UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO MATEMÁTICA - LICENCIATURA

IGOR DE BARROS NONATO

A INFLUÊNCIA EUCLIDIANA NA ARITMÉTICA DO ENSINO BÁSICO

Caruaru
2020

IGOR DE BARROS NONATO

A INFLUÊNCIA EUCLIDIANA NA ARITMÉTICA DO ENSINO BÁSICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Profº. Dra. Cristiane de Arimatéa Rocha.

Caruaru

2020

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier - CRB/4 - 1242

N812i Nonato, Igor de Barros.
A influência Euclidiana na aritmética do ensino básico. / Igor de Barros Nonato. – 2020.
72 f.; 30 cm.

Orientadora: Cristiane de Arimatéa Rocha.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2020.
Inclui Referências.

1. Elementos de Euclides (Obra). 2. Aritmética – Estudo e ensino. 3. Matemática – Estudo e ensino. 4. Matemática - História. I. Rocha, Cristiane de Arimatéa (Orientadora). II. Título.

CDD 371.12 (23. ed.) UFPE (CAA 2020-085)

IGOR DE BARROS NONATO

A INFLUÊNCIA EUCLIDIANA NA ARITMÉTICA DO ENSINO BÁSICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática - Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de licenciado em matemática.

Aprovada em: 16/10/2020.

BANCA EXAMINADORA

____

Profº. Dra. Cristiane de Arimatéa Rocha (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Profº. Dra. Simone Moura Queiroz (Examinadora Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Profª. Ma. Luana Rafaela da Silva Costa (Examinadora externa)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico este trabalho ao meu primo Derick Peixoto, que por um fim tão trágico, nos deixou tão cedo. A “lili” irá de cantar sempre para você irmão.

AGRADECIMENTOS: The Last Dance

Olá viajantes do futuro que, por algum acaso, procuraram este meu TCC. Seja porque se interessou ou está procurando alguma parte da minha pesquisa. Espero que não chegue a pular essa parte, dos agradecimentos, na sua leitura. Porque ela é extremamente importante para o todo deste trabalho. Veja, o Michael Jordan, o maior atleta da NBA. Indiscutível. Mas, o basquete é um esporte coletivo. Ele não conquistaria tudo que ele ganhou sozinho. Seus companheiros de time, são peças fundamentalmente necessárias para a sua conquista. E assim como este TCC, ele só existe por causa de todas as pessoas nas quais eu já me relacionei. Nessa parte, eu quero agradecer a cada um que, de certa forma esteve comigo, durante a graduação. Se você não me conhece, olhe para a data que este TCC foi entregue. Verá que ocorrerá no período da pandemia causada pelo novo coronavírus. Por causa disto, a defesa deste trabalho ocorreu de maneira remota. E, eu não queria isso. Quem já estudou comigo, sabe quanto eu gosto de fazer umas apresentações um pouco, digamos, "extravagante". Pois bem, essa ia ser a minha maior apresentação, ia ter tudo. Show de mágica, musical, efeitos visuais e sonoros, pirotecnia. Eu queria sair desse curso, deixando uma espécie de "minha marca". Almejava, que daqui a 30 anos ainda comentassem sobre esta minha defesa de TCC. Isso tudo, poderia ser um pouco de vaidade da minha parte, mas eu só queria presentear todas as pessoas importantes para mim, que ali estavam, com essa minha apresentação. Só que, isso não ocorreu, então vida que segue. E se você não entende meu sentimento, eu vou contar agora a história da minha graduação, e sei que ao final você vai entender a minha "The Last Dance".

A minha jornada começa ainda no ensino médio. Meu professor de Matemática, Maurilio, ou para os mais íntimos, Maumau, foi minha grande inspiração para eu escolher este curso. Quando me perguntam um exemplo de professor que eu quero ser, as divertidíssimas aulas que tive com ele vem a minha mente. Sou grato a ele demais pelo incentivo que ele me deu para eu treinar para a OBMEP. Sem isso, não teria conquistado minha Prata.

Meu ingresso na UFPE, não foi muito diferente dos demais. Mas um fato curioso foi de que fui fazer a matrícula um dia depois de completar 18 anos. Era minha primeira grande responsabilidade e advinha só: vomitei no caminho pra Caruaru kkkkkkk. Alí já bateu o nervosismo, fiquei imaginando eu enjoando todo dia viajando para caruaru. Nos primeiros

dias foi assim. Mas logo me acostumei. E o primeiro dia de aula? Lembro do pessoal do ônibus dando uma salva de palmas para nos receber. Mas a única coisa que me recordo de algo que aconteceu na sala de aula é de Anthonny com sua touca preta. E por falar no companheiro Antônio, eu sei que quando esses velho pique Karnal e Cortela morrerem e nós procurarmos por novos intelectuais, Anthonny vai estar no início da fila para substituí-los. Um dos acontecimentos mais engraçados que presenciei nesses 5 anos de CAA, foi o Sr. Ronaldo quebrando a tela do projetor, e o professor Inaldo olhando com aquela cara de "acho que isto é um motivo pra não ter aula" kkkkkkk. Seu Zé é demais. O paizão da nossa turma. Ele era o verdadeiro sensei para todos nós. E eu o discípulo travesso, que dava mais trabalho, mas tenho muito carinho por ele. A primeira atividade de extensão que participei ali, foi o recém graduados. Foi, legal, toda sexta ia de tarde pra lá, com meu trio Leonora e Matias. Matias foi o meu mentor ali no começo do curso. Tudo eu perguntava a ele. E não só no começo, devo a ele os meus estágios supervisionados que ele me ajudou a fazer. E nossa, o TCC de Matias eu fiz ser o evento do curso kkkkkk. Ficamos divulgando em todos os cantos, fizemos uma live, que era novidade na época. Foi show demais. Matias é das pessoas que deixou saudades quando concluiu o curso. E Leonora hein. Minha primeira companheira na universidade. Formávamos todas as duplas para os trabalhos. Fiquei feliz quando soube que íamos continuar estudando juntos na faculdade. Eu só desejo o melhor para ela. Quero ver ela "grande" e realizando todos os seus sonhos.

No segundo período do curso eu conheci meu pai ali: o professor Paulo Câmara. Que homens senhoras e senhores. A maneira como ele me apadrinhou ali foi muito gratificante. Ele olhava pra mim e dizia que eu ia longe. Era muito sincero aquilo, não era vazio, dito apenas por dizer. Dava pra sentir. Isso me motivou tanto a continuar estudando e dando o meu melhor. Eu dizia, que até ali no segundo período eu só tinha colegas, mas no terceiro eu pude chamá-los de amigos. As relações se afloraram e obtive os melhores amigos que podia ter. Vou começar por Rodolfo, meu amigo das "puras". Onde tivesse uma disciplina de pura, estávamos lá. Sempre que eu via Rodolfo estudando, isso me estimulava a estudar mais. Ele sempre vinha conversar comigo sobre alguma questão. E isso me motivava a continuar estudando porque eu precisava acompanhar o ritmo que ele vinha. Agora ele sossegou, virou um lajedense, tá casado, mas desejo que alcance o sonho dele de continuar no mestrado em matemática, porque eu sei que ele vai virar um excelente professor universitário. E por falar em excelentes professores universitários, preciso enaltecer as figuras de Jefferson e Jeremias.

Os professores que guiaram nossa turma durante os 4 primeiros períodos. Por serem recém formados da casa, eles nos guiaram e aconselharam bastante-nos. Sou muito grato aos dois e são exemplos de professores que me inspiram e me inspiro. Inclusive, foi numa aula de Jefferson que apresentei um dos meus mais divertidos trabalhos, que era sobre cones, e isso me rendeu a bela história da vez que eu roubei um cone da igreja para usar nessa apresentação kkkkk mas esse trabalho é mais marcado pela alta quantidade de memes que possuía e bela grandiosa "escala Ana de emoção". Olha o que eu já aprontei com Ana não tá descrito no gibi, e não há desculpas suficientes que eu peça, para equilibrar a balança. Então, eu só tenho gratidão por ela. Ah o que não falta é história boa pra contar com Ana, dos boyzinhos que eu shipava com ela, da vez que terminamos, acidentalmente, um namoro de um casal, de todas as brincadeiras que tivemos ali. São tempos bons que espero que nunca sumam da minha memória. Ainda devo uma visita a Altinho, na casa dela, mas espero que isso já se tenha cumprido quando você estiver lendo isto, caro leitor do futuro.

Um dos trabalhos que me orgulho muito de ter feito é o vídeo que produzi para o EMAP 2018. Toda vez que ele passa num auditório e eu escuto aquela gargalhada generalizada da plateia meu coraçãozinho aquece. Quando Priscila me disse que passou o vídeo para a turma dela, e seus alunos adoraram, fiquei muito feliz. Quando Laura me disse que quando não tem nada pra fazer e quer rir e procura esse vídeo eu fiquei nossaaaa. O alcance que ele teve foi muito grande. Fiquei bestinha todo quando Gaby me contou que a amiga dela de MG já me conhecia por esse vídeo. Uma vez na rural de Recife, um senhor me reconheceu, por causa dele, eu me senti muito um rockstar kkkkk. Sério, eu gosto desse vídeo. Se você não o conhece, procura "coloquei dois coelhos pra cruzar e olha no que deu" no youtube, sei que você vai amar também. No ano seguinte decidi fazer outro vÍdeo para o EMAP. Só que dessa vez com um toque especial. Produzi ele com meus amigos. Quanta história boa surgiu daí. Ana, Fábio, Kaio, Thais e Capitão Erivelton, formaram meu *dream team*. Esse vídeo é meu maior orgulho de tudo o que eu fiz ali nesse curso. Além dele ter ficado excepcional, diga-se de passagem, eu fiz isso junto com eles. O outro vídeo eu fiz sozinho e isolado na minha casa. Mas esse, eles estavam ali comigo, compartilhando as risadas. Fábio, meu miranha, que topava e incentivava todas as maluquices que já fiz ou pretendi fazer. Não era viagem perdida, ir para faculdade e não ter aula, se Fábio estivesse dado viagem perdida também. A diversão estava garantida. Eu preciso compartilhar da vez que eu estava tomando banho lá e água do chuveiro "supostamente" acabou e Fábio ficou me trazendo de garrafinha e garrafinha, água da torneira mais próxima para eu terminar meu banho. E para completar o trio dos maconheiros do CAA, professor Kaio. O homem que tem mais de 10 empregos. O verdadeiro Cabeça de Gelo. Outro que sempre respondia meus “bora” com outro “bora”. Só não deu para aprontamos mais no final, porque seus 101 empregos consumiam seu tempo. Mas deu tempo suficiente para ele voar. Literalmente. Quando estávamos gravando o vídeo de “A Incrível História de Sophie Germain”, Erivelton pegou Kaio e jogou ele pra cima, e contrariando a leis da física, Kaio não parava de subir, parecia uma bexiga de gás hélio. Talvez seja por isso que chamávamos Erivelton de Capitão América. E ele é um verdadeiro herói. Uma vez uma gatinha grávida ficou presa, num canto que eu não sei descrever, mas era perigoso algum humano ir ali tentar resgatar. Mas, o capitão foi lá, e eu e Ana se agoniando de medo vendo a situação, Erivelton conseguiu resgatar são e salva a bichinha. Se tem uma história que eu me adoro contar e me acabo de rir contando é da vez que eu, Thais e Gabi, estávamos fazendo um trabalho pelo Discord, e Thais achou que tinha desligado o microfone e começou a falar toda fofinha com Diego enquanto falava o que era pra ele comprar no mercado. Isso foi numa véspera de São João ou São Pedro sei lá, só sei que rir bastante com isso. Nós três formamos diversos trios para fazermos os trabalhos. Um que eu gosto muito, é o de Avaliação da Aprendizagem, que era bem na época da copa do mundo, e nosso slide estava bem temático com a copa, e repleto de mesmo atuais sobre o que estava rolando na copa.

Um dos meus apelidos mais carinhosos que ganhei ali, foi nessa disciplina, dada pela magnífica tia Kátia. Ela me chamava carinhosamente de “Alma Inquieta”. Você deve imaginar o porquê. Talvez eu possua algum tipo de transtorno ou sei lá. Mas eu não consigo ficar quieto e me concentrar. Então nas aulas, sempre estava ali ativo, pronto para fazer alguma graça. Macário foi um desses que sofreu. Um dia quero ser pobre igual ele para usar um macbook como régua no quadro. Tio Cleiton, também teve que me aturar. Duas vezes, nas geometrias. Só não deu para a terceira por motivos de covid. Eu gostava de tirar onda dele. Inclusive ele me deve ainda um pastel que tive que pagar pra ele porque ele “esqueceu a carteira”. Além de ser uma “Alma Inquieta”, Dilson disse que eu tinha a “Alma de uma criança de doze anos”. Mas sabe, a universidade às vezes é tão séria, dizendo que não cabe espaço para se divertir, mas dá sim. E tem que ser assim. Você vai passar 5 anos da sua vida na amargura? Eu que não vou. Por isso, sempre procurava maneiras de distrair e trazer leveza a onde eu estava. Mas se teve disciplina que me chamava para eu me despirocar eras as metodologias que paguei com Ivanildo. Vou deixar claro. Aqui veneramos Ivanildo. Se tinha uma coisa que gostava de fazer era propiciar uma situação onde Ivanildo ficasse rindo até ficar vermelho. Inclusive eu posso dizer que já dormi na casa dele e usei seu shortinho de banho para piscinar na piscina do seu condomínio. Não é todo mundo que tem essa moral não viu.

Você já comprou briga por alguém? Se sim, você sabe o quanto você gosta dessa pessoa para ter feito isso. Sempre ficava incentivando Wnadja a se candidatar para ser a presidenta do DA. Porque uma pessoa que ama tanto os animais, é uma boa pessoa para assumir esse cargo. E fiquei muito feliz, quando ela me convidou para compor a chapa. E história engraçada, eu fui agente duplo nessa jogada. A chapa adversária tinha me convidado para eu dar uma consultoria criativa a eles. E fiz isso. Mas era olho na reunião e outro no celular vazando tudo o que falavam pra Wnadja no zap. Nós formamos a "Mod φ CAA". A melhor chapa possível para exercer o cargo. E só minha opinião importa. Lembra do lance de comprar briga? Então, os nossos concorrentes, tretaram com Wnadja. Mas eu não deixei ela levar todas as pauladas sozinhas e me envolvi na discussão. Esse foi o acontecimento mais triste meu ali. Minutos antes do período eleitoral acabar, fomos caluniados publicamente por eles, e simplesmente não houve tempo de se defender. E assim, nossa imagem ficou sendo de mentirosos, enquanto a deles de bonzinhos samaritanos vítimas de todo o mal. Não desejo a ninguém que passe por isso, de ser acusado, falsamente, de mentiroso e sem poder se defender. Eu me sentir horrível com isso. Nunca tinha tido uma crise de ansiedade até esse dia. Perdemos a eleição, mas eu ganhei uma coisa muito melhor: um amigo. Se tem uma coisa que me arrependo nessa faculdade, foi levar dois anos para conhecer Edson, meu chuchu. Que pessoa incrível. Uma pena só termos pago juntos uma disciplina. Mas valeu a pena. Fizemos uma apresentação toda ensaiadinha com um completando a frase do outro, ficou maravilindo. Nessa cadeira com tia Desterro, ela sempre esquecia o apagador, e aí eu sempre emprestava o meu a ela. E durante uma aula, Edson percebeu que ela tinha uma tatuagem, e ela ficou morta de vergonha.

Falar em pessoas que demorei pra conhecer, porque fiz o mesmo com Gabi em? Ah essa não é a mesma Gabi, anterior. Ah outro me referenciou como Gabe, e essa com Gaby. A gente só chegou a ter uma aula juntos. Que foi cancelada por motivos de covid. E essa disciplina em específico só me matriculei pra dizer que já estudei com Gaby. Mas atualmente a gente faz uns EAD juntos no IMPA. E espero que no futuro a gente estude juntos de novo no IMPA, mas não a EAD, sendo presencialmente dessa vez. Eu participei da primeira edição do LEMA como monitor. E, eu alternava os dias da semana que eu realizava na monitoria. As quartas eram os dias mais dahora, porque só tinha Daniel e Laura, e a gente ficava conversando por 10 min a cada 5 min de monitoria dada. Inclusive teve um dia que Daniel contou da vez que ele apagou a luz do banheiro e tinha um cara lá dentro ainda e ele deu um grito. Ele tava contando todo empolgado e quando terminou eu dei um grito: “HEY ESSE CARA ERA EU!”. Vocês precisavam ver a cara de vergonha dele, e Laura coitada quase se acabava de rir.

Eu também fui monitor de duas disciplinas. Todas com Gilcenio. Ele vazou da UFPE antes de eu conseguir me despedir e agradecer a ele pena oportunidade. Mais precisamente, por ter me convidado para ser professor pelo PIC Jr. Que experiência senhoras e senhores. Ah que saudades desses meus pestinhas. Dalessandro, Victor, Ytalo, Caroliny, Raquel, Yan, João, Vitor, Jerfferson, Natanael, Lucas, Richard, Alejandro e Jonatha. Meus nenéns. Duas vezes por mês nos encontrávamos aos sábados no CAA para a aula. Esse era um projeto que geralmente costuma selecionar somente os nerdizinhos. De via de regra, quem é nerd costuma ser muito comportado em sala de aula. Existe uma pressão muito grande em cima deles para que continuem sendo os alunos exemplares, todo mundo ao redor deles esperam por isso. Mas eles ainda são crianças. E se tem uma coisa que criança gosta de fazer é de brincar e bagunçar. Então eles acumulava toda aquela energia que eles não liberavam na escola durante quinze dias e soltava toda de uma vez nas minhas aulas. Isso porque ali, eles não sentiam a pressão que tinham na escola. Porque, naquela sala de aula, eles não eram os nerd. Uma vez que se todo mundo é nerd, ninguém é nerd. Naquela sala, eles eram a turma do fundão, eles eram os bagunceiros. Lá eles não sentiam a cobrança que colocavam neles na escola. E eu não poderia acabar com essa diversão. Foi uma tarefa difícil, conciliar isso de não reprimir a bagunça deles, e manter a ordem na sala para a aula acontecer. Aqui me lembrei das minhas aulas do ensino médio com Maurílio, quando era eu que levantava a bagunça, e mesmo assim a aula acontecia perfeitamente. Um professor que participa da bagunça, esse foi o lema que adotei pra mim e assim fiz. No ano seguinte não continue com no projeto, mas batalhei para que ele ocorresse ainda na UFPE. Era visível os olhos encantadores deles por estarem estudando numa faculdade. Eu me alegrava para ir dar aula quando acordava e via no status deles o #partiufacu. Quando escutei de alguns deles que queriam depois voltar pra lá pra fazer a graduação ali, aquilo me motivava demais para continuar ensinando a eles, e colaborar com a realização desses sonhos. O dia mais importante da minha vida, até agora, foi no final deste ano quando levei eles para um passeio em Recife. Era o encontro de todas as turmas do PIC Jr de Pernambuco inteiro. Infelizmente, nem todos da minha turma puderam ir. E porque eu digo que é o mais importante da minha vida. Porque até então, eu só era responsável por mim mesmo. Mas nesse dia, eu fui responsável por 6 crianças. Escutar das mães deles para eu ter cuidado com seus meninos, que ali era a primeira vez que eles viajavam sozinho sem os pais, me colocou muita pressão. Mas, consegui lidar com isto. Nossa, esse dia tem várias histórias. Queria contar todas elas. Mas a que mais me marcou, foi quando em um determinado momento eu olhei pra eles, olhei ao redor, vi todas as demais crianças, e percebi: “de fato, esses são meus alunos”. Olhei pro cenário e percebi que eu estaria desse mesmo jeito na qual minhas crianças estavam. Essa viagem foi legal também pois conheci minha webamiga Eloisa, professora do polo Garanhuns, o professor Hinojosa, que nos orientou durante todo o ano as atividades do PIC, e ainda deu para eu conhecer meu ídolo na matemática o professor Gugu, e levei o livro dele ainda pra pegar o autógrafo. Para finalizar, um dos momentos mais lindos para mim, foi no Natal. Quando deu meia noite e peguei o celular e vi ali os áudios de Feliz Natal deles para mim. Me senti a pessoa mais especial do mundo.

