UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNABUCO
CENTRO ACADEMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
FÍSICA-LICENCIATURA

NICODEMOS AUGUSTO DE PAIVA NETO

# MODELAGEM MATEMÁTICA COM AUXÍLIO DO SOFTWARE MAXIMA COMO METODOLOGIA PARA O ENSINO DE FÍSICA

Caruaru, 2018

NICODEMO AUGUSTO DE PAIVA NETO

# MODELAGEM MATEMÁTICA COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE MAXIMA COMO METODOLOGIA PARA O ENSINO DE FÍSICA

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado ao Curso de Graduação em Física-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciatura em Física.

Orientador: Prof. Dr. Augusto César Lima Moreira.

Caruaru, 2018

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier CRB/4-1242

P149m Paiva Neto, Nicodemos Augusto de.
P149m Paiva Neto, Nicodemos Augusto de.
Modelagem matemática com auxílio do Software Maxima como metodologia para o ensino de Física. / Nicodemos Augusto de Paiva Neto. – 2018.
37f. ; il.: 30 cm.

Orientador: Augusto César Lima Moreira.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Física, 2018.
Inclui Referências

1. Física – Estudo e ensino. 2. Equações diferenciais ordinárias. 3. Circuitos elétricos. 4. Software. I. Moreira, Augusto César Lima (Orientador). II. Título.

371.12 CDD (23. ed.) UFPE (CAA 2018-226)

# UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FOEMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE FÍSICA-LICENCIATURA

ATA DE DEFESA PÚBLICA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

No décimo segundo dia do mês de julho de dois mil e dezoito deu-se a defesa pública do Trabalho de Conclusão do Curso intitulado Modelagem Matemática com o auxílio do Software Maxima como Metodologia para o Ensino de Física do discente NICODEMOS AUGUSTO DE PAIVA NETO, sob a orientação do prof. Dr. Augusto César Lima Moreira. A defesa teve início às dezessete horas e trinta minutos na sala H02 do bloco H do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco. Após trinta minutos de apresentação o discente foi arguido pela banca examinadora, formada pelo orientador e presidente da banca examinadora o prof. Dr. Augusto César Lima Moreira docente do Núcleo Interdisciplinar de Ciências Exatas e da Natureza, como segundo examinador o prof. Dr. Jehan Fonseca do Nascimento docente do Núcleo Interdisciplinar de Ciências Exatas e da Natureza e como terceiro examinador o prof. Dr. João Eduardo Fernando Ramos do Núcleo de Formação Docente. Terminada arguição a banca examinadora se reuniu e para deliberar e conceder a menção de APROVADO ao referido trabalho de conclusão de curso. E para constar lavrei a presente ATA que vai por mim assinada, docente do componente curricular Trabalho de Conclusão de Curso de Física-Licenciatura, e pelos membros da Banca Examinadora.

Caruaru, 12 de julho de 2018.

___________________________

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Augusto César Lima Moreira ________________________________________

Prof. Dr. Jehan Fonseca do Nascimento ________________________________________

Prof. Dr. João Eduardo Fernandes Ramos ________________________________________

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a meu DEUS, pois sem o seu infinito amor nada seria possível nesta jornada.

Agradeço especialmente ao orientador desse trabalho, o professor Dr. Augusto César Lima Moreira, pela sua orientação, paciência, compreensão e grande contribuição para que o mesmo se concretizasse.

À Universidade Federal de Pernambuco, de um modo geral, aos professores e funcionários, mas especialmente à professora Mestra Fabiana Costa, e aos professores de Física.

À minha família, principalmente à minha mãe, Maria da Glória, que com os seus conselhos, carinho e paciência me transmitiu paz e confiança para concluir esta etapa de minha vida.

Aos meus filhos, José Augusto e Ana Beatriz, pelo carinho e compreensão pela minha ausência em alguns momentos nesta caminhada.

A meus colegas de curso, principalmente, Bruno Francisco, Paula Juliane e Gladistony Lins que em alguns momentos difíceis me auxiliaram nesta jornada.

"As leis da natureza nada mais são que pensamentos matemáticos de Deus".

Johannes Kepler

## RESUMO

Neste trabalho é apresentada a modelagem matemática como um recurso para o ensino-aprendizagem de física, através de uma análise teórica e de um software, o Maxima, a dinâmica em circuitos elétricos compostos por dois e três componentes lineares passivos: resistores, capacitores e indutores, ligados em série ou em paralelo entre si. Como os circuitos elétricos apresentam uma natureza dinâmica, logo a modelagem matemática através de uma análise teórica baseadas nas leis dos nós e tensões de Kirchhoff; e das equações diferenciais ordinárias em relação às grandezas tensão e correntes produzindo equações que descrevam o comportamento dessas grandezas elétricas em função do tempo. Em seguida, as equações diferenciais foram resolvidas com a utilização do software Maxima, onde os mesmos circuitos elétricos foram reproduzidos matematicamente através de equações diferenciais ordinárias (EDO), encontradas as soluções matemáticas, analisadas as mesmas e construídos gráficos que mostram o comportamento das variáveis procuradas. De posse destes resultados, e comparando os com a teoria já existente em livros e em outras fontes de conhecimento, há construção de um cenário que tende a propiciar um conhecimento dinâmico e significativo, onde o aluno passa a possuir um papel atuante e importante dentro do processo ensino-aprendizagem. Logo, o objetivo principal deste trabalho que é mostrar a importância e a viabilidade do uso da modelagem matemática de fenômenos físicos com o auxílio do software Maxima como metodologia de ensino-aprendizagem de física foi alcançado.



**Palavras-chave:** Modelagem matemática. Ensino de física. Equações diferenciais ordinárias. Circuitos elétricos. Software Maxima.

**ABSTRACT**

In this work is presented mathematical modeling as a resource for the teaching-learning of physics, through a theoretical analysis and software, the Maxima, the dynamics in electrical circuits composed by two and three passive linear components: Concurrents, capacitors and inductors, connected in series or parallel to each other. As electric circuits present a dynamic nature, then mathematical modeling through a theoretical analysis based on the laws of the nodes and tensions of Kirchhoff; And the ordinary differential equations in relation to the tension and current magnitudes producing equations that describe the behavior of these electrical magnitudes as a function of time. Then the differential equations were resolved with the use of the maximum software, where the same electrical circuits were reproduced mathematically through ordinary differential equations (EDO), found the mathematical solutions, Analyzed the same and constructed graphs that show the behavior of the variables sought. With these results, and comparing them with existing theory in books and other sources of knowledge, there is a scenario that provides a dynamic and meaningful knowledge, where the student starts to have an important and important role within the teaching-learning process. With these results, and comparing them with existing theory in books and other sources of knowledge, there is a scenario that provides a dynamic and meaningful knowledge, where the student starts to have an important and important role within the teaching-learning process. Therefore, the main objective of this work is to show the importance and feasibility of the use of mathematical modeling of physical phenomena with the aid of the Maxima software as a teaching methodology-learning of physics was achieved.

**Keywords:** Mathematical modeling. Teaching physics. Ordinary differential equations. Electrical circuits. Maxima software.

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Comandos básicos utilizados no software Máxima neste trabalho .......................20

**LISTA DE FIGURAS**

Figura 1- Processo de carga e descarga de um capacitor em um Circuito RC..................25

Figura 2- Em (a) temos o procedimento do Máxima para “carregar o capacitor” com os parâmetros U = 2 e A = 3. Em (b) o procedimento para “descarregar o capacitor”. Em (c) e (d) as curvas de carga e descarga do capacitor. ...............26

Figura 3- Circuito em série RL..........................................................................27

Figura 4- Carga no circuito RL. Note que $A = R/L$ e $U = \varepsilon/L$. No gráfico, os parâmetros *A* e *U* valem, 3 e 2, respectivamente. ..............................................................28

Figura 5- (a) Capacitor sendo carregado pela fonte. (b) Com o capacitor carregado, fecha-se a fonte mudando a chave de A para B, ficando com um circuito LC (sem fonte). ...........................................................................................................29

Figura 6- (a) Solução via método direto, ou seja, resolvendo a equação 8. (b) Solução que transforma a equação 8 em um sistema. (c) Gráficos das funções q(t) (azul) e i(t) (vermelho) obtidos com o software usando os valores Q = 3 e W = 2. .......30

Figura 7- Circuito RLC com o capacitor inicialmente descarregado e com uma fonte constante U(t) = U...........................................................................31

Figura 8- (a) Solução via método direto, ou seja, resolvendo a equação 9. (b) Gráficos das funções q(t) (azul) e i(t) (vermelho) obtidos com o software, usando os valores A = 5, B = 1 e U = 3. (c) Solução que transforma a equação 9 em um sistema.....32

Figura 9- Circuito RLC com duas malhas internas.....................................................33

Figura 10- (a) solução usando o Máxima para o circuito RLC com duas malhas internas. (b) Gráfico da carga e da corrente usando os valores $U = 1$ e $A = 1$.....................34

