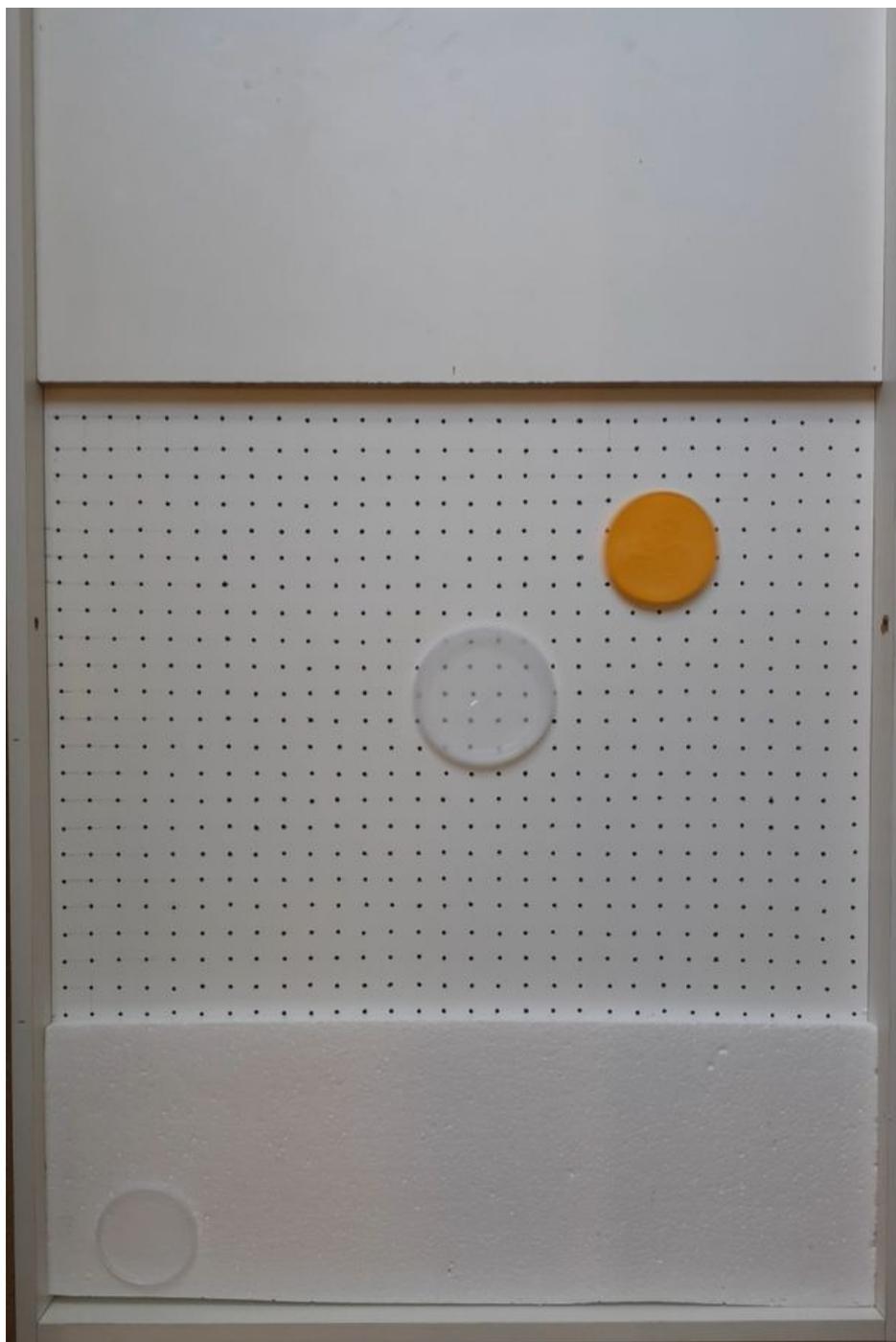
Compramos uma tábua de 1,80 metro de altura por 2,70 metros de comprimento e, após a chegada das tábuas de madeira já cortadas com as peças nas medidas certas, demos início ao processo de montagem. Primeiramente lixamos os suportes da tábua onde seriam feitas as colisões, deixando-os com o mesmo tamanho para não haver desníveis, prosseguindo com um processo semelhante com os pés que sustentam a mesa. Em seguida, começamos a perfurar a tábua de colisões para criar os buracos por onde o ar passaria, cada buraco tem 2 milímetros de diâmetro, também lixamos e aspiramos o pó para evitar qualquer irregularidade. Decidimos não fazer os furos na mesa toda de imediato, só os que fossem necessários para a realização do experimento. A área onde foram realizadas as colisões têm cerca de 58,9 centímetros de largura e 42 centímetros de comprimento. Após o término da perfuração demos início ao corte da tábua em que ficaria fixo o ventilador (inicialmente um de 30 centímetros de diâmetro, que não se mostrou suficiente para a flutuação dos discos, sendo substituído posteriormente por um de 40 centímetros de diâmetro), utilizamos uma serra tico-tico para o corte e as abraçadeiras de nylon para a fixação. Posicionamos os suportes e os pés com o auxílio da cola amarela e dos parafusos, procedendo de forma semelhante com as outras quatro tábuas que formam a mesa. As Figuras 12, 13, 14 e 15 mostram o trabalho finalizado:

Figura 12 — Mesa sem a tábua onde são realizadas as colisões



Fonte: O autor (2021)

Figura 13 — Área de colisões



Fonte: O autor (2021)

Figura 14 — Imagem lateral da mesa com a tábua de colisões



Fonte: O autor (2021)

Figura 15 — Vista diagonal



Fonte: O autor (2021)

A área de colisões fica aproximadamente acima da hélice do ventilador, ela é

limitada por um isopor e por outra tábua para evitar que os discos passem para o local onde não há os furos. Por último, utilizamos uma lixa de água para retirar o máximo das pequenas deformações nos furinhos. Após aspirar o pó demos início ao processo de filmagem das colisões. Mais adiante, os experimentos realizados na mesa serão analisados e comparados com o resultado previsto teóricamente.

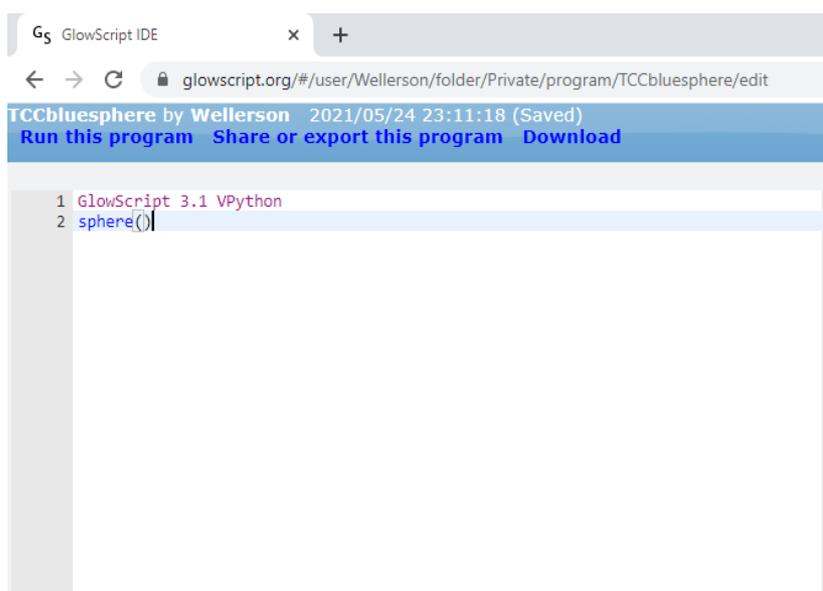
5 CONSTRUÇÃO DO SIMULADOR DE COLISÕES

5.1 A BIBLIOTECA VPYTHON E A PLATAFORMA GLOWSCRIPT

O simulador foi construído utilizando a linguagem de programação Python com auxílio da biblioteca Vpython em uma plataforma online chamada GlowScript em que é possível criar os códigos, executá-los online e compartilhá-los facilmente com outras pessoas, de modo que não é necessário ter Python no computador para fazer uso do produto educacional (característica que facilita bastante o trabalho do professor e dos alunos, que desejem utilizá-lo fora do horário de aula), podendo inclusive ser executado offline¹¹. O único procedimento que a plataforma solicita é que seja criada uma conta para o utilizador (para executar o produto educacional não é necessário), nela o usuário tem acesso aos programas que ele criou, subdivididos por padrão em duas pastas: private que é a pasta utilizada para criar programas que não serão compartilhados com outras pessoas e public que permite o compartilhamento, é possível criar novas pastas.

A biblioteca é extremamente intuitiva para aqueles que já tiveram um contato prévio com as funções básicas do Python e pode ser utilizada de maneira simples. Ela conta com um grande número de funções que permitem criar objetos em três dimensões em poucos passos. Por exemplo, ao criar um novo código e digitar `sphere()`, quando o programa for executado aparecerá na tela uma esfera que por padrão tem raio igual a um e seu centro localizado na origem de coordenadas.