Nas idas para Caruaru de ônibus eu costumava ir na minha dormindo escutando música. Não fiz parte da galera do fundão do ônibus. Com exceção da minha parceira de buzão Ana Paula. Onde a gente ia conversando o caminho inteiro. Nossos horários nunca batiam. Assim, quando coincide, já se tinha passado tanto tempo, e tínhamos muitas coisas para conversar. Ana Paula, é uma das poucas pessoas do mundo que restou que não tem rede social nenhuma. Então, eu não fazia ideia nenhuma do que se passava na vida dela, e ela da minha. Assim, quando nos víamos, sempre tínhamos histórias pra contar, e a viagem de 1 hora e meia, acaba sendo pouco tempo. Outro amigo meu de Lajedo era Mateus. Hoje ele é todo bodybuilder, mas eu conheço ele desde muito tempo antes, quando ele estava longe de compartilhar dieta no storys. E esse fit de Mateus me proporcionou um momento engraçado. Quando estávamos realizando a regência do nosso estágio 3, Mateus saiu da sala por um instante e deixou a garrafa d'água. Eu estava com sede, eu pensei: “porque não?”. Só que a garrafa dele era uma dessas de maromba cheia de tecnologia, que eu não sabia mexer. Resultado, abri pelo canto errado e água da garrafa caiu toda em cima de mim. E a turma ia entrando na sala e ficava rindo da minha situação. E foi isso, tive que dá a regência da aula, todo ensopado, com Mateus. Outro amigo meu ali foi meu parceiro Dudu. Só fizemos um amigo secreto nesse tempo todo ali. E tirei Dudu. Nossa como eu queria dá o chapéu de vaqueiro pra ele, mas não sabia que era tão caro. Mas o “action figure” de cavalo que dei ainda foi um bom presente, que ele guarda com carinho.

Eu pretendo ser um professor que inspire os alunos. E para isso eu pretendo me basear em Marcilio, ou como eu o chamo, “tio fofo”. Se você já o viu, vai entender o porque desse nome. Diga se não dá vontade de dá um abraço nele? Eu amo Marcilio, sou muito grato por tudo que ele me ensinou, por ter me ajudado bastante no meu processo de seleção de mestrado. Outro tio na qual me inspiro é o tio Binho. Não aceito críticas a Binho aqui não viu. Uma vez levei minha namorada para assistir a aula de EDO dele comigo, e isso foi no dia dos namorados (olha aí que excelente encontro amoroso). Ela não conhece nada do Cálculo, porque ela fazia biologia, mas ela no meio da aula me falou: “nossa ele fala muito bem dá até vontade de prestar atenção”. E é isso mesmo, Binho explica direitinho e bem. Quero ser assim também. Além disso, espero um dia que a gente possa realizar nosso rolê de skate juntos que ele anda me devendo <3.

O meu lugar favorito ali no CAA com certeza é o LEMAPE. Minha história com esse laboratório começou comigo sendo um fantasma. Explico. Quando me inscrevi para ser monitor, os encontros de formação estavam caindo sempre no dia que tinha consulta no dermatologista, por causa do meu problema com acne. Ivanildo entendia bem o que eu estava passando e aceitava minhas faltas. Mas, por faltar tanto, eu não consegui acompanhar as funções que devia exercer ali. Então não virei monitor. Mas, eu ainda estava no grupo do Whatsapp do LEMAPE. E daí tia Cris me batizou como sendo o monitor Fantasma. Mas depois eu virei monitor mesmo “mesmo” do laboratório. Quantos momentos de alegria eu vivenciei ali. E cada final de semestre era aquele banquete que Tia Cris e Ivanildo bancava pra gente. Meu sonho era que cada escola tivesse um laboratório como o LEMAPE. Quando levava minhas crianças para ali, conseguia vê nos olhinhos deles o encantamento deles com esse lugar. Eu espero que o LEMAPE cresça cada vez mais e mais. Infelizmente estou saindo do curso no mesmo momento em que começamos a dá a frente o projeto “Iniciativa Projac” que é o canal do Youtube do laboratório. Espero que esse projeto floresça e que alcance o máximo de professores de matemática, porque nossa equipe de monitores tem muito o que compartilhar para ajudarmos no desenvolvimento do ensino de matemática.

Nessa época de EAD, eu procuro deixar minha câmera ligada. Quero mostrar para o professor que ele não está sozinho ali. Teve aulas com Tia Fátima, numa turma com 60 alunos e só eu e ela ali com as câmeras ligadas. Para tentar descontrair um pouco, antes da aula começar eu coloco para tocar a "Rádio Euclides", onde basicamente deixo tocando música pra galera escutar enquanto espera a aula começar. Sei que isso é uma boa ideia quando uma vez tia Fátima entrou na sala e falou, parafraseando: "não importa com que humor você esteja, quando entra aqui e vê a alegria de Igor, você se alegra junto". Certamente esse último período meu no curso não estava ocorrendo como eu imaginava. Era meu último momento ali, eu tava planejando aproveitar o máximo possível ali de cada instante. Queria comentar aqui como foi essa minha defesa de maneira remota. Mas esse texto foi escrito antes de eu defender. Só espero que seja uma boa defesa como eu estou imaginando.

E por falar em TCC, vou te contar agora como ele surgiu. Na verdade, não vou. Porque eu não lembro como e quando foi o start da ideia que surgiu na minha cabeça. Só sei que tive e comecei a pesquisar sobre. Primeiro vou falar como descolei Simone para ser minha orientadora. E calma, se você viu na primeira página que Cris é minha orientadora, tenha paciência que vou chegar lá. Enfim, estava eu na aula dela de Pré-Projeto, e eu fiz uma pergunta para ela, que não lembro bem, mas ela entendeu que eu estava convidando para ser minha orientadora. Isso na frente da turma. Aí ela: "tá não vou dá um fora nesse menino na frente de todo mundo". Nisso, pouco tempo depois ela solta a lista de sugestões de orientadores para os respectivos alunos. Quando eu abro essa lista e me deparo que no meu nome estava Simone, eu fiquei em choque. Porque, nossa "ela me escolheu". Me senti como se fosse uma criança de uma profecia, pique esses filmes ai de ficção, que nasci destinado a ser orientado por Simone. E eu fiquei me achando. Porque muitos querem ser orientados por Simone, e não foram indicados. Mas eu fui escolhido! Poxa, Simone é perfeita. Rainha, dona de tudo. Eu assistia suas aulas e ficava: quero ser assim quando eu crescer. Aí, quando fui falar com ela, a verdade veio à tona com ela me contando tudo, tururu… Mas, não desanimei, mesmo não sendo destinado a isto, ainda era seu orientando, e precisei dá valor ao fruto do acaso. Nossa, e a primeira reunião de orientação, que tive com ela? Estava com muito nervosismo. Eu estava a esperando sair da sala que ela tava dando aula. Nisso, pra passar o tempo, eu estava andando pra cima e para baixo no corredor. Daí ela saiu da sala, e não percebi. Só me toquei quando ela já estava bem a frente. Aí, sair correndo para alcançá-la. Só que ela entrou no banheiro, e fiquei na porta esperando sair. E quando ela saiu, ela levou um susto de mim kkkkk. Mas, a orientação foi muito boa, saí bem empolgado dali. Nisso, fomos desenvolvendo o trabalho, passamos por TCC 1, chegamos no TCC 2 e junto veio o covid e a

Estherzinha <3. Antes de existir esse período 2020.3, o período 2020.1 estava de “recesso indeterminado”. Porém, Simone ia entrar de licença, por motivos de Estherzinha <3. Nisso, legalmente, ela não poderia ser orientadora, pois não poderia assinar nenhum documento legal. Daí ela propôs que eu agilizasse meu trabalho, para defender até início de junho. Mas nessa minha nóia de querer defender presencialmente, recusei, e estava disposto a esperar até dezembro, quando ela voltasse da licença. O problema foi, que nesse meio termo, fui aprovado no mestrado, e precisaria ter concluído a graduação. Assim, comecei a correr para terminar essa criança. E agora eu estava sobre a coorientação de Luana :3. Nossa Luana, foi um amor todo. Eu tinha até vergonha, porque ela em um instante me retornava com o trabalho corrigido, e eu demorava mais tempo só para olhar as sugestões que ela mandava. Mesmo, com minha preguiça, o trabalho avançou rápido e ficou digamos uns 98% pronto. Faltava só mais retoque e partiu apresentar. Nisso, com Simone ainda de licença, dei o recado a Luana né que ela acabava de ser “promovida” a orientadora. E ficamos empolgado. Mas, logo veio o balde de água gelada. Luana não podia ser legalmente minha orientadora, já que não era professora do corpo docente do curso, tururu... Assim, para encerrar meus problemas de vez, surgiu a ideia de colocar Cris como minha orientadora <3. E eu fiquei como? FELIZÃO!!! Eu agora fazia parte do time Cris. Agora finalmente, eu, Fábio e Ana podíamos ser o time 7. Desde que já tinha acertado que Cris estaria na minha banca, eu já estava feliz. É uma honra para mim ter a colaboração dela no meu trabalho. Eu admiro tia Cris demais. Amo o fato de Cris nunca cortar minhas asas. Pelo contrário, ela me dá uns balões de gás hélio, para eu poder voar mais alto. Adoro quando chego para contar uma ideia pra Cris, e ela diz: “vai lá menino”. É com o apoio de Cris que sei que posso realizar um bom trabalho. E agora com meu “Dream Team” de orientadoras, sei que fiz o meu melhor aqui. O melhor de mim está aqui. Sou infinitamente, agradecido as três por toda ajuda que me deram. Amos vocês Mil Milhões <3

Sou grato aos amigos da minha turma. Um salve para a eterna turma 2016.1, Anthonny, Rayssa, Emanuel, Rodolfo, Ana, Fábio, Kaio, Leonora, Gabe, Thais, Eduardo, Mateus, Elton, Mayara, Michael, Atanael, Seu Zé, Jefferson, João Vitor, Gildeir, Sebastian, Anverton e João Paulo. A todos amigos que fiz ali. Um beijo para Edson, Erivelton, Rafa, Daniel, Gaby, Laura, Robson, Ana Paula, Zé do bolo, Everton, Rafael, Micaela, Matias, Cleyton, Davi e Larissa. Obrigado a todos o professores que colaboraram com minha formação, Inaldo, Jeremias, Kátia, Paulo Câmera, Trajano, Thiago, Tânia, Jefferson, Ana

Luiza, Macário, Afonso, Ana Lucia, Kátia, Cleiton, Ivanildo, Edelweis (o tigrão), Dilson, Marcilio, Binho, Simone, Marcos Henrique, Renata, Ana Priscila, Tia Cris, Fátima, Desterro, e apesar de não ter sido aluno de vocês, temos nossas resenhas trocadas e sou grato por isso Valdir e Jaqueline.

Nem só de Caruaru vive minha formação. Sou grato demais aos meus amigos de Lajedo. Um flip para a galera da skate nova era, Mateus, Moacir, Luam, Flash, Márcio, Sr Wilson, Paulinho. Um xero ao demais (espero não esquecer ninguém): Dudu, Vinicius, Winicius, Mikel, Teuzin, Artur, Mário, João Vitor, Lavínia, Layla, Fernando, Thaina, Thawanny, Thais, Raquel, Carol, Heloiza, Maria Clara, Mário, Maurílio, Thalita, Thaywana, Natália, Reinaldo, Gustavo, Edilson, Laurene, Larissa, Karla, Vanessa, Catarina, Marília, Nadilly, Gabi, Bruno, Italo, Dany, Denilson, e minha webamiga sergipana Any que espero um dia nos encontrarmos.

Sou imensamente grato por minha família. A vó Célia, que sempre se enche de alegria por cada conquista minha. A minha Vó Xica, que faleceu no meu segundo ano de faculdade. E principalmente ao meus pais, mainha e painho, que sem vocês não teria chegado aonde cheguei. Quem sempre apoiaram meus estudos, e fizeram de tudo para me proporcionar uma boa educação. Espero um dia poder retribuir tudo que vocês me deram.

Por fim, sou grato a meu amor, minha namorada. Esteve comigo nesses 5 anos, e devo tudo a você. Obrigado por caminhar ao meu lado nessa minha jornada me apoiando e me incentivando.

Essa é minha The Last Dance, minha última dança, nesse curso que guardo com muito carinho e amor. Boa leitura a todos.

Claro eu sou o começo, Deus disse faça-se a luz, e a luz das minhas ideias, é daquelas que seduz, o pus das minhas chagas coberto, Obaluê. E quando tu me descobre eu sou a perfeição que você sempre quis ver.
Álvaro Mamute (Briga Mesmo).

RESUMO

A obra *Elementos* de Euclides escrita por volta de 300 a.c. foi a maior coleção de livros de matemática de toda a antiguidade. Eles continuaram consagrados durante a idade média, sobreviveram ao período moderno e chegaram até nós agora na época contemporânea, sempre servindo de referência bibliográfica para o estudo da geometria, aritmética e álgebra. Por causa deste sucesso, e do fato dos conteúdos aritméticos previstos para o sexto e sétimo ano hoje já haviam sidos sistematizados por Euclides, conjecturamos que possa existir relações entre o que está escrito no livro sétimo *Elementos* com o que é estudado nas escolas atualmente. Tal livro é primeiro de três livros que o autor dedica para o estudo da aritmética. O nosso trabalho tem como objetivo verificar a veracidade desta conjectura, respondendo assim quais seriam essas relações. Para tal, realizamos toda uma inquirição deste livro, e ao comparar com outro livro atual sobre aritmética, de caráter didático, observamos as semelhanças em que ambas obras compartilham. Como por exemplo, a maneira que as duas apresentam e entendem o conceito de mdc. Para reforçar a tese que esta concordância não é mera coincidência, levantamos um estudo historiográfico, do tipo bibliográfico, apontando casos, tanto na matemática quanto na filosofia, em que o trabalho de Euclides já havia influenciado diretamente.

Palavras-chave: História da Matemática. Elementos de Euclides. Aritmética Escolar.

ABSTRACT

Euclid's Elements, written around 300 BC it was the largest collection of mathematics books of all antiquity. They remained consecrated during the Middle Ages, survived the modern period and have reached us now in the contemporary era, always serving as a bibliographic reference for the study of geometry, arithmetic and algebra. Because of this success, and the fact that the arithmetic contents foreseen for the sixth and seventh years today had already been systematized by Euclides, we conjecture that there may be relations between what is written in the seventh Elements book with what is studied in schools today. This book is the first of three books that the author dedicates to the study of arithmetic. Our work aims to verify the veracity of this conjecture, thus answering what these relations would be. To this end, we conducted an entire survey of this book, and when comparing it with another current book on arithmetic, of a didactic character, we observe the similarities in which both works share. As an example, a way that both present and understand the concept of gcd. To reinforce the thesis that this agreement is not a mere coincidence, we raised a historiographic study, of the bibliographic type, pointing out cases, both in mathematics and in philosophy, in which Euclides' work had already directly influenced.

Keywords: History of Mathematics. Euclid’s Elements. School arithmetic.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO: O Início

"Se eu tivesse um mundo só meu, tudo seria um absurdo. Nada seria o que é, porque tudo seria o que não é. E, ao contrário, o que é, não seria. E o que não seria, seria. Entende?"

Alice no País das Maravilhas (CARROL, 2012).

A história de Alice no país das maravilhas é fascinante, uma das mais consagradas de todos os tempos. Essa frase do chapeleiro podia ser facilmente falada por qualquer pessoa que a longo da história decidiu criar um "novo mundo" contrariando a ideias de Euclides. *Como assim existem infinitas retas paralelas? "Seria um absurdo!"*.

O mundo da geometria que Euclides criou foi tão "endeusado" na história da humanidade, que durou quase dois milênios para ele começar a ser questionado. Isto é, criar uma nova geometria ou novo mundo não parecia tão absurdo assim. Se Euclides fosse um deus, a geometria euclidiana seria sua religião e os seus livros, *elementos,* juntos, formariam a sua bíblia. Faz até sentido essa analogia uma vez que "[...] nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico" (EVES, 2004, p. 167).

Quando falamos aqui que Euclides criou a geometria euclidiana, não estamos dizendo que tudo ali foi descoberto por ele. Mas sim a maneira que organizou e descreveu como as coisas deviam surgir e agir. No entanto ele não criou somente o mundo da geometria. Ele também criou seu próprio mundo para a aritmética. O que nos faz pensar qual foi o impacto deste mundo para o desenvolvimento da matemática? Será que foi igualmente importante, como o da sua geometria?

Uma vez que os *Elementos* foram usados como livro didático em partes diferente do mundo, teria eles influenciado o ensino de matemática? Caso sim, eles influenciam hoje ainda? De qual modo? Este trabalho tem como objetivo, responder estas duas perguntas acima.

Os Elementos de Euclides é um tratado consistindo de 13 livros, englobando uma coleção de definições, postulados, proposições e demonstrações matemáticas, desses, os livros de aritmética de Euclides são os livros 7, 8 e 9. O sétimo *Elementos*, julgamos ser o mais interessante entre eles, pois, é nele que consta todas as definições que são usadas nos três livros aritméticos. Assim, infelizmente (por questões de tempo), delimitamos nossa pesquisa para somente ele.

Este *Elementos* em específico, define o que é um número, quando ele é primo ou composto, par ou ímpar, o que é uma divisão, o que são múltiplos, entre outros. Nele, também é apresentado algoritmos para o cálculo do Maior Divisor Comum - MDC e Mínimo Múltiplo Comum - MMC entre dois números, propriedades a respeito de frações, de números primos entre si e consta com proposições sobre divisibilidade.

Todos assuntos descritos acima estão previstos pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o sexto e sétimo ano do ensino fundamental (BRASIL, 2018). Com isto, nos perguntamos quais seriam as relações entre o conteúdo do sétimo livro de Euclides com os conteúdos aritméticos previstos para o sexto e sétimo ano?

Gostaríamos de lembrar como surgiu a ideia de fazer essa pesquisa. Talvez estivesse igual a Alice, sem tema para pesquisar, e o gato apareceu para nós e falou: Se você não sabe para onde ir qualquer caminho serve (CARROLL, 2002). Apareceu este caminho, e seguimos. Mas, qualquer caminho ainda é um caminho. Acertamos. Deste então, a proposta da pesquisa nos fascina. E, ela tem seu propósito.

Aqui apresentamos um exemplo da História da matemática e também do ensino da mesma. Com isto, pretendemos que o leitor, ao final, se conscientize sobre a necessidade de explorar a natureza da matemática, se quiser realmente ensiná-la. Que entenda que o processo de educação, não basta aprender o conhecimento específico.