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO .................... 11
1.1 A importância das TIC’s para o Ensino de Física .................... 13
1.2 Objetivos gerais e específicos .................... 14
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .................... 16
2.1 Conceitos Físicos dos Elementos da Modelagem Matemática .................... 16
2.1.1 Conceito de Objeto-Modelo e Modelo Teórico. .................... 16
2.2 O que é Modelagem Matemática? .................... 18
2.3 Metodologia .................... 20
2.4 Breve resumo sobre as Leis de Kirchhoff. .................... 21
3 SOFTWARE MAXIMA .................... 23
4 CIRCUITOS PROPOSTOS .................... 25
4.1. Modelagem Matemática nos Circuitos em Série RC, RL, LC, RLC com fonte, e RLC com duas malhas internas .................... 25
4.1.1 Circuito de Carga e Descarga do Capacitor (RC). .................... 25
4.1.2 Circuito de Carga e Descarga do indutor (RL) .................... 27
4.1.3 Circuito LC e oscilações livres .................... 28
4.1.4 Circuito em série RLC .................... 30
4.1.5 Um Circuito RLC com duas malhas em paralelo. .................... 32
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .................... 35
REFERÊNCIAS .................... 37

# 1 INTRODUÇÃO

A percepção dos alunos sobre o ensino de Física no ensino médio é negativa no que diz respeito à compreensão de sua utilidade prática. Vários são os questionamentos dos alunos aos professores sobre a serventia desta disciplina para as suas vidas. Essa situação – encontrada em diversas escolas públicas ou privada – é gerada por alguns fatores dentre os quais destacamos o modelo de ensino adotado pela maior parte das instituições escolares onde os alunos não são incentivados a pensar, refletir, questionar e contextualizar sobre os problemas que lhes são propostos, logo se tornam apenas sujeitos passivos nesse processo, como simples depósitos de informações que lhes são transmitidas, onde o ato de decorar fórmulas torna-se comum, usual e necessário, pois a metodologia usada se baseia em resolução de problemas idealizados com foco na aplicação de fórmulas matemáticas sem que, aparentemente, haja uma preocupação com a correlação entre os conceitos físicos em estudo e seus respectivos fenômenos.

Assim, a Física fica reduzida à simples cálculos matemáticos, já que uma fórmula matemática, os resolve, gerando assim uma "mera matematização" propedêutica na medida em que fica desvinculada dos conceitos de Física. Consequentemente, a desmotivação e o desinteresse dos alunos pela disciplina de Física tornam-se inevitáveis, principalmente, àqueles que têm dificuldade com a linguagem abstrata da Matemática.

Esta metodologia tem que ser mudada, pois a Física desenvolveu-se no trinômio composto de observações, teorias e experimentação, não apenas para satisfazer a curiosidade humana, mas também para atender às necessidades individuais e coletivas, garantindo a sobrevivência em situações adversas, gerando conforto, qualidade de vida e tecnologia. O produto inicial do esforço humano para suprir tais necessidades foram invenções que geralmente tiveram a Física e a sua linguagem (Matemática) como suporte.

Diante do exposto, não é do interesse desse trabalho fazer separação entre a Física e a Matemática, pelo contrário, é mostrar e explorar a importância da multidisciplinaridade entre estas duas disciplinas com a utilização da Modelagem Matemática.

A Matemática é a linguagem que os físicos utilizam quando desejam expressar as diversas leis e fenômenos da natureza. Sem a Matemática seria extremamente trabalhoso expressar qualquer fenômeno físico, porém, porém, o ideal é não permitir que a Física se restrinja à mera resolução de problemas de Matemática, como já foi dito anteriormente. Acreditamos que em se procedendo desta forma pode-se promover um maior dinamismo ao ensino da Física. Em relação à essa correlação Matemática/Física, Bassanezi afirma que:

> A Matemática para as ciências exatas, principalmente a Física, é uma ferramenta insubstituível, já que proporciona a elaboração de modelos matemáticos que resultam da interpretação dos problemas que expressam situações que representam fenômenos físicos, mostrando assim que há uma forte relação entre a Matemática e a Física.
> O objetivo fundamental do "uso" de matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância. (BASSANEZI, 2002, p.18).

A Matemática é de grande importância no desenvolvimento dos conceitos físicos, pois ela está sempre presente nas várias etapas das atividades científicas, seja nos fatores, no produto ou na explanação de uma teoria física. Conforme cita Bassanezi (2002) em seu trabalho:

> Nas pesquisas científicas, a matemática passou a funcionar como agente unificador de um mundo racionalizado, sendo um instrumento indispensável para a formulação de teorias fenomenológicas fundamentais, devido, principalmente ao seu poder de síntese e de generalização. (...) as leis fundamentais da Física são formuladas matematicamente para proporcionarem uma primeira geração de modelos matemáticos que depois, são sujeitos a várias correções, algumas empíricas (BASSANEZI, 2002, p.19).

Esta estreita ligação entre a Física e a Matemática assume, então, papéis complementares passando está a ser um instrumento de conceituação dos conteúdos científicos, emprestando-lhes mais consistência, atuando mais do que um simples modelo. Diante desses argumentos e da importância da interdisciplinaridade entre Matemática e Física, mostrada por Bassanezi (2002, p. 33) ao afirmar que "A Física Teórica passou a construir, nos melhores centros de pesquisa, uma subárea ou disciplina da matemática aplicada (também denominada Física-Matemática)", é que se constata a importância da Matemática para o estudo da Física. Porém, uma melhor maneira de se explorar esta ferramenta é utilizando o recurso da Modelagem Matemática, que consiste no trabalho de tentar transformar fenômenos naturais em problemas matemáticos através da criação de modelos teóricos e resolvê-los.

Neste trabalho mostramos que para se explorar este recurso metodológico, Modelagem Matemática, é de fundamental importância que o professor além de possuir um bom domínio dos conceitos físicos do fenômeno em questão, tenha conhecimento sobre a “construção” e utilização de objetos-modelos, modelos teóricos, modelos matemáticos e linguagem simbólica com o auxílio de recursos que estão ao acesso dos estudantes e professores. Logo, como já é do conhecimento de todos que boa parte dos estudantes e professores utiliza os recursos computacionais no dia a dia, o que torna esta atividade uma ferramenta importante a ser explorada no processo da Modelagem Matemática.

Os recursos tecnológicos vêm se atualizando, modificando ações e comportamentos, fazendo cada vez mais parte do cotidiano de todos, na educação este processo não é diferente, já que estudantes e professores estão tendo mais contato com as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC’s) através de computadores e softwares. Porém, ao se fazer uso do computador ou de um software como o Máxima no processo de ensino e aprendizagem, é necessário considerar que essa mídia contribua para modificar e superar as dificuldades encontradas nas práticas do ensino tradicional em vigor.

Com isto, fica para os docentes a responsabilidade de saberem como utilizar estes recursos, seja como fonte de dados, seja para realizar experimentações, para resolver problemas em geral, e nosso caso, para auxiliar no desenvolvimento dos trabalhos de Modelagem Matemática no ensino de Física. Neste trabalho apresentamos a utilização de software Máxima como um ponto forte para promover a Modelagem Matemática como forma de superar as dificuldades encontradas no processo ensino-aprendizagem tradicional.

Dependendo de qual situação o software é aplicado, pode promover uma aprendizagem significativa, pois dá aos alunos uma oportunidade de visualizar, analisar, refletir e interagir com o conteúdo apresentado, através de gráficos, modelos matemáticos e outros recursos, facilitando a compreensão dos conceitos físicos.

## 1.1 A importância das TIC’s para o Ensino de Física

Com a evolução das tecnologias, principalmente, dos computadores e de seus softwares, vários segmentos da sociedade têm vivido constantemente impactos desses avanços tecnológicos, pois, com certeza, vivemos na Era da Informação. Logo, não podemos deixar o ensino em geral ficar fora dessa realidade e o professor tem um papel importante neste processo, que é de contribuir um cenário que favoreça a disseminação das TIC´s no contexto escolar.

Mas o que seria ***Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC's)***? Podemos conceituar como um conjunto de recursos tecnológicos da área da informação, que com o desenvolvimento e utilização de hardwares e softwares de forma integrada, garantam a operacionalização da comunicação e dos processos decorrentes em meios virtuais, com um objetivo comum em diversos setores da sociedade. Porém, foram os usuários da internet que potencializaram o uso das TIC's em diversos setores da sociedade.

Na indústria, as TIC's proporcionam uma forma de melhoraria dos produtos, além de diminuir os custos e o aumentar a produtividade; no comércio, dinamiza a forma de gerenciamento e as diversas formas de publicidade; no setor de investimentos, dinamiza o aumento da informação simultânea com uma comunicação imediata; na saúde, disponibilizam vários recursos para tratamentos, pesquisas, exames, entre outros; e na educação, potencializa o processo de ensino/aprendizagem através de vários fatores como a criação de ambientes que favoreçam a compreensão, fixação, desenvolvimento de conceitos e a criação de novos.