Figura 16 — Instantâneo do editor de código no GlowScript

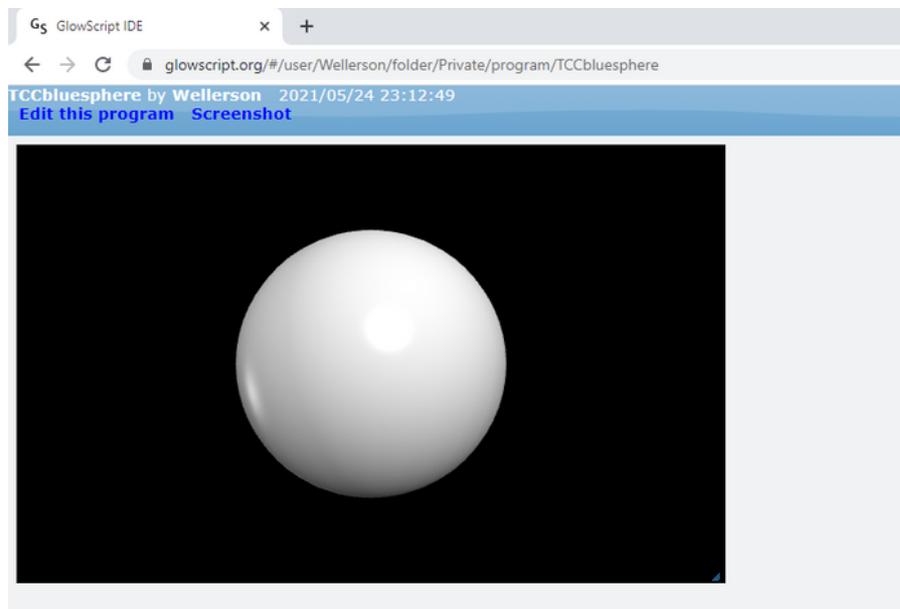


The screenshot shows a web browser window with the address bar displaying `glowscript.org/#/user/Wellerson/folder/Private/program/TCCbluesphere/edit`. The page title is "TCCbluesphere by Wellerson 2021/05/24 23:11:18 (Saved)". Below the title, there are three buttons: "Run this program", "Share or export this program", and "Download". The main content area shows a code editor with two lines of Python code:

```
1 GlowScript 3.1 VPython
2 sphere()
```

Fonte: O autor (2021)

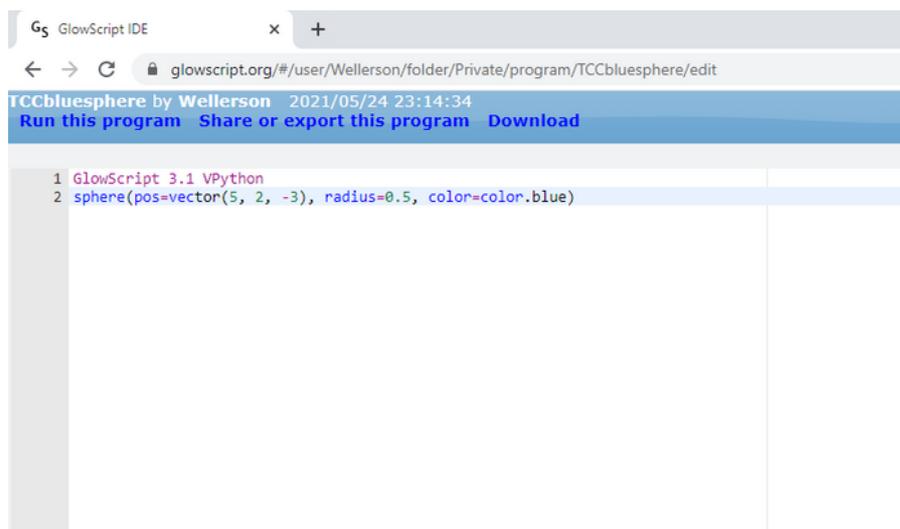
Figura 17 — Instantâneo da esfera criada com a função sphere()



Fonte: O autor (2021)

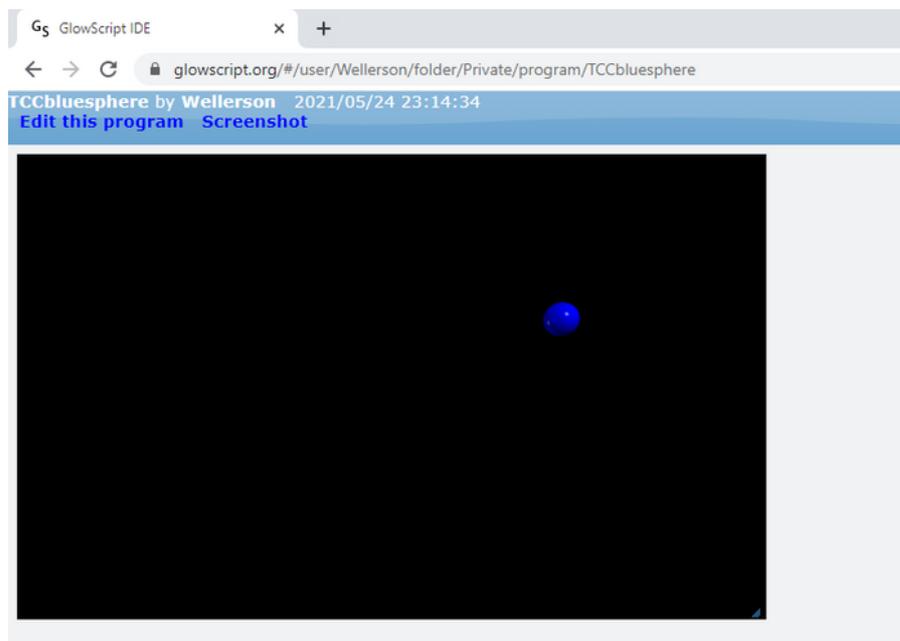
De maneira simples é possível alterar os valores estabelecidos por padrão, por exemplo, `sphere(pos=vector(5, 2, -3), radius=0.5, color=color.blue)` me retornará uma esfera de raio igual a 0.5, de cor azul e com seu centro na posição (5, 2, -3) do espaço.

Figura 18 — Instantâneo da função sphere() com os parâmetros citados



Fonte: O autor (2021)

Figura 19 — Instantâneo da esfera com os parâmetros citados



Fonte: O autor (2021)

Com o código da Figura 20 podemos fazer a animação da simulação utilizando um loop while¹².

Figura 20 — Código para animar a simulação do movimento da esfera

```

1 GlowScript 3.1 VPython
2
3 #Criando uma esfera e definindo sua velocidade
4
5 ball = sphere(pos=vector(5, 2, -3), radius=0.5, color=color.blue)
6 ball.velocity = vector(2, -3, 5)
7
8 #Parâmetros
9
10 t = 0
11 dt = 0.005
12
13 #Criando o loop para animação
14
15 while t < 5:
16     rate(100)
17     ball.pos.x = ball.pos.x + ball.velocity.x*dt
18     ball.pos.y = ball.pos.y + ball.velocity.y*dt
19     t = t + dt
20

```

Fonte: O autor (2021)

¹² Um loop nada mais é que a repetição de determinados comandos diversas vezes, a ideia é que a cada nova repetição do loop a posição do objeto de interesse seja atualizada, simulando seu movimento no espaço. Observação: A velocidade deve ser criada fora do loop, pois do contrário, a cada execução do loop o programa criará um novo vetor velocidade igual ao último, deixando o programa mais lento.

Mais informações sobre a biblioteca VPython, incluindo sua documentação, exemplos de simulações das mais diversas e sobre o GlowScript podem ser encontrados em <https://vpython.org/>.

5.2 PROGRAMANDO O SIMULADOR E AS DIFICULDADES ENCONTRADAS

A primeira “dificuldade” que surge logo de cara é que a biblioteca VPython é própria para simulações feitas em três dimensões, sendo que o nosso trabalho abrange apenas colisões em duas dimensões, mas é possível limitar o movimento dos discos a duas dimensões e também criar objetos que tenham uma baixa espessura, de modo que os movimentos na direção z possam ser desprezados.

A ideia é que o programa seja capaz de criar a mesa de colisões, os dois discos, animar seus movimentos limitando-os à mesa e que faça uso dos resultados obtidos na seção 3.2.

Após o término da versão preliminar do programa foi possível notar de imediato alguns bugs, com algumas poucas colisões os discos adentravam um no outro e a energia cinética de ambos ia para zero.

Com um bom tempo pensando no que estava ocorrendo, pude perceber que o problema estava sendo causado porque a distância entre os centros dos discos era significativamente menor do que a soma dos dois raios quando a condição de colisão era satisfeita, por exemplo, a distância era 0,97 enquanto a soma dos raios era 1, isso causava incorreções que levavam os discos a perderem energia cinética até ficarem em repouso. O problema pôde ser parcialmente resolvido ao adotarmos duas medidas, a primeira foi diminuir o intervalo dt para que a distância percorrida pelos discos entre uma repetição do loop e outra fosse muito pequena, a segunda foi estabelecer um fator de correção. A ideia é que, se a distância entre os discos é menor que a soma dos raios, que usássemos o fator de correção para alterar o Δx e o Δy como se a distância entre os centros fosse exatamente igual à soma dos raios¹³.

Feitas essas modificações, realizados alguns testes, percebemos que após 28 colisões os discos perderam 0,1 J de energia cinética de um total de 383 J (antes, após quatro ou cinco colisões os discos já ficavam em repouso), o que representa uma melhora extremamente significativa.