> Se estabelecermos um laço entre o aluno, a época e o personagem relacionado com os conceitos estudados, se conhecerem as motivações e dúvidas que tiveram os sábios da época, então ele poderá compreender como foi descoberto e justificado um problema, um corpo de conceitos, etc. (VALDÉS, 2002, n.p apud GROENWALD; SAUER; FRANKER, 2005, p. 2)

Conhecer a maior produção literária matemática de todos os tempos e levar o debate, da nossa problemática, daqui para o processo de aprendizagem, ajudará a estabelecer este laço citado por VALDÉS (2002). Portanto, desejamos, a todos aqui, uma boa leitura. Curiosidade geralmente traz problemas (CARROLL, 2002). No nosso contexto, de professores de matemática, isso é excelente.

2 O MÉTODO

Caminhando se faz o caminho, desta maneira, indo contra as experiências do leitor, começaremos aqui já com a metodologia da nossa pesquisa. Tudo escrito aqui, tem como função culminar no nosso objetivo geral. Assim, para cativar sua atenção, explanamos como foi realizado este trabalho, de modo que, na sua leitura fique clara os elos entre os capítulos e as relações de implicação que cada um exerce sobre seus posteriores.

O título deste trabalho, *A Influência Euclidiana na Aritmética do Ensino Básico,* remete que existe uma influência e aqui apenas mostraremos quais são. A definição de Influência, pelo dicionário, é:

> [...] a ação que alguém ou algo tem sobre outra coisa, ou seja, o poder, o controle ou a autoridade. Quando se diz que determinada pessoa é uma influência para as demais, significa que serve de modelo ou que exerce interferência sobre o modo de agir ou de pensar das outras pessoas, por exemplo. (PADILHA; CARVALHO; LENZI; SOUSA, 2016)

A expressão “Influência Euclidiana”, aqui, não remete a pessoa Euclides, e sim a suas ideias escritas em seu livro. Assim, o nosso título, significa que serve de modelo ou que exerce interferência sobre a produção de ideias aritméticas para o ensino básico.

É de se esperar que essa interferência, se ocorrer, seja de maneira indireta. Uma vez que a obra *Elementos* só receberam uma tradução para o português brasileiro em 2009, assim, a porcentagem do quantitativo de professores e alunos de matemática do nosso país que tiveram contato com o livro, é provável, que seja pequeno.

Focaremos, então, na parte da definição na qual diz que influência significa “que serve de modelo”. Poderíamos verificar isso, analisando os modelos para os quais, hoje, utilizamos para o ensino de matemática, e depois analisarmos os modelos destes modelos. Prosseguindo, deste modo, de maneira recursiva, até ver se em algum momento chegaríamos aos *Elementos* de Euclides.

Este é trabalho muito difícil de se fazer, e com certeza não faremos aqui. Necessitaria de muito tempo e recurso, dois itens que gostaríamos muito de ter (quem não quer?).

Como então procederemos? Bom, pelo o método anterior, começamos de hoje e iremos ao passado. Faremos ao contrário. Começaremos lá em Alexandria, 300 a.C., e vamos até o presente.

Mas também não é desse jeito que você está imaginando. Inverter a ordem da análise não diminui o tempo e recursos necessários para a mesma. O que construiremos aqui é uma narrativa, baseado em textos de história da matemática, que possa dá indícios, que faça sentido existir esta influência nos dias atuais. Disto, analisaremos obras contemporâneas, e se existir algo nelas que, possivelmente, possam ser relacionadas com o conteúdo do sétimo livro de Euclides. Pela nossa narrativa, construída anteriormente, teremos um argumento que possa embasar a nossa teoria levantada no começo, que existe uma influência das ideias de Euclides na aritmética sobre o ensino da mesma nos dias atuais. E, com isto, poderemos responder, o problema de nossa pesquisa que é quais são as relações entre os dois.

Bom, então está na hora de classificar nossa pesquisa. Faremos isso segundo Gil (2002). Ela é qualitativa do ponto de vista da forma de abordagem ao problema, pois, pretendemos analisar os dados coletados indutivamente. A pesquisa qualitativa é voltada para a parte subjetiva do problema. Ela é capaz de identificar e analisar dados, onde não são modelados numericamente.

Com base em seus objetivos, nossa pesquisa será exploratória. Pois, “Estas pesquisas têm como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses” (GIL, 2002, p. 41). O tema das pesquisas exploratórias é, geralmente, pouco conhecido. Daí, têm-se a necessidade de realizar grandes levantamentos bibliográficos, citações e exemplos que facilitem a compreensão do assunto.

Pesquisas bibliográficas são muito utilizadas nas pesquisas exploratórias. Nossa pesquisa não será diferente. Por fim, do ponto de vista dos procedimentos técnicos, a pesquisa será de caráter bibliográfico, que tem como objetivo reunir as informações e dados que servirão de base para a construção da investigação proposta a partir do nosso tema.

3 A HISTÓRIA

A frase, atribuída a Auguste Comte (1798-1857), filósofo francês, considerado o fundador do positivismo, “Não se conhece completamente uma ciência enquanto não se souber da sua história” reflete bem a justificativa deste capítulo. Navegaremos aqui sobre capítulos e personagens que estão envolvidos com o nosso protagonista, o sétimo *Elementos.*

Infelizmente, não é possível falar sobre todos. De maneira sucinta, falaremos apenas de alguns personagens envolvidos nessa trama, por considerarmos indissociáveis, quando se trata dos Elementos. Afinal, este trabalho não é sobre eles. Mas, julgamos ser os mais indissociáveis quando se trata de falar sobre quaisquer *Elementos.*

É de se esperar que o autor seja um deles, é claro. O indivíduo onde, supostamente, foi a inspiração para a criação, também. O principal comentarista da obra, e o responsável por ter feito a obra sobreviver aos dias de hoje, certamente. O local onde foram produzidos, não pode ficar de fora. Mas, antes de todos estes, existe um homem, grande para história e no nome, que sem ele nada disso existiria.

3.1 O Semideus

Este termo, semideus, propagado por Homero em seus poemas, diz respeito a seres provenientes de uma relação entre uma humana e um deus. A história de um rei, tratado com semideus, de um reino pequeno, que marcha em direção a seus inimigos, em muito maior número, e os derrota um por um, construindo o maior império da antiguidade, podia facilmente ser mais um poema de Homero. Mas na verdade, é uma história real.

Alexandre Magno (356 a.C. – 323 a.C.) popularmente conhecido com Alexandre o Grande. Filho do Rei Filipe II, era o primeiro na linha de sucessão do trono do reinado da Macedônia. Ainda adolescente, seu pai contratava, nada mais, nada menos, que Sócrates para ser seu professor particular. Este fato é importante para nossa história, pois deve-se aos ensinamentos socráticos que instigou o príncipe mais tarde a colocar em prática o projeto do seu pai, a helenização. Falaremos a respeito daqui a pouco.

Supostamente, o Rei Felipe II foi assassinado a mando do Imperador Persa Dario III. Alexandre, agora rei, reúne suas tropas, marcha até a Ásia para lutar contra os assassinos do seu pai. Foram várias batalhas, sempre em menor número, mas ganhando todas. A estratégia de batalha de Alexandre era formidável. Tal fato o fez ele receber o nome de Alexandre o Grande.

O Egito nessa época, era dominado pelos persas. Quando as tropas macedônias chegaram nas terras faraônicas, não obtiveram muitas resistências dos adversários.

> Mas mesmo que a guarnição persa no Egito tivesse se rendido, Alexandre percebeu que a verdadeira posse da terra exigiria dele o máximo de tato e diplomacia. Os egípcios poderiam muito bem aproveitar esse momento para colocar em ação outra de suas revoltas contra o novo soberano estrangeiro. Alexandre tinha de proceder com muito cuidado, a fim de que os egípcios o aceitassem de bom grado como seu governante – mas, para isso, precisava dos sacerdotes a seu lado. Assim, Alexandre dedicou os meses seguintes a mostrar ao povo do vale do Nilo que ele não só respeitava sua religião, mas era um entusiasta dos deuses egípcios. (FREEMAN, 2016, p. 118)

Um exemplo disso ocorreu quando ele ordenou a construção de santuários para os deuses egípcios. Assim, ele ganhou simpatia deste povo, e logo foi condecorado como faraó. Em seguida foi chamado de filho de Amon Rá, deus máximo da mitologia egípcia. A mãe de Alexandre já falava para seu filho, que o mesmo era filho de Zeus, uma vez que ela havia sido possuída pelo o deus em forma de raio. A inteligência de Alexandre e sua invencibilidade em suas lutas, fizeram com que os gregos realmente achassem que ele era filho de Zeus. Por causa disso, ele ficou conhecido como filho de Zeus-Amon (DAHMEN, 2007).

Talvez ele realmente fosse um semideus, pois era considerado assim por dois povos com culturas diferentes. Além disso, deuses muitas vezes são caracterizados pelas grandes obras que criaram. Zeus e Amon criaram o mundo segundo a crença dos gregos e egípcios. Para nós, Alexandre criou o mundo em que foi propício para o nascimento do nosso objeto de estudo hoje. Estamos falando, claro, da cidade de Alexandria.

3.2 A Cidade

Por onde passava, Alexandre mandava construir uma cidade. Geralmente com intuito de ali ser uma capital para seu império. Todas elas se chamavam de Alexandria. A principal delas foi a do Egito. As construções dessas cidades faziam parte do projeto de helenização, cuja ideia era de espalhar a cultura helênica por todo o império.

Infelizmente, Alexandre morreu cedo, e não pode dar prosseguimento a este projeto, inclusive com sua morte ocorre a divisão do império conforme desenvolve Freeman (2016),

> [...] divisão do império. Ptolomeu recebeu o Egito, enquanto Seleuco, um amigo de Pérdicas, manteria a maior parte da Ásia naquele momento. Antípatro e seu filho, Cassandro, ficariam com a Macedônia e a Grécia, e Lisímaco, o ex-guarda-costas do rei, tomaria a Trácia. (FREEMAN, 2016, p. 251)

Deles, apenas Ptolomeu, que se auto declarou imperador do Egito, quis continuar com o projeto. Nessa época, Atenas já era conhecida como sendo um centro de excelência para estudos. Já fazia parte da cultura grega a valorização do conhecido. Assim, Alexandria, na tentativa de repetir este feito, foi ordenado a construção de uma grande biblioteca.

> Ptolomeu elaborou uma carta "a todos os soberanos e governantes da terra", na qual pedia que "não hesitassem em lhe enviar" as obras de todos os gêneros de autores: "poetas e prosadores, retóricos e sofistas, médicos e adivinhos, historiadores e todos os outros mais". Ordenou que fossem copiados todos os livros que por acaso se encontrassem nos navios que faziam escala em Alexandria, que os originais fossem retidos e aos proprietários fossem entregues as cópias; esse fundo foi posteriormente chamado de "o fundo dos navios". (CANFORA, 1989, p. 19)

Mas, ela não ficou restrita apenas como um repositório de obras. Durante nove séculos estabeleceu como um notável centro de atividade intelectual, sendo o epicentro do pensamento grego e romano (LÉVÊQUE, 1987, p. 13 apud CABRAL, 2010, p. 10). Sua influência é visível. Podendo ser percebida em todo o mundo helenístico. A valorização do conhecimento escrito ali propiciou, também, o estudo de diversas áreas do conhecimento, por seus estudiosos que ali frequentavam. Teorias e modelos criados pelos acadêmicos desta Biblioteca, continuaram a influenciar a matemática, as ciências, a filosofia e a literatura até pelo menos o período Renascentista.

O legado da Biblioteca de Alexandria tem efeitos que se alastram até os dias atuais. Ela pode ser considerada um modelo de biblioteca universal, do ideal de armazenamento do conhecimento, e da fragilidade desse conhecimento.

É de se esperar que, neste ambiente, fosse propício para a construção de livros de matemática, que a época fosse considerada a "nata" dos mesmos. E se estas obras que tenham ganhado destaque na biblioteca, não poderiam ter ficado presas somente a ela. De modo que viajantes, de toda parte do mundo antigo, tenham levado cópias para seus respectivos países. Assim, mesmo com a destruição da biblioteca, séculos depois, sem deixar nenhum rastro, tais obras alexandrinas sobreviveram ao tempo.

3.3 O Menino

Este devia ser o personagem mais interessante para falarmos. Colocaríamos aqui páginas e páginas sobre sua vida, sua personalidade, seus hobbies, praticamente tudo que o rodeava em sua vida. Seria, mais ou menos, quando pedem para um fã descrever a vida de artista favorito. Mas, para a nossa tristeza, não conhecemos praticamente nada sobre ele.

Euclides de Alexandria. O autor do maior *best-seller* da antiguidade (BOYER, 1974) é um personagem obscuro na história da matemática. O título desta subseção tem um sentido. Não é apenas uma liberdade poética dos autores de se referir a Euclides. A carência sobre fatos sobre ele, faz com que cada leitor de sua obra crie uma própria personalidade sobre o autor. Apesar de que, ele é sempre retratado, em imagens, como um velho barbudo e sábio, preferimos esse aspecto mais jovial para ele. Geralmente, revoluções são iniciadas por jovens e costumam ter embates com os mais velhos. É nessa perspectiva que chamamos Euclides de menino. Não no sentido de imaturidade, longe disso, mas na revolução que ele criava abandonando de vez qualquer resquício que existia de seus antecedentes em relação a matemática não axiomática-lógica-construtiva.

Largando, agora, essa visão romântica sobre ele, e voltando aos fatos históricos, nos esbarramos na dificuldade de descrevê-lo. Isso se reflete em

> O mesmo se dá quando se procura escrever a história de um acontecimento, de uma cultura, de uma época. Apenas aproximações estão no domínio do historiador: boas ou más. Tudo o que ele pode almejar é que o seu relato seja "o canto da Sereia" que não engane, mas leve realmente ao objetivo. E isso, principalmente, ao dispormos de documentos para a consulta, na existência de fontes primárias. Falta delas, fica cheio de obstáculos o caminho para uma boa aproximação dos fatos ocorridos e dos feitos alcançados. (BICUDO, 2009, p.33)

É nessa falta de fontes primárias sobre Euclides que talvez estejamos sendo enganado pelo "canto da sereia". Pois, tal canto, para nós, neste caso, é o *comentário* de Proclo[1] sobre o primeiro *Elementos*. É a principal referência histórica sobre nosso menino. Porém ela se distancia de 8 séculos de Euclides. A falta de seu autógrafo, faz com que usamos o livro de Proclo para, até mesmo recriar todos os outros *Elementos*. Nele, há uma tentativa de descobrir sobre o personagem Euclides. É uma cadeia de argumentos que Proclo usa que

[1] Proclo Lício, filósofo neoplatônico que será apresentado ao longo do texto.

hoje nos baseamos para descrever a vida do alexandrino (que, diga-se de passagem, não se sabe sua naturalidade). A figura abaixo retrata essa argumentação.

Figura 1 - Relato sobre Euclides

(1) Arquimedes viveu imediatamente após o primeiro Ptolomeu;
(2) Arquimedes menciona Euclides;
(3) Há uma história sobre algum Ptolomeu e Euclides;

Logo

(I) Euclides viveu no tempo do primeiro Ptolomeu.

(4) Euclides medeia entre os primeiros discípulos de Platão e Arquimedes;
(5) Platão viveu de 287 a 217 a.C;
(6) Arquimedes viveu de 287 a 217 a.C.;

Logo

(II) Euclides deve ter atingido o seu acúmen por volta de 300 a.C. (o que acorda bem com o fato de que o primeiro Ptolomeu reinara de 306 a 283 a.C.).

(7) Atenas era, à época, o mais importante centro de matemática existente;
(8) Os que escreveram *Elementos* antes de Euclides viveram e ensinaram em Atenas;
(9) O mesmo vale para os outros matemáticos de cujos trabalhos os *Elementos* de Euclides dependiam;

Logo

(III) Euclides recebeu o seu treinamento matemático dos discípulos de Platão em Atenas.

Fonte: (BICUDO, 2009, p. 42)

Pode existir alguns furos nesta argumentação que possamos estar sendo enganados pelo canto. Por exemplo, no item (3), possivelmente, Proclo estava ali se referindo a famosa frase de Euclides para Ptolomeu: “Não há estrada real para a geometria”. Mas, isso é apenas uma lenda. A conclusão (III) é muito precipitada. Pois, Euclides podia ter recebido seu treinamento matemático na própria Alexandria, uma vez que muitos atenienses migraram para lá. Assim, o menino pode não ter ido para lá na primeira “diáspora”.

De qualquer forma, você pode ter notado na figura acima, que Arquimedes menciona Euclides. Na verdade, existem outros que citaram ele e até mesmo fizeram um comentário. Mas, existe uma razão para termos mencionado acima que o de Proclo é o mais importante.

Mostraremos tal razão mais adiante, aqui, agora, mencionaremos outros “comentaristas” de Euclides que, apesar de que esses relatos não terem chegados até hoje para nós, mas chegaram até Proclo. Assim, indiretamente, nos ajudam a compreender um pouco a mais sobre ele.

Herão de Alexandria, possivelmente, viveu durante o século I, usou seu *comentário* para explicar algumas passagens, digamos, “controvérsias” nos *Elementos.* Somente isto. Nada sobre a pessoa Euclides. Porfírio, filósofo neoplatônico, se acredita também ser um comentarista. Pois, Proclo fala sobre ele em sua obra. Mas devido a vocação pedagógica de Porfírio, talvez seu *comentário* tenha sido escrito com a proposta de ser um auxiliar para compreender a obra de Euclides, e não sua pessoa. Por fim, temos Pappus. O que se sabe sobre este trabalho está escrito em Proclo e que nele foi a respeito do livro X.

Ptolomeu iniciou no Egito, o que hoje iríamos chamar de dinastia Ptolomaica. O segundo Ptolomeu foi o que mais propagou o crescimento da biblioteca de Alexandria. Esta dinastia veio a se encerrar no ano 30 a.C. com a morte da saudosa rainha Cleópatra caracterizando o domínio do Egito pelo Império Romano. Isto causou um enfraquecimento no avanço da matemática. Uma vez que a ciência mais importante ali, para os romanos, era a retórica. Inclusive, há algumas abordagens que afirmam que a matemática foi separada em matemática e geometria, apenas a geometria era ensinada, devido as contribuições na construção de palácios, templos, arenas. Etc.

Porém, um dia a matemática voltaria a ser estudada, em especial, através dos *Elementos* de Euclides. Isto graças ao nosso próximo personagem.

3.4 O Discípulo

É possível alguém ser mestre de outra pessoa, mesmo já estando morta? É possível um objeto ser mestre de alguém?

Proclo Lício, nascido em 412 d.C. em Constantinopla, mudou-se para Alexandria enquanto jovem para estudar retórica. Depois ele se interessou no estudo da jurisprudência. Mas, posteriormente, ele abandona essas duas áreas e passou a estudar filosofia com Olimpiodoro e matemática com Heron. Proclo foi responsável pelo desenvolvimento do neoplatonismo. Fato este fundamental no desenvolvimento da trama.

Numa época onde a matemática era negligenciada em função da política, quando Marco Aurélio manda criar nas escolas cadeiras de filosofia, Proclo viu ali uma oportunidade para que se possa reflorescer a cultura helênica, e os valores da matemática (CACALANO, 2002).

Já mencionamos aqui no texto várias vezes a palavra “comentário”. Esse termo, tinha um significado diferente do que compreendemos hoje. No império Romano do século V, comentário é um compilado de várias notas de aulas, que geralmente era destinado para alunos ou amigos em Atenas (CACALANO 2002).

> O valor didático dos Elementos, e a seriedade com que fora escrito, pode justificar a feliz ideia do comentário de Proclo, ao seu primeiro livro. Como conhecedor daquela obra e professor que a tomara como referência, Proclo deve ser considerado, no mínimo, um novo expoente propagador daquela "pedagogia", com objetivos na compreensão da ciência e numa sociedade melhor. (CACALANO, 2002, p. 69, grifo do autor)

No seu *comentário,* Proclo foi bastante cuidadoso. Se preocupando a todo momento com a boa argumentação. Isso faz que sua obra não sirva apenas como uma ferramenta para reescrevermos os *elementos* hoje. Mas sim, uma obra de qualidade comparável a mesma e que possa ser usada para estudo, não só da matemática, mas da filosofia também.

Cacalano (2002) em sua tese de doutorado intitulada “O educador matemático em Proclo” tem como objetivo demonstrar que o nosso bizantino tinha uma preocupação com a educação matemática daquela época e o seu *comentário* é quase um “manifesto” para como a matemática se desenvolve e como ela deve ser passada. Uma vez que o bom educador (matemático) não deve ser associado ao nível do conteúdo (matemático) em que este atua, foi Proclo um bom educador matemático. (CACALANO, 2002, p. 64).

Proclo, ao procurar os *Elementos* para dar suas aulas de matemática, e por querer entender todas as nuances que o livro possuía, podemos dizer que Euclides conseguiu despertar em Proclo o desejo de propagar essa ciência. Assim, Euclides foi um professor para ele. Como falamos anteriormente, Proclo é um neoplatônico. Vale lembrar que a época, eles se chamavam apenas de platônicos. Por causa disto, ele pode ter sido um pouco tendencioso, ao fazer algumas conjecturas sobre Euclides. Quando o disse que Euclides é platônico e que seu objetivo com os elementos era de se chegar aos poliedros de Platão. Uma espécie de homenagem ao mesmo.

Mas seria mesmo Euclides um fruto da *Academia*? Platão por acaso teria sido o ser que inspirou Euclides para a construção dos *elementos*? São apenas suposições. Proclo acredita nelas. E você caro leitor?

3.5. O Sensei

Na humanidade, existe um grupo muito seleto de pessoas que se tornaram imortais, não no sentido literal, mas pelo legado. Isso no sentido, de quando o planeta Terra não for mais habitável, e estivermos morando em alguma rede de hotel da *Tesla* em Marte, ainda assim saberemos quem você foi e estudaremos sobre sua vida e sobre seus feitos. Platão pertence a este grupo. Já fazem quase 2500 anos da sua morte e o mesmo ainda se destaca quando o assunto é filosofia. Mesmo quem não gosta da área, o conhece. Quando estudamos Platão, não fazemos isto apenas para conhecer a história da filosofia numa determinada época, mas sim a filosofia, como qualquer outro filósofo contemporâneo.

Se ele exerce essa influência hoje no debate de ideias, imagina o efeito que ele possuía no seu tempo. Ele e Euclides não são contemporâneos. Não há indícios que ele estudou na Escola de Platão, a Academia. Existe a discussão que Platão não ter superado a barreira da matemática e ter deixado uma herança para a mesma. Porque então Proclo defenderia o suposto fascínio de Euclides por Platão? Que ele "[...] não teria sido um matemático, mas sim um enorme entusiasta das ciências dos números, das formas, dos objetos celestes e da harmonia" (BARBOSA, 2014, p. 22) é um consenso entre os historiadores da matemática. Assim, nos questionamos como este entusiasmo pode de alguma maneira contribuir com as ideias de Euclides para o criar posteriormente os *Elementos.*

Platão, no *Diálogo Parmênides*, fundamentou o conceito de *Uno*, ou *Um.* Plotino o definiu como sendo uma entidade suprema, totalmente transcendente, além de todas as categorias do Ser e Não-ser. O primeiro princípio do qual todas as coisas existentes derivam. (BLAY, 2013). Pelo o que foi dito agora, parece que estamos no referindo ao Deus Cristão. Mas não é por acaso. Esta ideia, no decorrer na idade média, foi base para a construção da figura divina no Cristianismo. "Foram os conceitos do neoplatonismo que conduziram Agostinho à crença de que o universo não somente havia surgido de um Princípio Uno, mas que também tendia a retornar à Unidade" (MARRONE, 2008, p.30). Claro, Platão não estava se referindo a ele. Mas será que ele estava se referindo ao número 1 na matemática?

Euclides diz, no sétimo elemento que a "Unidade é aquilo segundo o qual cada uma das coisas existentes é dita uma. E número é a quantidade composta de unidades"

(EUCLIDES, 2009, p. 269). Quando vamos construir os números, começamos pelo 1 (a Unidade ou o Uno). Os demais naturais, inteiros, racionais, reais e complexos partem dele. "Na perspectiva de Platão, a matemática promove o movimento do individual ao geral, do imperfeito ao perfeito, do corruptível ao incorruptível. Efetua a transição da seção inferior do visível, na representação da linha, até o pensamento puro" (BARBOSA, 2014, p. 107). Podemos ver este movimento nestas definições citadas.

Os Elementos de Euclides é o maior símbolo para o início do rigor matemático. De fato, não começou a partir dele, mas é a maior obra matemática do seu tempo. Platão esteve presente nesta ruptura na matemática experimental para a matemática deduzida. E o mesmo já questionava como saber se um resultado está suficientemente demonstrado, isto é, qual o rigor necessário e suficiente em uma prova. (BARBOSA, 2014). A ideia atual de rigor se deu em um longo processo e criterioso trabalho que começou no século XIX. "[..] o senso lógico de um matemático de hoje repele certos métodos de prova, que pareciam perfeitamente persuasivos não há um século, e se rodeia de um aparato de sutileza que Gauss ou Lagrange não suspeitaram" (COSTA, 1981, p. 184 apud BARBOSA, 2014, p. 70). Porém, ele pouco difere do que está transcrito nos Elementos que "que por 20 anos foi nutrido pelas discussões da Academia, palco de inúmeros progressos de ordem organizacional, expositiva e metodológica da matemática" (BARBOSA, 2014, p. 70).

Assim, dessa relação histórica, que Platão exerceu na matemática, Proclo "desenhou" segundo o seu comentário, a figura de Euclides como platônico.

4 A HOMENAGEM

O que torna o *Comentário* de Proclo uma fonte incalculável de informações sobre a matemática antiga é alta numerosidade de referências dos seus antecessores. Um ponto triste a respeito dele é que somente o primeiro *Elementos* é discutido aqui. Porém, muito do que é abordado nele, pode ser interpretado ou adaptados para os demais livros, portanto, para o sétimo.

Proclo é bastante cauteloso, em suas análises, procurando não deixar nada para trás. É o último representante do neoplatonismo. Assim, é bastante entendido das ideias de Platão. Portanto, ele possui embasamento teórico quando a todo momento tenta desenhar Euclides como platônico.

CALACANO (2002) divide esta obra em três partes, de modo a facilitar sua exposição e sua compreensão. A primeira parte é focada no Prólogo do livro. A segunda para as definições, postulados e noções comuns. Por fim, as proposições ficam na terceira parte. O Prólogo é subdividido em duas partes. A primeira tenta explicar a natureza da matemática, fundamentada na filosofia de Platão. Dispondo, às vezes, do pitagorismo. A exemplo, Proclo expõe uma subdivisão dos objetos da matemática "[...] em *quantidades* que proporcionam a harmonia e *magnitudes*, que proporcionam o movimento" (CALACANO, 2002, p. 72, grifo do autor).

Ele também recorre a Aristóteles quando necessário, mas a maior parte do texto, ele insistentemente tenta refutar a concepção aristotélica, na qual o inteligível é consequência do sensível. (CALACANO, 2002). Nesta subparte, ele finaliza descrevendo que as descobertas realizadas pela matemática não são semelhantes às descobertas materiais. "A matemática é, antes de tudo, *essência*, e, portanto, ela pode servir de parâmetro para outros contextos, como por exemplo, proporcionar equilíbrio social" (CALACANO, 2002, p. 72, grifo do autor).

A outra subparte do Prólogo, semelhante a primeira, agora está focada para a geometria, onde procura entender a natureza dos seus objetos. Como Romeu sem Julieta ou Buchecha sem Claudinho[2], a Matemática é assim sem a Geometria. Essencial. Ambas do mesmo nível. Porém, ele coloca a aritmética antes dela. Uma vez que os objetos são mais simples. O número, por exemplo, não necessita de uma posição como o ponto. Desta forma, a

[2] Verso da música "Fico assim sem você" da Adriana Calcanhoto, na qual ela referência a dupla de funk brasileira Claudinho e Buchecha.

partir da ciência dos números, através de uma inter-relação ele descreve a ciência das figuras. Com isto, dá a compreender que “[...] cada vez mais, Proclo procura realimentar sua concepção de que a geometria não busca seus objetos na natureza sensível, dada a frequência com que refuta a concepção aristotélica e o ar de ansiedade e admiração em suas palavras na crença da verdade platônica” (CALACANO, 2002, p. 74). Dessa forma, sendo a geometria como uma ciência hipotética, Proclo considera um fato para caracterizá-la como superior às demais ciências da natureza sensível. Uma vez que sendo produto da alma e imaginação, ela é eterna e verdadeira.

A próxima parte é referente às definições, postulados e noções comuns. O primeiro livro dos treze, começa com definições, donde é descrito o que seriam pontos, linhas e superfícies. O ponto, o de que nada é parte, traz uma negação. Isto é, Euclides não diz o que é um ponto e sim o que não é. Ainda assim, ele é gerador e o responsável pela essência da geometria, segundo Proclo. “[...] o ponto é associado ao *nous*, assim como a unidade ao *Uno*, em que o primeiro tem o poder de manter a essência e o segundo o poder de unificar o conhecimento” (CALACANO, 2002, p. 77).

Nem só de elogios vive este comentário. Nele, Proclo nos mostra uma incoerência do alexandrino em relação a nomenclatura das figuras. Ora com relação ao número de ângulos, ora com o número de lados. Mas para manter a média, com seu ídolo, ele debate o porquê de chamar quadrado em vez de quadrângulo. Já que ele possui uma característica que a difere dos demais quadriláteros, que é ter quatro lados iguais.

Hoje não distinguimos entre postulados e noções comuns. Ambos são reconhecidos como axiomas. Proclo diz que esta distinção por Euclides ocorreu de modo que as coisas que são fáceis de entender como postulados, e noções comuns como as que são fáceis de desenhar. Mas para ele, deveria existir uma diferença entre axiomas e postulados. Onde o primeiro seria um princípio geral e o segundo um princípio específico para geometria. Postular alguma coisa não é uma tarefa simples, e deve se ter bastante cautela para realizar tal coisa. O famoso quinto postulado de Euclides é um belo exemplo disto. Onde por muito tempo se tentou transformá-la em um Teorema, e depois percebeu-se que a negativa dele, geraria outra Geometria, tão bem fundamentada quanto a outra. Já o quarto postulado, o que diz que todos os ângulos retos são iguais, Proclo defende que não havia outra maneira de enunciá-lo.

Ele era bastante preocupado com a seriedade que devia-se ter ao estudar a Geometria. De modo que “[...] é preciso cuidado nas afirmações e as justificativas, pondo de lado, definitivamente, a probabilidade e a precipitação na conclusão: características presentes na opinião daqueles que não concebem a ciência da geometria verdadeiramente" (CALACANO, 2002, p. 87). É trazido no prólogo visões de autores distintos na qual defendem que teoremas e problemas são distintos e que o primeiro requer um nível superior de argumentação comparado ao segundo. Mas, Euclides em todos os seus livros, ele intercala entre os teoremas e problemas. Para Proclo, isso é um sinal que para Euclides, importava mais a ordem em seus elementos do que esta suposta hierarquia entre teoremas e problemas. Mas, notasse que no seu texto, se dá dos axiomas aos problemas. Executando assim uma ordem que vai do inteligível para o sensível.

Por fim, a última parte é separada para as proposições. Já no primeiro problema do livro, construir um triângulo equilátero sobre uma reta limitada dada, Proclo já terce uma crítica a Euclides. Ele argumenta que antes desta proposição, devia-se ter apresentado no livro um outro resultado, de que duas retas distintas não podem determinar um segmento comum.

Toda afirmação na qual é provada é um teorema. Mas, algumas delas não possui determinada relevância para a teoria ou são muitos particulares. Proclo, era conhecedor disso e tinha a preocupação em categorizar e os resultados segundo lemas, casos, porismas, objeções e reduções. Por exemplo, porisma, segundo ele, significava "[...] um resultado simples que auxilia um teorema ou um problema" (CALACANO, 2002, p. 98). O mesmo também defende que a demonstração do óbvio não é dispensável. "[...] o óbvio à percepção nem sempre o é para a ciência, onde o uso das propriedades só é possível na absoluta certeza dos seus resultados" (CALACANO, 2002, p. 102).

Proclo sempre procurou salientar, numa concepção platônica, a serventia da matemática para as demais ciências, em particular, a educação. Para Bicudo "É objetivo da Educação Matemática, propagar esta disciplina como patrimônio cultural, sabendo-se, obviamente, que a história da matemática, ambiente em que a reflexão pode orientar a ação do indivíduo, pode ser geradora da construção de um mundo melhor" (CALACANO, 2002, p. 121). E Calacano acredita que assim também pensava Proclo.

Não podemos lê, hoje, o *comentário* como matemáticos. Julgaremos ele como cansativo, repetitivo e previsível. Devemos olhar como estudantes. Assim ele nos revelará como um livro didático e estimulador. Assim como foi o propósito de Proclo. E o mesmo devemos repetir para todos os *Elementos.* Na próxima seção, quando abordaremos o sétimo livro em específico, não iremos no atentar as minúcias das demonstrações trazidas por Euclides e julgá-las.

5 O PROTAGONISTA

5.1 Os Coadjuvantes de luxo

Os quatro primeiros livros que antecedem o sétimo abordam a geometria elementar. Todos os trezes livros começam descrevendo algumas definições ou já inicia citando as proposições. Porém, somente o primeiro que consta com postulados e noções comuns. Hoje reconhecemos os dois apenas como axiomas. O livro 1 define o que é ponto, linha reta, extremidade, superfície, ângulo, fronteira, figura, circulo, raio, diâmetro e outros, todos de caráter geométrico.

Os postulados são os famigerados 5 postulados de Euclides, o qual o quinto, o das paralelas, é o mais controverso, e sua negação implicou nas construções de diversas outras geometrias.

As Noções Comuns, são ao todo 9. Mas, apenas a nona noção que tem sentido geométrico: "E duas retas não contêm uma área" (EUCLIDES, 2009, p. 99). As oito noções restantes podem ser atribuídas a outras áreas da matemática, como a aritmética dos livros 7 a 9. São elas:

> 1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si. 2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais. 3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais. 4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais. 5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si. 6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si. 7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si. 8. E o todo [é] maior do que a parte (EUCLIDES, 2009, p. 99).

Note que todas elas não são axiomas da aritmética. A primeira é definição, e as demais podem ser demonstradas. Pôr a matemática ser uma ciência axiomática, fica a dúvida se estes 8 axiomas, para Euclides, valeriam em todos os outros demais livros, ou só nos geométricos. Se não, aonde estaria os axiomas para os livros aritméticos? Pela relevância dessas obras, talvez tenha sido este o motivo pela demora para a construção axiomática da aritmética, onde a mesma só veio acontecer no século XIX com Giuseppe Peano.

As proposições encontradas nestes quatro livros vão de resultados muitos básicos da geometria, sobre retas e ângulos que conduzem a congruência de triângulos, igualdade de áreas e o Teorema de Pitágoras juntamente com o seu recíproco (Proposições 47 e 48 do livro 1).

O quinto livro traz a Teoria das Proporções de Eudoxo. É apresentado aqui, conceitos que será usado no sétimo livro como o da razão: "[...] é a relação de certo tipo concernente ao tamanho de duas magnitudes de mesmo gênero" (EUCLIDES, 2009, p. 205). E da proporção:

> 5. Magnitudes são ditas estar na mesma razão, uma primeira parte uma segunda e uma terceira para quarta, quando os mesmos múltiplos da primeira e da terceira ou, ao mesmo tempo, excedam ou, ao mesmo tempo, sejam iguais ou, ao mesmo tempo, sejam inferiores aos mesmos múltiplos da segunda e da quarta, relativamente a qualquer tipo que seja de multiplicação, cada um de cada um, tendo sido tomados correspondentes. 6. E as magnitudes, tendo a mesma razão, sejam ditas em proporção. (EUCLIDES, 2009, p. 205)

Já o sexto, ele aplica a problemática do anterior em problemas geométricos. Ao retorno ao teorema de Pitágoras, agora sobre um novo método. E muitas razões entre segmentos e áreas na geometria é discutido aqui.

5.2 A Estrela

Chegamos, finalmente, ao livro que mais nos interessa para a nossa pesquisa. Assim como os demais, ele está dividido em duas partes: em Definições e Proposições. São, ao todo, 23 definições e 39 proposições. Começaremos discutindo as definições, seguindo a ordem que Euclides escreveu.

5.2.1 Definições

"1. Unidade é aquilo segundo o qual cada uma das coisas existentes é dita uma" (EUCLIDES, 2009, p. 269). Já comentamos aqui sobre essa definição. A saber, no capítulo 3.5 quando discutimos a influência platônica em Euclides.

"2. E número é a quantidade composta de unidades" (EUCLIDES, 2009, p. 269). Segunda essa definição, o "1" (a unidade) não era considerado um número. Uma ideia que hoje rejeitamos. Porém, o conceito de número natural (maior ou igual a 2) permaneceu o mesmo, se tratarmos essa "composição" de unidades como soma das mesmas. Por exemplo, o número 3 é a composição de 3 unidade e $3 = 1 + 1 + 1$. Porém, Euclides não define o que seria essa composição. Por sua característica geométrica, ao longo de todo o livro, ele representa os números como segmentos. Assim, o 3 representa a união de 3 segmentos unitários. Mas, podemos dispor eles de várias maneiras. Por exemplo, em forma de um triângulo equilátero. Disto, o quadrado seria uma representação para a composição de quatro segmentos unitários, o número 4, e assim por diante.

"3. Um número é uma parte de um número, o menor, do maior, quando meça exatamente o maior" (EUCLIDES, 2009, p. 269). Aqui temos duas diferenças, de como falamos atualmente. O que chamamos de *divisor* e *dividir* Euclides chama de *parte* e *medir.* Assim, 4 divide 12 se, e somente se, 4 meça 12. Logo, 4 é divisor de 12 se, e somente se, 4 é parte de 12.

"4. E partes, quando não meça exatamente" (EUCLIDES, 2009, p. 269). Similar a anterior, um número é *partes* de outro, caso não o divida (meça exatamente).

"5. E o maior é um múltiplo do menor, quando seja medido exatamente pelo menor" (EUCLIDES, 2009, p. 269). A noção de múltiplos de um número, que possuímos hoje, coincide com a descrita nos *Elementos.*

"6. Um número par é o que é divido em dois. 7. E um número é ímpar o que não é divido em dois, ou [o] que difere de um número par por uma unidade" (EUCLIDES, 2009, p. 269). Estas duas definições, não distinguem do que conhecemos hoje por números pares ou ímpares. Porém, essa segunda parte sobre os ímpares: "o que difere de um número par por uma unidade", hoje não o reconhecemos como uma definição, e sim como uma proposição. De maneira geral, na matemática, um objeto possui diversas características necessárias e suficientes. Mas é escolhida apenas uma delas como a definição, a variar do autor. Este rigor matemático comum, já da era contemporânea, mas não estava presente no mundo antigo. Mas este rigor teve seu estopim neste livro que analisamos. Assim, damos desconto ao nosso menino.

"8. Um número par, um número par de vezes, é o medido por um número par, segundo um número par. 9. E um número par ímpar, um número par de vezes, é o medido por um número par, segundo um número ímpar" (EUCLIDES, 2009, p. 269). Estas definições, não há mais necessidades de defini-las. O número 24 ele se encaixa nas duas definições. Ele é um número par, um número par de vezes, pois $24 = 2 \times 12$. E, ao mesmo tempo, ele é um número ímpar, um número par de vezes, pois $24 = 3 \times 8$. Euclides, aí, ele tenta dar mais características aos números pares. Seja a um par que satisfaz a definição 8 se, e somente se, $4 \mid a$. Porém, é mais usual, hoje, dizer simplesmente que a é divisível por 4. Já para a nona definição, dizemos que o número não é potência de 2.

“10. Um par, um número ímpar de vezes, é o medido por um número ímpar, segundo um número par. 11. E um número ímpar, um número ímpar de vezes, é o medido por um número ímpar, segundo um número ímpar” (EUCLIDES, 2009, p. 269). Similares as definições 8 e 9, estas duas também foram igualmente esquecidas ao decorrer da história. O número 24 continua sendo um exemplo que satisfaz 10. Para a 11, se quisermos descrever um número com esta característica, hoje, diríamos que ele é um número ímpar e composto.

“12. Um número primo é o medido por uma unidade só” (EUCLIDES, 2009, p. 269). Uma adaptação literária desta definição para os tempos atuais, seria algo como: “Um número primo é o que só é dividido por 1”. Mas, nesta adaptação, somente o número 1 seria primo. Um absurdo duas vezes. O que pode estar errado nesta interpretação? Voltemos para a definição 3. “Um número é uma parte de um número, ‘o menor, do maior’ [...]” ” (EUCLIDES, 2009, p. 269, grifo do autor). Isto é, um número só será dividido por outro se o dividendo for maior que o divisor. Daí, a ideia que um número dividido por ele mesmo, não existia, pois, daria 1, isto é a unidade, que lembremos, pela definição um e dois, não era considerado um número. Portanto, a definição de números primos por Euclides, segundo sua própria teoria, é equivalente à nossa.

“13. Números primos entre si são os medidos por uma unidade só como medida comum” (EUCLIDES, 2009, p. 269). Com base no que foi trazido no parágrafo anterior, a concepção de dois números primos entre si de Euclides para a qual vemos, hoje, em textos matemáticos continuam sendo equivalentes.

“14. Um número composto é o medido por algum número” (EUCLIDES, 2009, p. 270). Novamente, lembrando que o 1 não era um número. Esta definição faz sentido e o conjunto dos números compostos, segundo Euclides, é o mesmo que você encontrará em qualquer livro didático (decente).

“15. E números compostos entre si são os medidos por algum número como medida comum” (EUCLIDES, 2009, p. 270). Essa expressão: “números compostos entre si” não é mais comum de se utilizar. Dizemos, simplesmente que o M.D.C. de dois números é maior (ou diferente) que 1.

“16. Um número é dito multiplicar um número, quando, quantas vezes são as unidades nele tantas vezes o multiplicado seja adicionado, e algum seja produzido” (EUCLIDES, 2009, p. 270). Aqui temos a definição da operação multiplicação no anel dos Inteiros. Similar como a tratamos hoje, a multiplicação para Euclides é um caso especial da adição. Por exemplo, se 3 é multiplicado por 4 e $4 = 1+1+1+1$, então 3 multiplicado por 4 é $3+3+3+3 = 12$.

“17. E quando dois números, tendo sido multiplicado entre si, façam algum, o produzido é dito plano, e lados dele, os números que foram multiplicados entre si” (EUCLIDES, 2009, p. 270). Mas uma definição que foi abandonada com o decorrer da história. Note que os números planos coincidem exatamente com os números compostos. A tentativa de caracterizar de outra forma os mesmos números parte da natureza geométrica que Euclides possuía, por isso esse nome: *números planos*. Um retângulo com lados a e b tem como área $a \cdot b$. Se a e b forem distintos da unidade, segue que $a \cdot b$ é um número plano. Mas, se a for plano, então $a \cdot b$ pode ser plano de outra forma diferente.

“18. E quando três números, tendo sido multiplicado entre si, façam algum, o produzido é dito plano, e lados dele, os números que foram multiplicados entre si” (EUCLIDES, 2009, p. 270). As considerações feitas acima podem ser fielmente transcritas para aqui (com as devidas adaptações).

“19. Um número quadrado é o igual o mesmo número de vezes ou [o] contido por dois números iguais. 20. E um cubo é o igual um número igual de vezes, um número igual de vezes, ou [o] contido por três números iguais” (EUCLIDES, 2009, p. 270). Para tais números, hoje só distinguimos da definição trazida por Euclides, pelo acréscimo da palavra *perfeito* depois de quadrado e cubo. Novamente, a escolha dos termos *quadrado* e *cubo* se deve a essência geométrica do menino.

“21. Números estão em proporção, quando sejam o primeiro do segundo e o terceiro do quarto o mesmo múltiplo ou a mesma parte ou as mesmas partes” (EUCLIDES, 2009, p. 270). Por exemplo, os números 4, 2, 6 e 3 estão em proporção pois 4 de 2 é o mesmo múltiplo de 6 e 3, isto é, $\frac{4}{2} = 2 = \frac{6}{3}$. O segundo caso, 2 de 4 é a mesma parte de 3 de 6, pois $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$. Os números 4, 6, 2 e 3 estão em proporção porque 4 de 6 é a mesma parte de 2 de 3 $\left(\frac{4}{6} = \frac{2}{3}\right)$. Hoje não tratamos as proporções nestes 3 casos. De maneira geral, 4 números a, b, c e d estão em proporção se, e somente se, $a \cdot d = b \cdot c$. Note que essa maneira de descrever as proporções satisfazem os três tipos descritos por Euclides.

“22. Números planos e sólidos semelhantes são os que têm os lados em proporção” (EUCLIDES, 2009, p. 270). Exemplo, 8 e 18 são números planos semelhantes. Com efeito, $8 = 4 \cdot 2$ e $18 = 6 \cdot 3$, como 4, 2, 6 e 3 estão em semelhança $\left(\frac{4}{2} = 2 = \frac{6}{3}\right)$ pelo primeiro caso da definição anterior, segue que 8 e 18 são números planos semelhantes. Esta definição também caiu em desuso com decorrer da história.

“23. Um número perfeito é o que é igual às suas próprias partes” (EUCLIDES, 2009, p. 270). Euclides, aqui iniciava um dos problemas mais duradouros da matemática: Conhecer quem são os números perfeitos. Mas adiante, ainda neste livro, ele demonstra que se $2^n - 1$ é primo, segue que $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ é perfeito. Porém não sabemos se existem infinitos primos da forma $2^n - 1$, os conhecidos primos de Mersenne[3]. Euller[4], dois milênios depois de Euclides, provou que todo número perfeito par é da forma $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$. A existência de um número perfeito ímpar é desconhecida até hoje.

Com isto finalizamos todas as definições. O balanço geral que podemos fazer é que elas são carregadas de influências geométricas. No sentido que esta aritmética foi descrita quase como uma maneira de interpretar a geometria. O que faz sentido, se pensarmos que os primeiros livros são de geometria plana. Por este afastamento histórico que ocorreu com estas duas áreas, muitas destas definições acabaram em desuso. Algumas transformadas apenas como caraterísticas. Outras como proposição. Mas a maior diferença mesmo, é no entendimento do 1 como número. Mas a ideia de números primos e compostos, que ao longo da história foi o centro das pesquisas em aritmética, já estavam aqui e a entendermos de maneira equivalente a Euclides.

5.2.2 Proposições

Nesta etapa, não transcrevemos as demonstrações contidas no livro, por causa do seu caráter extensivo. Com exceção das duas primeiras. Pois, são delas na qual hoje nós retiramos o chamado algoritmo de Euclides. As demais faremos uma tradução para a álgebra moderna e teceremos alguns comentários.

---

[3] **Marin Mersenne** (1588-1648) foi um padre, teólogo, matemático, teórico musical e filósofo francês. Ficou conhecido na matemática pelos estudos que o fez sobre os primos da forma 2n-1, que hoje os chamamos de Primos de Mersenne em sua homenagem.

[4] **Leonhard Paul Euler** (1707-1738) acho muito difícil você não o conhece-lo. Suiço, foi um dos maiores matemáticos de todos os tempos e, seu currículo é grande demais para ser descrito aqui em uma nota de rodapé. Por isso recomendo que pesquise sobre ele.

Um dos conceitos mais importantes de toda a aritmética, é, sem dúvida, o de Maior Divisor Comum (MDC). As duas primeiras proposições abordam sobre ele.

> 1. Sendo expostos dois números desiguais, e sendo sempre subtraído de novo o menor do maior, caso o que restou nunca meça exatamente o antes dele mesmo, até que reste uma unidade, os números do princípio serão primos entre si. [...] 2. Sendo dados dois números não primos entre si, achar a maior medida comum deles. (EUCLIDES, 2009, p. 270-271).

Note que a primeira traz no seu enunciado uma afirmação, enquanto que a segunda faz um pedido. É comum durante todo livro, os enunciados se dividirem nestas duas categorias. Hoje entendemos que dois números são primos entre si quando o MDC entre eles é 1. Porém, para Euclides, o MDC não poderia ser igual a 1, pois, ele deveria ser um número, e lembremos que 1 não era considerado um número. Daí a necessidade destas duas proposições. Atualmente, a segunda já seria suficiente e usamos a primeira como um caso particular dela. Abaixo está a demonstração usada por Euclides para a proposição 1. Nela, ele usa como técnica de demonstração a contrapositiva.

> Pois, dos dois números [desiguais] AB, CD, sendo sempre subtraído de novo o menor do maior, o que restou jamais meça exatamente o antes dele mesmo, até que reste uma unidade; digo que os AB, CD são primos entre si, isto é, que uma unidade só mede os AB, CD. Pois, se os AB, CD não são primos entre si, algum número os medirá. Meça, e seja o E; e o CD medindo o BF, reste dele mesmo o menor FA, enquanto o AF, medindo o DG, reste dele mesmo o menor GC, e o GC, medindo o FH, reste a unidade HÁ. Como, de fato, o E mede o CD, e o CD mede o BF, portanto também o E mede o BF; e mede também o BA todo; portanto, medirá também o AF restante. E o AF mede o DG; portanto, também medirá o CG restante. E o CG mede o FH; portanto, o E também mede o FH; e mede também o FA todo; portanto, medirá também a unidade AH restante, sendo um número; o que é impossível. Portanto, nenhum número medirá os números AB, CD; portanto, os AB, CD são primos entre si; o que era preciso provar. (EUCLIDES, 2009, p. 270-271).

Só desta demonstração, já fica perceptível a influência geométrica que Euclides possuía e tentava aplicá-la na aritmética, sempre descrevendo um número por um segmento. Aqui faz uso de um “truque” que é bastante usando ainda, que é a não demonstração da generalização. Quando se usa um argumento, para um caso específico, e se observa que a escolha deste caso não interfere em nada no argumento, então evitamos de provar que vale para todos os casos, porque é certo que irá funcionar. Isso é uma omissão na demonstração, o que tecnicamente a invalidaria. Mas se hoje ainda fazemos, é totalmente perdoável Euclides fazer naquela época também. A terceira proposição: “Dados três números não primos entre si, achar a maior medida comum deles” (EUCLIDES, 2009, p. 272), é uma ampliação do algoritmo que é utilizado na proposição anterior. O interessante aqui, é que para tal, Euclides utiliza a proposição 2, mas não a cita.

“4. Todo número é ou uma parte ou partes de todo número, o menor, do maior” (EUCLIDES, 2009, p. 273). Esta afirmação não depende de provas, ou então, não deveria. As definições que Euclides traz de *parte* e *partes* (definições 3 e 4) são excludentes. A negação de uma implica na outra. O que parece ter ocorrido, foi criar uma oportunidade para se usar o conceito de MDC, na demonstração para prová-la. Talvez isso tenha ocorrido como teste para o leitor se acostumar com a ideia de MDC, para usá-la em ocasiões seguintes, onde essas, são, de certa forma, mais trabalhosas.

“5. Caso um número seja uma parte de um número, e um outro seja a mesma parte de um outro, também um e o outro juntos serão a mesma parte de um e outro juntos, a que o um é do um” (EUCLIDES, 2009, p. 274). Ou seja, se $x = \frac{a}{d}$ e $y = \frac{b}{d}$ então $x + y = \frac{a+b}{d}$. Esta proposição é a primeira, de quatro, que utiliza as propriedades distributivas da multiplicação e divisão. Sendo está a distributiva da divisão em relação à adição.

“6. Caso um número seja partes de um número, e um outro sejam as mesmas partes de um outro, também um e outro juntos serão as mesmas partes de um e o outro juntos, as que o um é do um” (EUCLIDES, 2009, p. 275). Algebricamente, podemos interpretar esta proposição como seja $x = \frac{c}{d}a$ e $y = \frac{c}{d}b$ então $x + y = \frac{c}{d}(a + b)$. Assim, a multiplicação de frações é distributiva em relação à adição.

“7. Caso um número seja uma parte de um número, aquele que um subtraído é de um subtraído, também o resto será a mesma parte do resto, a que o todo é do todo” (EUCLIDES, 2009, p. 275) e “8. Caso um número seja partes de um número, as que um subtraído é de um subtraído, também o resto será as mesmas partes do resto, as que o todo é de todo” (EUCLIDES, 2009, p. 276) tratam das mesmas propriedades das proposições 5 e 6, mas agora em relação a subtração.

“9. Caso um número seja uma parte de um número, e um outro seja a mesma parte de um outro, também alternadamente, aquela parte ou partes que o primeiro é do terceiro, a mesma parte ou as mesmas partes também o segundo será do quarto” (EUCLIDES, 2009, p. 277). Algebricamente, sejam $a = \frac{b}{n}$, $d = \frac{c}{n}$ e se $a = \frac{p}{q}d$ então $b = \frac{p}{q}c$.

"10. Caso um número seja partes de um número, e um outro seja as mesmas partes de um outro, também, alternadamente, aquelas partes ou parte que o primeiro é do terceiro, as mesmas partes ou a mesma parte também o segundo será do quarto" (EUCLIDES, 2009, p. 278). Análoga a anterior, sejam $a = \frac{m}{n}b$, $d = \frac{m}{n}c$ e se $a = \frac{p}{q}d$ então $b = \frac{p}{q}c$.

"11. Caso como um todo esteja para um todo, assim um subtraído para um subtraído, também o resto estará para o resto, como o todo para o todo" (EUCLIDES, 2009, p. 279). Isto é, se $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ então $\frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c}$.

"12. Caso números, quantos quer que sejam, estejam em proporção, como um dos antecedentes estará para um dos consequentes, assim todo os antecedentes para todos os consequentes" (EUCLIDES, 2009, p. 279). Algebricamente, se $\frac{x_1}{y_2} = \ldots = \frac{x_n}{y_n}$ então $\frac{x_1+\ldots+x_n}{y_1+\ldots+y_n}$ é igual as proporções anteriores. Apesar do enunciando falar "quantos quer que sejam", na demonstração, provasse apenas para $n = 2$. Também não chega a mencionar algo como "os demais casos são análogos" ou "os demais se dão como consequência deste". Esta é a primeira proposição dos livros aritméticas que aborda o conceito de proporção trazida no livro 5.

"13. Caso quatro números estejam em proporção, também estarão alternadamente em proporção" (EUCLIDES, 2009, p. 280). Umas das propriedades mais cotidianas nos exercícios matemáticos hoje é a de fazer a equivalência $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Esta implicação é dada por esta proposição.

"14. Caso números, quantos quer que sejam, e outros, iguais a eles em quantidade, sejam tomados dois a dois e na mesma razão, também, por igual posto, estarão na mesma razão" (EUCLIDES, 2009, p. 280). Isto é, se $\frac{x_1}{y_1} = \ldots = \frac{x_n}{y_n}$ então $\frac{x_1}{x_n} = \frac{y_1}{y_n}$.

"15. Caso uma unidade meça algum número, e um outro número meça, o mesmo número de vezes, algum outro número, também alternadamente, a unidade medirá o terceiro número o mesmo número de vezes que o segundo, o quarto" (EUCLIDES, 2009, p. 281). Não de forma clara, essa proposição fala sobre a comutativa. Isso porque ela diz que $a = bc$ e se 1 mede b o mesmo número de vezes que c mede a, então $a = cb$. Daí pode se tirar a comutatividade ($bc = a = cb$).

"16. Caso dois números, depois de multiplicados um pelo outro, façam alguns, os produzidos deles serão iguais entre si" (EUCLIDES, 2009, p. 282). Euclides traz aqui a comutatividade da multiplicação de forma mais imediata. É interessante ver essa propriedade aqui como teorema e não como axioma.

"17. Caso um número, depois de multiplicado por dois números, faça alguns, os produzidos deles terão a mesma razão que os que foram multiplicados" (EUCLIDES, 2009, p. 282). A famigerada multiplicação por 1 que sempre usamos já estava aqui presente em Euclides. Claro, nesse contexto não se multiplica por 1 e também não se divide um número por ele mesmo. Então ela é tratada aqui como sendo se $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.

"18. Caso dois números, depois de multiplicados por algum número, façam alguns, os produzidos deles terão a mesma razão que os que multiplicaram" (EUCLIDES, 2009, p. 283). O que difere está para a anterior é que a 17 é um número inicial fixado multiplicado por dois números diferentes e aqui são dois números iniciais fixados multiplicados por outro. E na prova usa a comutatividade da 16.

"19. Caso quatro números estejam em proporção, o número produzido do primeiro e quarto será igual ao número produzido do segundo e terceiro; e caso o número produzido do primeiro e quarto seja igual ao do segundo e terceiro, os quatro números estarão em proporção" (EUCLIDES, 2009, p. 283). Essa é a primeira proposição do livro 7 com uma condição necessária e suficiente. Algebricamente, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

"20. Os menores números dos que têm a mesma razão com eles medem os que têm a mesma razão, o mesmo número de vezes, tanto o maior, o maior quanto o menor, o menor" (EUCLIDES, 2009, p. 284). Esta é a "volta" das proposições 17 e 18. Ela afirma que se duas frações são equivalente então o maior numerador mede o menor numerador a mesma quantidade que o maior denominador mede o outro.

"21. Os números primos entre si são os menores do que têm a mesma razão com eles" (EUCLIDES, 2009, p. 285). Esta proposição fala que o processo de simplificação de uma fração é finito, e que a mais simplificada é aquela onde o numerador e denominador são primos entre si.

"22. Os menores números dos que têm a mesma razão com eles são primos entre si" (EUCLIDES, 2009, p. 286). Esta é a "volta" da proposição anterior. Isto é, se não posso mais simplificar uma fração, então o numerador é primo com o denominador.

“23. Caso dois números sejam primos entre si, o número que mede um deles será primo com o restante” (EUCLIDES, 2009, p. 286). Algebricamente, se $MDC(a,b)=1$ e $c\mid a$ então $MDC(c,b)=1$.

“24. Caso dois números sejam primos com algum número, também o produzido deles será primo com o mesmo” (EUCLIDES, 2009, p. 287). Resultado muito importante para o desenvolvimento da Teoria dos Números, já era visto aqui. Se $MDC(a,c)=MDC(b,c)=1$ então $MDC(ab,c)=1$.

“25. Caso dois números sejam primos entre si, o produzido de um deles será primo com o restante” (EUCLIDES, 2009, p. 288). Esta proposição é um caso particular da anterior. Onde toma os dois números, primos com o outro, iguais.

“26. Caso dois números sejam primos com dois números, ambos com cada um, também os produzidos deles serão primos entre si” (EUCLIDES, 2009, p. 288). Isto é, sejam quatro números a,b,c e d onde $MDC(a,c)=MDC(a,d)=MDC(b,c)=MDC(b,d)=1$ então $MDC(ab,cd)=1$. Esta proposição se dá também como consequência direta da 24, onde Euclides o faz uso recursiva dela para a demonstração desta.

“27. Caso dois números sejam primos entre si, e cada um, depois de multiplicado por si mesmo, faça algum, os produzidos serão primos entre si, e caso os de princípio, depois de multiplicado pelos produzidos, façam algum, também esses serão primos entre si [...]” (EUCLIDES, 2009, p. 289). Algebricamente, se $MDC(a,b)=1$ então $MDC\left(a^2,b^2\right)=1$ e $MDC\left(a^3,b^3\right)=1$. Para tal, foi utilizado o resultado anterior.

“28. Caso dois números sejam primos entre si, também um, conjuntamente com o outro, será primo com cada um deles; e caso um, conjuntamente com o outro, seja primo com algum deles, também os números do princípio serão primos entre si” (EUCLIDES, 2009, p. 289). Mais um problema de “se, e somente se”, este diz que $MDC(a,b)=1 \Leftrightarrow MDC(a+b,a)=MDC(a+b,b)=1$. A demonstração se dá utilizando o resultado da proposição 5 juntamente com a técnica de redução ao absurdo.

“29. Todo número primo é primo com todo número que não mede. 30. Caso números, sendo multiplicados entre si, façam algum, e algum número primo meça o produzido deles, medirá também um dos do princípio” (EUCLIDES, 2009, p. 290). Se um primo p não divide quem quer que seja n, então $MDC(p,n)=1$.

"30. Caso dois números, sendo multiplicados entre si, façam algum, e algum número primo meça o produzido deles, medirá também um dos princípios" (EUCLIDES, 2009, p. 291). Este resultado é conhecido na literatura hoje como *Lema de Euclides*. Se p é primo e $p \mid ab$ então $p \mid a$ ou $p \mid b$.

"31. Todo número composto é medido por algum número primo" (EUCLIDES, 2009, p. 291). Este o primeiro resultado que caminho para o resultado mais importante da aritmética elementar, o T*eorema Fundamental da Aritmética*, que diz que todo número pode ser escrito de maneira única, a menos de uma reordenação, como produto de potências de números primos.

"32. Todo número ou é primo ou é medido por algum número primo" (EUCLIDES, 2009, p. 292). O enunciando desta proposição reforça ainda mais a ideia que o 1 não é um número.

"33. Dados números em uma quantidade qualquer, achar os menores dos que estão na mesma razão com eles" (EUCLIDES, 2009, p. 292). Euclides demonstra nesta proposição que dado uma proporção $n_1 : n_2 : n_3$ qualquer, a proporção equivalente a esta com os menores números é dada por $(\frac{n_1}{d}) : (\frac{n_2}{d}) : (\frac{n_3}{d})$ onde $d = MDC(n_1, n_2, n_3)$. Novamente, apesar do enunciado falar uma quantidade qualquer, no livro é resolvido apenas para o caso com três números.

"34. Dados dois números, achar o menor número que eles medem" (EUCLIDES, 2009, p. 293). Só a título de curiosidade, esta é a menor proposição do sétimo livro, mas possuía a demonstração mais extensa. O que esse resultado procura é pelo Mínimo Múltiplo Comum (MMC) de dois números. O primeiro caso é considerado é quando a e b são primos. Euclides afirma que $MMC(a,b) = ab$. Prova inicialmente que ab é múltiplo de a e b. Depois supõe a existência de outro múltiplo c menor que ab e chega a um absurdo. O segundo caso, é tomado c e d tal que $\frac{c}{d}$ é a menor fração equivalente para $\frac{a}{b}$. Em 19, já foi provado que $ad = bc$. Em seguida, ele prova que ad é múltiplo de a e de b e finaliza provando que de fato $MMC(a,b) = ad$, fazendo uso de raciocínio análogo ao anterior.

"35. Caso dois números meçam algum número, também o menor medido por eles o medirá" (EUCLIDES, 2009, p. 295). Resultado importantíssimo na Teoria dos Números já estava presente aqui. Se $a \mid c$ e $b \mid c$ então $MMC(a,b) \mid c$.

“36. Dados três números, achar o menor número que eles medem” (EUCLIDES, 2009, p. 295). É ampliado aqui o resultado obtido na proposição 35 com o cálculo do MMC para três números.

“37. Caso um número seja medido por algum número, o medido terá uma parte homônima com o que mede” (EUCLIDES, 2009, p. 296). Para exemplificar, 4 medi 12, portanto 12 tem uma quarta parte, que é $\frac{12}{4} = 3$. Assim, se n divide a então a tem uma n-ésima parte $\frac{a}{n}$.

“38. Caso um número tenha uma parte, qualquer que seja, será medido por um número homônimo com a parte” (EUCLIDES, 2009, p. 297). Esta é a contrapositiva da afirmação anterior. Se a tem um n-ésima parte então n divide a.

“39. Achar um número que é o menor dos que terão as partes dadas” (EUCLIDES, 2009, p. 297). Esta proposição é uma aplicação do conceito do MMC. Onde o MMC é o tal número procurado. Por exemplo, qual seria o menor número que possui uma segunda parte e uma sexta parte? Por essa proposição, é $MMC(2,6) = 6$.

5.3 Atores Secundários

Os livros exclusivamente dedicados a aritmética vão do sétimo ao nono. Então, falta falar sobre dois deles. Abordaremos rapidamente. O oitavo é o menos interessante entre o três. Todas suas proposições percorrem são mais outros resultados sobre proporções, que hoje em dia não fazem muita diferença.

O nono Elementos continua com as proposições elementares sobre a Teoria dos Números, trazendo resultados relacionados a paridade, por exemplo, a soma de dois pares ou dois ímpares é par, enquanto a soma de um par com um ímpar é ímpar. A proposição 35, Euclides nos traz a fórmula para a soma de termos de uma PG. É interessante este fato, porque em todos os outros elementos, não há uma menção sequer a soma de uma PA. A proposição 36 nos dá uma condição suficiente para determinar se um número é perfeito. Resultado extraordinário para seu tempo, visto que levaria quase dois milênios depois para se ter um novo avanço a respeito destes números. Então, é dito que se $1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ é primo então $(2^n - 1)\,2^{n-1}$ é perfeito.

O destaque desse livro vai para a proposição 20: “Os números são mais numerosos do que toda quantidade que tenha sido proposta de números primos” (EUCLIDES, 2009, p. 343). A demonstração é elegante e replicada até hoje quando se aborda esse Teorema sobre a infinitude dos números primos. Supondo que seja uma quantidade finita, Euclides toma o produto de tais primos e soma uma unidade. Este número ou é primo ou é dividido por algum outro primo distinto dos demais.

5.4 Figurantes

O décimo é mais extenso de todos eles. São ao todo 115 proposições. As definições deste livro são divididas em três partes. Uma é apresentada no começo e as outras no meio. As mais interessantes são as iniciais. Nelas, é descrito o que são grandezas comensuráveis e incomensuráveis. A quarta e última definição destas iniciais diz a respeito de números racionais e irracionais:

> E, por um lado, o quadrado sobre a reta proposta, racional, e os comensuráveis com esse, racionais, e, por outro lado, os incomensuráveis com esse sejam chamados irracionais, e as que servem para produzi-los, irracionais, se forem quadrados, os próprios lado, ao passo que se alguma outra retilínea, as que descrevem quadrados iguais a elas. (EUCLIDES, 2009, p. 353).

A proposição 21 deste livro é especial, por que é dela que sai a prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$.

Os últimos três livros, apresentam a geometria espacial. O décimo primeiro estuda o paralelismo e a perpendicularidade de retas e planos. Também é visto nele, ângulos, sólidos e primas. No próximo, é estabelecido proposições sobre razões entre áreas de polígonos e volume de sólidos. Por fim, o último livro, o décimo terceiro, Euclides aborda os cinco poliedros regulares, hoje conhecidos como Poliedros de Platão.

6 A INFLUÊNCIA

A obra de Euclides tem o seu lugar de importância na história e no desenvolvimento da matemática. Podendo chamá-los de *clássicos.* "Os clássicos são aqueles livros que chegam até nós trazendo consigo as marcas das leituras que precederam a nossa e atrás de si os traços que deixaram na cultura ou nas culturas que atravessaram (ou simplesmente na linguagem ou nos costumes)" (MONTOITO, 2014a, p. 97). Infelizmente, não possuímos a edição original de nenhum dos *Elementos.*

> As cópias mais antigas sobreviventes são um exemplar (datado de 888 d.C.) da biblioteca do bispo Aretas de Cesareia (na Capadócia), baseado numa edição com comentários e acréscimos de Théon de Alexandria (um grego do século IV), e um exemplar da Biblioteca do Vaticano encontrado e divulgado por Peyrard em 1808, datado do século IX ou X, mas, ao que tudo indica, baseado numa versão anterior à de Théon. Uma outra cópia do texto grego está na Biblioteca Bodleiana, em Oxford. No Brasil, apenas em 2009 foi publicada a primeira tradução para língua portuguesa, direta do grego, com um riquíssimo prefácio do qual se destaca o trecho a seguir: (MONTOITO, 2014a, p. 98)

Felizmente, suas definições e demonstrações sobreviveram, quase que ilesas. Para conseguir alcançar esse status de clássico, Euclides contou com a ajuda de vários filósofos, que como contaremos mais adiante, utilizaram de sua obra para validar seus pensamentos.

Desde a sua escrita, os seus livros já possuíam sua relevância. "[...] foram de suma importância para o desenvolvimento posterior da matemática, uma vez que neles está organizado todo o conhecimento matemático de uma época, com exceção dos estudos sobre seções cônicas e da geometria esférica" (BRITO, 1995, p. 34). Mas o trabalho de Euclides não foi somente compilar os conhecimentos de sua época, mas, ao que parece, também desenvolveu mais matemática.

Com isto, os *Elementos* se tornaram um excelente material elementar organizado, que poderia vir a ser o principal referencial teórico para futuras investigações na matemática. De fato, isto ocorreu. Na Antiguidade clássica, Proclo e Eudoxo, por exemplo, escreveram comentários sobre os *Elementos.* Os islâmicos, foram responsáveis pela sua transmissão que os tornaram conhecidos na Europa. Árabes aprofundaram alguns problemas de aritmética e álgebra que ali continham. Os bizantinos, foram responsáveis pela preservação dos textos originais de Euclides, que serviram de base para a construção do que viriam ser chamadas de edições críticas “modernas” dos *Elementos*. Desde então, implicou no reinado de Euclides continuou na Idade Média, sendo estudado na Sobonne, em Oxford e a Companhia de Jesus adotou em 1552 a obra de Euclides para o ensino de matemática em todos os seus *collèges* (SCHUBRING, 2003)

Outro fator que implicou na relevância histórica destes livros, foi a utilização de seus escritos para embasar outras ideias filosóficas que foram propostas por renomados filósofos. A seguir iremos explanar sobre algumas delas. Um dos marcos na história da ciência é a criação de um método para o desenvolvimento da mesma. Em 1637, René Descartes escrevia o seu *Discurso do método.* Um tratado filosófico sobre como conduzir a razão na busca da verdade dentro da ciência. Tal método possuía quatro regras:

> Não aceitar como verdadeiro nada que não tivesse antes passado pelo crivo da razão (o que impediria o pensamento de ser tomado por paixões ou guiado por preconceitos); dividir tudo o que parecesse complexo em tantas quantas fossem as partes mais simples possíveis (pois a razão tem mais condições de resolver um problema perfeitamente delimitado do que de se encarregar de algo composto de várias partes); depois de feita esta decomposição, ela deveria ser ordenada (a remontagem para o composto teria que ser refeita sem desvios ou perdas de informações que viessem a prejudicar a verdade almejada); como este procedimento podia ser retomado e repetido por qualquer um, ele deveria dar lugar a tantas revisões quanto necessárias (MONTOITO, 2014a, p. 108-109).

Notemos aqui, como os *Elementos* de Euclides serviram de exemplo para justificar este método científico. Esta primeira regra já estava presente lá, salvo os postulados e noções comuns, tudo era necessário provar, e não aceito como verdadeiro antes disto. A segunda regra também ocorria. Quando as proposições eram complexas, Euclides a dividia em partes e separadamente as demonstrava. Depois as partes eram unidas, para formar o todo, concluindo a demonstração como descreve a terceira regra. Por fim, a quarta regra manda que todo o procedimento anterior seja refeito por outras pessoas, para ver se os resultados batem. O que de fato aconteceu com todas as proposições que estavam nestes 13 livros.

Para Descartes, “a Aritmética, a Geometria e as outras ciências desta natureza, que não tratam senão de coisas muito simples e muito gerais, sem cuidarem muito em se elas existem ou não na natureza, contêm alguma coisa de certo e indubitável” (DESCARTES, 1998, p. 19). Pois, seja no norte ou sul, na Europa ou no Mercosul, em Altinho ou em Istambul, com o céu cinza ou azul, o triângulo sempre tem três lados e 1 mais 2 é sempre 3 (no anel do naturais). As ciências, até então, usavam da filosofia para criar seus princípios. Mas, para Descartes, esta era confusa, incerta e duvidosa (MONTOITO, 2014a). Se as premissas estiverem falsas, apenas duas coisas, que não dependem da filosofia, iam sobreviver: Deus e a Matemática. Em sua metafísica, ele tenta unir essas duas certezas, de modo que uma fortaleça a outra. “Deus e a geometria euclidiana eram e estavam, no sentido de que existiam independentemente de poderem ser ou não vistos e reconhecidos na natureza” (MONTOITO, 2014a, p 114). Vejamos um exemplo, na qual ele tenta ligar os dois:

> Quando imagino um triângulo, ainda que não haja talvez em nenhum lugar do mundo, fora de meu pensamento, uma tal figura, e que nunca tenha havido alguma, não deixa, entretanto, de haver uma certa natureza ou forma, ou essência determinada, dessa figura, a qual é imutável e eterna, que eu não inventei absolutamente e que não depende, de maneira alguma de meu espírito; como parece, pelo fato de que se pode demonstrar diversas propriedades desses triângulo, a saber, que os três ângulos são iguais a dois retos, que o maior ângulo é oposto ao maior lado e que outras semelhantes, as quais agora, quer queira, quer não, reconheço mui claramente e mui evidentemente estarem nele, ainda que não tenha antes pensado nisto de maneira alguma, quando imaginei pela primeira vez um triângulo; e, portanto, não se pode dizer que eu as tenha fingido e inventado (DESCARTES, 1998, p. 56).

Para Descartes foi “exclusivamente na matemática que o espírito humano chegou à evidência e à certeza – e conseguiu constituir uma ciência, uma disciplina verdadeira, na qual se progride, em ordem e com clareza, das coisas mais simples para as construções mais difíceis” (KOYRÉ, 1963, p. 51). Assim, o justificava que a ciência devia ter como modus operandi, algo mais similar possível, com a matemática, com aquilo que estava escritos em os *Elementos*.

Da França do século XVII vamos agora para a Inglaterra do século XVIII. David Hume foi um filósofo, historiador e ensaísta britânico que se tornou consagrado por seu empirismo radical e seu ceticismo filosófico. Ele se opôs a Descartes, negando que não há conexão entre o que existe e o que não existe. Assim, Hume abriu caminho à aplicação do método experimental aos fenômenos mentais.

Ele defendia que todo o conhecimento tem origem na experiência, o que prega o empirismo. De modo que os dados ou impressões sensíveis formam a base do mesmo. Hume considera que existem impressões e ideias na quais se distinguem, quanto ao grau de força e vivacidade. Desde modo ele descarta a possibilidade de existir ideias inatas, pois as ideias surgem após impressões. Por mais fantasioso que seja sua ideia, ela deriva de outras impressões sensíveis. Quando o Satoshi Tajiri criou o *Pikachu*[5], uma criatura que definitivamente não existe no mundo real, esse processo não foi inato. O Pikachu é um rato amarelo com bochechas vermelhas que solta choque. Ratos existem. A cor amarela existe. Diversas pessoas têm a bochechas avermelhadas. Existem aparelhos que soltam choque. Assim, o Pikachu é um produto de várias impressões na qual o Satochi teve contato anteriormente. Podemos replicar isto nos demais contos que surgiram da humanidade, como fadas, Minotauro, unicórnios, mundial do Palmeiras, sereias e etc.

Hume afirmava que todos objetos da razão ou investigação humana pertenceriam a dois grupos: relações de ideias ou questões de fato. O primeiro estavam proposições cuja verdade pode ser conhecida por simples análise lógica do significado das ideias que as compõem. Já as proposições cuja verdade só pode ser conhecida mediante a experiência estão no segundo grupo. A matemática está nas relações de ideias. Pois, a este grupo

> [...] pertencem as ciências da Geometria, Álgebra e Aritmética; e, numa palavra, toda afirmação que seja intuitivamente ou demonstrativamente certa. Que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos dois lados é uma proposição que expressa uma relação entre essas figuras. Que três vezes cinco é igual à metade de trinta expressa uma relação entre esses números. As proposições desta espécie podem ser descobertas pela simples operação do pensamento, sem dependerem do que possa existir em qualquer parte do universo. Ainda que jamais existisse um círculo ou um triângulo na natureza, as verdades demonstradas por Euclides conservariam para sempre a sua certeza e evidência (HUME, 1984, p. 141).

Note que não difere muito entre Hume e Descartes sobre como se comporta a matemática. “Como ele mesmo afirma, tudo aquilo demonstrado por Euclides eram evidências incontestáveis, que nem precisavam da experiência para serem aceitas como verdade, pois poderiam ser alcançadas pelo pensamento” (MONTOITO, 2014a, p. 113). Nenhuma ideia é inata. Mas, podemos pegar uma ideia e alterá-la segundo outras experiências adquiridas de antemão. Essa possibilidade não foi considerada por Hume. A soma de todos os ângulos internos a um triângulo é igual a 180. Conhecemos a noção de igualdade. Mas, também conhecemos a noção de desigualdade. Daí, podemos imaginar, isso não é nenhum crime, que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor ou maior que 180. E Hume poderia ter pensado nisso. Por mais estranho que isso fizesse em seu tempo, segundo ele, a

---

[5] Personagem da franquia de jogos e anime Pokemon.

geometria é um objeto da razão. Logo, não depende da experiência. Assim, a estranheza que isso poderia causar não é argumento para desqualificá-la.