Pode-se observar que em qualquer das atividades apresentadas anteriormente, há uma potencialização na comunicação entre os membros e setores dos segmentos. Conclui-se então que, com a utilização das TIC's, haverá uma maior interação entre o professor, o aluno e o meio onde estão inseridos, propiciando um maior aproveitamento no processo ensino/aprendizagem. O aluno ao modular situações do seu cotidiano, através do uso de programas computacionais, poderá correlacioná-los aos conceitos vistos e estudados em sala de aula e aplicá-los com o uso de softwares, possibilitando assim encontrar significados matemáticos no seu dia a dia de forma a interferir e interagir com seu meio. Dentro deste contexto, tem este trabalho o objetivo de mostrar a importância da utilização dessas tecnologias (TIC's) no processo de ensino-aprendizagem de física, através da utilização do software educativo Máxima.

## 1.2 Objetivos gerais e específicos

Diante dessa breve introdução tomamos como *objetivo geral* deste trabalho, mostrar a importância do uso da Modelagem Matemática (realizado com o auxílio do software Máxima) como recursos educacionais (e como ferramenta auxiliar) no processo ensino-aprendizagem de Física, dado que, um dos grandes obstáculos encontrados pelos alunos consiste em compreender conteúdos cujas interpretações físicas estão fortemente vinculadas à linguagem matemática. Acreditamos que essa correlação entre física e matemática, quando promovida através de situações envolvendo a modelagem matemática, pode evitar que tais disciplinas sejam administradas nas escolas de forma fragmentada, propedêutica e distante da realidade dos alunos. Em específico pretende-se:

- ✓ Verificar e analisar o comportamento dos circuitos RC, RL, LC e RLC através das soluções matemáticas encontradas analiticamente e valendo-se das ferramentas disponíveis no software ‘Máxima’;
- ✓ Pontuar a importância da interdisciplinaridade entre a Matemática e a Física.

# 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A Física, como toda ciência natural, tenta buscar recursos para se aproximar da melhor forma os fenômenos estudados à realidade. Para tal, utiliza-se de conceitos importantíssimos tais como: objetos-modelos e modelos-teóricos (ou modelos matemáticos), pois eles desempenham papel imprescindível no estudo e na formação do conhecimento científico, conforme descreveremos a seguir.

## 2.1 Conceitos Físicos dos Elementos da Modelagem Matemática

### 2.1.1 Conceito de Objeto-Modelo e Modelo Teórico.

Os objetos-modelos, em geral, são representações de alguma coisa ou de um evento real ou não, criados a partir da necessidade de estudar e compreender algo. Segundo Bunge (1974) um objeto-modelo pode ser definido como:

> (...) uma representação de um objeto: ora perceptível, ora imperceptível, sempre esquemático e, ao menos em parte, convencional. O objeto representado pode ser uma coisa ou um fato. Neste último caso, teremos eventos-modelos. Por exemplo, o choque de um número **a** de automóveis tendo por resultado um número **b** de feridos, poderá ser representado pelo par ordenado **<a,b>**. (BUNGE,1974 p.22)

Bunge (1974, p. 32) ainda enfatiza que:

> Qualquer representação esquemática de um objeto pode ser denominada objeto-modelo. Se o objeto representado for concreto, então seu modelo é uma idealização dele. A representação pode ser pictórica, com é no caso de uma fórmula matemática. (...) A representação é sempre parcial e mais ou menos convencional. O objeto-modelo deixará escapar certos traços de seus referentes, tentará a incluir elementos imaginários, e há de recapturar apenas aproximadamente as relações entre os aspectos que ele incorpora.

Já para Bassanezi (2002, p.19-20) um objeto-modelo (ou modelo objeto) pode ser definido como:

> (...) a representação de um objeto ou fato concreto; suas características predominantes são a estabilidade das variáveis. Tal representação pode ser pictórica (um esquema compartimental, um mapa, etc.), conceitual (formula matemática), ou simbólica. A representação por estes modelos é sempre parcial deixando escapar variações individuais e pormenores do fenômeno ou do objeto modelado. Um

> modelo epidemiológico (sistema de equações diferenciais) que considera o grupo de infectados como sendo homogêneo, onde todos os seus elementos têm as mesmas propriedades é um exemplo de um modelo objeto; um desenho para representar o alvéolo usado pelas abelhas é também um modelo deste tipo.

Todavia, a criação de um objeto-modelo de nada vale se não inserirmos este último em uma teoria geral para se obter o que Bunge chama de modelo teórico. Mecânica estatística, mecânica clássica (Newtoniana), termodinâmica, mecânica quântica, dentre outras, são exemplos de teorias gerais. As teorias gerais, por si mesmas, são incomprováveis visto que, a priori, não se referem a nenhum fenômeno em particular. É o modelo teórico que será usado como uma explicação e, portanto, confrontado com a realidade. Bunge (1974, p. 16), por exemplo, afirma que:

> Não basta esquematizar um líquido como uma rede de moléculas ou um cérebro como uma rede de neurônios: é preciso descrever tudo isso em detalhe e de acordo com as leis gerais conhecidas. Em outros termos, é necessário construir uma teoria do objeto modelo – em suma, um modelo teórico.

A partir do momento em que criamos um objeto-modelo e o inserimos em uma teoria geral, passamos a ter uma teoria específica para descrever algum fenômeno em particular, ou seja, passamos a ter um modelo teórico do fenômeno. Grosso modo, um modelo teórico é construído a partir de uma constatação de padrões de tal forma que, a partir dessa percepção (destes padrões) ter-se-á uma base para as possíveis confrontações entre modelo e realidade além de possíveis previsões de futuros padrões. Segundo Bassanezi (2002, p.20):

> Um modelo teórico é aquele vinculado a uma teoria geral existente, será sempre construído em torno de um modelo objeto com um código de interpretação. Ele deve conter as mesmas características que o sistema real, isto é, deve representar as mesmas variáveis essenciais existentes no fenômeno e suas relações são obtidas através de hipóteses (abstratas) ou de experimentos (reais).

Quando um modelo teórico é expresso em linguagem matemática temos aí um modelo matemático que pode ser definido como um conjunto de equações ou estruturas matemáticas, formalizadas com o objetivo de representar algum fenômeno físico que se queira estudar. A utilização de um modelo depende tanto dos objetivos quanto dos recursos disponíveis por quem se propõe a construí-lo ou elaborá-lo. Desta forma, um modelo complexo pode ser motivo de orgulho para quem o construiu, mas nem sempre pode ser o mais adequado para quem vai utilizá-lo.

Às vezes, as necessidades imediatas são atendidas por um modelo menos complexo, parcial e simples que não possui todas as variáveis necessárias para descrever a dinâmica do fenômeno a ser estudado. Assim, o modelo matemático nada mais é do que uma representação de um problema em termos matemáticos. Tal representação estabelece relações entre as variáveis (usualmente as “mais relevantes”) que interferem no problema.

O modelo (teórico) matemático é importantíssimo no meio científico, pois é um instrumento que possibilita uma melhor visualização, concepção e representação de um fenômeno físico a ser estudado. Segundo Bunge (1974, p.12): “Toda teoria especificada é, na verdade, um modelo matemático de um pedaço da realidade”.

Mesmo que um modelo seja uma simplificação de um fenômeno do mundo real a ser estudado, as características essenciais deste fenômeno devem aparecer no modelo. Assim, a utilização da matemática na construção destes modelos é de grande importância, pois, de forma econômica (através de algumas expressões) e atendo-se apenas ao essencial tem grande capacidade de propiciar uma melhor compreensão, reflexão, discussão, análise e previsão de um fenômeno estudado. Segundo Bassanezi (2002, p.20):

> A importância do modelo matemático consiste em se ter uma linguagem concisa que expressa nossas ideias de maneira clara e sem ambiguidades, além de proporcionar um arsenal enorme de resultados que propiciam o uso de métodos computacionais para calcular suas soluções numéricas.

Mas como construir um modelo matemático? Dito de outra forma, como se dá esse processo de formulação de um modelo matemático? Esse processo é chamado de modelagem matemática e será descrito na próxima seção.

## 2.2 O que é Modelagem Matemática?

A Modelagem Matemática, como o nome já sugere, é a arte livre e espontânea criada pelo homem para suprir as necessidades de conhecer, compreender e estudar os fenômenos físicos que o cercam, pois tem como objetivo interferir ou não em seu processo de construção.

Segundo Bassanezi (2002, p.24) em seu trabalho “ensino-aprendizagem com modelagem matemática” o mesmo define modelagem matemática como:

> (...) um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de

> transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual.

Assim, vemos que a modelagem matemática consiste em trabalhar com o maior grau de aproximação possível da realidade para se atingir um melhor resultado. Logo, para Bassanezi (2002, p.24): “A modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele”.

Dentre as vantagens da modelagem matemática como ferramenta do processo ensino-aprendizagem podemos citar as seguintes:

- ✓ Motivar e estimular o interesse dos alunos pela Física;
- ✓ Desenvolvimento do aluno como cidadão crítico transformador do meio que vive;
- ✓ Compreender a importância do papel sociocultural da matemática no dia-a-dia;
- ✓ Desenvolver e estimular o raciocínio lógico e dedutivo em geral;
- ✓ Facilitar o processo ensino-aprendizagem, pois a matemática e a Física passam a ter uma maior significação, deixando de serem abstratas para tomar um sentido mais concreto e real.

