



UNIVERSIDADE FEDERAL DE
PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
LICENCIATURA EM FÍSICA



**MODELAGEM COMPUTACIONAL USANDO MÉTODO DE
ELEMENTOS FINITOS PARA APLICAÇÃO EM ENSINO DE
ELETROSTÁTICA**

ALLAMYS ALLAN DIAS DA SILVA

ORIENTADOR:
PROF. DR. JEHAN FONSÊCA DO NASCIMENTO

CARUARU-PE
DEZEMBRO DE 2016

Allamys Allan Dias da Silva

MODELAGEM COMPUTACIONAL USANDO MÉTODO DE
ELEMENTOS FINITOS PARA APLICAÇÃO EM ENSINO DE
ELETROSTÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como requisito parcial à obtenção do título de
graduado em Física-Licenciatura. Núcleo de
Formação Docente, Centro Acadêmico do
Agreste, Universidade Federal de Pernambuco.
Orientador: Prof. Jehan Fonsêca do Nascimento

CARUARU-PE
DEZEMBRO DE 2016

Catálogo na fonte:

S586m Silva, Allamys Allan Dias da.
Modelagem computacional usando método de elementos finitos para aplicação em ensino de eletrostática. / Allamys Allan Dias da Silva. – 2016.
70f.: il. ; 30 cm.

Orientador: Jehan Fonsêca do Nascimento.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, Licenciatura em Física, 2016.
Inclui Referências.

1. Eletrostática. 2. Física – Estudo e ensino. 3. Elementos finitos - metodos. I. Nascimento, Jehan Fonsêca do (Orientador). II. Título.

371.12 CDD (23. ed.)

UFPE (CAA 2016-365)



Campus 
AGRESTE

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
GRADUAÇÃO EM FÍSICA – LICENCIATURA

PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA DE DEFESA NA
DISCIPLINA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO II

ALLAMYS ALLAN DIAS DA SILVA

Título

***“MODELAGEM COMPUTACIONAL USANDO MÉTODO DE
ELEMENTOS FINITOS PARA APLICAÇÃO EM ENSINO DE
ELETROSTÁTICA”***

A comissão examinadora composta pelos professores: **JEHAN FONSÊCA DO NASCIMENTO**, NICIT/UFPE; **AUGUSTO CÉSAR LIMA MOREIRA**, NICIT/UFPE e **ERNESTO ARCENIO VALDÉS RODRIGUEZ**, NFD/UFPE sob a presidência do primeiro, consideram o graduando **ALLAMYS ALLAN DIAS DA SILVA** **APROVADO**.

Caruaru, 15 de dezembro de 2016.

AGRADECIMENTOS

De início, quero agradecer ao Prof. Jehan Fonsêca do Nascimento, por estar presente com seus ensinamentos e orientações sempre precisos e valiosos. A sua ajuda facilitou e potencializou a construção deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC).

Agradeço ao doutorando Henrique Patriota Alves, pela sua colaboração importante neste trabalho.

Agradeço aos professores Gislene Micarla Borges de Lima e Ernesto Arcenio Valdés Rodriguez por acreditarem no meu potencial desde o início do meu curso e por me incluir no meio da pesquisa acadêmica.

Agradeço também aos professores João Francisco Liberato de Freitas e Luis Henrique Vilela Leão por disponibilizarem a ensinar os cursos eletivos, quando solicitadas por minha turma, e, com isso, possibilitando ter a formação científica que almejávamos.

Exponho aqui minha imensa gratidão a cada pessoa da minha família pelo apoio e reconhecimento atribuídos a mim, em especial, a minha mãe, Silvanete; meu pai, Ailton; meu irmão, César e a minha avó, Eliete. Também agradeço a minha namorada Alana, por seu grande companheirismo.

Por fim, agradeço a todos os meus amigos, em especial, aos que estiveram comigo desde o primeiro dia de aula do curso de Física. Sou grato pela cumplicidade que tivemos durante todo o curso, fortalecendo nossa formação. Espero que nossas parcerias continuem para além da graduação.

"se a única ferramenta que você conhece é um martelo, todo problema é visto como um prego."

Abraham Maslow

Sumário

1 Introdução.....	12
2 Problema de Eletrostática	17
2.1 Descrição do Modelo Físico	17
2.2 Desenvolvimento Analítico do Modelo Físico	19
2.2.1 Equação de Laplace	19
2.2.2 Método das Imagens	20
2.3 Desenvolvimento Numérico do Modelo Físico	22
2.3.1 Discretização do Domínio Geométrico	23
2.3.2 Equações que Regem os Elementos Finitos.....	24
2.3.3 Conexão dos Elementos Finitos.....	26
2.3.4 Solução das Equações Resultantes.....	28
3 Modelagem Computacional do Problema de Eletrostática.....	30
3.1 MEF na Modelagem Computacional.....	30
3.2 Finite Element Method Magnetics (FEMM).....	31
3.3 COMSOL Multiphysics	35
3.4 Gnu Octave MATrix LABoratory (MATLAB).....	39
4 Análise dos Resultados da Modelagem Computacional	42
4.1 Especificações da Modelagem Computacional.....	42
4.2 Resultados do Potencial Elétrico	43
4.3 Resultados do Campo Elétrico	49
5 Conclusões e Perspectivas Futuras.....	54
Referências Bibliográficas	56
APÊNDICE.....	57
Apêndice A.....	58
Apêndice B.....	61
Apêndice C.....	66

Lista de Figuras

2.1	Esfera condutora inserida num campo elétrico uniforme orientado no eixo z do sistema de coordenadas cartesiano	18
2.2	Modelo físico da esfera condutora inserida num campo elétrico uniforme pelo Método das Imagens	21
2.3	Contorno irregular onde é inserida uma malha (formado por nós e elementos).....	22
2.4	Exemplo de elemento triangular, cujos nós representam os respectivos potenciais	24
2.5	Malha composta por três elementos finitos (SHADIKU, M. N. O. 2004).....	27
3.1	Interface do FEMM para o módulo de eletrostática	32
3.2	Geometria do problema de eletrostática no FEMM	32
3.3	Características físicas do espaço livre onde é inserida a esfera	33
3.4	Aplicação da condição de contorno numa na fronteira em destaque vermelho.....	33
3.5	Domínios com malha triangular no <i>software</i> FEMM	34
3.6	<i>Plot</i> de superfície do potencial no FEMM para o problema da esfera no campo elétrico uniforme.....	35
3.7	Interface do COMSOL para o módulo de eletrostática.....	36
3.8	Geometria do modelo físico no COMSOL.....	36
3.9	Caracterização de uma região no COMSOL.....	37
3.10	Condição de contorno da esfera condutora.....	38
3.11	Domínios com malha triangular no COMSOL.....	38
3.12	<i>Plot</i> de superfície do potencial elétrico no COMSOL para o problema da esfera no campo elétrico uniforme.....	39
3.13	Domínios com malha triangular programada no <i>Octave</i>	40
3.14	<i>Plot</i> de superfície do potencial elétrico construído no <i>Octave</i> para o problema da esfera condutora inserida num campo elétrico uniforme.....	40

4.1	Resultados do potencial elétrico em função da coordenada z para o raio da esfera igual a (a) 3 mm, (b) 5 mm, (c) 7 mm e (d) 9 mm.....	43
4.2	Resultados da posição da esfera em termos do seu raio obtidos por meio de uma medida indireta do potencial elétrica, em que (a) mostra a parte negativa e (b) a parte positiva ao longo do eixo z	44
4.3	Figura 4.3: Potenciais elétricos no eixo z igual a 5 mm para o (a) lado negativo de z e para o (b) lado positivo de z	46
4.4	Potencial elétrico em função do raio da esfera para os pontos (a) -40 mm e (b) 40 mm ao longo do eixo z	47
4.5	Resultados do campo elétrico em função da coordenada z para o raio da esfera igual a (a) 3 mm, (b) 5 mm, (c) 7 mm e (d) 9 mm.....	49
4.6	Resultados da posição da esfera em termos do seu raio obtidos por meio de uma medida indireta do campo elétrica, em que (a) mostra a parte negativa e (b) a parte positiva ao longo do eixo z	50
4.7	Campos elétricos no eixo z igual a 5 mm para o (a) lado negativo de z e para o (b) lado positivo de z	51
4.8	Campo elétrico em função do raio da esfera para os pontos (a) -40 mm e (b) 40 mm ao longo do eixo z	52
B.1	Modelo físico para geração de campo uniforme através de cargas pontuais para aplicação do Método das Imagens(JACKSON, 2001)	61
B.2	Modelo físico para análise da carga imagem gerada no interior da esfera condutora	63
B.3	Modelo físico da esfera condutora inserida num campo elétrico uniforme pelo Método das Imagens	64

Lista de Tabelas

1.1	Distribuição do número de trabalhos de pesquisa ou propostas com avaliação empírica em função da área da Física, do nível de aplicação e do tipo geral de atividade (ARAUJO, 2005).....	15
4.1	Valores correspondentes aos coeficientes das inclinações de reta da Figura 4.2a.....	45
4.2	valores correspondentes aos coeficientes das inclinações de reta da Figura 4.2b.....	45
4.3	Erros relativos dos coeficientes do ajuste polinomial da Figura 4.3a.....	46
4.4	Erros relativos dos coeficientes do ajuste polinomial da Figura 4.3b.....	46
4.5	Erro relativo para os coeficientes de ajuste da função polinomial da Figura 4.4a.....	48
4.6	Erro relativo para os coeficientes de ajuste da função polinomial da Figura 4.4b.....	48
4.7	Valores correspondentes aos coeficientes das inclinações de reta da Figura 4.6a.....	51
4.8	Valores correspondentes aos coeficientes das inclinações de reta da Figura 4.6b.....	51
4.9	Erros relativos dos coeficientes do ajuste polinomial da Figura 4.7a.....	52
4.10	Erros relativos dos coeficientes do ajuste polinomial da Figura 4.7b.....	52
4.11	Erro relativo para os coeficientes de ajuste da função polinomial da Figura 4.8a.....	53
4.12	Erro relativo para os coeficientes de ajuste da função polinomial da Figura 4.8b.....	53

MODELAGEM COMPUTACIONAL USANDO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA APLICAÇÃO EM ENSINO DE ELETROSTÁTICA

AUTOR: ALLAMYS ALLAN DIAS DA SILVA

ORIENTADOR: PROF. DR. JEHAN FONSÊCA DO NASCIMENTO

Resumo

Muito se é discutido sobre novas ferramentas que possam fazer com que os alunos tornem-se agentes ativos no processo de ensino aprendizagem. Sobre algumas dessas ferramentas, em especial a computacional, já há algum consenso da sua utilidade no ensino. No entanto, não pode separar a questão curricular, que indica a utilização da ferramenta no ensino, da questão metodológica, que aborda como usar o recurso. Isso porque a utilização do recurso tem que ser pensada de forma que traga novos benefícios, e não para que seja uma nova roupagem para as velhas práticas pedagógicas. Nesse sentido, este trabalho destaca alguns *softwares* que têm potencial para serem usados no ensino, tal como a forma como eles podem ser utilizados, de maneira que possibilitem um processo dinâmico e efetivo de ensino-aprendizagem. Em específico, neste TCC é tratado um problema de eletrostática usando métodos numéricos, visando uma proposta, de modo geral, de baixo custo e de boa qualidade para aplicação no ensino de física. Por fim, a sistemática da modelagem computacional apresentada neste TCC pode ser incluída na didática de docentes com o objetivo de ensinar outros fenômenos físicos.

Palavras chave: Física – Estudo e ensino, Elementos finitos - métodos, Eletrostática.

Abstract

Much is being discussed about new tools that can make students become active agents in the process of teaching and learning. On some of these tools, especially computational, there is already some consensus of its usefulness in teaching. However, it can not separate the curricular question, which indicates the use of the tool in teaching, of the methodological question, which addresses how to use the resource. This is because the use of the resource has to be thought in a way that brings new benefits, not to be a new guise for the old pedagogical practices. In this sense, this work highlights some softwares that have the potential to be used in teaching, well as they can be used, in a way that enables a dynamic and effective teaching-learning process. Specifically, in this CBT an electrostatic problem is addressed using numerical methods, aiming at a generally low cost and good quality proposal for application in physics teaching. Finally, the systematics of computational modeling presented in this CBT can be included in didactics of teachers with the objective of teaching other physical phenomena.

Key word: Physics - Study and teaching, Finite elements - methods, Electrostatics.

Capítulo 1

Introdução

Quando se pensa em currículo, não basta apenas pensar nos conhecimentos que serão abordados, mas também é necessário considerar os meios usados para que o processo de ensino-aprendizagem aconteça de forma prospera. A respeito disso, Pinto e Figueiredo expressam:

“Caso isso não ocorra, o currículo deixa de ser uma proposta pedagógica para se tornar mais um processo burocrático encerrado dentro de dezenas de folhas de planejamentos pedagógicos feitos mecanicamente nas escolas: o que ensinar, por que ensinar e como ensinar, são questionamentos inseparáveis numa proposta curricular efetiva.” (PINTO e FIGUEIREDO, 2010, p. 3)

Um desses meios, que traz uma dinâmica muito positiva, é a utilização de recurso computacional. A vantagem de usar esse recurso é que ele facilita a concretização do pensamento, ou seja, ele trabalha o concreto sem deixar o abstrato. Na modelagem ou simulação computacional, é possível modificar parâmetros físicos; como massa, carga e etc; e ver as consequências geradas por essas alterações. Além disso, é possível contar com um ambiente visual que a simulação proporciona, fazendo com que o abstrato se torne mais concreto, como Pietrocola e Brockington descrevem:

“As animações são capazes de fazer o refinamento de um conceito dando vazão à necessidade visual que temos. [...] Uma animação fornece liberdade à imaginação, a torna mais real, tangível, sendo capaz de dar uma forma ao pensamento.” (PIETROCOLA; BROCKINGTON, p. 4)

Outro ponto bastante debatido de maneira positiva entre educadores é a participação mais ativa do discente no processo de ensino-aprendizagem. Contudo,

a implantação dessa participação discente na prática é rara. Em geral, observa-se ainda o aluno bastante passivo diante o processo de ensino-aprendizagem (PEREIRA e AGUIAR, 2002). Sendo assim, a atividade computacional em sala de aula pode tornar a participação do discente mais significativa, uma vez que, o ambiente virtual possibilita ao discente verificar e mensurar, em ambiente controlado (laboratório), determinados fenômenos da natureza, com a perspectiva de prevê-los num ambiente real. Tal situação é bastante utilizada nos ramos das ciências pura e aplicada (SOUZA, D. M. 2013).

A prática experimental num curso de física é essencial, mesmo no curso de física da escola básica, nas palavras de Rodolpho Caniato:

“Estudar Física sem ser através da experiência é como fazer curso de natação por correspondência.” (apud PEREIRA; AGUIAR, 2002, p. 71)

Contudo, devido a diversos fatores, tais como falta de material educacional apropriado por causa dos custos elevados de aquisição, falta de infraestrutura física para adequação do laboratório físico, dificuldade da montagem do experimento por falta de profissional especializado e entre outros, não possibilitam a realização da prática experimental. Nesse caso, o recurso computacional vem como uma alternativa de baixo custo e com o viés para criação de experimentos virtuais, que não necessitam, a priori, de uma infraestrutura física específica e custosa. Logo, tal recurso pode amenizar a falta da experimentação física.

Atualmente, há uma crescente conscientização sobre a importância das atividades por meio de projeto, uma vez que esse tipo de atividade dá uma maior autonomia ao aluno, assim possibilitando o desenvolvimento de habilidades que podem ser levadas para a vida extra-acadêmica do aluno. De acordo com Barbosa et al.(2002):

“O método de projetos é uma estratégia de ensino-aprendizagem que visa, por meio da investigação de um tema ou de um problema, vincular teoria e prática. Gera aprendizagem diversificada e em tempo real, inserida em novo contexto pedagógico, no qual o aluno é agente na produção do conhecimento. Rompe com a imposição de conteúdos de forma rígida e pré-estabelecida, incorporando-os na medida em que se constituem como parte fundamental para o desenvolvimento do projeto.” (BARBOSA et al., 2002; apud VENTURA et. al.,2006)

Além disso, do ponto de vista da estrutura curricular, pode-se dizer que o componente curricular que trabalha a base de projetos possui um caráter interdisciplinar, já que aborda o conteúdo de diversas áreas do conhecimento para atingir seu objetivo (AZEVEDO, 2009). Sendo assim, as componentes curriculares que fazem uso de projetos podem ser planejadas com atividades práticas de simulação e modelagem computacional de fenômenos da natureza.

Como prática de ensino usando ferramenta computacional, tem-se a viabilidade do discente observar fenômenos da natureza que, por exemplo, são causados pela variação de parâmetros físicos, tais como temperatura, pressão e outros. Por fim, através do desenvolvimento de temáticas por projetos, o discente é exposto ao conteúdo teórico científico e matemático, desenvolve habilidade técnica de programação, construção do modelo físico que caracterize o problema do projeto, obtenção de resultados analíticos e numéricos da modelagem e construção de senso crítico sobre os resultados do tema estudado.

Neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), é proposto um estudo de desempenho de *softwares* pago e livre, que podem ser usados na construção de modelos físicos, para serem usados em componentes curriculares que fazem usos de projetos, como cursos experimentais e outros. Especificamente, para esse estudo de desempenho, é usado um problema de eletrostática encontrado em diversos livros textos de eletromagnetismo (GRIFFITHS, 1999). A escolha pelo problema de eletromagnetismo é que, de acordo com Araujo (2005), há uma grande concentração de trabalhos, em diferentes níveis de ensino, usando ferramenta computacional na área de mecânica, como ilustrada na Tabela 1. Sendo assim, por escolha do autor, é feita uma modelagem computacional para um problema de eletrostática.

Como dito anteriormente, a modelagem computacional pode viabilizar novas perspectivas para ensino de ciências da natureza e das engenharias, quando essa ferramenta é aplicada a projetos temáticos associados ao cotidiano do discente. Como consequência, na visão do discente, é observada maior conexão com o conteúdo desenvolvido na componente curricular e o seu cotidiano, ou seja, o dia a dia do discente. Logo, espera-se maior interesse por parte do discente no que está sendo ensinado a ele. Sobre essa conexão entre o que é ensinado na escola e a

vida cotidiana do discente, em muitos casos não são desenvolvidos em sala de aula (VANNUCCHI, 2009). Especificamente, para o caso das ciências da natureza, alguns fenômenos físicos observados na prática (dia a dia) podem ser complexos, do ponto de vista matemático, físico e financeiro, para descrevê fisicamente no laboratório de ensino. Por isso e outros motivos, muitos docentes acabam deixando de executar essa conexão mais efetiva em sua didática. Em alguns casos, os docentes apenas contextualizam a temática, mas sem efeitos práticos em sala de aula (PEREIRA e AGUIAR, 2002). Sobre essa dificuldade encontrada na didática de diversos docentes em ciência da natureza e de engenharias, a modelagem computacional pode ser um recurso facilitador para desenvolver essa conexão mais prática. Isso porque tal modelagem é capaz de resolver problemas complexos, geralmente problemas do cotidiano, onde soluções analíticas, obtidas em modelos físicos ideais, começam a falhar. Sendo assim, é necessário um método não analítico do qual a modelagem física possa fazer uso. Alguns métodos não analíticos são encontrados na literatura, tais como os métodos gráficos, experimentais, analógicos e numéricos (SHADIKO,2004).

Tabela 1.1: Distribuição do número de trabalhos de pesquisa ou propostas com avaliação empírica em função da área da Física, do nível de aplicação e do tipo geral de atividade (ARAUJO, 2005).

Áreas da Física	Nível de ensino									Total
	Ensino superior			Ensino médio			Ensinos superior e médio			
	Simul.	Model.	S&M	Simul.	Model.	S&M	Simul.	Model.	S&M	
Mecânica	6	2	3	11	1	-	1	-	-	24
Eletromagnetismo	3	-	-	1	1	-	-	-	-	5
Termodinâmica	1	1	-	1	1	-	-	-	-	4
Ótica	1	-	-	-	-	-	-	-	-	1
Física Moderna	-	1	-	-	-	-	-	-	-	1
Física em geral	1	-	-	-	-	-	-	-	-	1
Total	12	4	3	13	3	-	1	-	-	

Para este TCC, a modelagem computacional faz uso dos métodos numéricos, que podem ser classificados como métodos dos elementos finitos, da diferença finita e momentos. Em particular, o método numérico usado neste TCC é de elementos finitos (SHADIKO,2004).

Por fim, este TCC, além do capítulo introdutório, está organizado da seguinte forma:

- i) O capítulo 2 mostra um problema de eletrostática sobre uma análise analítica e numérica do modelo físico proposto usado os métodos analíticos, por meio da Equação de Laplace e Método das Imagens, e o Método de Elementos Finitos (MEF), para os resultados numéricos;
- ii) O Capítulo 3 apresenta os *softwares* usados na modelagem computacional, que fazem uso do MEF. Esses programas são: a) o COMSOL *multiphysics* 5.2, que é um *software* dedicado para uso de MEF e sua licença é paga. Para fazer uso desse *software* na construção e divulgação deste TCC, o autor fez uso da licença vitalícia obtida pelo Departamento de Eletrônica e Sistemas (DES) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE); b) o programa de licença livre *Finite Element Method Magnetics* (FEMM), que também é dedicado ao uso do MEF para problemas de eletromagnetismo e pode ser obtido no site <http://www.femm.info/wiki/HomePage> (acessado em 26 de novembro de 2016); e, por fim, c) a linguagem MATLAB, que usa matrizes como elemento de dados básico, o código em MATLAB será executado no *software* de licença livre GNU *Octave*, que é *software* dedicado de matemática capaz de desenvolver operações analíticas e numéricas. O GNU *Octave* está disponível para vários sistemas operacionais, onde pode ser obtido no site <https://www.gnu.org/software/octave/> (acessado em 26 de novembro de 2016).
- iii) O Capítulo 4 Apresenta os resultados obtidos do Capítulo 3. O *software* usado no tratamento dos dados é o *Scidavis*, que é um programa de licença livre dedicado a tratamento gráfico, seja em 2D ou 3D. Esse programa pode ser obtido no site <http://scidavis.sourceforge.net/> (acessado em 26 de novembro de 2016) e é disponível para vários sistemas operacionais;
- iv) O Capítulo 5 apresenta a conclusão e perspectivas futuras deste TCC;
- v) O Apêndice destaca o algoritmo comentado do MEF feito em linguagem MATLAB.

Capítulo 2

Problema de Eletrostática

Este capítulo apresenta um estudo analítico e numérico de um problema de eletrostática bastante trabalhado em cursos de eletromagnetismo em nível profissional de cursos de ciências e engenharias. Para tratar de maneira didática o tema, o capítulo é organizado da seguinte forma: i) Na Seção 2.1, é abordada a descrição do modelo físico; ii) Na Seção 2.2, é descrito o desenvolvimento analítico do problema da Seção 2.1, usando a Equação de Laplace e o Método das Imagens; e, por fim, iii) Na Seção 2.3, é abordado o desenvolvimento numérico do problema da Seção 2.1, usando o MEF, onde, inicialmente, é feita uma breve introdução do método numérico escolhido para modelar o problema físico em destaque neste capítulo.

2.1 Descrição do Modelo Físico

O modelo físico de eletrostática proposto trata de uma condutora sem carga líquida inserida num campo elétrico uniforme, como ilustrado na Figura 2.1. A solução analítica desse problema é bastante divulgada em livros textos de eletromagnetismo, onde é aplicado para cursos profissionalizantes de ciências da natureza e engenharias (GRIFFITHS, 1999). Para obter a solução analítica, são aplicadas duas técnicas de resolução de problemas em eletrostática. Essas técnicas são a Equação de Laplace e o Método das Imagens, como é discutido na Seção 2.2. Usando essas duas técnicas, é possível obter grandezas físicas, como o potencial e o campo elétrico, que são informações importantes para descrever o fenômeno elétrico na esfera condutora, de acordo com o modelo físico proposto. Por fim, esses mesmos parâmetros físicos serão obtidos usando o MEF, como é descrito na Seção 2.3.

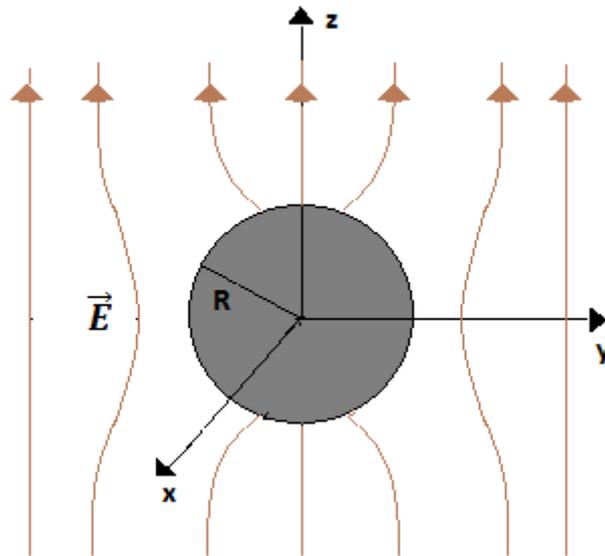


Figura 2.1: Esfera condutora inserida num campo elétrico uniforme orientado no eixo z do sistema de coordenadas cartesiano.

A Figura 2.1 ilustra o problema adotado. Para obter as condições de contorno é preciso entender o conceito de blindagem eletrostática, que diz que um volume no interior de um condutor qualquer o campo elétrico é nulo, desde que não haja carga internas ao condutor, isso ocorrer porque na presença de um campo elétrico as cargas na superfície do condutor são induzidas de formar a anular o campo no interior do próprio condutor. Dizer que o campo é nulo significa que o potencial é constante que pode ser definido dependendo do problema (GRIFFITHS, 1999).

Então são adotadas as seguintes considerações para modelo físico: a) a esfera condutora possui uma região equipotencial e o potencial é definido como sendo zero na própria esfera; b) a magnitude do campo elétrico uniforme aplicado é E_0 ; e c) o potencial para uma região distante da esfera, $z \gg R$, onde R é o raio da esfera, é um potencial decorrente de um campo uniforme, uma vez que nessa região a esfera já não causa interferência no campo uniforme, (GRIFFITHS, 1999)

$$V \rightarrow -E_0 z + C, \quad (2.1)$$

em que C é uma constante e o potencial da Equação (2.1) é definido para o eixo positivo de z . Por fim, como a esfera é equipotencial, tem-se que pela simetria azimutal do problema, o plano xy da Figura 2.1 possui potencial nulo e, como

consequência, a constante C da Equação (2.1) é nula. Dessa forma, obtêm-se as seguintes equações de contorno para esse problema, em coordenadas polares esféricas (GRIFFITHS, 1999):

$$V = \begin{cases} 0, & r \leq R; \\ -E_0 r \cos\theta, & z = r \cos\theta, r \gg R. \end{cases} \quad (2.2)$$

2.2 Desenvolvimento Analítico do Modelo Físico

Nesta seção, são abordadas duas técnicas analíticas para obter o potencial e o campo elétrico do modelo físico proposto. Essas técnicas são a resolução da Equação de Laplace e o Método das Imagens, destacadas nas Seções 2.2.1 e 2.2.2, respectivamente.

2.2.1 Equação de Laplace

Como dito anteriormente, o problema ilustrado na Figura 2.1 é bastante divulgado em diversos livros textos de eletromagnetismo. Sendo assim, fazendo uso das informações do problema proposto do livro *Introduction to Electrodynamics* do autor David J. Griffiths (GRIFFITHS, 1999), tem-se, para a condição de carga líquida nula, a Equação Diferencial Parcial (EDP) de Poisson é reduzida para Equação de Laplace, que é definida por (GRIFFITHS, 1999)

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0, \quad (2.3)$$

em que ∇^2 é o operador laplaciano. Escrevendo o laplaciano em coordenadas esféricas e considerando a simetria azimutal do problema a Equação (2.3) resulta em

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (2.4)$$

em que r e θ são as componentes radial e polar, respectivamente. Então resolvendo a Equação (2.4), que é uma equação diferencial parcial, é encontrado o potencial, a solução para esse problema é um somatório de funções em r e θ (GRIFFITHS, 1999)

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} V_l(r, \theta), \quad (2.5)$$

Onde

$$V_l(r, \theta) = \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta). \quad (2.6)$$

Por fim, aplicando as condições de contorno da Equação (2.2) na Equação (2.5) é obtido o potencial para o problema da esfera condutora em campo uniforme, (GRIFFITHS, 1999)

$$V(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (2.7)$$

Como o campo eletrostático gerado pela esfera é conservativo, é possível obter o campo eletrostático produzido pela esfera por meio do gradiente do potencial elétrico, ou seja, (GRIFFITHS, 1999)

$$\vec{E}(r, \theta) = -\vec{\nabla} V(r, \theta). \quad (2.8)$$

Considerando o operador diferencial descrito em coordenadas polares esférica, tem-se que o resultado para o campo elétrico gerado pela esfera carregada é expresso por (GRIFFITHS, 1999)

$$\vec{E}(r, \theta) = -E_0 \left[1 + 2 \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \cos \theta \hat{r} + E_0 \left[r - \frac{R^3}{r^2} \right] \sin \theta \hat{\theta}, \quad (2.9)$$

em que \hat{r} e $\hat{\theta}$ são os vetores de base do sistema de coordenadas polares esférica. A resolução detalhada desse problema consta no Apêndice A desse Trabalho de Conclusão de Curso.

2.2.2 Método das Imagens

Esse método é uma técnica alternativa para resolver problemas com simetria. Sendo assim, a classe de problemas, que podem ser resolvidas pelo Método das Imagens, é limitada (JACKSON, 2001). No problema destacado na Figura 2.1, há uma simetria esférica envolvida. Logo, o tal método pode ser aplicado (JACKSON, 2001). Em particular, o Método das Imagens trata o problema observado na Figura 2.1 por meio de cargas pontuais. Essas cargas são imaginadas de forma que o potencial no espaço seja equivalente ao potencial do problema inicial.

Como o problema tratado requer um campo uniforme, basta imaginar duas cargas pontuais de sinais opostos, equidistantes, D , e alinhados no eixo z positivo e negativo, essas cargas tem módulo igual a

$$Q = 2\pi\epsilon_0 E_0 D^2. \quad (2.10)$$

Para anular o potencial na região correspondente a esfera é imaginado duas cargas pontuais de carga q igual a

$$q = \frac{R}{D} Q, \quad (2.11)$$

de forma que as cargas estejam dispostas como na Figura 2.2,

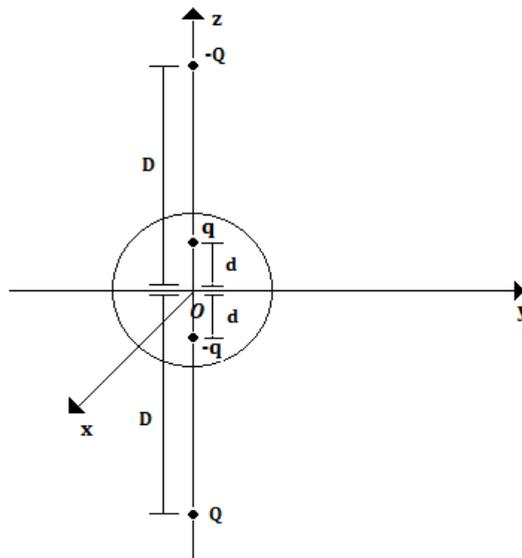


Figura 2.2: Modelo físico da esfera condutora inserida num campo elétrico uniforme pelo Método das Imagens.

onde d é a distância que as cargas de módulo q estão da origem essa distância é de

$$d = \frac{R^2}{D}. \quad (2.12)$$

Usando o princípio da superposição o potencial no espaço será soma dos potenciais das cargas pontuais, o resultado dessa soma é

$$V(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (2.13)$$

que é o mesmo valor obtido na Equação (2.13), como esperado. A resolução detalhada desse problema pelo método das imagens consta no Apêndice B desse Trabalho de Conclusão de Curso.

2.3 Desenvolvimento Numérico do Modelo Físico

As técnicas analíticas são muito úteis, pois resultam em soluções fechadas, onde permite observar a variação de parâmetros físicos por meio de modelos físicos idealizados. Contudo, para problemas reais, comumente encontrados no cotidiano, tais técnicas analíticas são tratadas como aproximações dos valores mensurados de modelos físicos reais. Sendo assim, com o objetivo de aproximar os resultados obtidos por meio da formulação matemática dos resultados obtidos experimentalmente, usam-se métodos numéricos para tal finalidade (SHADIKU, 2004).

Os métodos numéricos mais usados para aplicação em eletromagnetismo são o método dos momentos, o método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos (SHADIKU, 2004). Esses métodos são destacados da seguinte forma: o método dos momentos é usado na solução de integrais, os métodos das diferenças finitas e dos elementos finitos são usados quando o problema é tratado por meio de derivadas. Especificamente, para este TCC, é abordado o método dos elementos finitos, pois é o método utilizado pelos *softwares* analisados com o objetivo de resolver o problema de eletrostática proposto.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) consiste em analisar uma geometria não regular, onde essa geometria é discretizada por vários pedaços de geometria simples (malha de elementos finitos). Esses pedaços podem ser elementos triangulares ou quadrangulares, como ilustrada na Figura 2.3.

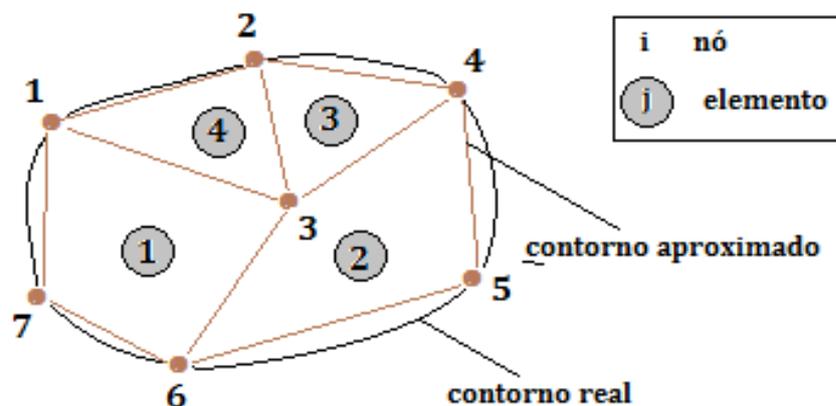


Figura 2.3: Contorno irregular onde é inserida uma malha (formado por nós e elementos).

A modelagem computacional do modelo físico, por questões de facilidade de cálculo e de economia de processamento do computador, será feita em 2D, onde a circunferência, que representa a projeção da esfera no plano, é centrada na origem do sistema de coordenadas cartesianas.

O procedimento para análise do problema pelo método dos elementos finitos pode ser dividido da seguinte forma: na Seção 2.3.1, é abordada a discretização do domínio, na Seção 2.3.2, obtêm-se as equações que regem cada elemento, na Seção 2.3.3, tem-se a conexão de todos os elementos no domínio e, por fim, na Seção 2.3.4, é apresentada a solução do sistema de equações obtida.

2.3.1 Discretização do Domínio Geométrico

Na etapa inicial da discretização do domínio geométrico não regular, o domínio é dividido numa quantidade finita de elementos, como ilustrada na Figura 2.3. Depois disso, é feita uma aproximação para o potencial dentro de cada elemento e, em seguida, esses elementos são correlacionados através das distribuições de potenciais. O potencial precisa ser contínuo através dos contornos e a solução aproximada para o potencial em toda região é descrita por (SHADIKU, 2004)

$$V(x, y) = \sum_{e=1}^N V_e(x, y), \quad (2.14)$$

em que N é o número de elementos e V_e é o potencial dentro do e -ésimo elemento.

A forma usada para aproximar o potencial V_e é por meio da aproximação polinomial, onde são usados os seguintes tipos de elementos (SHADIKU, 2004):

$$V_e(x, y) = \begin{cases} a + bx + cy & (\text{triangular}); \\ a + bx + cy + dxy & (\text{quadrangular}). \end{cases} \quad (2.15)$$

onde a , b , c e d são constantes.