Notemos então a influência de Euclides para a filosofia humeana. O texto ali era tão belo, tão coerente, arrumadinho, organizado tudo isso realizado pela lógica e não por nenhuma experiência, que simplesmente fez com que Hume não questionasse toda essa matemática trazida nos *Elementos.*

Continuando nosso *rolê* pela Europa, sigamos agora para terra da cerveja, a Alemanha. Mas, à época, ainda era a saudosa Prússia. Immanuel Kant, nascido no século XVIII e morto no século posterior, é considerado o principal filósofo da era moderna. Entre todos os seus trabalhos, abordaremos aqui o seu Criticismo, que é fruto da confluência entre o racionalismo, empirismo e a ciência física-matemática de Newton.

Até então, Deus sempre era uma ferramenta utilizada para chegar em conclusões. Kant observou que a metafísica não poderia ser uma base sólida. Assim, da mesma forma que Copérnico mostrou que Sol estava no centro no universo, Kant coloca o indivíduo como o centro do pensamento, que parte dele, do interior para um todo. A razão está no centro e não a realidade objetiva. Por isso, essa ruptura foi chamada de Revolução Copernicana.

Na sua obra, a Crítica da Razão Pura, Kant divide os conhecimentos em *a priori* ou *a posteriori.* E os juízos, em cima deles, entre *sintéticos* e *analíticos.* O conhecimento ele é *a posteriori* quando tem origem na experiência. Quando ele independe da impressão dos sentidos é dito *a priori*. Esses tipos de conhecimento foram os que mais cativaram o interesse de Kant. Dado uma sentença, o juízo que atribuímos a ela será *analítico* quando o predicado pertence no próprio conceito do sujeito. Por exemplo, “o triângulo tem três lados”. O predicado “tem três lados” pertencem a definição do sujeito “triângulo”. Desta forma, não existe juízo analítico a posteriori. Uma vez que é analítico será a priori, pois é validado pelo próprio conceito, independentemente de qualquer experiência. Os juízos sintéticos serão todos aquelas que não são analíticos.

Sendo sintético, caso fosse a posteriori, estes não serviriam para ciência. Já que, esses conhecimentos seriam empíricos ou particulares, daí não serão universais. Portanto, Kant defende que para a ciência os conhecimentos deveriam ser sintéticos a priori (MONTOITO, 2014a). E ele usa da matemática para exemplificar este tipo de juízo.

> Kant afirma a Matemática como ciência inequívoca, exemplo tanto para a metafísica quanto para as outras ciências, como o verdadeiro modelo de

> acordo com o qual se poderia ampliar o conhecimento sem o auxílio da experiência. Para ele, tanto as operações aritméticas quanto os juízos da geometria eram sintéticos a priori (MONTOITO, 2014a, p. 116).

Ainda na Crítica da Razão Pura, é descrito que nossa experiência de mundo envolve dois elementos, a *sensibilidade* e o *entendimento.* A primeira diz respeito a nossa habilidade de vivenciar diretamente coisas particulares no *espaço* e no *tempo*, nos quais ele chamou de intuições. Já o entendimento, é nossa habilidade de ter e usar conceitos. Este espaço citado agora, não é um conceito experimental absorvido de experiências externas. É a forma do sentido externo. "O espaço é uma representação a priori necessária que torna possível as representações externas e, embora possamos pensar um espaço no qual não se encontra nenhum objeto, é impossível representar a ausência de espaço. " (MONTOITO, 2014a, p. 118).

CALACANO (2002) ressalta que este espaço que Kant fala, inseparável ao ser humano, é o espaço Euclidiano. "O espaço que ajuda o homem a conhecer o fenômeno, uma forma pura da intuição, é o espaço tal qual representado, provado e sistematizado na geometria de Euclides e todos – absolutamente todos – os juízos sintéticos a priori da geometria dependem da intuição a priori desse espaço" (MONTOITO, 2014a, p. 119). A exemplo, Kant traz a proposição "duas linhas retas não limitam um espaço". Tal afirmação não pode ser deduzida pela definição de linha reta, nem de número dois. Toda tentativa de demonstrá-las chegaria ao fracasso. Assim, nos restaria buscar "refúgio na intuição, como faz sempre a Geometria" (KANT, 1987, p.51 apud MONTOITO, 2014a, p. 119). Para acendemos matematicamente, primeiro precisamos do objeto a priori na hipótese para criamos a proposição sintética. É nesta ordem que o sujeito acrescenta aos conceitos (de duas linhas retas) a algo novo (a não limitação do espaço) (MONTOITO, 2014a).

Se tal espaço é o euclidiano, então como percebemos e reconhecemos o nosso espaço externo como ele? Quando fazemos uma caixa de papelão ou reformamos um cômodo da nossa casa, a geometria euclidiana se aplica perfeitamente. Ela se encaixa e obedece em toda a extensão a forma compreensível de lermos a realidade. "Mesmo que o nosso universo não seja euclidiano no seu todo, localmente, isto é, na nossa vizinhança imediata, comporta-se como um universo euclidiano" (COUTINHO, 2004a, p. 27 apud MONTOITO, 2014a, p. 120). Kant notou isso.

“Kant foi um euclidiano convicto” (COUTINHO, 2004, p. 228 apud MONTOITO, 2014a, p. 121). Assim, foi dado a geometria euclidiana um enorme destaque. Associando suas representações com a intuição humana.

> [...] se todos os seres humanos intuem (pelas formas a priori do tempo e do espaço) e se este espaço é euclidiano – pois é o que melhor representa a nossa realidade – a geometria euclidiana deixa de ser tão somente uma sistematização e organização de conceitos bem elaboradas por Euclides para ser, também, necessária para a compreensão do mundo. (MONTOITO, 2014a, p .121).

Todo esse passeio que realizamos até aqui, do Racionalismo de Descartes, do Empirismo de Hume e do Criticismo de Kant, teve como propósito observamos que as ideias filosóficas, por mais que tenha mudado, a matemática de Euclides estava sempre à disposição para ser utilizada como exemplo para se chegar a verdade.

Mas quanto ao ensino de matemática? Seria os *Elementos* uma boa fonte bibliográfica para ser utilizada em escolas? A resposta para essa segunda pergunta, atualmente, talvez fosse unânime que as respostas seriam “não”. Mas algum dia ela já foi sim? Até quando ela foi sim? Tais livros milenares como estes, seria razoável pensar que fariam séculos nas quais eles não seriam mais defendidos para serem utilizados neste propósito. Porém, não é tão distante assim.

Algumas referências de Alice no País das Maravilhas foram soltadas nesta dissertação. Se chegaram a pensar que possuía algum propósito, a resposta é que não tem. Elas foram colocadas porque por acaso se encaixaram e porque foram escritas pelo nosso próximo personagem.

Retornamos a Inglaterra, em específico no período vitoriano (1837-1901), para falarmos de Lewis Carroll. O *Seu Madruga*[6] do seu tempo, ele foi romancista, contista, fabulista, poeta, desenhista, fotógrafo, matemático e ainda sobrava tempo para ser reverendo em uma igreja anglicana. Se você já o conhecia, é muito provável que tenha sido pela sua maior obra, o clássico livro Alice no País das Maravilhas. Mas, ele possui outro livro no qual, aqui, nos interessa mais.

Mas antes, vamos ver o contexto na qual ele foi escrito. Já na sua época, existiam diversos outros livros didáticos sobre geometria, e que eram utilizadas nas escolas inglesas. Os *Elementos* estavam caindo cada vez mais em desuso. Mas, “No ensino de geometria,

[6] Personagem da série de comédia de televisão Chaves, famoso por ter diversos trabalhos ao longo da série.

Carroll mostrou-se devotado a Euclides" (MONTOITO, 2014b, p. 1389). Assim, era defensor que os livros de Euclides fossem a única obra de referência para o ensino de geometria. Daí, surgiu o seu livro *Euclides e Seus Rivais Modernos*. Este foi escrito em forma de peça de teatro, onde Minos, um professor fictício, em uma bela noite de sono, recebe a visita de Euclides no seu sonho, com a proposta de juntos, realizarem uma análise minuciosa sobre os livros didáticos que estavam sendo propostos para os ingleses. Os autores destes livros foram chamados de Rivais. Entre eles estavam Legendre, Cooley, Cuthbertson, Henrici, Wilson, Pierce, Willock, Chauvenet, Lloomis, Morell, Reynolds, Wright, o Programa da Associação para a Melhoria do Ensino de Geometria (AIGT) e o Programa-Manual de Wilson.

Nele, o leitor irá conhecer quais eram os modelos de sistematização da Geometria propostos na sua época. E, Carroll tenta mostrar que em todos eles teriam paradoxos, ou incorreções atualizações inúteis. O axioma das paralelas, segundo ele permitiria "verificar que duas retas finitas se encontrarão quando prolongadas se, ao serem interceptadas por uma transversal, fazem com esta dois ângulos internos do mesmo lado que, juntos, somam menos que dois retos" (MONTOITO, 2014b, p. 1399). Porém muito dos seus rivais, não adotavam o axioma descrito assim, e sim a versão de Playfair (por um ponto dado fora de uma reta dada é possível traçar somente uma reta paralela à primeira). Mas, o fantasma de Euclides conta-nos que ela não forneceria "um teste para verificar se duas retas são paralelas, pois baseia-se apenas na observação delas, sem oferecer uma possibilidade matemática para verificar se elas se aproximam ou não" (MONTOITO, 2014b, p. 1399).

Rivais como Chauvenet, Loomis, Morell, Reynolds e Wright, tem seus méritos questionados pelo personagem fictício Minos: "com relação a estes cinco autores, posso dizer que, para mim, eles não parecem trazer nenhuma novidade desejável que possa ser facilmente introduzida numa edição corrigida de Euclides" (CARROLL, 2013, p. 177 apud MONTOITO, 2014b, p. 1409).

Este esforço de Carroll em defender os *Elementos* chegou a ser bem avaliado em uma crítica que o recebeu em 1879:

> *Euclides e Seus Rivais Modernos* de Charles L. Dodgson, M.A, Estudante Sênior e Professor de Matemática da Christ Church, Oxford, é um notável exemplo de um argumento sério apresentado em estilo divertido, concebido para provar que, para a geometria elementar, um Euclides revisto é melhor do que qualquer substituto moderno proposto. A forma é dramática: Minos e Rhadamanthus, com a ocasional ajuda do próprio Euclides e Niemand, colocam à prova doze (ou, em alguns aspectos, quase vinte) inimigos

> euclidianos, de modo bem divertido, com engraçados e conclusivos embaraços de todos os tipos... Este é o mais elaborado trabalho matemático de Dodgson e, ao mesmo tempo, um marco para a literatura. (MONTOITO, 2014b, p. 1413, grifo do autor).

A obra foi bem recebida, mas não o suficiente para de fato permanecer com os *Elementos* como livro didático nas escolas elementares inglesas. Mas é, no mínimo, curioso que dois milênios depois de sua escrita, ainda haviam defesas para o seu uso. O que pretendemos aqui não é fazer uma nova defesa. Mas sim, mostrar que existem raízes euclidianas no ensino de aritmética da educação básica hoje.

7 A RELAÇÃO

Se formos comparar o sétimo *Elementos* com outro livro didático escrito para algum ano do ensino fundamental, teremos bastante dificuldade. Pois, a aritmética escolar básica difere, consideravelmente, no nível de exposição que Euclides traz. Demonstrações não são comuns para séries tão iniciais. Os *Elementos* é uma coleção de proposições seguidas de suas demonstrações. Não havendo espaço para discutir as definições, exemplificar a teoria e discutir exercícios. O que vai no sentido contrário do que é pensando atualmente para os livros didáticos. Se formos fazer essa comparação, só sairemos com uma falsa sensação que não existe nenhuma semelhança entre as obras.

Porém, esse modelo de organização, é compartilhado pelos demais livros didáticos, a níveis mais altos, em particular, em obras utilizados para a formação de professores. Assim, se um docente aprende uma teoria A através de um livro B, esperasse que quando ele for lecionar A, poderá tirar de B algumas referências. Isto é, B influenciou o processo de ensino de A.

Sendo A = Aritmética, escolhemos agora quem será o nosso B. Como estamos interessados que o professor, ao dá aula de aritmética, ministre sobre o estímulo de B, adotaremos um livro que foi desenvolvido para isso, pensado para a formação de professores. Daí, escolhemos *Aritmética* de Abramo Hefez, feito para a coleção PROFMAT.

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) é um programa de mestrado, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), na qual visa atender prioritariamente professores de Matemática em exercício na Educação Básica, especialmente de escolas públicas, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua docência. Com mais de 3000 formandos desta pós graduação, o projeto veio junto com o Plano Nacional da Educação - PNE, Lei Nº 13.005 de junho de 2014, que prevê até a vigência deste PNE (que tem duração de 10 anos), 50% dos professores da educação básica sejam contemplados com o título de Pós Graduação. Daí, existe uma parte significativa, de professores de matemática, que passaram por este curso. Onde terão contato com o livro *Aritmética* e esperasse que, ao trazer esses conteúdos para sala de aula, algum ato de sua docência, será baseado em alguma parte desta obra.

Podemos esperar, que os leitores deste livro, tenha sua docência impactada por ele, pois ele foi pensado para tal: “[...] destina-se à formação complementar daqueles que estão no exercício da docência no ensino fundamental e médio” (HEFEZ, 2016, p. 7). No prefácio do livro, Hefez conte que ele surgiu a partir de notas de aula que deu para cursos de especialização para professores do ensino básico. Desta forma, percebesse que ele difere de outros livros didáticos sobre aritmética, que são adotados, em cursos de licenciatura.

Figura 2 - Prefácio de *Aritmética*

Prefácio

Este livro, do qual ora apresentamos a segunda edição, nasceu de notas de aula de um curso de especialização para professores de ensino fundamental e médio, organizado pela SBM, que ministrei em 2003 e foi posteriormente transformado no livro *Elementos de Aritmética*, publicado na Coleção Textos Universitários, da SBM. Este material foi utilizado a partir de 2011 na disciplina Aritmética, do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat – por dois anos seguidos, tendo sido submetido ao longo desse processo a uma profunda revisão e ampliação, resultando na primeira edição deste livro.

O nosso objetivo aqui é estudar as propriedades dos números inteiros junto com as suas operações de adição e de multiplicação, enfatizando as questões relacionadas com a divisibilidade.

O livro cobre o material para um primeiro curso de Aritmética e destina-se à formação complementar daqueles que estão no exercício da docência no ensino fundamental e médio, bem como à formação básica dos alunos de graduação em Matemática.

Apesar deste material não ser ensinado neste grau de detalhe e de profundidade nas escolas, ele deve, obrigatoriamente, fazer parte da bagagem mínima de todo professor de Matemática.

A Aritmética, como usualmente é chamada a parte elementar da Teoria dos Números, teve como principal marco inicial a obra *Os Elementos*, de Euclides (aprox. 300 a.C.), encontrando o seu auge nos trabalhos de Pierre de Fermat (1601-1665) e Leonhard Euler (1707-1783), o que a levou a tornar-se um dos principais pilares da Matemática. A partir do início do século XIX, graças à obra de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), a Aritmética transforma-se em Teoria dos Números e começa a ter um desenvolvimento extraordinário. São esses os quatro principais protagonistas da história que iremos contar aqui.

Fonte: (HEFEZ, 2016, p. 7)

Por exemplo, no curso de Matemática-Licenciatura ofertado pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) no campus Agreste, segundo o seu Plano Pedagógico do

Curso (PPC), os livros que compõe a referência bibliográfica da disciplina Teoria dos Números (na qual contém a aritmética) são *Teoria elementar dos números* de LANDAU (2002) e *Álgebra: estruturas algébricas básicas e fundamentos da teoria dos números* de MAIO (2007). Podemos perceber que ambos apenas se preocupam em explanar o conteúdo que se propôs a apresentar. Não dialoga com atividades propostas para o ensino, não discute tópicos relacionados a história dos conceitos e não rediscutem os aspectos introdutórios da aritmética, que é parte significativa do que é esperado para o ensino nos anos finais do fundamental.

Desta forma, é difícil afirmar que o futuro docente que estuda a aritmética com uma dessas obras na sua graduação, terá sua aula influenciada por elas. Isso pode ocorrer? Pode. Mas não é garantia. Por isso escolhemos *Aritmética* de Hefez, em detrimento de outros. A maneira que ele estruturou o livro, sendo similar aos que são propostos para o ensino básico, discutindo os conceitos e sua evolução, citando constantemente a história do assunto que está sendo abordado, indicando aplicações lúdicas para sala de aula, podemos esperar que ele, em algum nível, seja uma fonte bibliográfica na qual o professor consultará para dá sua aula.

Figura 3 - Exemplo de História da Matemática citada no livro.

> Aparentemente, Euclides não criou muitos resultados, mas teve o mérito de estabelecer um padrão de apresentação e de rigor na Matemática jamais alcançado anteriormente, tido como o exemplo a ser seguido nos milênios que se sucederam. Dos treze livros de *Os Elementos*, dez versam sobre geometria e três, sobre aritmética. Nos três livros de aritmética, Livros VII, VIII e IX, Euclides desenvolve a teoria dos números naturais, sempre com uma visão geométrica (para ele, números representam segmentos e números ao quadrado representam áreas). No Livro VII, são definidos os conceitos de divisibilidade, de número primo, de números perfeitos, de máximo divisor comum e de mínimo múltiplo comum, entre outros. No mesmo livro, além das definições acima, todas bem postas e até hoje utilizadas, encontra-se enunciada (sem demonstração) a divisão com resto de um número natural por outro, chamada divisão euclidiana (nosso Teorema 2.1.1). Com o uso iterado desta divisão, Euclides estabelece o algoritmo mais eficiente, até hoje conhecido, para o cálculo do máximo divisor comum de dois inteiros (Proposições 1 e 2 nos *Elementos*), chamado de Algoritmo de Euclides, que apresentaremos na Unidade 5. No Livro VIII, são estudadas propriedades de sequências de números em progressão geométrica. No Livro IX, Euclides mostra, de modo magistral, que a quantidade de números primos supera qualquer número dado; em outras palavras, existem infinitos números primos (Proposição 20 nos *Elementos*; nosso Teorema 2.1 da Unidade 12). Euclides também prova que todo número natural se escreve de modo essencialmente único como produto de números primos, resultado hoje chamado de Teorema Fundamental da Aritmética (Proposição 14 nos *Elementos*; nosso Teorema 1.1 da Unidade 12). É também provado um resultado que dá uma condição necessária para que um número natural seja perfeito (Proposição 35 em *Os Elementos*; parte de nosso Teorema 1.1, Unidade 16).

Fonte: (HEFEZ, 2016, p. 54)

Figura 4 - Exemplo de relação histórica com o conteúdo que está sendo abordado

5.1 Algoritmo de Euclides

Dados dois números inteiros a e b, não simultaneamente nulos, diremos que o número inteiro $d \in \mathbb{Z}$ é um *divisor comum* de a e b se $d|a$ e $d|b$.

Por exemplo, os números ± 1, ± 2, ± 3 e ± 6 são os divisores comuns de 12 e 18.

A definição a seguir é essencialmente a definição dada por Euclides nos *Elementos* e se constitui em um dos pilares da sua aritmética.

Diremos que um número natural d é um *máximo divisor comum* (mdc) de a e b, não simultaneamente nulos, se possuir as seguintes propriedades:

i) d é um divisor comum de a e de b, e

ii) d é divisível por todo divisor comum de a e b.

A condição (ii) acima pode ser reenunciada como segue:

ii′) Se c é um divisor comum de a e b, então $c|d$.