Logo, por estas vantagens, argumenta-se que durante o processo da modelagem o aluno deixa de ser um expectador passivo e passa a participa ativamente processo, criando, refletindo e contextualizando situações que descreva o comportamento e a dinâmica do fenômeno físico estudado, atingindo a capacidade de prever possíveis resultados. Para Bassanezi (2002, p.31) “A modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender; enfim participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças”.

Em sala de aula o professor pode discutir com os alunos fenômenos do dia a dia, relacionando-os com tópicos de física estudados. A modelagem matemática tem o poder de representar fenômenos da realidade em modelos matemáticos desenvolvidos através da teoria física e da própria matemática, propiciando um ambiente favorável à reflexão e com isto a uma aprendizagem significativa. Como define Bassanezi (2002, p.16) a Modelagem

Matemática "arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real".

## 2.3 Metodologia

Conforme dito anteriormente, esse trabalho consiste em uma proposta de estudar algumas configurações de circuitos elétricos valendo-se do software Máxima. De forma sucinta, neste trabalho propomos a solução de alguns circuitos elétricos (contendo resistores, capacitores e indutores) valendo-se software Máxima por meio de duas etapas: construindo a equação diferencial (ou o sistema de equações diferenciais) com "papel e lápis" e, posteriormente, usando o software para se resolver a equação (ou o sistema).

Assim, na primeira etapa, as leis de Kirchhoff serão utilizadas para a "construção" das equações diferenciais ordinárias (EDO) (ou do sistema de equações) para quatro circuitos elétricos propostos. No segundo momento, de posse da equação diferencial (ou do sistema de equações diferenciais) de cada circuito, utilizaremos o software Máxima para encontrar a solução que descreve o comportamento da corrente no tempo com o objetivo de validar os modelos teóricos analisando, discutindo e tirando conclusões. Salientamos a necessidade de um terceiro momento envolvendo o confronto entre dados experimentais e o modelo matemático do referido circuito. Contudo, essa terceira etapa é deixada como perspectiva para trabalhos futuros.

Dito isso e dado que existe farta literatura, tanto para a teoria de circuitos quanto para a teoria de soluções de sistemas de equações diferenciais, apresentaremos de forma sucinta apenas as leis de Kirchhoff, mantendo o foco na utilização do software. Assim, a fim de "poupar" o tempo do leitor colocaremos as funções do software Máxima utilizadas neste trabalho na tabela 1:

**Tabela 1- Comandos básicos utilizados no software Maxima neste trabalho**

| Comando | O que ele faz? |
|---|---|
| 1- diff (x,t) | Representa o termo (dx/dt) na equaç |
| Ex: $eq1: diff(q(t),t,1) + A*q(t) = U;$ $\leftrightarrow$ $dq(t)/dt + q(t)A = U$ | |
| 2- atvalue | Função que atribuir valores do PVI. |
| Ex: $atvalue(q(t), t = 0{,}0);$ $\leftrightarrow$ 0 | |
| 3- desolve | Função responsável em calcular o sistema de equações. |

| | |
|---|---|
| Ex: $desolve(eq1, q(t));$ $\leftrightarrow$ $q(t) = \frac{U}{A} - \frac{\%e^{-tA}U}{A}$ | |
| 4- % | *Não é um comando, mas substitui a EDO na função, pois se refere ao último resultado calculado. |
| Ex: $q(t) = Qcos(tW)$ $\leftrightarrow$ $diff(\%, t, 1);$ $\leftrightarrow dq(t)/dt = -QWsin(tW)$ | |
| 5- Ratsimp | Simplifica a expressão dada e toda suas subexpressões. |
| Ex: Este comando encontra-se na figura 8a. | |

**2.4 Breve resumo sobre as Leis de Kirchhoff.**

As equações que representam a dinâmica do circuito elétrico quanto a corrente e a tensão obedecem às leis de Kirchhoff, a saber:

*1º Lei de Kirchhoff* (ou Lei dos Nós): *A soma algébrica das correntes em uma junção ou nó é igual a zero.*

*2º Lei de Kirchhoff* (ou Lei das Malhas): *A soma algébrica das diferenças de potencial ao logo de um circuito fechado ou de uma malha é igual a zero.*

Nas leis acima, um *nó* e uma *malha* são definidos como:

- *Nó*: como o nome já sugere, é a junção de três ou mais componentes elétricos em um ponto do circuito.
- *Malha*: é um caminho fechado do circuito onde a soma algébrica das quedas de tensão nos componentes é zero.

Os circuitos elétricos com os quais trabalharemos são circuitos “clássicos” no sentido de que são compostos apenas pelos seguintes componentes elétricos: resistores (*R*), capacitores (*C*) e indutores (*L*). As relações tensão-corrente, corrente-tensão e tensão-carga com estes componentes elétricos são dadas através da lei de Ohm que, para o caso de um resistor, diz que a diferença de potencial ($V_R$) nos terminais desse resistor (de resistência constante *R*) atravessado por uma corrente elétrica (*i*) é definida por:

$$V_R(t) = R\,i(t) = R\frac{dq(t)}{dt} \qquad (1)$$

Para um capacitor, a diferença de potencial é inversamente proporcional à Capacitância (*C*) sendo esta uma característica do capacitor que, submetido a uma diferença de potencial ($V_C$) entre suas placas acumula entre elas uma carga elétrica ($q$) de modo que a diferença de potencial é dada por:

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} \qquad (2)$$

Por fim, para um indutor, a diferença de potencial entre os terminais deste componente ($V_L$) é proporcional à indutância ($L$) e à taxa de variação temporal da corrente elétrica conforme a relação abaixo:

$$V_L(t) = L\frac{d\,i(t)}{dt} = L\frac{d^2q(t)}{dt^2} \qquad (3)$$

O que segue após essa breve digressão, é a solução usando o software Máxima de circuitos ‘clássicos’, ou seja, circuitos cujas soluções são facilmente encontradas na literatura e, por tal motivo, focaremos na solução através do software.

# 3 SOFTWARE MAXIMA

Os softwares são construídos para executarem determinadas tarefas em diferentes âmbitos, como por exemplo, podem ser direcionados a uma concepção acadêmica, constituindo assim, uma importante ferramenta na área das pesquisas para potencializar o processo nas áreas científicas. A aplicação destes recursos evidencia uma forma de modernização, dinamização e motivação no processo ensino-aprendizagem das ciências, em especial, a física, já que os conceitos são construídos a dispor da informática que geralmente está presente na realidade social de cada indivíduo.

Os softwares matemáticos são exemplos de software que surgiram como nova possibilidade de amplia, desenvolver e fixar conceitos teóricos, além de um poderoso recurso dinâmico que pode atrair o interesse, a concepção e intuição dos alunos através da contextualização de modelos matemáticos, propiciando e construindo um conhecimento de forma significativa. Neste trabalho foi utilizado o software matemático Maxima como forma de encontrar e analisar os modelos teóricos e gráficos para cada circuito.

O Máxima é um software matemático livre de fácil instalação, originário do sistema Macsyma (projeto MAC's SYmbolic MAnipulator) que foi desenvolvido entre os anos de 1968 a 1982 pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT) como parte do Projeto MAC para serem utilizados inicialmente em computadores de grande escala DEC-PDP-10 em instituições acadêmicas. Produz resultados precisos, pois utiliza o sistema especial "floating" e opera com funções e dados em duas e três dimensões. O sistema utilizado pelo Maxima é o Sistema de Computação Algébrica, CAS (Computer Algebra System).

Os Sistemas de computação algébrica (CAS), podem conduzir a novas maneiras de lidar com problemas, permitindo o desenvolvimento de dezenas de experiências matemáticas que ajudam os alunos a visualizar, experimentar, fazer conjecturas razoáveis, idealizar como provar estas conjecturas, obter novas provas, perceber conexões entre conceitos e teorias e até mesmo, chegar à novas definições, além de possibilitar a resolução de problemas literais, ou seja, trabalhando com letras em invés de números. Pois o Maxima é um software que tem a capacidade de realizar cálculos e trabalhar utilizando em forma simbólica expressões matemáticas. Este sistema de computação algébrica dá ao usuário várias vantagens como a flexibilidade de conduzir a novas maneiras de trabalhar com problemas, permitindo aos alunos desenvolver experiências matemáticas, contextualizar os resultados encontrados, visualizando e idealizando possíveis novos resultados, além de seu código fonte pode ser compilado em vários sistemas operacionais como Window, Linux, e Mac OS X. O Departamento de Energia recebeu do MIT em 1982 uma cópia do código fonte que passou a ser chamado de Macsyma DOE. O Professor William F. Schelter da Universidade do Texas manteve a guarda desta cópia de 1982 a 2001, ano de sua morte. Porém, em 1998 o Departamento de Energia permitiu que o professor Schelter disponibilizasse este código fonte sob a Licença Pública GNU que deu início ao projeto Maxima em 2000 no SourceForge para manter e desenvolver o Macsyma DOE, que passou a ser chamado *Maxima*.