Para o problema apresentado na Figura 2.3, o potencial V_e é nulo fora do elemento e varia linearmente, ou seja, equivale dizer que o campo elétrico no interior do elemento E_e é uniforme. Assim, tem-se que (SHADIKU, 2004)

$$\vec{E}_e(x, y) = -\vec{\nabla} V_e(x, y) = -(b\hat{x} + c\hat{y}). \quad (2.16)$$

Logo, pode-se concluir que, quanto menor os elementos da malha do domínio, melhor é o resultado obtido, já que, considerando uma região muito

pequena, o campo elétrico é aproximadamente uniforme. Por fim, outro ponto importante sobre os elementos da malha é que, por questões geométricas, os elementos triangulares se adequam melhor aos contornos irregulares do que os elementos quadrangulares (SHADIKU, 2004). Contudo, apesar da malha apresentada na Figura 2.3 ser variada, é usado, de modo geral e também neste TCC, os elementos triangulares.

2.3.2 Equações que Regem os Elementos Finitos

Antes de tratar das equações que descrevem os elementos finitos, é necessário definir a forma de atuar num elemento triangular (célula unitária), como ilustrada na Figura 2.4.

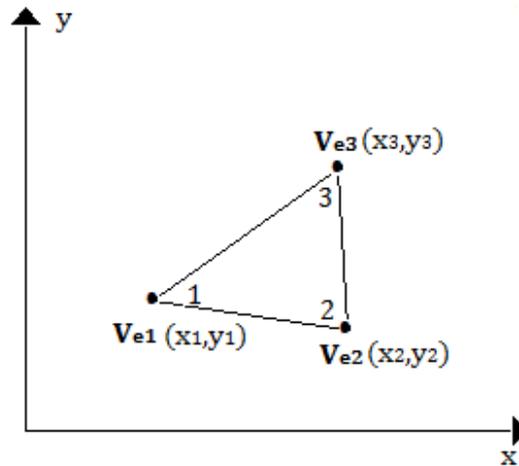


Figura 2.4: Exemplo de elemento triangular, cujos nós representam os respectivos potenciais.

O elemento triangular possui três nós, que são enumerados no sentido anti-horário por convenção. Em seguida, os potenciais localizados nos nós do elemento triangular são obtidos pela Equação (2.15), cuja representação matemática é feita de forma matricial, como sendo:

$$\begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \therefore$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

em que A é a área do elemento triangular. Agora, usando a Equação (2.17) na Equação (2.15), obtém-se a expressão do potencial do elemento finito, como sendo (SHADIKU, 2004):

$$V_e = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) V_{ei} , \quad (2.18)$$

em que

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]; \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2A} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]; \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2A} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

A Equação (2.19) apresenta funções lineares de interpolação, que são conhecidas como funções de “forma dos elementos finitos”. Essas funções possuem as seguintes propriedades matemáticas (SHADIKU, 2004):

$$\alpha_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} ; \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) = 1 . \quad (2.20)$$

Observe que a Equação (2.18) descreve o potencial em qualquer ponto dentro do elemento finito, desde que os potenciais nos vértices sejam conhecidos. Agora, tendo a expressão matemática para o potencial, é possível obter a energia, por meio da energia por unidade de comprimento, ou seja, (SHADIKU, 2004)

$$W_e = \frac{1}{2} \int \varepsilon |\vec{E}|^2 dS = \frac{1}{2} \int \varepsilon |\vec{\nabla} V_e|^2 dS , \quad (2.21)$$

em que é assumido um domínio bidimensional livre de cargas, ou seja, $\rho_s = 0$.

Sendo assim, pela Equação (2.18), tem-se que (SHADIKU, 2004)

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon V_{ei} C_{ij}^{(e)} V_{ej} , \quad (2.22)$$

onde

$$C_{ij}^{(e)} = \iint \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} \alpha_j dS \quad (2.23)$$

A Equação (2.22) pode ser expressa na forma matricial, como sendo (SHADIKU, 2004):

$$W_e = \frac{\varepsilon}{2} [V_e]^T [C^{(e)}] [V_e] , \quad (2.24)$$

em que

$$[V_e] = \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix} \text{ e } [C^{(e)}] = \begin{bmatrix} C_{11}^{(e)} & C_{12}^{(e)} & C_{13}^{(e)} \\ C_{21}^{(e)} & C_{22}^{(e)} & C_{23}^{(e)} \\ C_{31}^{(e)} & C_{32}^{(e)} & C_{33}^{(e)} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

A matriz $[C^{(e)}]$ é denominada matriz dos coeficientes dos elementos, onde o elemento $C_{ij}^{(e)}$ é considerado como o acoplamento entre os nós i e j , e seu valor é obtido a partir da Equação (2.23). Definindo (SHADIKU, 2004)

$$\begin{aligned} P_1 &= y_2 - y_3 ; P_2 = y_3 - y_1 ; P_3 = y_1 - y_3 \\ Q_1 &= x_3 - x_2 ; Q_2 = x_1 - x_3 ; Q_3 = x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Tem-se que

$$C_{ij}^{(e)} = \frac{1}{4A} [P_i P_j + Q_i Q_j] \text{ e } A = \frac{1}{2} [P_2 Q_3 - P_3 Q_2]. \quad (2.27)$$

Por fim, tem-se que $P_1 + P_2 + P_3 = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$ e $\sum_{i=1}^3 C_{ij}^{(e)} = \sum_{j=1}^3 C_{ij}^{(e)} = 0$. Essas condições podem ser usadas para conferir os resultados obtidos pelo método.

2.3.3 Conexão dos Elementos Finitos

Depois de analisar um elemento típico, na Seção 2.3.2, o próximo passo é conectar todos eles. Nesse caso, A energia associada à conexão de todos os elementos na malha é (SHADIKU, 2004)

$$W = \sum_{e=1}^N W_e = \frac{\varepsilon}{2} [V]^T [C][V]. \quad (2.28)$$

Sendo que

$$[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \text{ e } [C] = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

em que n é o número de nós, N é o número de elementos e $[C]$ é denominada de “matriz de rigidez global”. Agora, para obter $[C]$, é necessário partir de $[C^{(e)}]$. Para isso, considere o exemplo da Figura 2.5. Essa figura mostra uma malha composta por três elementos finitos triangulares, em que a matriz de rigidez global descrita na Equação (2.29) é construída aplicando as convenções para tratamento do elemento finito, como visto na Seção 2.3.2 (SHADIKU, 2004).

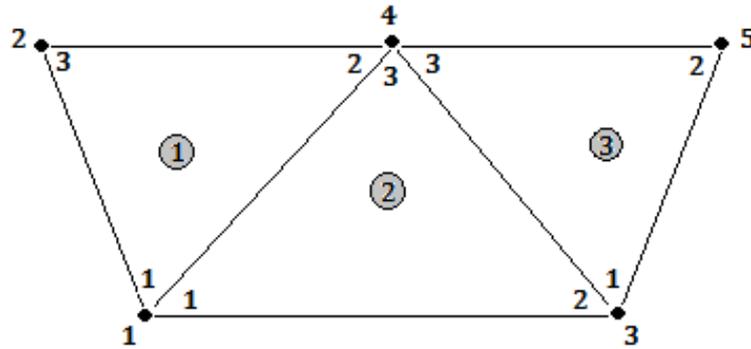


Figura 2.5: Malha composta por três elementos finitos (SHADIKU, M. N. O. 2004).

Sendo assim, tem-se a matriz de rigidez global da geometria apresentada na Figura 2.5 é (SHADIKU, 2004)

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{51} & \cdots & C_{55} \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

em que a matriz 5x5 caracteriza a quantidade de cinco nós, como observado na Figura 2.5. Sendo o potencial contínuo nos contornos entre os elementos finitos, a obtenção do elemento C_{ij} é feita por cada elemento que contém os nós de índices i e j . Dessa forma, analisando a Figura 2.5, tem-se que (SHADIKU, 2004)

$$C_{11} = C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)}; C_{22} = C_{33}^{(1)}; C_{44} = C_{22}^{(1)} + C_{33}^{(2)} + C_{33}^{(3)}; C_{14} = C_{12}^{(1)} + C_{13}^{(2)}, \quad (2.31)$$

em que, para os nós que não estão acoplados, os elementos C_{ij} são nulos, como exemplo $C_{23} = C_{32} = 0$. Por fim, além do que foi tratado sobre a matriz de rigidez global, é importante destacar algumas propriedades (SHADIKU, 2004):

- i) A matriz é simétrica, ou seja, $C_{ij} = C_{ji}$;
- ii) Para um grande número de elementos $[C]$, a matriz fica esparsa e de banda, ou seja, muito elemento da matriz são nulos, e os que não são se alocam de forma diagonal;
- iii) A matriz é singular, ou seja, possui determinante igual zero que implica na matriz não possuir inversa.

2.3.4 Solução das Equações Resultantes

Para obter a solução das equações resultantes do problema da Figura 2.1, é necessário validar a Equação de Laplace, onde, para isso, a energia total no domínio deve ser mínima. Portanto, é diferenciada em primeira ordem a energia (W) em relação ao potencial e , em seguida, igualada zero. Sendo assim, obtém-se que (SHADIKU, 2004)

$$\frac{\partial W}{\partial V_k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.32)$$

Agora, retornando ao exemplo da Figura 2.5 e usando as Equações (2.28) e (2.32), tem-se que (SHADIKU, 2004)

$$\sum_{i=1}^n V_i C_{ik} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.33)$$

Usando a expressão da Equação (2.33) para todos os nós, em que $k = 1, 2, 3, \dots, n$, obtém-se um conjunto de equações simultâneas, que, através da resolução delas, é permitido encontrar a solução de $[V]$. Por fim, para obter as soluções resultantes do potencial, são descritos dois métodos para tal finalidade. Esses métodos são conhecidos como Método Iterativo e Método da Matriz de Banda, possuem as seguintes descrições:

i) Método Iterativo:

No MEF, existem dois tipos de nós: fixos e livres, onde o nó fixo é um ponto cujo potencial é preestabelecido, ou seja, o potencial já é conhecido inicialmente e o nó livre é encontrado pelo Método Iterativo. Sendo assim, para aplicar esse método, é feito uso da equação (2.33) para obter o potencial num nó livre por meio de (SHADIKU, 2004)

$$V_k = -\frac{1}{C_{kk}} \sum_{i=1, i \neq k}^n V_i C_{ik}. \quad (2.34)$$

Note que, pela Equação (2.34), os nós que não estão ligados diretamente com o nó k não contribuem para V_k , pois, nesse caso, $c_{ik} = 0$.

Como dito anteriormente, o Método Iterativo começa estabelecendo que os potenciais dos nós livres são iguais a zero ou iguais ao valor médio dos potenciais.

Sendo assim, usando esses valores iniciais junto com os valores dos nós fixos, os potenciais podem ser calculados por meio da Equação (2.34). Esse processo é repetido varias vezes, considerando, como valor de partida, os potenciais da interação anterior, até que a diferença de valores entre duas interações subsequentes torne-se desprezível (SHADIKU, 2004).

ii) Método da Matriz de Banda

Agora, se todos os nós livres forem numerados inicialmente e, em seguida, os fixos, a Equação (2.28) pode ser escrita como sendo (SHADIKU, 2004):

$$W = \frac{\varepsilon}{2} [V_p \quad V_u] \begin{bmatrix} C_{pp} & C_{pu} \\ C_{up} & C_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_p \\ V_u \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

em que os subscritos p e u são referentes aos nós com potenciais livres e fixos, respectivamente. Como V_u é constante, potencial fixo, a energia da Equação (2.35) é diferenciada apenas em relação a V_p e, em seguida, é aplicada a condição da Equação (2.32). Sendo assim, obtém-se que (SHADIKU, 2004)

$$V_p C_{pp} + V_u C_{pu} = 0 \quad (2.36)$$

ou, na forma matricial,

$$[C_{pp}] [V_p] = -[C_{pu}] [V_u]. \quad (2.37)$$

Por fim, é importante destacar que é comumente usado em software que utilizam o MEF o Método da Matriz de Banda, assim como é usado neste TCC. Isso porque tal método não necessita de varias interações, diferente do método iterativo, assim poupando a memória de processamento do computador.

Capítulo 3

Modelagem Computacional do Problema de Eletrostática

Neste capítulo, é desenvolvida a modelagem computacional do modelo físico proposto na Seção 2.1. Para isso, são apresentados os *softwares* dedicados ao uso do MEF e, em seguida, a construção da modelagem computacional nos *softwares*. Como dito anteriormente, no Capítulo 1, os *softwares* citados neste capítulo são o FEMM, o COMSOL *Multiphysics* 5.2 e o Gnu *Octave* 4.0.0. Para descrever o problema de eletrostática usando cada *software*, este capítulo é dividido da seguinte forma: na Seção 3.1, é abordado o motivo dos *softwares* citados usarem o MEF, além de como é feita a modelagem computacional nos *softwares*, que usam o MEF, de modo geral, e, nas seções subsequentes, são mostradas as modelagens no FEMM 4.2, Seção 3.2, no COMSOL 5.2a, Seção 3.3, e no Gnu *Octave* 4.2.0, Seção 3.4.

3.1 MEF na Modelagem Computacional

A maioria dos *softwares* desenvolvidos para modelagem de problemas físicos usa o MEF, porque ele é mais adaptado para domínios complexos, ou seja, é mais simples tratar modelos físicos complexos por esse método, além de possuir uma condição de generalidade superior aos demais métodos numéricos, uma vez que a generalização do algoritmo de programação por MEF é válida para uma vasta quantidade de modelos físicos. Assim, necessitando apenas alterar o domínio e suas respectivas condições de contorno. Por fim, por ter seus próprios pressupostos, vistos na Seção 2.3, esse método é mais difícil de ser programado em comparação com outros métodos (Shadiku, 2004).

Para este TCC, são escolhidos dois *softwares* dedicados à modelagem de fenômenos físicos em geometria complexa, cujos códigos fontes são fechados. Esses *softwares* possibilitam: i) escolher a área da física trabalhada; ii) introduzir a geometria (a critério do programador); iii) caracterizar os materiais envolvidos na modelagem; iv) manipular as condições iniciais e de contorno da geometria proposta; v) escolher as características da malha traçada na geometria proposta e, por fim, vi) gerar os resultados por meio de uma interface gráfica. Os *softwares* dedicados são o COMSOL, que é não livre, e o FEMM, que é livre. Além dos *softwares* dedicados, é proposta, neste TCC, uma modelagem computacional usando MEF por meio da linguagem *Matrix Laboratory* (MATLAB), que é usada em *softwares* matemáticos, como o Gnu *Octave* 4.2.0 (licença livre) e o próprio MATLAB, cuja licença não é livre. O *software* matemático usado neste TCC é o Gnu *Octave* 4.2.0.

Por fim, a modelagem computacional do modelo físico foi feita em 2D, onde a projeção da esfera é centrada na origem do sistema de coordenadas cartesiano, como dito anteriormente. A seguir, é apresentada a construção do modelo físico nos *softwares* citados.

3.2 Finite Element Method Magnetics (FEMM)

O FEMM é um *software* de modelagem computacional em 2D que possui quatro módulos, onde esses módulos trabalham com quatro área da física, sendo: magnetismo, eletrostática, fluxo de calor e fluxo de corrente. Além disso, os módulos funcionam separadamente. A modelagem computacional do problema de eletrostática ilustrado na Figura 2.1 segue os seguintes passos nesse *software*:

i) Escolhendo o Módulo de Trabalho:

Após a escolha do módulo, o FEMM abre a interface onde a geometria do modelo físico é construída e o fenômeno físico é analisado, como ilustrada na Figura 3.1.

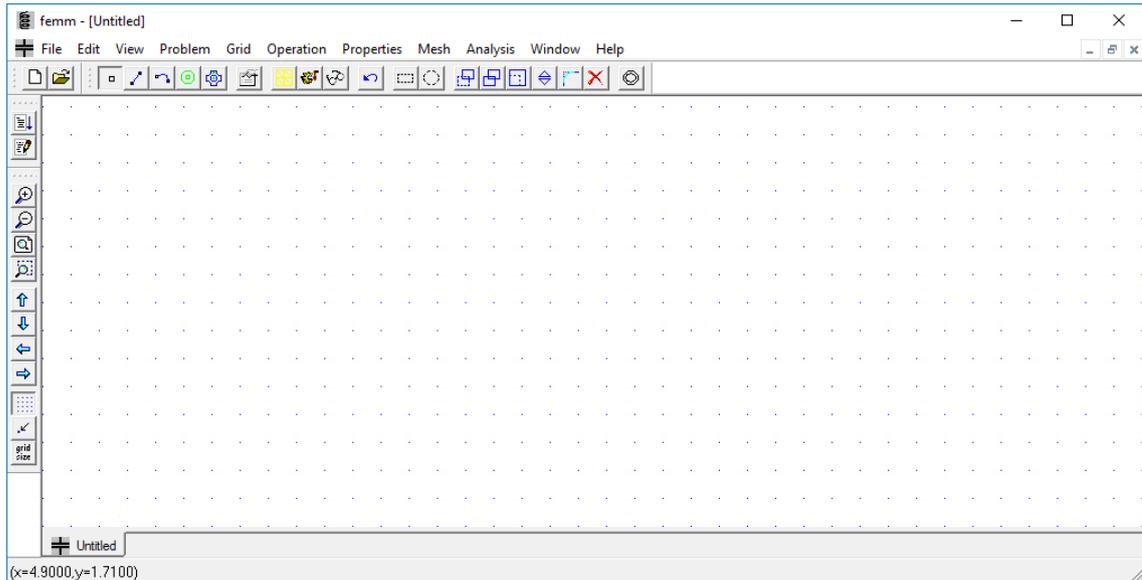


Figura 3.1: Interface do FEMM para o módulo de eletrostática.

ii) Desenhando a Geometria do Modelo Físico:

A geometria do FEMM é traçada através de nós (), seguimentos de reta () e seguimentos de arco (), onde, para traçar um seguimento, é necessário dois nós para serem interligado. Assim, para criar o seguimento, basta escolher o tipo de seguimento e selecionar os nós, que serão interligá-los.

Para modelar o problema aqui tratado, é preciso delimitar uma área no ambiente virtual do FEMM, como mostra a Figura 3.2, para ser o espaço livre. Em seguida, com a inserção de dois nós no interior do quadrado e dois seguimentos de arco, de 180° cada, pode-se criar uma circunferência que está centrada na origem do sistema cartesiano definido pelo próprio FEMM.

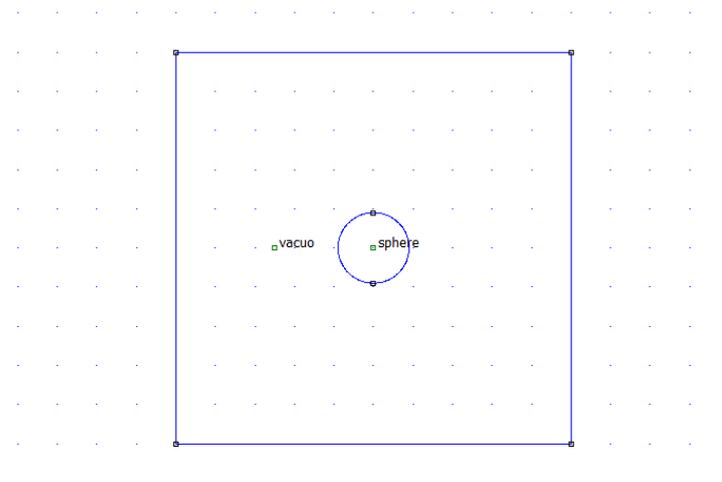


Figura 3.2: Geometria do problema de eletrostática no FEMM.

iii) Caracterizando as Regiões Definidas no FEMM:

Depois de delimitar as regiões de interesse, é preciso caracterizá-las. Para isso, como exemplo, FEMM apresenta a permissividade relativa e da densidade de carga, como ilustrada na Figura 3.3. Note que os valores apresentados na Figura 3.3 são para o espaço livre. O mesmo procedimento é feito para a esfera.

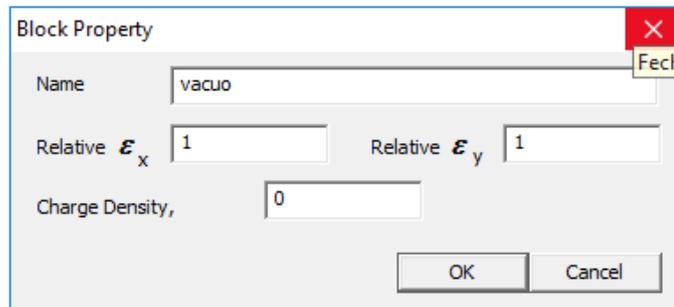


Figura 3.3: Características físicas do espaço livre onde é inserida a esfera.

iv) Gerando as Condições Iniciais e de Contorno:

A inclusão do campo elétrico uniforme é feita, atribuindo a dois lados paralelos do domínio referentes ao espaço livre potenciais elétricos iguais em módulo, mas opostos em sinal. Logo, essa situação é semelhante ao que acontece num capacitor carregado. Além disso, também é preciso selecionar toda a superfície da circunferência e atribuir a essa região um potencial nulo, como já foi discutido no Capítulo 2.

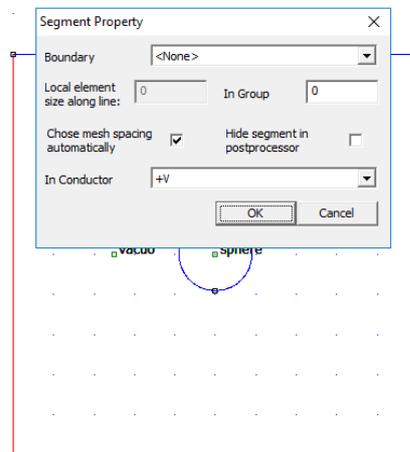


Figura 3.4: Aplicação da condição de contorno numa na fronteira em destaque vermelho.

v) Gerando a Malha:

Para traçar a malha, basta acionar o ícone  (*Run mesh generator*). O resultado desse comando é observado na Figura 3.5, que mostra uma imagem ampliada da malha triangular traçada nos domínios. É importante destacar que o número de elementos finitos, aproximadamente 24 mil, é fixa para as demais simulações apresentadas posteriormente.



Figura 3.5: Domínios com malha triangular no *software* FEMM.

Observando a figura a cima notasse uma densidade maior de elementos na região ao redor da circunferência, isso porque o programa percebe que ali é uma região crítica de fronteira que necessita de mais elementos para dar bom resultado.

vi) Gerando os Resultados:

A geração dos resultados, é feita no comando  (*Run analysis*), e, em seguida, no comando  (*View results*). Por fim, feito isso, é gerada uma nova interface, onde é possível observar gráficos, *plots* de superfície entre outras análises, como ilustrado na Figura 3.6. Essa figura mostra o *plot* de superfície do potencial elétrico para o problema analisado neste TCC.

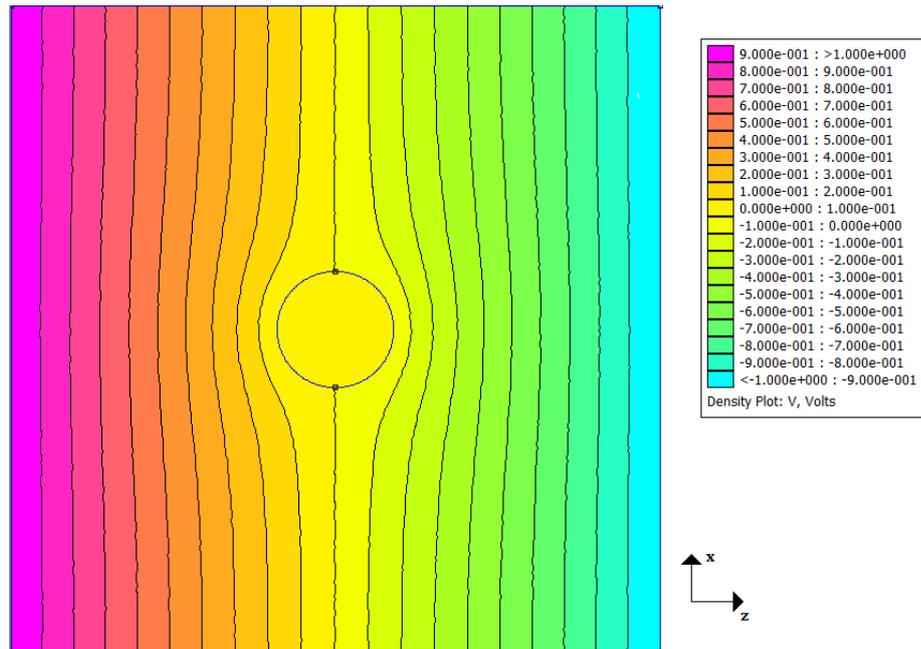


Figura 3.6: *Plot* de superfície do potencial no FEMM para o problema da esfera no campo elétrico uniforme.

3.3 COMSOL Multiphysics

Diferentemente do FEMM, o COMSOL é *software* multifísicas, ou seja, ele possibilita interagir várias áreas da física numa simulação. Além disso, no COMSOL, é possível trabalhar com geometria em 3D. Por fim, pode-se dizer que esse *software* é mais equipado do que o FEMM, ou seja, possui mais recursos computacionais em qualquer quesito. No entanto, a modelagem computacional desenvolvida no COMSOL obedece aos passos realizados no FEMM.

i) Escolhendo o Módulo de Trabalho:

Ao abrir o programa, o primeiro passo é clicar na opção “*Model Wizard*” e definir a dimensão do espaço 2D, como ilustrada na Figura 3.7. Em seguida, é escolhida a “física” do seu problema.

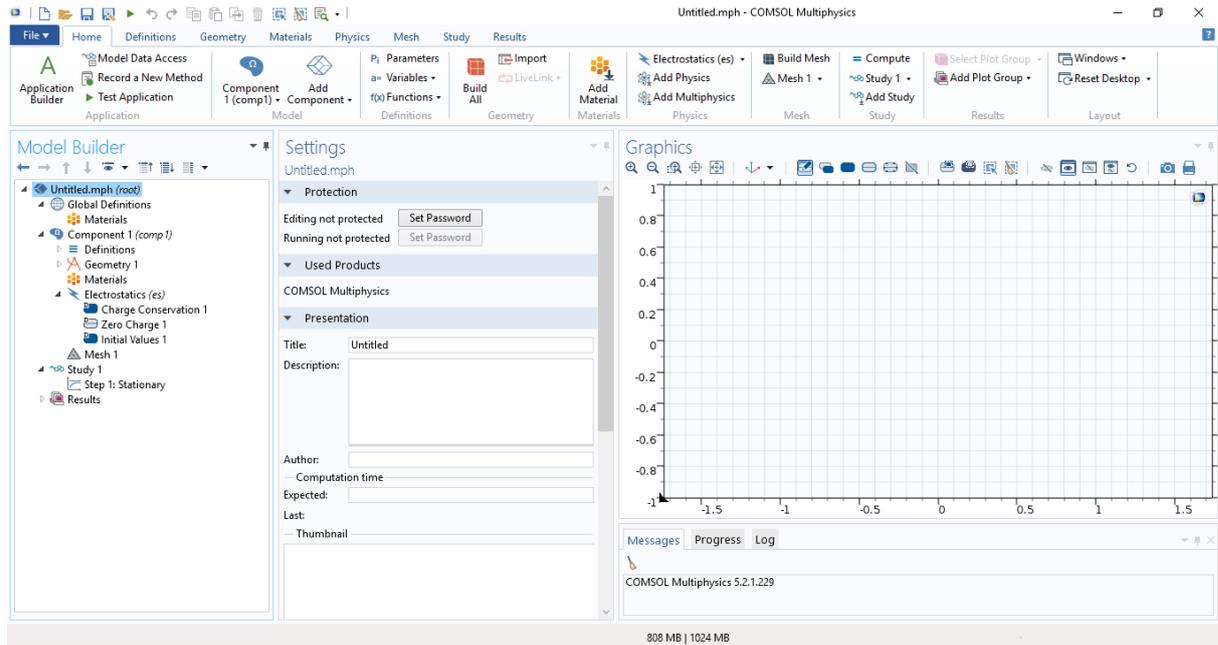


Figura 3.7: Interface do COMSOL para o módulo de eletrostática.

ii) Desenhando a Geometria do Problema:

A geometria no COMSOL é feita usando as próprias formas geométricas, ou seja, pode-se delimitar o espaço na opção “*Geometry*”, como mostrada na Figura 3.8, onde são definidos o espaço livre (região quadrada) e a esfera (região circular).

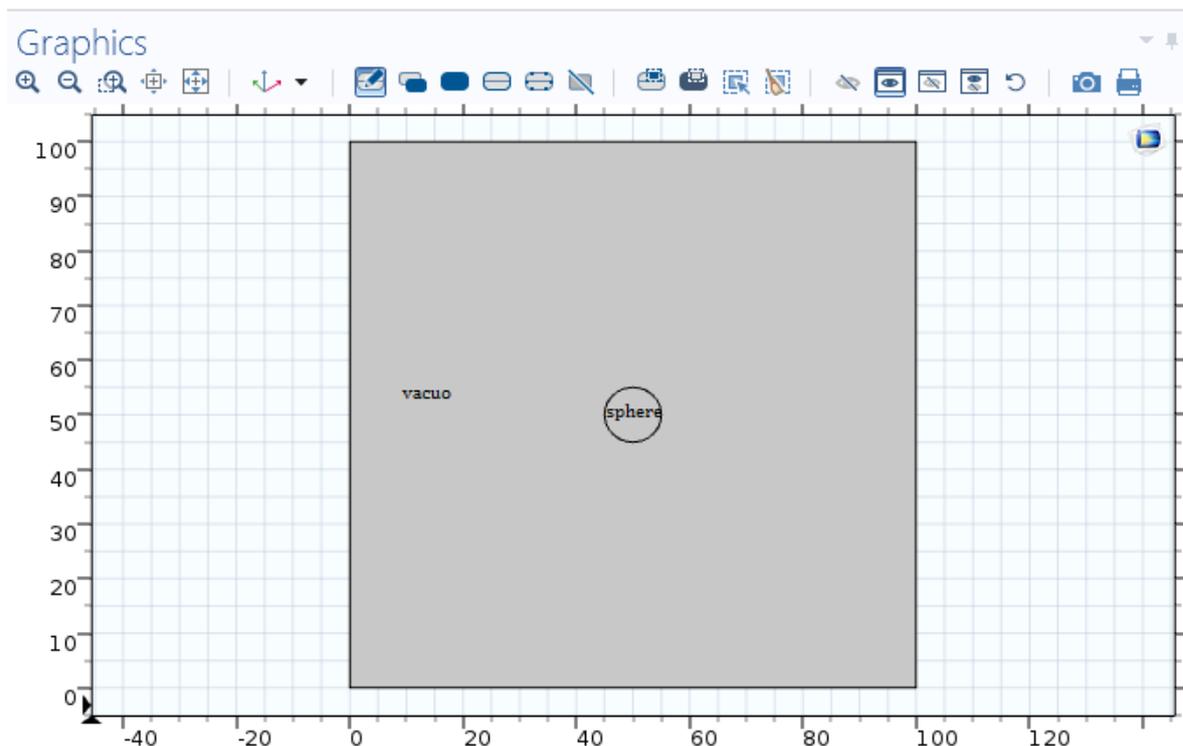


Figura 3.8: Geometria do modelo físico no COMSOL.

iii) Caracterizando as Regiões Definidas no COMSOL:

No COMSOL, a caracterização das regiões é realizada na aba “*Materials*”, onde a seleção das regiões é feita selecionando cada uma separadamente, como ilustra a Figura 3.9. Essa seleção é feita por meio do *link* “*Geometric Entity Selection*”.

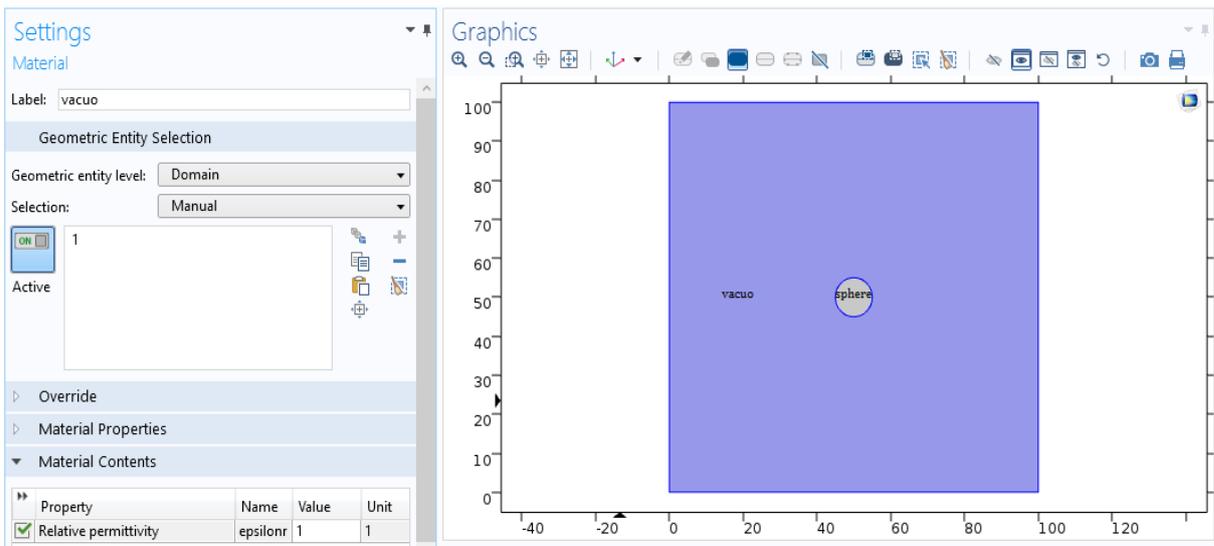


Figura 3.9: Caracterização de uma região no COMSOL.

iv) Gerando as Condições de Iniciais e de Contorno:

Usando o mesmo procedimento usado no FEMM, onde é atribuído a dois lados paralelos do quadrado potenciais distintos para criar o campo elétrico uniforme, isso pode ser realizado no COMSOL através dos comandos “*Physics*”>“*Boundaries*”>“*Electric Potential*”. Em seguida, na janela “*settings*”, são selecionados os lados do quadrado para ser atribuído os potenciais e seus respectivos valores.

Por fim, além das condições nas fronteiras do quadrado, é preciso uma condição para aterrar o círculo apresentado na Figura 3.10. Essa condição é criada pelos comandos “*Physics*”>“*Boundaries*”>“*Ground*”.

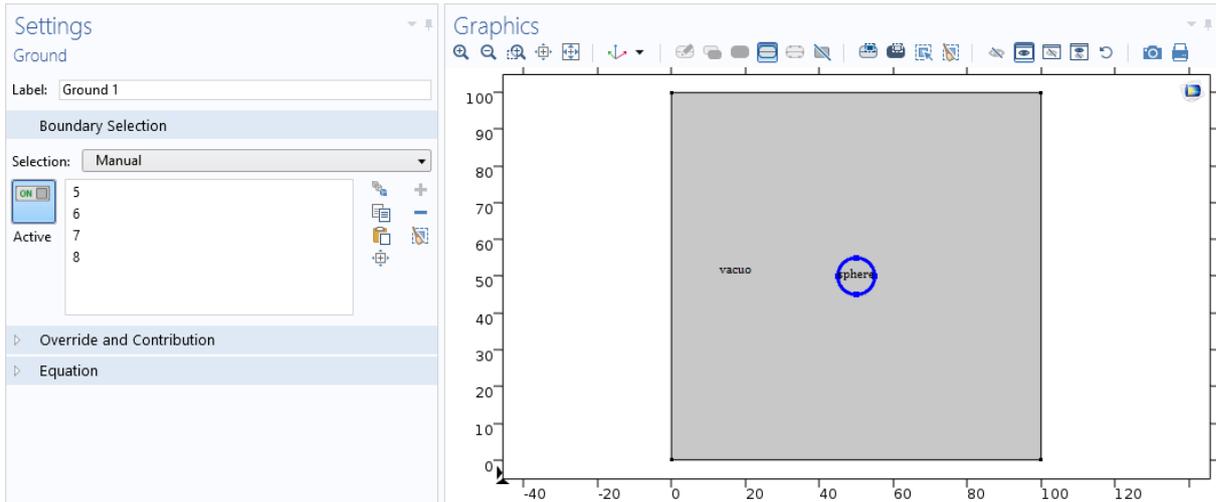


Figura 3.10: Condição de contorno da esfera condutora.

v) Gerando a Malha:

Diferentemente do FEMM, o COMSOL permite que a malha seja personalizada, ou seja, o usuário pode escolher a malha que seja mais eficiente para seu problema específico. Para o problema proposto neste TCC, basta traçar uma malha simples triangular selecionando “*Mesh*”>“*Free Triangular*” e, em seguida, na janela “*Settings*”, acionar o comando “*Build All*”. Assim, a malha é traçada em todo o domínio. A Figura 3.11 apresenta uma imagem ampliada da malha traçada pelo COMSOL nos domínios que envolvem o modelo físico proposto na Figura 2.1.

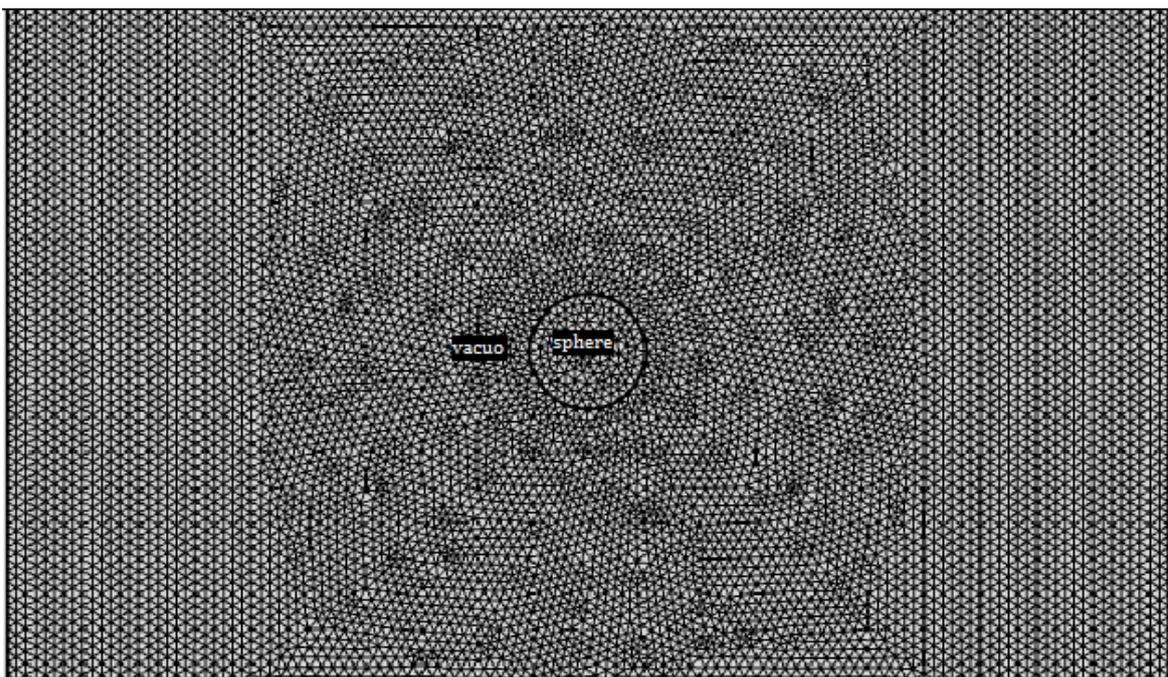


Figura 3.11: Domínios com malha triangular no COMSOL

O COMSOL, como o FEMM, priorizou a região ao redor da circunferência, isso pode ser visto olhando a Figura 3.11 onde há uma maior densidade de elementos circundando a circunferência.

vi) Gerando os Resultados:

Por fim, para geração dos resultados no COMSOL, basta informar ao programa a execução dos cálculos nos comandos “*Study*”>“*Compute*”. Assim, na aba “*Results*” é possível obter os resultados desejados. A Figura 3.12 apresenta um desses resultados, que trata do *plot* superficial do potencial elétrico, como também foi apresentado no FEMM, na Figura 3.6.

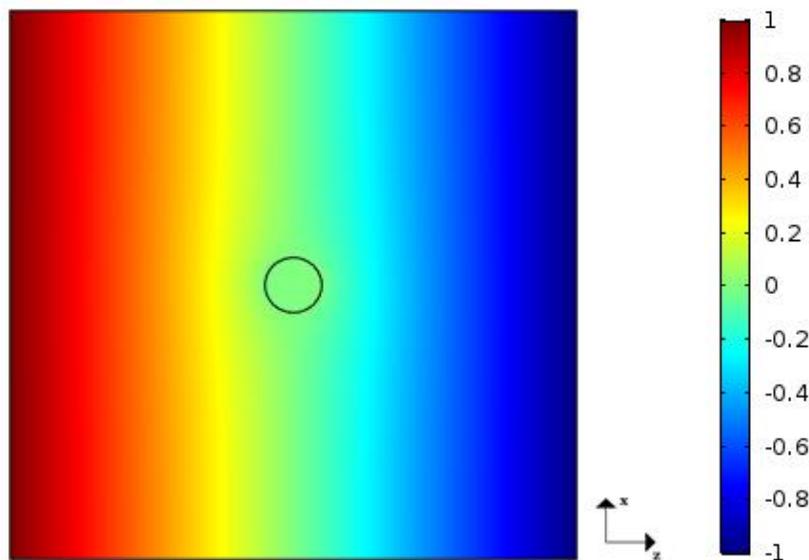


Figura 3.12: *Plot* de superfície do potencial elétrico no COMSOL para o problema da esfera no campo elétrico uniforme.

3.4 Gnu Octave MATrix LABoratory (MATLAB)

O *software* Gnu Octave 4.2.0, como uma de suas funções matemáticas, faz uso do MATLAB, que é uma linguagem usada para manusear métodos numéricos. Essa linguagem tem, como elemento de dados básico, matrizes, que são ferramentas muito usadas em cálculos numéricos (GILAT e SUBRAMANIAM, 2008). O algoritmo desenvolvido para gerar a malha ilustrada na Figura 3.13 é descrita e comentada no Apêndice C.

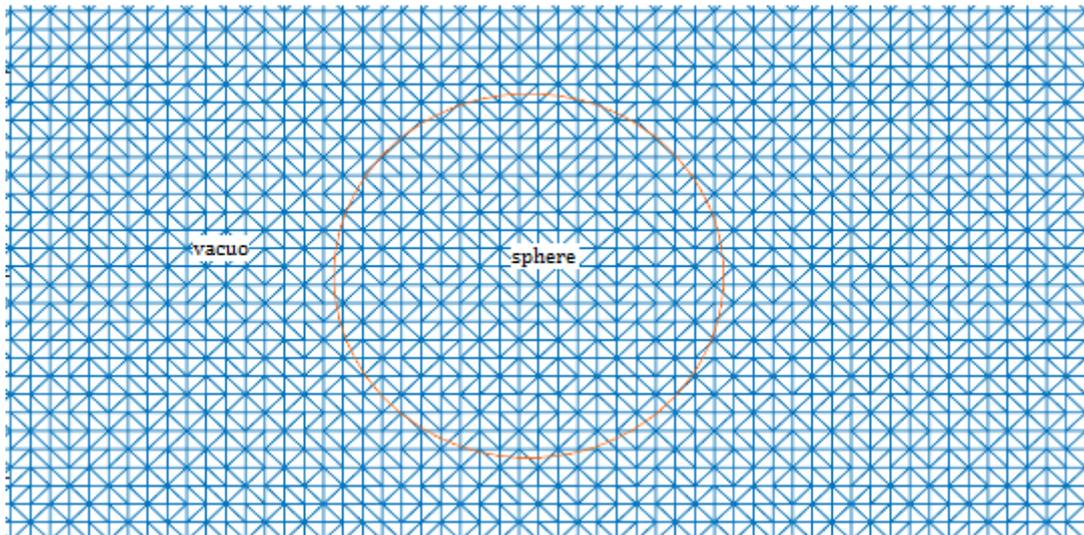


Figura 3.13: Domínios com malha triangular programada no *Octave*.

Ainda na Figura 3.13, note que, apesar de manter a quantidade de elementos finitos fixada, a malha descrita na Figura 3.13 está alinhada e com sua concentração espacial uniforme, o que difere das malhas observadas nas Figuras 3.5 e 3.11.

Por fim, a solução do problema de eletrostática proposto usando o *Octave* também pode ser verificada de varias formas, assim como nos *softwares* comentados neste TCC. O código da programação em linguagem MATLAB para geração dos resultados é também descrita e comentada no Apêndice 1. Como exemplo, a Figura 3.14 mostra o *plot* superficial do potencial elétrico, como realizado nas Seções 3.2 e 3.3.

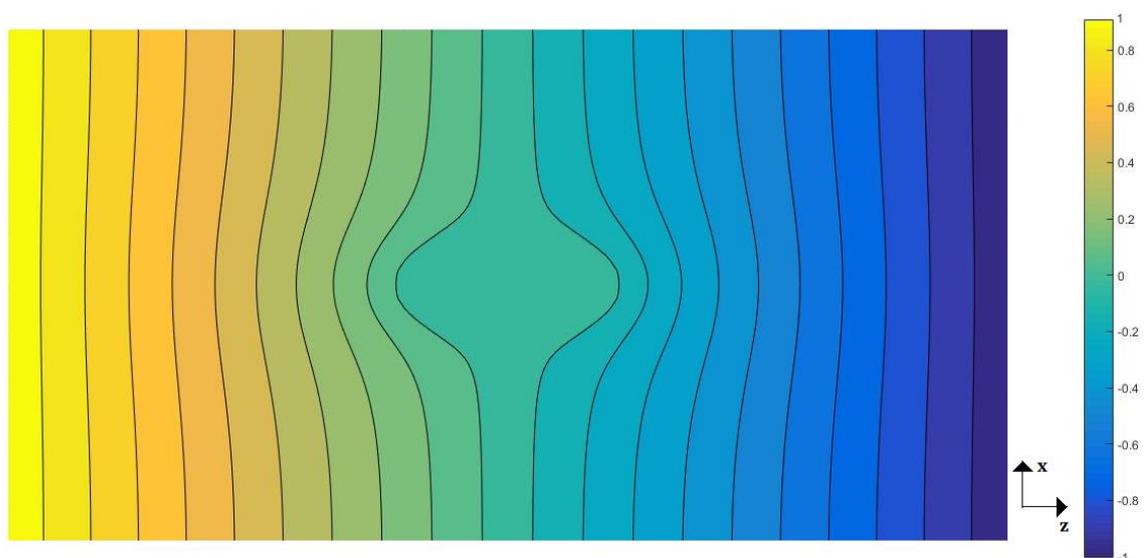


Figura 3.14: *Plot* de superfície do potencial elétrico construído no *Octave* para o problema da esfera condutora inserida num campo elétrico uniforme.

Apesar de possuírem malhas diferentes, é possível ver a concordância entre os programas pelos plots de superfície, que trazem resultados semelhantes. No próximo capítulo será feita uma análise mais aprofundada dos dados obtidos com os programas, observando também como as características da malha interfere nos resultados.

Capítulo 4

Análise dos Resultados da Modelagem Computacional

Neste capítulo, são abordados os resultados gerados pelas modelagens computacionais usando os *softwares* discutidos no Capítulo 3. Sendo assim, o tratamento dos resultados obtidos pela modelagem computacional é organizado da seguinte forma: na Seção 4.1, têm-se as especificações usadas para modelar o problema de eletrostática; na Seção 4.2, são apresentados os resultados do potencial elétrico; e, por fim, na Seção 4.3, são mostrados os resultados do campo elétrico.

4.1 Especificações da Modelagem Computacional

Para verificar a eficiência dos dois *softwares* dedicados ao MEF e do programa desenvolvido neste TCC, são comparados os resultados obtidos com as soluções analíticas (teóricas) do potencial e campo elétrico, em que são descritas pelas Equações (2.13) e (2.15). Para obter os resultados analíticos, é usado o *software Octave 4.0.4*. Recapitulando os comentários do Capítulo 3, têm-se que os resultados obtidos possuem as seguintes especificações:

- O comprimento do quadrado que delimita o espaço livre nas simulações é 100 mm ;
- O potencial elétrico é 1 V , em modulo;
- O raio da esfera R varia de 3 mm a 9 mm , em passos de 2 mm ; e
- A quantidade de elementos na malha é de 2400 elementos finitos triangulares.

Os resultados gerados do potencial e do campo elétrico variam com o ângulo polar θ em 0° e 180° , como ilustrada na Figura 2.1. Depois dessas informações, tem-se, na Seção 4.2, os resultados obtidos do potencial elétrico.

4.2 Resultados do Potencial Elétrico

Como dito no Capítulo 3, há outras formas de geração de resultados usando os *softwares* citados. Sendo assim, este capítulo apresenta outra forma gráfica de destacar os resultados da simulação. Especificamente, a Figura 4.1 apresenta os resultados do potencial elétrico para diferentes raios da esfera condutora usando diferentes softwares. Para tratar os resultados gerados pelos *softwares* citados, é usado o programa *Scidavis*, cuja licença é livre.

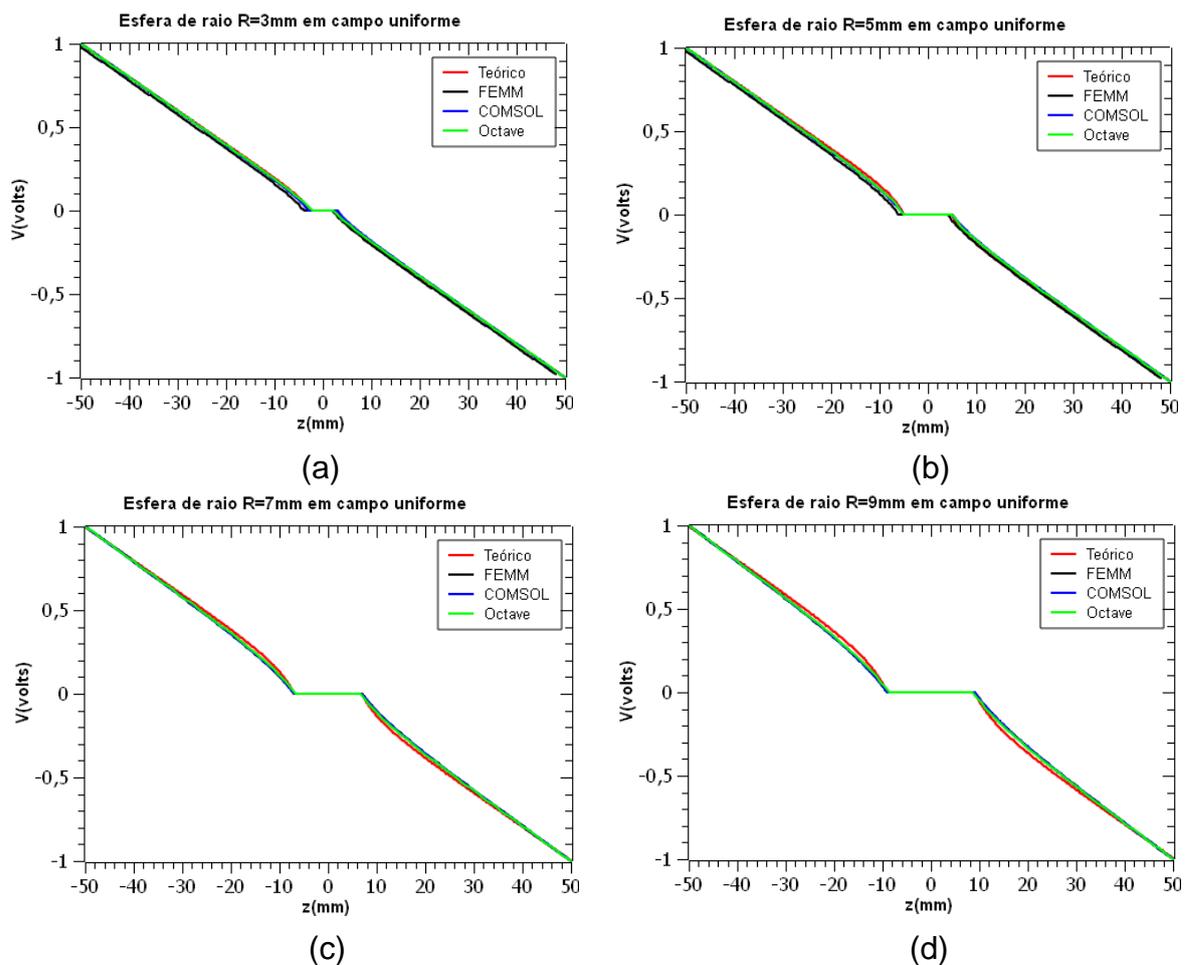


Figura 4.1: Resultados do potencial elétrico em função da coordenada z para o raio da esfera igual a (a) 3 mm, (b) 5 mm, (c) 7 mm e (d) 9 mm.

Ainda na Figura 4.1, é possível verificar a eficiência dos *softwares* usados analisando o comportamento do potencial elétrico ao longo do eixo z por meio dos seguintes pontos específicos: i) localização da esfera pelo programa; ii) potencial próximo a esfera; e iii) potencial longe da esfera.

i) Localização da Esfera pelos Softwares:

A Figura 4.2 mostra a posição da esfera em termos do seu raio, considerando que a esfera está centrada na origem. Ou seja, é um teste para verificar se os *softwares* geram os resultados conforme a geometria definida no próprio programa. Sendo assim, essa análise é feita para a parte negativa de z , como ilustrada na Figura 4.2a, e a parte positiva de z , como ilustrada na Figura 4.2b. Essa análise é importante, já que pode afetar nos resultados do potencial elétrico próximo à esfera.