5.3 MELHORIAS A SEREM FEITAS

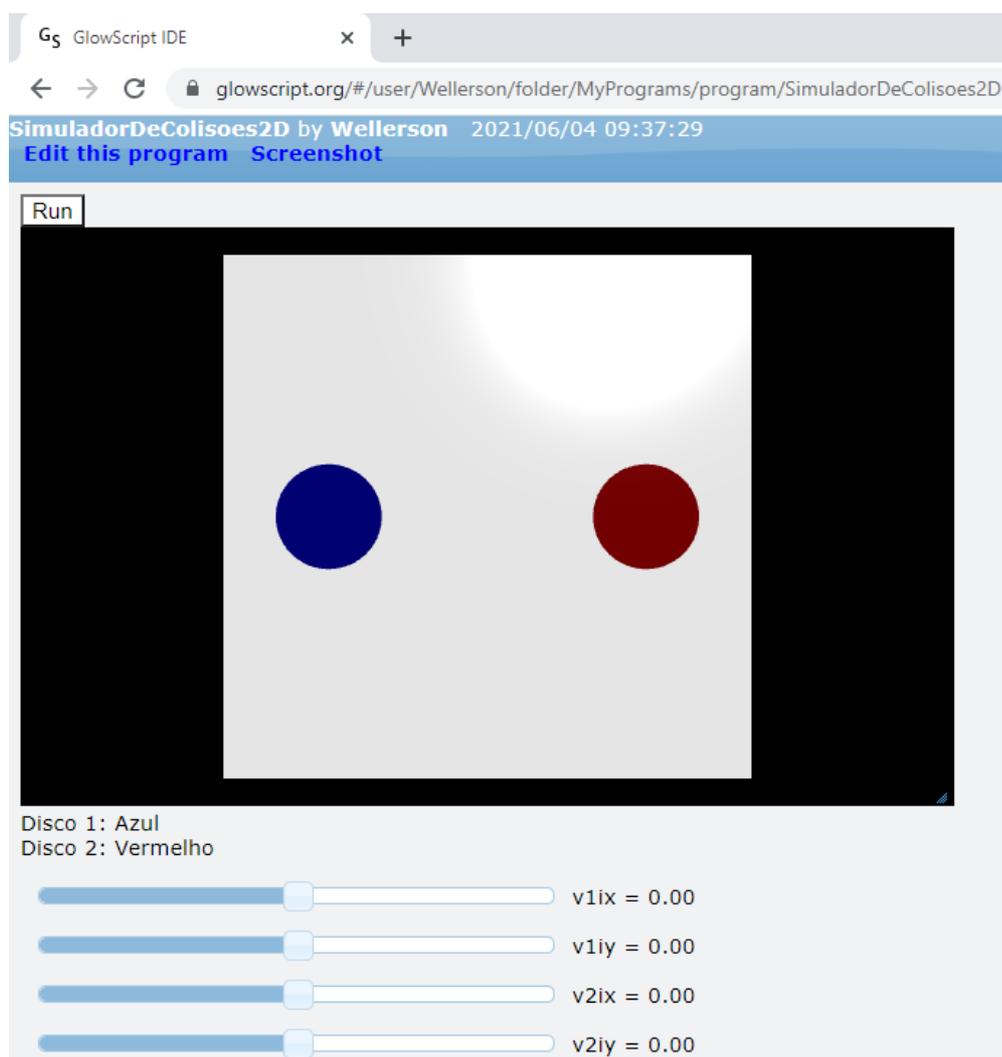
Podemos dizer que no geral, o simulador está pronto, mas, para que um produto educacional seja efetivo no processo de ensino-aprendizagem é necessário

¹³ Para mais detalhes da implementação no código veja o Apêndice B

que sejam adicionados elementos visuais que o tornem mais didático e acessível, sem cometer o erro de poluir visualmente o produto.

Algumas das melhorias que serão implementadas são: Controles deslizantes que permitam ao estudante alterar as massas dos discos e seus raios, a função de poder arrastar os discos para definir sua posição inicial, uma tabela ou quadro informando as posições dos discos, suas velocidades, energia cinética e momento linear e a possibilidade de estender as colisões às três dimensões espaciais.

Figura 21 — Instantâneo do simulador no estágio atual



Fonte: O autor (2021)

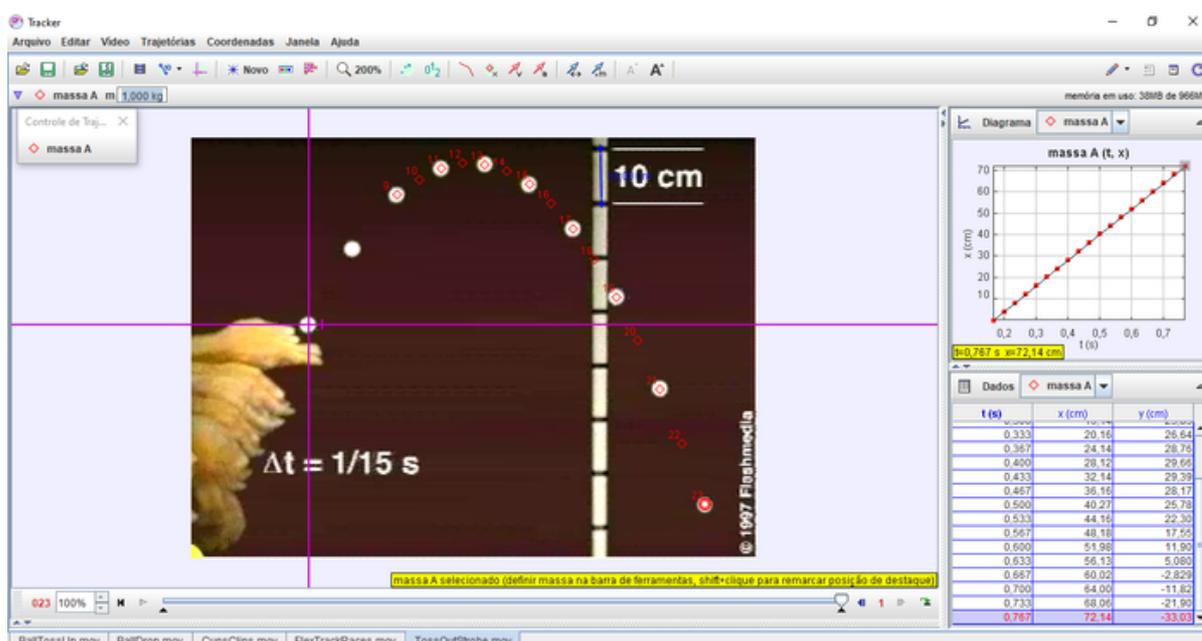
6 EXEMPLOS DE COLISÕES REALIZADAS NA MESA E SUA ANÁLISE UTILIZANDO O TRACKER

6.1 A FERRAMENTA DE ANÁLISE TRACKER

O Tracker¹⁴ é um software gratuito que pode ser utilizado para análise de vídeo e como ferramenta de modelagem, construído em Java e projetado para ser utilizado no ensino de física.

Com ele, é possível fazer a análise do movimento dos mais diversos sistemas mecânicos e até de espectroscopia, sendo possível a criação dos seus próprios modelos de análise. Ele conta com mecanismos de calibração que permitem tornar a modelagem o mais precisa possível, tendo como referencial uma medida exposta no próprio vídeo.

Figura 22 — Instantâneo do tracker



Fonte: O autor (2021)

O instantâneo exposto na Figura 22 é de uma amostra de vídeo oferecida pelo próprio Tracker, a interseção das duas linhas roxas mostra a origem de coordenadas, a linha azul que está na parte superior direita é um bastão de calibração que é utilizado para colocar a análise do vídeo em termos de uma medida pré-definida (exposta na imagem como 10 cm ao lado do bastão de calibração), os losangos vermelhos indicam a posição da bolinha em cada frame, a partir dessas

14 Veja: <https://tracker.physlets.org/>

informações fornecidas o programa é capaz de retornar as mais diversas grandezas mecânicas, como a energia cinética, o momento linear, as velocidades, acelerações, momento angular, entre outros, que são expostas no lado direito da imagem em um gráfico e uma tabela que mostra seu valor em cada instante de tempo.

É importante ter em mente que essas grandezas são calculadas, o que o Tracker realmente mede é a posição em cada "frame", obtendo uma estimativa da posição versus tempo. Daí ele obtém os valores derivados, como velocidade, aceleração, força, energia cinética, etc. Então, deve-se observar a propagação de erros de medidas, mas esse não é o foco do nosso trabalho.

6.2 ANÁLISES

Fazendo os procedimentos descritos acima fizemos a análise de três colisões de dois discos por vez, tendo cada par uma massa e tamanhos semelhantes. Os vídeos foram gravados com um celular da marca Samsung, modelo Galaxy A20, que é capaz de filmar em Full HD. Utilizamos o método de gravação 1:1 que proporciona uma imagem com a altura igual à largura. Como não é foco do trabalho fazer uma análise experimental profunda, de 98 colisões foram selecionadas apenas 3 que serão exploradas nas seções abaixo.

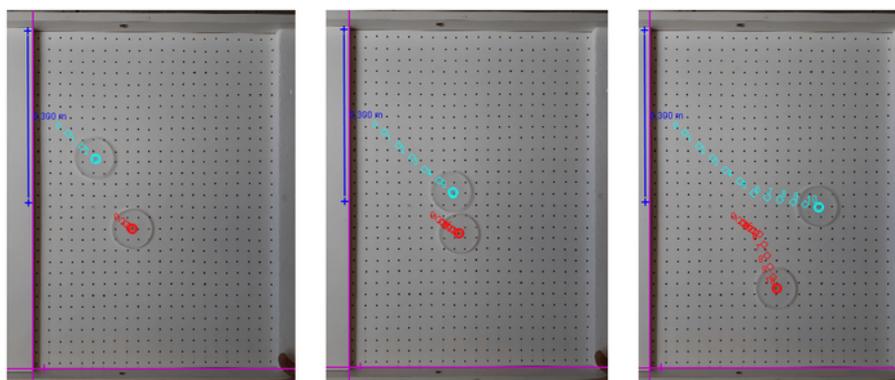
Como referência para o bastão de calibração fizemos dois traços na mesa utilizando uma régua, um de 30 centímetros, e outro de 20 centímetros. A ideia era utilizar o de 30 centímetros como referência e ver se o programa automaticamente colocaria o valor certo para o segundo, o programa em geral retornou 20,5 ou 20,4 centímetros para o segundo.

A inexatidão dos 0,5 ou 0,4 milímetro pode ter como causa diversos fatores, os desníveis da mesa e da tábua, o alinhamento da mesa com a câmera e a tábua utilizada como suporte, entre outros.

6.2.1 Análise dos dois discos menores

Os discos menores têm massas iguais a 3,070 (chamaremos de disco 1) e 3,036 (chamaremos de disco 2) gramas e raios iguais a 3,5 centímetros. Na figura 23 estão três instantâneos feitos no Tracker, um antes (o mais à esquerda), outro durante (o do meio) e outro depois da colisão (o mais à direita):

Figura 23 — Momento antes, durante e após a colisão



Fonte: O autor (2021)

As trajetórias dos discos são marcadas em verde (disco 2) e vermelho (disco 1). Os dados obtidos estão expostos nas Tabelas 1 e 2, com o tempo em segundos, a posição em metros e a velocidade em metro por segundo, os dados em destaque são referentes às imagens da Figura 23 (o destacado em salmão representa os dados do momento da colisão e os destacados em azul os dados das outras duas imagens):

Tabela 1 — Dados para o disco 1, com o tempo em segundos, as posições em metros e as velocidades em metros por segundo

| Ponto | t(s) | x(m) | y(m) | $v_{\{x\}}$ (m/s) | $v_{\{y\}}$ (m/s) |
|-------|----------|----------|----------|-------------------|-------------------|
| 0 | 0,00E+00 | 1,62E-01 | 2,53E-01 | _____ | _____ |
| 1 | 3,00E-02 | 1,67E-01 | 2,49E-01 | 1,76E-01 | -1,28E-01 |
| 2 | 6,00E-02 | 1,72E-01 | 2,45E-01 | 1,86E-01 | -1,21E-01 |
| 3 | 9,00E-02 | 1,79E-01 | 2,41E-01 | 1,96E-01 | -1,21E-01 |
| 4 | 1,20E-01 | 1,84E-01 | 2,38E-01 | 1,93E-01 | -1,19E-01 |
| 5 | 1,50E-01 | 1,90E-01 | 2,34E-01 | 2,35E-01 | -3,65E-01 |
| 6 | 1,80E-01 | 1,98E-01 | 2,16E-01 | 2,18E-01 | -6,17E-01 |
| 7 | 2,10E-01 | 2,03E-01 | 1,97E-01 | 1,79E-01 | -6,36E-01 |
| 8 | 2,40E-01 | 2,09E-01 | 1,78E-01 | 1,91E-01 | -6,46E-01 |
| 9 | 2,70E-01 | 2,15E-01 | 1,59E-01 | 1,98E-01 | -6,31E-01 |
| 10 | 3,00E-01 | 2,21E-01 | 1,40E-01 | 1,96E-01 | -6,46E-01 |

Fonte: O autor (2021)

Na Tabela 1 podemos perceber que existem flutuações no valor da velocidade, tanto antes, quanto depois da colisão, essas flutuações são devidas principalmente ao fluxo do ar. Percebe-se também que há uma certa anomalia (mudança brusca em relação ao momento antes da colisão e também em relação ao momento logo depois da colisão) nos valores da velocidade no instante da colisão

(destacado em salmão), provavelmente devida à rápida mudança no estado do sistema, aliado às deformações sofridas pelos discos durante a colisão, já que eles não são ideais.

Com as flutuações no valor da velocidade, anomalias e deformações, é de se esperar que os valores obtidos experimentalmente e os valores esperados utilizando a teoria difiram. Para o cálculo do valor esperado para a teoria precisamos saber quais são as componentes das velocidades dos discos antes da colisão e sua posição no instante dela, como há flutuações nos valores das velocidades optamos por fazer uma média simples dos valores antes da colisão e utilizarmos nos cálculos, em seguida fizemos uma outra média simples dos valores após a colisão e comparamos com o valor esperado pela teoria, é importante ressaltar que não é foco do trabalho nesse momento fazer cálculos e análises de grandezas estatísticas e propagação de erros.

Por padrão, o Tracker elimina os valores das velocidades no instante tempo igual a zero, e elimina também para o instante de tempo relacionado ao último frame da gravação, decidi tracejar esses valores quando aparecessem na tabela para não deixar um espaço em branco que causasse confusão. A análise para os dados das tabelas seguintes segue de forma semelhante.

Tabela 2 — Dados para o disco 2, com o tempo em segundos, as posições em metros e as velocidades em metros por segundo

| Ponto | t(s) | x(m) | y(m) | $v_{\{x\}}$ (m/s) | $v_{\{y\}}$ (m/s) |
|-------|----------|----------|----------|-------------------|-------------------|
| 0 | 0,00E+00 | 6,15E-02 | 4,10E-01 | _____ | _____ |
| 1 | 3,00E-02 | 8,69E-02 | 3,87E-01 | 8,06E-01 | -7,33E-01 |
| 2 | 6,00E-02 | 1,10E-01 | 3,66E-01 | 7,63E-01 | -6,94E-01 |
| 3 | 9,00E-02 | 1,33E-01 | 3,46E-01 | 7,84E-01 | -6,73E-01 |
| 4 | 1,20E-01 | 1,57E-01 | 3,26E-01 | 8,04E-01 | -6,70E-01 |
| 5 | 1,50E-01 | 1,81E-01 | 3,06E-01 | 7,83E-01 | -4,45E-01 |
| 6 | 1,80E-01 | 2,04E-01 | 2,99E-01 | 7,45E-01 | -1,77E-01 |
| 7 | 2,10E-01 | 2,26E-01 | 2,95E-01 | 7,60E-01 | -1,31E-01 |
| 8 | 2,40E-01 | 2,50E-01 | 2,91E-01 | 7,45E-01 | -1,38E-01 |
| 9 | 2,70E-01 | 2,70E-01 | 2,87E-01 | 7,45E-01 | -1,54E-01 |
| 10 | 3,00E-01 | 2,94E-01 | 2,82E-01 | 7,53E-01 | -1,31E-01 |

Fonte: O autor (2021)

Na Tabela 3 estão os valores previstos pelo resultado teórico obtido no capítulo 3 para as velocidades dos discos após a colisão e a diferença percentual com os resultados (médios) obtidos experimentalmente:

Tabela 3 — Velocidades dos discos após a colisão pelo modelo teórico

| Disco 1 | Disco 1 | Disco 2 | Disco 2 |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $v_{\{x\}}$ (m/s) | $v_{\{y\}}$ (m/s) | $v_{\{x\}}$ (m/s) | $v_{\{y\}}$ (m/s) |
| 2,87E-01 | -8,13E-01 | 7,62E-01 | -6,10E-02 |

Fonte: O autor (2021)

Tabela 4 — Diferença percentual: Teórico x Experimental (valores médios após a colisão)

| $v_{\{x\}}$ (m/s) | $v_{\{y\}}$ (m/s) | $v_{\{x\}}$ (m/s) | $v_{\{y\}}$ (m/s) |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 31,7% | 21.9 % | 1.7% | 58% |

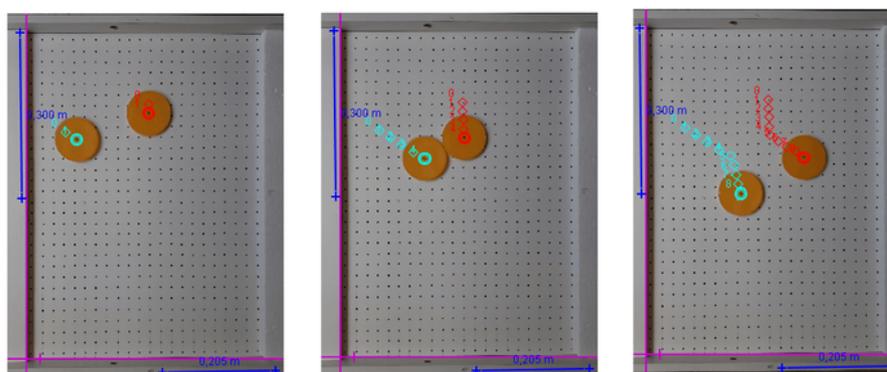
Fonte: O autor (2021)

Como previu-se acima, há uma notável diferença percentual entre o valor calculado utilizando o modelo teórico e o obtido experimentalmente, mas consideramos aceitável, dentro das propostas do trabalho. Algumas sugestões para diminuir essa diferença foram feitas na seção 6.3.

6.2.2 Análise dos dois discos médios

Seguindo com um processo semelhante ao feito acima, para o discos médios a massa é igual até a quarta casa após a vírgula, tendo o valor de 3,888 gramas, possuem raios iguais a 4,1 centímetros. Sendo assim, trataremos eles de acordo com a cor da trajetória na Figura 24, o disco 1 é o da trajetória vermelha e o disco 2 a da verde:

Figura 24 — Momento antes, durante e após a colisão



Fonte: O autor (2021)

Os dados obtidos estão expostos nas Tabelas 5 e 6, com o tempo em segundos, a posição em metros e a velocidade em metro por segundo, os dados em

destaque são referentes às imagens da Figura 24 (o destacado em salmão representa os dados do momento da colisão, e os destacados em azul são referentes as outras duas imagens):

Tabela 5 — Dados para o disco 1, com o tempo em segundos, as posições em metros e as velocidades em metros por segundo

| Ponto | t(s) | x(m) | y(m) | v _{x} (m/s) | v _{y} (m/s) |
|-------|----------|----------|----------|------------------------|------------------------|
| 0 | 0,00E+00 | 2,18E-01 | 4,61E-01 | _____ | _____ |
| 1 | 3,00E-02 | 2,19E-01 | 4,45E-01 | 2,70E-02 | -5,35E-01 |
| 2 | 6,00E-02 | 2,19E-01 | 4,29E-01 | 2,31E-02 | -5,47E-01 |
| 3 | 9,00E-02 | 2,20E-01 | 4,12E-01 | 2,70E-02 | -5,31E-01 |
| 4 | 1,20E-01 | 2,21E-01 | 3,97E-01 | 2,70E-01 | -4,43E-01 |
| 5 | 1,50E-01 | 2,36E-01 | 3,86E-01 | 5,08E-01 | -3,50E-01 |
| 6 | 1,80E-01 | 2,52E-01 | 3,76E-01 | 5,12E-01 | -3,23E-01 |
| 7 | 2,10E-01 | 2,67E-01 | 3,66E-01 | 5,21E-01 | -3,32E-01 |
| 8 | 2,40E-01 | 2,83E-01 | 3,56E-01 | 5,08E-01 | -3,39E-01 |

Fonte: O autor (2021)

Tabela 6 — Dados para o disco 2, com o tempo em segundos, as posições em metros e as velocidades em metros por segundo

| Ponto | t(s) | x(m) | y(m) | v _{x} (m/s) | v _{y} (m/s) |
|-------|----------|----------|----------|------------------------|------------------------|
| 0 | 0,00E+00 | 6,93E-02 | 4,10E-01 | _____ | _____ |
| 1 | 3,00E-02 | 9,06E-02 | 3,96E-01 | 6,85E-01 | -4,40E-01 |
| 2 | 6,00E-02 | 1,10E-01 | 3,84E-01 | 6,85E-01 | -4,28E-01 |
| 3 | 9,00E-02 | 1,32E-01 | 3,71E-01 | 6,72E-01 | -4,16E-01 |
| 4 | 1,20E-01 | 1,51E-01 | 3,59E-01 | 4,16E-01 | -4,83E-01 |
| 5 | 1,50E-01 | 1,57E-01 | 3,42E-01 | 1,59E-01 | -5,81E-01 |
| 6 | 1,80E-01 | 1,60E-01 | 3,24E-01 | 1,34E-01 | -5,62E-01 |
| 7 | 2,10E-01 | 1,65E-01 | 3,08E-01 | 1,53E-01 | -5,44E-01 |
| 8 | 2,40E-01 | 1,69E-01 | 2,91E-01 | 1,59E-01 | -5,56E-01 |

Fonte: O autor (2021)

Em seguida temos novamente duas tabelas (Tabelas 7 e 8) com as velocidades esperadas de acordo com o resultado teórico obtido na seção 3.2, logo após a análise da diferença percentual:

Tabela 7 — Velocidades dos discos após a colisão pelo modelo teórico

| Disco 1 | Disco 1 | Disco 2 | Disco 2 |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $v_{\{x\}}$ (m/s) | $v_{\{y\}}$ (m/s) | $v_{\{x\}}$ (m/s) | $v_{\{y\}}$ (m/s) |
| 5,45E-01 | -2,25E-01 | 1,21E-01 | -6,86E-01 |

Fonte: O autor (2021)

Tabela 8 — Diferença percentual: Teórico x Experimental (valores médios após a colisão)

| Disco 1 | Disco 1 | Disco 2 | Disco 2 |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $v_{\{x\}}$ (m/s) | $v_{\{y\}}$ (m/s) | $v_{\{x\}}$ (m/s) | $v_{\{y\}}$ (m/s) |
| 6% | 33% | 20% | 18% |

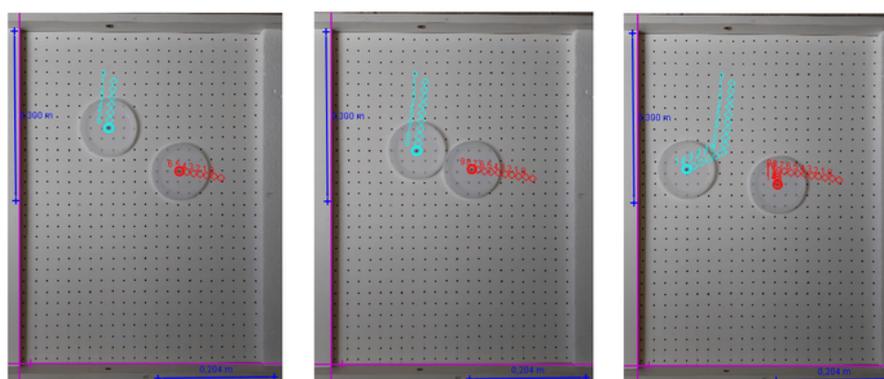
Fonte: O autor (2021)

Novamente, podemos perceber uma diferença significativa entre o valor esperado teoricamente e o obtido experimentalmente, mas consideramos aceitável dentro das propostas do trabalho. Na seção 6.3 há sugestões para diminuir essa discrepância.

6.2.3 Análise dos dois discos maiores

Por último temos a análise da colisão dos discos maiores, os discos possuem massas iguais a 7,64 gramas (disco 1, trajetória vermelha) e 8,01 gramas (disco 2, trajetória verde), sendo seus raios iguais a 5,2 centímetros. Para efeito de cálculo colocamos as massas como tendo igual valor. Abaixo, as imagens na Figura 25 dos momentos antes, durante e depois da colisão, e após, seguem os dados obtidos nas Tabelas 9 e 10:

Figura 25 — Momento antes, durante e após a colisão



Fonte: O autor (2021)

Tabela 9 — Dados para o disco 1, com o tempo em segundos, as posições em metros e as velocidades em metros por segundo

| Ponto | t(s) | x(m) | y(m) | $v_{\{x\}}$ (m/s) | $v_{\{y\}}$ (m/s) |
|-------|----------|----------|----------|-------------------|-------------------|
| 0 | 1,20E-01 | 3,05E-01 | 3,37E-01 | -3,97E-01 | 6,34E-02 |
| 1 | 1,50E-01 | 2,93E-01 | 3,38E-01 | -4,04E-01 | 6,35E-02 |
| 2 | 1,80E-01 | 2,81E-01 | 3,40E-01 | -4,05E-01 | 5,80E-02 |
| 3 | 2,10E-01 | 2,69E-01 | 3,42E-01 | -3,91E-01 | 5,43E-02 |
| 4 | 2,40E-01 | 2,57E-01 | 3,44E-01 | -3,77E-01 | 5,07E-02 |
| 5 | 2,70E-01 | 2,46E-01 | 3,45E-01 | -1,90E-01 | -6,07E-02 |
| 6 | 3,00E-01 | 2,46E-01 | 3,40E-01 | -9,06E-03 | -1,65E-01 |
| 7 | 3,30E-01 | 2,46E-01 | 3,35E-01 | -4,53E-03 | -1,65E-01 |
| 8 | 3,60E-01 | 2,46E-01 | 3,30E-01 | -4,68E-03 | -1,63E-01 |
| 9 | 3,90E-01 | 2,45E-01 | 3,25E-01 | -4,68E-03 | -1,66E-01 |
| 10 | 4,20E-01 | 2,45E-01 | 3,20E-01 | -3,05E-03 | -1,71E-01 |

Fonte: O autor (2021)

Tabela 10 — Dados para o disco 2, com o tempo em segundos, as posições em metros e as velocidades em metros por segundo

| Ponto | t(s) | x(m) | y(m) | $v_{\{x\}}$ (m/s) | $v_{\{y\}}$ (m/s) |
|-------|----------|----------|----------|-------------------|-------------------|
| 0 | 1,20E-01 | 1,59E-01 | 4,45E-01 | -4,58E-02 | -4,58E-01 |
| 1 | 1,50E-01 | 1,58E-01 | 4,31E-01 | -5,19E-02 | -4,48E-01 |
| 2 | 1,80E-01 | 1,56E-01 | 4,18E-01 | -5,26E-02 | -4,48E-01 |
| 3 | 2,10E-01 | 1,54E-01 | 4,04E-01 | -4,89E-02 | -4,41E-01 |
| 4 | 2,40E-01 | 1,53E-01 | 3,91E-01 | -6,33E-02 | -4,49E-01 |
| 5 | 2,70E-01 | 1,51E-01 | 3,78E-01 | -2,56E-01 | -3,34E-01 |
| 6 | 3,00E-01 | 1,38E-01 | 3,71E-01 | -4,28E-01 | -2,02E-01 |
| 7 | 3,30E-01 | 1,25E-01 | 3,65E-01 | -4,24E-01 | -1,95E-01 |
| 8 | 3,60E-01 | 1,12E-01 | 3,59E-01 | -4,32E-01 | -2,03E-01 |
| 9 | 3,90E-01 | 9,90E-02 | 3,53E-01 | -4,31E-01 | -1,94E-01 |
| 10 | 4,20E-01 | 8,63E-02 | 3,48E-01 | -4,33E-01 | -1,94E-01 |

Fonte: O autor (2021)

Tabela 11 — Velocidades dos discos após a colisão pelo modelo teórico (continua)

| Disco 1 | Disco 1 | Disco 2 | Disco 2 |
|---------|---------|---------|---------|
| | | | |

Tabela 11 — Velocidades dos discos após a colisão pelo modelo teórico (conclusão)

| Disco 1 | Disco 1 | Disco 2 | Disco 2 |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $v_{\{x\}}$ (m/s) | $v_{\{y\}}$ (m/s) | $v_{\{x\}}$ (m/s) | $v_{\{y\}}$ (m/s) |
| 6,34E-02 | -9,6E-02 | -4,82E-01 | -2,7E-01 |

Fonte: O autor (2021)

Tabela 12 — Diferença percentual: Teórico x Experimental (valores médios após a colisão)

| Disco 1 | Disco 1 | Disco 2 | Disco 2 |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $v_{\{x\}}$ (m/s) | $v_{\{y\}}$ (m/s) | $v_{\{x\}}$ (m/s) | $v_{\{y\}}$ (m/s) |
| 91.2% | 42% | 10.8% | 26.6% |

Fonte: O autor (2021)

É importante notar que mesmo com a grande diferença percentual para a componente x da velocidade do disco 1 na Tabela 12, as velocidades têm baixo valor (ordem de grandeza de 10^{-2} e 10^{-3}). Para esse caso em específico, um dos motivos para a diferença percentual, além das irregularidades e demais coisas citadas na seção 6.3, é a diferença entre as massas dos discos que foi evidenciada no início desta subseção. Consideramos aceitável dentro das propostas do trabalho, mesmo com a alta diferença percentual em duas das quatro componentes.

6.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE OS RESULTADOS OBTIDOS E SUGESTÕES PARA A MELHORIA DO EXPERIMENTO

É notável que em certas partes a diferença entre os dados obtidos experimentalmente e a análise teórica do problema é relativamente grande, embora não fosse objetivo do nosso trabalho fazer o cálculo da propagação de erros, vamos fazer algumas considerações sobre fatores que afetam a divergência de resultados do modelo teórico utilizado vs experimento.

Primeiramente, não levamos em consideração na computação dos resultados a margem de erro experimental do Tracker e das réguas utilizadas para medir os discos e a mesa. Outros fatores de natureza experimental são: As colisões não são ideais, há atrito entre os discos e a mesa (por mais que ele seja minimizado devido ao fluxo de ar que eleva os discos), há uma força de arrasto entre os discos e o ar que sai pelos buraquinhos que estão ao redor deles além de uma determinada turbulência do ar na saída de cada orifício, a superfície de contato dos discos no momento da colisão também não é ideal já que não são discos perfeitos e sim tampas de plástico. Estes elementos combinados no impacto entre elas faz com que

a energia cinética de translação seja transformada parcialmente em energia cinética de rotação, há também a perda de uma fração de energia para o ambiente no momento da colisão, caracterizada pelo som produzido quando as partes colidem, parte também vai para a energia interna dos discos.

Em relação a superfície da mesa com orifícios é importante destacar que a quantidade de orifícios por área e a qualidade e tamanho dos orifícios, assim como o tamanho e massa das tampas, determinam a qualidade do experimento. Maior qualidade significa minimizar atrito, turbulências de ar, perda de energia e rotação de discos. Tudo isto implicaria que as colisões se aproximassem mais das colisões teóricas ou ideais.

Por exemplo, aumentando o número de orifícios por área e aumentando o diâmetro dos discos, teríamos maior número de orifícios com ar sustentando os discos e a flutuação seria mais homogênea. Talvez uma maior densidade de orifícios e de diâmetros menores geraria um fluxo mais laminar do que turbulento na superfície da mesa.

Outro elemento importante é o fluxo de ar que emerge radialmente embaixo de cada disco, que logicamente afeta a colisão com outros discos.

O experimento, embora divirja naturalmente da teoria, cumpre bem o papel que lhe é proposto, os discos conseguem se manter em movimento por muito mais tempo do que se estivessem e uma outra parte da mesa sem os buracos por onde passa o ar, além de levantar a questão que pode ser debatida pelo professor com seus alunos a respeito da validade da teoria e de que como o mundo real pode se afastar do modelo teórico por não ser possível eliminar por completo todas as irregularidades e imperfeições.

7 CONCLUSÃO

Em relação aos objetivos propostos inicialmente consideramos que foram atingidos plenamente, conseguimos construir a mesa de flutuação com qualidade suficiente para observar e filmar uma variedade de colisões com tampas de plástico que facilmente podemos encontrar em casa. E também conseguimos desenvolver o simulador com o modelo teórico proposto no trabalho. Ademais, conseguimos fazer a análise de resultados comparando teoria com experimento utilizando o analisador Tracker e verificamos um grau razoável de validade ou incongruência do modelo teórico em relação ao experimento real.

O objeto educacional pode ser utilizado em sequências didáticas junto a didáticas de ensino baseadas no ensino por investigação, por projetos ou que discutam ensino experimental e ensino com Tecnologias Digitais e da Informação para o Ensino.

Embora a internet é farta em simuladores computacionais, consideramos de fundamental importância na formação do aluno a construção de simuladores pois desenvolve a capacidade de programação aliada a conhecimentos específicos de física e matemática. O processo começa pela construção de um modelo teórico e parte em seguida para estudar e usar linguagens e recursos de programação para transformar equações abstratas em imagens, vídeos e dados para análises comparativas de resultados.

Por outro lado, a construção da mesa de flutuação no estilo Air Hockey foi um procedimento experimental que ajudou no desenvolvimento de habilidades experimentais e aquisição de conhecimentos que são necessários para a prática docente. Devemos observar que em diversas situações o professor precisa desenvolver os seus próprios aparatos experimentais e nem sempre as disciplinas do curso facilitam essas experiências. Por exemplo, na disciplina de Instrumentação para o Ensino a carga horária é limitada e permite o desenvolvimento de poucas experiências, neste sentido a construção de aparatos experimentais na disciplina do Trabalho de Conclusão de Curso complementa estas habilidades.

Para uma futura utilização do presente objeto educacional sugerimos aprimorar as condições da superfície de flutuação e se possível fazer um estudo das condições ótimas, por exemplo, a densidade superficial de orifícios, pressão de ar e tamanho e massa dos discos.

Em relação as colisões escolhidas para análise existem uma grande diversidade que podem ser de particular importância porque permitem verificar de forma mais simples modelos teóricos presentes em livros didáticos, por exemplo, colisões frontais unidimensionais ou bidimensionais, colisões com um disco parado e outro em movimento e colisões com discos de massas iguais ou diferentes.

O objeto apresentado também é um facilitador de discussões sobre limitações de modelos teóricos assim como elementos que levam a erros experimentais, propagação de erros de cálculos e a discordâncias entre a teoria e a prática.

Por fim, queremos ressaltar que o ensino de física com este tipo de objeto semelhante a brinquedos encontrados em estações de jogo de grandes centros comerciais propicia uma mistura de benefícios do ensino lúdico, experimental e teórico, tudo dentro de uma perspectiva de utilização de tecnologias e metodologias que motivam a aprendizagem.

REFERÊNCIAS

- ARFKEN, George Brown; WEBER, Hans-Jurgen; HARRIS, Frank E. **Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide**. 7. ed. Academic Press, 2012.
- BOAS, Mary Layne. **Mathematical Methods in the Physical Sciences**. 3. ed. EUA: John Wiley & Sons, 2005.
- FILHO, Geraldo Felipe de Souza. **Simulações Computacionais para o Ensino de Física Básica: Uma Discussão sobre Produção e Uso**. Rio de Janeiro, 2010. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.
- FONSECA FILHO, Pedro Rodrigues da. **Uma sequência didática para o estudo de colisões com a utilização de simulador e game**. Natal, 2019. Dissertação (Mestrado Nacional Profissionalizante em Ensino de Física) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019.
- FONSECA, André Ferreira da. **Desenvolvimento e aplicação de um simulador em HTML para ensino de colisões mecânicas**. Natal, 2019. Dissertação (Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física) - Instituto Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2018.
- HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física: Mecânica**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, v. 1, 2012.
- MEDEIROS, Alexandre; MEDEIROS, Cleide Farias de. Possibilidades e limitações das simulações computacionais no ensino da física. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 24, n. 2, p. 77, junho 2002.
- NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de física básica: Mecânica**. 5. ed. São Paulo: Blucher, v. 1, 2013.
- PAES, João Bosco Rodrigues. **A FÍSICA DE COLISÕES: UMA ABORDAGEM DE ENSINO-APRENDIZAGEM POR MEIO DO AMBIENTE 3D VPYTHON**. Pontal do Araguaia, 2016. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física) - Universidade Federal de Mato Grosso.
- TAYLOR, John Robert. **Classical Mechanics**. EUA: University Science Books, 2005.