# 4 CIRCUITOS PROPOSTOS

## 4.1 Modelagem Matemática nos Circuitos em Série RC, RL, LC, RLC com fonte, e RLC com duas malhas internas.

A seguir, seguem alguns circuitos utilizados como aplicações do software. Salientamos que os parâmetros utilizados para a construção dos gráficos estão especificados (em unidades arbitrárias) nas legendas das figuras.

4.1.1 Circuito de Carga e Descarga do Capacitor (RC).

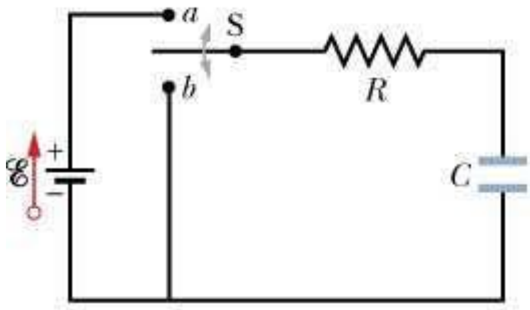


**Figura 1 Processo de carga e descarga de um capacitor em um Circuito RC**

O circuito de carga do capacitor consiste de uma associação em série de um resistor, um capacitor e uma fonte de tensão contínua. No início o capacitor está descarregado, e no instante *t = 0* a chave ***S*** do circuito acima é posta na posição ***'a'***. A carga e a tensão no capacitor não se estabelecem de maneira instantânea, mas a corrente atinge o máximo imediatamente.

Analisando o circuito acima e aplicando a segunda lei de Kirchhoff, lei das malhas, ao circuito, teremos a seguinte equação: $V_R(t) + V_C(t) = U$, com $V_R$ e $V_C$ dados pelas equações (1) e (2). A equação diferencial do sistema é dada por:

$$\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{RC} = \frac{\varepsilon(t)}{R} \quad , \qquad (4)$$

que nada mais é do que uma equação diferencial de 1ª ordem. A figura 2a, mostra como a Eq. (4) pode ser resolvida através do Maxima utilizando a seguinte condição inicial: $q_{(t\,=\,0)} = 0$, ou seja, com capacitor descarregado em $t = 0$. Note ainda que utilizamos $A=1/RC$ e $U_{(t)} = \varepsilon_{(t)}/R$. A figura 2c mostra que a há uma saturação quanto $t \to \infty$. Já na figura 2b, retiramos a fonte (U = 0), mas consideramos o capacitor inicialmente carregado com carga Q = U/A.

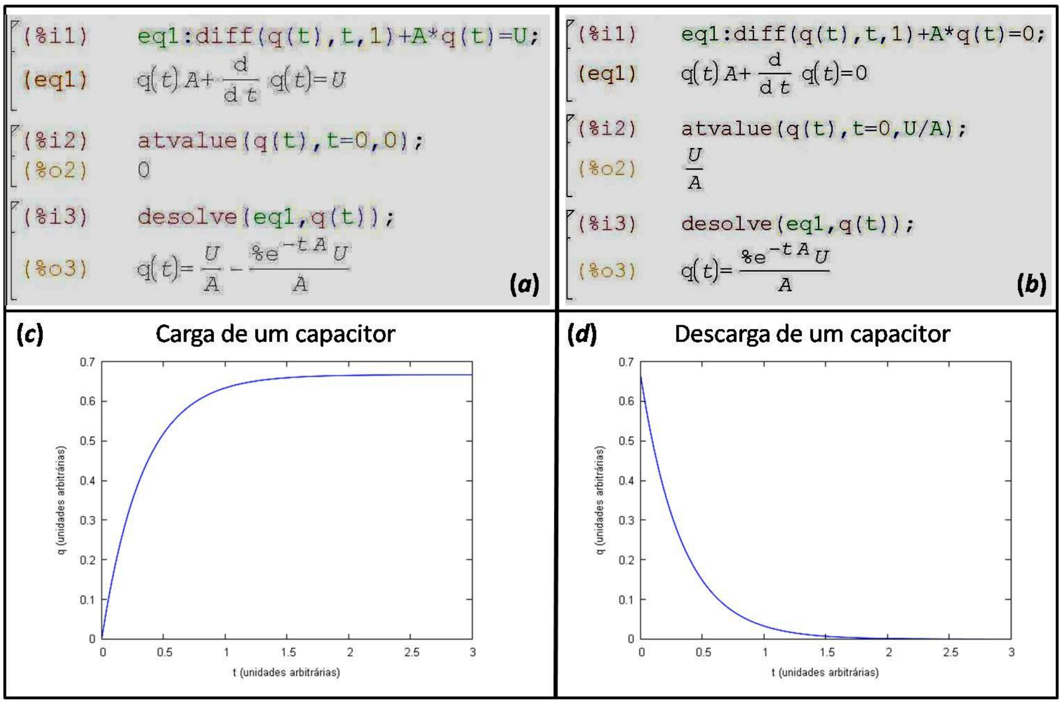


**Figura 2 Em (a) temos o procedimento do Máxima para "carregar o capacitor" com os parâmetros U = 2 e A = 3. Em (b) o procedimento para "descarregar o capacitor". Em (c) e (d) as curvas de carga e descarga do capacitor.**

O fator *RC* encontrado na equação (4) é definido como a *constante de tempo* representado pela letra grega $\tau$ (tau) sendo usualmente dado em segundos (s). Ele representa o tempo necessário para que a carga (ou a tensão) atinja um valor igual a 63% do seu valor máximo. Note que o valor máximo é "atingido" apenas no limite $t \to \infty$.

O circuito de descarga do capacitor se origina da desconexão súbita da fonte de tensão contínua que alimentava o circuito RC quando a chave ***'S1'*** é colocada na posição 'b'. Após a retirada desta fonte, o capacitor que tem a propriedade de armazenar energia na forma de campo elétrico, passa a descarregar esta energia através do resistor. Uma corrente de descarga do capacitor começa a percorre o circuito através do resistor. Porém, a tensão e a carga no capacitor ainda é $V_0=\boldsymbol{\varepsilon}$ e $q_0$, respectivamente, já que não há um decaimento imediato.

Analisando o circuito da figura 1 e aplicando a segunda lei de Kirchhoff, lei das malhas, terá a seguinte equação:

$$\frac{d\,q_{(t)}}{dt} + \frac{q_{(t)}}{RC} = 0 \qquad (5)$$

A solução desta EDO utilizando o Máxima é mostrada nas figuras 2*b* e sua respectiva curva na figura *2d*. Note que o sinal negativo na equação acima mostra o sentido contrário da corrente no circuito. Além disso, para um tempo 't' suficientemente grande, a corrente elétrica no circuito tende a zero e o capacitor estará totalmente descarregado (ver Fig. *2d*).

4.1.2 Circuito de Carga e Descarga do indutor (RL)

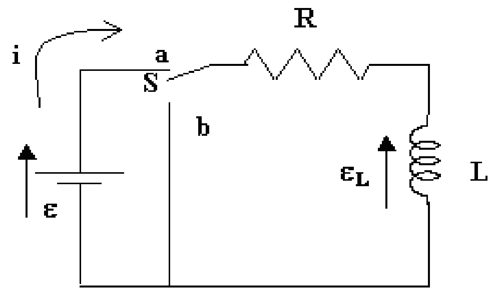


**Figura 3: Circuito em série RL**

Circuito de carga do Indutor é um circuito simples que consiste de uma associação em série de um resistor, um indutor e uma fonte **'*ε*'**. A chave **'S'** do circuito da figura acima está na posição **'a'** em um tempo t = 0. A lei das tensões nas malhas de Kirchhoff aplicada ao circuito acima nos dá:

$$\frac{d\,i_{(t)}}{dt} + \frac{R\,i_{(t)}}{L} = \frac{\varepsilon_{(t)}}{L}\ . \qquad (6)$$

No circuito RL, a constante de tempo, tau $(\tau)$, é definida pela relação $(L/R)$. Uma vez obtido a equação diferencial do sistema, a solução no Maxima é similar ao do circuito RC, bastando trocar $\boldsymbol{q_{(t)}}$ por $\boldsymbol{i_{(t)}}$ , conforme mostra a figura 4.