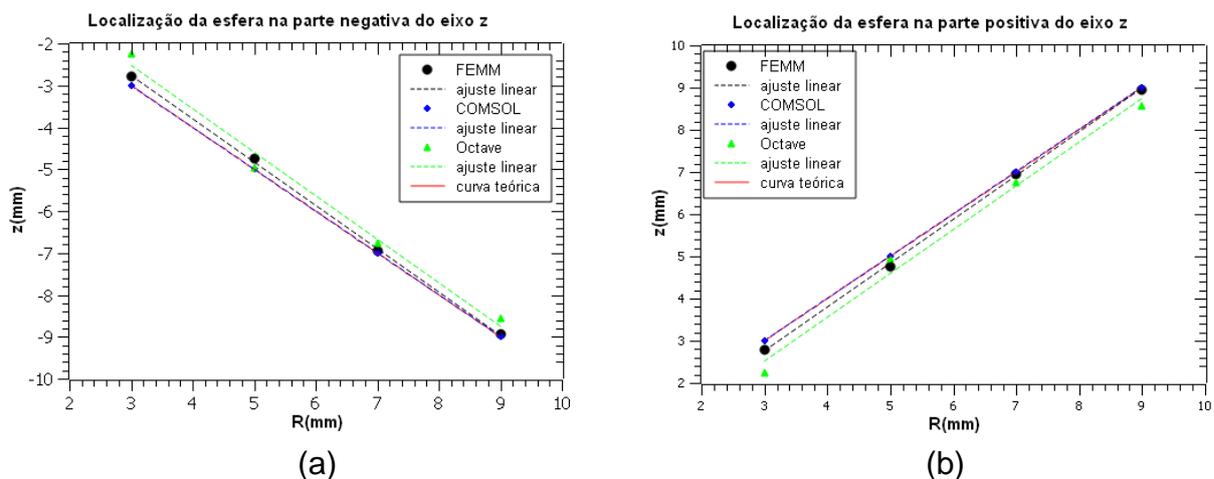


Figura 4.2: Resultados da posição da esfera em termos do seu raio obtidos por meio de uma medida indireta do potencial elétrica, em que (a) mostra a parte negativa e (b) a parte positiva ao longo do eixo z .

Ainda na Figura 4.2, com o objetivo de analisar a posição da esfera com seu raio, é feito um ajuste linear para os dados obtidos. No ajuste linear, tem-se que os parâmetros A e B do ajuste correspondem ao coeficiente angular e o coeficiente linear, respectivamente. Sendo assim, é feita a comparação desses parâmetros para cada ajuste linear com o valor teórico (analítico), por meio do erro relativo. Esses resultados são observados nas Tabelas 4.1 e 4.2.

Tabela 4.1: Valores correspondentes aos coeficientes das inclinações de reta da Figura 4.2a.

	A	B	Erro para A
Teoria	-1,0000	0,0000	-
FEMM	-1,0338	0,3433	3,38%
COMSOL	-1,0000	0,0000	0%
Octave	-1,0361	0,5862	3,61%

Tabela 4.2: valores correspondentes aos coeficientes das inclinações de reta da Figura 4.2b.

	A	B	Erro para A
Teoria	1,0000	0,0000	-
FEMM	1,0338	-0,3433	3,38%
COMSOL	1,0000	0,0000	0%
Octave	1,0361	-0,5862	3,61%

Analisando as Tabelas 4.1 e 4.2, tem-se que o parâmetro A está atrelado ao comportamento dos dados, ou seja, para todos os casos analisados, o comportamento dados são descritos por uma função linear, e o parâmetro B indica um deslocamento da esfera, em relação ao valor teórico. Como observado nas tabelas, nota-se que o COMSOL possui melhor desempenho nesse teste. Com relação ao programa desenvolvido neste TCC, é obtido um resultado próximo ao FEMM, mas distante do COMSOL. Em defesa desse programa, pode ser argumentado que, diferente dos outros *softwares*, a malha na região da esfera não é mais densa, ou seja, a malha usada é uniforme, o que resulta num menor numero de elementos nessa região em relação aos outros *softwares*, como observado nos *plots* da malha no Capítulo 3. Sendo assim, o programa tem maior dificuldade em localizar a esfera, quando analisado o potencial elétrico, mas o resultado obtido neste TCC é próximo do FEMM, cuja malha não é uniforme.

ii) Potencial Elétrico Próximo à Esfera:

A Figura 4.3 apresenta os resultados do potencial elétrico em função do raio da esfera a uma distância de 5 mm em relação a própria esfera. Ainda na Figura 4.3,

são analisadas as regiões no lado negativo, Figura 4.2a, e no lado positivo, Figura 4.2b, à distância z citada. Note que ajuste próximo à esfera não é linear, como previsto também no resultado teórico, e o novo ajuste é um polinômio de segunda ordem.

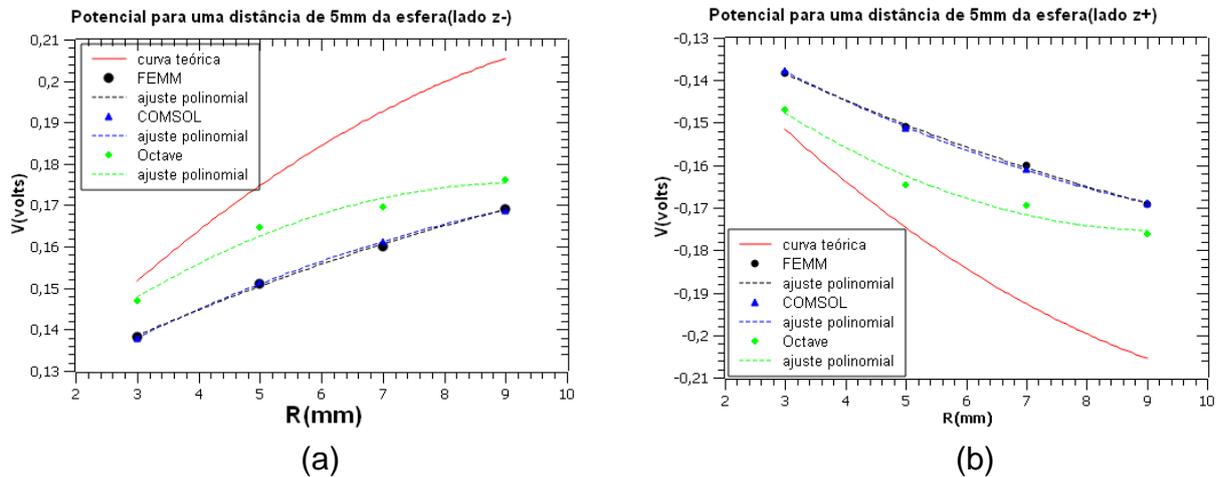


Figura 4.3: Potenciais elétricos no eixo z igual a 5 mm para o (a) lado negativo de z e para o (b) lado positivo de z .

O ajuste polinomial para os dados apresentados na Figura 4.3 é descrita pela função

$$V(R) = a_2 R^2 + a_1 R + a_0, \quad (4.1)$$

em que a função polinomial obedece a solução analítica da Equação (2.7) para $r = R + 5$. Sendo assim, os erros dos coeficientes da Equação 4.1 em comparação com o resultado teórico são descritos nas Tabelas 4.3 e 4.4.

Tabela 4.3: Erros relativos dos coeficientes do ajuste polinomial da Figura 4.3a.

	Erro para a_2	Erro para a_1	Erro para a_0
FEMM	64,70%	114,03%	8,32%
COMSOL	47,10%	44,74%	5,57%
Octave	8,95%	22,24%	7,19%

Tabela 4.4: Erros relativos dos coeficientes do ajuste polinomial da Figura 4.3b.

	Erro para a_2	Erro para a_1	Erro para a_0
FEMM	64,70%	114,03%	8,32%
COMSOL	47,10%	44,74%	5,57%
Octave	8,95%	22,24%	7,19%

Analisando os dados das Tabelas 4.3 e 4.4, tem-se que o parâmetro a_0 representa os valores para o raio da esfera tendendo a 3 mm . Nesse caso, pelo os valores erros relativos, diz-se que os resultados da simulação numérica aproximam da curva teórica. Já para outros dois parâmetros, a_1 e a_2 , pode-se dizer que estão ligados ao comportamental do potencial elétrico à medida que o raio da esfera aumenta. Fazendo um comparativo entre os *softwares* usados, observa-se que o *Octave* apresenta a melhor aproximação com a curva teórica. Sendo assim, é possível destacar também que valores numéricos gerados pelos programas começam próximos dos valores teóricos, mas se distanciam à medida que o raio R aumenta.

iii) Potencial Elétrico Longe da Esfera:

Para esse caso, é fixado o valor de 40 mm para ser avaliado o potencial elétrico longe da esfera. A escolha desse ponto é motivada pelo comportamento do campo elétrico gerado pela esfera, que está uniforme nessa distancia, como ilustrada na Figura 4.5. Sendo assim, os resultados para o potencial elétrico em função do raio da esfera para as regiões negativa e positiva ao longo do eixo z fixo são observados na Figura 4.4.

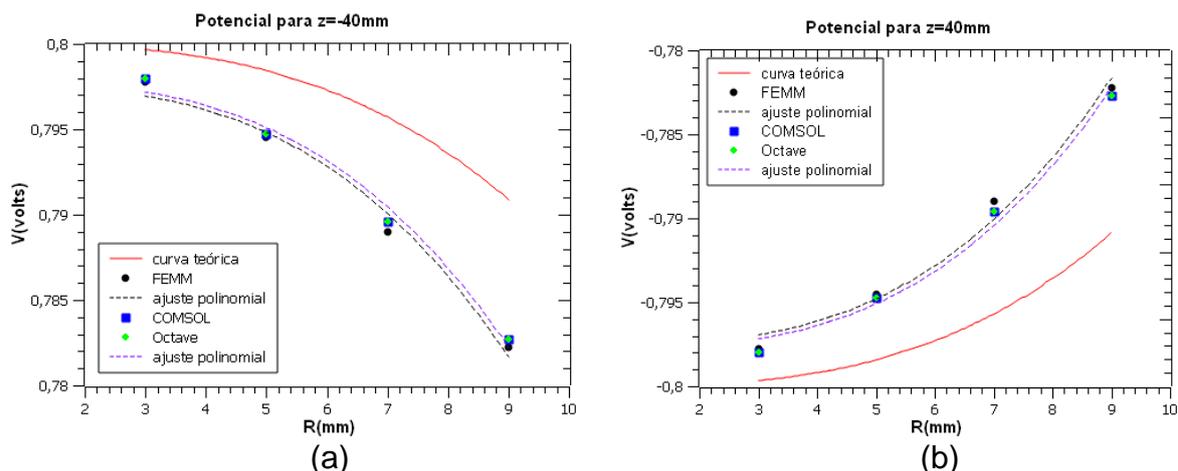


Figura 4.4: Potencial elétrico em função do raio da esfera para os pontos (a) -40 mm e (b) 40 mm ao longo do eixo z .

Note que, pela Figura 4.1, para o ponto fixado na Figura 4.4, observa-se, em primeira análise, que os resultados da simulação numérica convergem para o

mesmo valor do resultado analítico, definida pela Equação (2.7). Contudo, numa segunda análise, como ilustrada na Figura 4.4, observa-se uma convergência entre as simulações numéricas, por meio dos respectivos ajustes polinomiais, mas seus valores divergem do resultado teórico. No entanto, o comportamento das curvas está de acordo com o comportamento da Equação (2.7). Nesse caso, o ajuste não linear é um polinômio de terceiro grau, mas, quando se aplica o ajuste, tem-se que os termos de segunda e primeira ordem de R são desconsiderados. Assim, tem-se que a função polinomial de ajuste é descrita por

$$V(R) = a_3 R^3 + a_0. \quad (4.2)$$

As verificações dessa divergência entre os resultados numéricos e o resultado teórico são expostas nas Tabelas 4.5 e 4.6, por meio dos erros relativos dos respectivos coeficientes apresentados na Equação (4.2).

Tabela 4.5: Erro relativo para os coeficientes de ajuste da função polinomial da Figura 4.4a.

	Erro para a_3	Erro para a_0
FEMM	74,00%	0,31%
COMSOL	70,08%	0,25%
Octave	70,08%	0,25%

Tabela 4.6: Erro relativo para os coeficientes de ajuste da função polinomial da Figura 4.4b.

	Erro para a_3	Erro para a_0
FEMM	74,00%	0,31%
COMSOL	70,08%	0,25%
Octave	70,08%	0,25%

Ainda nas Tabelas 4.5 e 4.6, nota-se que o potencial elétrico obtido nos programas numéricos começa próximo do resultado teórico, quando observados os erros relativos do coeficiente a_0 . No entanto, a medida que o raio da esfera aumenta, o erro relativo do coeficiente a_3 aumenta, o que destaca a divergência entre as curvas numéricas com a teórica, em de acordo com as Figuras 4.4a e 4.4b. Por fim, comparando o desempenho entre os *softwares*, observa-se que o *Octave* juntamente com o *COMSOL* apresentam os melhores ajustes dos dados numéricos quando comparados com o *FEMM*.

4.3 Resultados do Campo Elétrico

Seguindo o mesmo procedimento feito na Seção 4.2 para avaliar os resultados do potencial elétrico para os *softwares* analisados neste TCC, tem-se que, dada a Equação (2.14), é possível obter o campo elétrico gerado pela esfera condutora num dado ponto do espaço livre. Sendo assim, obtém-se, na Figura 4.5, os resultados do campo elétrico para diferentes raios de esferas.

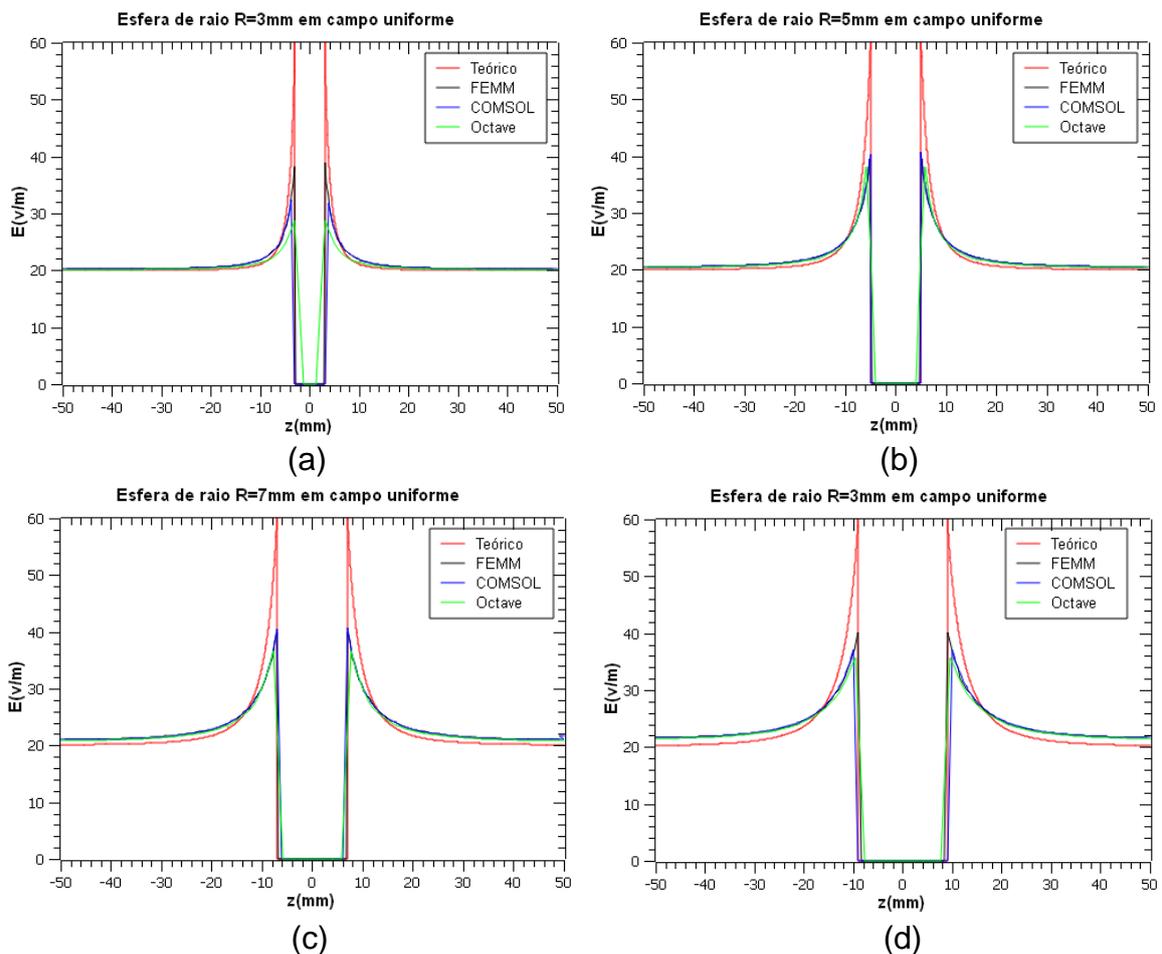


Figura 4.5: Resultados do campo elétrico em função da coordenada z , para o raio da esfera igual a (a) 3 mm, (b) 5 mm, (c) 7 mm e (d) 9 mm.

Ainda na Figura 4.5, note que, assim como observada na Figura 4.1, os resultados do campo elétrico usando diferentes *softwares* tendem a convergir, num primeiro momento, para o resultado teórico à medida que aumenta o ponto de observação em relação à esfera. Já para os resultados do campo elétrico próximo a esfera, é observada uma divergência dos resultados numéricos com o teórico.

Sendo assim, nesta seção, são analisadas, assim como feita na Seção 4.2, i) localização da esfera pelo programa, ii) campo elétrico próximo à esfera e iii) campo elétrico longe da esfera.

i) Localização da Esfera pelos Softwares:

A Figura 4.6 apresenta uma análise da posição da esfera ao longo do eixo z com o raio da própria esfera. Assim, como é feito na Figura 4.1, há evidências de que a medida indireta da posição da esfera não está centrada na origem do sistema cartesiano, como definida geometricamente no Capítulo 3. Com a propagação de erro do potencial elétrico para o campo elétrico, devido à dependência entre esses parâmetros físicos, conclui-se, a priori, que a posição da esfera também é deslocada na medição do campo elétrico.

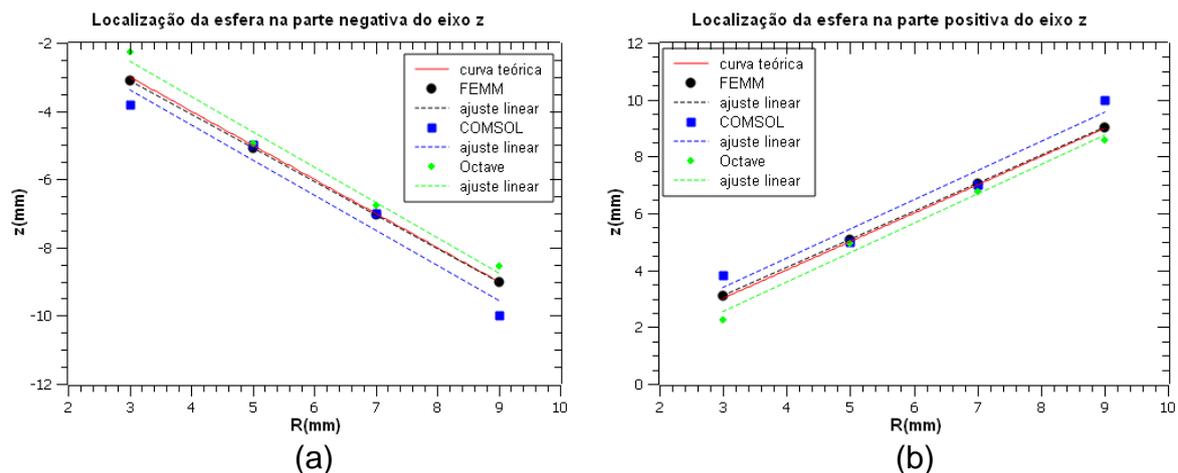


Figura 4.6: Resultados da posição da esfera em termos do seu raio obtidos por meio de uma medida indireta do campo elétrica, em que (a) mostra a parte negativa e (b) a parte positiva ao longo do eixo z .

A certificação desse deslocamento é observada no ajuste linear dos dados obtidos para cada *software*, como mostrados nas Tabelas 4.7 e 4.8. Observa-se que, diferente dos dados das Tabelas 4.1 e 4.2, o FEMM possui o melhor ajuste com o resultado teórico. Além disso, o resultado do *Octave* está mais afastado do resultado teórico, o que é justificado com o mesmo argumento usado na análise com o potencial elétrico. Por fim, observa-se ainda nas Tabelas 4.7 e 4.8 que há uma assimetria nos resultados do FEMM e do COMSOL, o que não é observado nas Tabelas 4.1 e 4.2.

Tabela 4.7: Valores correspondentes aos coeficientes das inclinações de reta da Figura 4.6a.

	A	B	Erro para A
Teoria	-1,0000	0,0000	-
FEMM	-0,9840	-0,1699	1,60%
COMSOL	-1,0283	-0,2821	2,83%
Octave	-1,0361	-0,5862	3,61%

Tabela 4.8: Valores correspondentes aos coeficientes das inclinações de reta da Figura 4.6b.

	A	B	Erro para A
Teoria	1,0000	0,0000	-
FEMM	0,9840	0,1610	1,60%
COMSOL	1,0234	0,3171	2,34%
Octave	1,0361	0,5862	3,61%

ii) Campo Elétrico Próximo à Esfera:

A Figura 4.7 mostra os resultados do campo elétrico em função do raio da esfera a uma distância de 5 mm em relação a própria esfera. Ainda na Figura 4.7, são analisadas as regiões no lado negativo, Figura 4.7a, e no lado positivo, Figura 4.7b, à distância z citada. Note que ajuste próximo à esfera não é linear, como previsto também no resultado teórico, e o novo ajuste é um polinômio de segunda ordem, assim como observado na Figura 4.3, para o potencial elétrico.

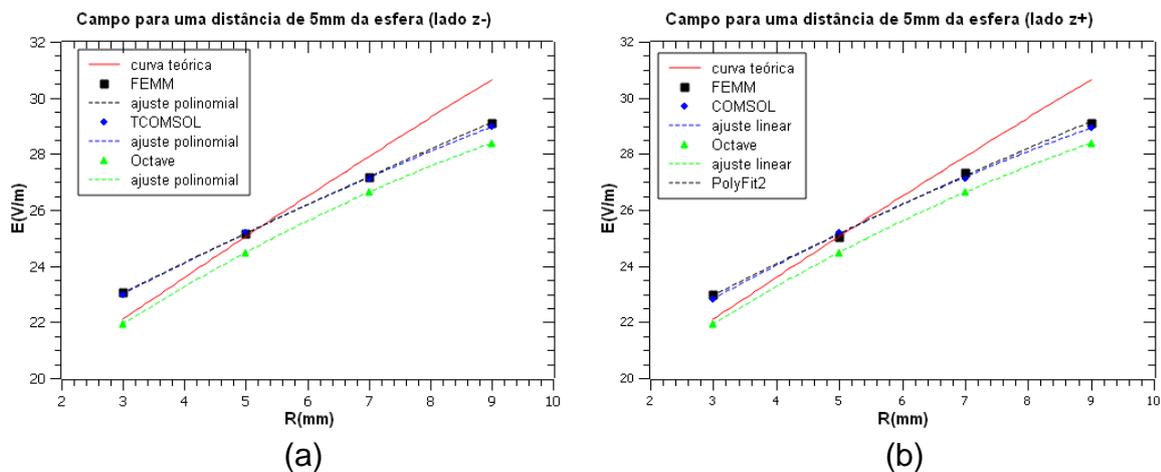


Figura 4.7: Campos elétricos no eixo z igual a 5 mm para o (a) lado negativo de z e para o (b) lado positivo de z .

As Tabelas 4.9 e 4.10 apresentam os erros relativos dos ajustes polinomiais observados na Figura 4.7. Pelos dados obtidos, nota-se que, para valores iniciais, os dados do *Octave* são aproximados do resultado teórico, mas, a medida que o raio da esfera aumenta, o demais *softwares* têm melhor aproximação com o resultado teórico.

Tabela 4.9: Erros relativos dos coeficientes do ajuste polinomial da Figura 4.7a.

	Erro para a_2	Erro para a_1	Erro para a_0
FEMM	8,42%	26,97%	12,66%
COMSOL	71,29%	20,45%	11,18%
Octave	231,6%	4,81%	2,06%

Tabela 4.10: Erros relativos dos coeficientes do ajuste polinomial da Figura 4.7b.

	Erro para a_2	Erro para a_1	Erro para a_0
FEMM	24,75%	22,52%	11,19%
COMSOL	179,70%	8,68%	7,72%
Octave	231,6%	4,81%	2,06%

iii) Campo Elétrico Longe da Esfera:

Para esse caso, também é fixado o valor de 40 mm para ser avaliado o campo elétrico longe da esfera. Nesse ponto, espera-se que comportamento do campo elétrico gerado pela esfera esteja uniforme, como ilustrada na Figura 4.5. Sendo assim, os resultados para o campo elétrico em função do raio da esfera para as regiões negativa e positiva ao longo do eixo z fixo são observados na Figura 4.8.

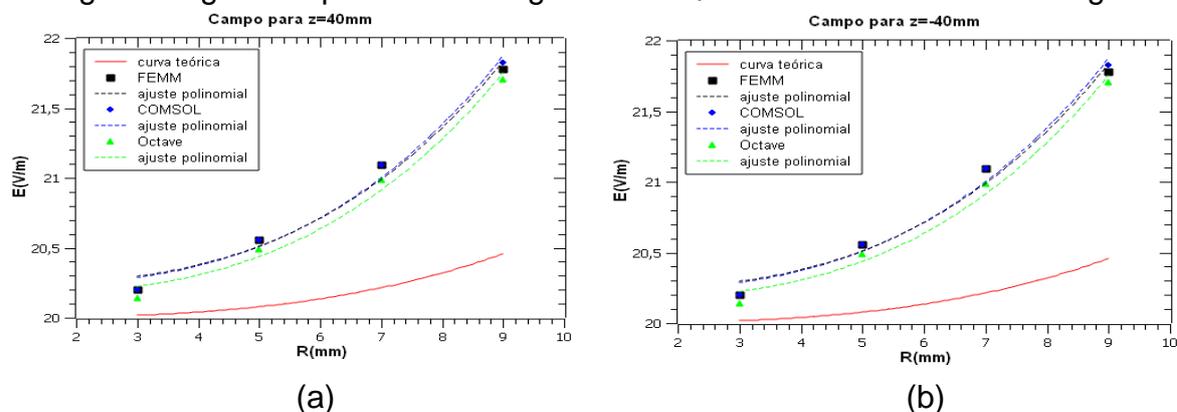


Figura 4.8: Campo elétrico em função do raio da esfera para os pontos (a) -40 mm e (b) 40 mm ao longo do eixo z .

Nesse caso, observa-se novamente um ajuste polinomial de terceiro grau, em que são desprezados os termos de segunda e primeira ordem. Os valores dos erros para os coeficientes neste caso estão nas Tabelas 4.12 e 4.13. Assim como observado nas Tabelas 4.5 e 4.6, inicialmente, a resposta do *Octave* possui a melhor aproximação com o resultado teórico, mas, a medida que o raio da esfera aumenta, há uma divergência com o resultado teórico. Contudo, comparando com os demais *softwares*, ele apresenta uma aproximação mais satisfatória.

Tabela 4.12: Erro relativo para os coeficientes de ajuste da função polinomial da Figura 4.8a.

	Erro para a_3	Erro para a_0
FEMM	250,4%	1,18%
COMSOL	260,68%	1,13%
Octave	247,44%	0,82%

Tabela 4.13: Erro relativo para os coeficientes de ajuste da função polinomial da Figura 4.8b.

	Erro para a_3	Erro para a_0
FEMM	250,4%	1,18%
COMSOL	260,68%	1,13%
Octave	247,44%	0,82%

Observando as seções 4.2 e 4.3 observasse uma concordância entre os resultados analisando o potencial e analisando o campo, o que mostra a coerência dos programas. No geral os dados mostram que os programas tiveram resultados parecidos e que seus comportamentos, com a variação de parâmetros, como o raio da esfera, são semelhantes reforçando ainda mais a coerência dos programas.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas Futuras

Este TCC apresenta em sua conclusão que os resultados obtidos com o *software Octave* mostram bom desempenho na modelagem computacional de um problema de eletrostática, quando comparado com outros *softwares* dedicados ao MEF. Considerando que o *Octave* é um programa de matemática com licença livre, o MEF pode ser empregado juntamente com o *Octave* em cursos experimentais e computacionais. Particularmente, em nível de ensino superior, pode ser usado em componentes curriculares de conhecimentos gerais ou básicos, como também no ciclo profissional dos cursos de ciências e engenharias.

Na área de ensino de Física, estudar fenômenos físicos por meio de um laboratório virtual, pode favorecer a inclusão de determinados temas científicos cujos experimentos são complexos e até mesmo custosos. Além disso, outro ponto importante, de modo geral, é colaborar com a inclusão digital na educação com a criação de novas tecnologias educacionais.

Por fim, é importante destacar que todas as ferramentas usadas neste TCC necessitam de conhecimento prévio de eletromagnetismo, cálculo numérico e analítico, e computação. Logo, observa-se a interdisciplinaridade em diversas áreas do conhecimento, o que possibilita desenvolver uma didática orientada a projetos, que é muito comum em áreas de saúde e tecnológicas. Como consequência, esse tipo de didática possibilita estimular no discente o raciocínio crítico, metódico, independente e objetivo, a fim de resolver o problema proposto. Além disso, em termos de custo financeiro, a proposta deste TCC mostra que é possível desenvolver novos mecanismos de ensino de ciências, fazendo uso de tecnologia livre e de boa qualidade, quando comparado com tecnologia não livre.

Como perspectivas futuras, este TCC destaca os seguintes itens:

- Desenvolver melhorias na geração da malha do programa em MATLAB, dando mais destaque as regiões geométricas de maior importância para o problema;
- Promover a atividade feita neste TCC em turmas de ensino superior e verificar seus resultados no âmbito educacional; e
- Construir códigos em linguagem MATLAB fazendo uso do MEF para que possam ser usados em outras áreas da Física.

Referências Bibliográficas

ARAUJO, Ives Solano. Simulação e Modelagem Computacional como Recursos Auxiliares no Ensino de Física Geral. 2005. Tese (Doutorado em Ciências). IF-UFRGS, Porto Alegre.

AZEVEDO, M. C. P. S. Ensino Por Investigação: Problematizando As Atividades Em Sala De Aula. In: CARVALHO, A. M. P.(Org.). Ensino de Ciências: unindo a pesquisa e a prática. São Paulo: Cengage Learning, 2009. p. 19-33.

PINTO, L. T; FIGUEIREDO, V. A. O ensino de Ciências e os espaços não formais de ensino. Um estudo sobre o ensino de Ciências no município de Duque de Caxias/RJ. In: Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia, 2.,Paraná, 2010.

PEREIRA, D. R. O; AGUIAR O. Ensino De Física No Nível Médio: Tópicos De Física Moderna E Experimentação. *Revista Ponto de Vista*, Florianópolis, 2002, v. 3, p. 65-81.

PIETROCOLA, M; BROCKINGTON, G. Recursos Computacionais Disponíveis Na Internet Para O Ensino De Física Moderna E Contemporânea. In: Encontro Nacional de Educação Científica, 3. p. 12.

SOUZA, D. M. Utilização de Simulação Computacional na Tomada de Decisão como Ferramenta Preventiva. *Revista Techoje*, Belo Horizonte, 2013.

VENTURA, P. C. S. et al. A Metodologia de Projetos como Ferramenta de Pesquisa em um Laboratório de Física, visto como ambiente não formal de aprendizagem. In: COBENGE, 34., Passo fundo, 2006, p. 1655-1666.

VANNUCCHI, A. I. A Relação Ciência, Tecnologia E Sociedade No Ensino De Ciências. In:CARVALHO, A. M. P.(Org.). Ensino de Ciências: unindo a pesquisa e a prática. São Paulo: Cengage Learning, 2009. p. 77-100.

GILAR, A; SUBRAMANIAM, V. Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB. 1. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.

GRIFFITHS, J. D. Eletrodinâmica. 3. ed. São Paulo: PEARSON, 1999.

JACKSON, J. D. Classical Electrodynamics. 3. ed. 2001.

MACHADO, K. D. Equações Diferenciais Aplicadas à Física. 1.ed. Ponta Grossa: todapalavra, 2012.

SHADIKU, M. N. O. Elementos de Eletromagnetismo. 3. ed. 2004

APÊNDICE

Apêndice A

Resolução do problema pela Equação de Laplace

Como dito anteriormente, o problema ilustrado na Figura 2.1 é bastante divulgado em diversos livros textos de eletromagnetismo. Sendo assim, fazendo uso das informações do problema proposto do livro *Introduction to Electrodynamics* do autor David J. Griffiths (GRIFFITHS, 1999), tem-se, para a condição de carga líquida nula, a Equação Diferencial Parcial (EDP) de Poisson é reduzida para Equação de Laplace, que é definida por (GRIFFITHS, 1999)

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0, \quad (\text{A.1})$$

em que ∇^2 é o operador laplaciano, que, para o problema ilustrado na Figura 2.1 que, por causa da simetria esférica do problema, será escrito em coordenadas polares esférica (GRIFFITHS, 1999) e associando a Equação (2.3), obtém-se

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V(r, \theta, \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \right)^2 \frac{\partial^2 V(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (\text{A.2})$$

em que r , θ e φ são as componentes radial, polar e azimutal, respectivamente. Considerando a simetria azimutal do problema, tem-se que a Equação (2.4) é reduzida a

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Dessa forma, a Equação (A.3) apresenta duas variáveis independentes, que, para encontrar as soluções dessa equação, é usado o Método de Separação de Variáveis. Esse método consiste em considerar o potencial como sendo um produto de funções das variáveis independentes. Logo, é possível supor que o potencial tem a seguinte forma:

$$V(r, \theta) = \frac{R(r)}{r} \Theta(\theta). \quad (\text{A.4})$$

substituindo a Equação (A.4) na (A.3) e multiplicando tudo por $r^2/R(r)\Theta(\theta)$, é obtido a expressão

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) = 0 \quad (\text{A.5})$$

Observasse que cada termo do lado esquerdo da equação é função de apenas uma variável, como a soma dos termos é igual a uma constante, no caso 0, temos que cada termo é igual a uma constante diferindo apenas pelo sinal, por questões de facilidade escolheremos o módulo da constante como $l(l+1)$, assim:

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) = l(l+1) ; \frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) = -l(l+1), \quad (\text{A.6})$$

em que l é uma constante.

Agora, resolvendo a Equação Diferencial Ordinária (EDO) Radial da Equação (A.6), tem-se que sua solução é obtida usando o método de Cauchy-Euler (MACHADO, 2012), como sendo:

$$R(r) = A_l r^{l+1} + \frac{B_l}{r^l}, \quad (\text{A.7})$$

em que A_l e B_l são constantes. Ainda na Equação (A.6), a solução para a parte angular da EDO é descrita pelos polinômios de Legendre (MACHADO, 2012), ou seja,

$$\Theta(\theta) = P_l(x) = P_l(\cos \theta), \quad (\text{A.8})$$

em que $P_l(x)$ é encontrado através da fórmula de Rodrigues (MACHADO, 2012), como sendo:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l, \quad (\text{A.9})$$

em que l pertence ao conjunto dos números inteiros positivos.

Substituindo as Equações (A.7) e (A.8) na Equação (A.4), obtém-se a expressão matemática para o potencial elétrico da seguinte forma: (MACHADO, 2012),

$$V_l(r, \theta) = \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta). \quad (\text{A.10})$$

Contudo, o potencial elétrico da Equação (A.10) gera um conjunto infinito de l soluções. Sendo assim, a solução geral do potencial elétrico é a combinação linear de todas possíveis soluções dadas pela Equação (A.10) (MACHADO, 2012), ou seja,

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} V_l(r, \theta). \quad (\text{A.11})$$

Por fim, é necessário que a Equação (A.11) seja convergente, inclusive nas regiões de contorno do problema proposto. Logo, aplicando as condições de contorno descritas na Equação (2.2), obtêm-se valores específicos para os coeficientes A_l e B_l da Equação (A.10). Aplicando a primeira condição de contorno do potencial, fazendo $r=R$ em (i) da Equação (2.2), em que R é o raio da esfera tem-se

$$A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} = 0 \Rightarrow$$

$$B_l = -A_l R^{2l+1} \quad (\text{A.12})$$

então

$$V_l(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(r^l + \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (\text{A.13})$$

A segunda condição de contorno, (ii) da equação (2), leva a

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) = E_0 r \cos \theta.$$

Somente o termo com $l=1$ poderá existir, que pela fórmula de Rodrigues $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$, assim

$$A_1 = E_0 r, \quad (\text{A.14})$$

todos os outros coeficientes zeram, então o potencial no espaço devido a esfera é dado por:

$$V(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (\text{A.15})$$

Apêndice B

Resolução do problema pelo Método das Imagens

Esse método é uma técnica alternativa para resolver problemas com simetria. Sendo assim, a classe de problemas, que podem ser resolvidas pelo Método das Imagens, é limitada (JACKSON, 2001). No problema destacado na Figura 2.1, há uma simetria esférica envolvida. Logo, o tal método pode ser aplicado (JACKSON, 2001). Em particular, o Método das Imagens trata o problema observado na Figura 2.1 por meio de cargas pontuais. Essas cargas são imaginadas de forma que o potencial no espaço seja equivalente ao potencial do problema inicial.

Como o problema tratado requer um campo uniforme, basta imaginar duas cargas pontuais de sinais opostos, equidistantes, D , e alinhados no eixo z positivo e negativo, como ilustrada na Figura 2.2 (JACKSON, 2001).

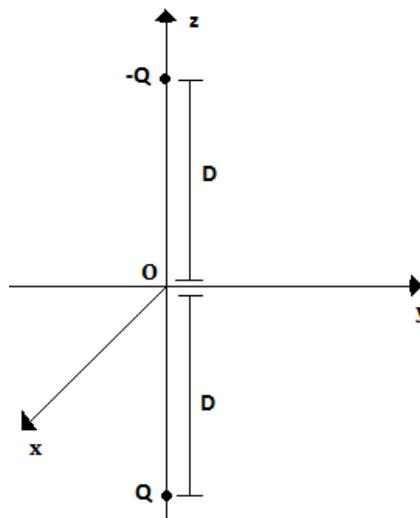


Figura B.1: Modelo físico para geração de campo uniforme através de cargas pontuais para aplicação do Método das Imagens(JACKSON, 2001).

Ainda na Figura B.2, para que o campo elétrico seja uniforme, é necessário que a distância entre as cargas e a origem seja muito maior do que a posição no espaço onde é analisado o campo elétrico. Sendo assim, tem-se que o campo elétrico é expresso por (JACKSON, 2001)

$$E_0 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{D^2}, \quad (\text{B.1})$$

em que Q é o módulo das cargas elétricas envolvidas, D é a distância entre uma carga e a origem e ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo. Da Equação (B.1), é possível obter o módulo das cargas elétricas, ou seja, (JACKSON, 2001)

$$Q = 2\pi\epsilon_0 E_0 D^2. \quad (\text{B.2})$$

Por fim, o potencial elétrico gerado por essas cargas elétricas, denominadas de externas, num ponto do espaço é

$$V_{ext} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (D+z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (D-z)^2}} \right], \quad (\text{B.3})$$

que, em coordenada esféricas, é descrito por

$$V_{ext} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + D^2 + 2Dr\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + D^2 - 2Dr\cos\theta}} \right] \Rightarrow$$

$$V_{ext} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 D} \left[\frac{1}{\sqrt{(r/D)^2 + 1 + 2r\cos\theta/D}} - \frac{1}{\sqrt{(r/D)^2 + 1 - 2r\cos\theta/D}} \right]. \quad (\text{B.4})$$

Para $D \gg r$, tem-se que o potencial elétrico da Equação (B.4) é reduzido a

$$V_{ext} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 D} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + 2r\cos\theta/D}} - \frac{1}{\sqrt{1 - 2r\cos\theta/D}} \right]. \quad (\text{B.5})$$

Agora, usando a relação $(1+k)^n \approx 1+nk$, para $k \ll 1$, tem-se que a Equação (B.5) é expressa por

$$V_{ext} = -\frac{Qr\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 D^2}, \quad (\text{B.6})$$

onde é obtido o potencial elétrico devido as cargas externas, ou seja,

$$V_{ext} = -E_0 r \cos\theta. \quad (\text{B.7})$$

De acordo com as condições de contorno descritas na Equação (2.2), o potencial elétrico dentro da esfera é nulo (JACKSON, 2001). Então agora é preciso imaginar uma carga interna a região da esfera para cada carga externa, tal que o potencial dentro da esfera seja anulado. Podemos descobrir o valor da carga interna e sua posição analisando a Figura B.2.

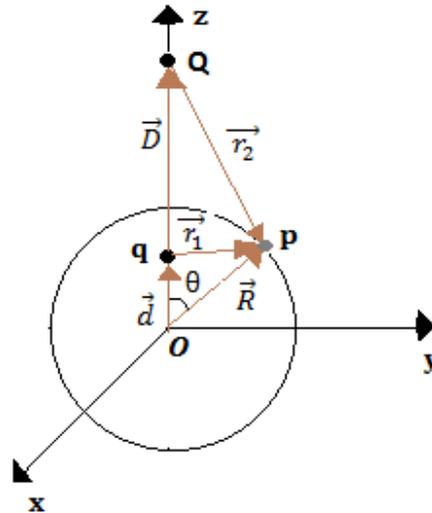


Figura B.2: Modelo físico para análise da carga imagem gerada no interior da esfera condutora.

Analisando o potencial elétrico das cargas Q e q , tem-se que o potencial elétrico total no ponto p ilustrado na Figura B.2 é expresso por

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{R} - \vec{D}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{R} - \vec{d}|} \Rightarrow \\
 V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|R\hat{r} - D\hat{z}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|R\hat{r} - d\hat{z}|} \Rightarrow \\
 V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{R\left|\hat{r} - \frac{D}{R}\hat{z}\right|} + \frac{q}{d\left|\frac{R}{d}\hat{r} - \hat{z}\right|} \right). \tag{B.8}
 \end{aligned}$$

Aplicando a condição de contorno na Equação (B.8) para o potencial na região da esfera condutora, onde o potencial tem que ser nulo, obtêm-se as seguintes relações:

$$\frac{Q}{R} = -\frac{q}{d}; \quad \frac{D}{R} = \frac{R}{d}. \tag{B.9}$$

Por meio da Equação (B.9), obtêm-se a distância da carga q em relação à origem O , em termos de R e D , e a própria carga imagem q em termos de R , D e Q (JACKSON, 2001),

$$d = \frac{R^2}{D}; \quad q = -\frac{R}{D}Q. \tag{B.10}$$

Agora, depois das análises feitas nos modelos físicos das Figuras B.1 e B.2, pode-se aplicar o Método das Imagens para o modelo físico da Figura 2.1, onde, para esse problema, são utilizadas quatro cargas pontuais, como mostrada na Figura 2.4 (JACKSON, 2001).

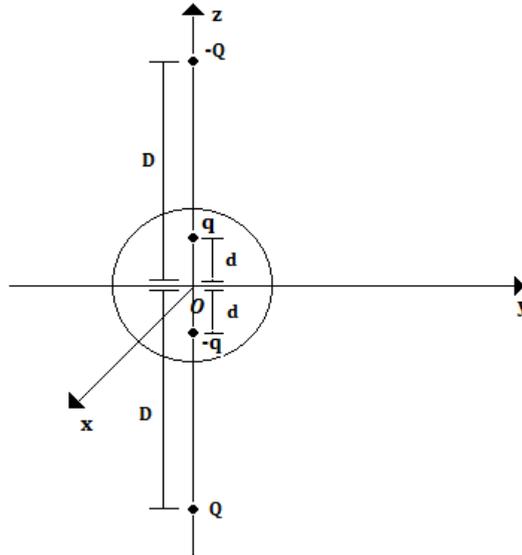


Figura B.3: Modelo físico da esfera condutora inserida num campo elétrico uniforme pelo Método das Imagens.

Aplicando o Método das Imagens ao modelo físico apresentado na Figura B.3, obtém-se o potencial elétrico devido às cargas internas, que é expresso por

$$V_{\text{int}}(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right]. \quad (\text{B.11})$$

A Equação (B.11) pode ser reescrita em coordenadas polares esféricas da seguinte forma:

$$V_{\text{int}}(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 + 2rd \cos\theta}} \right]. \quad (\text{B.12})$$

Usando a Equação (B.10) em (B.12), tem-se o potencial elétrico escrito como sendo:

$$V_{\text{int}}(r, \theta) = \frac{QR}{4\pi\epsilon_0 D} \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R^2}{D}\right)^2 + r^2 - 2r\left(\frac{R^2}{D}\right) \cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R^2}{D}\right)^2 + r^2 + 2r\left(\frac{R^2}{D}\right) \cos\theta}} \right]. \quad (\text{B.13})$$

Considerando $D \gg R$, tem-se que a Equação (B.13) é reduzida para

$$V_{\text{int}}(r, \theta) = \frac{QR}{4\pi\epsilon_0 rD} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{R^2}{Dr}\right)\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{1 + 2r\left(\frac{R^2}{Dr}\right)\cos\theta}} \right]. \quad (\text{B.14})$$

Novamente, usando a aproximação $(1+k)^n \approx 1+nk$, para $k \ll 1$, a Equação (B.14) é escrita como sendo:

$$V_{\text{int}}(r, \theta) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 D^2} \frac{R^3}{r^2} \cos\theta, \quad (\text{B.15})$$

ou

$$V_{\text{int}}(r, \theta) = E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos\theta. \quad (\text{B.16})$$

Por fim, o potencial elétrico no espaço livre é a soma dos potenciais elétricos interno e externo à região onde a esfera condutora estaria, ou seja,

$$V(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos\theta.$$

Apêndice C

Código do programa feito em linguagem MATLAB, para o problema da esfera imersa em um campo uniforme

```

%o programa feito nesse TCC precisa apenas da atribuição de
valores a quatro parâmetros, para gerar o resultado da
modelagem, esses são:
cx =0.1; %comprimento do espaço em x
cy =0.1; %comprimento do espaço em y
raio=0.009; %raio da esfera
Ndb=100; %número de nós em cada borda do quadrado que delimita
o espaço

% As unidades das grandezas aqui usadas estão todas no SI.
Aqui a simulação está feita no plano xy com o campo elétrico
apontado na direção positiva do eixo x.

%tamanho da malha
tx=cx/(Ndb-1); %base do elemento triangular
ty=cy/(Ndb-1); %altura do elemento triangular

Ndn=Ndb^2;%número total de nós

%posicionando os nós em todo domínio
no=zeros(Ndn,2); %matriz que guardará a posição dos nós
h=0;
for j=1:1:Ndb
    for i=1:1:Ndb
        h=h+1;
        no(h,1)=(i-1)*tx;
        no(h,2)=(j-1)*ty;
    end
end

%calculando o número de elementos da malha
ele1=2*Ndb-2;%numero de elementos na primeira linha
ele=(Ndb-1)*ele1; %número de elementos total

%formando os elementos e calculando a matriz de rigidez global
h=1;
h1=1;
h2=2;
vno=zeros(ele,3); %cada linha dessa matriz terá três valores
que correspondem aos nós que formam um elemento
p=zeros(ele,3); %parâmetro P definido na Seção 2.3.2
q=zeros(ele,3); %parâmetro Q definido na Seção 2.3.2
c=zeros(Ndn,Ndn); %matriz de rigidez global

```

```

for j=1:1:Ndn-Ndb-1
    vno(h1,1)=h;
    vno(h1,2)=h+1;
    vno(h1,3)=h+Ndb;

    p(h1,1)=no(vno(h1,2),2)-no(vno(h1,3),2);
    p(h1,2)=no(vno(h1,3),2)-no(vno(h1,1),2);
    p(h1,3)=no(vno(h1,1),2)-no(vno(h1,2),2);
    q(h1,1)=no(vno(h1,3),1)-no(vno(h1,2),1);
    q(h1,2)=no(vno(h1,1),1)-no(vno(h1,3),1);
    q(h1,3)=no(vno(h1,2),1)-no(vno(h1,1),1);
    A=(p(h1,2)*q(h1,3)-p(h1,3)*q(h1,2))/2;

    for i1=1:1:3
        for i2=1:1:3

c(vno(h1,i1),vno(h1,i2))=c(vno(h1,i1),vno(h1,i2))+(p(h1,i1)*p(
h1,i2)+q(h1,i1)*q(h1,i2))/(4*A);
            end
        end

    h=h+1;
    vno(h2,1)=h;
    vno(h2,2)=h+Ndb;
    vno(h2,3)=h+Ndb-1;

    p(h2,1)=no(vno(h2,2),2)-no(vno(h2,3),2);
    p(h2,2)=no(vno(h2,3),2)-no(vno(h2,1),2);
    p(h2,3)=no(vno(h2,1),2)-no(vno(h2,2),2);
    q(h2,1)=no(vno(h2,3),1)-no(vno(h2,2),1);
    q(h2,2)=no(vno(h2,1),1)-no(vno(h2,3),1);
    q(h2,3)=no(vno(h2,2),1)-no(vno(h2,1),1);
    A=(p(h2,2)*q(h2,3)-p(h2,3)*q(h2,2))/2;

    for i1=1:1:3
        for i2=1:1:3

c(vno(h2,i1),vno(h2,i2))=c(vno(h2,i1),vno(h2,i2))+(p(h2,i1)*p(
h2,i2)+q(h2,i1)*q(h2,i2))/(4*A);
            end
        end

    h1=h1+2;
    h2=h2+2;
end %fim da formação dos elementos e do cálculo da matriz de
rigidez global

%Utilização do método da matriz de banda

v=zeros(Ndn,1); %nós fixos
c1=c; %matriz para os nós livres

```

```

c2=-c; %matriz para os nós fixos

%nós com potencial 1 volt (lado esquerdo)
b1=1-Ndb;
for i=1:1:Ndb
    b1=b1+Ndb;
    v(b1,1)=1;
    for j=1:1:Ndn
        if(b1==j)
            c1(b1,j)=1;
            c2(b1,j)=1;
        else
            c1(b1,j)=0;
            c1(j,b1)=0;
            c2(b1,j)=0;
        end
    end
end

%nós com potencial -1 volt (lado direito)
b2=0;
for i=1:1:Ndb
    b2=b2+Ndb;
    v(b2,1)=-1;
    for j=1:1:Ndn
        if(b2==j)
            c1(b2,j)=1;
            c2(b2,j)=1;
        else
            c1(b2,j)=0;
            c1(j,b2)=0;
            c2(b2,j)=0;
        end
    end
end

%nós dentro da esfera
for i=1:1:Ndn
    b1=(no(i,1)-cx/2)^2+(no(i,2)-cy/2)^2;
    if (b1<=(raio+0.0005)^2 && b1>=(raio-0.0005)^2)
        v(i,1)=0;
        c1(i,i)=1;
        c2(i,i)=1;
        for j=1:1:Ndn
            if (j~=i)
                c1(i,j)=0;
                c1(j,i)=0;
                c2(i,j)=0;
            end
        end
    end
end

```

```

        end
    end
end

%calculando os potenciais nos nós usando a Equação (2.37)
B=c2*v;
vf=inv(c1)*B;

%cálculo do campo elétrico
h=0;
for j=1:1:Ndb
    for i=1:1:Ndb
        h=h+1;
        if (i==1)
            if (j==1)
                Ex=(vf(h+1,1)-vf(h,1))/(no(h+1,1)-no(h,1));
                Ey=(vf(h+Ndb,1)-vf(h,1))/(no(h+Ndb,2)-
no(h,2));
            elseif (j==Ndb)
                Ex=(vf(h+1,1)-vf(h,1))/(no(h+1,1)-no(h,1));
                Ey=(vf(h,1)-vf(h-Ndb,1))/(no(h,2)-no(h-
Ndb,2));
            else
                Ex=(vf(h+1,1)-vf(h,1))/(no(h+1,1)-no(h,1));
                Ey=(vf(h+Ndb,1)-vf(h-Ndb,1))/(no(h+Ndb,2)-
no(h-Ndb,2));
            end

            elseif (i==Ndb)
                if (j==1)
                    Ex=(vf(h,1)-vf(h-1,1))/(no(h,1)-no(h-1,1));
                    Ey=(vf(h+Ndb,1)-vf(h,1))/(no(h+Ndb,2)-
no(h,2));
                elseif (j==Ndb)
                    Ex=(vf(h,1)-vf(h-1,1))/(no(h,1)-no(h-1,1));
                    Ey=(vf(h,1)-vf(h-Ndb,1))/(no(h,2)-no(h-
Ndb,2));
                else
                    Ex=(vf(h,1)-vf(h-1,1))/(no(h,1)-no(h-1,1));
                    Ey=(vf(h+Ndb,1)-vf(h-Ndb,1))/(no(h+Ndb,2)-
no(h-Ndb,2));
                end

                else
                    if (j==1)
                        Ex=(vf(h+1,1)-vf(h-1,1))/(no(h+1,1)-no(h-
1,1));
                        Ey=(vf(h+Ndb,1)-vf(h,1))/(no(h+Ndb,2)-
no(h,2));
                    elseif (j==Ndb)

```

```

        Ex=(vf(h+1,1)-vf(h-1,1))/(no(h+1,1)-no(h-
1,1));
        Ey=(vf(h,1)-vf(h-Ndb,1))/(no(h,2)-no(h-
Ndb,2));
    else
        Ex=(vf(h+1,1)-vf(h-1,1))/(no(h+1,1)-no(h-
1,1));
        Ey=(vf(h+Ndb,1)-vf(h-Ndb,1))/(no(h+Ndb,2)-
no(h-Ndb,2));
    end
end
    E(h,1)=sqrt(Ex^2+Ey^2);
end
end %fim do cálculo do campo elétrico

%atribuindo os potencias aos nós
h=0;
va=zeros(Ndb,Ndb);
Ea=zeros(Ndb,Ndb);
for j=1:1:Ndb
    for i=1:1:Ndb
        h=h+1;
        va(j,i)=vf(h,1);
        Ea(j,i)=E(h,1);
    end
end
end

%gerando os gráficos
p1=zeros(1,Ndb);
p2=zeros(1,Ndb);
p3=zeros(1,Ndb);
for i=1:1:Ndb
    p1(i)=(i-1)*tx;
    p2(i)=va(Ndb/2,i);
    p3(i)=Ea(Ndb/2,i);
end
end

figure(1)
x=linspace(0,cx,Ndb);
y=linspace(0,cy,Ndb);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
tri=delaunay(X,Y);
contourf(X,Y,va,20);

figure(2)
plot(p1,p2,'r');
figure(3)
plot(p1,p3,'b');

```