Fonte: (HEFEZ, 2016, p. 74)

Explicado o motivo de sua escolha, partiremos agora em busca (espero que encontremos) similaridades com o conteúdo do sétimo *Elementos* de Euclides.

Vamos encerrar, mais cedo do que o esperado, esta pesquisa apenas fazendo citação direta do livro do Hefez na qual ele próprio admite sua inspiração nos *Elementos* para construir sua obra: "Os conceitos e resultados contidos neste capítulo, com pequenas variações, encontram-se, em sua maioria, no Livro VII dos *Elementos* de Euclides. É notável a sua atualidade, apesar dos quase dois milênios e meio que nos separam de sua criação" (HEFEZ, 2016, p. 74). Então é isso, acabou a discussão. Obrigado por terem lido até aqui. Abraços...

Brincadeira!

Vejam, você terá que confiar em nós, quando dizemos que quando escolhemos este livro para analisar, não era de nosso conhecimento essa citação. Foi uma surpresa bastante agradável. Facilitou em muito o nosso trabalho. Assim, como Hefez assume a influência euclidiana nele, vamos procurar quais seriam elas.

Se você leu com carinho o capítulo 5 deste trabalho, perceberá que a maioria das proposições que contém no livro 7, são as propriedades mais básicas e iniciais que se espera para desenvolver o resto da teoria. E por sua falta de citações, correlacionado aos *Elementos*, é uma tarefa difícil tomarmos o pioneirismo desta alegação. Em contrapartida, existem os resultados nos quais, na própria literatura matemática, elas estão indissociáveis ao nome de Euclides. Daí, nos concentramos nelas, analisando se essas referências se dão apenas como uma espécie de "homenagem" a pessoa Euclides, ou se estão sobre herança do seu trabalho.

Como já citado aqui no capítulo 5, as proposições 1 e 2 do livro 7, trazem um método construtivo para se encontrar o MDC de dois números. Isto, posteriormente viria a ser conhecido na literatura como o Algoritmo de Euclides. E este resultado está em *Aritmética,* com uma leve alteração. Lembremos que na época de Euclides, os conceitos de *resto* e *divisão* não estavam bem definidos. Então, hoje interpretamos o Algoritmo de Euclides como sendo $mdc\ (a,b) = mdc(b,r)$ onde r é resto da divisão de a por b. Mas, isso não era possível de ser realizado naquela época. Porém, o que está descrito nos *Elementos* é que $mdc\ (a,b) = mdc(b, a-b)$, e se aplicarmos q vezes esta propriedade (onde q é quociente da divisão de a por b teremos o desejado $mdc\ (a,b) = mdc(b, a-bq) = mdc(b,r)$. Assim, batizamos este algoritmo com o nome de Euclides, pois ele é apenas uma generalização do que o mesmo havia descrito. Só que, o que importa para nós aqui, é a ideia construtivista do *mdc.* Veja, tanto Euclides quanto Hefez, descreve o *mdc* como sendo o *máximo divisor comum* e provam sua existência através da sua construção, isto é, o *mdc* existe porque eu acabei de encontrá-lo. É comum descrever, em um domínio D, o $mdc(a,b)$ como sendo o gerador do ideal principal (a,b). Isto é, $mdc(a,b) = min\{ax + by; x, y \in D\}$. Essa seria a maneira mais geral para de defini-lo. Mas, não é assim que está em *Aritmética,* está da mesma forma que estava nos *Elementos.*

O Teorema Fundamental da Aritmética foi proposto e demonstrado somente em 1796 por Gauss (HENDY, 1975). Mas, o que faltava nos *Elementos* para prová-lo, era apenas sua unicidade. A proposição 30 diz que se p é primo e $p \mid ab$ então $p \mid a$ ou $p \mid b$. Hefez traz essa afirmativa na sua Proposição 7.1. A proposição 31 na qual diz, "Todo número composto é medido por algum número primo" (EUCLIDES, 2009, p. 291). Aplicando-a sucessivas vezes, teremos o que cada número composto se expressa como produto de primos. Com este resultado, e a proposição 32: "Todo número ou é primo ou é medido por algum número primo" (EUCLIDES, 2009, p. 292) obtemos parcialmente o Teorema 7.3 de *Aritmética* "Teorema Fundamental da Aritmética. Todo natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos" (HEFEZ, 2016, p. 123). Assim, com exceção da unicidade, este grande teorema da Teoria dos Números, foi abordado e construído de maneira similar nestas duas obras nas quais analisamos.

Apesar de não está no livro 7, e termos dito que nos concentrarmos, somente nele, vamos abrir uma exceção aqui e fazer uma menção honrosa a uma proposição do livro 9: "20. Os números são mais numerosos do que toda quantidade que tenha sido proposta de números primos" (EUCLIDES, 2009, p. 343). Já comentamos aqui o quão elegante ela é. Existem diversas maneiras de provar esse resultado. O autor aqui, em particular, gosta de uma que usa os Números de Fermat. Mas, e a demonstração de Euclides foi a que ditou "moda e tendência". E ela está também em *Aritmética.* "Utilizaremos a mesma prova dada por Euclides, onde pela primeira vez se registra o uso de uma demonstração por redução ao absurdo em matemática. Essa prova é considerada uma das pérolas da matemática" (HEFEZ, 2016, p. 131). Assim, os *Elementos* foram responsáveis por propagar o método de *reductio ad absurdum* na matemática, técnica na qual é constantemente utilizada em todas as suas áreas.

Destes 3 exemplos, vimos que não é mera coincidência, ou simples homenagem, a figura de Euclides, quanto a batizamos estes resultados com o seu nome. O que está descrito nos *Elementos* é referência quando vamos abordar estas proposições. Assim, mesmo que Hefez já havia admitido sua inspiração no prefácio, verificamos que de fato, e como (em uma parte) os *Elementos* de Euclides influência sua obra. E aplicamos agora, o "efeito cascata". Porque o professor do ensino básico, que em sua pós, estudou por *Aritmética*, caso ele seja de alguma forma impactada, seja sua visão sobre a matemática ou sobre sua forma de ensinar matemática, o responsável por isto foi, de certa forma, o nosso menino Euclides.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS: O Fim?

"Eu não sou louco. É só minha realidade que é diferente da sua."
Alice no País da Maravilhas.

A grandiosidade dos *Elementos* é inegável. A verificação desta frase você pode consultar nos capítulos anteriores. Mas, ainda assim, é uma obra de mais de 2300 anos atrás. Vivemos em um mundo líquido, nada é para durar como já disse o saudoso Bauman (2000). Como é possível que os *Elementos* ainda narram a maneira de pensar matemática e reflita isto no seu ensino? Veja, a matemática de Euclides, é uma ideia, e boas ideias não são descartadas, apenas aperfeiçoadas. Assim, o projeto de categorizar e juntar todo conhecimento que existia ali no mundo antigo até 300 a.c., foi uma excelente ideia que foi executada com maestria. Ganhou o título de principal referência matemática do seu tempo. Com isto, quando avançamos para idade média, os *Elementos* ainda tinha relevância, seja no começo desse período com Proclo escolhendo esta obra para ressurgir com o ensino de Matemática no Império Romano, seja no final do período medieval através do Renascentismo, onde voltou se a revalorizar obras da antiguidade, que nortearam o desenvolvimento da ciências dessa época. Sua força foi tão hercúlea que sua influência ainda era vigente na idade moderna. Relatamos aqui, como o pensamento Euclidiano impactou as filosofias de René Descartes, David Hume e Immanuel Kant, ideias estas nas quais ditaram a o pensamento moderno. Além disso, vimos até, pelo menos onde, os *Elementos* estava presente na sala de aula como principal referência bibliográfica para o ensino, sendo defendida com "unhas e coelhos" por Lewis Carroll, na Inglaterra Vitoriana.

O grande desafio para Euclides, era adentrar a idade contemporânea. E a isso nos propomos a observar neste trabalho, em relação a aritmética. Antes de qualquer verificação, era de se esperar que isto de fato aconteceu. O pensamento euclidiano esteve ao lado de filosofias nas quais sabemos hoje que exercem influência na educação, em particular no ensino de matemática. Como trouxemos no capítulo 3, Proclo defendia que Euclides e os *Elementos* eram platônicos. Deste modo, à medida que se conhece a relevância de Platão para certas teorias educacionais, esperasse que a educação matemática bebesse fontes de importantes obras matemáticas do passado e com obras platônicas. Os *Elementos* satisfazem estes dois itens. Como descrito no capítulo 6, as filosofias do Racionalismo, Empirismo e Criticismo estão sobre influência euclidiana. O impacto que essas ideias tiveram no desenvolvimento da civilização humana é relevante. E são aporte teórico para discussões relacionadas a educação. Assim, com base nesse peso histórico e por estar ao lado de filosofias que, em pelo menos algum nível, impactam a maneira de se pensar o ensino de matemática, possíveis vestígios atuais que possam ser encontrados, que possuem semelhança com o que está descrito no *Elementos,* será muito difícil defender que é apenas coincidência.

Estávamos interessado em investigar as possíveis influências euclidianas na aritmética. Assim, deveríamos nos concentrar apenas nos livros 7, 8 e 9, nas quais abordam esta área. Por motivos de delimitar a pesquisa, concentramos apenas no livro 7. Na qual julgamos ser o mais interessante a se analisar entre os três. Pois ele é peça fundamental para se conhecer os demais. Daí, no nosso quinto capítulo realizamos toda uma inquirição a respeito do sétimo *Elementos.* Conhecendo, discutindo e analisando todas suas 23 definições e 39 proposições.

Conhecido seu conteúdo, para começarmos a caça atrás de suas influências, tivemos que escolher um alvo, de preferência algo relevante. Justificamos no capítulo 7 o porquê de não escolhermos um livro didático que é usado na educação básica. Precisamos lembrar que os *Elementos* foram escritos em pergaminhos de papiro. Existia uma limitação física, do que caberia em cada obra. Assim, só adicionando, exclusivamente, definições, proposições e demonstrações, elas divergem consideravelmente de qualquer livro didático dedicado ao ensino básico. Em particular aos do ensino fundamental, que é onde estes conteúdos aritméticos são propostos. Livros com caráter mais demonstrativo, em teoria, se assemelha mais com eles. Como, em regra, são os professores que têm contato com essas obras, escolhemos uma que foi feito exclusivamente para isto, pensado na formação de professores. Desta forma, escolhemos o livro *Aritmética* do professor Abramo Hefez, desenvolvimento para o curso de pós graduação PROFMAT.

O próprio Hefez, no prefácio e no decorrer do texto, admite que aquilo que estava sendo apresentado tem como referência o sétimo *Elementos.* Como exemplo disse trouxemos três exemplos: O algoritmo de Euclides para o cálculo do mdc, o Teorema Fundamental da Aritmética e a infinitude dos números primos. Poderíamos fazer correspondências com as demais proposições do livro 7. Mas essas em específico, estão bem documentadas nas literaturas como ligadas a Euclides. Só que, essa ligação poderia estar apenas como uma espécie de homenagem. E verificamos que não. De fato, essas proposições não estão vinculadas ao nome de Euclides à toa. Mesmo que se contra argumente que esses resultados não são originais dos *Elementos,* a maneira que está descrita e apresentada, em pouco ou em nada difere do que se encontra em *Aritmética.*

Assim concluímos, que mesmo após mais de 2 milênios, os *Elementos,* o sétimo em particular para nossa pesquisa, tem influência sobre a maneira de pensar matematicamente em relação a aritmética. E isto, influencia no seu processo de ensino. A maneira como aprendemos conceitos como mdc e números primos se assemelha com o Euclides havia pensado. E por causa de todo essa força ao decorrer da história, acreditamos que essa semelhança não é coincidência, e sim um processo de influência que os *Elementos* exerce sobre o ensino de aritmética.

Ao longo da construção deste trabalho, novos questionamentos surgiram, que estão correlacionados com o tema, mas por motivos de tempo, não foi possível verificar. Assim, sugerimos aqui, para você caro leitor, serem desenvolvidas em futuras pesquisas. Uma delas é questionar se a falta da axiomatização da aritmética nos *Elementos* foi responsável pelo atraso de quase 2000 mil anos para serem finalmente construídos. Uma vez que essa coleção de obras foi colocada num pedestal de grandeza, a falta desses axiomas nela, não gerou questionamentos, entre seus leitores, sobre a falta deles. Um paralelo que podemos traçar é em relação ao surgimento das geometrias não-euclidianas. A maneira que Euclides organizou e construir sua geometria era de maneira "ilusória" tão perfeita, que levou séculos para começar a questioná-la. O mesmo pode ter acontecido em relação a aritmética. Também podemos nos questionar, se mesmo hoje com estes axiomas descritos, porque eles ainda são tão poucos falados e pouco, quando nunca, divulgados em livros de aritmética? Será muito difícil de você encontrar um livro de geometria elementar que não cite nele os seus axiomas. Mas quando tratamos da aritmética, o difícil é encontrar um que fale sobre eles. Em nossa pesquisa, percebemos que o que parece é que a aritmética existia ali apenas para servir de ferramenta para geometria. Exemplo disso, é que ele sempre representa um número como um segmento de reta. Por causa disso, pouco do que tratamos como aritmética elementar hoje, estava descrita nos *Elementos.* Mas, o que faltava ali só veio surgir, quase em sua maioria, na Idade Moderna. Só que, o que está previsto hoje, para ensinamos de aritmética na educação básica, se encontra nos *Elementos*. Isto é, temos a geometria elementar que está toda descrita por Euclides, e ela está quase por totalidade indicada para ensinarmos na educação básica. Mas, a aritmética elementar, na qual tratamos como Teoria dos Números, ocorre o contrário. É interessantíssimo pesquisar sobre isso. Questionar se essa "supervalorização" da geometria em detrimento da aritmética, é resultado do que da ideia Euclides que uma é apenas uma ferramenta para a outra.

Veja que mesmos nessas novas problemáticas que levantamos agora, percebe-se um padrão de um, muito provável, impacto que os *Elementos* tiveram na história do ensino e pesquisa em matemática. Com isso essa pesquisa tem sua justificativa de existência. O que ensinamos atualmente, em parte considerável, já era estudado por Euclides, e a nossa abordagem em relação a esses conteúdos, pouco difere da dele. Assim, quando estudamos os *Elementos* estamos estudando pela fonte "primária" nas quais outras referências, que tomamos, se baseia. Conhecer os *Elementos* é um passeio pela história da matemática, na qual quando voltamos temos uma visão muito mais ampla como surgiu e para que surgiu os conteúdos que ensinamos. E isto impacta positivamente e consideravelmente nosso processo de ensino desta magnífica disciplina. E isto tudo, não é loucura minha. Tudo que citamos e defendemos aqui, não é outra realidade, é a nossa que estamos, que enxerga a matemática com os olhos de Euclides, e a ensinamos, de maneira análogo, como ele nos ensinou em seus *Elementos.*

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Gustavo. *Platão e a Matemática: uma questão de método.* Dissertação de Doutorado: Rio Claro: UNESP, 2014.

BAUMAN, Z. *Modernidade Líquida*. Rio de Janeiro: Zahar, 2000.

BICUDO, I. *Educação matemática e ensino de matemática*. In: Temas & Debates: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, n.3. São Paulo: Editora da UNESP, p.31-50, 1991.

BLAY, Michel. *Dictionnaire des concepts philosophiques*. Paris: Larousse, 2013.

BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática.* Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

BRITO, Arlete de Jesus. *Geometrias Não-Euclidianas: um Estudo Histórico-Pedagógico*. Dissertação de Mestrado. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 1995.

CABRAL, Rosimere Mendes. *Biblioteca de Alexandria: construções políticas da memória.* Dissertação de Pós-Graduação. Rio de Janeiro: UNIRIO, 2010.

CALACANO, Oduvaldo. *O Educador Matemático em Proclo.* Dissertação de Doutorado. Rio Claro: UNESP, 2002.

CANFORA, Luciano. *A Biblioteca desaparecida.* Tradução de Federico Carotti. São Paulo: Companhia das letras, 1989.

CARROLL, Lewis. *Alice no País das Maravilhas.* Tradução de Clécia Regina Ramos. Petrópolis: Editora Arara Azul, 2002.

COSTA. M. A. *As idéias fundamentais da matemática e outros ensaios*. São Paulo: Convívio, 1981.

COUTINHO, Lázaro: *Matemática e Mistério em Baker Street*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2004.

DAHMEN, Karsten. *The Legend of Alexander the Great on Greek and Roman Coins*. Nova York: Routledge, 2007.

DESCARTES, René. *Discurso do Método*. Tradução de Paulo Neves. Porto Alegre: LP&M, 2005.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática.* Tradução de Hygino H. Domingos. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

EUCLIDES. *Os Elementos.* Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

FREEMAN, Philip. *Alexandre o Grande.* Tradução de Marília Chaves e Márcia Men. Barueri: Editora Manole Ltda, 2016.

GIL, Antonio Carlos. *Métodos e técnicas de pesquisa social.* 6ª ed. São Paulo: Atlas, 2008.
HEFEZ, Abramo. *Aritmética.* Rio de Janeiro: SBM, 2016.

HENDY, M. D. *Euclid and the fundamental theorem of arithmetic.* Nova Zelândia: Massey University, 1975.

HUME, David. *Investigação Sobre o Entendimento Humano*. São Paulo: Abril Cultural, 1984.

KANT, Immanuel. *Crítica da Razão Pura*. São Paulo: Nova Cultural, 1987.

KLEINMAN, Paul. *Tudo oque você precisa saber sobre filosofia: de Platão e Sócrates até a ética e metafísica, o livro essencial sobre o pensamento humano.* Tradução de Cristina Sant'Anna. São Paulo: Editora Gente, 2014.

KOYRÉ, Alexandre. *Considerações Sobre Descartes*. Lisboa: Editorial Presença, 1963.

MARRONE, Steven P. *A Filosofia Medieval em seu contexto;* in: McGRADE, A. S. (org.). Filosofia Medieval. Aparecida: Ideias & Letras, p 27-70, 2008.

MONTOITO, Rafael; GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. *Ecos de Euclides: breves notas sobre a influência d'Os Elementos a partir de algumas escolas filosóficas*. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 16, n. 1, p. 95-123, 2014a.

MONTOITO, Rafael; GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. *O Euclides e Seus Rivais Modernos, de Lewis Carroll (1879): uma apresentação*. Bolema, Rio Claro, v. 28, n. 50, p. 1386-1414, Dec. 2014b.

OLIVEIRA GROENWALD, Claudia Lisete; DE OLIVEIRA SAUER, Lisandra; FUELBER FRANKE, Rosvita. *A história da matemática como recurso didático para o ensino da teoria dos números e a aprendizagem da matemática no ensino básico*. Paradígma, Maracay, v. 26, n. 2, p. 35-55, dic. 2005.

PADILHA, A.; CARVALHO, T.; LENZI T.; SOUZA, S. *Significado de Influência.* Disponível em: <https://www.significados.com.br/influencia>. Acesso: 03 de dez. de 2019.

PROCLUS. *Proclus. A Commentary on the Firts Book of Euclid's Elements.* Glenn R. Morrow (trad.). Pisa: Giardini Editori e Stampatori, 1978.

SCHUBRING, Gert. *Análise Histórica de Livros de Matemática: Notas de Aula.* Tradução de Maria Laura Magalhães Gomes. Campinas: Autores Associados, 2003.

VALDÉS, J. E. Nápoles. *La Historia como elemento unificador en lá Educación Matemática*. (texto digitado). Argentina, 2002.

VOLKERT, Klaus. *Die Krise der Anschauung.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1986.