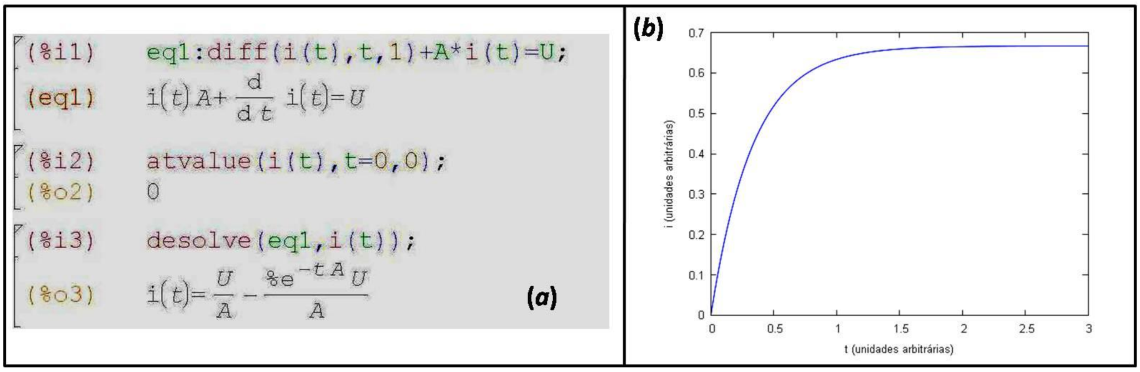


**Figura 4: Carga no circuito RL. Note que *A* = *R/L* e *U* = ε/L. No gráfico, os parâmetros *A* e *U* valem, 3 e 2, respectivamente.**

O circuito de descarga do indutor é um circuito simples que consiste de uma associação em série de um resistor e um indutor, e que se origina da desconexão súbita da fonte de tensão contínua que alimentava o circuito RL. Após a retirada desta fonte, posicionado a chave ‘S’ do circuito acima para a posição ‘b’, o indutor que tem a propriedade de armazenar energia na forma de campo magnético, passa a descarregá-la através do resistor. A lei das tensões nas malhas de Kirchhoff aplicada ao circuito acima nos dá:

$$\frac{d i_{(t)}}{dt} + \frac{R i_{(t)}}{L} = 0 \quad . \tag{7}$$

Como a solução no Máxima é análoga à do circuito RC (bastando trocar $\boldsymbol{q_{(t)}}$ por $\boldsymbol{i_{(t)}}$), não a faremos neste trabalho.

### 4.1.3 Circuito LC e oscilações livres

O circuito LC é um circuito simples que consiste de uma associação em série de um capacitor (carregado) e um indutor como mostrado no circuito ‘b’ da figura abaixo. Como o capacitor é carregado pela bateria com a chave na posição ‘A’, como representado na figura circuito ‘a’, logo a fonte inicial do circuito LC é o capacitor no circuito ‘b’. O capacitor e o indutor têm a propriedade de armazenar energia em forma de campo elétrica e campo magnético respectivamente. As condições iniciais do circuito para $t = 0$ são: $V_c = \mathcal{E}_0, i(0) = 0 \; e \; i'(0) = -\frac{E}{L}$.

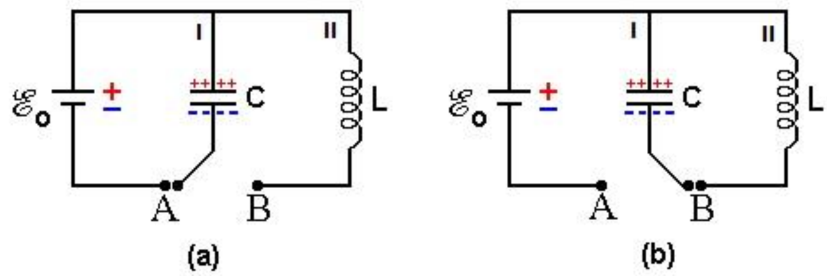


**Figura 5 (a) Capacitor sendo carregado pela fonte. (b) Com o capacitor carregado, fecha-se a fonte mudando a chave de A para B, ficando com um circuito LC (sem fonte).**

Para construir a equação que mostre a dinâmica do circuito LC, utilizaremos as relações tensão-corrente no capacitor, $V_C(t) = \frac{1}{c}\int_0^t i(t)dt$, no indutor, $V_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$, e as leis de Kirchhoff para tensão na malha II do circuito 'b', logo:

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{LC} = \frac{\varepsilon(t)}{L} \quad . \tag{8}$$

A solução no software Maxima pode ser obtida por dois métodos diferentes: resolvendo diretamente a equação (8) (método 1) ou transformando-a em um sistema de equações diferenciais (método 2). As figuras *5a* e *5b* mostram como proceder em cada método.

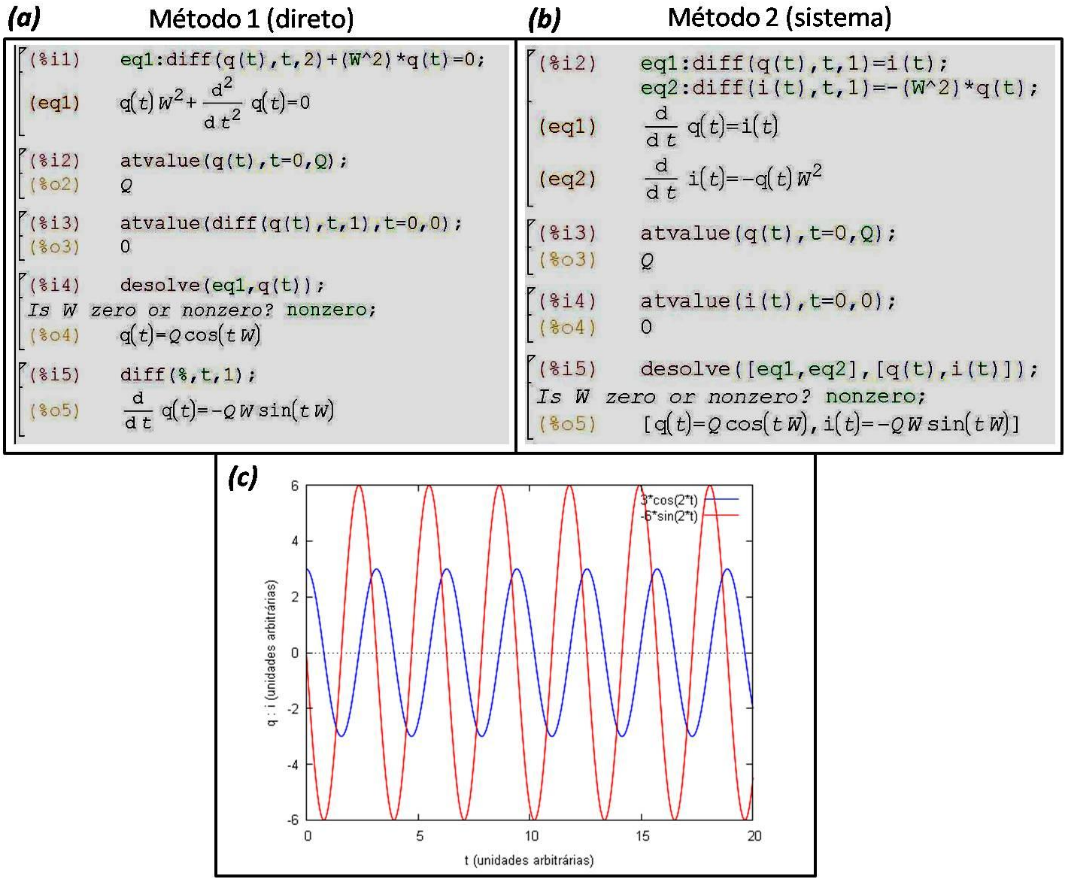


**Figura 6 (a) Solução via método direto, ou seja, resolvendo a equação 8. (b) Solução que transforma a equação 8 em um sistema. (c) Gráficos das funções q(t) (azul) e i(t) (vermelho) obtidos com o software usando os valores Q = 3 e W = 2.**

Note que, conforme o esperado tem-se oscilações livres tanto para a corrente quanto para a carga no capacitor conforme mostra a figura 6c. Os dois métodos resultam na mesma solução, como era de se esperar. Contudo achamos necessário explicitá-los visto que adiante, o método 2 será necessário quando na presença de circuitos contendo mais de uma malha.

### 4.1.4 Circuito em série RLC

Este circuito RLC é um circuito simples que consiste de uma associação em série de um resistor (R), um indutor(L), um capacitor(C) e uma fonte de tensão. Neste trabalho utilizaremos uma fonte de tensão constante U(t)=U. Este circuito é chamado de circuito de *segunda ordem, pois* qualquer que seja a tensão ou a corrente no circuito, nele pode ser descrita por uma equação diferencial ordinária (EDO) de segunda ordem.

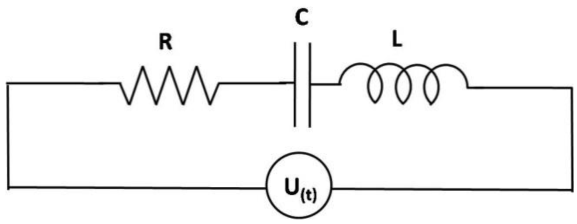


**Figura 7 Circuito RLC com o capacitor inicialmente descarregado e com uma fonte constante U(t) = U.**

Considerando o circuito em série RLC acima, aplicando a lei de Kirchhoff das tensões à malha teremos a equação diferencial abaixo:

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{d\,q(t)}{dt} + \frac{q(t)}{LC} = \frac{U(t)}{L}, \qquad (9a)$$

que pode ser colocada na forma de um sistema de equações de primeira ordem, ou seja:

$$\begin{cases} \dfrac{dq(t)}{dt} = i(t) \\ \dfrac{di(t)}{dt} = -\dfrac{R}{L}i(t) - \dfrac{1}{LC}q(t) + \dfrac{U(t)}{L} \end{cases} \qquad (9b)$$

A equação diferencial acima pode ser resolvida (diretamente) de forma analítica (ver Eq. 9a) ou ainda através de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem (ver Eq. 9b), sendo tais soluções facilmente encontradas na literatura. Note que a depender dos valores de *B =R/L* e *A=1/LC* pode-se chegar a três soluções distintas. Tais soluções surgem de forma natural no Máxima conforme mostram as figuras *8a* e *8c* após os inputs %*i4* e %*i5*, respectivamente sob a forma de pergunta: *Is $B^2$ - 4A, positive, negative or zero?* Para cada resposta teremos uma possível solução (no nosso caso escolhemos *negative*).