APÊNDICE A — ROTAÇÃO DE EIXOS EM DUAS DIMENSÕES

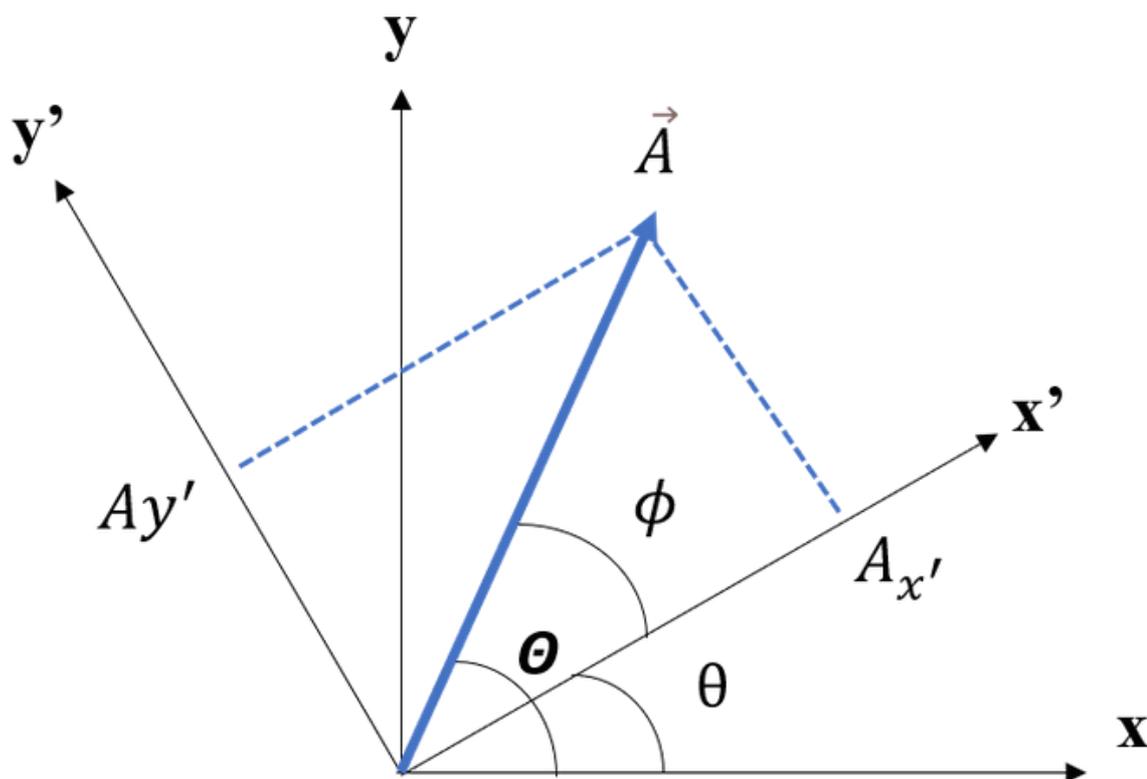
A rotação do sistema de coordenadas é uma técnica utilizada quando se mostra importante saber quais as componentes de determinada grandeza vetorial em outro sistema de interesse que não o padrão, sem rotacionar o vetor que representa a grandeza (transformação passiva). Em duas dimensões¹⁵ é um procedimento relativamente fácil, basta fazer o produto matricial a seguir:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (46)$$

A dedução do procedimento matricial acima decorre da ideia de que a componente de um vetor em uma direção é dada pelo produto escalar do vetor de interesse com um vetor unitário que aponta na direção desejada. Por exemplo, ao vermos a figura abaixo notamos que a componente do vetor é dada por:

$$A_{x'} = \vec{A} \cdot \hat{x}' = |\vec{A}| |\hat{x}'| \cos \phi \quad (47)$$

¹⁵ Para rotações em três dimensões veja: Mary (2005, p.129) ou Arfken, Weber e Harris (2012, p.139-142).



Sendo,

$$\Theta = \theta + \phi \quad (48)$$

Segue que:

$$A_{x'} = |\vec{A}| |\hat{x}'| \cos(\Theta - \theta) = |\vec{A}| \cos \Theta \cos \theta + |\vec{A}| \sin \Theta \sin \theta \quad (49)$$

Usamos a propriedade de que:

$$\cos \Theta \pm \cos \theta = \cos \Theta \cos \theta \mp \sin \Theta \sin \theta \quad (50)$$

E de forma semelhante, segue que:

$$A_{y'} = |\vec{A}| \sin \Theta \cos \theta - |\vec{A}| \cos \Theta \sin \theta \quad (51)$$

Pela figura é possível perceber também que:

$$A_x = |\vec{A}| \cos \Theta \quad (52)$$

$$A_y = |\vec{A}| \sin \Theta \quad (53)$$

De modo que podemos reescrever as equações 50 e 52 como:

$$A_{x'} = A_x \cos \theta + A_y \sin \theta \quad (54)$$

$$A_{y'} = A_y \cos \theta - A_x \sin \theta \quad (55)$$

Ou, em notação matricial:

$$\begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \quad (56)$$

Que é semelhante à matriz exposta no começo do apêndice.

Podemos obter também A_x e A_y em termos de $A_{x'}$ e $A_{y'}$ tomando a matriz

inversa da matriz de rotação. Seja R a matriz de rotação:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (57)$$

temos:

$$R^{-1} = \frac{1}{\det R} C^T \quad (58)$$

Onde C é a matriz dos cofatores de R . É fácil ver que $\det R=1$, calculando C^T , utilizando (58), temos:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cos \theta \quad (59)$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} (-\text{sen } \theta) \quad (60)$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \text{sen } \theta \quad (61)$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \cos \theta \quad (62)$$

Logo:

$$C = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (63)$$

Conseqüentemente, de acordo com a equação 59:

$$R^{-1} = C^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (64)$$

E assim:

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix} \quad (65)$$

Que é o resultado utilizado na seção 3 para encontrar as velocidades finais dos discos em função das velocidades iniciais e do ângulo de rotação do sistema de coordenadas θ .

APÊNDICE B — CÓDIGO DO SIMULADOR

O simulador pode ser acessado online¹⁶ na plataforma GlowScript, lá você pode executar o programa, ver o código atualizado e baixá-lo para utilizar offline.

Código:

```

from vpython import *
#GlowScript 3.1 VPython
# Simulador de colisões em duas dimensões utilizando rotação de eixos
#Parâmetro do botão
running = False
#Função que será chamada ao pressionar o botão
def Run(b):
    global running
    running = not running
    if running: b.text = 'Pause'
    else: b.text = 'Run'
#Criando o botão para pausar e rodar o programa
button(text = 'Run', pos = scene.title_anchor, bind = Run)
#Parâmetros
R1 = R2 = 5
R = R1 + R2
t = 0
dt = 0.000005
#Criando o "plano de fundo e discos"
wallBack = box(pos=vector(0, 0, -0.1), size=vector(50, 50, 0.2),
color=color.white)
disco1 = cylinder(pos=vector(-15, 0, 0), axis=vector(0, 0, 0.1), color=vector(0,
0, 0.5), radius=R1)
disco2 = cylinder(pos=vector(15, 0, 0), axis=vector(0, 0, 0.1), color=vector(0.5,
0, 0), radius=R2)
disco1.velocity = vector(0, 0, 0)
disco2.velocity = vector(0, 0, 0)
scene.caption = 'Disco 1: Azul\nDisco 2: Vermelho\n\n'
#Criando os controles deslizantes para alterar a velocidade
def set_v1ix(s_v1ix):
    wt_v1ix.text = 'v1ix = {:.2f}'.format(s_v1ix.value)
    disco1.velocity.x = s_v1ix.value

```

¹⁶ <https://glowscript.org/#/user/Wellerson/folder/MyPrograms/program/SimuladorDeColisoes2D>

```

def set_v1iy(s_v1iy):
    wt_v1iy.text = 'v1iy = {:.2f}'.format(s_v1iy.value)
    disco1.velocity.y = s_v1iy.value
def set_v2ix(s_v2ix):
    wt_v2ix.text = 'v2ix = {:.2f}'.format(s_v2ix.value)
    disco2.velocity.x = s_v2ix.value
def set_v2iy(s_v2iy):
    wt_v2iy.text = 'v2iy = {:.2f}'.format(s_v2iy.value)
    disco2.velocity.y = s_v2iy.value
sl_v1ix = slider(min = -70, max = 70, value = 0, bind = set_v1ix)
wt_v1ix = wtext(text='v1ix = {:.2f}'.format(sl_v1ix.value))
scene.append_to_caption('\n\n')
sl_v1iy = slider(min = -70, max = 70, value = 0, bind = set_v1iy)
wt_v1iy = wtext(text='v1iy = {:.2f}'.format(sl_v1iy.value))
scene.append_to_caption('\n\n')
sl_v2ix = slider(min = -70, max = 70, value = 0, bind = set_v2ix)
wt_v2ix = wtext(text='v2ix = {:.2f}'.format(sl_v2ix.value))
scene.append_to_caption('\n\n')
sl_v2iy = slider(min = -70, max = 70, value = 0, bind = set_v2iy)
wt_v2iy = wtext(text='v2iy = {:.2f}'.format(sl_v2iy.value))
#Loop do movimento
while True:
    rate(1/dt)
    if running:
        d = sqrt((disco2.pos.x-disco1.pos.x)**2 + (disco2.pos.y-disco1.pos.y)**2)
        if d <= R:
            correcao = R - d
            cosseno2 = abs(disco2.pos.x - disco1.pos.x)/R
            seno2 = abs(disco2.pos.y - disco1.pos.y)/R
            if disco2.pos.x - disco1.pos.x > 0:
                deltax = (disco2.pos.x - disco1.pos.x) + correcao*cosseno2
            else:
                deltax = (disco2.pos.x - disco1.pos.x) - correcao*cosseno2
            if disco2.pos.y - disco1.pos.y > 0:
                deltay = (disco2.pos.y - disco1.pos.y) + correcao*seno2
            else:
                deltay = (disco2.pos.y - disco1.pos.y) - correcao*seno2
            cosseno = (deltax/R)

```

```

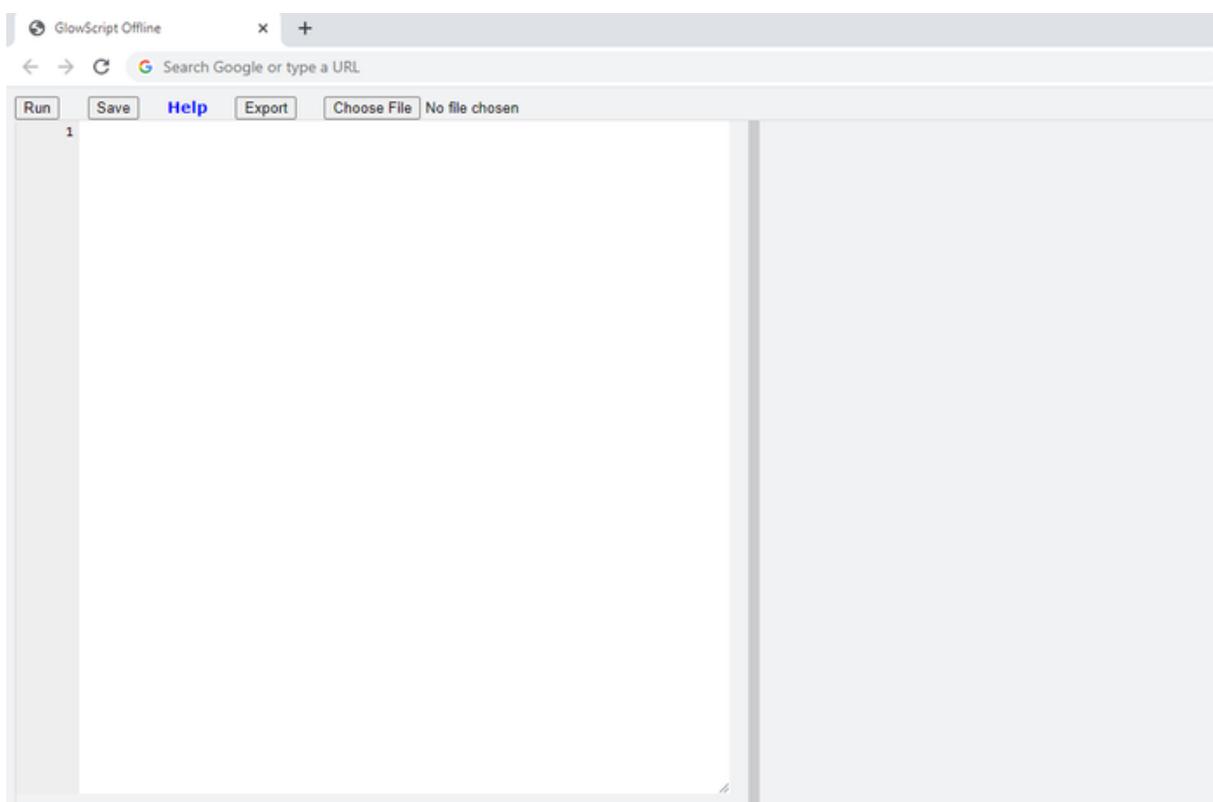
seno = (deltay/R)
v1ix = disco1.velocity.x
v1iy = disco1.velocity.y
v2ix = disco2.velocity.x
v2iy = disco2.velocity.y
v1fx = v1ix*(seno**2) + v2ix*(cosseno**2) + (v2iy - v1iy)*seno*cosseno
v1fy = v1iy*(cosseno**2) + v2iy*(seno**2) + (v2ix - v1ix)*seno*cosseno
v2fx = v1ix*(cosseno**2) + v2ix*(seno**2) + (v1iy - v2iy)*seno*cosseno
v2fy = v1iy*(seno**2) + v2iy*(cosseno**2) + (v1ix - v2ix)*seno*cosseno
disco1.velocity.x = v1fx
disco1.velocity.y = v1fy
disco2.velocity.x = v2fx
disco2.velocity.y = v2fy
n += 1
if disco1.pos.x + disco1.radius > (wallBack.length/2) or disco1.pos.x -
disco1.radius < -(wallBack.length/2):
    disco1.velocity.x = -disco1.velocity.x
if disco2.pos.x + disco2.radius > (wallBack.length/2) or disco2.pos.x -
disco2.radius < -(wallBack.length/2):
    disco2.velocity.x = -disco2.velocity.x
if disco1.pos.y + disco1.radius > (wallBack.height/2) or disco1.pos.y -
disco1.radius < -(wallBack.height/2):
    disco1.velocity.y = -disco1.velocity.y
if disco2.pos.y + disco2.radius > (wallBack.height/2) or disco2.pos.y -
disco2.radius < -(wallBack.height/2):
    disco2.velocity.y = -disco2.velocity.y
disco1.pos.x = disco1.pos.x + disco1.velocity.x*dt
disco1.pos.y = disco1.pos.y + disco1.velocity.y*dt
disco2.pos.x = disco2.pos.x + disco2.velocity.x*dt
disco2.pos.y = disco2.pos.y + disco2.velocity.y*dt
t = t + dt

```

É importante ressaltar que o simulador sofrerá algumas atualizações, para acessar a versão mais recente do código acesse o link que está no rodapé da primeira página do apêndice.

APÊNDICE C — COMO UTILIZAR O GLOWSCRIPT OFFLINE

É importante ter acesso offline ao simulador, para que imprevistos não sejam um empecilho à realização da aula. Para baixar a versão do GlowScript offline vá até <https://github.com/vpython/glowscript/blob/master/GlowScriptOffline3.0.zip>¹⁷ e baixe o arquivo zip. Para descompactá-lo você pode utilizar o WinRAR¹⁸, o 7-Zip¹⁹ ou outro de sua preferência. Crie uma pasta e descompacte o arquivo, busque pelo arquivo em HTML de nome README, abra-o para obter informações importantes. Na pasta descompactada abra o arquivo em HTML de nome GlowScript, você verá em seu navegador padrão a seguinte interface:



Na parte superior vê-se cinco opções: Run que executará seu programa, Save que salvará seu programa em um arquivo com extensão .py, Help que mostra a documentação da biblioteca VPython, Export que transforma seu programa em HTML, Choose File que é a opção que permite você selecionar o arquivo referente ao simulador, ou qualquer outro de interesse²⁰.

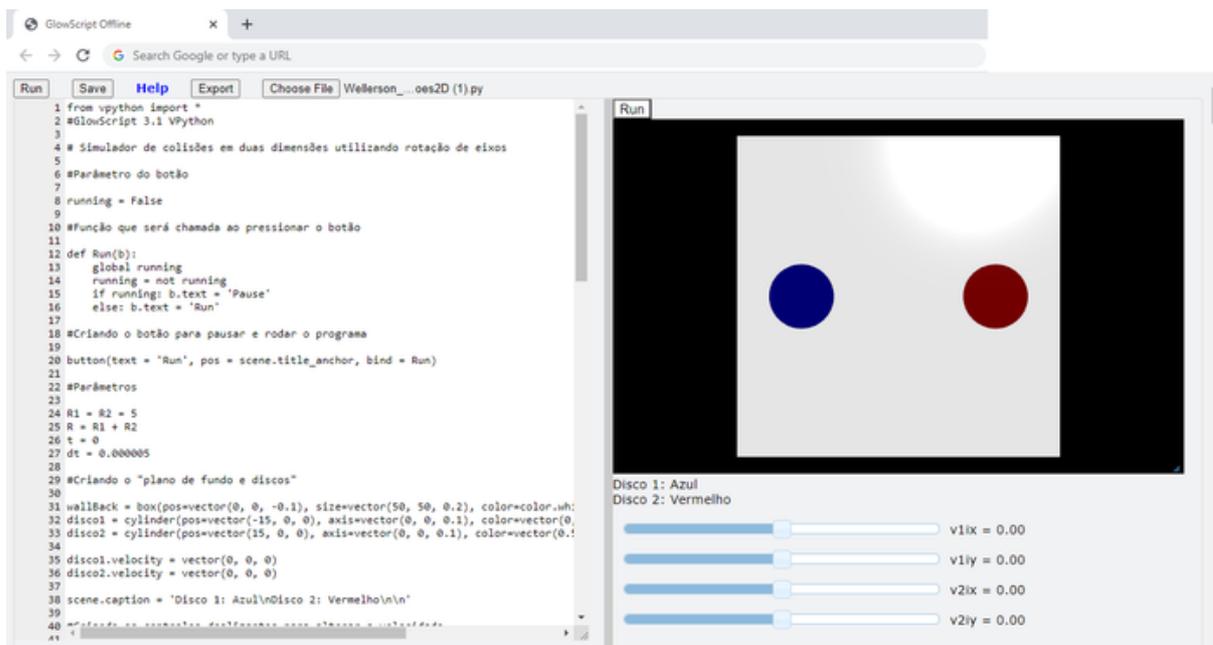
Ao selecionar o simulador e executá-lo você verá algo semelhante a:

¹⁷ GitHub é uma plataforma de hospedagem de código fonte e de arquivos. Observação: O link para download pode mudar, se não for possível acessar pelo endereço citado vá até <https://vpython.org/> e busque por: Using VPython without installing any software.

¹⁸ <https://www.win-rar.com/start.html?&L=0>

¹⁹ <https://www.7-zip.org/>

²⁰ O GlowScript offline vem com diversos programas de demonstração que podem ser encontrados na pasta Demos.



Para mais informações veja README ou acesse <https://vpython.org/>.