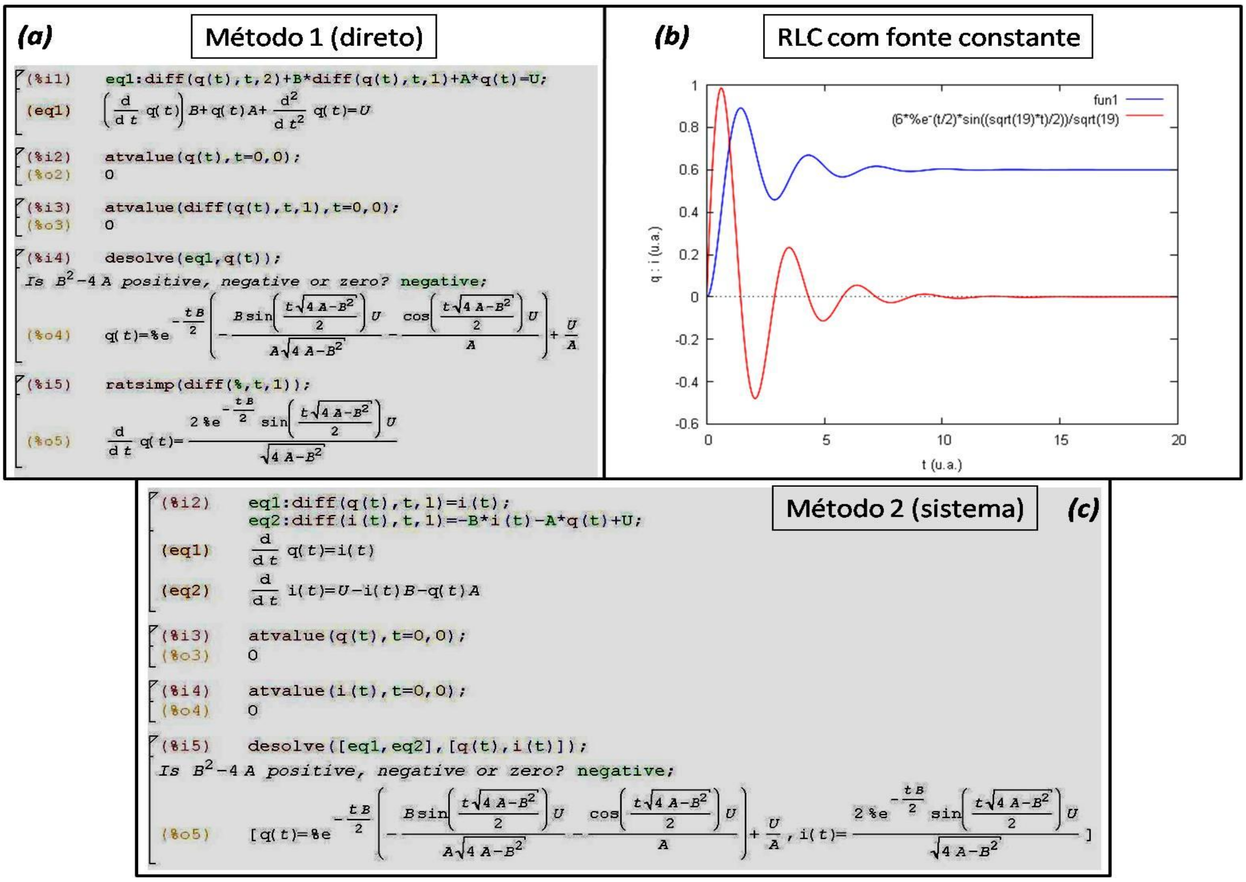


**Figura 8 (a) Solução via método direto, ou seja, resolvendo a equação 9. (b) Gráficos das funções q(t) (azul) e i(t) (vermelho) obtidos com o software, usando os valores A = 5, B = 1 e U = 3. (c) Solução que transforma a equação 9 em um sistema.**

As condições iniciais deste circuito para t=0 são: $V_C = V_0 = E$ (tensão no capacitor carregado), $i(0) = 0$ e $i'(0) = -\frac{E}{L}$.

### 4.1.5 Um Circuito RLC com duas malhas em paralelo.

Por fim, como mais um exemplo, considere a figura 9. Nele temos um circuito RLC contendo dois resistores (R1 e R2), um capacitor e um indutor formando duas malhas internas, sendo uma contendo $V_{(t)}$, R1 e C e a outra contendo C, R2 e L, conforme mostra a figura 9. Repare que, a rigor, neste caso temos 3 malhas: 2 internas e 1 externa.

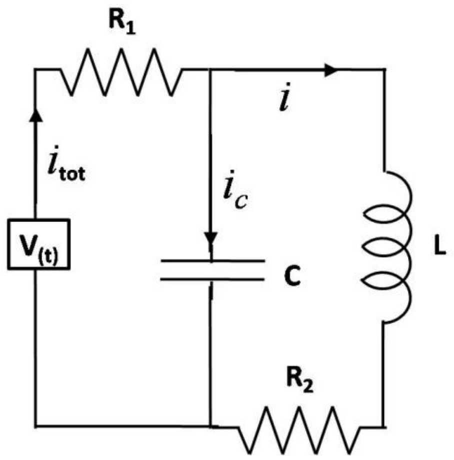


**Figura 9 Circuito RLC com duas malhas internas.**

Nos circuitos anteriores, foi utilizada a lei das malhas, pois como até agora, todos são circuitos possuíam componentes em série, a função a ser obtida ou era a corrente $i_{(t)}$ que passava pelo circuito ou a carga $q_{(t)}$, acumulada em algum ponto do circuito - geralmente no capacitor. Porém, agora quando aplicamos as leis de Kirchhoff no circuito acima, ficamos com seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} R_1 \dfrac{dq_{(t)}}{dt} + \dfrac{1}{C} q_{(t)} + R_1\, i_{(t)} = U\, e^{-t} \sin(5t) \\ L \dfrac{di_{(t)}}{dt} + R_2\, i_{(t)} - \dfrac{1}{C} q_{(t)} = 0 \end{cases} . \qquad (10)$$

No sistema acima $\boldsymbol{i}_{(t)}$ é a corrente que passa pela malha que contém o indutor e a resistência R2, conforme mostra a figura 9. A função $q_{(t)}$ descreve a carga em função do tempo acumulada no capacitor. Note que $i_c(t) = \dfrac{dq_{(t)}}{dt}$ não é a corrente total, mas a corrente que passa pela malha que contém o capacitor a resistência R1 e a fonte $V_{(t)}$ que foi definida como: $V_{(t)} = U\, e^{-t} \sin(5t)$. As condições iniciais do circuito são: em $t = 0, q(0) = 0$ $e$ $i(0) = 0$. A figura 10ª mostra como proceder para obter a solução do sistema da Eq. 10, usando o Maxima.

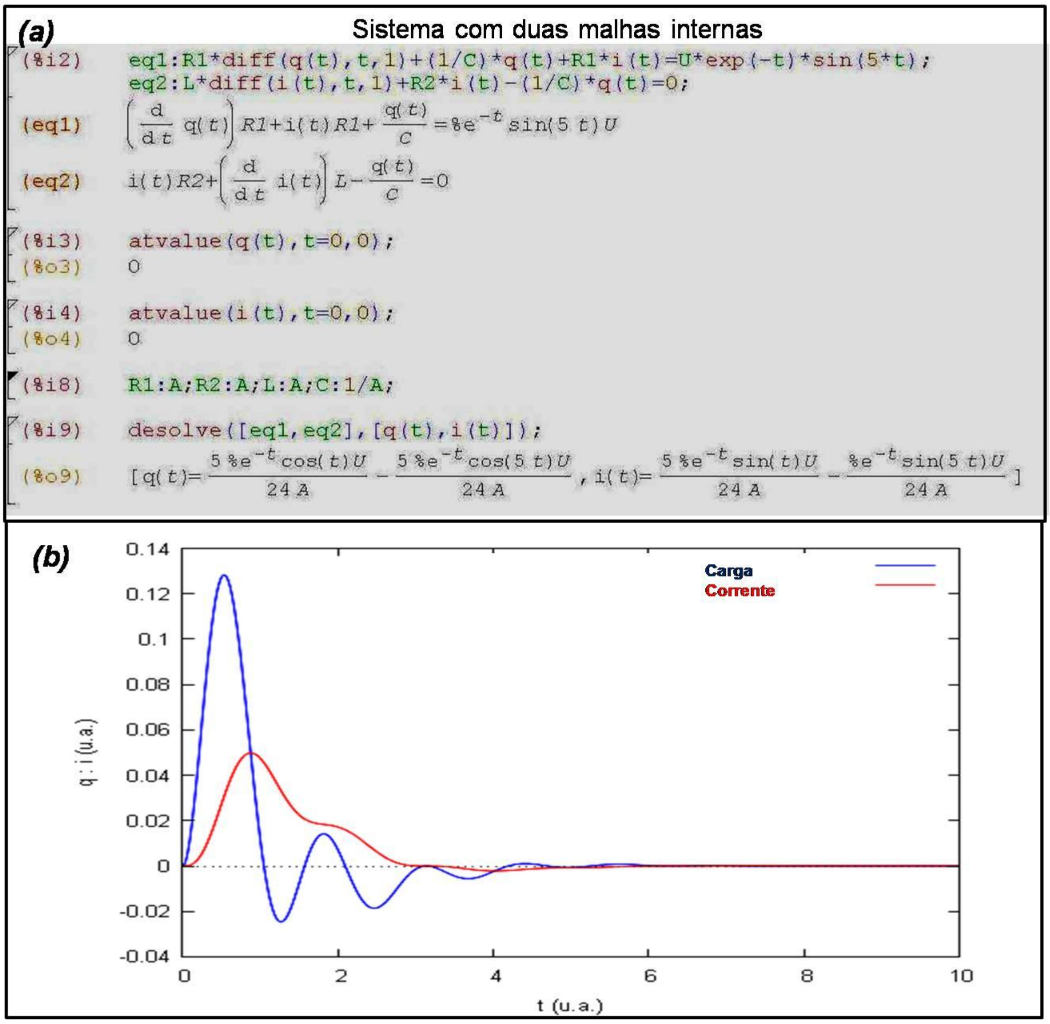


**Figura 10 (a) solução usando o Máxima para o circuito RLC com duas malhas internas. (b) Gráfico da carga e da corrente usando os valores *U = 1* e *A = 1*.**

Note que, conforme esperado, tanto a carga no capacitor quanto a corrente que passa pelo indutor, apresentam inicialmente comportamentos oscilatórios transitórios, mas com um decaimento exponencial que levam ambos a zero, conforme mostra a figura 10b. Tal fato é reflexo da função $V_{(t)} = U\,e^{-t}\sin(5t)$ com o decaimento exponencial surgindo também nas funções $q_{(t)}$ e $i_{(t)}$. Outras situações tais como diferentes formas para $V_{(t)}$ podem ser propostas e ilustradas quase que instantaneamente com o auxílio do Maxima. Acreditamos que tal fato permite que os estudantes possam analisar, num curto espaço de tempo, vários comportamentos distintos, algo impensável sem a ajuda do software. Contudo, salientamos que o software não "monta" a equação diferencial (ou o sistema de equações) sendo esta tarefa, papel do estudante. Assim, ele não substitui os livros didáticos, mas pode, na dose certa, complementá-los.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Física é uma ciência dinâmica que permite formular modelos matemáticos para representar fenômenos físicos, investigar os mistérios do mundo das partículas que compõem a matéria, ao mesmo tempo em que permite desenvolver novas fontes de energia e criar materiais, produtos e tecnologias. Portanto, não se deve aceitar a forma como está sendo administrada em grande parte das escolas no Ensino Médio em que se utiliza apenas da aplicação de fórmulas matemáticas para resolução de problemas de Física sem nenhuma relação com o fenômeno descrito.

A Física deve ser contextualizada para que se possa alcançar uma aprendizagem significativa, incentivando os jovens a se tornarem cidadãos críticos e conscientes em relação a importância da Física para a sociedade em que vivem, orientando-os para a identificação do conceito que está sendo estudado e promovendo meios para a interpretação de seus significados.

Por este motivo, este trabalho propôs uma metodologia mais dinâmica, onde os alunos são desafiados a interagir com o seu meio, fazendo uma conexão entre o ensino de Física e os acontecimentos do seu dia a dia, participando mais ativamente na construção do conhecimento através das experiências cotidianas. Logo a utilização da Modelagem Matemática como estratégia para se alcançar um maior dinamismo no processo ensino-aprendizagem, além da utilização de computadores e software, que são ferramentas tanto do alcance e conhecimento dos professores quanto dos alunos, são recursos que devem ser aproveitados como ferramentas auxiliares.

Os motivos para a utilização do software Máxima neste trabalho foi, entre eles: a questão financeira, pois ele é um software livre, já que temos o interesse de utilizar este trabalho como orientação para a rede pública de ensino; o outro, é que possui bastantes recursos, tendo como função principal o cálculo das diversas operações matemáticas, dentre elas, a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias, além da produção de gráficos, assim, supriu as necessidades deste trabalho completamente, além de ser um software de fácil manuseio e autoexplicativo. Porém, o trabalho inicia-se com conceitos de elementos da Modelagem Matemática como objetos modelos, modelos teóricos e modelos matemáticos.

Logo em seguida, as duas Leis de Kirchhoff foram utilizadas com o auxílio das Equações Diferencias Ordinárias (EDO) na construção dos modelos matemáticos que definem a dinâmica da corrente e da carga nos circuitos elétricos RC, RL, LC, RCL em série e RLC com duas malhas, o que demonstra a interdisciplinaridade entre a Física e a Matemática. No segundo momento, de posse dos modelos matemáticos de cada circuito, foram gerados gráficos que demonstraram o comportamento dos entes físicos (correntes e cargas) no tempo, proporcionando aos alunos um conhecimento significativo através da contextualização, reflexão e interferência nos fenômenos estudados. Logo, com tudo isto que foi exposto, conclui-se que os objetivos propostos no início do trabalho foram alcançados.

Porém, todo trabalho acadêmico na área ensino-aprendizagem deve ter uma utilização na prática, pois só assim teremos a certeza de sua eficácia. Para isto, o professor deve ter o domínio do conteúdo a ser estudado e de todo o processo da modelagem. Mas o professor é só um intermediador e orientador no processo, só podendo intervi para sugerir, orientar e tirar dúvidas quando solicitado pelos alunos.

O professor ao utilizar esta metodologia terá que fazer alguns ajustes nos conteúdos utilizados na Modelagem, de acordo com os seus alunos, as suas necessidades e objetivos, pois acredito que alguns tópicos não sejam do conhecimento dos alunos como derivadas e a resoluções de Equações Diferenciais Ordinárias. Logo, se faz necessário que o professor separe um bom tempo para trabalhar estes tópicos em sala de aulas de uma maneira bem simples e direta, utilizando analogias do dia a dia dos alunos, como por exemplo, mostrando que ‘derivada’, nada mais é do que a ‘variação de algo em relação ao tempo’.

Tendo em vista as dificuldades que os alunos têm com a disciplina de Física, aconselho aos professores quando for iniciar os trabalhos com esta metodologia, comece por tópicos mais fácies de serem contextualizados e que contenham uma matemática mais simples como a cinemática, já que a Modelagem Matemática pode ser trabalhada em vários temas.

# REFERÊNCIAS

[1] BASSANEZI, R. C.. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

[2] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006.

[3] BUNGE, Mario. **Teoria da Realidade**, São Paulo: editora Perspectiva, 1974.

[4] CARVALHO, Dr. João Cláudio Nunes. MODELAGEM COMPUTACIONAL NO ENSINO DE FÍSICA. Fortaleza-CE – maio 2013. Disponível em: <http://www.abed.org.br/congresso2013/cd/311.pdf>. Acesso em: 25 de janeiro de 2018.

[5] Soares, Camila. Dedução das equações de carga e descarga dos capacitores utilizando equações diferenciais de primeira ordem. 2009. Disponível em: <https://camilasoares.wordpress.com/2009/04/07/deducao-das-equacoes-de-carga-e-descarga-dos-capacitores-utilizando-equacoes-diferenciais-de-primeira-ordem/>. Acesso em: 10 de novembro de 2016.

[6] HALLIDAY, D. e RESNICK, R. – **Fundamentos da Física** – Volume 3 – 4ª Edição; Capítulo 29 (Circuito); Livros Técnicos e Científicos Editora S.A – 1998.

[7] SAMPAIO, J. L. e CALÇADA C. S. – **Universo da Física** – Volume 3 – 2ª Edição; Ondulatória, Eletromagnetismo e Física Moderna - São Paulo, SP. Atual Editora. 2005.

[8] SOUZA, Ednilson Sergio Ramalho de. A modelagem matemática como metodologia para o ensino- aprendizagem de física. VI ENCONTRO PARAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 09, 2008, Belém-Pará. Disponível em:< http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/fisica/artigos/ednilson.pdf>. Acesso em 07 de janeiro de 2017.

[9] KÍTOR, Glauber Luciano. Circuito RC. Disponível em <https://www.infoescola.com/eletronica/circuito-rc/>. Acesso em 10 de novembro de 2016.

[10] Imagens de circuito LC. Disponível em<https://www.google.com.br/search?q=imagens+de+CIRCUITO+LC&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=2ahUKEwjq1I6bjvPcAhWDgJAKHe6sDZIQsAR6BAgFEAE&biw=1517&bih=681#imgrc=F1HGz6lKfG8FuM: