



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÍRIO MENEZES RODRIGUES COUTINHO ABREU

Instabilidades Hidrodinâmicas em Células de Hele-Shaw: Análise Fracamente Não
Linear de Terceira Ordem

Recife

2022

ÍRIO MENEZES RODRIGUES COUTINHO ABREU

Instabilidades Hidrodinâmicas em Células de Hele-Shaw: Análise Fracamente Não
Linear de Terceira Ordem

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física Teórica e Computacional

Orientador: Prof. Dr. José Américo de Miranda Neto

Recife

2022

Catalogação na fonte
Bibliotecária Nataly Soares Leite Moro, CRB4-1722

A162i Abreu, Írio Menezes Rodrigues Coutinho
 Instabilidades hidrodinâmicas em células de Hele-Shaw: análise fracamente
 não linear de terceira ordem / Írio Menezes Rodrigues Coutinho Abreu. – 2022.
 110 f.: il., fig.

 Orientador: José Américo de Miranda Neto.
 Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
 Física, Recife, 2022.
 Inclui referências e apêndice.

 1. Física teórica e computacional. 2. Instabilidades hidrodinâmicas. 3.
 Células de Hele-Shaw. 4. Controle em dinâmica de fluidos. I. Miranda Neto, José
 Américo de (orientador). II. Título.

 530.1 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2022 - 13

ÍRIO MENEZES RODRIGUES COUTINHO ABREU

**INSTABILIDADES HIDRODINÂMICAS EM CÉLULAS DE HELE-SHAW:
ANÁLISE FRACAMENTE NÃO LINEAR DE TERCEIRA ORDEM**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 27/01/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. José Américo de Miranda Neto
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Antônio Murilo Santos Macêdo
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Paulo Roberto de Souza Mendes
Examinador Externo
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

AGRADECIMENTOS

Ao meu filho, por todo o amor.

À minha mãe, por toda ajuda nesses tempos difíceis, apoio e pela leitura crítica deste trabalho.

Ao meu pai, por todos os conselhos, ensinamentos e força.

À Maria, que cuidou de mim e minha família de tantas formas, cuja ajuda foi **essencial** para composição deste trabalho.

A todos meus familiares, em especial a Glauber, pelo apoio durante toda minha vida.

À José Américo, meu orientador, por todos os ensinamentos e por ter aceitado me acompanhar.

Aos membros da banca, Antônio Murilo e Paulo R. De Souza Mendes, por terem aceitado ler e avaliar este trabalho.

Aos professores e funcionários do departamento, em especial à Sergio Coutinho, Carlos Batista, Nadja Kolb, Marcio Miranda e Alyson José (técnico).

Àqueles que colaboraram comigo durante a pesquisa, em especial a Pedro Anjos, que muito me ajudou, e a Pedro Oscar, que me apresentou à esta bela área.

Aos meus colegas físicos, que não irei citar por nomes pois esquecerei de alguém, cuja ajuda foi essencial em toda esta jornada.

Aos meus colegas fora da física, que tanto me distraíram em momentos de descanso.

*Like a blind man in a maze
Who somehow finds an open door
The beauty and the danger
And the yearning to explore
Always keeps me coming back for more
(DREAM THEATER, 2021)*

RESUMO

A instabilidade de Saffman-Taylor ocorre na geometria efetivamente bidimensional de uma célula de Hele-Shaw, constituída de duas placas paralelas de vidro, apresentando um pequeno espaçamento entre elas. Nesta célula, quando um fluido menos viscoso é injetado em um mais viscoso, formam-se saliências em forma de "dedos" na interface que os separa. Nesta dissertação, estudamos diversos sistemas relacionados ao clássico problema de Saffman-Taylor. No primeiro deles, usamos a análise de estabilidade linear e o cálculo variacional para determinar duas taxas de injeção dependentes do tempo: uma para controlar as instabilidades na interface e outra que predetermina o número de dedos emergentes. Ambas situações consideram um fluido não newtoniano cuja viscosidade aumenta com o tempo, contribuindo para uma maior estabilização da interface, acrescentando tal complexidade à estudos recentes, que consideraram apenas fluidos newtonianos. Validamos a eficácia destas taxas de injeção através de um esquema perturbativo de modos acoplados em terceira ordem. Em seguida, estudamos a ocorrência de trifurcações de um dedo viscoso, na qual uma saliência se divide em três, que é um fato observado em experimentos e ainda não estudado teoricamente. Para realizar tal estudo, consideramos a presença de estresses viscosos normais e analisamos o sistema teoricamente por um esquema perturbativo, detectando trifurcações em estágios fracamente não lineares. Procedemos para o estudo da morfologia e comportamento dinâmico da interface que separa uma amostra de fluido magnético (ferrofluido) de um fluido não magnético em uma célula de Hele-Shaw radial, quando campos magnéticos radiais e azimutais são aplicados. Empregamos simulações numéricas fortemente não lineares e métodos perturbativos para entender como o sistema responde a mudanças na viscosidade dos fluidos e na intensidade dos campos magnéticos. Além disso, investigamos a possibilidade da interface chegar a um estado estacionário, no qual o padrão formado rotaciona, sem mudar sua forma. Por fim, estudamos instabilidades magnetoelásticas em células de Hele-Shaw retangulares horizontais e verticais. Estas instabilidades ocorrem quando dois fluidos (um dos quais é um ferrofluido), ao se tocarem, geram uma reação química formando uma interface elástica. Levamos em conta complicados efeitos de campo de demagnetização e de rigidez dependente da curvatura para obter padrões representativos das instabilidades de interface que ocorrem em tais sistemas.

Palavras-chaves: instabilidades hidrodinâmicas; células de Hele-Shaw; controle em dinâmica de fluidos; estresses viscosos normais; ferrofluido; magnetoelasticidade; interfaces elásticas.

ABSTRACT

The Saffman-Taylor instability occurs in the effectively two-dimensional geometry of a Hele-Shaw cell, composed by two parallel glass plates, presenting a small gap between them. In this cell, when a less viscous fluid is injected against one of higher viscosity, protuberances resembling "fingers" arise on the interface that separates them. In this dissertation, we study a number of systems related to the classic Saffman-Taylor problem. First, we employ linear stability analysis and variational calculus to ascertain two time dependent injection rates: One that controls the instabilities of the interface, and another that predetermines the number of emerging fingers. Both of them consider a non-newtonian fluid, which viscosity increases with time, building upon previous studies that only considered newtonian fluids. We validate the efficacy of these injection rate protocols with a perturbative third-order mode-coupling approach. Next, we study the development of finger tip-tripling, where the protuberance divides into three, which is also detected in experiments, and not yet theoretically studied. Accounting for the effects of viscous normal stresses, we investigate the problem theoretically, employing a perturbative scheme, and capture the emergence of tip-tripling events at weakly nonlinear stages of the flow. Afterward, we investigate the morphology and dynamical behavior of an interface that separates a magnetic fluid (ferrofluid) droplet and a non-magnetic fluid, both confined to a radial Hele-Shaw cell, when radial and azimuthal magnetic fields are applied. Numerical simulations and perturbative mode-coupling theory are employed to understand how the system reacts to changes in the fluids viscosities and the intensity of the applied magnetic fields. In addition, we examine the possibility of the interface reaching a stationary state, where the pattern rotates without changing its shape. Finally, we analyze the occurrence of magnetoelastic fingering instabilities in both vertical and horizontal rectangular Hele-Shaw cells. These instabilities occur when a viscous ferrofluid and a nonmagnetic fluid react chemically at the fluid-fluid interface upon contact, creating an elastic interface. Taking into account complicated demagnetizing field effects, and a curvature-dependent bending rigidity, we obtain representative magnetoelastic patterns that arise in these systems.

Keywords: hydrodynamic instabilities; Hele-Shaw cells; control process in fluid dynamics; viscous normal stresses; ferrofluids; magnetoelasticity; elastic interfaces.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – (a) Crescimento fractal de colônia de bactérias; (b) Floco de neve; (c) Peixe <i>Siganus Vermiculatus</i> ; (d) Rede fluvial do norte do Brasil	17
Figura 2 – Esquema representativo de uma célula de Hele-Shaw radial com dois fluidos imiscíveis separados por uma interface.	18
Figura 3 – Formação de padrões obtidos experimentalmente em células de Hele-Shaw radiais com injeção.	19
Figura 4 – (a) Foto de uma célula de Hele-Shaw radial; (b) Desenho esquemático de uma bancada experimental para experimentos em células de Hele-Shaw radiais. São indicados: [a] a célula de Hele-Shaw, [b] uma câmera fotográfica, [c] suporte para câmera, [d] reservatórios de líquido e [e] uma bomba acoplada a [f] um motor.	20
Figura 5 – (a) Foto de uma célula de Hele-Shaw retangular. (b) Desenho esquemático do fluxo de Hele-Shaw retangular, no qual um fluido menos viscoso é injetado em uma das extremidades de um canal retangular contra um fluido mais viscoso.	20
Figura 6 – (a) Foto de uma célula de Hele-Shaw retangular que pode ser inclinada para criar um fluxo induzido por gravidade. (b) Desenho esquemático de uma célula de Hele-Shaw com fluxo gerado por gravidade.	21
Figura 7 – Formação de padrões obtidos experimentalmente em células de Hele-Shaw retangulares.	22
Figura 8 – Figuras (a) e (c): experimento considerando a taxa de injeção Q constante. Figuras (b) e (d): uso de uma taxa de injeção ótima $Q(t) \sim t$, que minimiza as instabilidades.	24
Figura 9 – Experimento com uma injeção $Q \sim t^{-1/3}$, dependente do tempo, específica a fim de gerar cinco dedos viscosos.	24
Figura 10 – Comparação de experimentos com uma taxa de injeção (a) constante $Q = Q_0$, com uma (b) variando no tempo $Q \sim t^{-1/3}$, que fixa o número de dedos viscosos. Aqui a injeção é tal que sete dedos foram selecionados. . .	25

Figura 11 – Experimentos realizados em células de Hele-Shaw radial com presença de trifurcação de dedos viscosos, indicadas por caixas vermelhas tracejadas. O experimento (a) foi realizado por PATERSON e o (b) por PIHLER-PUZOVIĆ et al..	26
Figura 12 – Experimento realizado em célula de Hele-Shaw radial com presença de trifurcação de dedos viscosos, indicada por setas vermelhas.	27
Figura 13 – (a) Figura esquemática ilustrando as linhas de campo magnético que formam as instabilidades de Rosensweig. (b) Foto de experimento demonstrando a instabilidade de Rosensweig.	28
Figura 14 – (a) Experimento demonstrando a formação de sólitons em instabilidades de Rosensweig. (b) Figura esquemática e fotos de experimento demonstrando a instabilidade de Rosensweig em um ferrofluido ocupando um recipiente retangular para diferentes valores do campo magnético uniforme aplicado H	28
Figura 15 – Fotos de experimento de instabilidade de pico em células de Hele-Shaw retangulares verticais para três valores do campo magnético aplicado H_0 . O ferrofluido é o fluido escuro e o fluido claro é não magnético.	29
Figura 16 – Foto de experimento de instabilidade de pico em uma célula de Hele-Shaw retangular horizontal com fluxo de fluido, no qual o fluido já presente na célula é um ferrofluido (fluido escuro) e o injetado é não magnético.	29
Figura 17 – (a) Experimento demonstrando a instabilidade de labirinto para ferrofluidos em células de Hele-Shaw. (b) Formação de padrões de labirinto em uma gota de ferrofluido confinado em uma célula de Hele-Shaw submetido a um campo magnético perpendicular e uniforme H	30
Figura 18 – (a) Figura esquemática de uma célula de Hele-Shaw com um ferrofluido, submetida a um campo magnético radial, gerado por um par de bobinas de anti-Helmholtz, que possuem correntes de mesma intensidade, mas sentidos opostos. (b) Padrões típicos da célula de Hele-Shaw esquematizada em (a).	31
Figura 19 – (a) Figura esquemática de uma célula de Hele-Shaw com um fluido não magnético embebido em um ferrofluido, submetida a um campo magnético azimutal, gerado por um fio que passa no centro da célula com corrente I . (b) Padrões típicos da célula de Hele-Shaw esquematizada em (a).	31

Figura 20 – Experimento ilustrando instabilidades de dedos viscosos para células de Hele-Shaw cujos fluidos formam uma interface elástica. As quatro imagens da esquerda ilustram a evolução da injeção de uma solução iônica numa solução aquosa, enquanto as da direita, a solução aquosa é injetada na solução iônica.	33
Figura 21 – Simulação numérica fortemente não linear para uma célula de Hele-Shaw radial com interface elástica. Na figura em azul (vermelho), desconsidera-se (considera-se) a variação da rigidez com a curvatura.	33
Figura 22 – Título e <i>abstract</i> dos trabalhos resultantes desta dissertação de mestrado. .	36
Figura 23 – Evolução dos padrões de dedos viscosos para dois fluidos de viscosidade constante ao resolver a Eq. (2.16) em (a) primeira, (b) segunda e (c) terceira ordem, para $0 \leq t \leq t_f$. São incluídos os modos $2 \leq n \leq 20$. Evolução temporal das amplitudes de perturbação escalonadas $ \zeta_n(t) /R(t)$ em (d) primeira, (e) segunda e (f) terceira ordem. O <i>inset</i> em (d) [(e)] mostra a evolução da interface de primeira [segunda] ordem para $t = 0.73$	45
Figura 24 – Evolução temporal das interfaces geradas ao resolver a Eq. (2.16) em terceira ordem para $0 \leq t \leq t_f$, considerando injeção constante $Q = Q_0$ [(a)-(c)] e injeção ótima $Q = Q(t)$ [(d)-(f)]. São usados: $\theta = 0$ [(a) e (d)], $\theta = 0.2$ [(b) e (e)] e $\theta = 1$, [(c) e (f)]	47
Figura 25 – Evolução temporal do perímetro L das interfaces presentes na Fig. 24, considerando $Q = Q_0$ (curvas sólidas) e $Q = Q(t)$ (curvas tracejadas), para $\theta = 0, 0.2$ e 1	49
Figura 26 – Evolução temporal das interfaces geradas ao resolver Eq. (2.16) em terceira ordem para $0 \leq t \leq t_f$, considerando injeção proposta pela Eq. (2.42). É imposto $n = n_{\max} = 5$ em [(a)-(c)] e $n = n_{\max} = 6$ em [(d)-(f)]. São usados: $\theta = 0$ [(a) e (d)], $\theta = 0.2$ [(b) e (e)] e $\theta = 1$, [(c) e (f)].	51
Figura 27 – Amplitudes reescaladas de modos $ \zeta_n(t_f) /R(t_f)$ no tempo final $t = t_f = 1$ em função do número azimutal de modo n . Os dados são extraídos das últimas interfaces (em preto) da Fig. 26.	52

- Figura 28 – Evolução dos padrões de dedos viscosos para dois fluidos de viscosidade constante ao resolver a Eq. (C.2) para $0 \leq t \leq t_f$, quando (a) $\delta = 0$ e $t_f = 1000$, e (b) $\delta = 1$ e $t_f = 1800$. O tempo t_f é definido pela Eq. (2.36). Consideramos o acoplamento não linear dos modos $n = n_{\max}^{\zeta} = 7$, $2n = 14$ e $3n = 21$. A evolução temporal da perturbação reescalada $|\zeta_n(t)|/R(t)$ correspondente é representada em (c) para $\delta = 0$ e (d) para $\delta = 1$ 57
- Figura 29 – Evolução dos padrões de dedos viscosos ao resolver a Eq. (C.2) para $0 \leq t \leq t_f$, com $2 \leq n \leq 21$, quando $\delta = 0$ [(a)-(c)], e $\delta = 1$ [(d)-(f)]. Os tempos t_f são: (a) 530, (b) 530, (c) 560, (d) 970, (e) 1012 e (f) 1060. A ocorrência de trifurcação em [(d)-(f)] é indicada por setas. Três conjuntos de fases aleatórias são usadas, um para (a) e (d), outro para (b) e (e) e um terceiro para (c) e (f). Aqui $A = 1$, $Ca = 200$ e $R_0 = 3$ 59
- Figura 30 – Evolução temporal das amplitudes de perturbação reescaladas $|\zeta_n(t)|/R(t)$ para $2 \leq n \leq 21$. Todos os parâmetros físicos e condições iniciais são os mesmos da Fig. 29. Note que $\delta = 0$ para (a)-(c) e $\delta = 1$ para (d)-(f). 60
- Figura 31 – Perímetro interfacial reescalado $L(t_f)$ [Eq. (3.17)] para diferentes valores de Ca . Os dados foram obtidos através das interfaces não lineares de terceira ordem, com os parâmetros idênticos aos da Fig. 29(f), salvo Ca . As interfaces para os pontos (a) $Ca = 50$, (b) $Ca = 100$ e (c) $Ca = 200$ são representadas na Fig. 32. 61
- Figura 32 – Evolução dos padrões de dedos viscosos referente aos pontos (a)-(c) indicados na Fig. 31 obtidas ao resolver a Eq. (C.2) para $0 \leq t \leq t_f$, com $2 \leq n \leq 21$, quando $\delta = 1$ e $A = 1$, para (a) $Ca = 50$, (b) $Ca = 100$ e (c) $Ca = 200$. As condições iniciais são as mesmas da Fig. 29. Os tempos finais t_f são: (a) 12000, (b) 3000 e (c) 1060. 62
- Figura 33 – Evolução temporal dos padrões de dedos viscosos ao resolver a Eq. (C.2) para $0 \leq t \leq t_f$, com $2 \leq n \leq 21$, quando $\delta = 1$ e $Ca = 200$, para: (a) $A = 0.75$, (b) $A = 0.85$ e (c) $A = 1$. Os tempos t_f são (a) 2700, (b) 1550 e (c) 1060. As condições iniciais são as mesmas da Fig. 29(f). 63

- Figura 34 – Representação esquemática de uma gota de ferrofluido de viscosidade η_1 embebida em um fluido não magnético de viscosidade η_2 , confinados em uma célula de Hele-Shaw de espaçamento b . O sistema é submetido a um campo magnético cruzado $\mathbf{H}$, formado pela combinação de um campo radial, gerado de um par de bobinas de anti-Helmholtz, e um campo azimuthal proveniente de uma corrente elétrica que passa pelo centro da célula. . . . 64
- Figura 35 – Comparação das soluções perturbativas para a interface do ferrofluido obtida ao resolver a Eq. (D.1) até (a) primeira, (b) segunda e (c) terceira ordem, com (d) a solução fortemente não linear obtida do método da integral de contorno (Sec. 4.2.2). Para todas interfaces, $A = -0.9$, $B = 5 \cdot 10^{-4}$, $\chi = 0.25$, $J = 1$ e $t = 20$ 68
- Figura 36 – Evolução temporal da amplitude do modo harmônico $|\zeta_{n=n_{\max}=6}(t)|$ e dos dois primeiros harmônicos $|\zeta_{2n}(t)|$ e $|\zeta_{3n}(t)|$ das interfaces em primeira (tons de cinza), segunda (tracejado) e terceira (sólido) ordem da Fig. 35. 69
- Figura 37 – Superposição da evolução temporal das interfaces fortemente não lineares (em laranja) e fracamente não linear de terceira ordem (em preto tracejado) para os tempos (a) $t = 5$, (b) $t = 10$, (c) $t = 15$, (d) $t = 17$, (e) $t = 20$ e (f) $t = 25$. Os parâmetros são os mesmos da Fig. 35. 70
- Figura 38 – Comportamento do perímetro da interface $L(t)$ em relação ao tempo t correspondente aos padrões ilustrados na Fig. 35, lineares (Linear), fracamente não lineares de segunda (WNL 2nd) e terceira (WNL 3rd) ordem e fortemente não linear (FNL). Os parâmetros são os mesmo da Fig. 35. . . 71
- Figura 39 – Interfaces perturbativas de terceira ordem para a interface do ferrofluido obtidas ao resolver a Eq. (D.1) [(a)-(c)] e interfaces fortemente não lineares obtidas por simulações numéricas através do método da integral de contorno descrito na Sec. 4.2.2 [(d)-(f)]. Para todas interfaces, $B = 5 \cdot 10^{-4}$, $\chi = 0.25$, $J = 1$. Para (a) e (d) $A = -0.9$; para (b) e (e) $A = 0$; e para (c) e (f) $A = 0.9$. Os tempos de cada padrão são dados no texto. 72

- Figura 40 – Padrões fortemente não lineares para um ferrofluido confinado sobre influência de campos magnéticos cruzados, obtidos com uma condição inicial simétrica. Os padrões são obtidos para $A = -0.9$ [(a), (d), (g)], $A = 0$ [(b), (e), (h)], e $A = 0.9$ [(c), (f), (i)]. Tomamos $\chi = 0.1$ e $J = 0.69$ [(a)-(c)], $\chi = 0.175$ e $J = 0.90$ [(d)-(f)] e $\chi = 0.25$ e $J = 1$ [(g)-(i)]. Os valores do tempo final para cada caso são: (a) $t = 29$, (b) $t = 25$, (c) $t = 20.80$, (d) $t = 27.10$, (e) $t = 22.30$, (f) $t = 19.40$, (g) $t = 29$, (h) $t = 25$, and (i) $t = 19.40$. A tensão superficial efetiva é $B = 5 \cdot 10^{-4}$ 73
- Figura 41 – Padrões fortemente não lineares para um ferrofluido confinado sobre influência de campos magnéticos cruzados, obtidos com uma condição inicial aleatória. Os parâmetros são os mesmos da Fig. 40. Os valores do tempo final para cada caso são: (a) $t = 25.30$, (b) $t = 21.20$, (c) $t = 17.14$, (d) $t = 24.30$, (e) $t = 19.34$, (f) $t = 15.80$, (g) $t = 60$, (h) $t = 17.56$, e (i) $t = 16.40$ 74
- Figura 42 – Representação esquemática do problema magnetoelástico em uma célula de Hele-Shaw horizontal de espaçamento b . O fluido 1 é não magnético e possui viscosidade η_1 e o fluido 2 é um ferrofluido de viscosidade η_2 . Temos um fluxo externo de velocidade constante $\mathbf{v}_\infty$. A interface separando os fluidos é elástica e possui rigidez ν dependente da curvatura. Um campo magnético uniforme $\mathbf{H}_0$ é aplicado no plano da célula, perpendicular à interface não perturbada, que inicialmente está em $y = 0$ 76
- Figura 43 – Representação gráfica da relação entre a taxa de crescimento linear $\Lambda(k)$ com o número de onda k para três valores do número magnetoelástico N_B e dois valores da velocidade característica U 80
- Figura 44 – Padrões interfaciais magnetoelásticos fracamente não lineares obtidos ao resolver a Eq. (5.12) em terceira ordem com quatro modos de Fourier, para (a) $C = 0$, $N_B = 0$; (b) $C = 0.99$, $N_B = 0$; (d) $C = 0$, $N_B = 4$ e (e) $C = 0.99$, $N_B = 4$. Os padrões (a) e (b) são superimpostos em (c) e os padrões (d) e (e) em (f). Para todas imagens, $U = 2$ e $A = 1$ 82
- Figura 45 – Comportamento da curvatura κ do pico dos dedos em função da razão de rigidez C para quatro valores do número magnetoelástico N_B : 0, 0.2, 2 e 4. As interfaces fracamente não lineares correspondentes aos pontos (a)-(d) para $C = 0.5$ estão presentes na Fig. 46. 84

- Figura 46 – Padrões magnetoelásticos fracamente não lineares de terceira ordem representativos, provenientes dos pontos (a)-(d) indicados na Fig. 45. 85
- Figura 47 – Representação esquemática do problema magnetoelástico em uma célula de Hele-Shaw vertical de espaçamento b . O fluido 1 é não magnético e possui viscosidade η_1 e o fluido 2 é um ferrofluido de viscosidade η_2 . A gravidade $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{y}}$ aponta para baixo. A interface que separa os fluido é elástica e possui rigidez ν dependente da curvatura. Na esquerda, temos o sistema estável com a interface não perturbada. Na direita, o campo $\mathbf{H}_0$ é aplicado induzindo a porção de estruturas magnetoelásticas de pico, com as perturbações interfaciais representadas por $y = \zeta = \zeta(x, t)$ 86
- Figura 48 – Gráfico da taxa de crescimento linear da célula de Hele-Shaw retangular vertical $\Lambda(k)$ [Eq. (5.18)] em função do número de onda k para $N_B = 1.5$, $N_B^{\text{crit}} = 2.89$ e $N_B = 4$. Consideramos que $N_G = 0.1$ 87
- Figura 49 – Evolução temporal das interfaces na célula de Hele-Shaw vertical em terceira ordem para dois valores da razão de rigidez: (a) $C = 0$ e (b) $C = 0.99$. A evolução ocorre para tempos $t_i \leq t \leq t_f$ onde $t_i = 5.23$ e $t_f = 6.53$, a passos de $(t_f - t_i)/11$. A superposição dos padrões para $t = t_f$ se encontra em (c). 88
- Figura 50 – Comportamento da curvatura do pico dos dedos κ em função da razão de rigidez C para quatro valores ilustrativos do número magnetoelástico: 15, 10, 7 e 5. A razão de rigidez varia de 0 a 0.99 e todos outros parâmetros físicos são os mesmos da Fig. 49, exceto k^* e t_f , que variam ponto a ponto. 90
- Figura 51 – Padrões magnetoelásticos fracamente não lineares de terceira ordem representativos, provenientes dos pontos (a)-(d) indicados na Fig. 50. 90

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	FLUXO DE HELE-SHAW	17
1.2	CONTROLE DE INSTABILIDADES	23
1.3	TRIFURCAÇÕES	26
1.4	FERROFLUIDOS	27
1.5	INTERFACES ELÁSTICAS	32
1.5.1	Magnetoelasticidade	34
1.6	LISTA DE PUBLICAÇÕES	35
2	CONTROLE DE DEDOS VISCOSOS ATRAVÉS DE TAXAS DE INJEÇÕES VARIÁVEIS E FLUIDOS COM VISCOSIDADE DEPENDENTE DO TEMPO	37
2.1	CONTROLE DE DEDOS VISCOSOS	37
2.2	EQUAÇÕES DO FLUXO DE HELE-SHAW E ESQUEMA DE MODOS ACOPLADOS	37
2.3	MINIMIZANDO O CRESCIMENTO DE DEDOS VISCOSOS	40
2.3.1	Análise Linear	40
2.3.2	Além da análise linear: A análise fracamente não linear	43
2.4	FIXANDO O NÚMERO DE DEDOS	49
3	ESTRESSES VISCOSOS NORMAIS E TRIFURCAÇÕES	53
3.1	ESTRESSES NORMAIS E A CONDIÇÃO DE YOUNG-LAPLACE MODIFICADA	53
3.2	ANÁLISE FRACAMENTE NÃO LINEAR	55
4	PADRÕES DE FERROFLUIDOS CONFINADOS SOB CAMPOS MAGNÉTICOS CRUZADOS	64
4.1	CAMPOS MAGNÉTICOS CRUZADOS	64
4.2	MODELAGEM TEÓRICA	65
4.2.1	Análise perturbativa de modos acoplados	65
4.2.2	<i>Vortex Sheet</i> e o método da integral de contorno	66
4.3	COMPARAÇÃO DA MORFOLOGIA PERTURBATIVA COM A COMPLETAMENTE NÃO LINEAR	67

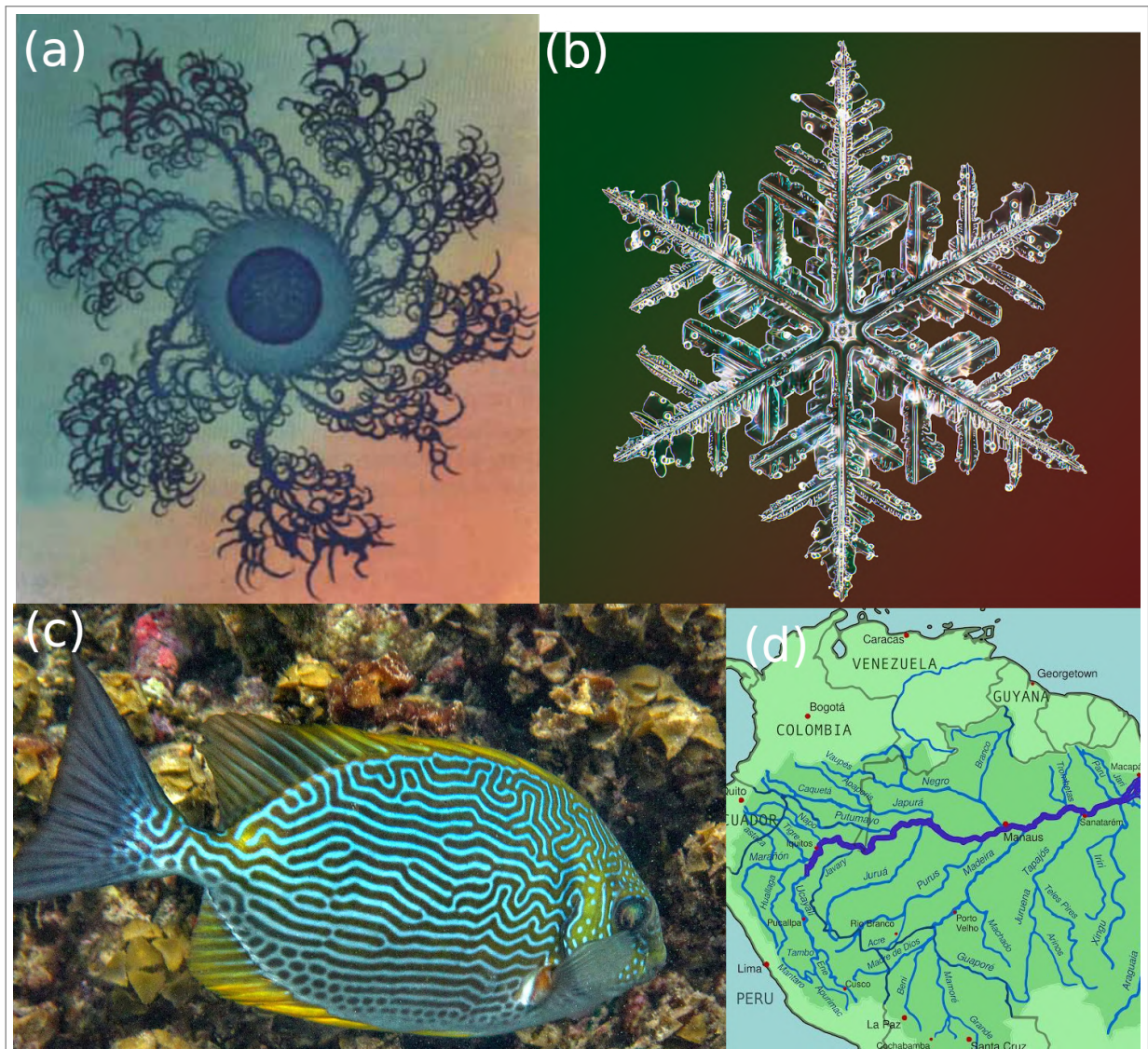
4.4	INSTABILIDADES NO REGIME FORTEMENTE NÃO LINEAR	72
5	FORMAÇÃO DE PADRÕES MAGNETOELÁSTICOS EM CÉLULAS DE HELE-SHAW RETANGULARES	76
5.1	MAGNETOELASTICIDADE EM CÉLULAS DE HELE-SHAW	76
5.2	ANÁLISE DA CÉLULA DE HELE-SHAW HORIZONTAL	80
5.2.1	Análise de Estabilidade	80
5.2.2	Análise Fracamente não linear	81
5.3	CÉLULA VERTICAL	85
5.3.1	Análise de Estabilidade	87
5.3.2	Análise Fracamente Não Linear	88
6	CONCLUSÃO	92
	REFERÊNCIAS	95
	APÊNDICE A – EXPRESSÕES PARA $\phi_{jn}(t)$ E AS FUNÇÕES NÃO LINEARES DE MODOS ACOPLADOS DO CAPÍTULO 2	102
	APÊNDICE B – EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE MODOS ACOPLADOS EM TERCEIRA ORDEM PARA $a_n(t)$ E $b_n(t)$	104
	APÊNDICE C – EQUAÇÃO DE MODOS ACOPLADOS PARA A CONDIÇÃO DE YOUNG-LAPLACE COM ESTRESSES VISCOSOS NORMAIS [EQ. (3.11)]	107
	APÊNDICE D – EQUAÇÃO DE MODOS ACOPLADOS PARA A CÉLULA DE HELE-SHAW COM CAMPOS CRUZADOS	109
	APÊNDICE E – EQUAÇÃO DE MODOS ACOPLADOS PARA A CÉLULA DE HELE-SHAW RETANGULAR COM UM FLUIDO MAGNETOELÁSTICO	110

1 INTRODUÇÃO

1.1 FLUXO DE HELE-SHAW

Amplamente presente na natureza, a formação de padrões interfaciais sempre tem sido fonte de interesse para estudos científicos. Formações de flocos de neve, desenvolvimento fractal de colônias de bactérias, formação de redes fluviais e até mesmo padrões na superfície de peixes são alguns exemplos intrigantes de formação de padrões na natureza.

Figura 1 – (a) Crescimento fractal de colônia de bactérias; (b) Floco de neve; (c) Peixe *Siganus Vermiculatus*; (d) Rede fluvial do norte do Brasil

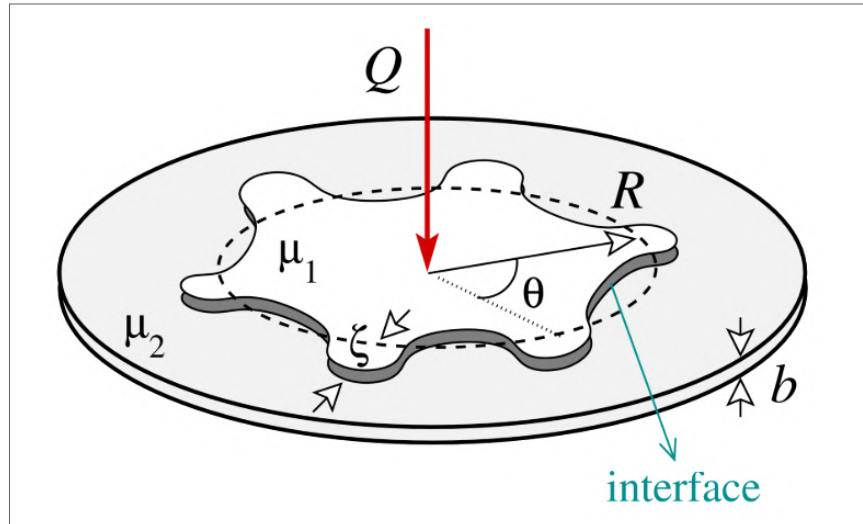


Fonte: (BEN-JACOB, 1993)

Focamos nossos estudos na instabilidade de dedos viscosos ou de Saffman-Taylor (SAFF-

MAN; TAYLOR, 1958), que ocorre quando um fluido desloca outro de maior viscosidade em uma célula de Hele-Shaw, que consiste em duas placas de vidro paralelas separadas por um pequeno espaçamento, estabelecendo uma geometria efetivamente bidimensional [Fig. 2].

Figura 2 – Esquema representativo de uma célula de Hele-Shaw radial com dois fluidos imiscíveis separados por uma interface.

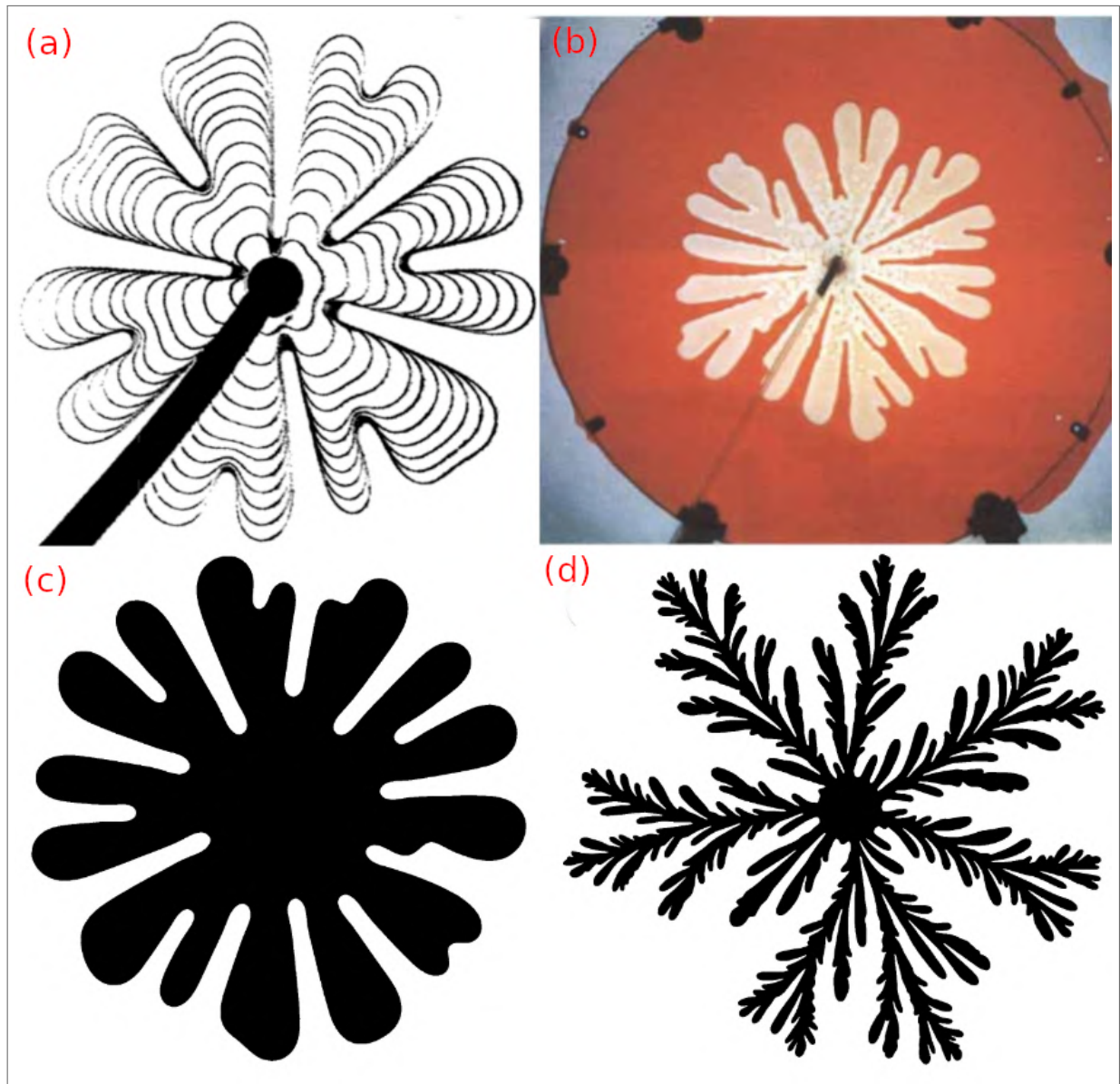


Fonte: (FONTANA; GADÊLHA; MIRANDA, 2016)

Usualmente, o fluxo de Hele-Shaw ocorre quando um fluido é injetado no centro da célula, na qual já há um outro fluido, a uma taxa de injeção constante Q (área por unidade de tempo), deslocando a interface que os separa, como indicado na Fig. 2 (PATERSON, 1981; CHEN, 1989; MIRANDA; WIDOM, 1998b). Caso o fluido injetado seja mais viscoso que o deslocado, a interface irá evoluir de forma estável, como um círculo quase perfeito. Já quando um fluido menos viscoso é injetado em um de maior viscosidade, formam-se estruturas que lembram o formato de dedos, que crescem e se ramificam, criando padrões que remetem a cataventos, usualmente tendo suas pontas divididas em duas (HOMSY, 1987). Quanto maior for a diferença entre as viscosidades, mais instável será o sistema. Ilustramos diversos experimentos em células radiais na Fig. 3. A Fig. 3(a) é uma foto estroboscópica que exibe a evolução temporal da interface, permitindo observar o crescimento dos dedos viscosos e sua eventual bifurcação. Na Fig. 3(b) observamos novamente a bifurcação dos dedos e vemos que estruturas mais ramificadas são geradas. Por fim, temos que as Figs. 3(c) e (d) foram produzidas pelo mesmo grupo e com mesmo esquema experimental, tal que a única diferença entre elas é que a Fig. 3(c) apresenta injeção baixa e a Fig. 3(d) injeção alta. Na Fig. 4, apresentamos uma foto de uma célula de Hele-Shaw radial e um esquema dos aparatos de um experimento.

No problema de Saffman-Taylor, formam-se pequenas oscilações provenientes de um au-

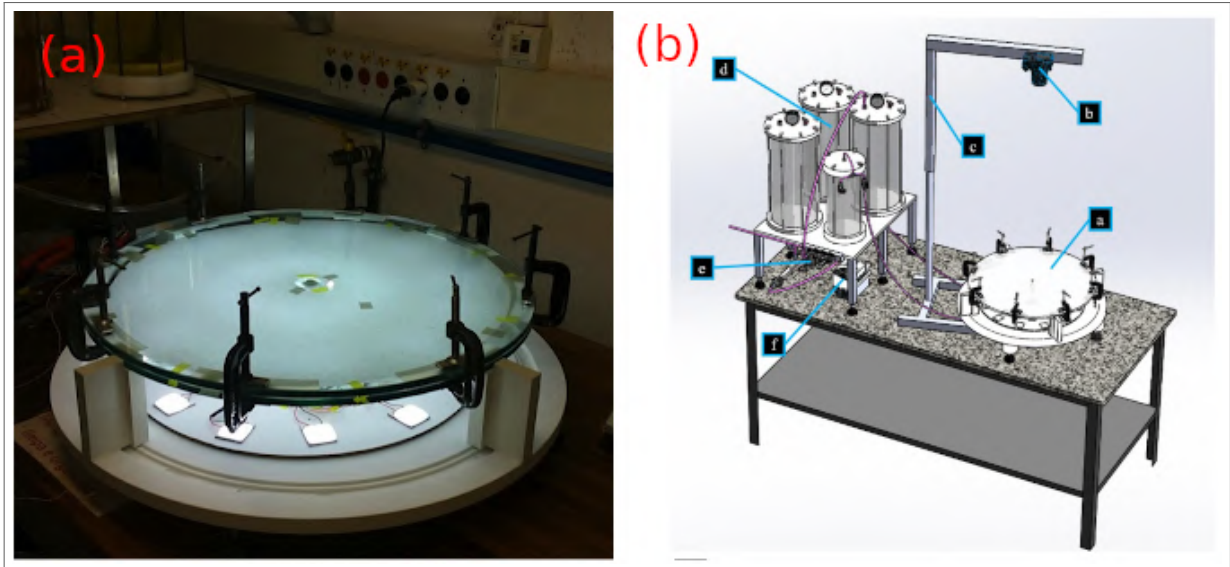
Figura 3 – Formação de padrões obtidos experimentalmente em células de Hele-Shaw radiais com injeção.



Fonte: (a) (PATERSON, 1981); (b) (BEN-JACOB, 1993); (c)-(d) (RISTROPH et al., 2006)

mento no gradiente de pressão local. Como a velocidade em um dado ponto é proporcional ao gradiente de pressão, certas partes da interface irão crescer mais rapidamente que outras, causando a formação de dedos viscosos. Contudo, simultaneamente, a tensão superficial age no sistema procurando reduzir a pressão local, e consequentemente a velocidade, em áreas cuja a curvatura é alta, causando com que as partes mais agudas da interface sejam suavizadas. A suavização da ponta de um dedo diminui a intensidade dos efeitos de tensão superficial, levando à sua bifurcação. Após a divisão, cada novo lóbulo do dedo é estável, pois eles são menos espessos que o dedo dos quais se originaram. Sucede-se que, como o crescimento dos dedos ocorre na direção do gradiente de pressão, o dedo dividido que estiver ligeiramente a

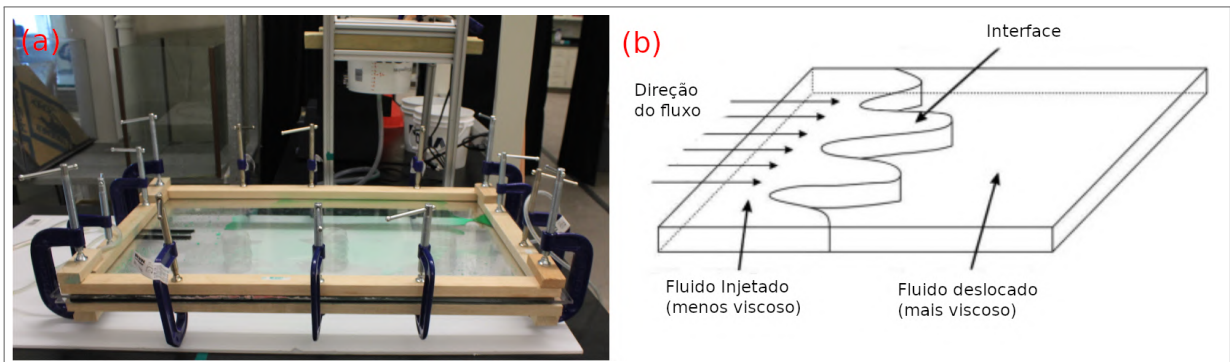
Figura 4 – (a) Foto de uma célula de Hele-Shaw radial; (b) Desenho esquemático de uma bancada experimental para experimentos em células de Hele-Shaw radiais. São indicados: [a] a célula de Hele-Shaw, [b] uma câmera fotográfica, [c] suporte para câmera, [d] reservatórios de líquido e [e] uma bomba acoplada a [f] um motor.



Fonte: (SCHIMITH; ROBERTO; ABEDI, 2020)

frente do outro, rapidamente ultrapassa o que está atrás, gerando um efeito de blindagem (*shielding*), impedindo o crescimento do outro e, então, alarga-se ocupando o espaço disponível. Com o avanço do dedo, este irá novamente se alargar e bifurcar, gerando complexos padrões, como o mostrado na Fig. 3(d) (HOMSY, 1987; MIRANDA, 2019).

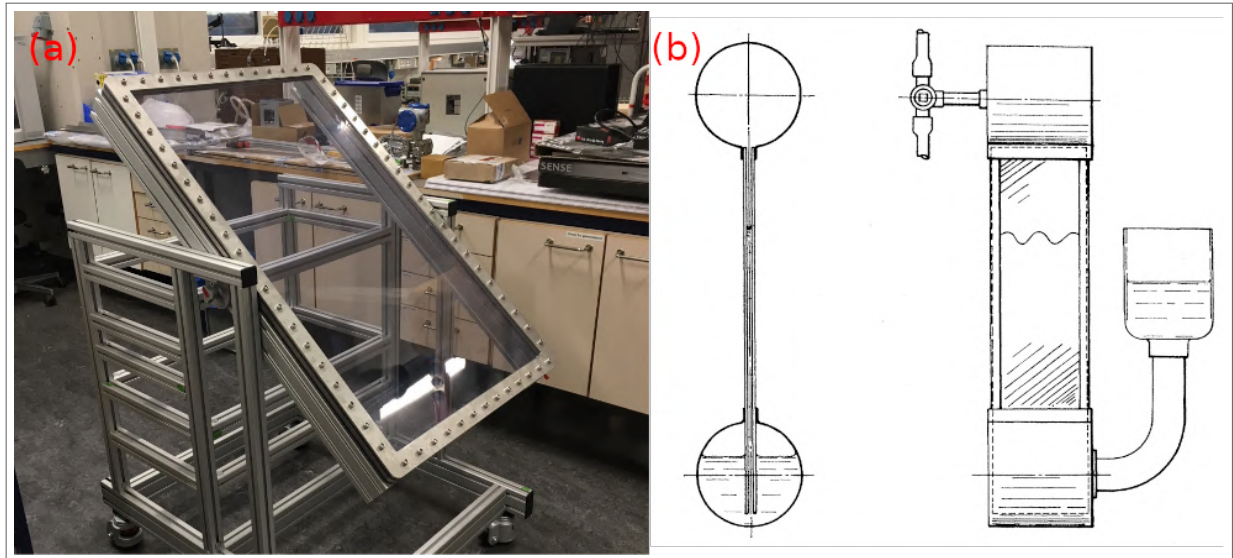
Figura 5 – (a) Foto de uma célula de Hele-Shaw retangular. (b) Desenho esquemático do fluxo de Hele-Shaw retangular, no qual um fluido menos viscoso é injetado em uma das extremidades de um canal retangular contra um fluido mais viscoso.



Fonte: (a) (LAVROV, 2019); (b) (COUTINHO, 2021)

Alternativamente, podemos adotar uma geometria retangular (SAFFMAN; TAYLOR, 1958), na qual o fluido menos viscoso é injetado em uma das extremidades de um canal retangular, como vemos na Fig. 5. Nesta geometria também é possível ter um fluxo gerado pela gravidade, no qual inclinamos a célula de forma que o fluido mais denso e mais viscoso seja empurrado

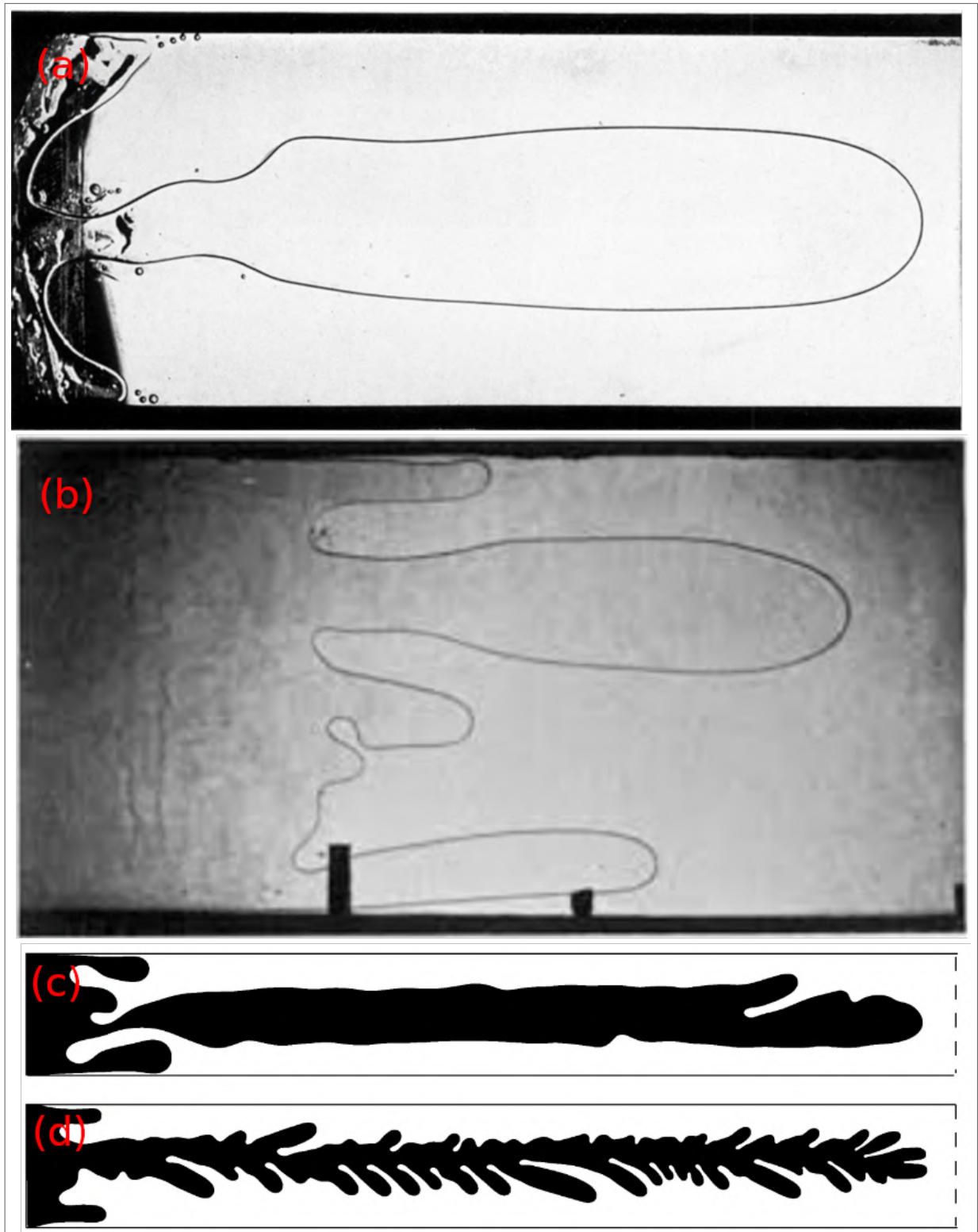
Figura 6 – (a) Foto de uma célula de Hele-Shaw retangular que pode ser inclinada para criar um fluxo induzido por gravidade. (b) Desenho esquemático de uma célula de Hele-Shaw com fluxo gerado por gravidade.



Fonte: (a) (BESTMANN; KRAVCHINSKY, 2014); (b) (SAFFMAN; TAYLOR, 1958)

contra o menos viscoso pela ação da gravidade, a Fig. 6 ilustra tal sistema. O mecanismo que leva a formação dos dedos viscosos é essencialmente o mesmo da célula radial, contudo, nesta geometria, quando a diferença entre a viscosidade dos fluidos é máxima e temos um canal relativamente estreito, a dinâmica de competições e o efeito de blindagem entre os dedos leva à formação de um único dedo com ponta arredondada, atingindo um estado estacionário na dinâmica, como vemos na Fig. 7(a). Já na geometria radial, não são verificados estados estacionários. A Fig. 7 ilustra experimentos em células de Hele-Shaw retangulares. A Fig. 7(b) mostra uma célula com típica formação de diversos dedos nesta geometria. Para as Figs. 7(c) e (d), temos que a única diferença no experimento é a velocidade do fluxo, onde (c) apresenta um fluxo lento e (d) um fluxo rápido.

Figura 7 – Formação de padrões obtidos experimentalmente em células de Hele-Shaw retangulares.



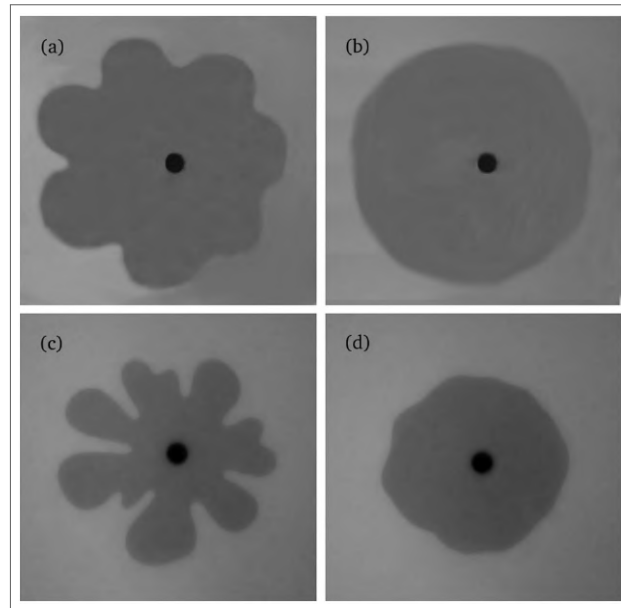
Fonte: (a)-(b) (SAFFMAN; TAYLOR, 1958); (c)-(d) (RISTROPH et al., 2006)

1.2 CONTROLE DE INSTABILIDADES

As instabilidades de dedos viscosos podem ser tanto desejáveis, como no processo de mistura entre dois fluidos miscíveis (JHA; CUETO-FELGUEROSO; JUANES, 2011), promovendo uma aceleração na mistura, quanto indesejáveis, como no processo de extração de petróleo. Neste último, ocorre que o petróleo, que é um óleo de alta viscosidade, se encontra em rochas subterrâneas e é primeiramente extraído através de uma sonda, que perfura rochas sedimentares, chegando à camada petrolífera, fazendo com que o petróleo jorre para a superfície. Contudo, é comum que uma quantidade considerável de petróleo fique presa nas rochas porosas, necessitando-se injetar água para recuperá-lo. Como a água é um fluido pouco viscoso, formam-se as instabilidades de dedos viscosos na interface entre os fluidos, resultando em que parte do petróleo não seja recuperado, tornando a extração bastante ineficiente. Como a injeção de um fluido mais viscoso que o petróleo não é economicamente viável, são necessárias outras soluções para obter uma interface estável (LAKE, 1989; WOODS, 2015). Como os mecanismos físicos que geram as instabilidades em meios porosos são similares aos da instabilidade de Saffman-Taylor, investigadores estudaram no contexto de células de Hele-Shaw, experimentalmente e teoricamente, o deslocamento radial de fluido, tendo uma das paredes fixa da célula substituída por uma membrana flexível (PIHLER-PUZOVIĆ et al., 2012; PIHLER-PUZOVIĆ et al., 2018). Tal substituição induziu uma estabilização dos dedos viscosos. Outros estudos (AL-HOUSSEINY; STONE, 2013; JACKSON et al., 2017; ANJOS; DIAS; MIRANDA, 2018; BONGRAND; TSAI, 2018) demonstraram que, ao tornar as placas da célula não paralelas, pode-se também controlar as instabilidades.

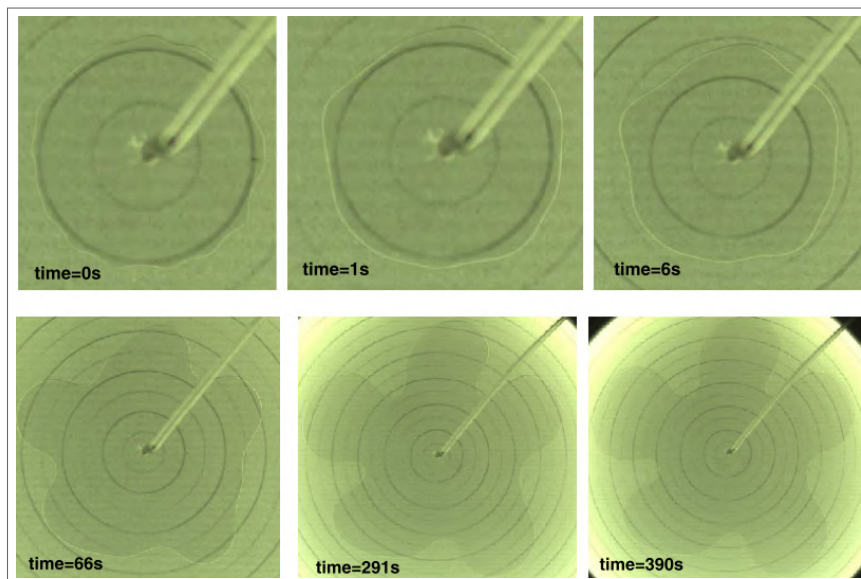
Alternativamente, diversos trabalhos procuraram induzir estabilidade através da manipulação da taxa de injeção Q . Como vimos na secção 1.1, usualmente as instabilidades são formadas para uma injeção Q constante. A partir de (CARDOSO; WOODS, 1995; LI et al., 2009; LESHCHINER et al., 2010; DIAS; MIRANDA, 2010; DIAS et al., 2012; LINS; AZAIEZ, 2017), aprendemos que é possível variar a taxa de injeção do fluido de forma que as instabilidades de Saffman-Taylor possam ser controladas. Dias et al. (DIAS et al., 2012) mostram que, ao empregarmos um esquema variacional procurando minimizar as amplitudes de perturbação lineares através da equação de Euler-Lagrange, podemos sistematicamente obter a taxa de injeção ideal variando no tempo $Q(t) \sim t$ que minimiza as instabilidades da interface como um todo. Esta injeção ideal teve sua validade verificada através de simulações fortemente não lineares e experimentos, como o da Fig. 8.

Figura 8 – Figuras (a) e (c): experimento considerando a taxa de injeção Q constante. Figuras (b) e (d): uso de uma taxa de injeção ótima $Q(t) \sim t$, que minimiza as instabilidades.



Fonte: (DIAS et al., 2012)

Figura 9 – Experimento com uma injeção $Q \sim t^{-1/3}$, dependente do tempo, específica a fim de gerar cinco dedos viscosos.

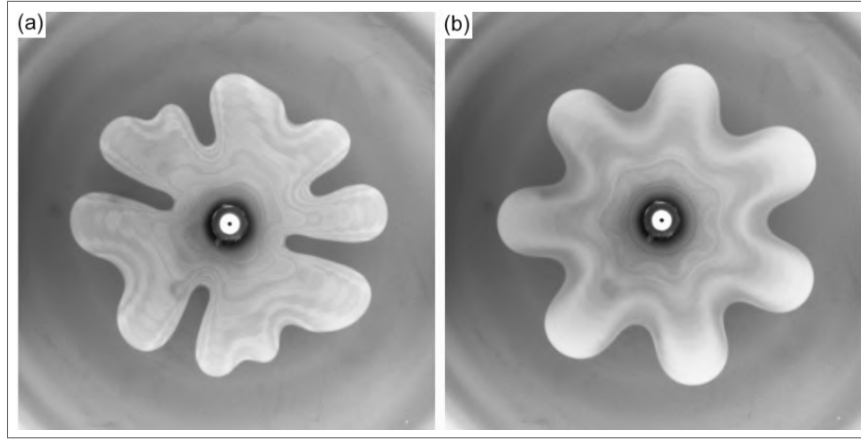


Fonte: (LI et al., 2009)

Estudos adicionais (LI et al., 2009; LESHCHINER et al., 2010) mostram que é possível não apenas controlar as instabilidades da interface, mas também selecionar o número de dedos viscosos através da variação temporal de $Q(t)$ proporcional à $t^{-1/3}$. Tal predeterminação do número de dedos inibe a ramificação deles, impedindo a criação dos complexos padrões que contêm uma multiplicidade de dedos e resultando em um padrão muito mais ordenado. As

Figs. 9 e 10 mostram experimentos expondo tal efeito.

Figura 10 – Comparação de experimentos com uma taxa de injeção (a) constante $Q = Q_0$, com uma (b) variando no tempo $Q \sim t^{-1/3}$, que fixa o número de dedos viscosos. Aqui a injeção é tal que sete dedos foram selecionados.



Fonte: (LESHCHINER et al., 2010)

Ainda podemos procurar controlar instabilidades mediante à modificações nas propriedades dos fluidos. Experimentos em instabilidades de dedos viscosos em fluidos complexos, como cristais líquidos mostram a dependência da morfologia da interface em relação a reologia dos fluidos (BUKA; PALFFY-MUHORAY; RACZ, 1987; SALAMON et al., 2020; ANDRADE-SILVA et al., 2021). Estudos em fluidos não newtonianos com uma viscosidade dependente da taxa de cisalhamento mostram que tal variação na viscosidade permite uma diminuição da bifurcação dos dedos (KONDIC; PALFFY-MUHORAY; SHELLEY, 1996; KONDIC; SHELLEY; PALFFY-MUHORAY, 1998).

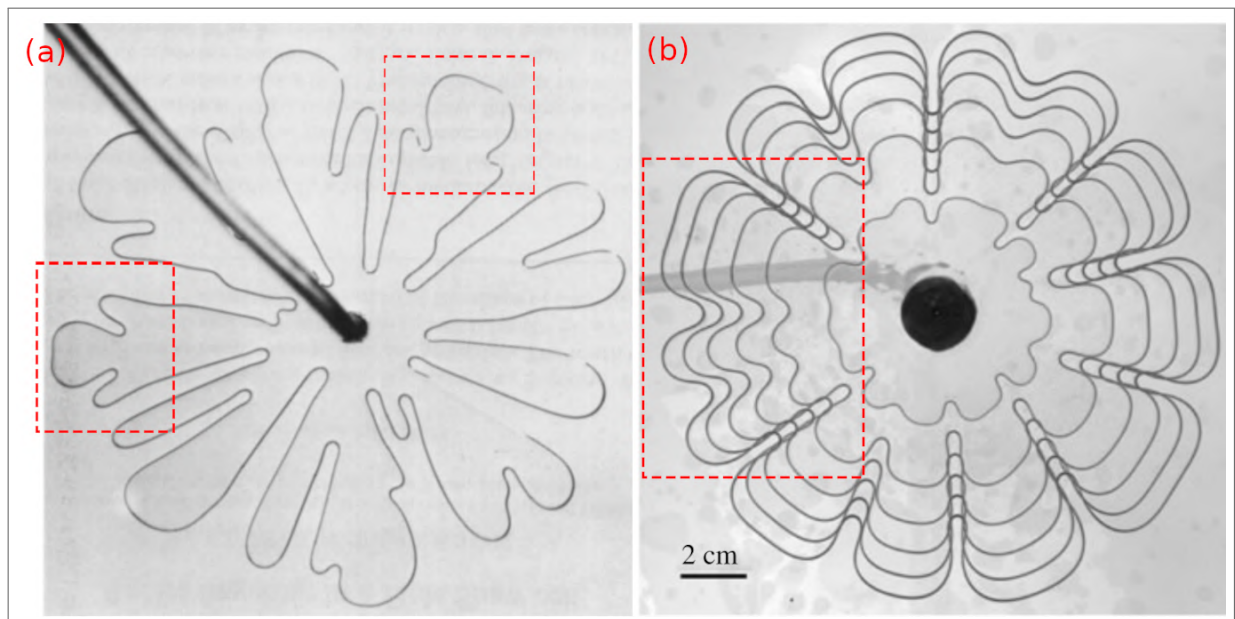
Como é sabido (PATERSON, 1981; CHEN, 1989; MIRANDA; WIDOM, 1998b), quanto maior o contraste de viscosidade entre os fluidos, isto é, a diferença de magnitude da viscosidade de um fluido em relação a outro, mais instável será o sistema. Então, tomando o esquema variacional proposto por (DIAS et al., 2012), Beeson-Jones e Woods (BEESON-JONES; WOODS, 2017) investigaram como um fluido não newtoniano, cuja viscosidade aumenta com o tempo, pode minimizar as instabilidades de Saffman-Taylor.

No capítulo 2 desta dissertação, expandimos o trabalho de Beeson-Jones. Empregamos um modelo variacional, obtendo uma expressão fechada para um $Q(t)$ ótimo, que minimiza as instabilidades e checamos a robustez do modelo através do nosso esquema de perturbação fracamente não linear em terceira ordem. Também deduzimos uma expressão para selecionar a quantidade de dedos viscosos desejada para o caso em que a viscosidade do fluido injetado varia no tempo (COUTINHO; MIRANDA, 2020a).

1.3 TRIFURCAÇÕES

Embora o efeito mais icônico de instabilidade em células de Hele-Shaw seja a bifurcação de dedos viscosos, não é raro que ocorra a divisão de um dedo em três, gerando uma *trifurcação* do dedo. No caso da trifurcação surge uma protuberância no centro de um dedo alargado, resultando numa estrutura que contém três dedos menores. Tal efeito pode ser visto em (PATERSON, 1981) [Fig. 11(a)], (PIHLER-PUZOVIĆ et al., 2018) [Fig. 11(b)], entre outros (CHEN, 1987; CHEN, 1989; LAJEUNESSE; COUDER, 2000; WARD; WHITE, 2011). Um experimento recente está presente na Fig. 12, no qual a trifurcação é indicada por uma pequena seta (SCHIMITH; ROBERTO; ABEDI, 2020).

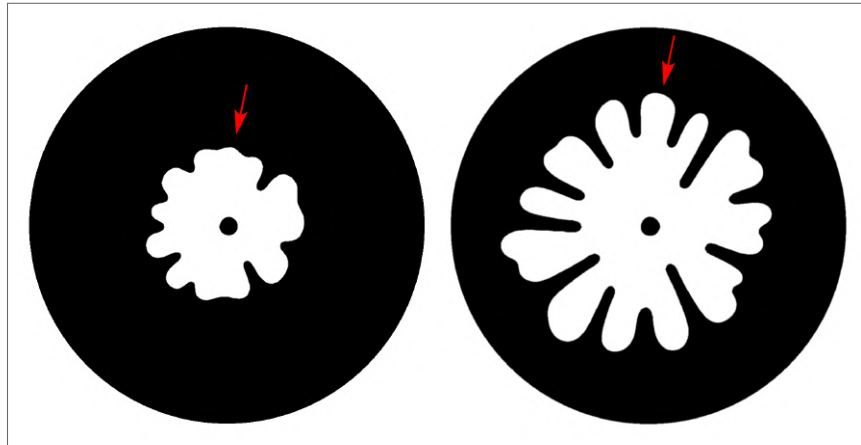
Figura 11 – Experimentos realizados em células de Hele-Shaw radial com presença de trifurcação de dedos viscosos, indicadas por caixas vermelhas tracejadas. O experimento (a) foi realizado por PATERSON e o (b) por PIHLER-PUZOVIĆ et al..



Fonte: (a) (PATERSON, 1981) e (b) (PIHLER-PUZOVIĆ et al., 2018)

Dada a escassez de estudos teóricos sobre este efeito, no capítulo 3, apresentamos um estudo teórico sobre trifurcações de dedos viscosos em células de Hele-Shaw. Assim como as bifurcações, as trifurcações são um efeito intrinsecamente não linear, então investigamos o regime fracamente não linear da dinâmica, procurando capturar tal efeito através de um esquema perturbativo de modos acoplados em terceira ordem. Para tal, consideramos a presença de estresses viscosos normais, cujos efeitos também são pouco estudados na literatura (COUTINHO; ROCHA; MIRANDA, 2021).

Figura 12 – Experimento realizado em célula de Hele-Shaw radial com presença de trifurcação de dedos viscosos, indicada por setas vermelhas.



Fonte: (SCHMITH; ROBERTO; ABEDI, 2020)

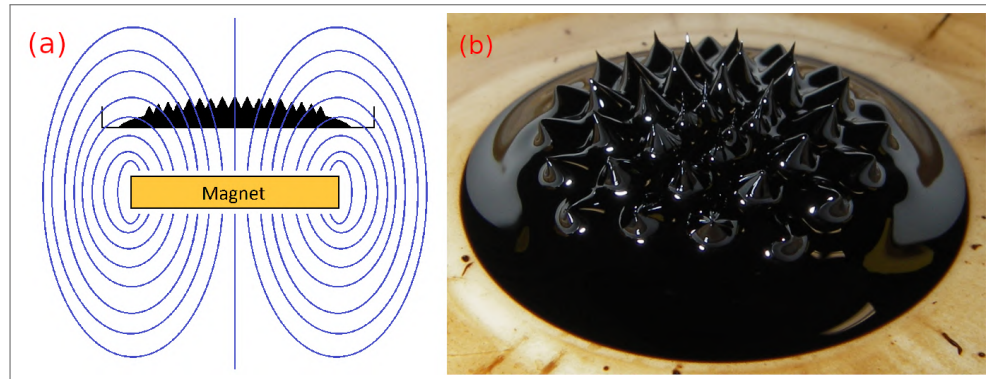
1.4 FERROFLUIDOS

Ferrofluidos consistem em uma classe de materiais na qual partículas magnéticas (ferritas, magnetitas, etc) de tamanho nanométrico são dispersas em um meio líquido não magnético, de forma que estes podem ser facilmente manipulados com campos magnéticos externos (ROSENSWEIG, 1985; BLUMS; TSEBERS; MAIOROV, 1997). Dada sua forma única de se comportar na presença de campos magnéticos, padrões inusitados emergem de ferrofluidos, tornando-os ideais para estudos de formações de padrões (ANDELMAN; ROSENSWEIG, 2008; ZAKINYAN; BEKETOVA; DIKANSKY, 2017; AFKHAMI; RENARDY, 2017).

Um exemplo clássico de instabilidades ferrohodinâmicas é a instabilidade de Rosensweig (COWLEY; ROSENSWEIG, 1967; RICHTER; BARASHENKOV, 2005), na qual uma amostra de ferrofluido horizontal é submetida a um campo magnético externo aplicado perpendicularmente a interface do ferrofluido, como ilustrado na Fig. 13. Para um dado valor crítico do campo, picos estacionários tridimensionais se formam, como vemos na Fig. 14. A formação desses picos ocorre devido à interação de forças gravitacionais e de tensão superficial que estabilizam a interface, com forças magnéticas que a desestabiliza.

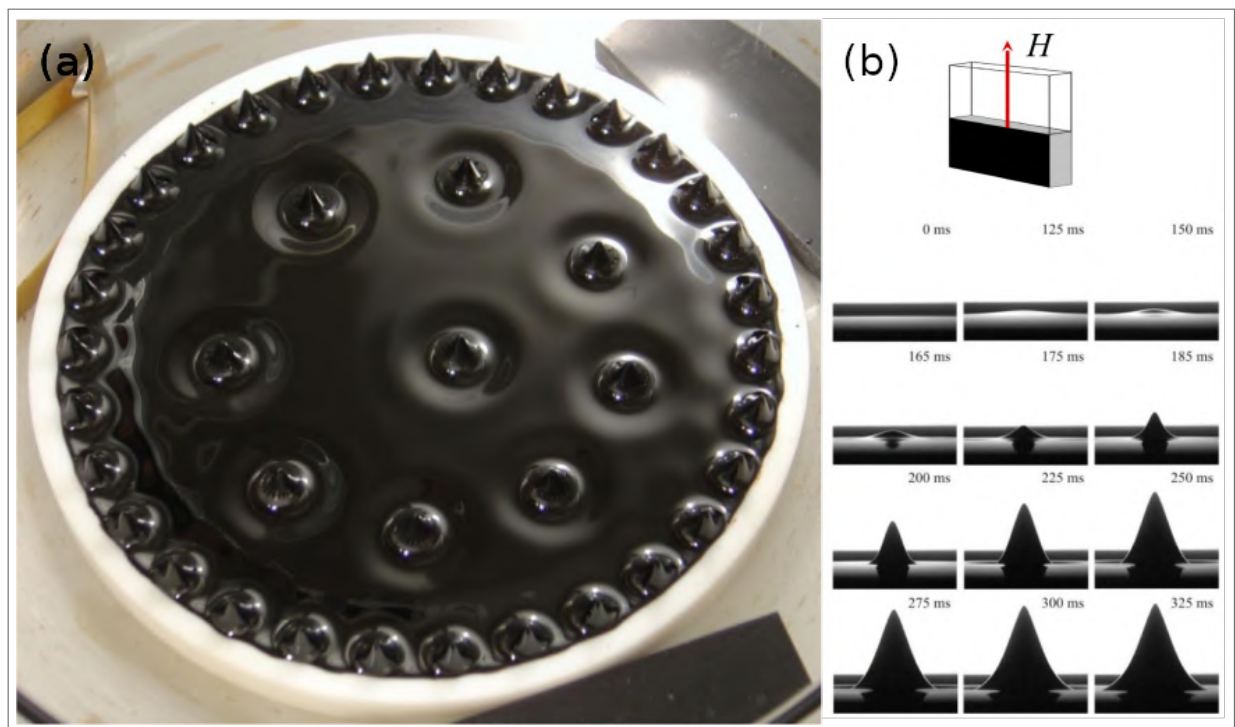
Dada a extrema complexidade de se modelar teoricamente a instabilidade de Rosensweig além do regime linear, é conveniente considerar-se uma simplificação do problema, restringindo o fluido a deslocar-se na geometria efetivamente bidimensional de uma célula de Hele-Shaw. Análises lineares (FLAMENT et al., 1996), fracamente não lineares (LIRA; MIRANDA, 2011) e simulações fortemente não lineares (NOCHETTO; SALGADO; TOMAS, 2016), além de experi-

Figura 13 – (a) Figura esquemática ilustrando as linhas de campo magnético que formam as instabilidades de Rosensweig. (b) Foto de experimento demonstrando a instabilidade de Rosensweig.



Fonte: (a) (MEYER et al., 2013); (b) (HONKE, 2020)

Figura 14 – (a) Experimento demonstrando a formação de sólitons em instabilidades de Rosensweig. (b) Figura esquemática e fotos de experimento demonstrando a instabilidade de Rosensweig em um ferrofluido ocupando um recipiente retangular para diferentes valores do campo magnético uniforme aplicado H .

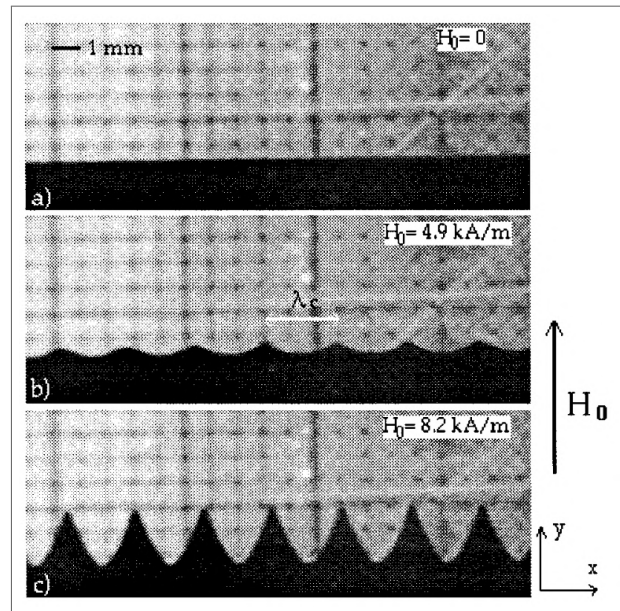


Fonte: (a) (RICHTER; BARASHENKOV, 2005); (b) (MIRANDA, 2019)

mentos como o da Fig. 15 (FLAMENT et al., 1996), investigaram o desenvolvimento das interfaces ferrohídrodinâmicas em uma célula de Hele-Shaw vertical, verificando que, quando são submetidas a um campo magnético uniforme agindo perpendicularmente à interface plana do ferrofluido, estas se tornam instáveis, formando uma série de picos.

Outro caso de interesse é quando temos uma célula retangular horizontal, na qual é injetado fluido paralelamente à célula, com campo normal à interface, resultando na formação de um

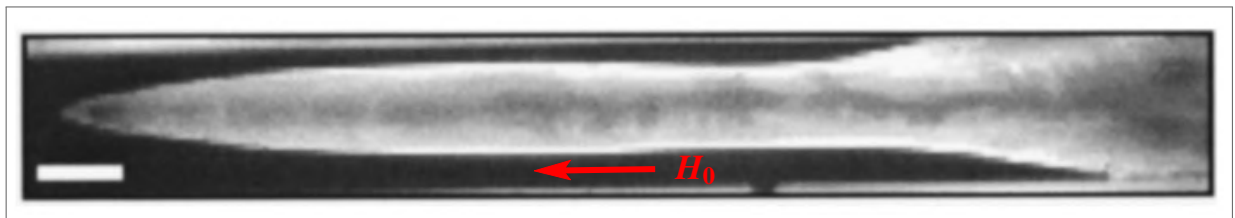
Figura 15 – Fotos de experimento de instabilidade de pico em células de Hele-Shaw retangulares verticais para três valores do campo magnético aplicado H_0 . O ferrofluido é o fluido escuro e o fluido claro é não magnético.



Fonte: (FLAMENT et al., 1996)

dedo com formato de peixe, cujo pico é bastante agudo, como vemos na Fig. 16.

Figura 16 – Foto de experimento de instabilidade de pico em uma célula de Hele-Shaw retangular horizontal com fluxo de fluido, no qual o fluido já presente na célula é um ferrofluido (fluido escuro) e o injetado é não magnético.

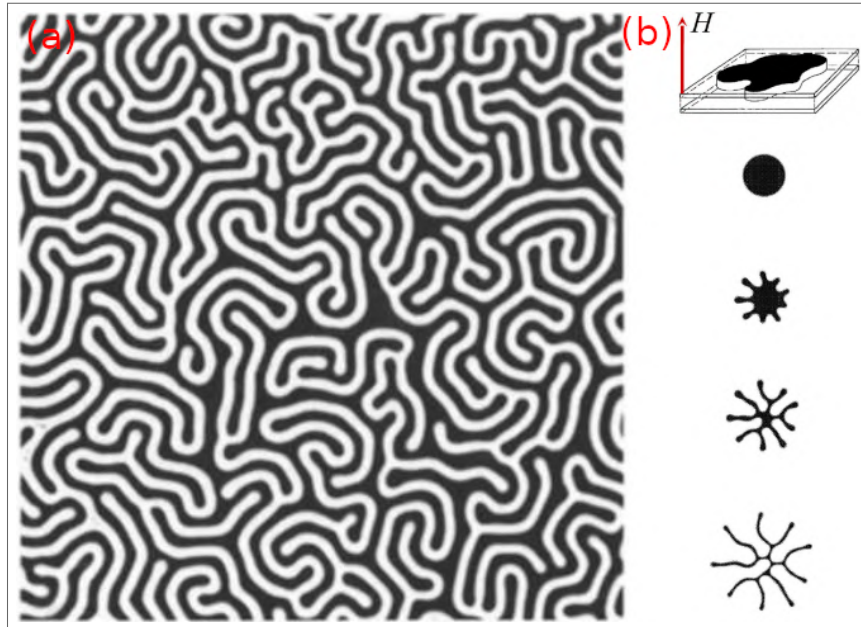


Fonte: (PACITTO; FLAMENT; BACRI, 2001)

Ainda no contexto de células de Hele-Shaw, temos a instabilidade de labirinto (TSEBERS; MAIOROV, 1980; TSEBERS, 1981; ROSENSWEIG; ZAHN; SHUMOVICH, 1983; JACKSON; GOLDS-TEIN; CEBERS, 1994; KENT-DOBIAS; BERNOFF, 2015), na qual uma gota de ferrofluido confinada na célula sofre a ação de um campo uniforme e perpendicular às placas da célula. Tal campo perpendicular é gerado por um par de bobinas de Helmholtz, possuindo correntes de mesma intensidade e sentido, com a célula posicionada equidistante de ambas bobinas. A interação entre forças magnéticas desestabilizantes e a estabilização proveniente da tensão superficial formam estruturas ramificadas que lembram labirintos, como vemos no experimento da Fig. 17. Curiosamente, a instabilidade de Rosensweig pode coexistir com a de labirinto (CHEN;

TSAI; MIRANDA, 2008).

Figura 17 – (a) Experimento demonstrando a instabilidade de labirinto para ferrofluidos em células de Hele-Shaw. (b) Formação de padrões de labirinto em uma gota de ferrofluido confinado em uma célula de Hele-Shaw submetido a um campo magnético perpendicular e uniforme H .

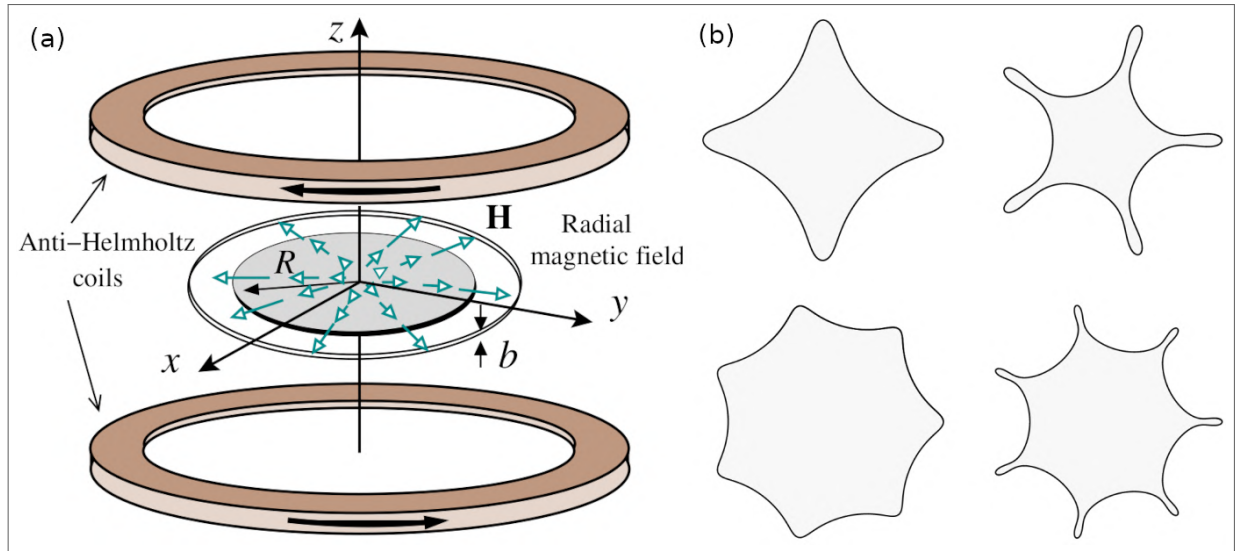


Fonte: (a) (ROSENSWEIG; ZAHN; SHUMOVICH, 1983); (b) (MIRANDA, 2019)

Outras configurações de campos de interesse são a de campo radial e de campo azimutal. Um campo radial pode ser gerado por um par de bobinas de anti-Helmholtz [Fig. 18(a)], na qual temos duas bobinas paralelas à célula, cujas correntes fluem com mesma intensidade, mas sentidos opostos. Tais bobinas produzem um campo magnético que é nulo no centro da célula e aumenta linearmente com a distância radial ($H \sim r$). Como o gradiente deste campo não é nulo, temos uma força magnética atuando na direção radial. Caso tenhamos uma gota de ferrofluido no centro da célula, o campo irá agir para desestabilizá-la, resultando nos padrões ilustrados na Fig. 18(b).

Já para a configuração de campo azimutal [Fig. 19], consideramos que um fio passa pelo centro da célula de Hele-Shaw, perpendicular às suas placas, com uma corrente I que produzirá um campo na direção azimutal, com intensidade inversamente proporcional à distância radial até o fio ($H \sim 1/r$), cujo gradiente também não será nulo, gerando uma força magnética apontando em direção ao fio. Interessantemente, caso tenhamos a configuração de fluidos da Fig. 18, isto é, uma amostra ferrofluido no centro da célula envolvida por um fluido pouco viscoso, como ar, o campo atuará de forma estabilizante. Ao invertermos os fluidos, preenchendo toda a célula com um ferrofluido e colocando uma amostra de ar no centro, como ilustrado

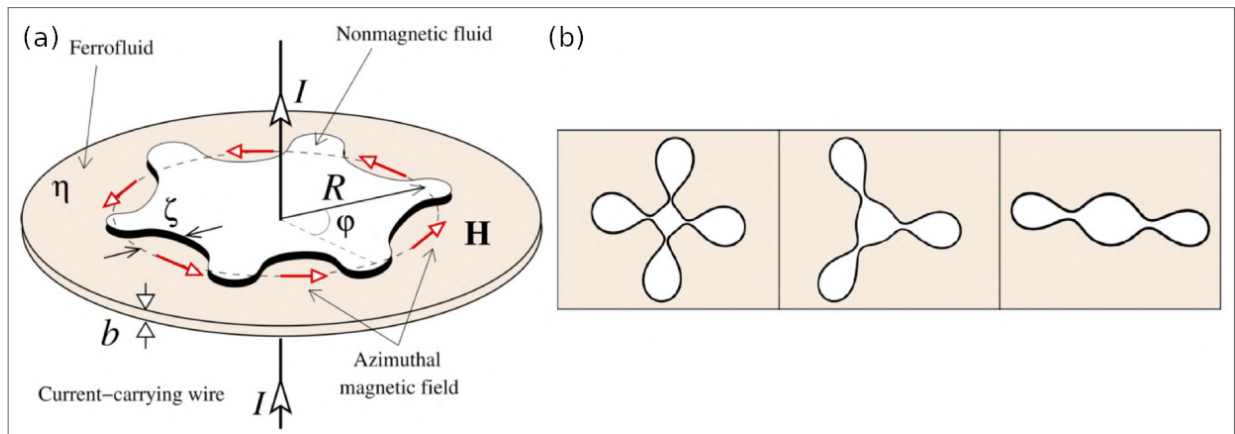
Figura 18 – (a) Figura esquemática de uma célula de Hele-Shaw com um ferrofluido, submetida a um campo magnético radial, gerado por um par de bobinas de anti-Helmholtz, que possuem correntes de mesma intensidade, mas sentidos opostos. (b) Padrões típicos da célula de Hele-Shaw esquematizada em (a).



Fonte: (MIRANDA, 2019)

na Fig. 19(a), a ação do campo azimuthal se torna desestabilizante, produzindo os padrões ilustrados na Fig. 19(b).

Figura 19 – (a) Figura esquemática de uma célula de Hele-Shaw com um fluido não magnético embebido em um ferrofluido, submetida a um campo magnético azimuthal, gerado por um fio que passa no centro da célula com corrente I . (b) Padrões típicos da célula de Hele-Shaw esquematizada em (a).



Fonte: (MIRANDA, 2019)

Deve-se ressaltar que o estudo de tais instabilidades não é apenas um mero exercício teórico. Existem diversas aplicações interessantes em sistemas de matéria mole (*soft matter*), como manipulação magnética de micro-nadadores (*microswimmers*) de formato programável, micro-robôs e magnetolipossomos gigantes (SANDRE et al., 2000; LUM et al., 2016; XU et al.,

2019; GILTINAN et al., 2020), bem como aplicações biomédicas, como o uso de campos magnéticos para deposição localizada de substâncias químicas e biológicas (NELSON; KALIAKATSOS; ABBOTT, 2010).

No quarto capítulo desta dissertação, estudamos como uma gota de ferrofluido no centro de uma célula de Hele-Shaw se comporta na presença de um campo magnético cruzado, produzido pela combinação do campo radial gerado por um par de bobinas de anti-Helmholtz [Fig. 18], com o campo azimutal, proveniente de uma corrente que passa pelo centro da célula [Fig. 19]. Inspirados no estudo de Yu e Christov (YU; CHRISTOV, 2021), analisamos a possibilidade e condições para uma dada interface atingir um estado estacionário, rotacionando sem mudar sua forma, bem como as influências morfológicas, em estágios não lineares da evolução, da variação do contraste de viscosidade e da susceptibilidade magnética do ferrofluido (OLIVEIRA et al., 2021).

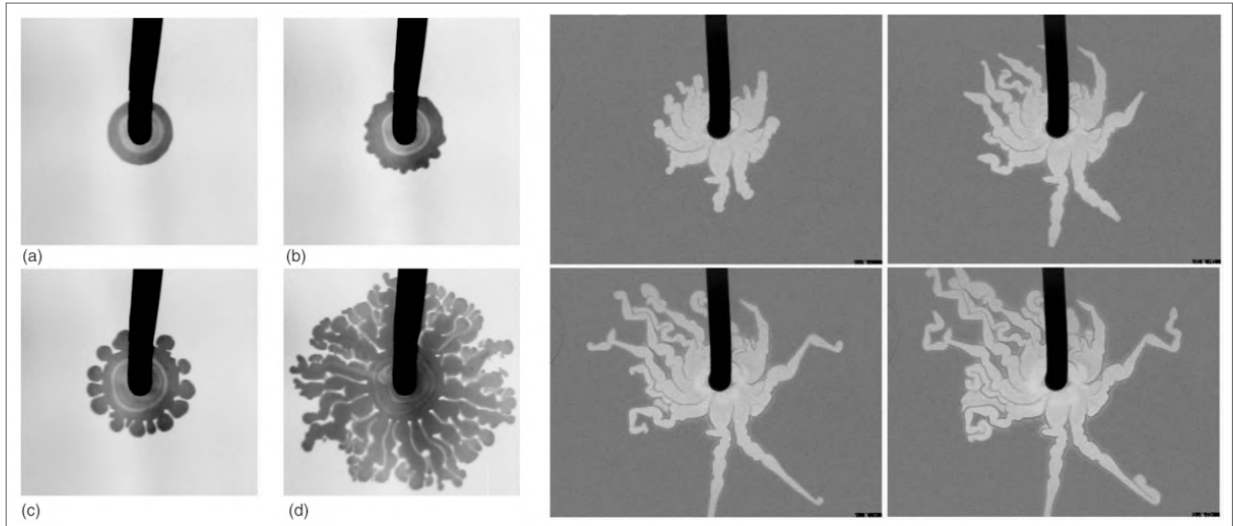
1.5 INTERFACES ELÁSTICAS

Para certos tipos de fluidos em células de Hele-Shaw, pode-se induzir uma reação química na interface fluido-fluido tal que uma fina camada elástica, similar a um gel, se forme, impedindo o contato direto entre os fluidos e formando o que chamamos de uma interface elástica. A reação ocorre quando um fluido toca o outro pela primeira vez, de forma que o tempo característico da reação é muito menor que o tempo típico para a formação dos padrões, levando a interface elástica a se formar rapidamente, impedindo o contato direto entre os fluidos. Consequentemente, a tensão superficial não influencia na morfologia do sistema e os fluidos não se misturam. Considera-se que deformações na interface elástica quebram seu arranjo molecular homogêneo, resultando em um enfraquecimento local da rigidez (*bending rigidity*), de forma que a rigidez depende da curvatura da interface. Tal reação química permite, no contexto de células de Hele-Shaw radiais, introduzir instabilidades mesmo para fluidos de mesma viscosidade (PODGORSKI et al., 2007; HE; LOWENGRUB; BELMONTE, 2009).

Com tal interface, temos na geometria radial de Hele-Shaw a formação de estruturas similares a cogumelos e tentáculos [Fig. 20], que são muito diferentes dos padrões tradicionais em fluxos de Hele-Shaw, nos quais ocorre a clássica ramificação de dedos viscosos [Fig. 3]. Por sua vez, em células retangulares, a ponta do dedo viscoso toma um perfil plano perpendicular ao fluxo.

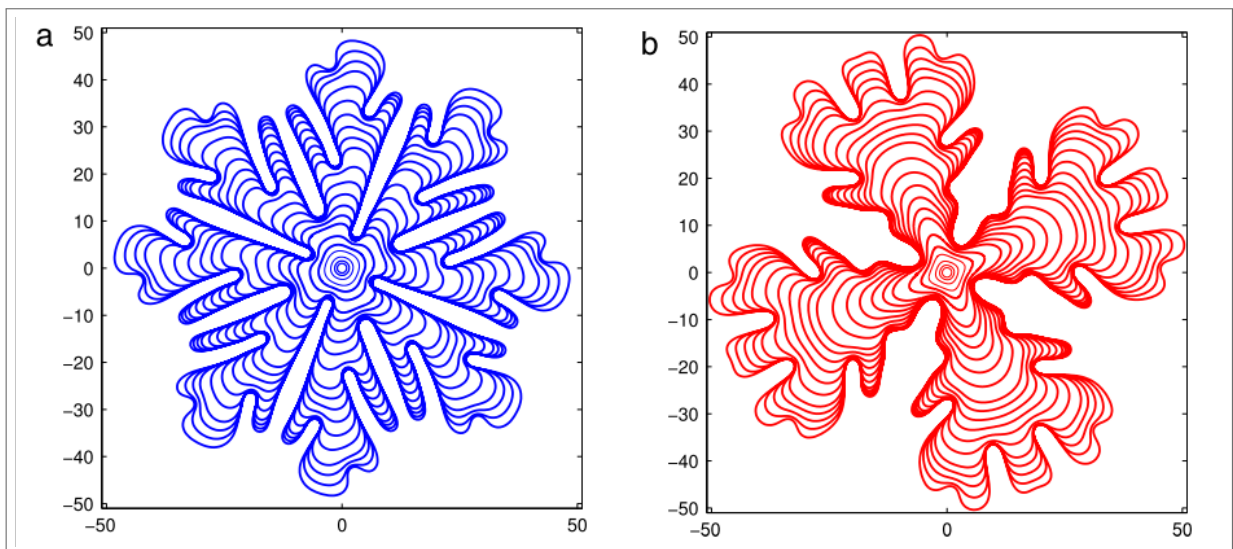
Investigações teóricas de análise de estabilidade linear (*linear stability analysis*) (HE; LOWEN-

Figura 20 – Experimento ilustrando instabilidades de dedos viscosos para células de Hele-Shaw cujos fluidos formam uma interface elástica. As quatro imagens da esquerda ilustram a evolução da injeção de uma solução iônica numa solução aquosa, enquanto as da direita, a solução aquosa é injetada na solução iônica.



Fonte: (PODGORSKI et al., 2007)

Figura 21 – Simulação numérica fortemente não linear para uma célula de Hele-Shaw radial com interface elástica. Na figura em azul (vermelho), desconsidera-se (considera-se) a variação da rigidez com a curvatura.



Fonte: (ZHAO et al., 2016)

GRUB; BELMONTE, 2009) examinaram a estabilidade da interface fluido-fluido, modelando-a como uma fina membrana elástica com rigidez dependente da curvatura, confirmando que há de fato a possibilidade de formação de instabilidades, mesmo para fluidos de mesma viscosidade. Estudos fracamente não lineares (CARVALHO; MIRANDA; GADÊLHA, 2013) e métodos numéricos fortemente não lineares (ZHAO et al., 2016) [Fig. 21], utilizaram o modelo proposto por (HE; LOWENGRUB; BELMONTE, 2009) para estudar diversos aspectos associados à

morfologia da interface. Todos estes estudos consideraram uma célula de Hele-Shaw radial, havendo, assim, uma lacuna na literatura sobre interfaces elásticas em células de Hele-Shaw retangulares, que procuramos começar a preencher no capítulo 5.

1.5.1 Magnetoelasticidade

Outro conjunto de investigações teóricas envolvendo interfaces elásticas é o estudo de problemas envolvendo a combinação de forças magnéticas, hidrodinâmicas e elásticas. Pesquisadores analisaram o desenvolvimento de sistemas com cápsulas de membranas elásticas preenchidas com ferrofluidos, submetidas a um campo magnético externo (NEVEU-PRIN et al., 1993; BACRI et al., 1996; SANDRE et al., 2000; WILHELM; GAZEAU; BACRI, 2005; SERWANE et al., 2016; WISCHNEWSKI; KIERFELD, 2018). Tais experimentos mostraram que o campo magnético alonga a estrutura inicialmente esférica, criando um perfil elipsoidal.

Estudos recentes mostram que uma forma elipsoidal é obtida para campos magnéticos externos baixos e médios e uma forma alongada com pontas cônicas para campos intensos. Estas estruturas são úteis para permitir o ajuste das formas de magnetoliposomos gigantes (SANDRE et al., 2000), bem como para o estudo de propriedades reológicas de células *in vivo* (WILHELM; GAZEAU; BACRI, 2005) e de tecidos biológicos em crescimento (SERWANE et al., 2016).

Em células de Hele-Shaw, a influência de efeitos de interfaces elásticas na formação de padrões de ferrofluidos é um tópico consideravelmente inexplorado. Um estudo recente examinou a formação de padrões de uma gota de ferrofluido com uma interface elástica sujeita a um campo magnético externo radial, levando em conta uma descrição teórica simplificada, na qual a rigidez não depende da curvatura (ANJOS et al., 2019). Outro estudo (LIVERA; MIRANDA, 2020) considerou a dinâmica fracamente não linear em segunda ordem para um campo magnético radial, para ferrofluidos e fluidos magnetoreológicos, considerando uma rigidez dependente da curvatura da interface. Ambos estudos focaram na geometria radial da célula de Hele-Shaw.

No capítulo 5 desta dissertação, motivados pelos resultados estimulantes de estudos anteriores, abordamos o deslocamento de fluidos na célula de Hele-Shaw retangular com interface elástica, na qual um dos fluidos é um ferrofluido. Levamos em conta complicados efeitos de campos de demagnetização, a fim de estudarmos a morfologia causada pela ação conjunta de efeitos de enfraquecimento de curvatura juntamente a efeitos magnéticos de demagnetiza-

ção, através de um esquema perturbativo de modos acoplados em terceira ordem (COUTINHO; MIRANDA, 2020b; COUTINHO; MIRANDA, 2020c).

1.6 LISTA DE PUBLICAÇÕES

Durante o programa de mestrado, nossa pesquisa gerou os seguintes artigos científicos (ver Fig. 22):

- Í. M. Coutinho; J. A. Miranda, *Development of magnetoelastic fingering patterns in a rectangular Hele-Shaw cell*, Phys. Rev. Fluids **5**, 094002 (2020).
- Í. M. Coutinho; J. A. Miranda, *Peak instability in an elastic interface ferrofluid*, Phys. Fluids **32**, 052104 (2020).
- Í. M. Coutinho; J. A. Miranda, *Control of viscous fingering through variable injection rates and time-dependent viscosity fluids: Beyond the linear regime*, Phys. Rev. E **102**, 063102 (2020).
- Í. M. Coutinho; F. M. Rocha; J. A. Miranda, *Viscous normal stresses and finger tip-tripling in radial Hele-Shaw flows*, Phys. Rev. E **104**, 045106 (2021).
- R. M. Oliveira; Í. M. Coutinho; P. H. A. Anjos; J. A. Miranda, *Shape instabilities in confined ferrofluids under crossed magnetic fields*, Phys. Rev. E **104**, 065113 (2021).

Figura 22 – Título e *abstract* dos trabalhos resultantes desta dissertação de mestrado.

Peak instability in an elastic interface ferrofluid Cite as: Phys. Fluids 32, 052104 (2020); doi: 10.1063/5.0007381 Submitted: 11 March 2020 • Accepted: 4 May 2020 • Published Online: 18 May 2020 Írio M. Coutinho¹ and José A. Miranda^{2,3} AFFILIATIONS Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE 50670-901, Brazil ¹vicmanez@gmail.com ²Author to whom correspondence should be addressed: jme@df.ufpe.br ABSTRACT The instability of an elastic interface separating a ferrofluid and a nonmagnetic fluid subjected to an applied magnetic field perpendicular to the initially undisturbed interface is investigated in the effectively two-dimensional environment of a vertical, rectangular Hele-Shaw cell. By using a third-order mode-coupling perturbative scheme, and considering that the elastic interface has a curvature-dependent bending rigidity, the emergence of elastic ferrofluid peaks is detected at the onset of nonlinearities. In this context, the approximate profile of the interface is obtained. It is also shown that the morphology of the resulting peaks is sensitive to changes in a dimensionless magnetoelastic number (relative measure of magnetic and elastic forces), as well as in a bending rigidity fraction parameter, which expresses variations in the bending rigidity with the local interface curvature. Published under license by AIP Publishing. https://doi.org/10.1063/5.0007381 PHYSICAL REVIEW E 102, 063102 (2020)	PHYSICAL REVIEW FLUIDS 5, 094002 (2020) Development of magnetoelastic fingering patterns in a rectangular Hele-Shaw cell Írio M. Coutinho^{1,2} and José A. Miranda^{1,3} Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE 50670-901, Brazil (Received 31 March 2020; accepted 26 August 2020; published 8 September 2020) We study the occurrence of a magnetoelastic fingering instability when a viscous ferrofluid is displaced by a nonmagnetic fluid of negligible viscosity in a horizontal, rectangular Hele-Shaw cell. Interfacial disturbances result from the interplay of viscous, elastic, and magnetic effects when the system is subjected to a uniform magnetic field, applied in the plane of the cell, and perpendicular to the initially flat interface separating the fluids. We approach the problem perturbatively through a third-order mode-coupling theory and investigate the development of interfacial patterns at early nonlinear stages of the flow. A representative collection of possible magnetoelastic fingering structures is presented which differ significantly from the classical Saffman-Taylor fingers that arise in such a rectangular cell setup in the absence of magnetic and elastic effects. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.5.094002 PHYSICAL REVIEW E 104, 045106 (2021)
Control of viscous fingering through variable injection rates and time-dependent viscosity fluids: Beyond the linear regime Írio M. Coutinho¹ and José A. Miranda² Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco 50670-901, Brazil (Received 17 August 2020; accepted 25 November 2020; published 9 December 2020) During the past few years, researchers have been proposing time-dependent injection strategies for stabilizing or manipulating the development of viscous fingering instabilities in radial Hele-Shaw cells. Most of these studies investigate the displacement of Newtonian fluids and are entirely based on linear stability analyses. In this work, linear stability theory and variational calculus are used to determine closed-form expressions for the proper time-dependent injection rates ($Q(t)$) required to either minimize the interface disturbances or to control the number of emerging fingers. However, this is done by considering that the displacing fluid is non-Newtonian and has a time-varying viscosity. Moreover, a perturbative third-order mode-coupling approach is employed to examine the validity and effectiveness of the controlling protocols dictated by these $Q(t)$ beyond the linear regime and at the onset of nonlinearities. DOI: 10.1103/PhysRevE.102.063102 PHYSICAL REVIEW E 104, 065113 (2021)	Viscous normal stresses and fingertip tripling in radial Hele-Shaw flows Írio M. Coutinho,^{1,2} Francisco M. Rocha,^{2,3} and José A. Miranda^{1,4} ¹Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco 50670-901, Brazil ²Aix Marseille University, CNRS, IUSTI, 13453 Marseille, France (Received 19 May 2021; revised 9 August 2021; accepted 12 October 2021; published 21 October 2021) Viscous fingering in radial Hele-Shaw cells is markedly characterized by the occurrence of fingertip splitting, where growing fingered structures bifurcate at their tips, via a tip-doubling process. A much less studied pattern-forming phenomenon, which is also detected in experiments, is the development of fingertip tripling, where a finger divides into three. We investigate the problem theoretically, and employ a third-order perturbative mode-coupling scheme seeking to detect the onset of tip-tripling instabilities. Contrary to most existing theoretical studies of the viscous fingering instability, our theoretical description accounts for the effects of viscous normal stresses at the fluid-fluid interface. We show that accounting for such stresses allows one to capture the emergence of tip-tripling events at weakly nonlinear stages of the flow. Sensitivity of fingertip-tripling events to changes in the capillary number and in the viscosity contrast is also examined. DOI: 10.1103/PhysRevE.104.045106
Shape instabilities in confined ferrofluids under crossed magnetic fields Rafael M. Oliveira,^{1,2} Írio M. Coutinho,^{2,3} Pedro H. A. Anjos,^{3,4} and José A. Miranda^{2,4} ¹Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 22451-900 Brazil ²Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco 50670-901, Brazil ³Department of Applied Mathematics, Illinois Institute of Technology, Chicago, Illinois 60616, USA (Received 14 September 2021; accepted 16 December 2021; published 30 December 2021) We analyze the morphology and dynamic behavior of the interface separating a ferrofluid and a nonmagnetic fluid in a Hele-Shaw cell, when crossed radial and azimuthal magnetic fields are applied. In addition to inducing the formation of a variety of eye-catching, complex interfacial structures, the action of the crossed fields makes the deformed ferrofluid droplet to rotate. Numerical simulations and perturbative mode-coupling theory are employed to look into early linear, intermediate weakly nonlinear, and fully nonlinear dynamic regimes of the pattern-forming process. We investigate how the system responds to variations in the viscosity difference between the fluids, the magnetic susceptibility of the ferrofluid, the effects of surface tension, and in the relative strength between radial and azimuthal applied magnetic fields. The role played by random perturbations at the initial conditions in determining the ultimate shape and dynamic stability of the spinning ferrofluid patterns is also studied. DOI: 10.1103/PhysRevE.104.065113	

Fonte: (COUTINHO, 2021)

2 CONTROLE DE DEDOS VISCOSOS ATRAVÉS DE TAXAS DE INJEÇÕES VARIÁVEIS E FLUIDOS COM VISCOSIDADE DEPENDENTE DO TEMPO

2.1 CONTROLE DE DEDOS VISCOSOS

Como vimos na secção (1.2), é de grande interesse desenvolver métodos que possibilitem o controle dos dedos viscosos. Para isso, empregamos neste capítulo o esquema variacional proposto por (DIAS et al., 2012) generalizado para fluidos não newtonianos cujas viscosidades variam no tempo. Seguimos os passos de (BEESON-JONES; WOODS, 2017) com uma análise linear extensiva, obtendo uma equação diferencial que governa a taxa de injeção ótima que minimiza as instabilidades de Saffman-Taylor.

Ainda na análise linear, vamos além do que foi feito por DIAS et al. e BEESON-JONES; WOODS, obtendo uma expressão fechada para a injeção ótima. Também estendemos o trabalho de (LI et al., 2009), obtendo uma taxa de injeção que permite selecionar a quantidade de dedos viscosos desejadas, para fluidos com viscosidade variando no tempo.

Temos como foco ir além do regime linear, com um esquema perturbativo de modos acoplados em terceira ordem, procurando demonstrar a robustez destes métodos no regime fracamente não linear e explorando efeitos de ruídos de fundo.

2.2 EQUAÇÕES DO FLUXO DE HELE-SHAW E ESQUEMA DE MODOS ACOPLADOS

Nosso sistema de interesse é constituído por dois fluidos imiscíveis e incompressíveis com fluxo radial na célula de Hele-Shaw. Temos um fluido não newtoniano de viscosidade $\eta_1 = \eta_1(t)$ dependente do tempo, sendo injetado no centro da célula que contém fluido de viscosidade constante $\eta_2 > \eta_1(t)$. A taxa de injeção é dada por $Q = Q(t)$ e a tensão superficial σ é presente na interface fluido-fluido. Dada a diferença de viscosidade, são formadas as instabilidades de Saffman-Taylor, deformando a interface.

Buscamos obter uma equação do movimento em terceira ordem para a interface através de uma teoria de perturbação, expandindo a perturbação em série de Fourier. Seja

$$R(t) = \sqrt{R_0^2 + \frac{1}{\pi} \int_0^t Q(t') dt'} \quad (2.1)$$

o raio não perturbado dependente do tempo. R_0 denota o raio em $t = 0$. Adicionamos a este

uma perturbação $\zeta(\varphi, t) \ll R$, tal que

$$\mathcal{R}(\varphi, t) = R(t) + \zeta(\varphi, t) \quad (2.2)$$

representa a interface fluido-fluido deformada e φ denota o ângulo azimutal. Na Eq. (2.2), podemos escrever a perturbação como

$$\zeta(\varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n(t) \exp(in\varphi), \quad (2.3)$$

onde $\zeta_n(t)$ representa os modos de Fourier complexos. Note que o modo $n = 0$ é independente de φ , tal que este está associado à conservação de área da interface perturbada. Sendo assim, podemos escrevê-lo como $\zeta_0 = -(1/2R) \sum_{n \neq 0} |\zeta_n(t)|^2$, de acordo com (MIRANDA; WIDOM, 1998b).

Dado que o espaçamento b entre as placas de uma célula de Hele-Shaw é consideravelmente pequeno, a dinâmica dos fluidos presente é efetivamente bidimensional, tal que, seguindo os passos de (SAFFMAN; TAYLOR, 1958; MIRANDA; WIDOM, 1998b), descrevemos o sistema com a lei de Darcy, dada por

$$\mathbf{v}_j = -\frac{b^2}{12\eta_j} \nabla p_j. \quad (2.4)$$

Também temos a condição de incompressibilidade dos fluidos,

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0, \quad (2.5)$$

na qual $j = 1$ caracteriza o fluido não newtoniano injetado, e $j = 2$ o newtoniano deslocado. Expressimos em termos de coordenadas polares tanto a pressão $p_j = p_j(r, \varphi)$, quanto as velocidades dos fluidos $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j(r, \varphi)$. A natureza irrotacional do fluxo ($\nabla \times \mathbf{v}_j = 0$) permite definir um potencial escalar de velocidade ϕ_j , tal que $\mathbf{v}_j = -\nabla \phi_j$. Sendo assim, com a Eq. (2.5) verificamos que os potenciais obedecem à equação de Laplace e, para a geometria radial, podemos escrever

$$\phi_j = \phi_j^0 + \sum_{n \neq 0} \phi_{jn}(t) \left(\frac{r}{R}\right)^{(-1)^{(j+1)|n|}} \exp(in\varphi), \quad (2.6)$$

onde

$$\phi_j^0 = -\frac{Q}{2\pi} \log\left(\frac{r}{R}\right) + D_j \quad (2.7)$$

são os potenciais de velocidade para o fluxo puramente radial, e D_j é independente de r e φ .

Munidos de tais expressões, voltamos nossa atenção para a Eq. (2.4), de forma que a escrevemos em termos dos potenciais ϕ_j para a interface $r = \mathcal{R}$, obtendo

$$A \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) - \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) = -\frac{b^2(p_1 - p_2)}{12(\eta_1 + \eta_2)}, \quad (2.8)$$

onde

$$A = \frac{\eta_2 - \eta_1(t)}{\eta_2 + \eta_1(t)} = \frac{1 - V}{1 + V} \quad (2.9)$$

é o contraste de viscosidade e, $V = V(t) = \eta_1(t)/\eta_2$ o raio entre as viscosidades. Com intuito de obter a equação do movimento para $\zeta_n(t)$, além de substituir as Eqs. (2.6) e (2.7) na Eq. (2.8), precisamos obter os potenciais ϕ_{jn} em termos de $\zeta_n(t)$ e lidar com o termo de diferença de pressão $p_1 - p_2$.

Começando pelo termo de pressão, tomamos a condição de contorno de Young-Laplace para a pressão presente em (HOMSY, 1987), dada por

$$p_1 - p_2 = \sigma \kappa, \quad (2.10)$$

onde

$$\kappa = \frac{\mathcal{R}^2 + 2 \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varphi} \right)^2 - \mathcal{R} \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial \varphi^2}}{\left[\mathcal{R}^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varphi} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (2.11)$$

descreve a curvatura da interface no plano da célula. Com a Eq. (2.2), temos a curvatura em função da perturbação e, em terceira ordem, segue que

$$\begin{aligned} \kappa = & \left\{ \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2} \left(\zeta + \frac{d^2 \zeta}{d\varphi^2} \right) \right. \\ & + \frac{1}{R^3} \left[\zeta^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\zeta}{d\varphi} \right)^2 + 2\zeta \frac{d^2 \zeta}{d\varphi^2} \right] \\ & \left. - \frac{1}{R^4} \left[\zeta^3 + \frac{3}{2} \zeta \left(\frac{d\zeta}{d\varphi} \right)^2 + 3\zeta^2 \frac{d^2 \zeta}{d\varphi^2} - \frac{3}{2} \frac{d^2 \zeta}{d\varphi^2} \left(\frac{d\zeta}{d\varphi} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Tendo resolvido uma parte do problema, procuramos exprimir os potenciais ϕ_{jn} em termos de $\zeta_n(t)$. Fazamos isso através da condição de contorno cinemática (HOMSY, 1987),

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \varphi} \frac{\partial \phi_j}{\partial \varphi} - \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \right]_{r=\mathcal{R}}. \quad (2.13)$$

Similarmente ao que foi feito por (MIRANDA; WIDOM, 1998b), expandimos a perturbação ζ até terceira ordem, tomamos a transformada de Fourier e resolvemos a equação para obter ϕ_{jn} consistentemente até terceira ordem. Tal procedimento é direto, mas extremamente longo. As expressões para ϕ_{1n} e ϕ_{2n} estão presentes no Apêndice A, nas Eqs. (A.1) e (A.2).

Finalmente, podemos tomar as equações Eqs. (A.1) e (A.2) juntamente com a condição de pressão dada pelas Eqs. (2.10) e (2.12), e substituí-las na Eq. (2.8), obtendo

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_n &= \lambda(n) \zeta_n + \sum_{p \neq 0} \left\{ F(n, p) \zeta_p \zeta_{n-p} + G(n, p) \dot{\zeta}_p \zeta_{n-p} \right\} \\ &+ \sum_{p, q \neq 0} \left\{ H(n, p, q) \zeta_p \zeta_{q-p} \zeta_{n-q} + I(n, p, q) \dot{\zeta}_p \zeta_{q-p} \zeta_{n-q} \right. \\ &\left. + J(n, p, q) \zeta_p \zeta_q \zeta_{n-p-q} + K(n, p, q) \dot{\zeta}_p \zeta_q \zeta_{n-p-q} \right\},\end{aligned}\quad (2.14)$$

onde o ponto representa a derivada total no tempo e

$$\lambda(n) = \frac{Q}{2\pi R^2} (A|n| - 1) - \frac{\gamma}{R^3} |n|(n^2 - 1) \quad (2.15)$$

é a taxa de crescimento linear, com $\gamma = \sigma b^2 / [12(\eta_1 + \eta_2)]$. As longas expressões para F , G , H , I , J e K são dadas no Apêndice A, nas Eqs. (A.3)-(A.10). A fim de obtermos uma expressão consistente até terceira ordem, precisamos substituir $\dot{\zeta}_p$ por $\lambda(p)\zeta_p + O(\zeta^2)$, tal que

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_n &= \lambda(n) \zeta_n + \sum_{p \neq 0} \left\{ F(n, p) + \lambda(p)G(n, p) \right\} \zeta_p \zeta_{n-p} \\ &+ \sum_{p, q \neq 0} \left\{ \left[H(n, p, q) + \lambda(p)I(n, p, q) \right. \right. \\ &+ \left. \left. G(n, q) \left(F(q, p) + \lambda(p)G(q, p) \right) \right] \zeta_p \zeta_{q-p} \zeta_{n-q} \right. \\ &\left. + \left[J(n, p, q) + \lambda(p)K(n, p, q) \right] \zeta_p \zeta_q \zeta_{n-p-q} \right\}.\end{aligned}\quad (2.16)$$

A equação (2.16) é a equação de modos acoplados em terceira ordem que descreve a interface do problema de Saffman-Taylor para a célula de Hele-Shaw radial. Tal equação é consistente com os resultados de (PATERSON, 1981; MIRANDA; WIDOM, 1998b), que deduziram esta até primeira e segunda ordem, respectivamente.

2.3 MINIMIZANDO O CRESCIMENTO DE DEDOS VISCOSOS

2.3.1 Análise Linear

Considere que procuramos injetar um volume fixo $b\pi(R_f^2 - R_0^2)$ de fluido num intervalo de tempo $0 \leq t \leq t_f$. Procuramos empregar o esquema variacional feito em (DIAS et al., 2012; BEESON-JONES; WOODS, 2017) a fim de encontrar o $Q(t)$ ótimo que leve à minimização das instabilidades na interface que separa os fluidos. Para facilitar a conexão com o trabalho

de (BEESON-JONES; WOODS, 2017), adimensionalizamos nossa equação do movimento, re-escalando os tempos pelo tempo final t_f e comprimentos pelo raio final não perturbado R_f . Desta forma, taxa de crescimento é dada por

$$\lambda(n) = \frac{\dot{R}}{R} \left(\frac{1-V}{1+V} |n| - 1 \right) - \frac{\tau}{R^3(1+V)} |n|(n^2 - 1), \quad (2.17)$$

onde

$$\dot{R} = \frac{Q(t)}{2\pi R} \quad (2.18)$$

é a velocidade radial da interface não perturbada em expansão e

$$\tau = \frac{\sigma t_f}{12\eta_2 R_f^3} \quad (2.19)$$

o parâmetro adimensional de tensão superficial efetiva.

É notável que o esquema perturbativo em primeira ordem tem simples solução. Ao observar a Eq. (2.16) apenas no esquema linear, vemos que a perturbação é dada por

$$\zeta_n(t) = \zeta_n(0) \exp[I(n, R, \dot{R})], \quad (2.20)$$

com $\zeta_n(0)$ sendo a amplitude da interface em $t = 0$ e

$$I(n, R, \dot{R}) = \int_0^{t_f=1} \lambda(n, R, \dot{R}) dt. \quad (2.21)$$

Notamos então que, para $\int_0^{t_f} \lambda(n) dt' > 0$, a perturbação cresce além de sua amplitude inicial e as instabilidades de dedos viscosos se formarão. Para $\lambda(n) > 0$, temos que o modo n é dito instável e, para $\lambda(n) < 0$, estável. A taxa de crescimento linear tem dependência temporal e, ao evoluir no tempo, um modo que era estável pode vir a se tornar instável. Logo, podemos definir uma série de raios críticos $R_c(n)$ para os quais um dado modo n se torna instável, obtidos através da condição $\lambda(n) = 0$.

Ao analisarmos a Eq. (2.17), vemos que quanto maior o contraste de viscosidade, mais perturbado será o sistema, como discutido na introdução, secção 1.2. Também é visível a tendência estabilizante da tensão superficial. Além disso, observamos a existência de um modo de maior taxa de crescimento $n_{\max}$, que pode ser calculado através de

$$\left. \frac{d\lambda}{dn}(n, R, \dot{R}) \right|_{n=n_{\max}} = 0. \quad (2.22)$$

Com tais informações, procuramos minimizar as amplitudes. Focamos em minimizar a integral

$$I(n_{\max}, R, \dot{R}) = \int_0^1 \lambda(R, \dot{R}) dt. \quad (2.23)$$

Note que $\lambda(n_{\max}, R, \dot{R}) = \lambda(R, \dot{R})$ depende apenas de R e $\dot{R}$. Logo, podemos interpretar I como a ação do sistema, tal que a taxa de crescimento λ se torna a Lagrangiana do sistema. Aplicamos a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \dot{R}} \right) = \frac{\partial \lambda}{\partial R}, \quad (2.24)$$

com as condições de contorno $R(t=0) = R_0$ e $R(t=t_f) = R_f = 1$. Note que na Eq. (2.24), $\lambda = \lambda(n_{\max})$. Desta forma, fazendo as devidas substituições, obtemos a equação diferencial que descreve o raio ótimo $R(t)$, do qual podemos diretamente com a Eq. (2.18) obter a taxa de injeção $Q(t)$ que minimiza as amplitudes lineares da Eq. (2.20).

Substituindo a Eq. (2.17) na equação de Euler-Lagrange para $n = n_{\max}$, ao considerarmos a duração do fluxo t_f pequena, ou a tensão superficial σ relativamente fraca, de forma que $\Lambda = [(1-V)/2\tau] \gg 1$ para $V \sim O(0.1)$, obtemos a equação

$$(5+V)\dot{V}\dot{R} - (1-V^2)\ddot{R} = 0, \quad (2.25)$$

cujas solução é dada por

$$\dot{R}(t) = (1-R_0)\Omega \frac{[1+V]^2}{[1-V]^3}, \quad (2.26)$$

onde

$$\Omega = \left(\int_0^1 \frac{[1+V]^2}{[1-V]^3} dt \right)^{-1}. \quad (2.27)$$

O trabalho de (BEESON-JONES; WOODS, 2017) lida diretamente com este mesmo esquema variacional, obtendo as Eqs. (2.26) e (2.27). É assumido um perfil de variação no tempo da viscosidade de acordo com (MAKADIA; SIEGEL, 2011), da forma

$$V = V(t) = V_0 + (V_\infty - V_0)[1 - \exp(-\theta t)], \quad (2.28)$$

onde $V_0 = V(t=0)$ é o raio entre as viscosidades no tempo inicial, $V_\infty = V(t \rightarrow \infty)$ é o comportamento de $V(t)$ para tempos assintóticos e θ a proporção entre a duração total da injeção t_f e o tempo característico para a mudança da viscosidade ou gelificação do fluido. Ambos V_0 e V_∞ são independentes do tempo. Experimentalmente, pode-se ajustar a variação da viscosidade a partir da liberação de polímeros micro-encapsulados, cuja concentração será diretamente proporcional à viscosidade do fluido. Escolhemos as viscosidades de tal maneira a V_0 ser sempre menor que V_∞ , a fim de que a viscosidade aumente no tempo, diminuindo o contraste de viscosidade e inibindo as instabilidades de Saffman-Taylor.

Avançamos além do trabalho de (BEESON-JONES; WOODS, 2017), obtendo uma solução explícita para o perfil de viscosidade $V = V(t)$ apresentado, substituindo a Eq. (2.28) em (2.27), tal que

$$\Omega = \frac{(V_\infty - 1)^3 \theta}{f(\beta) - f(V_0 - 1)}, \quad (2.29)$$

onde

$$f(x) = \frac{2(V_0 - V_\infty)[V_0 - V_\infty - 2x(1 + V_\infty)]}{x^2} - (1 + V_\infty)^2 \log x, \quad (2.30)$$

$$\alpha = \alpha(t) = V_0 - V_\infty + (V_\infty - 1) \exp(\theta t), \quad (2.31)$$

e $\beta = \alpha(t = 1) = V_0 - V_\infty + (V_\infty - 1) \exp \theta$. Considerando as Eqs. (2.29)-(2.31), a integração da Eq. (2.26) produz

$$R(t) = 1 - \frac{(1 - R_0)[f(\beta) - f(\alpha)]}{f(\beta) - f(V_0 - 1)}. \quad (2.32)$$

Finalmente, combinando as Eqs. (2.18), (2.26) e (2.32), obtemos

$$Q(t) = 2\pi \frac{(1 - R_0)(V_\infty - 1)^3 \theta}{[f(\beta) - f(V_0 - 1)]^2} \left(\frac{[1 + V]^2}{[1 - V]^3} \right) [(1 - R_0)f(\alpha) + R_0f(\beta) - f(V_0 - 1)], \quad (2.33)$$

com $V = V(t)$. Note que para o caso de viscosidades constantes $\theta = 0$, $Q(t)$, se reduz precisamente a $Q(t) = 2\pi(1 - R_0)[R_0 + (1 - R_0)]$, que é o resultado obtido em (DIAS et al., 2012), utilizado no experimento presente na Fig. 8 do capítulo introdutório.

2.3.2 Além da análise linear: A análise fracamente não linear

Voltamos nossa atenção para a equação (2.16) em sua forma completa, ou seja, até terceira ordem em ζ , procurando verificar a robustez dos resultados obtidos na secção (2.3.1). Começamos reescrevendo a equação (2.3) em termos apenas de amplitudes senos e cossenos reais,

$$\zeta(\varphi, t) = \zeta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(t) \cos n\varphi + b_n(t) \sin n\varphi], \quad (2.34)$$

onde $a_n(t) = \zeta_n(t) + \zeta_{-n}(t)$ e $b_n(t) = i[\zeta_n(t) - \zeta_{-n}(t)]$ são reais. Como vimos no texto que aparece após a equação (2.3), o modo $n = 0$ remete à conservação de massa, sendo escrito como

$$\zeta_0 = -\frac{1}{4R} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2(t) + b_n^2(t)]. \quad (2.35)$$

Procuramos resolver numericamente o sistema de equações diferenciais acopladas para um número finito de modos de Fourier $a_n(t)$ e $b_n(t)$, cujas expressões descrevendo suas evoluções temporais se encontram no Apêndice B, para um número arbitrário de modos.

De acordo com (MIRANDA; WIDOM, 1998b), podemos descrever o comportamento da evolução da interface assumindo a presença de ruídos de fundos constantes de baixa intensidade, de forma que cada modo de Fourier n será perturbado com uma fase complexa aleatória $\zeta_n(0)$, tal que $|\zeta_n(0)|$ seja igual para todos os modos. Além disso, consideramos que um dado modo n só terá a variação no tempo de sua perturbação ζ_n ao atingir o raio crítico $R_c(n)$, conforme descrito no parágrafo que precede a equação (2.22).

Sendo assim, todas interfaces presentes neste capítulo levam em conta os modos $2 \leq n \leq 20$, dado que o modo $n = 0$ é escrito em função dos outros e o modo $n = 1$ é sempre estável ou marginal, isto é, $\lambda(n = 1) \leq 0$, não influenciando na dinâmica. A fim de nos mantermos no regime perturbativo, duas condições são impostas, sendo a primeira delas que $|\zeta_n(t)| \ll R(t)$.

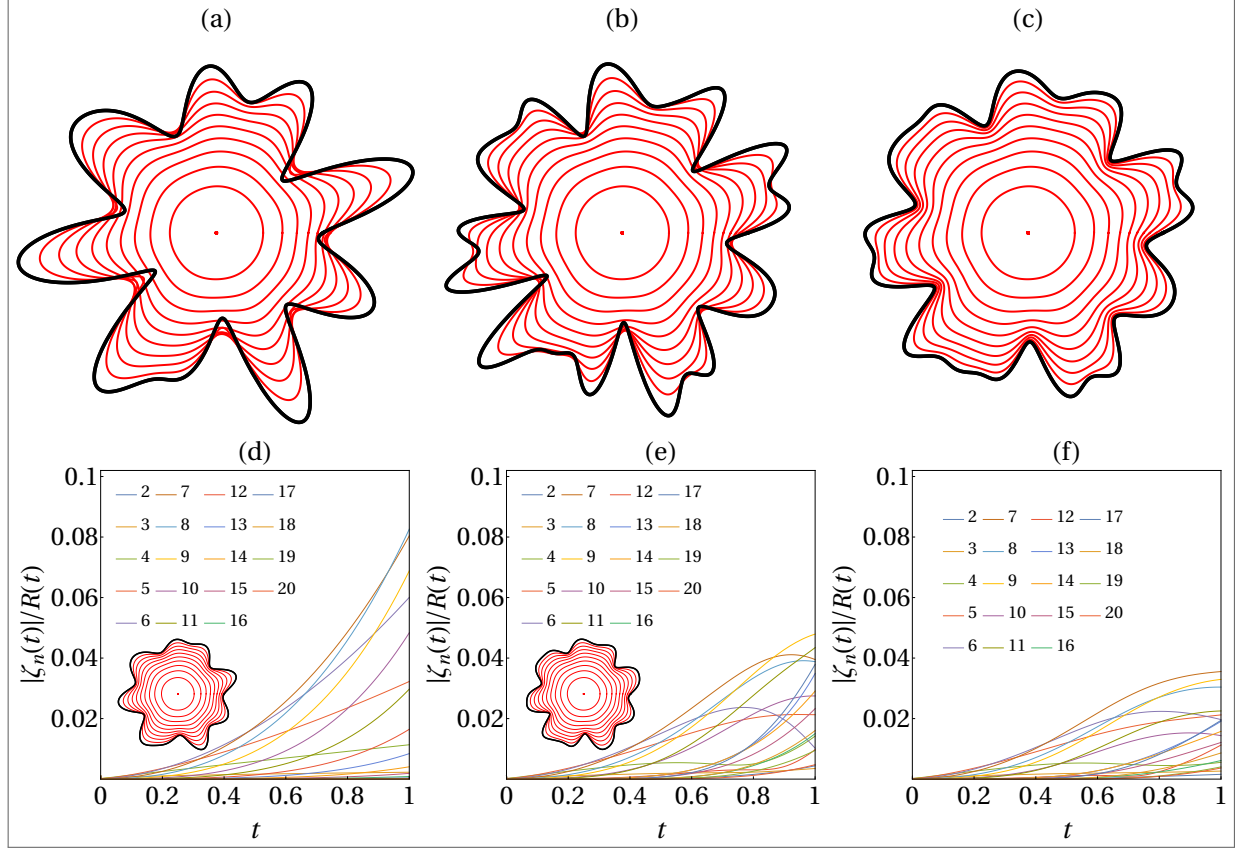
A outra condição impõe que, ao representar a evolução de uma interface graficamente, esta deve ter seu tempo máximo limitado pelo momento em que duas interfaces sucessivas se toquem, não permitindo que essas se cruzem. Tal cruzamento não é verificado em experimentos (PATERSON, 1981; HOMSY, 1987; CHEN, 1987), então esta ocorrência no método perturbativo impõe um limite superior para o tempo máximo. Mais formalmente, temos que

$$\left[\frac{d\mathcal{R}}{dt} \right]_{t=t_f} = 0. \quad (2.36)$$

Argumentamos agora a necessidade de uma análise até a terceira ordem, fazendo uma comparação entre as evoluções das interfaces de primeira, segunda e terceira ordem, na Fig. 23. Em tal figura, temos que a injeção de fluido é feita numa taxa constante e ambos fluidos têm viscosidade fixa. Na primeira linha da Fig. 23, temos a evolução temporal da interface para $0 \leq t \leq 1$, em (a) primeira, (b) segunda e (c) terceira ordem. Observe que os padrões da Fig. 23 assemelham-se ao início da evolução do padrão da Fig. 3(a) e a interface da Fig. 8(a), ambas da introdução, com os de segunda e terceira ordem prevendo a bifurcação dos dedos.

Para reforçar nossa análise, usamos parâmetros consistentes com um clássico experimento da literatura, presente em (PATERSON, 1981), no qual é considerada a injeção de ar [$\eta_1 \approx 0$], numa célula de espessura $b = 0.15$ cm preenchida com glicerina [$\eta_2 \approx 5.21$ g/(cm s)] a uma taxa de injeção constante de $Q = 9.3$ cm²/s. A tensão superficial na interface é de $\sigma = 63$ dina/cm. Adicionalmente, temos o raio inicial da interface dado por $R_0 = 0.05$ cm, com a norma da amplitude de ruído sendo $|\zeta_n(0)| = R_0/500$.

Figura 23 – Evolução dos padrões de dedos viscosos para dois fluidos de viscosidade constante ao resolver a Eq. (2.16) em (a) primeira, (b) segunda e (c) terceira ordem, para $0 \leq t \leq t_f$. São incluídos os modos $2 \leq n \leq 20$. Evolução temporal das amplitudes de perturbação escalonadas $|\zeta_n(t)|/R(t)$ em (d) primeira, (e) segunda e (f) terceira ordem. O *inset* em (d) [(e)] mostra a evolução da interface de primeira [segunda] ordem para $t = 0.73$.



Fonte: (COUTINHO; MIRANDA, 2020a)

A evolução das interfaces presentes na Fig. 23 ocorre para $R_0 \leq R(t) \leq R_f$ e $0 \leq t \leq t_f$, para $R_f = 11.012$ cm e $t_f = 41$ s. Dada nossa adimensionalização de comprimentos por R_f e tempos por t_f , os parâmetros adimensionais se tornam $R_f = 1$, $R_0 = 0.0045$ e $t_f = 1$. Por fim, a tensão superficial efetiva presente na Eq. (2.19) é dada por $\tau = 6.96 \times 10^{-4}$ e, como em (BEESON-JONES; WOODS, 2017), tomamos $V_0 = 0$ e $V_\infty = 0.5$.

Adicionalmente, as Figs. 23(d), 23(e), 23(f) mostram as amplitudes de perturbação reescaladas $|\zeta_n(t)|/R(t)$, onde $|\zeta_n(t)| = \sqrt{a_n^2(t) + b_n^2(t)}/2$ para todos os modos $2 \leq n \leq 20$ participantes. Os *insets* nas Figs. 23(d) e 23(e) representam respectivamente as interfaces das Figs. 23(a) e 23(b) para um dado tempo $t = 0.73$ que obedece a condição imposta pela Eq. (2.36).

Como vimos na introdução desta dissertação, experimentos para o caso em que ambos Q e η_j são constantes, temos o crescimento dos dedos em um formato que lembra um catavento e tem suas pontas ramificadas (PATERSON, 1981; HOMSY, 1987; CHEN, 1989; MIRANDA; WI-

DOM, 1998b). Observamos que a Fig. 23(a), de primeira ordem, não apresenta as clássicas características morfológicas da instabilidade de Saffman-Taylor, como a ramificação dos dedos viscosos, e continuam se alongando, mantendo um perfil fino. Ao olharmos a Fig. 23(d), nota-se que o rápido crescimento de todos os modos com caráter exponencial. Além disso, a interface de primeira ordem claramente quebra a condição imposta pela Eq. (2.36), que se refere ao cruzamento de interfaces sucessivas, que começam a ocorrer em $t = 0.73 < t_f$.

Agora, focamos nossa atenção na Fig. 23(b), que se refere à segunda ordem. Aqui já observamos dedos mais largos e evidências de bifurcação dos dedos viscosos antes do cruzamento entre as interfaces sucessivas ocorrerem, de acordo com experimentos. Também é evidente a atenuação das amplitudes dos modos de Fourier na Fig 23(e), dado o acoplamento dos modos em segunda ordem, um efeito puramente não linear. Embora tenhamos uma descrição mais realista dos experimentos, tal ordem de perturbação ainda não é suficiente para que não ocorra o cruzamento de interfaces em $t = 0.73$, sugerindo a necessidade de uma ordem de perturbação superior.

Assim, para obtermos uma descrição realística do fenômeno, usamos a terceira ordem, presente na Fig. 23(c). Note o alargamento dos dedos, bem como a abundante presença de ramificações nas pontas destes. Não há cruzamento de interfaces sucessivas para $t = t_f$ e como vemos na Fig. 23(f), todas as amplitudes dos modos são ainda mais atenuadas, obedecendo à condição $|\zeta_n| \ll R$. Tal diminuição do crescimento se dá pelas contribuições não lineares do acoplamento de modos em terceira ordem. Desta forma, todas interfaces presentes nesta dissertação diante deste ponto levam em conta a Eq. (2.16) em sua forma completa de terceira ordem.

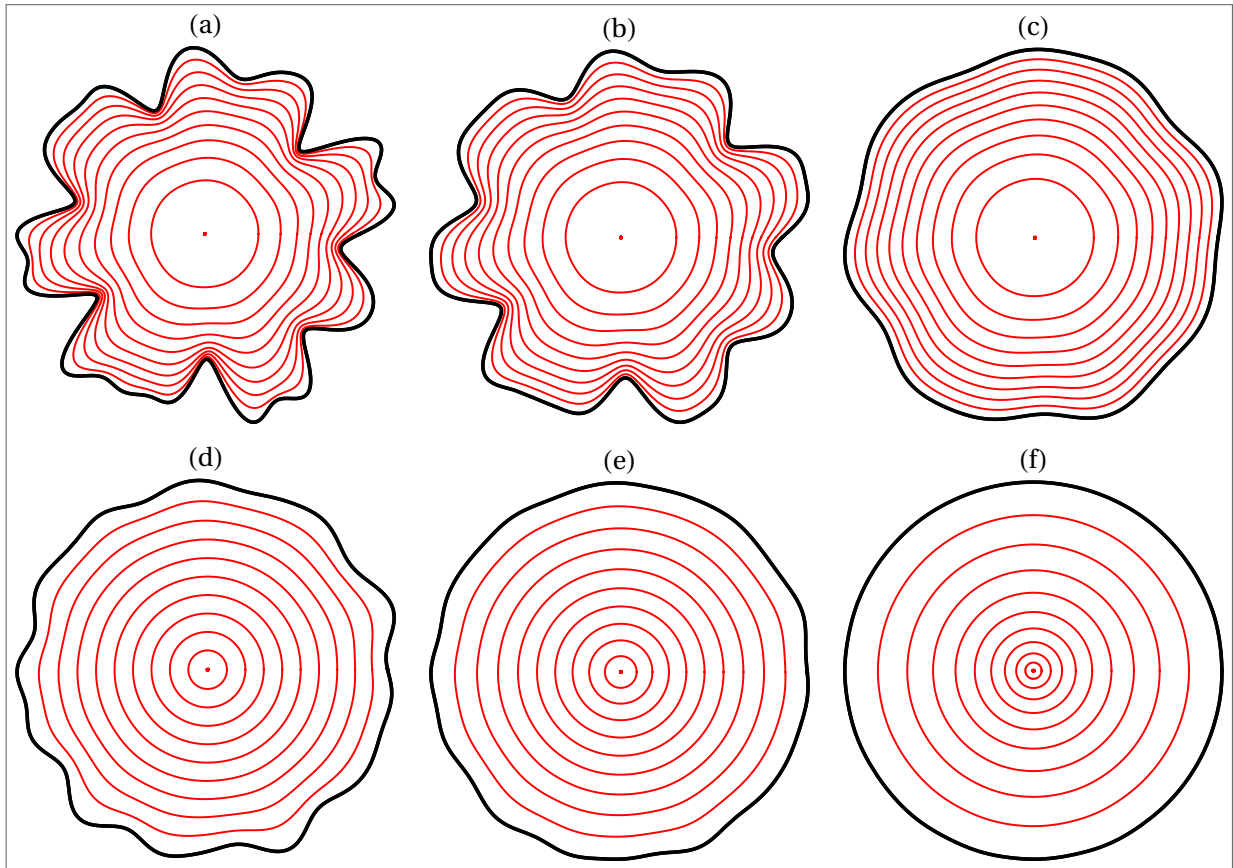
Podemos agora finalmente começar nossa análise de como as interfaces se comportam com a injeção ótima e com a viscosidade do fluido injetado variando no tempo. O problema usual de Hele-Shaw consiste em uma injeção à taxa constante

$$Q_0 = \pi(1 - R_0^2), \quad (2.37)$$

e viscosidade constante, que na nossa teoria corresponde ao caso $\theta = 0$, vide a Eq. (2.28). Assim, procuramos comparar a evolução das interfaces com a taxa de injeção constante [Eq. (2.37)] e com a taxa de injeção ótima [Eq. (2.33)] para valores representativos de θ , descrevendo o crescimento do padrão com nosso esquema de modos acoplados em terceira ordem.

A figura 24 mostra na sua primeira linha os padrões de terceira ordem para taxa de injeção constante [(a), (b), (c)] e, na segunda linha, para a injeção ótima [(d), (e), (f)]. São usados

Figura 24 – Evolução temporal das interfaces geradas ao resolver a Eq. (2.16) em terceira ordem para $0 \leq t \leq t_f$, considerando injeção constante $Q = Q_0$ [(a)-(c)] e injeção ótima $Q = Q(t)$ [(d)-(f)]. São usados: $\theta = 0$ [(a) e (d)], $\theta = 0.2$ [(b) e (e)] e $\theta = 1$, [(c) e (f)]



Fonte: (COUTINHO; MIRANDA, 2020a)

três valores ilustrativos de θ : $\theta = 0$ [(a) e (d)], $\theta = 0.2$ [(b) e (e)] e $\theta = 1$, [(c) e (f)]. As sucessivas interfaces são plotadas em intervalos de tempos iguais $t_f/10$, para $0 \leq t \leq t_f$.

Foquemos primeiramente nossa atenção nas interfaces de injeção constante, que é o sistema presente no experimento da Fig. 8, do primeiro capítulo desta dissertação. Como esperado, a Fig. 24(a), referente ao caso de viscosidade constante $\theta = 0$, apresenta a formação das típicas ramificações de dedos viscosos de células de Hele-Shaw, com ampla presença de bifurcações. Ao comparar com a Fig. 24(b), na qual ocorre a gelificação do fluido injetado [$\theta = 0.2$], vemos uma drástica diminuição das bifurcações, embora ainda notemos a formação dos dedos e seu alargamento, característico do problema. Já na Fig. 24(c), que tem sua viscosidade aumentando rapidamente [$\theta = 1$] em relação a Fig. 24(b), quase que não ocorrem formações de dedos, gerando apenas ondulações na interface, indicando que o sistema é consideravelmente mais estável.

Observando as Figs. 24(d), (e) e (f), vemos que ao empregar a taxa de injeção ótima (Eq.

2.33) obtida pelo método variacional, melhores resultados de estabilização são obtidos. Vemos, no caso de viscosidade constante [(a) e (d)], resultados similares ao experimento (Fig. 8) e simulações fortemente não lineares realizadas por (DIAS et al., 2012), validando nosso esquema de modos acoplados. Ao analisar as Figs. 24(e) e 24(f), concluimos que o sistema fica ainda mais estável ao combinarmos ambos métodos de injeção ótima e fluidos de viscosidade variando no tempo. Note que a Fig. 24(f) apresenta uma interface praticamente perfeitamente circular.

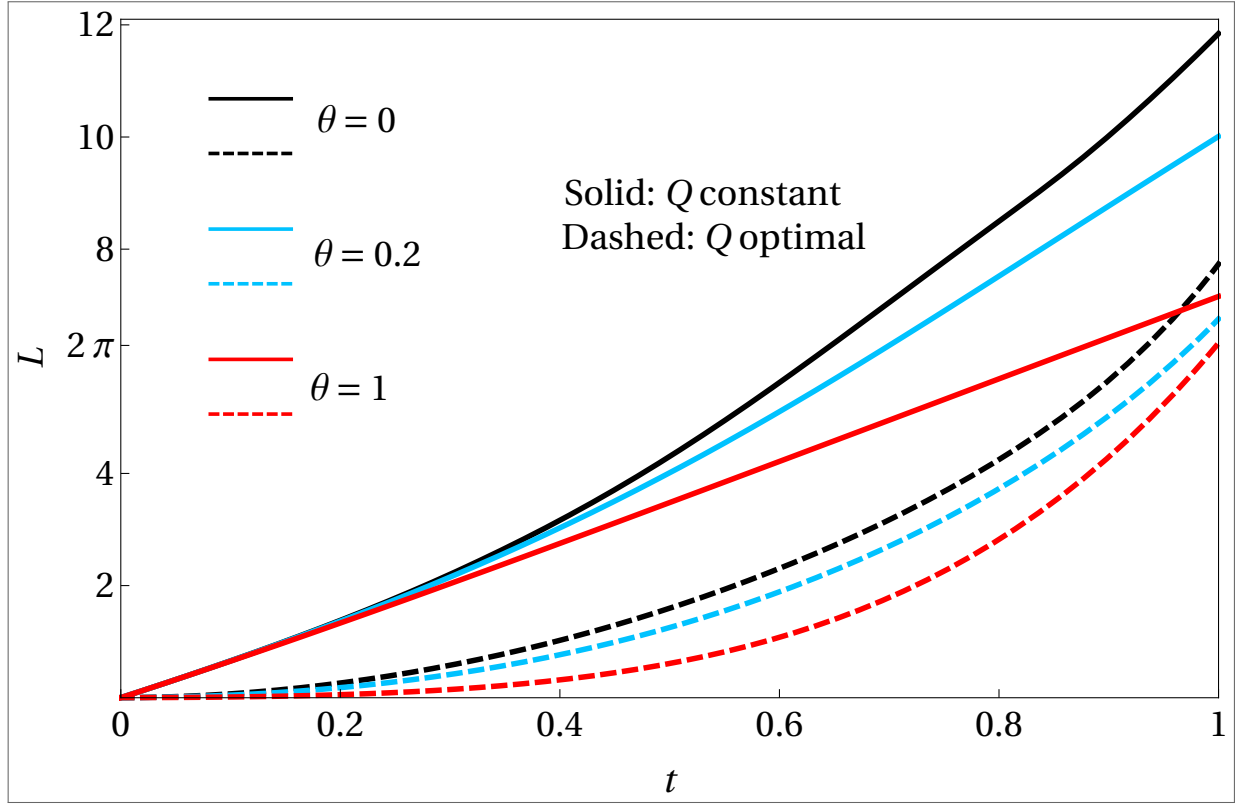
Tais conclusões são reforçadas de forma quantitativa ao examinarmos a Fig. 25, que mostra como o perímetro das interfaces

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\mathcal{R}^2 + \left(\frac{d\mathcal{R}}{d\varphi}\right)^2} d\varphi \quad (2.38)$$

varia com o tempo. Para o caso da injeção constante Q_0 temos linhas sólidas e para a injeção ótima $Q(t)$ temos linhas tracejadas, ambos casos para os três valores de θ presentes na Fig. 24. É evidente que ao variar a viscosidade mais rapidamente, isto é, aumentar o valor de θ , temos uma menor instabilidade. O mesmo vale para o uso da taxa de injeção ótima em relação à constante. Obtemos para o caso $\theta = 1$ com injeção ótima um perímetro de aproximadamente 2π , representando efetivamente nenhuma instabilidade, dado que na nossa adimensionalização $R_f = 1$.

Sendo assim, os resultados de terceira ordem presentes nas Figs. 24 e 25 indicam que o esquema variacional de estabilização dado pela Eq. (2.33), que é obtido da taxa de crescimento *linear* para um fluido não newtoniano, cuja viscosidade aumenta no tempo, permanece válido durante o início dos efeitos *não lineares*.

Figura 25 – Evolução temporal do perímetro L das interfaces presentes na Fig. 24, considerando $Q = Q_0$ (curvas sólidas) e $Q = Q(t)$ (curvas tracejadas), para $\theta = 0, 0.2$ e 1 .



Fonte: (COUTINHO; MIRANDA, 2020a)

2.4 FIXANDO O NÚMERO DE DEDOS

Aqui, procuramos calcular uma taxa de injeção $Q(t)$ dependente do tempo a fim de permitir a fixação do número de dedos viscosos, evitando ramificações nas pontas. Estendendo os trabalhos (LI et al., 2009; DIAS; MIRANDA, 2010) (experimento da Fig. 9), obtemos tal injeção para um fluido cuja viscosidade aumenta no tempo, de acordo com a Eq. (2.28). Diferentemente da secção 2.3, o volume total de fluido injetado e o tempo final de injeção não são fixos. Para a consistência do capítulo, tomaremos a mesma adimensionalização da secção 2.3, tempos por t_f e comprimentos por R_f .

Obtemos tal taxa a nível linear e, checamos sua validade e robustez com nosso esquema de modos acoplados em terceira ordem. O procedimento para encontrar este $Q(t)$ é consideravelmente mais simples. Em primeira ordem, o número de dedos viscosos pode ser estimado pelo $n_{\max}$, definido na Eq. (2.22), tal que a injeção desejada será aquela que fixa $n_{\max}$. Com a Eq. (2.17), calculamos o modo de maior crescimento impondo que esse seja constante. Obtemos

$$\dot{R}R^2(1 - V) = \Gamma, \quad (2.39)$$

onde

$$\Gamma = \Gamma(\tau, n_{\max}) = \tau(3n_{\max}^2 - 1) \quad (2.40)$$

independe do tempo. Resolvendo a equação diferencial (2.39) e, com a Eq. (2.18), temos

$$Q(t) = \frac{2\pi\Gamma}{1-V} \left\{ R_0^3 + 3\Gamma \int_0^t \frac{dt'}{1-V} \right\}^{-1/3}. \quad (2.41)$$

Com a variação temporal do raio entre as viscosidades $V = V(t)$ dada pela Eq. (2.28), podemos calcular explicitamente a integral em Eq. (2.41), obtendo a expressão em forma fechada

$$Q(t) = \frac{2\pi\Gamma}{1-V} \left\{ R_0^3 + \frac{3\Gamma}{(V_\infty - 1)\theta} \log \left[\frac{V_0 - 1}{V_0 - V_\infty + (V_\infty - 1) \exp(\theta t)} \right] \right\}^{-1/3}, \quad (2.42)$$

que dita a taxa de injeção que fixa um dado número de dedos viscosos $n_{\max}$ para um fluido injetado não newtoniano. Tal resultado é consistente com (CARDOSO; WOODS, 1995; LI et al., 2009; DIAS; MIRANDA, 2010) para o caso de viscosidade constante $\theta = 0$, dado por $Q \sim t^{-1/3}$.

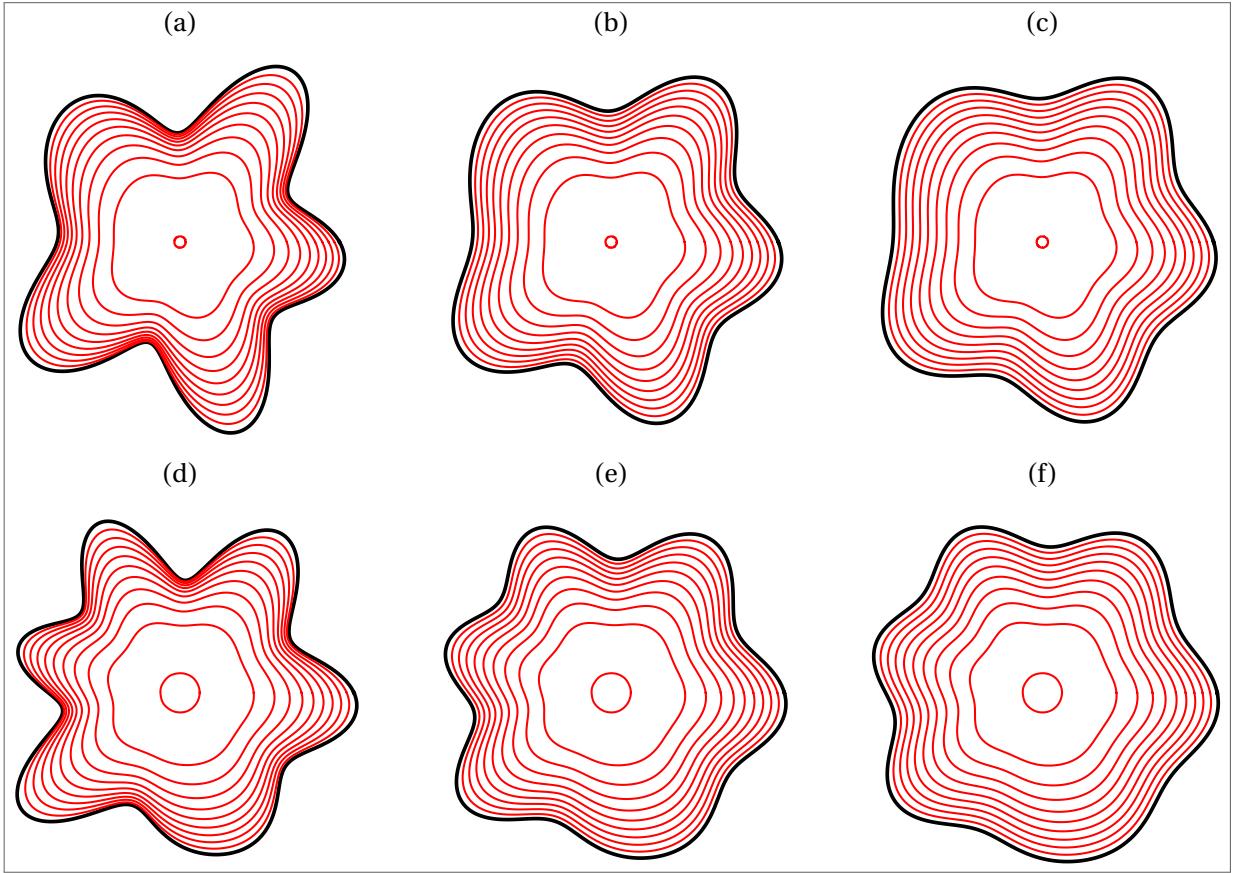
Para facilitar a comparação do nosso esquema de terceira ordem com resultados experimentais, usamos aqui parâmetros similares aos do experimento de (LI et al., 2009), presente na Fig. 9. O experimento considera a injeção de ar [$\eta_1 \approx 0$] em uma célula de Hele-Shaw radial de espessura $b = 0.05$ cm, preenchida com óleo de castor [$\eta_2 = 10$ g/(cm s)]. A tensão superficial na interface é de $\sigma = 48$ dina/cm.

Apresentamos na Fig. 26 interfaces para $Q(t)$, gerando cinco e seis dedos viscosos, evoluindo a partir de um raio inicial $R_0 = 0.15$ cm, com amplitude de ruído inicial $|\zeta_n(0)| = R_0/500$. Para as estruturas de cinco dedos viscosos, temos $R_f = 4.05$ cm e $t_f = 300$ cm, nos levando a uma tensão superficial efetiva $\tau_{n_{\max}=5} = 4.5 \times 10^{-3}$. Já para a estrutura de seis dedos, $R_f = 1.17$ cm, $t_f = 5$ cm e $\tau_{n_{\max}=5} = 3.1 \times 10^{-3}$. Como na secção anterior, $V_0 = 0$ e $V_\infty = 0.5$. Para o caso de viscosidade constante, este sistema é análogo ao dos experimentos exibidos nas Figs. 9 e 10 da introdução.

Para verificar a eficiência do resultado da Eq. (2.42), geramos padrões de terceira ordem usando $2 \leq n \leq 20$ a partir da Eq. (2.16). A Fig. 26 apresenta a evolução temporal para $0 \leq t_f \leq 1$, em passos de $t_f/10$. Dada a adimensionalização, $t_f = 1$. São mostrados três valores simbólicos de θ : $\theta = 0$ [(a) e (d)], $\theta = 0.5$ [(b) e (e)] e $\theta = 1$ [(c) e (f)]. As figuras da primeira linha [(a), (b), (c)] usam a taxa de injeção da Eq. (2.42) a fim de gerar uma simetria de cinco dedos, já as da segunda linha [(d), (e), (f)], procuram criar seis dedos viscosos.

A figura 26 nos mostra que a fixação de $n_{\max}$ através de um esquema de injeção variável ainda permite manter o número de dedos viscosos fixo, mesmo para diversos valores de θ . Ve-

Figura 26 – Evolução temporal das interfaces geradas ao resolver Eq. (2.16) em terceira ordem para $0 \leq t \leq t_f$, considerando injeção proposta pela Eq. (2.42). É imposto $n = n_{\max} = 5$ em [(a)-(c)] e $n = n_{\max} = 6$ em [(d)-(f)]. São usados: $\theta = 0$ [(a) e (d)], $\theta = 0.2$ [(b) e (e)] e $\theta = 1$, [(c) e (f)].



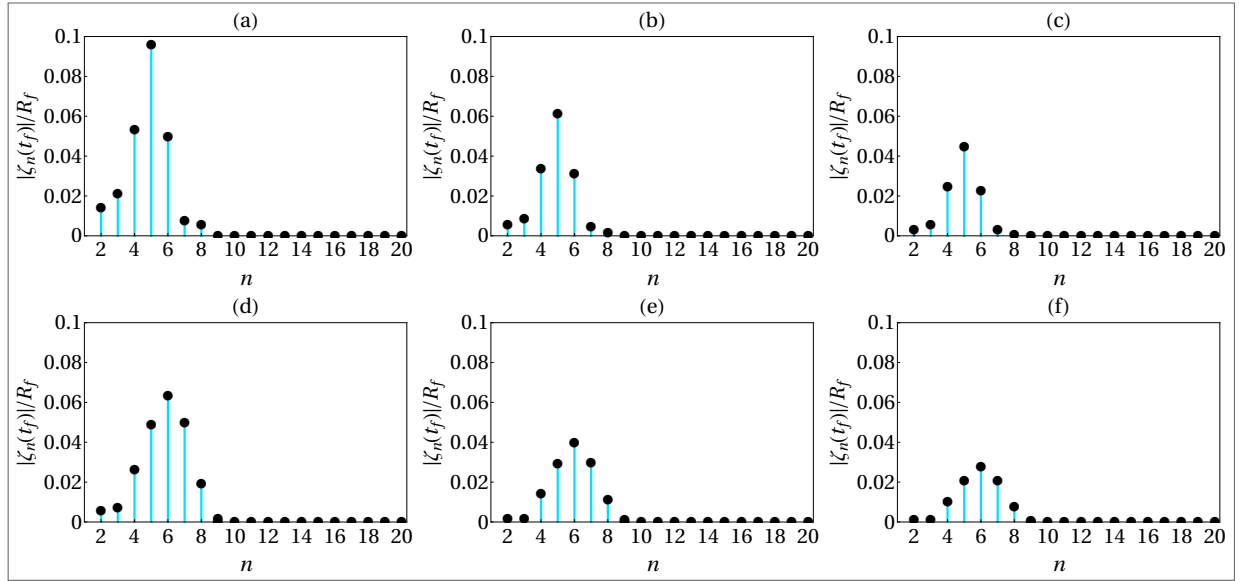
Fonte: (COUTINHO; MIRANDA, 2020a)

mos também que a atenuação do crescimento dos dedos, causada pela variação da viscosidade, gera uma maior uniformidade entre os dedos, sendo assim, podemos selecionar a quantidade de dedos desejados através de $Q(t)$ e ajustar o tamanho dos dedos com diferentes valores de θ .

Para uma evidência qualitativa, observamos a Fig. 27, que mostra a variação das amplitudes de perturbação reescaladas para o tempo final $|\zeta_n(t_f)|/R_f$ com o número de onda azimutal n . Observamos claramente que os picos ocorrem em $n = n_{\max} = 5$ para as Figs. 27(a)-(c) e $n = n_{\max} = 6$ para Figs. 27(d)-(f). Observamos que mesmo na presença de efeitos não lineares, $n_{\max}$ é o modo de maior amplitude no tempo final e durante toda a dinâmica, ditando a simetria do sistema.

Note que mesmo havendo sido obtida no regime linear, a Eq. (2.42) permanece relevante na nossa análise de terceira ordem, como é visto nas Figs. 26 e 27, indicando que tal taxa de injeção permanece efetiva no início dos estágios não lineares da evolução.

Figura 27 – Amplitudes reescaladas de modos $|\zeta_n(t_f)|/R(t_f)$ no tempo final $t = t_f = 1$ em função do número azimutal de modo n . Os dados são extraídos das últimas interfaces (em preto) da Fig. 26.



Fonte: (COUTINHO; MIRANDA, 2020a)

Neste capítulo, mostramos que é possível obter taxas de injeção específicas, a fim de minimizar o crescimento de instabilidades na interface e também, fixar o número de dedos viscosos presente no sistema, para fluidos cuja viscosidade aumenta no tempo. Embora tais estratégias de controle sejam obtidas a partir de uma análise linear, atestamos que estas permanecem efetivas durante os primeiros estágios não lineares da dinâmica, através do nosso esquema fracamente não linear de modos acoplados.

3 ESTRESSES VISCOSOS NORMAIS E TRIFURCAÇÕES

3.1 ESTRESSES NORMAIS E A CONDIÇÃO DE YOUNG-LAPLACE MODIFICADA

Neste capítulo, procuramos entender como trifurcações podem ser favorecidas no fluxo de Hele-Shaw, quando um fluido de baixa viscosidade é injetado radialmente em outro de maior, ambos incompressíveis e newtonianos. Tal estudo é motivado pela escassez de análises teóricas sobre este efeito, embora ele ocorra em experimentos, como na Fig. 12 e em (PATERSON, 1981; CHEN, 1987; CHEN, 1989; LAJEUNESSE; COUDER, 2000; WARD; WHITE, 2011; PIHLER-PUZOVIĆ et al., 2018; SCHIMITH; ROBERTO; ABEDI, 2020).

Para tal, levamos em consideração efeitos de estresses viscosos normais (LANDAU; LIFSHITZ, 1987), que são ignorados na maioria dos estudos teóricos. KIM et al. (KIM et al., 2009) consideram tais efeitos, executando uma análise linear, mostrando que os estresses alteram a velocidade de propagação da interface, criando uma maior estabilização. Tais efeitos trouxeram à análise linear a um melhor acordo com experimentos, de forma que esperamos que nossa análise fracamente não linear também se aprimore permitindo capturar efeitos de trifurcação.

Procuramos obter uma generalização da condição de Young-Laplace [Eq. (2.10)], levando em conta efeitos de estresses viscosos normais e da tensão superficial. A partir dos trabalhos de (BATCHELOR, 1967; LANDAU; LIFSHITZ, 1987; PANTON, 2005), consideramos o equilíbrio de estresses na interface ($r = \mathcal{R}$) de dois fluidos newtonianos incompressíveis, cujos estresses são relacionados à pressão e às velocidades por

$$p_1 - p_2 = \sigma \kappa + [\delta(\tau_1 - \tau_2) \cdot \mathbf{n}] \cdot \mathbf{n}, \quad (3.1)$$

onde

$$\tau_j = \eta_j \left[\nabla \mathbf{v}_j + (\nabla \mathbf{v}_j)^T \right], \quad (3.2)$$

com T denotando a matriz transposta. A fim de estabelecer uma base comparativa, $\delta = 0$ ignora os efeitos de estresse e $\delta = 1$ os considera.

Dada a geometria do problema, podemos representar o tensor de estresses em coordenadas polares (r, θ) por

$$\tau_j = \begin{pmatrix} \tau_{j,rr} & \tau_{j,r\theta} \\ \tau_{j,r\theta} & \tau_{j,\theta\theta} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Como os fluidos são incompressíveis [Eq.(2.5)], as componentes do tensor são dadas por

$$\tau_{j,rr} = 2\eta_j \left[\frac{\partial v_{j,r}}{\partial r} \right], \quad (3.4)$$

$$\tau_{j,\theta\theta} = 2\eta_j \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_{j,\theta}}{\partial \theta} + \frac{v_{j,r}}{r} \right) \right], \quad (3.5)$$

$$\tau_{j,r\theta} = \eta_j \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_{j,\theta}}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{j,r}}{\partial \theta} \right]. \quad (3.6)$$

Sendo as velocidades escritas em termos dos potenciais de velocidade [Eq. (2.6)], temos

$$\tau_{j,rr} = -2\eta_j \left[\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r^2} \right], \quad (3.7)$$

$$\tau_{j,\theta\theta} = -2\eta_j \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \right], \quad (3.8)$$

$$\tau_{j,r\theta} = 2\eta_j \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r \partial \theta} \right]. \quad (3.9)$$

Com as Eqs. (3.7)-(3.9) e com $\mathbf{n} = (n_r, n_\theta)$,

$$\begin{aligned} [\tau_j \cdot \mathbf{n}] \cdot \mathbf{n} &= \left[\begin{pmatrix} \tau_{j,rr} & \tau_{j,r\theta} \\ \tau_{j,r\theta} & \tau_{j,\theta\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_r \\ n_\theta \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} n_r \\ n_\theta \end{pmatrix} \\ &= n_r^2 \tau_{j,rr} + 2n_r n_\theta \tau_{j,r\theta} + n_\theta^2 \tau_{j,\theta\theta} \\ &= -2\eta_j \left[n_r^2 \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r^2} + 2n_r n_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} \right) + n_\theta^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Por fim, substituímos a Eq. (3.10) para ambos os fluidos $j = 1$ e 2 na Eq. (3.1), obtendo

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= \sigma \kappa \\ &- 2\delta\eta_1 \left[n_r^2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r^2} + 2n_r n_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right) + n_\theta^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right) \right] \\ &+ 2\delta\eta_2 \left[n_r^2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial r^2} + 2n_r n_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \right) + n_\theta^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde κ é dado pela Eq. (2.12) e σ é a tensão superficial.

Para analisarmos os efeitos dos estresses viscosos na morfologia dos padrões formados na célula de Hele-Shaw, usamos o mesmo esquema de modos acoplados descrito na secção 2.2, utilizando as Eqs. (2.2), (2.3), (2.8), (2.13) e (3.11), obtendo um análogo da Eq. (2.14) [ver o Apêndice C, Eq. (C.2)]. Durante este capítulo, adimensionalizamos comprimentos pelo

espaçamento da célula b , e velocidades por Q/b , tal que a taxa de crescimento linear é dada por

$$\lambda(n) = \frac{1}{s(n)} \left\{ \frac{1}{2\pi R^2} \left[A|n| \left(1 + \delta \frac{1}{3R^2} \right) - s(n) \right] - \frac{(A+1)}{2CaR^3} |n|(n^2 - 1) \right\}, \quad (3.12)$$

onde

$$Ca = \frac{12\eta_2 Q}{\sigma b} \quad (3.13)$$

é o número de capilaridade global que mede a força relativa entre viscosidade e tensão superficial, e

$$s(n) = 1 + \delta \frac{1}{6R^2} |n|(|n| + A). \quad (3.14)$$

A equação de modos acoplados para a perturbação, bem como as expressões para as funções de acoplamentos de modos não lineares, são dadas no Apêndice C, Eqs. (C.1)-(D.8).

3.2 ANÁLISE FRACAMENTE NÃO LINEAR

Com intuito de analisarmos os efeitos dos estresses normais na morfologia dos padrões, seguimos passos similares aos da secção 2.3.2, escrevendo a perturbação em termos de modos senos e cossenos reais [Eqs. (2.34), (B.5) e (B.6)], contudo, inicialmente tomamos uma abordagem diferente. MIRANDA; WIDOM (1998b) mostraram que, para o problema usual de Saffman-Taylor, é possível observar o mecanismo de bifurcação dos dedos viscosos considerando o acoplamento de apenas dois modos de Fourier: um modo fundamental n e seu primeiro harmônico $2n$. O modo fundamental impõe uma simetria de n dedos viscosos e seu harmônico molda o formato dos dedos, tornando-os mais achatados, finos, ou os bifurcando.

Para estudar o efeito de trifurcação, é natural a extensão do método descrito acima para o acoplamento de três modos de Fourier: n , $2n$ e $3n$ (FONTANA; GADÊLHA; MIRANDA, 2016). Representamos na primeira linha da Fig. 28 a interface fluido-fluido para o acoplamento destes modos, obtida ao resolver a Eq. (C.2), com $A = 1$, $Ca = 200$ e $R_0 = 3$, a passos de $\Delta t = t_f/10$ para $0 \leq t \leq t_f$. Tais parâmetros são condizentes com experimentos clássicos da literatura (PATERSON, 1981; CHEN, 1987; CHEN, 1989; LAJEUNESSE; COUDER, 2000; WARD; WHITE, 2011; PIHLER-PUZOVIĆ et al., 2018), dos quais vimos que os parâmetros adimensionais obedecem $O(10) \leq Ca \leq O(10^3)$ e $O(1) \leq R_0 \leq O(10)$. Além disso, para termos um

fluxo instável, $0 < A \leq 1$. A segunda linha se refere à evolução temporal das amplitudes de perturbação reescaladas $|\zeta_n(t)|/R(t)$, onde $|\zeta_n(t)| = \sqrt{a_n^2(t) + b_n^2(t)}/2$.

A escolha do contraste de viscosidade máximo ocorre devido ao extensivo uso de $A = 1$ em experimentos, para o qual o sistema é mais instável, favorecendo ramificações nos dedos. Já para o número de capilaridade, escolhemos um valor moderado, procurando maximizar as perturbações na interface, mas não excedendo os limites do nosso regime perturbativo. É importante lembrar que as condições, de não cruzamento de interfaces [Eq. (2.36)] e $|\zeta| \ll R$ devem ser obedecidas.

Em contraste com o exposto na secção 2.3.1, o modo azimutal definido pela Eq. (2.22) não será usado para definir a simetria dos padrões. Seguimos (DIAS; MIRANDA, 2013), que mostraram que o modo $n_{\max}^{\zeta}$ definido por

$$\left(\frac{d\zeta_n(t)}{dn} \right) \bigg|_{n=n_{\max}^{\zeta}} = 0, \quad (3.15)$$

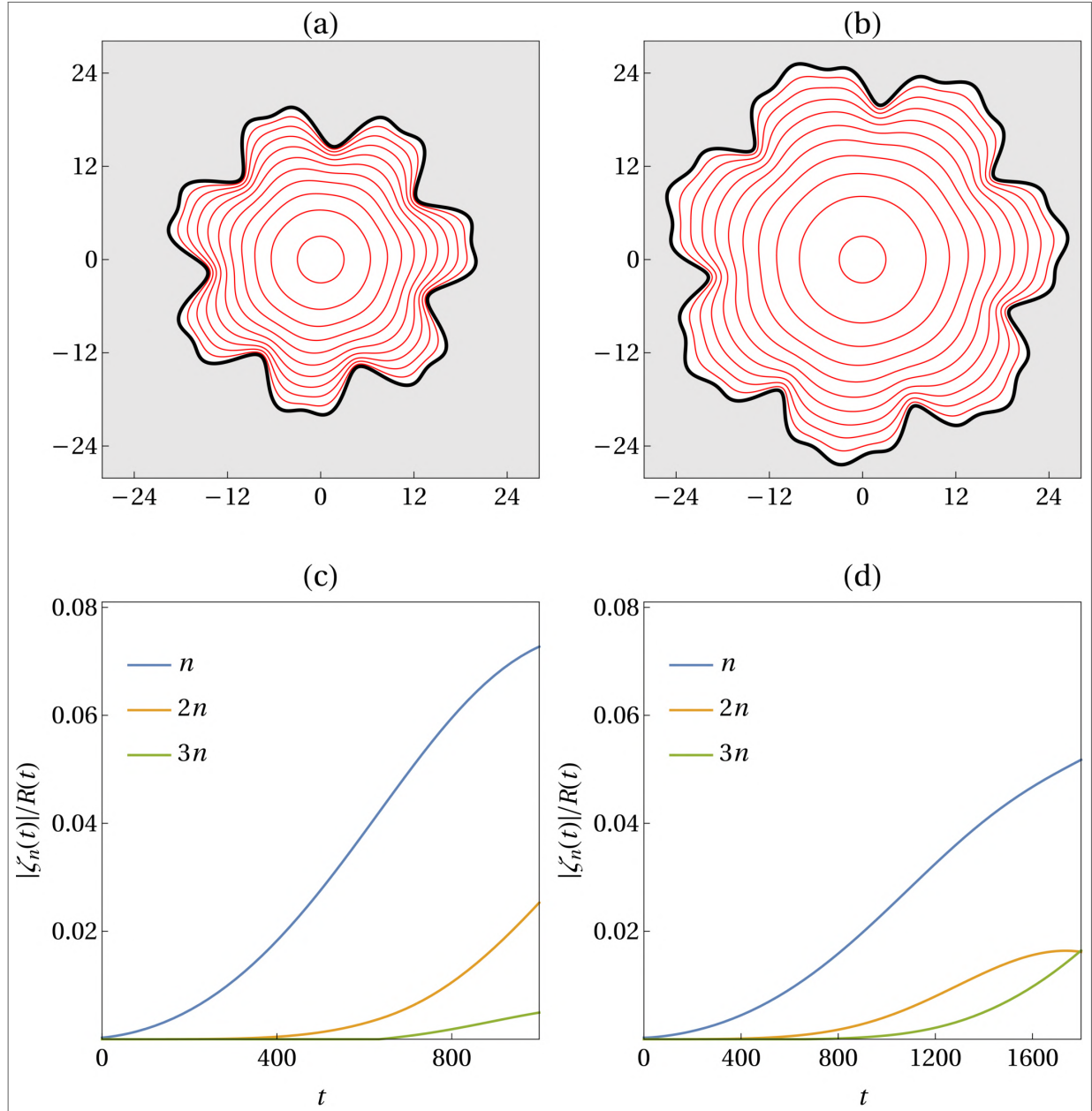
onde

$$\zeta_n(t) = \zeta_n(0) \exp \left[\int_0^t \lambda(n) dt \right], \quad (3.16)$$

gera uma melhor previsão para o número de dedos viscosos emergentes no âmbito linear, em comparação à $n_{\max}$. Desta forma, consideramos nosso modo fundamental $n = n_{\max}^{\zeta}$ no tempo $t = t_f$. Para os parâmetros presentes na Fig. 28, $n = n_{\max}^{\zeta} = 7$, $2n = 14$ e $3n = 21$. Como efeitos de bifurcação e trifurcação são inerentemente não lineares, é importante termos certeza que estes não são gerados artificialmente por uma amplitude inicial. Sendo assim, a amplitude inicial ($t = 0$) de ambos harmônicos $2n$ e $3n$ é zero. A única amplitude inicial será do modo fundamental n , tal que $a_n(0) = b_n(0) = R_0/2500$.

Examinamos primeiramente as Figs. 28(a) e (c), que correspondem ao caso sem considerar estresses normais ($\delta = 0$) e $t_f = 1000$. Na Fig. 28(a), vemos a formação de uma estrutura de sete dedos a partir de uma estrutura praticamente circular, que tem suas pontas alargadas com o tempo. São também observadas bifurcações nas pontas dos dedos, como na maior parte dos experimentos. Tal morfologia é consistente com a Fig. 28(c), na qual vemos um crescimento do modo fundamental $n = 7$, impondo a simetria de sete dedos, e um crescimento do primeiro harmônico $2n = 14$, que gera a bifurcação dos dedos. Vemos que o modo $3n$ tem sua amplitude relativamente baixa durante a evolução, não sendo influente na morfologia. Tais resultados são consistentes com os achados teóricos de (MIRANDA; WIDOM, 1998b) e experimentais de (PATERSON, 1981; CHEN, 1987; CHEN, 1989; LAJEUNESSE; COUDER, 2000; WARD; WHITE, 2011; PIHLER-PUZOVIĆ et al., 2018).

Figura 28 – Evolução dos padrões de dedos viscosos para dois fluidos de viscosidade constante ao resolver a Eq. (C.2) para $0 \leq t \leq t_f$, quando (a) $\delta = 0$ e $t_f = 1000$, e (b) $\delta = 1$ e $t_f = 1800$. O tempo t_f é definido pela Eq. (2.36). Consideramos o acoplamento não linear dos modos $n = n_{\max} = 7$, $2n = 14$ e $3n = 21$. A evolução temporal da perturbação reescalada $|\zeta_n(t)|/R(t)$ correspondente é representada em (c) para $\delta = 0$ e (d) para $\delta = 1$.



Fonte: (COUTINHO; ROCHA; MIRANDA, 2021)

Em contraste, as Figs. 28(b) e (d) consideram os efeitos de estresses normais viscosos ($\delta = 1$). Temos para estas, $t_f = 1800$, um valor consideravelmente superior ao do caso $\delta = 0$, $t_f = 1000$. Isso ocorre devido ao papel estabilizante que os estresses têm na dinâmica do sistema, causando um retardo na formação das instabilidades, permitindo evoluir os padrões até um tempo maior. Tal efeito é consistente com os trabalhos (GADÊLHA; MIRANDA, 2004;

KIM et al., 2009; GADÊLHA; MIRANDA, 2009).

Comparando as morfologias das Figs. 28(a) e (b), é clara a diferença. Para $\delta = 1$ [(b)] temos o alargamento dos dedos e o fenômeno da trifurcação no lugar da bifurcação, gerando um padrão de 21 dedos viscosos. Além disso, vemos que o padrão (b) é consideravelmente maior que o (a), dada a estabilização gerada pelos estresses. Na Fig. 28(d), vemos um crescimento do modo $3n = 21$, tendo sua amplitude reescalada se igualando em módulo a do primeiro harmônico $2n$, com um crescimento exacerbado em comparação ao modo $3n$ do caso sem estresses [Fig. 28(c)]. Ainda podemos observar uma atenuação do crescimento do modo fundamental n na Fig. 28(c), corroborando com o retardo do crescimento dos padrões.

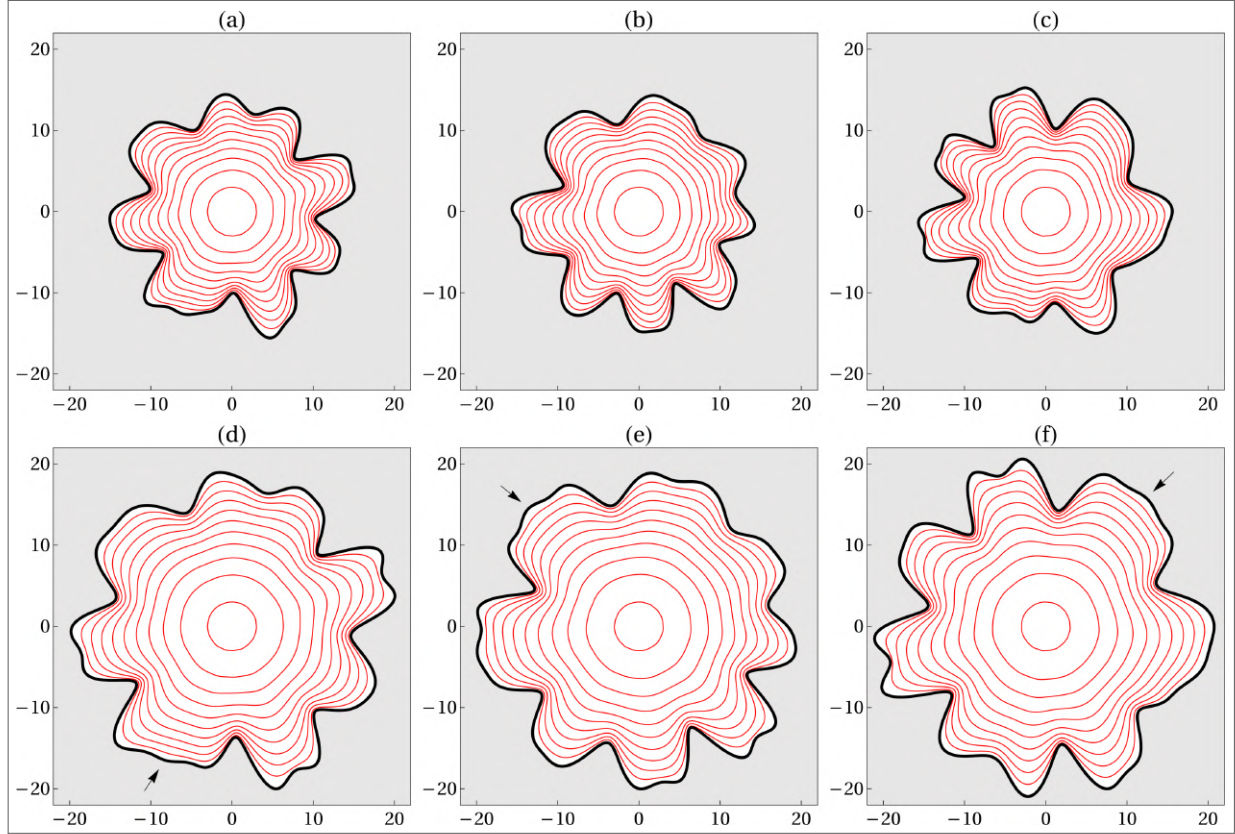
A partir da Fig. 28, podemos concluir que ao comparar os casos sem ($\delta = 0$) e com ($\delta = 1$) estresses que a presença deles favorece a formação de estruturas de trifurcação. Contudo, as condições impostas na Fig. 28 são idealizadas, temos o acoplamento de apenas três modos e a criação de estruturas perfeitamente simétricas, que geram apenas bifurcações (para $\delta = 0$) ou trifurcações (para $\delta = 1$), não refletindo a realidade dos experimentos expostos nas Figs. 11 e 12, presentes na secção 1.3. A fim de termos um resultado mais robusto, usamos o modelo descrito na secção 2.3.2, no qual são considerados todos os modos de Fourier dentro da banda de instabilidade linear e cujos resultados estão em melhor acordo com experimentos em células de Hele-Shaw. Aqui, consideraremos a participação de todos os modos instáveis $2 \leq n \leq 21$, cada um com uma fase aleatória associada a si. Como já discutido, o modo $n = 0$ é escrito em termos dos outros [Eq. (2.35)] e o modo $n = 1$ é estável ou marginal [$\lambda(n = 1) \leq 0$].

Na figura 29, representamos graficamente a evolução de interfaces em terceira ordem ao negligenciarmos estresses normais [(a)-(c), $\delta = 0$] e ao considerá-los [(d)-(f) $\delta = 1$]. Usamos parâmetros similares à Fig. 28, $A = 1$, $Ca = 200$, $R_0 = 3$ e $|\zeta_n(0)| = R_0/750$. Tais parâmetros serão usados em todas outras figuras deste capítulo, exceto quando especificado. Lembramos que a cada modo n é associado uma fase aleatória, de forma que, para evidenciar a reprodutibilidade dos resultados, apresentamos três conjuntos de fases aleatórias, um para (a) e (d), outro para (b) e (e) e um terceiro para (c) e (f).

Para os padrões da Fig. 29, observamos a formação de sete ou oito dedos. Calculamos que $7 \leq n_{\max}^{\zeta} \leq 8$, enquanto $12 \leq n_{\max} \leq 13$, indicando que $n_{\max}^{\zeta}$ melhor prevê o número de dedos em estágios fracamente não lineares da dinâmica. Para as Figs. 29(a)-(c) [caso $\delta = 0$], observamos que os dedos tendem a se alargarem em suas pontas e é perceptível a bifurcação de alguns deles, contudo, não há sinais de trifurcações.

Ao considerarmos os efeitos de estresse [Figs. 29(d)-(f)], vemos que ainda ocorre o alar-

Figura 29 – Evolução dos padrões de dedos viscosos ao resolver a Eq. (C.2) para $0 \leq t \leq t_f$, com $2 \leq n \leq 21$, quando $\delta = 0$ [(a)-(c)], e $\delta = 1$ [(d)-(f)]. Os tempos t_f são: (a) 530, (b) 530, (c) 560, (d) 970, (e) 1012 e (f) 1060. A ocorrência de trífurcação em [(d)-(f)] é indicada por setas. Três conjuntos de fases aleatórias são usadas, um para (a) e (d), outro para (b) e (e) e um terceiro para (c) e (f). Aqui $A = 1$, $Ca = 200$ e $R_0 = 3$.

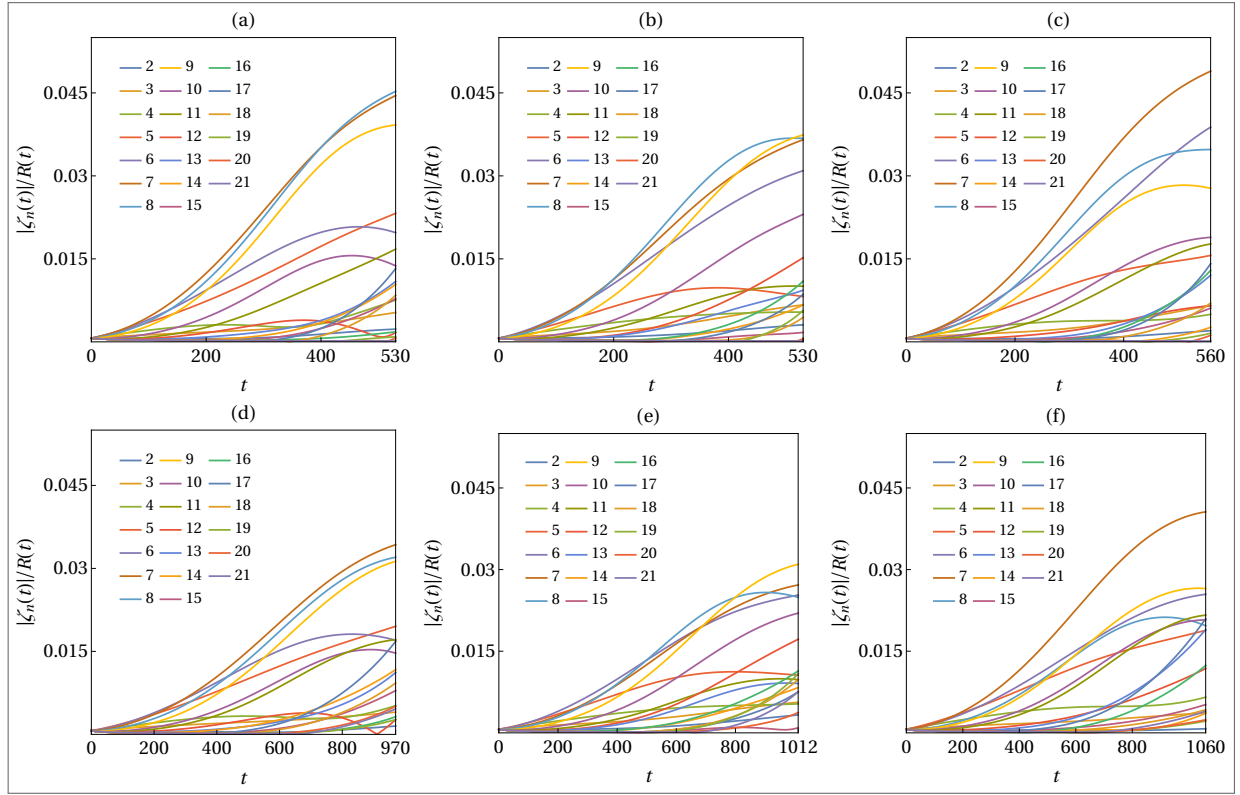


Fonte: (COUTINHO; ROCHA; MIRANDA, 2021)

gamento dos dedos e bifurcações, contudo, os perfis dos dedos são mais curtos e largos. Esse efeito ocorre devido à estabilização causada pelos efeitos de estresses, note também que os tempos finais são consideravelmente maiores. Sobretudo, vemos a existência de trífurcações, que não eram presentes ao ignorarmos efeitos de estresses, indicadas por pequenas setas pretas nas interfaces. Assim, observamos a formação de trífurcações tanto no caso idealizado da Fig. 28 quanto na Fig. 29, que leva em conta o acoplamento de todos os modos de Fourier instáveis e efeitos de ruídos aleatórios, de forma que nossas previsões se aproximam ainda mais da realidade dos experimentos das Figs. 11 e 12, presentes na introdução.

Informações complementares são dadas na Fig. 30, que mostra a evolução temporal das amplitudes de perturbação reescaladas $|\zeta_n(t)|/R(t)$, onde $|\zeta_n(t)| = \sqrt{a_n^2(t) + b_n^2(t)}/2$, associadas às interfaces ilustradas na Fig. 29, para todos os modos participantes $2 \leq n \leq 21$. Vemos o impacto causado pelos estresses na atenuação do crescimento dos modos, evidente ao compararmos as figuras sem [(a)-(c), $\delta = 0$] e com influência de estresses normais [(d)-(f)],

Figura 30 – Evolução temporal das amplitudes de perturbação reescaladas $|\zeta_n(t)|/R(t)$ para $2 \leq n \leq 21$. Todos os parâmetros físicos e condições iniciais são os mesmos da Fig. 29. Note que $\delta = 0$ para (a)-(c) e $\delta = 1$ para (d)-(f).



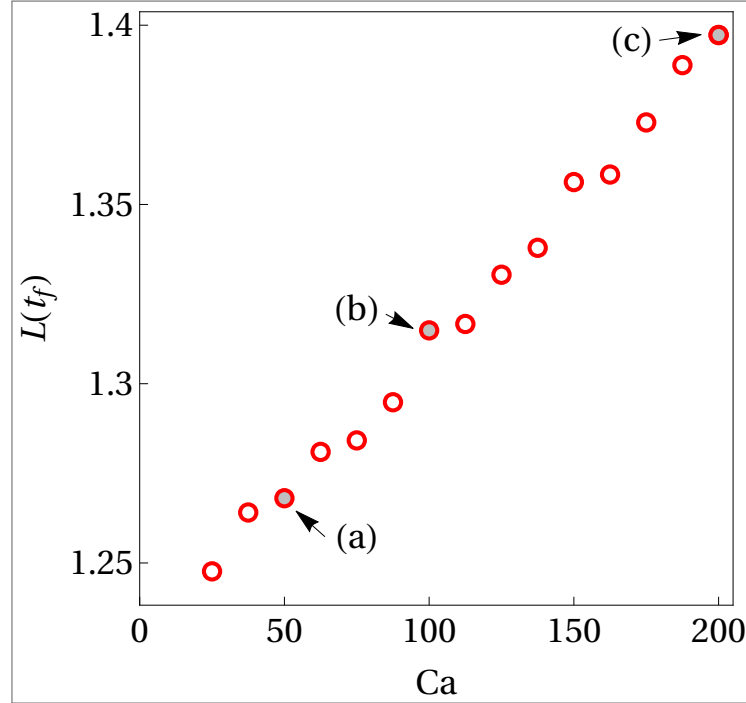
Fonte: (COUTINHO; ROCHA; MIRANDA, 2021)

$\delta = 1$]. Tal achado é consistente com a morfologia de dedos mais curta e achatada dos dedos presentes nas Figs. 29(d)-(f), juntamente com a possibilidade de evoluir a dinâmica até um tempo superior.

Observamos claramente que os estresses normais retardam o crescimento das instabilidades, contudo, estes modificam a dinâmica do sistema, de forma que as ramificações nas pontas dos dedos são estimuladas, envolvendo tanto bifurcações quanto trifurcações, como o previsto pelo modelo com apenas três modos de Fourier (Fig. 28) e em experimentos [Figs. 11 e 12].

Procuramos agora entender como a morfologia do sistema se comporta ao variarmos o contraste de viscosidade A e o número de capilaridade Ca , na presença de estresses viscosos normais. Sabe-se que, independente de estresses, maiores valores de A e Ca tendem a desestabilizar o sistema (PATERSON, 1981; CHEN, 1987; CHEN, 1989; LAJEUNESSE; COUDER, 2000; WARD; WHITE, 2011; PIHLER-PUZOVIĆ et al., 2018). Para Ca , caso tenhamos um valor muito pequeno, a interface será muito estável e a evolução temporal não será interessante. Já para valores muito altos, teremos grandes deformações e nosso esquema perturbativo não será suficiente para estudar a dinâmica.

Figura 31 – Perímetro interfacial reescalonado $L(t_f)$ [Eq. (3.17)] para diferentes valores de Ca . Os dados foram obtidos através das interfaces não lineares de terceira ordem, com os parâmetros idênticos aos da Fig. 29(f), salvo Ca . As interfaces para os pontos (a) $Ca = 50$, (b) $Ca = 100$ e (c) $Ca = 200$ são representadas na Fig. 32.



Fonte: (COUTINHO; ROCHA; MIRANDA, 2021)

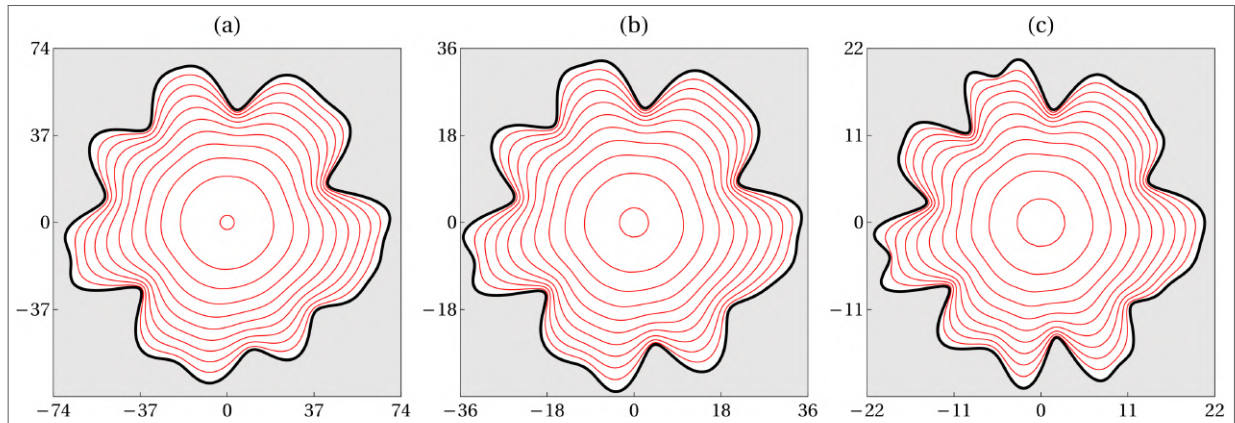
A fim de caracterizar como o sistema se comporta com a variação do número de capilaridade, observamos a Fig. 31, que detalha o comportamento do perímetro reescalonado da interface para o tempo final t_f

$$L(t_f) = \frac{1}{2\pi R(t_f)} \int_0^{2\pi} \sqrt{\mathcal{R}^2(t_f) + \left[\frac{d\mathcal{R}(t_f)}{d\theta} \right]^2} d\theta, \quad (3.17)$$

para diversos valores de Ca . $L(t_f)$ representa o quanto uma dada interface final difere de um círculo, sendo uma medida quantitativa de instabilidades, ou seja, quanto maior o valor de $L(t_f)$, mais perturbada será a interface. O valor do perímetro para cada Ca foi obtido através do mesmo esquema de modos acoplados usado na Fig. 29, levando em conta os modos $2 \leq n \leq 21$ na presença de estresses ($\delta = 1$) e com o contraste de viscosidade máximo permitido, $A = 1$. O restante dos parâmetros são os mesmos da Fig. 29(f), bem como o conjunto de fases aleatórias. É evidente o aumento do perímetro reescalonado para maiores valores de Ca , indicando uma maior deformação das interfaces.

Para entender as consequências da modificação do número de capilaridade nas ramificações dos dedos, a Fig. 32 exibe os padrões que são representados nos pontos (a) $Ca = 50$, (b) $Ca = 100$ e (c) $Ca = 200$ da Fig. 31, indicados por pequenas setas. Note que a Fig. 32(c) é

Figura 32 – Evolução dos padrões de dedos viscosos referente aos pontos (a)-(c) indicados na Fig. 31 obtidas ao resolver a Eq. (C.2) para $0 \leq t \leq t_f$, com $2 \leq n \leq 21$, quando $\delta = 1$ e $A = 1$, para (a) $Ca = 50$, (b) $Ca = 100$ e (c) $Ca = 200$. As condições iniciais são as mesmas da Fig. 29. Os tempos finais t_f são: (a) 12000, (b) 3000 e (c) 1060.



Fonte: (COUTINHO; ROCHA; MIRANDA, 2021)

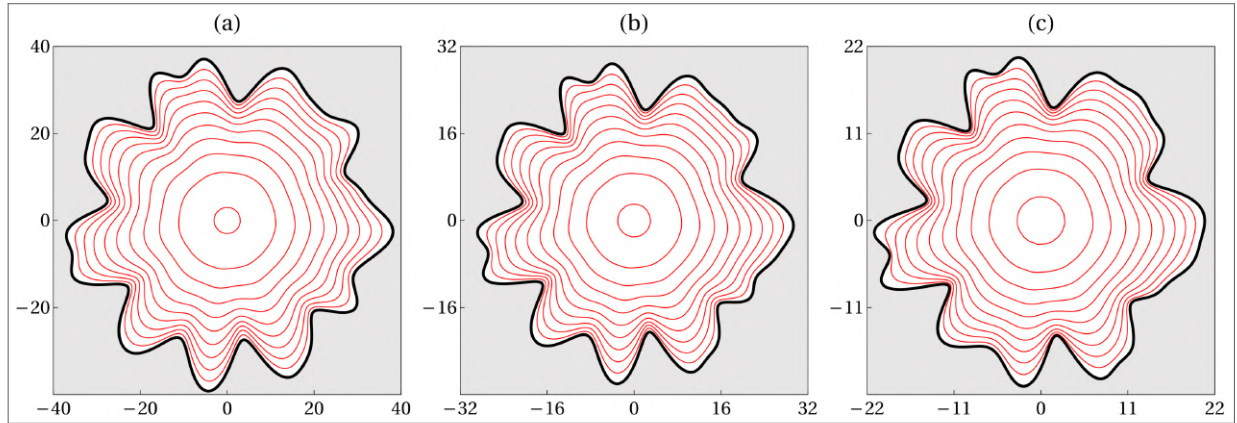
idêntica a Fig. 29(f). Analisando a Fig. 32, focamos nossa atenção no canto superior direito, que apresenta uma clara trifurcação na Fig. 32(c). Contudo, vemos que para $Ca = 100$ [Fig. 32(b)] o dedo não ramifica, ocorrendo a planificação e achatamento do mesmo. Já para $Ca = 50$ [Fig. 32(a)], temos um início de uma bifurcação, indicando que maiores valores do número de capilaridade favorecem a divisão de um dedo em três, gerando maiores perturbações, de acordo com o indicado na Fig. 31.

Enfatizamos que, embora um valor razoavelmente alto de Ca seja necessário para obtermos trifurcações, analisando as Figs. 29(c) e (f), vemos que tal condição não é suficiente. Ainda que a Fig. 29(c) possua os mesmos parâmetros da Fig. 29(f), ela não apresenta trifurcações. A única diferença entre as duas é a presença de estresses viscosos, o que nos leva a concluir que precisamos levar estes em consideração para capturarmos efeitos de trifurcação.

Por fim, na Fig. 33 estudamos a variação do contraste de viscosidade A para um dado $Ca = 200$ fixo. Representamos graficamente a interface em terceira ordem com todos os parâmetros idênticos à Fig. 29(f), salvo A , que toma os valores (a) $A = 0.75$, (b) $A = 0.85$ e (c) $A = 1$. Focamos novamente no dedo do canto superior direito, observando que para o menor valor de A utilizado [Fig. 33(a)], tal dedo não ramifica. Ao aumentarmos o contraste para $A = 0.85$ [Fig. 33(b)], vemos uma pequena protuberância no centro do dedo, indicando um início de separação do dedo. Apenas no valor máximo de A [Fig. 33(c)] obtemos uma trifurcação evidente. Também constatamos que o comportamento do perímetro reescalado $L(t_f)$ com $Ca = 200$ para diversos valores de A , apresenta comportamento similar ao encontrado na Fig. 31, com $L(t_f)$ crescendo juntamente a A . Tal comportamento é consistente com o esperado

para fluxos de Hele-Shaw (HOMSY, 1987).

Figura 33 – Evolução temporal dos padrões de dedos viscosos ao resolver a Eq. (C.2) para $0 \leq t \leq t_f$, com $2 \leq n \leq 21$, quando $\delta = 1$ e $Ca = 200$, para: (a) $A = 0.75$, (b) $A = 0.85$ e (c) $A = 1$. Os tempos t_f são (a) 2700, (b) 1550 e (c) 1060. As condições iniciais são as mesmas da Fig. 29(f).



Fonte: (COUTINHO; ROCHA; MIRANDA, 2021)

Neste capítulo, empregando o esquema de modos acoplados em terceira ordem, vemos que ao considerarmos os efeitos de estresses viscosos normais através da condição de pressão de Young-Laplace modificada, é possível capturarmos trifurcações nos dedos viscosos na emergência dos efeitos não lineares da dinâmica. Também constatamos um retardo no crescimento das perturbações, de acordo com estudos e experimentos prévios citados durante o capítulo e na introdução, secção 1.3. Vemos que a divisão de um dedo em três pode ocorrer independente de ruídos de fundo e é favorecida por maiores valores do contraste de viscosidade A e do número de capilaridade global.

4 PADRÕES DE FERROFLUIDOS CONFINADOS SOB CAMPOS MAGNÉTICOS CRUZADOS

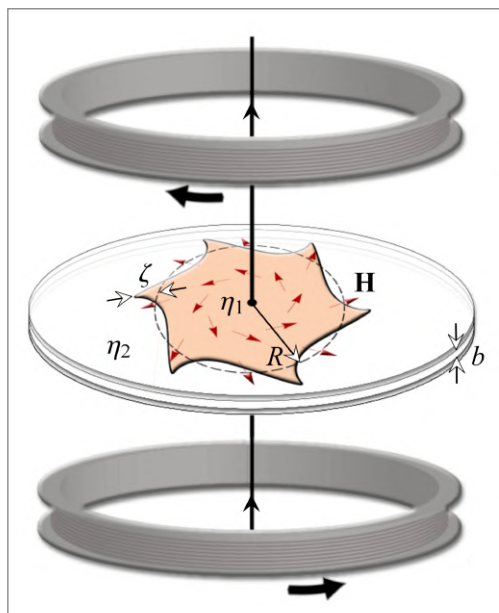
4.1 CAMPOS MAGNÉTICOS CRUZADOS

Considere o aparato ilustrado na Fig. 34, no qual uma célula de Hele-Shaw, de espaçamento b , contém uma gota de ferrofluido de raio R e viscosidade η_1 embebida em um fluido não magnético de viscosidade η_2 . Ambos fluidos são newtonianos e imiscíveis, com tensão superficial σ entre si. Consideramos a ação de dois campos magnéticos: um de caráter radial $\mathbf{H}_r$ gerado por um par de bobinas de anti-Helmholtz, possuindo correntes elétricas de mesma intensidade fluindo em sentidos opostos, e outro azimuthal $\mathbf{H}_\phi$, proveniente de uma corrente elétrica I que percorre um fio que passa pelo centro da célula. Ambas configurações de campos foram brevemente descritas no capítulo introdutório, Figs. 18 e 19. A combinação dos dois resulta em um campo cruzado

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_\varphi + \mathbf{H}_r = \frac{I}{2\pi r} \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{H_0}{R} r \hat{\mathbf{e}}_r. \quad (4.1)$$

Note que não há injeção de fluido no sistema, então R é constante no tempo e as instabilidades

Figura 34 – Representação esquemática de uma gota de ferrofluido de viscosidade η_1 embebida em um fluido não magnético de viscosidade η_2 , confinados em uma célula de Hele-Shaw de espaçamento b . O sistema é submetido a um campo magnético cruzado $\mathbf{H}$, formado pela combinação de um campo radial, gerado de um par de bobinas de anti-Helmholtz, e um campo azimuthal proveniente de uma corrente elétrica que passa pelo centro da célula.



Fonte: (OLIVEIRA; COUTINHO et al., 2021)

são provenientes do campo magnético.

Tal sistema foi primeiramente estudado em (YU; CHRISTOV, 2021), que mostrou através de um esquema de modos acoplados em *segunda* ordem e simulações fortemente não lineares que a ação de campos magnéticos cruzados pode induzir uma rotação na gota de ferrofluido com um padrão estável imutável. Neste capítulo, expandimos o estudo original, analisando importantes aspectos que não foram abordados, empregando um esquema de modos acoplados em *terceira* ordem, bem como simulações numéricas fortemente não lineares, investigando também efeitos de ruídos de fundo na estabilidade do sistema.

4.2 MODELAGEM TEÓRICA

4.2.1 Análise perturbativa de modos acoplados

A fim de descrevermos o sistema em estágios fracamente não lineares da dinâmica, empregamos novamente o método de modos acoplados em terceira ordem, descrito primeiramente na secção 2.2. O sistema é descrito pela lei de Darcy [Eq. (2.4)], contudo dada a presença dos campos magnéticos, ela é modificada tal que (TSEBERS; MAIOROV, 1980; TSEBERS, 1981; JACKSON; GOLDSTEIN; CEBERS, 1994)

$$\mathbf{v}_j = -\frac{b^2}{12\eta_j} \nabla \left[p_j - \frac{1}{2} \mu_0 \chi H^2 \delta_{j1} \right], \quad (4.2)$$

na qual $H = |\mathbf{H}|$ é dado pela Eq. (4.1), δ_{j1} representa a delta de Kronecker, χ a susceptibilidade magnética do ferrofluido e μ_0 a permeabilidade magnética na ausência de material. Dados efeitos de tração magnética que surgem da influência da componente normal da magnetização do ferrofluido na interface, a condição de Young-Laplace [Eq. (2.10)] também deve ser modificada, tal que (ROSENSWEIG, 1985; BLUMS; TSEBERS; MAIOROV, 1997; OLIVEIRA; MIRANDA, 2020)

$$p_1 - p_2 = \sigma \kappa - \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n)^2, \quad (4.3)$$

com $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$, onde $\mathbf{M}$ é a magnetização do ferrofluido. κ indica a curvatura da interface [Eq. (2.11)] e $\hat{\mathbf{e}}_n$ o vetor unitário normal à interface.

Logo, similarmente à secção 2.2, consideramos os potenciais de velocidade ϕ_j [Eq. (2.6)], a condição de contorno cinemática [Eq. (2.13)] e que o raio da interface deformada é descrito por $\mathcal{R}$ [Eq. (2.2)], tal que $|\zeta| \ll R$, obtendo a equação do movimento em terceira ordem para a perturbação, similar à Eq. (2.16), dada no Apêndice D, Eq. (D.1). Note que comprimentos

são reescalados por R e velocidades por $b^2\mu_0H_0^2/[12(\eta_1 + \eta_2)R]$. Tal adimensionalização será utilizada durante todo este capítulo.

Na equação (D.1), a taxa de crescimento linear adimensional é dada por

$$\lambda(n) = |n| \left[\chi(1 + \chi) - \chi J^2 - B(n^2 - 1) - in\chi^2 J \right], \quad (4.4)$$

que independe do tempo. Temos como parâmetros físicos relevantes o contraste de viscosidade $A = (\eta_2 - \eta_1)/(\eta_2 + \eta_1)$, a tensão superficial efetiva $B = \sigma(\mu_0H_0^2R)$, a susceptibilidade magnética χ e a força relativa entre os campos radial e azimutal $J = I/(2\pi H_0R)$. O primeiro termo dentro dos colchetes representa a desestabilização gerada pelo campo radial, enquanto os dois seguintes estabilizam o sistema, através do campo azimutal e tensão superficial, respectivamente.

Diferentemente das taxas de crescimento dos capítulos anteriores, temos um termo complexo, responsável pela propagação da interface perturbada, fazendo com que a interface gire com velocidade de fase dada por $v(n) = -\text{Im}[\lambda(n)/n] = \chi^2 J |n|$. Tal termo complexo é presente apenas se ambos campos, radial e azimutal, estejam presentes na dinâmica, caso algum deles seja ausente ($H_0 = 0$ ou $I = 0$), não haverá propagação de pacotes de onda.

4.2.2 *Vortex Sheet* e o método da integral de contorno

Para descrevermos a evolução da interface de forma fortemente não linear para estágios avançados do crescimento dos padrões, tomamos como base o método numérico da integral de contorno (*boundary integral method*) descrito em (OLIVEIRA; MIRANDA, 2020), que o utilizou para obter o padrão não linear para o caso cuja gota de ferrofluido foi submetida apenas ao campo radial. Tal método acompanha a evolução temporal da intensidade de *vortex sheet* adimensional $\gamma = s_\alpha(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \hat{s}$, onde $\hat{s}$ é o vetor unitário tangente à interface, tal que, ao generalizar para o problema com campos cruzados obtemos

$$\begin{aligned} \gamma = & -2As_\alpha \mathbf{W} \cdot \hat{s} + 2B \frac{\theta_{\alpha\alpha}}{s_\alpha} - 2\chi \left(rr_\alpha - \chi r^3 r_\alpha \frac{\theta_\alpha}{s_\alpha^2} \right) \\ & + 2\chi J^2 \left\{ \frac{r_\alpha}{r^3} - \chi \frac{r_\alpha}{r} \left[\frac{\theta_\alpha}{s_\alpha^2} - \frac{1}{s_\alpha^4} \left(\frac{r_\alpha^4}{r^2} - r^2 \right) \right] \right\} \\ & + 2\chi^2 J \left\{ \frac{\theta_\alpha}{s_\alpha^2} (r_\alpha^2 - r^2) + \frac{1}{s_\alpha^4} (r_\alpha^4 - r^4) \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Aqui, s representa o comprimento de arco da interface e θ o ângulo tangente a ela. A curva plana que descreve a interface tem α como o seu parâmetro e os subscritos representam

derivadas parciais. A Eq. (4.5) é integrodiferencial e precisa ser resolvida para cada passo de tempo para a *vortex sheet* γ , pois a velocidade da interface $\mathbf{W}$ é dada por uma integral de Birkhoff-Rott que depende de γ (TRYGGVASON; AREF, 1983; DAI; SHELLEY, 1993; CENICEROS; HOU; SI, 1999). Detalhes sobre este modelo são encontrados em (CENICEROS; HOU; SI, 1999; OLIVEIRA; MIRANDA, 2020).

4.3 COMPARAÇÃO DA MORFOLOGIA PERTURBATIVA COM A COMPLETAMENTE NÃO LINEAR

Procuramos investigar como as soluções perturbativas obtidas através do esquema de modos acoplados da Eq. (D.1) se comparam com as soluções numéricas não perturbativas e fortemente não lineares do método da integral de contorno. Para tal, usamos os parâmetros $B = 5 \cdot 10^{-4}$, $J = 1$, $\chi = 0.25$ e $A = -0.9$. Tais parâmetros são escolhidos de forma que hajam instabilidades na interface, mas que estas ainda possam ser capturadas pelo nosso esquema perturbativo ($\zeta \ll R$). Note que $A = -0.9$ é estabilizante no problema usual de Saffman-Taylor com injeção. Todos os parâmetros utilizados nesse capítulo são condizentes com experimentos de ferrofluidos em células de Hele-Shaw (LIAO; KRUEGER, 1979; BACRI; SALIN, 1984; DICKSTEIN et al., 1993; JACKSON; GOLDSTEIN; CEBERS, 1994; FLAMENT et al., 1996; FLAMENT et al., 1998; PACITTO et al., 2000; PACITTO; FLAMENT; BACRI, 2001; CHEVALIER et al., 2006; HILLIER; JACKSON, 2007; CHEN; TSAI; MIRANDA, 2008; JOHN; MAY; STANNARIUS, 2011; ZAKINYAN; BEKETOVA; DIKANSKY, 2017; LI; KAO; WEN, 2018)

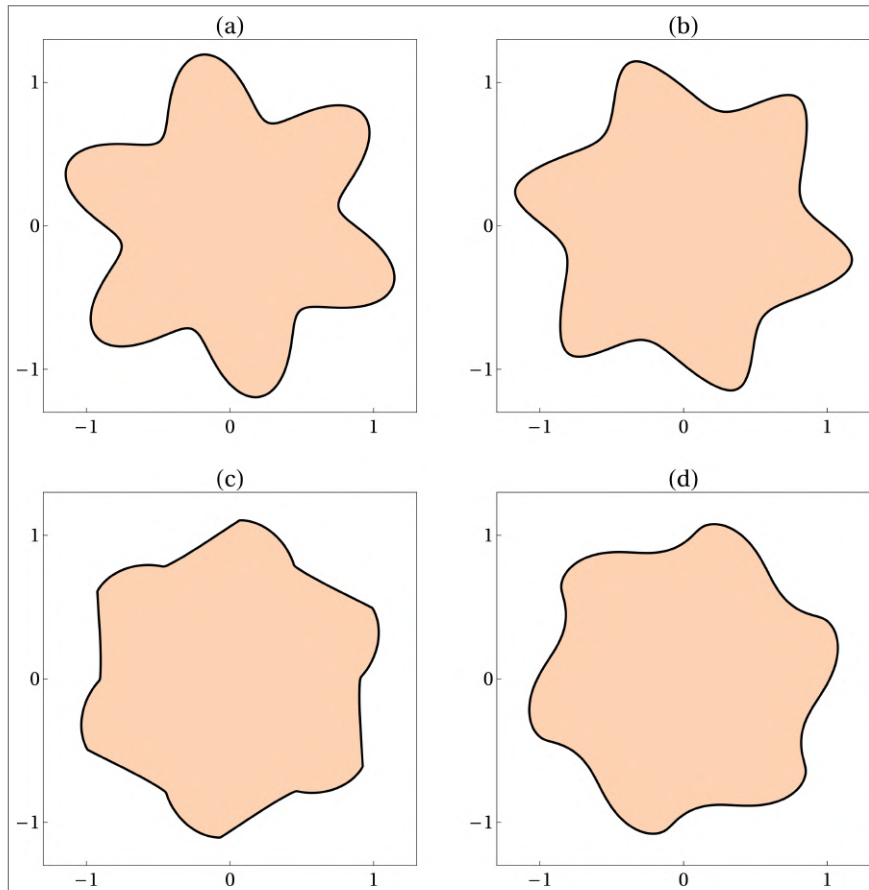
Resolvemos a equação de modos acoplados [Eq. (D.1)] consistentemente até primeira, segunda e terceira ordem. Modelamos as interfaces perturbativas considerando o acoplamento não linear de 60 modos de Fourier, um modo fundamental $n = n_{\max} = 6$, definido pela Eq. (2.22), e seus harmônicos $2n, 3n, \dots$ e $60n$. Como na secção 2.3.2, escrevemos a perturbação ζ em termos dos modos senos e cossenos reais $a_n(t)$ e $b_n(t)$ [Eqs. (B.3) e (B.4)] e resolvemos numericamente.

Assim como na Fig. 28, procuramos evitar o crescimento artificial dos modos harmônicos, consequentemente, impomos as condições iniciais $a_{k \cdot n}(0) = b_{k \cdot n}(0) = 0$ para $k > 1$, $|a_n(0)| = 10^{-3}$ e $b_n(0) = 0$. Note que, em primeira ordem, dada a presença do termo complexo na taxa de crescimento linear, os modos a_n e b_n são acoplados e tomam um perfil oscilatório, resultando na rotação do padrão.

Para o caso fortemente não linear, resolvemos a Eq. (4.5) via simulações numéricas, con-

siderando uma pequena perturbação inicial ondulatória, com número de onda $n = n_{\max} = 6$, de amplitude 10^{-3} . Desta forma, podemos comparar diretamente casos lineares, fracamente e fortemente não lineares.

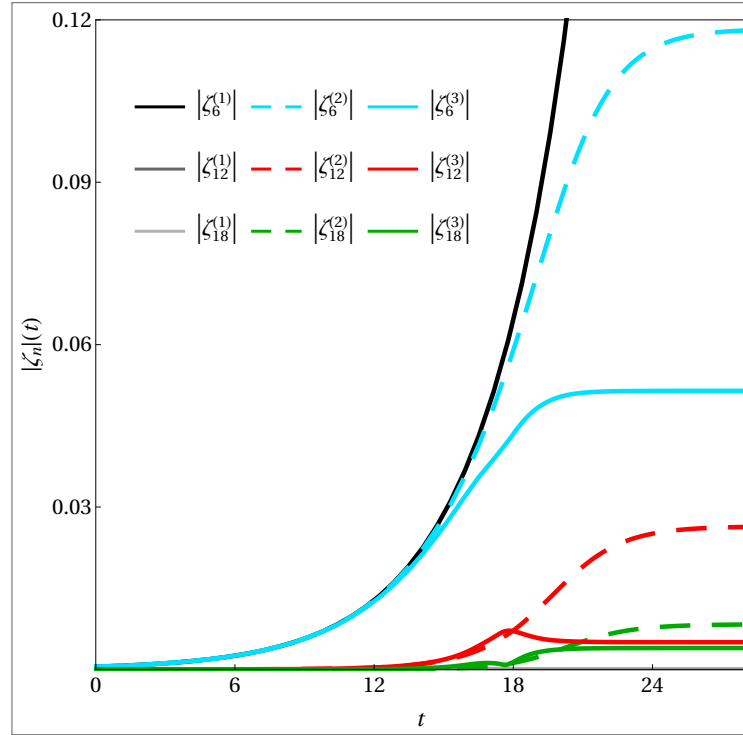
Figura 35 – Comparação das soluções perturbativas para a interface do ferrofluido obtida ao resolver a Eq. (D.1) até (a) primeira, (b) segunda e (c) terceira ordem, com (d) a solução fortemente não linear obtida do método da integral de contorno (Sec. 4.2.2). Para todas interfaces, $A = -0.9$, $B = 5 \cdot 10^{-4}$, $\chi = 0.25$, $J = 1$ e $t = 20$.



Fonte: (OLIVEIRA; COUTINHO; et al., 2021)

Na Fig. 35, representamos as interfaces perturbativas de (a) primeira, (b) segunda e (c) terceira ordem e (d) o padrão fortemente não linear equivalente, todos para um mesmo tempo final $t_f = 20$. Informações adicionais sobre as amplitudes do modo fundamental $|\zeta_n(t)|$ e dos seus dois primeiros harmônicos $|\zeta_{2n}(t)|$ e $|\zeta_{3n}(t)|$ para as interfaces das Figs. 35(a)-(c) estão presentes na Fig. 36. Comparamos primeiramente a Fig. 35(a) linear, com a Fig. 35(d) completamente não linear. Vemos que a figura linear apresenta uma estrutura de seis dedos imposta pelo modo fundamental, mas não contém nenhuma especificidade da morfologia do sistema. Note que na Fig. 36 os modos harmônicos lineares não crescem e o modo fundamental cresce exponencialmente, como esperado. Dado o termo complexo da taxa de crescimento [Eq.

Figura 36 – Evolução temporal da amplitude do modo harmônico $|\zeta_{n=n_{\max}=6}(t)|$ e dos dois primeiros harmônicos $|\zeta_{2n}(t)|$ e $|\zeta_{3n}(t)|$ das interfaces em primeira (tons de cinza), segunda (tracejado) e terceira (sólido) ordem da Fig. 35.



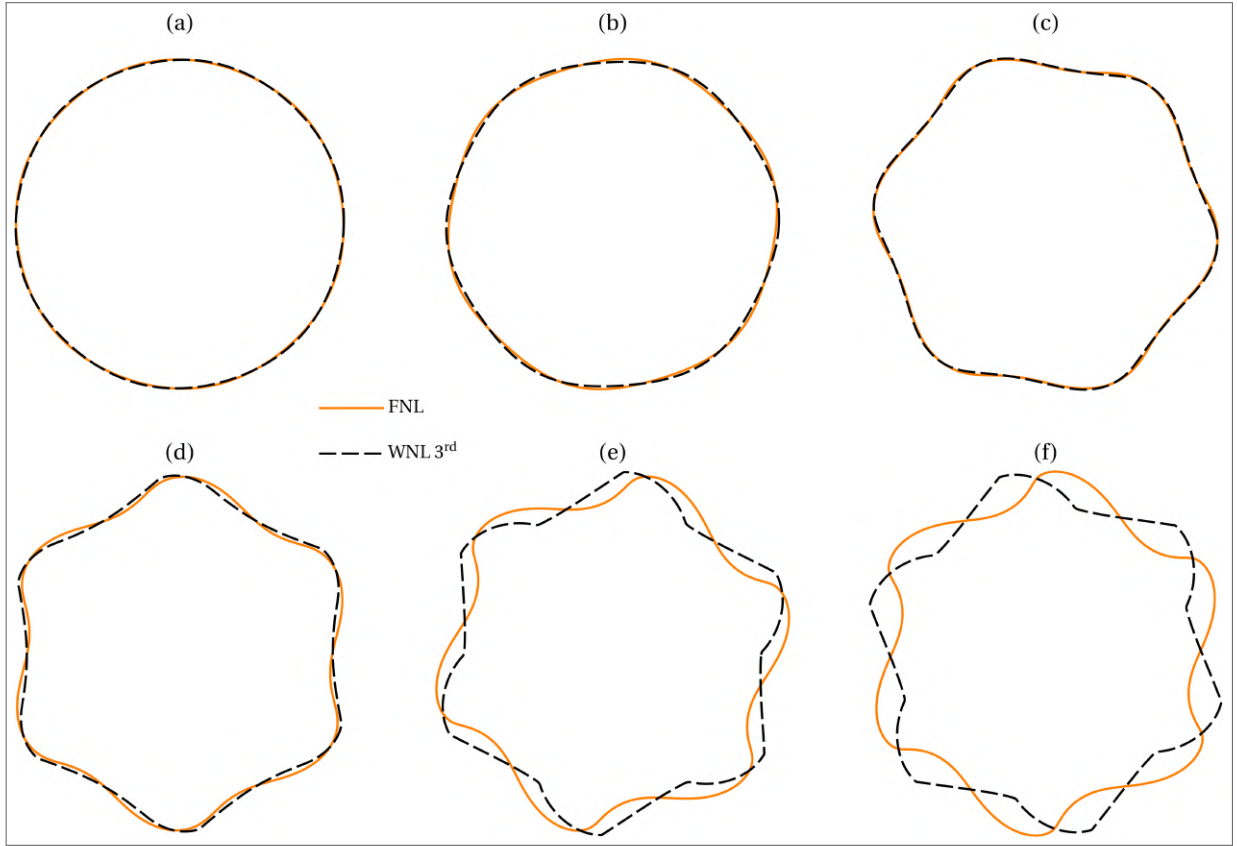
Fonte: (OLIVEIRA; COUTINHO et al., 2021)

(4.4)], a interface rotacional com velocidade de fase $v(n) = -\text{Im}[\lambda(n)/n] = \chi^2 J|n|$.

Dado o mal resultado da interface linear, analisamos a interface de segunda ordem Fig. 35(b). Diferentemente da Fig. 35(a), notamos uma leve inclinação dos dedos no sentido anti-horário, como é visto na solução exata do problema. Além disso, tal interface é estável, mantendo sua forma após ocorrer a saturação dos modos, como vemos na Fig. 36. Tais diferenças entre os padrões lineares e de segunda ordem ocorrem devido ao acoplamento do modo fundamental com seus harmônicos em segunda ordem. Da Fig. 36, vemos que há um crescimento dos modos harmônicos em contraste com o regime linear, contudo observamos que a amplitude do fundamental atinge valores maiores que o esperado para um esquema perturbativo. Vemos também que o aspecto geral da interface não é o mesmo da interface completamente não linear.

Comparamos então, a interface de terceira ordem [Fig. 35(c)] com a fortemente não linear [Fig. 35(d)]. Primeiramente, na Fig. 36 vemos uma grande atenuação do modo fundamental, bem como o crescimento dos harmônicos, dado o acoplamento dos modos em terceira ordem. Observando os padrões, vemos uma concordância nas características morfológicas, principalmente o formato dos dedos, que são curtos e inclinados no sentido anti-horário. Na Fig. 37,

Figura 37 – Superposição da evolução temporal das interfaces fortemente não lineares (em laranja) e fracamente não linear de terceira ordem (em preto tracejado) para os tempos (a) $t = 5$, (b) $t = 10$, (c) $t = 15$, (d) $t = 17$, (e) $t = 20$ e (f) $t = 25$. Os parâmetros são os mesmos da Fig. 35.



Fonte: (OLIVEIRA; COUTINHO et al., 2021)

apresentamos a evolução temporal da superposição das interfaces fortemente não linear e de terceira ordem. Constatamos que ambas são estáveis e possuem velocidade de fase similar. Tal resultado é consistente com o obtido por (YU; CHRISTOV, 2021), onde, para o caso específico $A = 1$ e $\chi = 1$, ocorre o mesmo efeito.

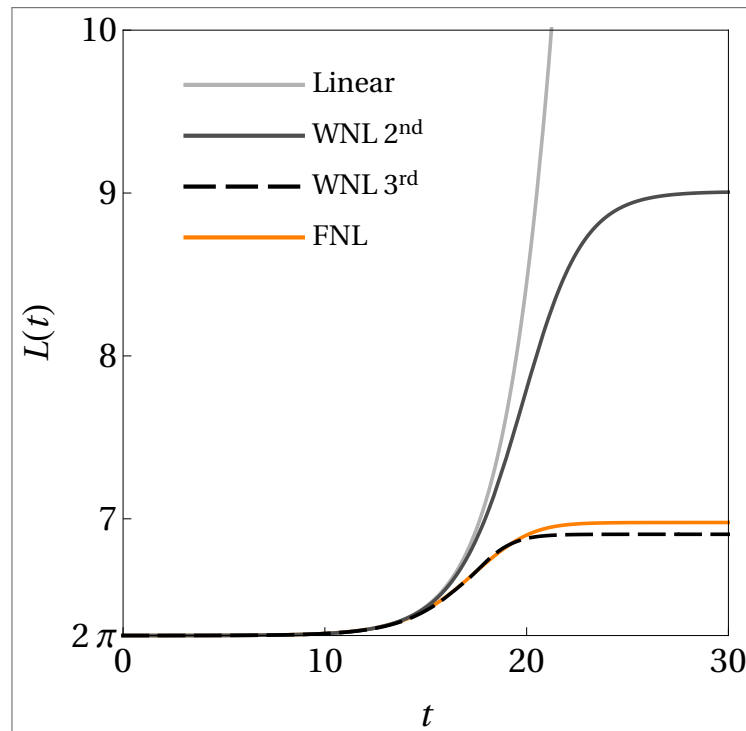
Evidentemente, há diferenças entre ambas interfaces. A perturbativa mostra um perfil mais agudo e possui um segmento em linha reta, diferentemente da solução fortemente não linear. Tais diferenças são ligadas às limitações do esquema perturbativo, contudo é possível obter as principais características morfológicas a partir deste método, desde que se vá até a terceira ordem.

Por fim, na Fig. 38, analisamos a evolução temporal do perímetro $L(t)$ das interfaces presentes na Fig. 35. Para as interfaces obtidas através do esquema perturbativo, temos que

$$L(t) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\mathcal{R}^2(t) + \left[\frac{d\mathcal{R}(t)}{d\varphi} \right]^2} d\varphi. \quad (4.6)$$

Da Fig. 38 podemos perceber a melhor concordância da teoria perturbativa de terceira ordem

Figura 38 – Comportamento do perímetro da interface $L(t)$ em relação ao tempo t correspondente aos padrões ilustrados na Fig. 35, lineares (Linear), fracamente não lineares de segunda (WNL 2nd) e terceira (WNL 3rd) ordem e fortemente não linear (FNL). Os parâmetros são os mesmo da Fig. 35.



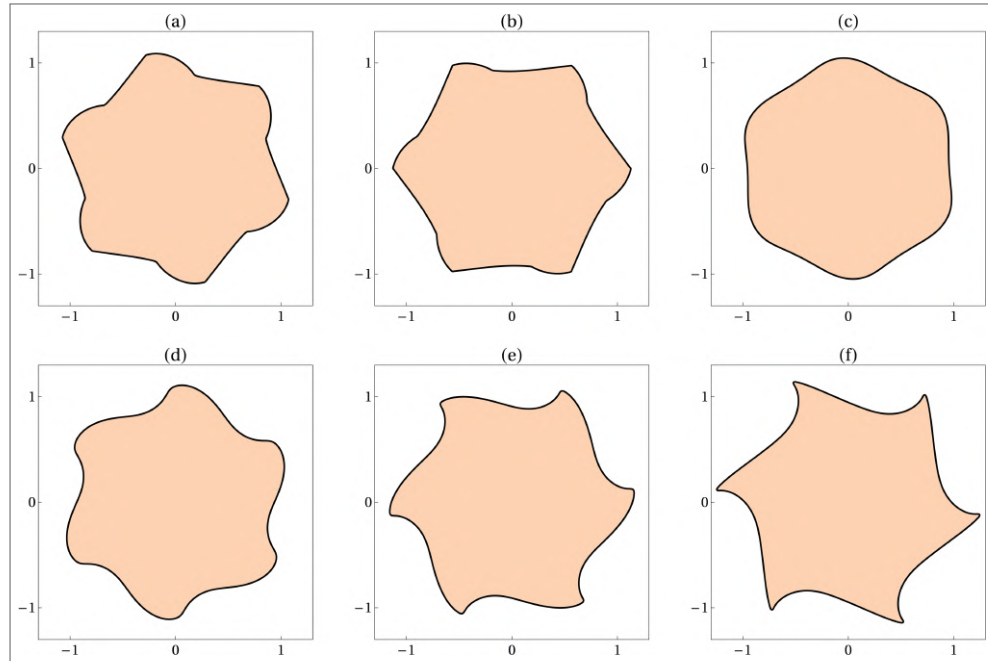
Fonte: (OLIVEIRA; COUTINHO et al., 2021)

com o resultado fortemente não linear, em relação às ordens menores. O perímetro linear cresce com caráter exponencial, enquanto o de segunda ordem atinge a saturação para $L(t_s) \approx 9.00$ e $t_s \approx 28.5$, onde t_s é o tempo de saturação, no qual $L(t)$ atinge um valor constante. Já para a curva de terceira ordem, temos que a saturação ocorre para $L(t_s) \approx 6.90$ e $t_s \approx 22.0$, que é consideravelmente mais próximo dos valores obtidos pelo esquema completamente não linear [$L(t_s) \approx 6.98$ e $t_s \approx 22.7$].

Podemos agora estudar como a interface se comporta ao variarmos o contraste de viscosidade A . A Fig. 39 mostra interfaces para três valores ilustrativos de A : $A = -0.9$ [(a) e (d)], $A = 0$ [(b) e (e)] e $A = 0.9$ [(c) e (f)], em terceira ordem fracamente não linear na primeira linha [(a)-(c)] e fortemente não linear na segunda [(d)-(f)]. Para as Figs. 39(a), (b), (d) e (e), o tempo final é de $t_f = 25$, já para as Figs. 39(c) e (f), temos os respectivos tempos finais $t_f = 14.2$ e $t_f = 19.4$.

Tal diferença no tempo final para o caso $A = 0.9$ [Figs. 39(c) e (f)] ocorre devido à não saturação da interface, dada a maior instabilidade do sistema induzida pelo maior valor do contraste de viscosidade. Fica também clara a ineficácia do método perturbativo para sistemas muito instáveis, de forma que para este caso, não é possível obter os principais

Figura 39 – Interfaces perturbativas de terceira ordem para a interface do ferrofluido obtidas ao resolver a Eq. (D.1) [(a)-(c)] e interfaces fortemente não lineares obtidas por simulações numéricas através do método da integral de contorno descrito na Sec. 4.2.2 [(d)-(f)]. Para todas interfaces, $B = 5 \cdot 10^{-4}$, $\chi = 0.25$, $J = 1$. Para (a) e (d) $A = -0.9$; para (b) e (e) $A = 0$; e para (c) e (f) $A = 0.9$. Os tempos de cada padrão são dados no texto.



Fonte: (OLIVEIRA; COUTINHO et al., 2021)

aspectos morfológicos do sistema. Como esperado, ao diminuirmos o valor de A , o sistema fica progressivamente mais estável, e ambas interfaces fortemente e fracamente não lineares atingem um estado estacionário, ou seja, rotacionam sem mudar de forma. Constatamos que um maior valor do contraste de viscosidade contribui para um dedo mais agudo.

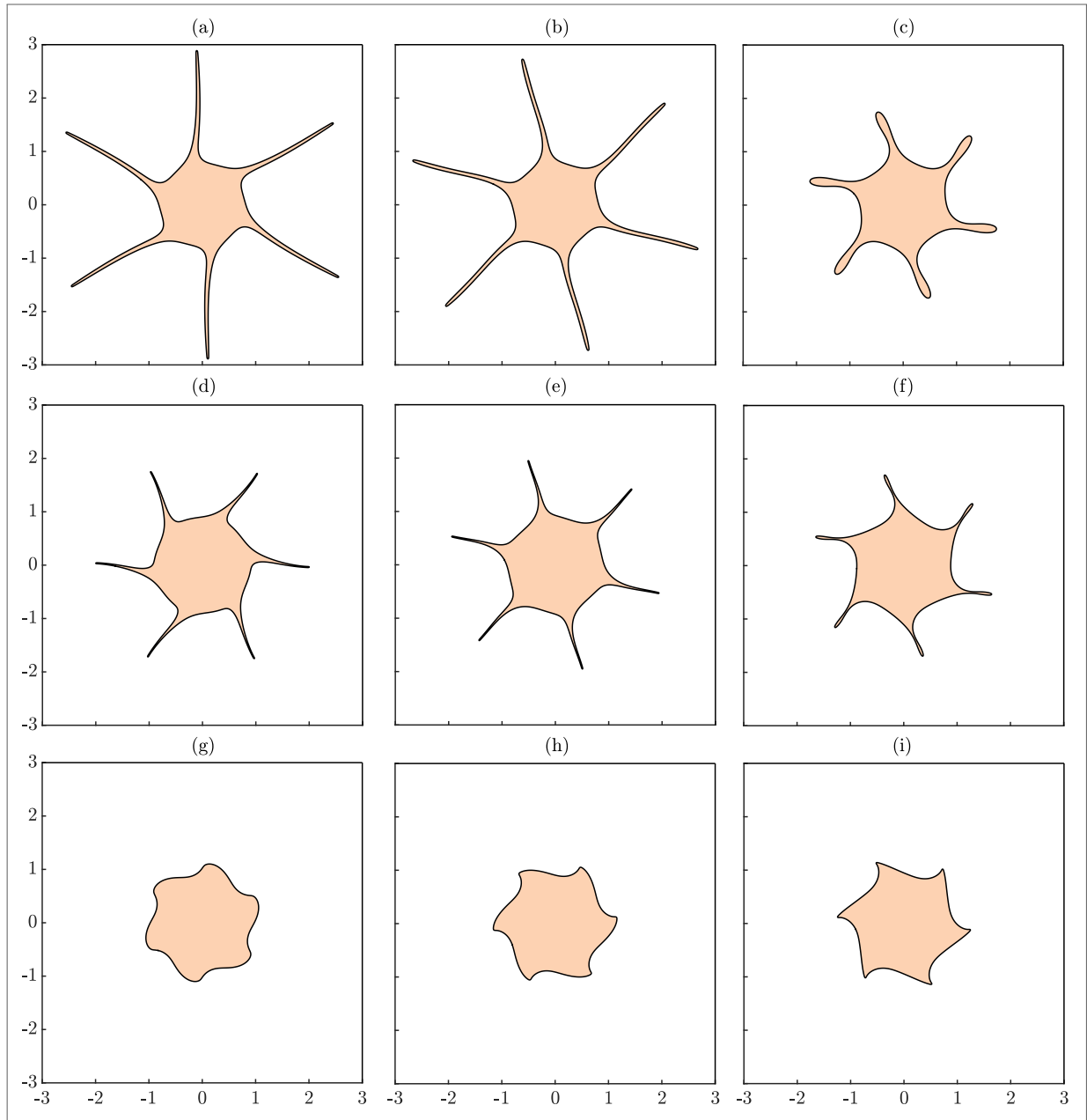
Logo, concluímos que conseguimos obter as principais características morfológicas do sistema através do esquema perturbativo de modos acoplados em terceira ordem, desde que os padrões de ferrofluidos não sejam muito deformados.

4.4 INSTABILIDADES NO REGIME FORTEMENTE NÃO LINEAR

Nesta secção, iremos analisar apenas interfaces obtidas com o método numérico não perturbativo da integral de contorno, no regime fortemente não linear. Na Fig. 40, analisamos como o sistema se comporta ao variarmos A e χ , mantendo a tensão superficial $B = 5 \cdot 10^{-5}$ constante e variando a corrente efetiva J , a fim de que a parte real da taxa de crescimento linear $[\text{Re}[\lambda(n)]]$ se mantenha constante. Desta forma, garantimos que as diferenças morfológicas são associadas a efeitos não lineares. Constatamos que variações em B não influenciam

fundamentalmente na morfologia dos padrões, mas definem o número de dedos emergentes.

Figura 40 – Padrões fortemente não lineares para um ferrofluido confinado sobre influência de campos magnéticos cruzados, obtidos com uma condição inicial simétrica. Os padrões são obtidos para $A = -0.9$ [(a), (d), (g)], $A = 0$ [(b), (e), (h)], e $A = 0.9$ [(c), (f), (i)]. Tomamos $\chi = 0.1$ e $J = 0.69$ [(a)-(c)], $\chi = 0.175$ e $J = 0.90$ [(d)-(f)] e $\chi = 0.25$ e $J = 1$ [(g)-(i)]. Os valores do tempo final para cada caso são: (a) $t = 29$, (b) $t = 25$, (c) $t = 20.80$, (d) $t = 27.10$, (e) $t = 22.30$, (f) $t = 19.40$, (g) $t = 29$, (h) $t = 25$, and (i) $t = 19.40$. A tensão superficial efetiva é $B = 5 \cdot 10^{-4}$.

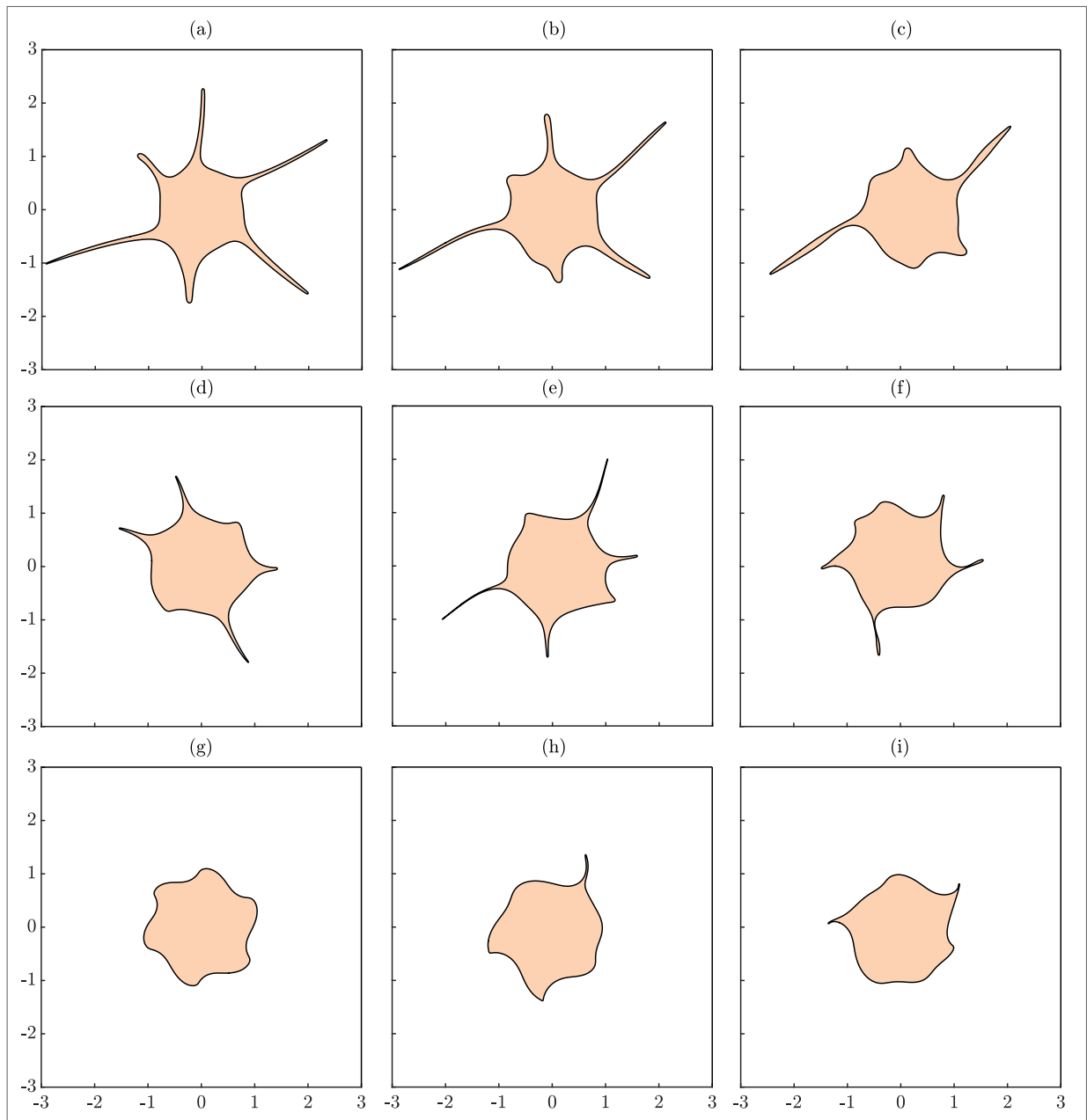


Fonte: (OLIVEIRA; COUTINHO et al., 2021)

Apresentamos nas Figs. 40 e 41 interfaces para três valores distintos de A : $A = -0.9, 0$ e 0.9 , na primeira, segunda e terceira coluna, respectivamente. Para a primeira linha [(a)-(c)], $\chi = 0.1$ e $J = 0.69$ para a segunda [(d)-(f)], $\chi = 0.175$ e $J = 0.90$; e para a última [(g)-(h)], $\chi = 0.25$ e $J = 1$.

A diferença primordial entre as Figs. 40 e 41 é a condição inicial de contorno. Para a Fig. 40 é imposta uma perturbação inicial ondulatória, com número de onda $n = n_{\max} = 6$, assim como na Fig. 35. Esta condição é dita simétrica. Para a Fig. 41 consideramos a superposição de 30 modos, cada um com uma fase aleatória associada. Esta condição é dita aleatória. Ambas possuem amplitude inicial 10^{-3} .

Figura 41 – Padrões fortemente não lineares para um ferrofluido confinado sobre influência de campos magnéticos cruzados, obtidos com uma condição inicial aleatória. Os parâmetros são os mesmos da Fig. 40. Os valores do tempo final para cada caso são: (a) $t = 25.30$, (b) $t = 21.20$, (c) $t = 17.14$, (d) $t = 24.30$, (e) $t = 19.34$, (f) $t = 15.80$, (g) $t = 60$, (h) $t = 17.56$, e (i) $t = 16.40$.



Fonte: (OLIVEIRA; COUTINHO et al., 2021)

Primeiramente, notamos que todas interfaces nas Figs. 40 e 41 apresentam seis dedos,

cujos aspectos morfológicos variam com A , χ e condições iniciais. Constatamos que dada a ação de campos cruzados, em geral, são formados dedos pontudos e inclinados, que se propagam na interface no sentido anti-horário.

Da Fig. 40 concluímos que um menor valor da susceptibilidade magnética contribui para formação de dedos mais alongados e finos, como vemos nas Figs. 40(a)-(c). Observamos que, neste caso, a direção da inclinação e tamanho dos dedos depende do contraste de viscosidade A . Dado o baixo valor de χ , efeitos viscosos sobrepõem efeitos magnéticos e, para o caso no qual ocorrem instabilidades de Saffman-Taylor [$A = 0.9$, Fig. 40(c)], vemos uma estrutura diferente das outras, com dedos mais grossos e curtos. Notamos também que a direção cujos dedos do fluido não magnético externo penetram no ferrofluido é dependente do sinal de A . Note que, para $A = 0$, os dedos apresentam maior simetria. Tais observações também são válidas para as Figs. 40(d)-(f), contudo para o caso de maior susceptibilidade magnética [Figs. 40(g)-(i)], os efeitos magnéticos começam a dominar a dinâmica do sistema. Tais aspectos morfológicos foram discutidos no fim da secção 4.3, na Fig. 39.

Na Fig. 41, vemos que, embora a clara distinção com os padrões apresentados na Fig. 40, os aspectos morfológicos discutidos ainda são presentes. Todas interfaces apresentam o mesmo número de dedos e suas variações com A e χ seguem as mesmas tendências, além de que todos rotacionam no sentido anti-horário.

A Fig. 41 nos permite obter informações sobre a instabilidade dinâmica dos padrões. Concluímos que, exceto o padrão (g), todos os outros são instáveis, ou seja, não atingem um estado estacionário, tal que a maior parte destas estruturas de ferrofluidos irá evoluir de maneira instável, não chegando em um estado no qual ela irá rotacionar com uma morfologia imutável. Ao analisarmos a evolução do perímetro das interfaces simétricas da Fig. 40, vemos que apenas os padrões (g) e (h) são estáveis, isto é, estruturas que giram sem mudar de forma.

Concluímos que a condição simétrica pode gerar uma estabilidade que não ocorre sobre uma perturbação aleatória, mas todo padrão simétrico instável corresponde a um padrão de condição inicial aleatória instável. Vemos também a partir Figs. 40(g)-(i) que um maior contraste de viscosidade favorece uma interface instável, como esperado do problema de Saffman-Taylor.

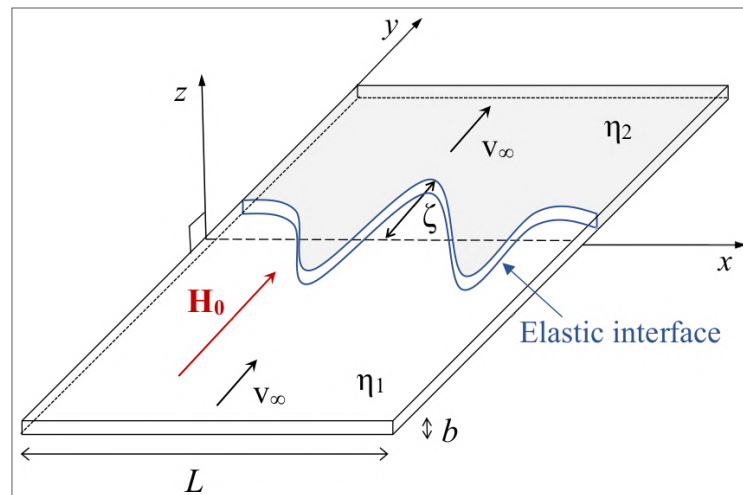
Por fim, ao compararmos todas as interfaces presentes neste capítulo [Figs. 39-41] com as figuras da introdução (Cap. 1) que consideram apenas a influência de um dos dois campos, radial [Fig. 18] ou azimutal [Fig. 19], vemos que os resultados são radicalmente diferentes e inesperados, ilustrando a não trivialidade do sistema e a importância de um estudo que combina a ação de ambos os campos.

5 FORMAÇÃO DE PADRÕES MAGNETOELÁSTICOS EM CÉLULAS DE HELE-SHAW RETANGULARES

5.1 MAGNETOELASTICIDADE EM CÉLULAS DE HELE-SHAW

Procuramos introduzir o problema magnetoelástico análogo ao problema original de Saffman-Taylor (SAFFMAN; TAYLOR, 1958), a fim de entender como efeitos magnéticos e elásticos podem afetar a morfologia das interfaces. Para isso, diferentemente dos capítulos anteriores, trabalharemos com a geometria retangular, como esquematizado na Fig. 42.

Figura 42 – Representação esquemática do problema magnetoelástico em uma célula de Hele-Shaw horizontal de espaçamento b . O fluido 1 é não magnético e possui viscosidade η_1 e o fluido 2 é um ferrofluido de viscosidade η_2 . Temos um fluxo externo de velocidade constante $\mathbf{v}_\infty$. A interface separando os fluidos é elástica e possui rigidez ν dependente da curvatura. Um campo magnético uniforme $\mathbf{H}_0$ é aplicado no plano da célula, perpendicular à interface não perturbada, que inicialmente está em $y = 0$.



Fonte: (COUTINHO; MIRANDA, 2020b)

Consideramos uma célula de Hele-Shaw horizontal de espaçamento b contendo dois fluidos imiscíveis semi-infinitos, sendo o fluido injetado de menor viscosidade η_1 e o fluido deslocado de maior viscosidade η_2 . A injeção ocorre a uma velocidade constante $\mathbf{v}_\infty$ em $y = -\infty$, tal que o fluido deslocado é removido em $y = +\infty$ com a mesma velocidade. Descrevemos o problema em um referencial se movendo com velocidade $\mathbf{v}_\infty$, a fim de que a interface se deforme mas, em média, não se desloque de $y = 0$. O fluido deslocado é não magnético, enquanto o fluido injetado é um ferrofluido de magnetização $\mathbf{M}$, assumida colinear com o campo magnético uniforme externo aplicado

$$\mathbf{H}_0 = H_0 \hat{\mathbf{y}}, \quad (5.1)$$

tal que $\mathbf{M}(\mathbf{H}) = M(H_0)\hat{\mathbf{y}}$, onde $|\mathbf{M}| = M$ e $\hat{\mathbf{y}}$ representa o vetor unitário na direção y (ROSENSWEIG, 1985; BLUMS; TSEBERS; MAIOROV, 1997; PACITTO; FLAMENT; BACRI, 2001; ANDELMAN; ROSENSWEIG, 2008).

Adaptamos a lei de Darcy [Eq. (2.4)] para este problema, obtendo (ROSENSWEIG, 1985; BLUMS; TSEBERS; MAIOROV, 1997)

$$\mathbf{v}_j + \mathbf{v}_\infty = -\frac{b^2}{12\eta_j} \left\{ \nabla p_j - \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{+b/2} \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} dz \right\}, \quad (5.2)$$

onde $j = 1$ ($j = 2$) representa o fluido injetado (deslocado). Note que para o fluido injetado, $|\mathbf{M}| = 0$.

O campo magnético local $\mathbf{H}$ da Eq. (5.2) difere do campo aplicado [Eq. (5.1)] por um campo de demagnetização do ferrofluido polarizado

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_d, \quad (5.3)$$

onde $\mathbf{H}_d = -\nabla\varphi$ e φ é o potencial magnético escalar. O campo de demagnetização precisa ser considerado, pois como $\mathbf{H}_0$ é uniforme no espaço, seu gradiente é nulo e não influenciará na lei de Darcy. Como mostraremos, efeitos de demagnetização serão fundamentais para a morfologia magnetoelástica do sistema.

Como o fluxo é irrotacional, definimos $\mathbf{v}_j = -\mathbf{v}_\infty - \nabla\phi_j$, na qual ϕ_j é o potencial de velocidade. Como ambos lados da lei de Darcy são gradientes de campos escalares, integramos-a em ambos lados, obtendo

$$\phi_j = \frac{b^2}{12\eta_j} \left\{ p_j + \mu_0 \frac{M}{b} \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{\partial\varphi}{\partial y} dz \right\} + \eta_j \mathbf{v}_\infty y, \quad (5.4)$$

na qual

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^2r' = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{M \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{n}' dx' dz'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}, \quad (5.5)$$

onde o eixo z é transversal às placas da célula. As coordenadas com linha $\mathbf{r}'$ são as variáveis de integração no domínio magnético $\mathcal{S}$ e $\mathbf{n}'$ representa o vetor unitário normal à $\mathcal{S}$. As variáveis sem linha $\mathbf{r}$ denotam pontos arbitrários no espaço. Note que o potencial escalar magnético depende da forma da interface.

Ao considerarmos o fluxo incompressível $\nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0$, considerando que $\mathbf{v}_j \rightarrow \mathbf{v}_\infty$ em $y \rightarrow \pm\infty$, temos que

$$\phi_j = \sum_{k \neq 0} \phi_{jk}(t) e^{(-1)^{j-1}|k|y} e^{ikx}. \quad (5.6)$$

Para modelarmos a interface elástica, seguimos (HE; LOWENGRUB; BELMONTE, 2009) e consideramos que a interface separando os fluidos é uma membrana elástica fina de rigidez (*bending rigidity*) dependente da curvatura dada por

$$\nu = \nu(\kappa) = \nu_0 [C e^{-\lambda^2 \kappa^2} + 1 - C], \quad (5.7)$$

onde

$$\kappa = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \quad (5.8)$$

representa a curvatura local da interface na célula de Hele-Shaw retangular. Este modelo é baseado no efeito de enfraquecimento de curvatura (*curvature weakening effect*), no qual deformações na interface tendem a diminuir a sua rigidez, logo, $\nu(\kappa)$ deve diminuir com o aumento de κ . Na Eq. (5.7), ν_0 representa a rigidez máxima, $0 \leq C < 1$ a razão de rigidez que dita a proporção de ligações intramoleculares quebradas através de uma deformação. Por fim, $\lambda > 0$ é um comprimento característico para além do qual $\nu(\kappa)$ tem seu valor bastante reduzido.

Estudamos este modelo de elasticidade com intuito de facilitar a conexão com possíveis experimentos futuros de instabilidades magnetoelásticas. A interface elástica gerada por uma reação química já foi estudada experimentalmente (PODGORSKI et al., 2007) e teoricamente (HE; LOWENGRUB; BELMONTE, 2009; CARVALHO; MIRANDA; GADÊLHA, 2013; ZHAO et al., 2016) para fluxos não magnéticos em células de Hele-Shaw. Embora haja alguns poucos estudos de instabilidades magnetoelásticas em células de Hele-Shaw (ANJOS et al., 2019; LIVERA; MIRANDA, 2020), ainda não há experimentos para tal sistema. Contudo, *a priori*, não há nenhum impedimento prático para realização de tal.

Como estamos lidando com uma interface elástica, precisamos alterar a condição de Young-Laplace para levarmos em conta efeitos de rigidez no lugar da tensão superficial. Seguindo (HE; LOWENGRUB; BELMONTE, 2009; CARVALHO; MIRANDA; GADÊLHA, 2013; ZHAO et al., 2016), obtemos

$$\begin{aligned} (p_1 - p_2)|_{y=\zeta} &= \frac{1}{2} \nu''' \kappa^2 \kappa_s^2 + \nu'' \left(3\kappa \kappa_s^2 + \frac{1}{2} \kappa^2 \kappa_{ss} \right) + \nu' \left(\frac{1}{2} \kappa^4 + 3\kappa_s^2 + 2\kappa \kappa_{ss} \right) \\ &+ \nu \left(\frac{1}{2} \kappa^3 + \kappa_{ss} \right) - \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2, \end{aligned} \quad (5.9)$$

na qual as linhas representam derivadas com respeito a curvatura κ e os subscritos derivadas com respeito ao comprimento de arco s . Note que todos efeitos elásticos são considerados nesta condição. Como neste modelo ocorre uma reação química na interface entre os fluidos

formando uma fina membrana entre os dois, consideramos que eles não estão em contato direto e efeitos de tensão superficial são desprezíveis.

Dada a geometria retangular do sistema, a interface será descrita por

$$y = \zeta(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \zeta_k(t) \exp(ikx), \quad (5.10)$$

onde

$$\zeta_k(t) = \frac{1}{L} \int \zeta(x, t) \exp(-ikx) dx \quad (5.11)$$

é o modo de Fourier complexo de número de onda k e $0 \leq x \leq L$. Impomos uma condição de contorno periódica ao longo do eixo x , limitando os valores do número de onda a valores discretos $2\pi n/L$ para n inteiro.

Finalmente, possuímos todos os elementos para desenvolvermos o esquema de modos acoplados em terceira ordem para o problema retangular magnetoelástico. Seguindo passos análogos aos da secção 2.2, adimensionalizamos comprimentos por b e velocidades por $\nu_0/[12(\eta_1 + \eta_2)b^2]$ e obtemos a equação de modos acoplados

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_k = & \Lambda(k) \zeta_k + \sum_{q \neq 0} \left\{ F(k, q) \zeta_q \zeta_{k-q} + G(k, q) \dot{\zeta}_q \zeta_{k-q} \right\} \\ & + \sum_{p, q \neq 0} \left\{ H(k, p, q) \dot{\zeta}_p \zeta_{q-p} \zeta_{k-q} + I(k, p, q) \dot{\zeta}_p \zeta_q \zeta_{k-p-q} \right. \\ & \left. + [J(k, p, q) + K(k, p, q)] \zeta_p \zeta_q \zeta_{k-p-q} \right\}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde o ponto representa a derivada total no tempo e a taxa de crescimento linear é dada por

$$\Lambda(k) = |k| \left[N_B W_1(k) + AU - k^4 \right]. \quad (5.13)$$

Temos como parâmetros físicos o contraste de viscosidade A [Eq. (2.9)], o número magneto elástico

$$N_B = \frac{\mu_0 M^2 b^3}{\nu_0}, \quad (5.14)$$

que mede a razão entre forças magnéticas e elásticas, e a velocidade característica

$$U = \frac{12(\eta_2 + \eta_1)b^2 \nu_\infty}{\nu_0}, \quad (5.15)$$

que mede a relevância de efeitos viscosos sobre os elásticos. $W_1(k)$ é uma integral magnética positiva [$W_1(k) > 0$] proveniente do campo de demagnetização, dada no Apêndice E, Eq. (E.4), juntamente com as funções de acoplamento não lineares [Eqs. (E.3)-(E.12)]. Note que a razão de rigidez C e o comprimento característico λ contribuem apenas em terceira ordem

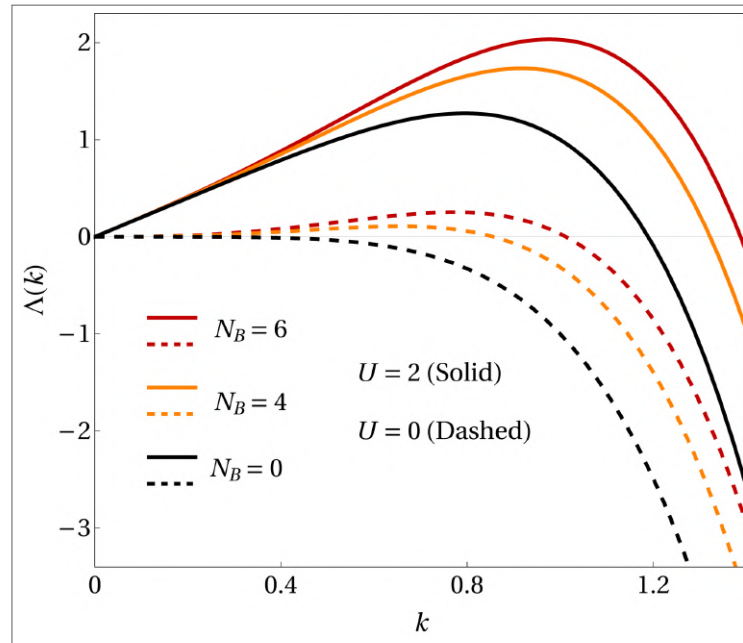
[Eq. (E.9)] e que a demagnetização não participa em segunda ordem. Assim, fica clara a necessidade de expandirmos a série perturbativa até terceira ordem, para possibilitar a captura de efeitos não lineares de demagnetização e provenientes de C .

5.2 ANÁLISE DA CÉLULA DE HELE-SHAW HORIZONTAL

5.2.1 Análise de Estabilidade

Iniciamos com uma análise de estabilidade linear, examinando a taxa de crescimento linear [Eq. (5.13)]. Como já discutimos na secção 2.3.1, caso $\Lambda(k)$ seja positivo, o modo k será instável e crescerá exponencialmente no regime linear e para $\Lambda(k) < 0$, temos um modo estável. Ao longo deste capítulo, consideramos parâmetros adimensionais condizentes com a literatura (FLAMENT et al., 1996; PACITTO; FLAMENT; BACRI, 2001; PODGORSKI et al., 2007; HE; LOWENGRUB; BELMONTE, 2009; CARVALHO; MIRANDA; GADÊLHA, 2013; ZHAO et al., 2016). Limitamos-nos ao caso mais comum, $A = 1$, no qual o contraste de viscosidade A é máximo, favorecendo instabilidades.

Figura 43 – Representação gráfica da relação entre a taxa de crescimento linear $\Lambda(k)$ com o número de onda k para três valores do número magnetoelástico N_B e dois valores da velocidade característica U .



Fonte: (COUTINHO; MIRANDA, 2020b)

Da Eq. (5.13), vemos que o termo de demagnetização $N_B W_1(k)$ e o termo de velocidade característica AU são ambos desestabilizantes, enquanto o termo associado a rigidez μ_0, k^4 ,

estabiliza o sistema. Assim, no âmbito linear, o sistema age similarmente ao caso de tensão superficial (SAFFMAN; TAYLOR, 1958; HOMSY, 1987).

A partir da taxa de crescimento, podemos obter o número de onda que cresce mais rápido k^* , definido a partir de $[d\Lambda(k)/dk]_{k=k^*} = 0$. Este modo caracteriza o número de onda dominante nos estágios lineares da dinâmica, similar ao $n_{\max}$ dos capítulos anteriores. Dada a presença da integral de demagnetização $W_1(k)$, determinamos k^* resolvendo uma equação transcendental numericamente.

Ilustramos a taxa de crescimento na Fig. 43, na qual representamos $\Lambda(k)$ para três valores ilustrativos do número magnetoelástico N_B : 0, 4 e 6. Para cada um destes, temos dois valores da velocidade característica: $U = 0$ (linhas tracejadas) e $U = 2$ (linhas sólidas). Para $U = 0$ e $N_B = 0$, o sistema é totalmente estável, como esperado. Com o aumento do campo magnético, o sistema se torna cada vez mais instável e regiões nas quais $\Lambda(k) > 0$ surgem. Já quando tomamos $U = 2$, efeitos viscosos desestabilizam o sistema e, mesmo para o caso sem campo, temos instabilidades. Note que, como C e λ aparecem apenas na terceira ordem, não podemos fazer nenhum comentário sobre eles no momento.

5.2.2 Análise Fracamente não linear

Investigamos como o sistema se comporta ao considerarmos toda a equação de modos acoplados, Eq. (5.12). Das Eqs. (E.3)-(E.12), fica clara a necessidade da terceira ordem na expansão para estudarmos os efeitos da rigidez em função de C e λ , pois estes parâmetros não aparecem em ordens inferiores. Realizamos um esquema similar ao da secção 4.3, na qual consideramos apenas alguns modos de Fourier (MIRANDA; WIDOM, 1998a; MIRANDA; WIDOM, 1998c; LIRA; MIRANDA, 2011; ANJOS; LIRA; MIRANDA, 2018; LIVERA; MIRANDA, 2020).

Seguindo os passos de (ANJOS; LIRA; MIRANDA, 2018), consideramos o acoplamento de apenas quatro modos: um modo fundamental, definido por $k = k^*$, e seus três primeiros harmônicos $2k$, $3k$, e $4k$. Constatamos que um dado modo $n \cdot k^*$ é sempre estável para $n > 1$ inteiro, assim, todos os modos harmônicos são estáveis e seus crescimentos ocorrem devido a efeitos fracamente não lineares. A adição de mais modos não altera o formato da interface de forma significativa.

Reescrevemos a perturbação [Eq. (5.10)] em termos de modos cossenos reais $a_k = \zeta_k + \zeta_{-k}$,

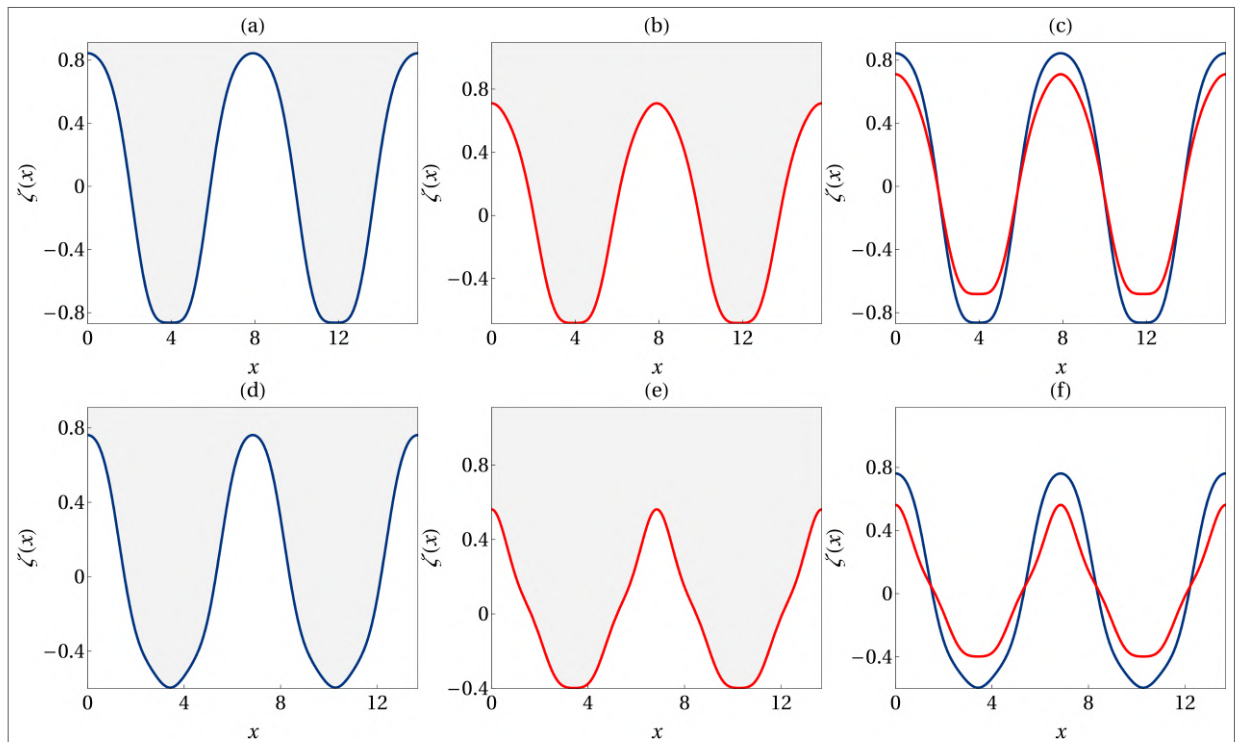
tal que

$$\zeta(x, t) = a_k(t) \cos(kx) + a_{2k}(t) \cos(2kx) + a_{3k}(t) \cos(3kx) + a_{4k}(t) \cos(4kx). \quad (5.16)$$

Os modos seno [Eq. (B.4)] são desconsiderados, pois podemos, sem perda de generalidade, impor $b_k(0) = 0$ para todo k .

Note que, embora a equação de modos acoplados dependa dos parâmetros adimensionais N_B , A , U , λ e C , focamos em como o número magnetoelástico N_B e a razão de rigidez C agem na formação dos padrões. Escolhemos estudar o caso $A = 1$, mais comum em experimentos (SAFFMAN; TAYLOR, 1958; HOMSY, 1987) e, sem perda de generalidade, $U = 2$, pois a partir da análise linear verificamos que ele tem apenas o papel de deixar o sistema mais instável. Tal parâmetro não tem influência nos termos não lineares. Por fim, consideramos um comprimento característico do tamanho do espaçamento da célula ($\lambda = 1$ na nossa adimensionalização).

Figura 44 – Padrões interfaciais magnetoelásticos fracamente não lineares obtidos ao resolver a Eq. (5.12) em terceira ordem com quatro modos de Fourier, para (a) $C = 0$, $N_B = 0$; (b) $C = 0.99$, $N_B = 0$; (d) $C = 0$, $N_B = 4$ e (e) $C = 0.99$, $N_B = 4$. Os padrões (a) e (b) são superimpostos em (c) e os padrões (d) e (e) em (f). Para todas imagens, $U = 2$ e $A = 1$.



Fonte: (COUTINHO; MIRANDA, 2020b)

Na Fig. 44 representamos os padrões fracamente não lineares de terceira ordem para dois valores de C , com e sem campo magnético. Temos na Fig. 44(a) $C = 0$ e $N_B = 0$, (b)

$C = 0.99$ e $N_B = 0$, (d) $C = 0$ e $N_B = 4$; e (e) $C = 0.99$ e $N_B = 4$. Para as Figs. 44(a) e (b), o modo de crescimento mais rápido é $k^* = 0.795$ e nas (c) e (d) $k^* = 0.917$. Consideramos para todos os padrões, $a_k(0) = 10^{-5}$ e $a_{2k}(0) = a_{3k}(0) = a_{4k}(0) = 0$, a fim de que o crescimento dos harmônicos seja sempre gerado por efeitos não lineares.

Em todas as figuras deste capítulo paramos a evolução temporal assim que a base dos dedos começa a apresentar oscilações de baixa amplitude, que não são detectadas em experimentos com ferrofluidos em células de Hele-Shaw não elásticas (FLAMENT et al., 1996; PACITTO; FLAMENT; BACRI, 2001), nem em simulações numéricas (IGONIN, 2004; NOCHETTO; SALGADO; TOMAS, 2016). Para a Fig. 44, o tempo final t_f das interfaces são: (a) 8.956, (b) 6.450, (d) 8.770 e (e) 6.157.

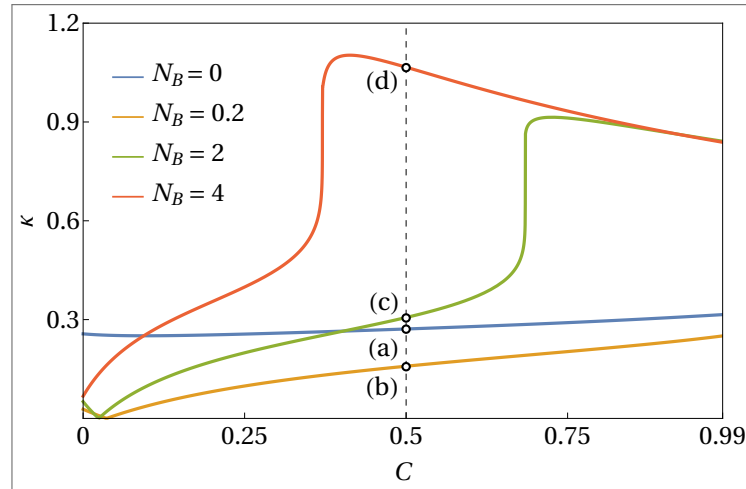
Focamos inicialmente na linha superior, na qual não há campo aplicado ($N_B = 0$). Para o caso em que a rigidez é máxima [$C = 0$, Fig. 44(a)], vemos que o dedo viscoso tem um perfil arredondado, e como para $C = 0$ a elasticidade se comporta de forma similar a tensão superficial, vemos que a Fig. 44(a) possui morfologia similar à Fig. 7(a) do capítulo introdutório. Contudo, ao permitirmos que a interface se torne mais flexível [$C = 0.99$, Fig. 44(b)], temos um dedo com um pico agudo. Como para altos valores de C a rigidez depende fortemente da curvatura, as deformações do fluxo diminuem a rigidez, permitindo que a interface elástica seja deformada mais facilmente. Na Fig. 44(c) temos a superposição das interfaces, na qual ficam evidentes as diferenças.

Já para o caso com campo magnético aplicado ($N_B = 4$), vemos que, mesmo para o caso de maior rigidez [$C = 0$, 44(d)], a ação do campo magnético produz dedos consideravelmente mais finos e com picos bem mais agudos, em comparação ao caso sem campo aplicado [Fig. 44(a)]. Note que ao compararmos os experimentos da Fig. 7, sem campo magnético aplicado, com o da Fig. 16, ambos do primeiro capítulo da dissertação, com campo, vemos a mesma tendência de aumento da curvatura do pico. Quando consideramos a razão de rigidez $C = 0.99$ com campo [Fig. 44(e)], temos uma morfologia completamente diferente. A menor rigidez leva a um dedo de morfologia distinta, com um pico bastante pontiagudo. A superposição de ambos casos de C para $N_B = 4$ é ilustrada na Fig. 44(f).

Caracterizamos o impacto de N_B e C na morfologia quantitativamente na Fig. 45, na qual representamos a curvatura dos picos κ em função de C ($0 \leq C \leq 0.99$) para tempos $t = t_f$ considerando $N_B = 0, 0.2, 2$ e 4 . Os parâmetros físicos são os mesmos da Fig. 45, exceto k^* e t_f que variam ponto a ponto.

A Fig. 45 revela a complexidade e não trivialidade do problema. Para o caso sem campo

Figura 45 – Comportamento da curvatura κ do pico dos dedos em função da razão de rigidez C para quatro valores do número magnetoelástico N_B : 0, 0.2, 2 e 4. As interfaces fracamente não lineares correspondentes aos pontos (a)-(d) para $C = 0.5$ estão presentes na Fig. 46.



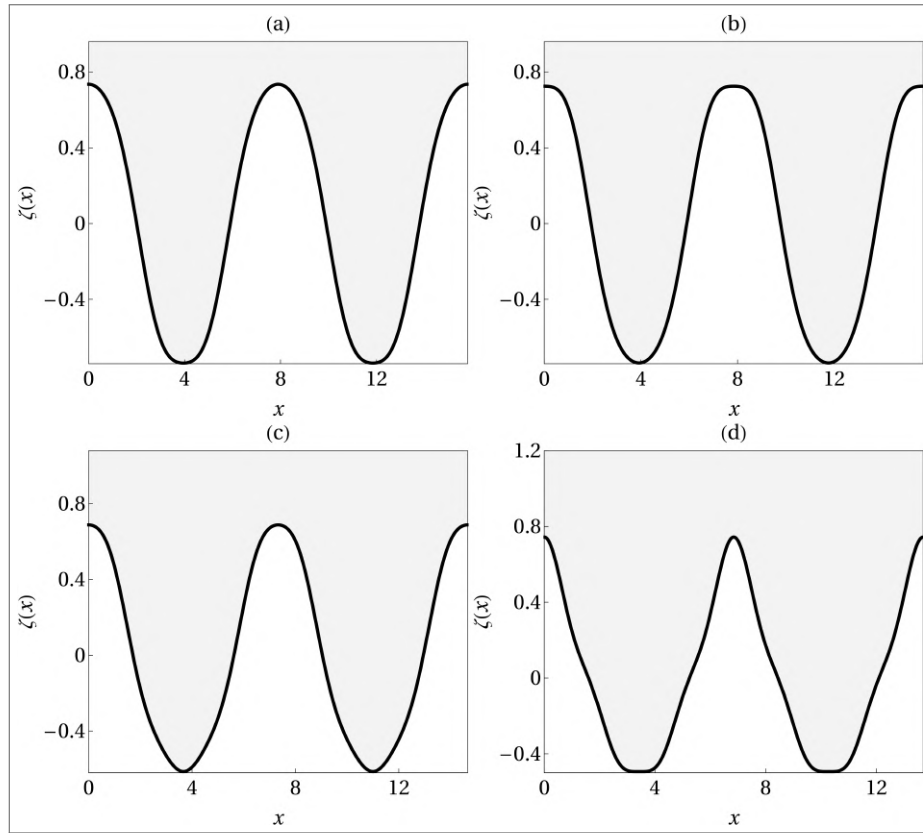
Fonte: (COUTINHO; MIRANDA, 2020b)

magnético [$N_B = 0$, curva azul], vemos que a curvatura do pico decresce entre $C = 0$ e $C \approx 0.1$, crescendo monotonicamente após tal valor. Já quando submetemos o sistema a um baixo valor do campo magnético [$N_B = 0.2$, curva amarela], para C pequeno, temos uma queda em κ , atingindo um mínimo e depois um crescimento monotônico juntamente à C . Ao aumentarmos o valor do campo, o comportamento da curva muda drasticamente. Para $N_B = 2$ (curva verde), inicialmente temos um comportamento similar ao de campos fracos, contudo, após um valor crítico de C ($C \approx 0.68$), a curvatura cresce de forma abrupta, atingindo um pico e decrescendo. Um comportamento similar ocorre para maiores valores de N_B , contudo o valor crítico de C se torna menor com o aumento de N_B .

Para melhor ilustrar a complexidade dos resultados da Fig. 45, representamos algumas interfaces que podem surgir no sistema. Na Fig. 46, retratamos as interfaces que surgem dos pontos (a)-(d), indicados na Fig. 45, todos para um mesmo valor intermediário da razão de rigidez $C = 0.5$. Para tais casos, (a) $k^* = 0.795$, $t_f = 8.822$; (b) $k^* = 0.801$, $t_f = 8.685$; (c) $k^* = 0.857$, $t_f = 7.474$; e (d) $k^* = 0.918$, $t_f = 6.307$.

No caso sem campo [Fig. 46(a)], vemos um dedo bem similar àquele da Fig. 44(a), com a ponta do dedo arredondada. Já ao considerarmos um campo fraco [Fig. 46(b)], temos uma planificação da ponta do dedo, que perde seu perfil arredondado, se tornando reto. Tal deformação é consonante com a menor curvatura do ponto (b) na Fig. 45. Com o aumento do número magnetoelástico para $N_B = 2$ [Fig. 46(c)], o pico da interface se torna novamente arredondado e, por fim, para o ponto (d) [Fig. 46(d)], o dedo volta a ter a morfologia distinta

Figura 46 – Padrões magnetoelásticos fracamente não lineares de terceira ordem representativos, provenientes dos pontos (a)-(d) indicados na Fig. 45.



Fonte: (COUTINHO; MIRANDA, 2020b)

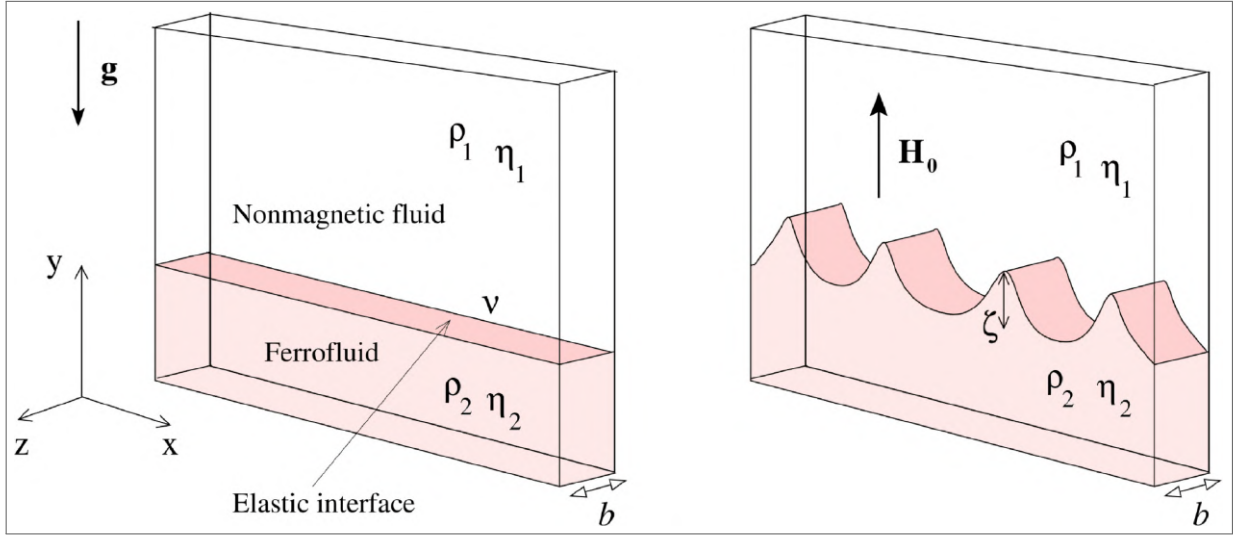
encontrada na Fig. 44(e), na qual o dedo é consideravelmente mais esguio e afinado. Ressaltamos que tal morfologia ocorre quando N_B e C são suficientemente grandes, após o valor de C para o qual ocorre o crescimento abrupto da curvatura κ na Fig. 45.

5.3 CÉLULA VERTICAL

Consideraremos agora um sistema bastante similar, no qual temos o mesmo fluido magnetoelástico, de viscosidade η_2 e densidade ρ_2 , com outro fluido não magnético, de viscosidade η_1 e densidade ρ_1 , na célula de Hele-Shaw retangular com um campo aplicado $\mathbf{H}_0$. Contudo a célula se encontra na vertical, com o ferrofluido de viscosidade $\eta_2 > \eta_1$ embaixo, como é visto na Fig. 47. Nesse sistema, a gravidade $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{y}}$ atua estabilizando o sistema, de forma matematicamente equivalente a se tivéssemos invertido o sentido do fluxo no caso anterior ($\mathbf{v}_\infty \rightarrow -\mathbf{v}_\infty$). Nesta secção, consideraremos $\eta_2 \gg \eta_1$, tal que $A = 1$, dado que este é o caso mais comum em experimentos (SAFFMAN; TAYLOR, 1958; HOMSY, 1987).

Para incorporarmos a ação de forças gravitacionais no sistema, modificamos a lei de Darcy

Figura 47 – Representação esquemática do problema magnetoelástico em uma célula de Hele-Shaw vertical de espaçamento b . O fluido 1 é não magnético e possui viscosidade η_1 e o fluido 2 é um ferrofluido de viscosidade η_2 . A gravidade $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{y}}$ aponta para baixo. A interface que separa os fluidos é elástica e possui rigidez ν dependente da curvatura. Na esquerda, temos o sistema estável com a interface não perturbada. Na direita, o campo $\mathbf{H}_0$ é aplicado induzindo a porção de estruturas magnetoelásticas de pico, com as perturbações interfaciais representadas por $y = \zeta = \zeta(x, t)$.



Fonte: (COUTINHO; MIRANDA, 2020c)

Eq. (5.2) tal que (FLAMENT et al., 1996; BLUMS; TSEBERS; MAIOROV, 1997; ROSENSWEIG, 1985)

$$\mathbf{v}_j = -\frac{b^2}{12\eta_j} \left\{ \nabla p_j - \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{+b/2} \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} dz + \rho_j g \hat{\mathbf{y}} \right\}, \quad (5.17)$$

na qual ρ_j representa a densidade de cada fluido. De forma análoga, com a nova lei de Darcy [Eq. (5.17)] e as Eqs. (2.13), (5.9) e (5.10), obtemos uma equação de modos acoplados quase idêntica à Eq. (5.12), contudo com a taxa de crescimento

$$\Lambda(k) = |k| [N_B W_1(k) - N_G - k^4], \quad (5.18)$$

na qual

$$N_B = \frac{\mu_0 M^2 b^3}{\nu_0} \quad (5.19)$$

é o número magnetoelástico e

$$N_G = \frac{(\rho_2 - \rho_1) g b^4}{\nu_0} \quad (5.20)$$

o número de ligação gravitacional (*gravitational bond number*), que mede a importância dos efeitos gravitacionais em relação aos elásticos. Todas as outras funções de modos acoplados são as mesmas apresentadas no Apêndice E, Eqs. (E.4)-(E.12), com o número magnetoelástico da Eq. (5.19) e seus comprimentos adimensionalizados por b e velocidades por $\nu_0/[12(\eta_2 + \eta_1)b^2]$.

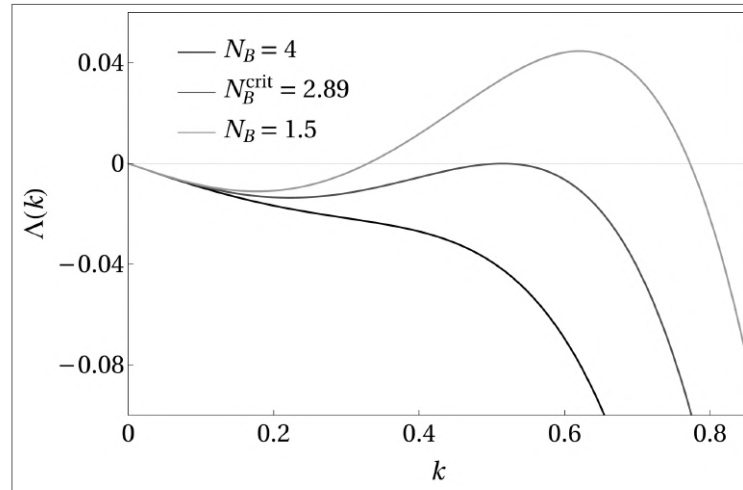
5.3.1 Análise de Estabilidade

Inicialmente, comparamos a taxa de crescimento linear da célula horizontal [Eq. (5.13)] com a da célula vertical [Eq. (5.18)]. Constatamos que a única diferença matemática é o termo de velocidade AU , que se torna $-N_G$, de forma que no lugar de um termo desestabilizante, temos um estabilizante, fazendo com que o termo de demagnetização $N_B W_1(k)$ seja o único responsável pela instabilidade do sistema, linearmente falando, no caso vertical [Eq. (5.17)]. Tal mudança também faz o sistema, a âmbito linear, a não depender do contraste de viscosidade.

Assim como no caso horizontal, para o caso vertical definimos o número de onda de maior crescimento k^* $[[d\Lambda(k)/dk]_{k=k^*} = 0]$. Podemos também definir um número magnetoelástico crítico $N_B^{\text{crit}}(k)$, para a partir do qual um dado modo k se torna instável, similarmente ao que ocorre nos experimentos das Fig. 14(b) e 15, presentes na introdução. Como discutido [secção 2.3.1], um modo se torna instável para $\Lambda(k) > 0$, levando à

$$N_B^{\text{crit}}(k) = \frac{N_G + k^4}{W_1(k)}. \quad (5.21)$$

Figura 48 – Gráfico da taxa de crescimento linear da célula de Hele-Shaw retangular vertical $\Lambda(k)$ [Eq. (5.18)] em função do número de onda k para $N_B = 1.5$, $N_B^{\text{crit}} = 2.89$ e $N_B = 4$. Consideramos que $N_G = 0.1$.



Fonte: (COUTINHO; MIRANDA, 2020c)

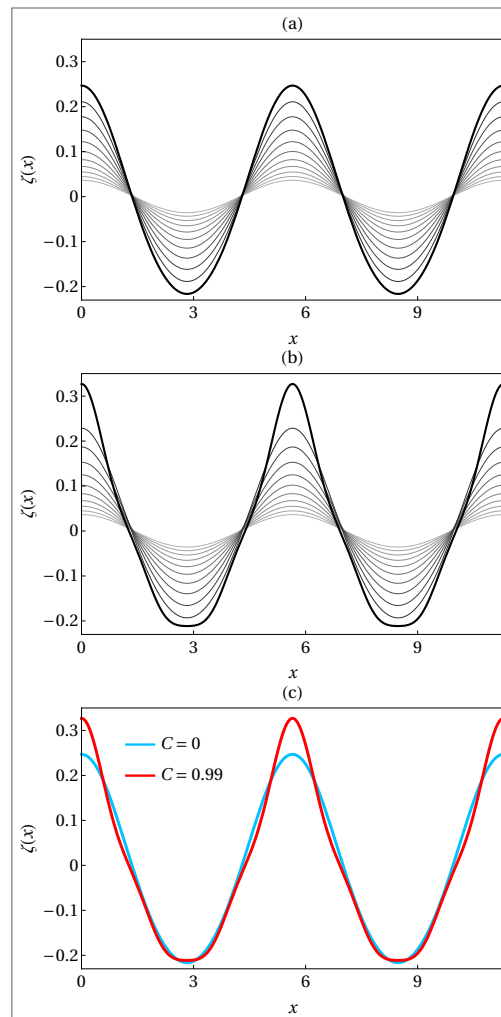
Sem perda de generalidade, podemos tomar $N_G = 0.1$ durante toda esta secção, para o qual o menor número magnetoelástico crítico possível é $N_B^{\text{crit}} = 2.89$. Representamos na Fig. 5.18 a taxa de crescimento linear [Eq. (5.18)] em função do número de onda k para três valores representativos de N_B : 1.5, $N_B^{\text{crit}} = 2.89$ e 4. Todos os parâmetros considerados aqui são consistentes com experimentos (BACRI; SALIN, 1984; FLAMENT et al., 1996; PODGORSKI et

al., 2007; HE; LOWENGRUB; BELMONTE, 2009; CARVALHO; MIRANDA; GADÊLHA, 2013; ZHAO et al., 2016; ANJOS et al., 2019). A partir da Fig. 48, verificamos a instabilidade (estabilidade) do sistema para $N_B > N_B^{\text{crit}}$ ($N_B < N_B^{\text{crit}}$).

5.3.2 Análise Fracamente Não Linear

Examinamos agora toda a equação de modos acoplados para o caso da célula vertical [Eqs. (5.12) e (5.18)] em terceira ordem. A necessidade de irmos até tal ordem é a mesma do caso horizontal: não há presença do comprimento característico λ ou da fração de rigidez C em ordens inferiores.

Figura 49 – Evolução temporal das interfaces na célula de Hele-Shaw vertical em terceira ordem para dois valores da razão de rigidez: (a) $C = 0$ e (b) $C = 0.99$. A evolução ocorre para tempos $t_i \leq t \leq t_f$ onde $t_i = 5.23$ e $t_f = 6.53$, a passos de $(t_f - t_i)/11$. A superposição dos padrões para $t = t_f$ se encontra em (c).



Fonte: (COUTINHO; MIRANDA, 2020c)

Representamos na Fig. 49 a evolução temporal ao considerarmos os parâmetros representativos $N_G = 0.1$, $A = 1$, $\lambda = 1$ e $N_B = 15$. Diferentemente da célula horizontal, o caso sem campo é completamente estável e teríamos uma interface plana sem qualquer perturbação. Tais condições levam a um número de onda máximo $k^* = 1.11$ e o número magnetoelástico crítico $N_B^{\text{crit}} = 2.89$.

Consideramos novamente o acoplamento de quatro modos cosseno de Fourier de amplitudes iniciais $a_k(0) = 10^{-5}$ e $a_{2k}(0) = a_{3k}(0) = a_{4k}(0) = 0$, tal que a perturbação é escrita como na Eq. (5.16). São ilustrados dois casos, (a) $C = 0$ e (b) $C = 0.99$, e (c) a superposição de ambos. Ambas interfaces são representadas para o tempo final $t_f = 6.53$, definido da mesma forma da Fig. 44, e a evolução é ilustrada a partir de $t_i = 5.23$ até o tempo final para intervalos iguais de $(t_f - t_i)/11$.

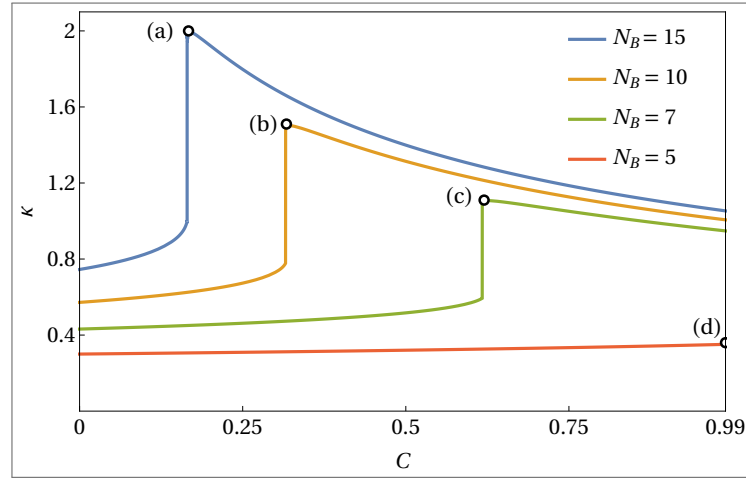
Analisando as imagens da Fig. 49, notamos uma clara diferença entre ambos os casos. Para (a) $C = 0$, temos um padrão similar a uma curva senoidal, enquanto no caso (b) $C = 0.99$, vemos um padrão distinto, similar ao encontrado na Fig. 44(e), com vales planificados e picos agudos. Contudo, diferentemente da Fig. 44(e) que possui um dedo curto, a Fig. 49(b) exibe um dedo longo, quando comparamos aos casos nos quais a fração de rigidez C é nula, Figs. 44(d) e 49(a), respectivamente.

Tais diferenças entre as células horizontal [Fig. 44] e vertical [Fig. 49] sucedem-se da presença de um termo desestabilizante relativo à velocidade de fluxo externo v_∞ e um termo estabilizante referente a efeitos gravitacionais nas taxas de crescimento lineares de cada respectivo caso. As diferenças entre ambos os casos da Fig. 49 ocorrem por causa da ação de efeitos não lineares em terceira ordem relativos à fração de rigidez C .

Para investigarmos o sistema qualitativamente, na Fig. 50 exibimos o comportamento da curvatura κ dos picos em função de C para $N_B = 15, 10, 7$ e 5 . Todos os parâmetros físicos são os mesmos da Fig. 49, contudo k^* e t_f variam ponto a ponto. Obtemos um comportamento similar ao da Fig. 45, na qual, para valores baixos do número magnetoelástico, a curvatura cresce monotonicamente com C e, para valores mais altos de N_B , após crescer de forma suave e contínua com C , a curvatura cresce abruptamente, atingindo um valor máximo e decrescendo monotonicamente após tal ponto.

A fim de exemplificarmos tais comportamentos, retratamos na Fig. 51 os padrões que aparecem dos pontos de maior curvatura para cada valor do campo magnético da Fig. 50. Os valores do número azimutal de crescimento mais rápido, tempo final e razão de rigidez para cada caso são: (a) $k^* = 1.11$, $t_f = 7.92$, $C = 0.17$; (b) $k^* = 0.94$, $t_f = 19.88$, $C = 0.32$; (c)

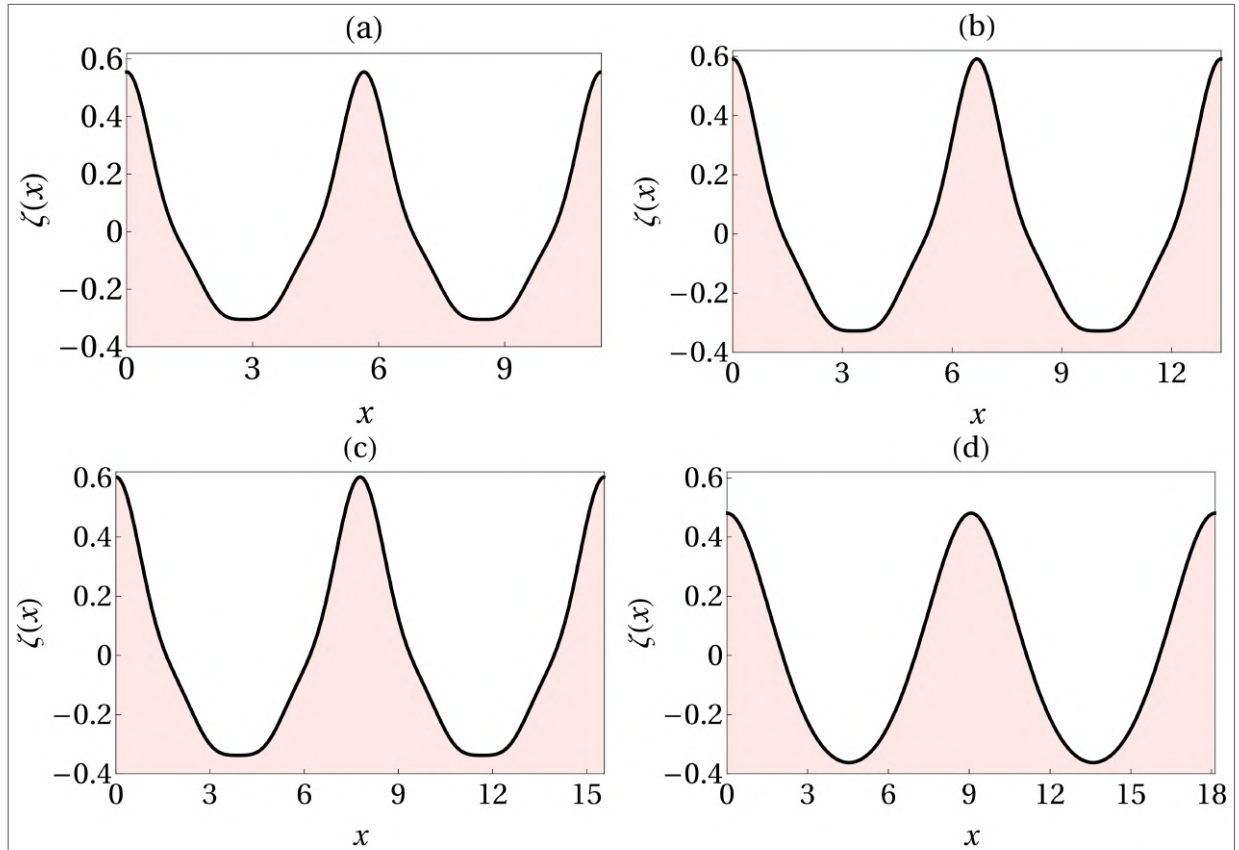
Figura 50 – Comportamento da curvatura do pico dos dedos κ em função da razão de rigidez C para quatro valores ilustrativos do número magnetoelástico: 15, 10, 7 e 5. A razão de rigidez varia de 0 a 0.99 e todos outros parâmetros físicos são os mesmos da Fig. 49, exceto k^* e t_f , que variam ponto a ponto.



Fonte: (COUTINHO; MIRANDA, 2020c)

$k^* = 0.81$, $t_f = 47.69$, $C = 0.62$; e (d) $k^* = 0.69$, $t_{\max} = 120$, $C = 0.99$.

Figura 51 – Padrões magnetoelásticos fracamente não lineares de terceira ordem representativos, provenientes dos pontos (a)-(d) indicados na Fig. 50.



Fonte: (COUTINHO; MIRANDA, 2020c)

Notamos que as estruturas apresentadas nas Figs. 51(a)-(c), correspondentes aos picos criados pelo abrupto crescimento da curvatura, apresentam todas uma morfologia similar a da Fig. 49(b), com picos afinados e vales planificados. Note que tais padrões são obtidos para $C > 0.99$. Já na Fig. 51(d), surge um padrão senoidal similar ao da Fig. 49(a), mesmo para $C = 0.99$.

Diante do exposto, concluímos que a dinâmica do sistema não é definida apenas por C ou N_B , mas sim pela ação conjunta de ambos. Da Fig. 50, observamos que para valores baixos do campo ($N_B \leq 5$), a curvatura cresce monotonicamente com C , de tal forma que efeitos elásticos dominam a dinâmica do sistema. Já, ao considerarmos N_B suficientemente grande, os efeitos do campo de demagnetização, que também dependem da forma da interface [Eqs. (E.4), (E.11) e (E.12)] influenciam juntamente com a rigidez dependente da curvatura $\nu(\kappa)$ [Eq. (5.7)] no o resultado da interface, de forma que os efeitos de enfraquecimento de curvatura não são suficientes para explicarmos toda a dinâmica do sistema.

6 CONCLUSÃO

Dado o interesse prático, a alta complexidade e a beleza dos padrões emergentes das diferentes configurações possíveis de fluxos em células de Hele-Shaw, partimos, primordialmente, de um simples esquema perturbativo com o intuito de entender como estes se comportam, abrindo a possibilidade de estudos e aplicações práticas futuras. No primeiro capítulo, introduzimos o emblemático problema de Saffman-Taylor e descrevemos diversas de suas variantes, bem como descrevemos algumas das aplicações possíveis, citando estudos relevantes já existentes na literatura.

No segundo capítulo desta dissertação, iniciamos a discussão de nossas contribuições ao explorar como podemos minimizar as instabilidades de Saffman-Taylor e controlar o número de dedos emergentes em fluxos radiais de Hele-Shaw. Isso foi feito ao imprimirmos uma taxa de injeção dependente do tempo $Q(t)$, considerando que o fluido injetado é não newtoniano, com sua viscosidade aumentando no tempo. Através de uma análise de estabilidade linear e métodos de cálculo variacional, derivamos duas expressões fechadas para a $Q(t)$: uma que minimizava o crescimento das amplitudes de perturbação interfacial (secção 2.3.1) e outra que predeterminava o número de dedos emergentes na interface fluido-fluido (secção 2.4).

Além disso, fomos além do estágio linear da dinâmica, utilizando um esquema perturbativo de modos acoplados em terceira ordem descrito na secção 2.2, demonstrando a validade dos protocolos de injeção dependente do tempo, obtidos no regime linear, na presença de efeitos não lineares e de ruídos de fundo, como podemos ver nas Figs. 24 e 26 do capítulo 2. Vimos, também, que há uma necessidade de considerarmos a terceira ordem da perturbação para capturarmos efeitos morfológicos de interesse dentro da validade do nosso esquema perturbativo [Fig. 23]. Se nossas conclusões permanecem válidas além do regime fracamente não linear, ainda é uma questão em aberto, que pode ser verificada por experimentos ou simulações fortemente não lineares, como os presentes em (LI et al., 2009; DIAS et al., 2012) para fluidos newtonianos [Figs. 8 e 9 do primeiro capítulo].

Já no capítulo 3, consideramos um efeito pouco estudado em células de Hele-Shaw, gerado por estresses viscosos normais, tal que nosso modelo prevê a ocorrência de trifurcações nos dedos viscosos, na qual a ponta de um dedo se divide em três dedos secundários, ao invés de dois, como vimos na Fig. 29 da secção 3.2. Nosso resultado teórico é condizente com os experimentos das Figs. 11 e 12 do capítulo introdutório, e indicam um papel dual dos

estresses normais, que agem para retardar a formação de instabilidades na interface, mas alteram a distribuição local de velocidades, permitindo um dedo bifurcar ou trifurcar.

A existência de trifurcações ao considerarmos a contribuição de stresses normais persiste na presença de ruídos de fundo e diferentes condições iniciais, além de ocorrer para diversos valores do número de capilaridade Ca e do contraste de viscosidade A , embora sejam favorecidos para maiores valores de ambos, como foi visto nas Figs. 31-33, levando nossa previsão teórica a uma melhor concordância com experimentos.

Examinamos também, a formação de padrões em amostras de ferrofluidos, cujos padrões interfaciais são de alta complexidade e dependem fortemente da configuração do campo magnético aplicado, permitindo a obtenção de uma grande variedade de morfologias. No quarto capítulo desta dissertação, revisitamos o trabalho de (YU; CHRISTOV, 2021), no qual foi usada uma configuração de campos magnéticos radiais e azimutais cruzados atuando em uma amostra de ferrofluido presente em uma célula de Hele-Shaw radial, obtendo uma morfologia que atinge um estado estacionário, rotacionando sem mudar sua forma. Contudo, este estudo analisou apenas o caso de um ferrofluido muito viscoso embebido em um fluido não magnético de viscosidade desprezível (isto é, $A = -1$), e susceptibilidade magnética $\chi = 1$. Expandimos este trabalho, investigando diversos aspectos morfológicos e dinâmicos ainda não explorados do sistema.

Empregamos tanto um esquema perturbativo de modos acoplados quanto o método numérico da integral de contorno, revelando o comportamento da interface para uma gama de situações físicas, considerando variações na viscosidade e susceptibilidade magnética dos fluidos, bem como para diferentes valores da magnitude relativa do campo magnético radial e azimutal aplicado no sistema, como vimos nas Figs. 39-41. Também comparamos os resultados do método perturbativo fracamente não linear com a solução numérica fortemente não linear nas Figs. 35-39, concluindo que o método perturbativo apresenta bons resultados, caso considere-se a perturbação até terceira ordem e apenas em casos nos quais as perturbações não são demasiadamente intensas.

Por fim, realizamos dois estudos sobre magnetoelasticidade em células de Hele-Shaw retangulares, levando em conta uma rigidez dependente da curvatura e efeitos de campo de demagnetização. Em um destes, consideramos a célula vertical [Fig. 47] com o fluido mais denso embaixo, que é um sistema inicialmente estável. Mostramos através de uma análise de estabilidade linear que, assim como no caso sem elasticidade e com tensão superficial [Fig. 15 da introdução], a partir de um dado número magnetoelástico crítico, o sistema começa a

apresentar instabilidades de pico. Já no outro estudo, consideramos um sistema com fluxo de fluido em uma célula de Hele-Shaw horizontal [Fig. 42], num arranjo intrinsecamente instável.

Procedemos, então, em ambos os casos, a empregar o esquema de modos acoplados para estudar a morfologia da interface e concluímos que ambos efeitos, de demagnetização e da rigidez dependente da curvatura, têm papel fundamental na morfologia do sistema, exibindo um grande espectro de possibilidades morfológicas a depender dos valores de cada parâmetro, como vimos nas Figs. 44 e 49.

Finalmente, vale salientar que, em princípio, os estudos apresentados ao longo desta dissertação não são apenas meros exercícios teóricos, havendo amplas aplicações, como melhorias na eficácia da extração de petróleo (LAKE, 1989), aplicações em sistemas de matéria mole (SANDRE et al., 2000), física biológica (XU et al., 2019; GILTINAN et al., 2020), entre diversas outras citadas no texto. Esperamos que nossos estudos teóricos estimulem avanços na área, com a realização de futuros experimentos e simulações fortemente não lineares sobre o papel de fluidos não newtonianos na estabilização de interfaces, o comportamento de ferrofluidos sobre a influência de campos cruzados e sistemas magnetoelásticos, além de novas aplicações práticas nesta fértil área de pesquisa científica.

REFERÊNCIAS

- AFKHAMI, S.; RENARDY, Y. Ferrofluids and magnetically guided superparamagnetic particles in flows: a review of simulations and modeling. *Journal of Engineering Mathematics*, Springer, v. 107, n. 1, p. 231–251, aug 2017. ISSN 1573-2703.
- AL-HOUSSEINY, T. T.; STONE, H. A. Controlling viscous fingering in tapered Hele-Shaw cells. *Physics of Fluids*, American Institute of PhysicsAIP, v. 25, n. 9, p. 092102, sep 2013. ISSN 1070-6631.
- ANDELMAN, D.; ROSENSWEIG, R. E. Modulated Phases: Review and Recent Results. *Journal of Physical Chemistry B*, American Chemical Society, v. 113, n. 12, p. 3785–3798, mar 2008.
- ANDRADE-SILVA, I.; CLERC, M. G.; GONZALEZ-CORTES, G.; ODEnt, V. Light beam induced finger instability in a photosensitive liquid crystal cell. *Physical Review Research*, American Physical Society, v. 3, n. 2, 2021. ISSN 26431564.
- ANJOS, P. H.; CARVALHO, G. D.; LIRA, S. A.; MIRANDA, J. A. Wrinkling and folding patterns in a confined ferrofluid droplet with an elastic interface. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 99, n. 2, p. 1–13, 2019. ISSN 24700053.
- ANJOS, P. H. A.; DIAS, E. O.; MIRANDA, J. A. Fingering instability transition in radially tapered Hele-Shaw cells: Insights at the onset of nonlinear effects. *Physical Review Fluids*, American Physical Society, v. 3, n. 12, p. 124004, dec 2018.
- ANJOS, P. H. A.; LIRA, S. A.; MIRANDA, J. A. Fingering patterns in magnetic fluids: Perturbative solutions and the stability of exact stationary shapes. *Physical Review Fluids*, American Physical Society, v. 3, n. 4, p. 044002, apr 2018. ISSN 2469-990X.
- BACRI, J.-C.; CABUIL, V.; CEBERS, A.; MENAGER, C.; PERZYNSKI, R. Flattening of ferrovesicle undulations under a magnetic field. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 33, n. 3, p. 235, jan 1996. ISSN 0295-5075.
- BACRI, J.-C.; SALIN, D. First-order transition in the instability of a magnetic fluid interface. *Journal de Physique Lettres*, v. 45, n. 11, p. 559–564, 1984. ISSN 0302-072X.
- BATCHELOR, G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1967. ISBN 9780521663960.
- BEESEON-JONES, T. H.; WOODS, A. W. Control of viscous instability by variation of injection rate in a fluid with time-dependent rheology. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 829, p. 214–235, 2017. ISSN 14697645.
- BEN-JACOB, E. From snowflake formation to growth of bacterial colonies. *Contemporary Physics*, v. 34, n. 5, p. 247–273, 1993. ISSN 0010-7514.
- BESTMANN, I.; KRAVCHINSKY, E. *Hele-Shaw Experiments on Jets and Flow in Porous Media*. [S.l.], 2014. Disponível em: <https://sites.ualberta.ca/~bsuther/research/jet{_}heleshaw/index>.
- BLUMS, E. S.; TSEBERS, A. O.; MAIOROV, M. M. *Magnetic Fluids*. [S.l.]: Walter de Gruyter, 1997. v. 1. ISBN 3110143909.

- BONGRAND, G.; TSAI, P. A. Manipulation of viscous fingering in a radially tapered cell geometry. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 97, n. 6, p. 061101, jun 2018.
- BUKA, A.; PALFFY-MUHORAY, P.; RACZ, Z. Viscous fingering in liquid crystals. *Physical Review A*, v. 36, n. 8, p. 3984–3989, 1987. ISSN 10502947.
- CARDOSO, S. S. S.; WOODS, A. W. The formation of drops through viscous instability. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 289, p. 351–378, 1995. ISSN 1469-7645.
- CARVALHO, G. D.; MIRANDA, J. A.; GADÊLHA, H. Interfacial elastic fingering in Hele-Shaw cells: A weakly nonlinear study. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, v. 88, n. 5, p. 1–8, 2013. ISSN 15393755.
- CENICEROS, H. D.; HOU, T. Y.; SI, H. Numerical study of Hele-Shaw flow with suction. *Physics of Fluids*, American Institute of PhysicsAIP, v. 11, n. 9, p. 2471, aug 1999. ISSN 1070-6631.
- CHEN, C.-Y.; TSAI, W.-K.; MIRANDA, J. A. Hybrid ferrohydrodynamic instability: Coexisting peak and labyrinthine patterns. *Physical Review E*, v. 77, n. 5, p. 056306, may 2008. ISSN 1539-3755.
- CHEN, J. D. Radial viscous fingering patterns in Hele-Shaw cells. *Experiments in Fluids*, v. 5, n. 6, p. 363–371, 1987. ISSN 07234864.
- CHEN, J. D. Growth of radial viscous fingers in a Hele-Shaw cell. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 201, p. 223–242, 1989. ISSN 14697645.
- CHEVALIER, C.; AMAR, M. B.; BONN, D.; LINDNER, A. Inertial effects on Saffman-Taylor viscous fingering. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 552, n. -1, p. 83–97, mar 2006. ISSN 14697645.
- COUTINHO, Í. M.; MIRANDA, J. A. Control of viscous fingering through variable injection rates and time-dependent viscosity fluids: Beyond the linear regime. *Physical Review E*, v. 102, n. 6, p. 1–15, 2020. ISSN 24700053.
- COUTINHO, Í. M.; MIRANDA, J. A. Development of magnetoelastic fingering patterns in a rectangular Hele-Shaw cell. *Physical Review Fluids*, v. 5, n. 9, p. 1–22, 2020.
- COUTINHO, Í. M.; MIRANDA, J. A. Peak instability in an elastic interface ferrofluid. *Physics of Fluids*, AIP Publishing, LLC, v. 32, n. 5, p. 052104, 2020. ISSN 1070-6631.
- COUTINHO, Í. M.; ROCHA, F. M.; MIRANDA, J. A. Viscous normal stresses and fingertip tripling in radial Hele-Shaw flows. *Physical Review E*, v. 104, n. 4, p. 045106, oct 2021. ISSN 2470-0045.
- COWLEY, M. D.; ROSENSWEIG, R. E. The interfacial stability of a ferromagnetic fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 30, n. 4, p. 671–688, dec 1967. ISSN 0022-1120.
- DAI, W.; SHELLEY, M. J. A numerical study of the effect of surface tension and noise on an expanding Hele-Shaw bubble. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, American Institute of PhysicsAIP, v. 5, n. 9, p. 2131, jun 1993. ISSN 0899-8213.

DIAS, E. O.; ALVAREZ-LACALLE, E.; CARVALHO, M. S.; MIRANDA, J. A. Minimization of viscous fluid fingering: A variational scheme for optimal flow rates. *Physical Review Letters*, v. 109, n. 14, p. 1–5, 2012. ISSN 00319007.

DIAS, E. O.; MIRANDA, J. A. Control of radial fingering patterns: A weakly nonlinear approach. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, American Physical Society, v. 81, n. 1, p. 1–7, jan 2010. ISSN 15393755.

DIAS, E. O.; MIRANDA, J. A. Wavelength selection in Hele-Shaw flows: A maximum-amplitude criterion. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 88, n. 1, p. 013016, jul 2013.

DICKSTEIN, A. J.; ERRAMILLI, S.; GOLDSTEIN, R. E.; JACKSON, D. P.; LANGER, S. A. Labyrinthine pattern formation in magnetic fluids. *Science*, v. 261, n. 5124, p. 1012–1015, 1993. ISSN 00368075.

DREAM THEATER. *A View From The Top Of The World*. [S.l.]: Inside Out, 2021.

FLAMENT, C.; LACIS, S.; CEBERS, A.; NEVEU, S.; PERZYNSKI, R. Measurements of ferrofluid surface tension in confined geometry C. *Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, v. 53, n. 5, p. 4801–4806, 1996.

FLAMENT, C.; PACITTO, G.; BACRI, J. C.; DRIKIS, I.; CEBERS, A. Viscous fingering in a magnetic fluid. I. Radial Hele-Shaw flow. *Physics of Fluids*, v. 10, n. 10, p. 2464–2472, 1998. ISSN 10706631.

FONTANA, J. V.; GADÊLHA, H.; MIRANDA, J. A. Development of tip-splitting and side-branching patterns in elastic fingerin. *Physical Review E*, v. 93, n. 3, p. 1–9, 2016. ISSN 24700053.

GADÊLHA, H.; MIRANDA, J. A. Finger competition dynamics in rotating Hele-Shaw cells. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 70, n. 6, p. 066308, dec 2004.

GADÊLHA, H.; MIRANDA, J. A. Effects of normal viscous stresses on radial viscous fingering. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, v. 79, n. 6, p. 24–29, 2009. ISSN 15393755.

GILTINAN, J.; KATSAMBA, P.; WANG, W.; LAUGA, E.; SITTI, M. Selectively controlled magnetic microrobots with opposing helices. *Applied Physics Letters*, AIP Publishing LLC, v. 116, n. 13, 2020. ISSN 00036951.

HE, A.; LOWENGRUB, J.; BELMONTE, A. Modeling an Elastic Fingering Instability in a Reactive Hele-shaw Flow. *Journal Of Applied Maths*, v. 31, n. 5, p. 3466–3502, 2009.

HILLIER, N. J.; JACKSON, D. P. Width of a ferrofluid finger: Hysteresis and a double energy minimum. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, v. 75, n. 3, p. 1–7, 2007. ISSN 15393755.

HOMSY, G. M. Viscous Fingering in Porous Media. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 19, n. 1987, p. 271–311, 1987.

HONKE, M. *Simulation of the Ferrofluid Interface*. Tese (Doutorado) — University of Waterloo, 2020.

IGONIN, M. *Hydrodynamic instabilities of miscible and immiscible magnetic fluids in a Hele-Shaw cell* Maksim. Tese (Doutorado), 2004.

JACKSON, D. P.; GOLDSTEIN, R. E.; CEBERS, A. O. Hydrodynamics of fingering instabilities in dipolar fluids. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 50, n. 1, p. 298, jul 1994.

JACKSON, S. J.; POWER, H.; GIDDINGS, D.; STEVENS, D. The stability of immiscible viscous fingering in Hele-Shaw cells with spatially varying permeability. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, North-Holland, v. 320, p. 606–632, jun 2017. ISSN 0045-7825.

JHA, B.; CUETO-FELGUEROSO, L.; JUANES, R. Fluid Mixing from Viscous Fingering. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 106, n. 19, p. 194502, may 2011.

JOHN, T.; MAY, K.; STANNARIUS, R. Meniscus of a ferrofluid around a vertical cylindrical wire carrying electric current. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, v. 83, n. 5, p. 1–5, 2011. ISSN 15393755.

KENT-DOBIAS, J.; BERNOFF, A. J. Energy-driven pattern formation in planar dipole-dipole systems in the presence of weak noise. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 91, n. 3, p. 032919, mar 2015.

KIM, H.; FUNADA, T.; JOSEPH, D. D.; HOMSY, G. M. Viscous potential flow analysis of radial fingering in a Hele-Shaw cell. *Physics of Fluids*, v. 21, n. 7, p. 1–9, 2009. ISSN 10706631.

KONDIC, L.; PALFFY-MUHORAY, P.; SHELLEY, M. J. Models of non-Newtonian Hele-Shaw flow. *Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, v. 54, n. 5, p. 4536–4539, 1996. ISSN 1063651X.

KONDIC, L.; SHELLEY, M. J.; PALFFY-MUHORAY, P. Non-Newtonian Hele-Shaw Flow and the Saffman-Taylor Instability. *Physical Review Letters*, v. 80, n. 7, p. 1433–1436, 1998.

LAJEUNESSE, E.; COUDER, Y. On the tip-splitting instability of viscous fingers. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 419, p. 125–149, 2000. ISSN 1469-7645.

LAKE, L. W. *Enhanced Oil Recovery*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Fluid Mechanics*. 2nd editio. ed. [S.l.]: Elsevier, 1987. 551 p. ISBN 9781483161044.

LAVROV, A. *SINTEFblog*. 2019. Disponível em: <<https://blog.sintef.com/industry-en/sintef-hele-shaw-two-phase-flow-natural-fractures/>>.

LESHCHINER, A.; THRASHER, M.; MINEEV-WEINSTEIN, M. B.; SWINNEY, H. L. Harmonic moment dynamics in Laplacian growth. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, American Physical Society, v. 81, n. 1, p. 016206, jan 2010. ISSN 15393755.

LI, H.; KAO, C. Y.; WEN, C. Y. Labyrinthine and secondary wave instabilities of a miscible magnetic fluid drop in a Hele-Shaw cell. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 836, n. February, p. 374–396, 2018. ISSN 14697645.

LI, S.; LOWENGRUB, J. S.; FONTANA, J.; PALFFY-MUHORAY, P. Control of viscous fingering patterns in a radial Hele-Shaw cell. *Physical Review Letters*, v. 102, n. 17, p. 1–4, 2009. ISSN 00319007.

LIAO, W. H.; KRUEGER, D. A. Theory of large agglomerates in magnetic colloids. *Journal of Colloid And Interface Science*, v. 70, n. 3, p. 564–576, 1979. ISSN 00219797.

LINS, T. F.; AZAIEZ, J. Resonance-like dynamics in radial cyclic injection flows of immiscible fluids in homogeneous porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 819, p. 713–729, may 2017. ISSN 0022-1120.

LIRA, S. A.; MIRANDA, J. A. Weakly nonlinear study of normal-field instability in confined ferrofluids. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, v. 84, n. 1, p. 1–6, 2011. ISSN 15393755.

LIVERA, P. O. S.; MIRANDA, J. A. Magnetoelastic pattern formation in field-responsive fluids. *Physical Review Fluids*, American Physical Society, v. 5, n. 1, p. 014006, jan 2020. ISSN 2469-990X.

LUM, G. Z.; YE, Z.; DONG, X.; MARVI, H.; ERIN, O.; HU, W.; SITTI, M. Shape-programmable magnetic soft matter. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, v. 113, n. 41, p. E6007–E6015, 2016. ISSN 10916490.

MAKADIA, H. K.; SIEGEL, S. J. Poly Lactic-co-Glycolic Acid (PLGA) as Biodegradable Controlled Drug Delivery Carrier. *Polymers 2011, Vol. 3, Pages 1377-1397*, Molecular Diversity Preservation International, v. 3, n. 3, p. 1377–1397, aug 2011.

MEYER, E. J.; KING, L. B.; JAIN, N.; HAWKETT, B. S. Ionic liquid ferrofluid electrospray with EMIM-NTf₂ and ferrofluid mode studies with FerroTec EFH-1 in a non- uniform magnetic field. *The 33rd International Electric Propulsion Conference*, p. 1–13, 2013.

MIRANDA, J. A. *Memorial De Atividades De Ensino, Pesquisa, Extensão E Gestão*. 2019.

MIRANDA, J. A.; WIDOM, M. Radial fingering in a Hele-Shaw cell: a weakly nonlinear analysis. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 120, n. 3-4, p. 315–328, sep 1998. ISSN 01672789.

MIRANDA, J. A.; WIDOM, M. *Weakly Nonlinear Analysis Of The Saffman-Taylor Problem*. 368 p. Tese (Doutorado), 1998.

MIRANDA, J. A.; WIDOM, M. Weakly Nonlinear Investigation of the Saffman–Taylor Problem in a Rectangular Hele–Shaw Cell. *International Journal of Modern Physics B*, v. 12, n. 09, p. 931–949, apr 1998. ISSN 0217-9792.

NELSON, B. J.; KALIAKATSOS, I. K.; ABBOTT, J. J. Microrobots for Minimally Invasive Medicine. *Annual Review of Biomedical Engineering*, v. 12, n. 1, p. 55–85, jul 2010. ISSN 1523-9829.

NEVEU-PRIN, S.; CABUIL, V.; MASSART, R.; ESCAFFRE, P.; DUSSAUD, J. Encapsulation of magnetic fluids. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, v. 122, n. 1-3, p. 42–45, 1993. ISSN 03048853.

NOCHETTO, R. H.; SALGADO, A. J.; TOMAS, I. A diffuse interface model for two-phase ferrofluid flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 309, p. 497–531, sep 2016. ISSN 00457825.

OLIVEIRA, R. M.; COUTINHO, Í. M.; ANJOS, P. H. A.; MIRANDA, J. A. Shape instabilities in confined ferrofluids under crossed magnetic fields. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 104, n. 6, p. 065113, dec 2021. ISSN 2470-0045.

- OLIVEIRA, R. M.; MIRANDA, J. A. Fully nonlinear simulations of ferrofluid patterns in a radial magnetic field. *Physical Review Fluids*, American Physical Society, v. 5, n. 12, p. 1–15, 2020. ISSN 2469990X.
- PACITTO, G.; FLAMENT, C.; BACRI, J. C. Viscous fingering in a magnetic fluid. II. Linear Hele-Shaw flow. *Physics of Fluids*, v. 13, n. 11, p. 3196–3203, 2001. ISSN 10706631.
- PACITTO, G.; FLAMENT, C.; BACRI, J. C.; WIDOM, M. Rayleigh-Taylor instability with magnetic fluids: Experiment and theory. *Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, v. 62, n. 6, p. 7941–7948, 2000. ISSN 1063651X.
- PANTON, R. L. *Incompressible Flow Third Edition*. [S.l.]: John Wiley, 2005. ISBN 9780471261223.
- PATERSON, L. Radial fingering in a Hele Shaw cell. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 113, p. 513–529, 1981. ISSN 14697645.
- PIHLER-PUZOVIĆ, D.; ILLIEN, P.; HEIL, M.; JUEL, A. Suppression of Complex Fingerlike Patterns at the Interface between Air and a Viscous Fluid by Elastic Membranes. *Physical Review Letters*, v. 108, n. 7, p. 074502, feb 2012. ISSN 0031-9007.
- PIHLER-PUZOVIĆ, D.; PENG, G. G.; LISTER, J. R.; HEIL, M.; JUEL, A. Viscous fingering in a radial elastic-walled Hele-Shaw cell. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 849, p. 163–191, 2018. ISSN 14697645.
- PODGORSKI, T.; SOSTARECZ, M. C.; ZORMAN, S.; BELMONTE, A. Fingering instabilities of a reactive micellar interface. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, v. 76, n. 1, p. 1–6, 2007. ISSN 15393755.
- RICHTER, R.; BARASHENKOV, I. V. Two-Dimensional Solitons on the Surface of Magnetic Fluids. *Physical Review Letters*, v. 94, n. 18, p. 184503, may 2005. ISSN 0031-9007.
- RISTROPH, L.; THRASHER, M.; MINEEV-WEINSTEIN, M. B.; SWINNEY, H. L. Fjords in viscous fingering: Selection of width and opening angle. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, v. 74, n. 1, p. 1–4, 2006. ISSN 15393755.
- ROSENSWEIG, R. E. *Ferrohydrodynamics*. Revised. [S.l.]: Courier Corporation, 1985. ISSN 0486783006, 9780486783000.
- ROSENSWEIG, R. E.; ZAHN, M.; SHUMOVICH, R. Labyrinthine Instability in Magnetic and Dielectric Fluids. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, v. 39, p. 127–132, 1983.
- SAFFMAN, P. G.; TAYLOR, G. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, v. 245, n. 1242, p. 312–329, jun 1958. ISSN 0080-4630. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.1958.0085>>.
- SALAMON, P.; KARASZI, Z.; KENDERESI, V.; BUKA, J.; JÁKLI, A. Liquid crystal spherical caps in magnetic fields. *Physical Review Research*, American Physical Society, v. 2, n. 2, p. 1–9, 2020. ISSN 26431564.
- SANDRE, O.; MÉNAGER, C.; PROST, J.; CABUIL, V.; BACRI, J. C.; CEBERS, A. Shape transitions of giant liposomes induced by an anisotropic spontaneous curvature. *Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, v. 62, n. 3 B, p. 3865–3870, 2000. ISSN 1063651X.

SCHIMITH, L.; ROBERTO, P.; ABEDI, B. *Deslocamento de fluidos em célula radial de Hele-Shaw*. Rio de Janeiro, 2020.

SERWANE, F.; MONGERA, A.; ROWGHANIAN, P.; KEALHOFER, D. A.; LUCIO, A. A.; HOCKENBERY, Z. M.; CAMPÀS, O. In vivo quantification of spatially varying mechanical properties in developing tissues. *Nature Methods* 2016 14:2, Nature Publishing Group, v. 14, n. 2, p. 181–186, dec 2016. ISSN 1548-7105.

TRYGGVASON, G.; AREF, H. Numerical experiments on Hele Shaw flow with a sharp interface. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 136, n. -1, p. 1, nov 1983. ISSN 0022-1120.

TSEBERS, A. O. Dynamics of magnetostatic instabilities. *Magnetohydrodynamics*, v. 17, n. 2, p. 113–121, 1981.

TSEBERS, A. O.; MAIOROV, M. M. Magnetostatic instabilities in plane layers of magnetizable liquids. *Magnetohydrodynamics*, v. 16, n. 2, p. 21–27, 1980.

WARD, T.; WHITE, A. R. Gas-driven displacement of a liquid in a partially filled radial Hele-Shaw cell. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 83, n. 4, p. 046316, apr 2011.

WILHELM, C.; GAZEAU, F.; BACRI, J.-C. Magnetic micromanipulation in the living cell. *Europhysics News*, v. 36, n. 3, p. 89–92, 2005. ISSN 0531-7479.

WISCHNEWSKI, C.; KIERFELD, J. Spheroidal and conical shapes of ferrofluid-filled capsules in magnetic fields. *Physical Review Fluids*, v. 3, n. 4, 2018. ISSN 2469990X.

WOODS, A. W. *Flow in Porous Media*. Cambridge: Cambridge University Press, 2015.

XU, T.; ZHANG, J.; SALEHIZADEH, M.; ONAIZAH, O.; DILLER, E. Millimeter-scale flexible robots with programmable three-dimensional magnetization and motions. *Science Robotics*, v. 4, n. 29, 2019. ISSN 24709476.

YU, Z.; CHRISTOV, I. C. Tuning a magnetic field to generate spinning ferrofluid droplets with controllable speed via nonlinear periodic interfacial waves. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 103, n. 1, p. 13103, 2021. ISSN 24700053.

ZAKINYAN, A.; BEKETOVA, E.; DIKANSKY, Y. Flows and instabilities of ferrofluids at the microscale. *Microfluidics and Nanofluidics*, v. 21, n. 5, 2017. ISSN 16134990.

ZHAO, M.; BELMONTE, A.; LI, S.; LI, X.; LOWENGRUB, J. Nonlinear simulations of elastic fingering in a Hele-Shaw cell. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier B.V., v. 307, p. 394–407, 2016. ISSN 03770427.

APÊNDICE A – EXPRESSÕES PARA $\phi_{jn}(t)$ E AS FUNÇÕES NÃO LINEARES DE MODOS ACOPLADOS DO CAPÍTULO 2

Apresentamos as expressões para os coeficientes dos potenciais de velocidade $\phi_{jn}(t)$ e expressões das funções de modos acoplados não lineares F , G , H , I , J , e K presentes na Eq. (2.14). As amplitudes dos potenciais de velocidade $\phi_{jn}(t)$ na Eq. (2.6) são dadas por (para $n \neq 0$)

$$\begin{aligned}
 \phi_{1n}(t) = & -\frac{R}{|n|}\dot{\zeta}_n - \frac{Q}{2\pi R|n|}\zeta_n + \sum_{p \neq 0} \left[\text{sgn}(np) - \frac{1}{|n|} \right] \dot{\zeta}_p \zeta_{n-p} + \frac{Q}{2\pi R^2} \sum_{p \neq 0} \text{sgn}(np) \zeta_p \zeta_{n-p} \\
 & - \frac{1}{R} \sum_{pq \neq 0} |q| \left[\text{sgn}(nq) - \frac{1}{|n|} \right] \left[\text{sgn}(pq) - \frac{1}{|q|} \right] \dot{\zeta}_p \zeta_{q-p} \zeta_{n-q} \\
 & - \frac{1}{R} \sum_{pq \neq 0} \frac{[(n-p-q)(2p-p|p|) - \frac{1}{2}|p|(|p|-1)(|p|-2)]}{|n||p|} \dot{\zeta}_p \zeta_q \zeta_{n-p-q} \\
 & - \frac{Q}{2\pi R^3} \sum_{pq \neq 0} \left\{ \frac{1}{|n|} + \frac{[(n-p-q)(2p-p|p|) - \frac{1}{2}|p|(|p|-1)(|p|-2)]}{|n||p|} \right\} \zeta_p \zeta_q \zeta_{n-p-q} \\
 & - \frac{Q}{2\pi R^3} \sum_{pq \neq 0} |q| \left[\text{sgn}(nq) - \frac{1}{|n|} \right] \text{sgn}(pq) \zeta_p \zeta_{q-p} \zeta_{n-q},
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_{2n}(t) = & \frac{R}{|n|}\dot{\zeta}_n + \frac{Q}{2\pi R|n|}\zeta_n + \sum_{p \neq 0} \left[\text{sgn}(np) + \frac{1}{|n|} \right] \dot{\zeta}_p \zeta_{n-p} + \frac{Q}{2\pi R^2} \sum_{p \neq 0} \text{sgn}(np) \zeta_p \zeta_{n-p} \\
 & + \frac{1}{R} \sum_{pq \neq 0} |q| \left[\text{sgn}(nq) + \frac{1}{|n|} \right] \left[\text{sgn}(pq) + \frac{1}{|q|} \right] \dot{\zeta}_p \zeta_{q-p} \zeta_{n-q} \\
 & - \frac{1}{R} \sum_{pq \neq 0} \frac{[(n-p-q)(2p+p|p|) + \frac{1}{2}|p|(|p|+1)(|p|+2)]}{|n||p|} \dot{\zeta}_p \zeta_q \zeta_{n-p-q} \\
 & + \frac{Q}{2\pi R^3} \sum_{pq \neq 0} \left\{ \frac{1}{|n|} - \frac{[(n-p-q)(2p+p|p|) + \frac{1}{2}|p|(|p|+1)(|p|+2)]}{|n||p|} \right\} \zeta_p \zeta_q \zeta_{n-p-q} \\
 & + \frac{Q}{2\pi R^3} \sum_{pq \neq 0} |q| \left[\text{sgn}(nq) + \frac{1}{|n|} \right] \text{sgn}(pq) \zeta_p \zeta_{q-p} \zeta_{n-q}.
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Como a área da interface é independente da perturbação ζ [veja o texto que apresenta a Eq. (2.3)], ocorre que o modo de Fourier $n = 0$ se iguala em ambos os lados da Eq. (2.13). Assim, Eqs. (A.1) e (A.2) são obtidas apenas para $n \neq 0$. A função sinal é definida por, $\text{sgn}(x) = x/|x|$.

Adicionalmente, as funções não lineares de modos acoplados em Eq. (2.14) se escrevem como

$$F(n, p) = \frac{|n|}{R} \left\{ \frac{QA}{2\pi R^2} \left[\frac{1}{2} - \text{sgn}(n, p) \right] - \frac{\gamma}{R^3} \left[1 - \frac{p}{2}(3p + n) \right] \right\}, \quad (\text{A.3})$$

$$G(n, p) = \frac{1}{R} \{ A|n|[1 - \text{sgn}(np)] - 1 \}, \quad (\text{A.4})$$

$$H(n, p, q) = \frac{Q}{2\pi R^4} \{ |q| \text{sgn}(pq)[|n| - |n| \text{sgn}(nq) - A] \}, \quad (\text{A.5})$$

$$I(n, p, q) = \frac{1}{R^2} \{ A|n|[1 - \text{sgn}(nq)] - 1 + |q| \text{sgn}(pq)[|n| - |n| \text{sgn}(nq) - A] \}, \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} J(n, p, q) = & \left\{ \frac{Q}{2\pi R^4} \left[\frac{(A-1)\mathcal{A}(n, p, q) + (A+1)\mathcal{B}(n, p, q)}{2|p|} - \frac{|n|(|p| + A/3)}{2} - 1 \right] \right. \\ & \left. + \frac{\gamma|n|}{R^5} \left[1 - 3p^2 - \frac{3}{2}q(n - p - q)(p^2 + 1) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$K(n, p, q) = \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{(A-1)\mathcal{A}(n, p, q) + (A+1)\mathcal{B}(n, p, q)}{2|p|} - \frac{|n|(|p| + A)}{2} \right\}, \quad (\text{A.8})$$

onde as funções auxiliares $\mathcal{A}(n, p, q)$ e $\mathcal{B}(n, p, q)$ são expressas por

$$\mathcal{A}(n, p, q) = (n - p - q)(2p - p|p|) - \frac{1}{2}|p|(|p| - 1)(|p| - 2) \quad (\text{A.9})$$

e

$$\mathcal{B}(n, p, q) = (n - p - q)(2p + p|p|) + \frac{1}{2}|p|(|p| + 1)(|p| + 2). \quad (\text{A.10})$$

APÊNDICE B – EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE MODOS ACOPLADOS EM TERCEIRA ORDEM PARA $a_n(t)$ E $b_n(t)$

Procuramos obter as expressões para a equação de modos acoplados em terceira ordem para as amplitudes perturbação cosseno, $a_n(t)$, e seno, $b_n(t)$ que aparecem no Capítulo 2 [Eq. (2.34)]. A amplitude de modos complexa $\zeta_n(t)$ pode ser escrita em termos das amplitudes reais $a_n(t)$ e $b_n(t)$ para $n > 0$ tal que

$$\zeta_n(t) = \frac{a_n(t) - ib_n(t)}{2}, \quad (\text{B.1})$$

$$\zeta_{-n}(t) = \frac{a_n(t) + ib_n(t)}{2}. \quad (\text{B.2})$$

Trivialmente, ao derivar no tempo,

$$\dot{a}_n(t) = \dot{\zeta}_n(t) + \dot{\zeta}_{-n}(t), \quad (\text{B.3})$$

e

$$\dot{b}_n(t) = i[\dot{\zeta}_n(t) - \dot{\zeta}_{-n}(t)]. \quad (\text{B.4})$$

Sendo assim, fazendo as devidas substituições na Eq. (2.16), obtemos as seguintes equações diferenciais de modos acoplados em terceira ordem para os modos senos e cossenos

$$\begin{aligned} \dot{a}_n = & \lambda(n)a_n \\ & + \frac{1}{2} \sum_{p>0} \left\{ W_0(n, -p)a_p a_{n+p} + W_0(n, p)a_p a_{n-p} + W_0(n, -p)b_p b_{n+p} - W_0(n, p)b_p b_{n-p} \right\} \\ & + \frac{1}{4} \sum_{p,q>0} \left\{ -W_1(n, -p, -q)b_p b_q a_{n+p+q} + W_1(n, -p, -q)a_q b_p b_{n+p+q} \right. \\ & + W_1(n, -p, q)a_q b_p b_{n+p-q} + W_1(n, -p, q)b_p b_q a_{n+p-q} - W_1(n, -p, q)a_p b_q b_{n+p-q} \\ & + W_1(n, p, -q)b_p b_q a_{n-p+q} - W_1(n, p, -q)a_q b_p b_{n-p+q} + W_1(n, p, -q)a_p b_q b_{n-p+q} \\ & - W_1(n, p, q)a_q b_p b_{n-p-q} - W_1(n, p, q)b_p b_q a_{n-p-q} - W_1(n, p, q)a_p b_q b_{n-p-q} \\ & + W_1(n, -p, -q)a_p a_q a_{n+p+q} + W_1(n, -p, q)a_p a_q a_{n+p-q} + W_1(n, p, -q)a_p a_q a_{n-p+q} \\ & \left. + W_1(n, p, q)a_p a_q a_{n-p-q} + W_1(n, -p, -q)a_p b_q b_{n+p+q} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \sum_{p,q>0} \left\{ W_2(n, -p, -q) b_p a_{q-p} b_{n+q} - W_2(n, -p, -q) b_p a_{n+q} b_{q-p} \right. \\
& + W_2(n, -p, q) b_p a_{p+q} b_{n-q} + W_2(n, -p, q) b_p a_{n-q} b_{p+q} - W_2(n, -p, q) a_p b_{n-q} b_{p+q} \\
& - W_2(n, p, -q) b_p a_{p+q} b_{n+q} + W_2(n, p, -q) b_p a_{n+q} b_{p+q} + W_2(n, p, -q) a_p b_{n+q} b_{p+q} \\
& - W_2(n, p, q) b_p a_{q-p} b_{n-q} - W_2(n, p, q) b_p a_{n-q} b_{q-p} - W_2(n, p, q) a_p b_{n-q} b_{q-p} \\
& + W_2(n, -p, -q) a_p a_{n+q} a_{q-p} + W_2(n, -p, q) a_p a_{n-q} a_{p+q} + W_2(n, p, -q) a_p a_{n+q} a_{p+q} \\
& \left. + W_2(n, p, q) a_p a_{n-q} a_{q-p} + W_2(n, -p, -q) a_p b_{n+q} b_{q-p} \right\},
\end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
\dot{b}_n & = \lambda(n) b_n \\
& + \frac{1}{2} \sum_{p>0} \left\{ W_0(n, -p) a_p b_{n+p} + W_0(n, p) a_p b_{n-p} - W_0(n, -p) b_p a_{n+p} + W_0(n, p) b_p a_{n-p} \right\} \\
& + \frac{1}{4} \sum_{p,q>0} \left\{ - W_1(n, -p, -q) a_q b_p a_{n+p+q} - W_1(n, -p, -q) a_p b_q a_{n+p+q} \right. \\
& - W_1(n, -p, q) a_q b_p a_{n+p-q} + W_1(n, -p, q) a_p a_q b_{n+p-q} + W_1(n, -p, q) a_p b_q a_{n+p-q} \\
& + W_1(n, p, -q) a_q b_p a_{n-p+q} - W_1(n, p, -q) a_p b_q a_{n-p+q} + W_1(n, p, -q) a_p a_q b_{n-p+q} \\
& + W_1(n, p, q) a_q b_p a_{n-p-q} + W_1(n, p, q) a_p a_q b_{n-p-q} + W_1(n, p, q) a_p b_q a_{n-p-q} \\
& - W_1(n, -p, -q) b_p b_q b_{n+p+q} + W_1(n, -p, q) b_p b_q b_{n+p-q} + W_1(n, p, -q) b_p b_q b_{n-p+q} \\
& \left. - W_1(n, p, q) b_p b_q b_{n-p-q} + W_1(n, -p, -q) a_p a_q b_{n+p+q} \right\} \\
& + \frac{1}{4} \sum_{p,q>0} \left\{ - W_2(n, -p, -q) b_p a_{n+q} a_{q-p} + W_2(n, -p, -q) a_p a_{q-p} b_{n+q} \right. \\
& - W_2(n, -p, q) b_p a_{n-q} a_{p+q} + W_2(n, -p, q) a_p a_{p+q} b_{n-q} + W_2(n, -p, q) a_p a_{n-q} b_{p+q} \\
& + W_2(n, p, -q) b_p a_{n+q} a_{p+q} + W_2(n, p, -q) a_p a_{p+q} b_{n+q} - W_2(n, p, -q) a_p a_{n+q} b_{p+q} \\
& + W_2(n, p, q) b_p a_{n-q} a_{q-p} + W_2(n, p, q) a_p a_{q-p} b_{n-q} + W_2(n, p, q) a_p a_{n-q} b_{q-p} \\
& - W_2(n, -p, -q) b_p b_{n+q} b_{q-p} + W_2(n, -p, q) b_p b_{n-q} b_{p+q} + W_2(n, p, -q) b_p b_{n+q} b_{p+q} \\
& \left. - W_2(n, p, q) b_p b_{n-q} b_{q-p} - W_2(n, -p, -q) a_p a_{n+q} b_{q-p} \right\},
\end{aligned} \tag{B.6}$$

onde

$$W_0(n, p) = F(n, p) + \lambda(p) G(n, p), \tag{B.7}$$

$$W_1(n, p, q) = J(n, p, q) + \lambda(p) K(n, p, q), \tag{B.8}$$

e

$$W_2(n, p, q) = H(n, p, q) + \lambda(p)I(n, p, q) + G(n, q) \left[F(q, p) + \lambda(p)G(q, p) \right]. \quad (\text{B.9})$$

APÊNDICE C – EQUAÇÃO DE MODOS ACOPLADOS PARA A CONDIÇÃO DE YOUNG-LAPLACE COM ESTRESSES VISCOSOS NORMAIS [EQ. (3.11)]

Apresentamos a equação de modos acoplados em terceira ordem utilizada durante o capítulo 3, obtida através das Eqs. (2.2), (2.3), (2.8), (2.13) e (3.11), dada por

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_n = & \lambda(n)\zeta_n + \sum_p \left\{ [F(n,p) + S_F(n,p)]\zeta_p\zeta_{n-p} + [G(n,p) + S_G(n,p)]\dot{\zeta}_p\zeta_{n-p} \right\} \\ & + \sum_{p,q} \left\{ [H(n,p,q) + S_H(n,p,q)]\zeta_p\zeta_{n-q}\zeta_{q-p} + [I(n,p,q) + S_I(n,p,q)]\dot{\zeta}_p\zeta_{n-q}\zeta_{q-p} \right. \\ & \left. + [J(n,p,q) + S_J(n,p,q)]\zeta_p\zeta_q\zeta_{n-p-q} + [K(n,p,q) + S_K(n,p,q)]\dot{\zeta}_p\zeta_q\zeta_{n-p-q} \right\},\end{aligned}\quad (C.1)$$

onde a taxa de crescimento linear e a função $s(n)$ são dadas no texto [Eqs. (3.12) e (3.14)]. Comprimentos são adimensionalizados pela espessura da célula b e velocidades por Q/b . A fim de termos uma expressão consistentemente em terceira ordem, escrevemos

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_n = & \lambda(n)\zeta_n + \sum_{p \neq 0} \left\{ F(n,p) + S_F(n,p) + \lambda(p)(G(n,p) + S_G(n,p)) \right\} \zeta_p\zeta_{n-p} \\ & + \sum_{p,q \neq 0} \left\{ [H(n,p,q) + S_H(n,p,q) + \lambda(p)(I(n,p,q) + S_I(n,p,q)) \right. \\ & + (G(n,q) + S_G(n,q))(F(q,p) + S_F(q,p) + \lambda(p)(G(q,p) + S_H(q,p)))] \zeta_p\zeta_{q-p}\zeta_{n-q} \\ & \left. + [J(n,p,q) + S_J(n,p,q) + \lambda(p)(K(n,p,q) + S_K(n,p,q))] \zeta_p\zeta_q\zeta_{n-p-q} \right\},\end{aligned}\quad (C.2)$$

onde as funções de modos acoplados são

$$F(n,p) = \frac{|n|}{s(n)R} \left\{ \frac{1}{2\pi R^2} A \left(\frac{1}{2} - \text{sgn}(np) \right) - \frac{(A+1)}{2CaR^3} \left(1 - \frac{1}{2}p(n+3p) \right) \right\}, \quad (C.3)$$

$$S_F(n,p) = \delta \frac{|n|}{12\pi R^5 s(n)} \left[-A(n|n|\text{sgn}(p) - p^2 + 1) + |p| + n\text{sgn}(p) \right], \quad (C.4)$$

$$G(n,p) = \frac{1}{s(n)R} [A|n|(1 - \text{sgn}(np)) - 1], \quad (C.5)$$

$$S_G(n,p) = \delta \frac{|n|}{6R^3 s(n)} \left[-A(n|n|\text{sgn}(p) - 2np + p^2 - 1) - |n| + |p| + n\text{sgn}(p) \right], \quad (C.6)$$

$$H(n,p,q) = \frac{|n|q}{2\pi s(n)R^4} \text{sgn}(p) \left[1 - \text{sgn}(nq) - \frac{A}{|n|} \right], \quad (C.7)$$

$$\begin{aligned}
S_H(n, p, q) = & -\delta \frac{|n|}{12\pi R^6 s(n)} \left\{ \text{sgn}(npq) \left[(q^2 - 1) |q| \text{sgn}(n) - 2q |nq| + n^2 q \right] \right. \\
& \left. - A \text{sgn}(pq)(q(n+q) - |nq|) \right\}, \quad (\text{C.8})
\end{aligned}$$

$$I(n, p, q) = \frac{1}{s(n)R^2} \left\{ A|n| [1 - \text{sgn}(nq)] + |n||q| \text{sgn}(pq) \left[1 - \text{sgn}(nq) - \frac{A}{|n|} \right] - 1 \right\}, \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{aligned}
S_I(n, p, q) = & -\delta \frac{|n|}{3R^4 s(n)} \left\{ \left[q \text{sgn}(p) (n |n| \text{sgn}(q) - 2nq + q^2 - 1) + |n| - (n+q) \text{sgn}(q) \right] \right. \\
& \left. - A \left[|q| (n+q) \text{sgn}(p) - |n| (n \text{sgn}(q) + q \text{sgn}(p)) + 2nq - q^2 + 1 \right] \right\}, \quad (\text{C.10})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J(n, p, q) = & \frac{1}{2\pi s(n)R^4} \left\{ \frac{(A-1)\mathcal{A}(n, p, q) + (A+1)\mathcal{B}(n, p, q)}{2|p|} - \frac{|n|(|p| + A/3)}{2} - 1 \right\} \\
& + \frac{(A+1)|n|}{2\text{Ca}R^5} \left\{ 1 - 3p^2 - \frac{3}{2}q(n-p-q)(p^2+1) \right\}, \quad (\text{C.11})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_J(n, p, q) = & -\delta \frac{|n|}{24\pi R^6 s(n)} \left\{ A \left[4|n| (q-n) \text{sgn}(p) + |np| - 2n(p+2q) \right. \right. \\
& + 7p^2 + 18pq + 4q^2 - 2 \left. \right] + p|n| (-2n+p+2q) \\
& + \text{sgn}(p) (4q(np+3) - 4n + p^3 - 4pq^2 - 3\text{sgn}(p) + 12p) + 3 \left. \right\}, \quad (\text{C.12})
\end{aligned}$$

$$K(n, p, q) = \frac{1}{s(n)R^2} \left\{ \frac{(A-1)\mathcal{A}(n, p, q) + (A+1)\mathcal{B}(n, p, q)}{2|p|} - \frac{|n|(|p| + A)}{2} \right\}, \quad (\text{C.13})$$

$$\begin{aligned}
S_K(n, p, q) = & \delta \frac{|n|}{12R^4 J(n)} \left\{ -A \left[|n| \text{sgn}(p)(-4n+p+4q) - 2np + 4nq \right. \right. \\
& + 7p^2 + 10pq - 4q^2 + 4 \left. \right] + |n| (-(p(-2n+p+2q) - 2)) \\
& - \text{sgn}(p) (4q(np+3) - 4n + p^3 - 4pq^2 + 12p) \left. \right\}, \quad (\text{C.14})
\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}(n, p, q) = (n-p-q)(2p-p|p|) - \frac{1}{2}|p|(|p|-1)(|p|-2), \quad (\text{C.15})$$

$$\mathcal{B}(n, p, q) = (n-p-q)(2p+p|p|) + \frac{1}{2}|p|(|p|+1)(|p|+2). \quad (\text{C.16})$$

APÊNDICE D – EQUAÇÃO DE MODOS ACOPLADOS PARA A CÉLULA DE HELE-SHAW COM CAMPOS CRUZADOS

Apresentamos a equação de modos acoplados em terceira ordem utilizada durante o capítulo 4, obtida através das Eqs. (2.2), (2.3), (2.13), (4.2) e (4.3), dada por

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_n &= \lambda(n) \zeta_n + \sum_{p \neq 0} \left\{ F(n, p) + \lambda(p) G(n, p) \right\} \zeta_p \zeta_{n-p} \\ &+ \sum_{p, q \neq 0} \left\{ \left[\lambda(p) I(n, p, q) + G(n, q) (F(q, p) + \lambda(p) G(q, p)) \right] \zeta_p \zeta_{q-p} \zeta_{n-q} \right. \\ &\left. + \left[\mathcal{J}(n, p, q) + \lambda(p) K(n, p, q) \right] \zeta_p \zeta_q \zeta_{n-p-q} \right\}.\end{aligned}\quad (\text{D.1})$$

onde a taxa de crescimento linear é dada no texto [Eq. (4.4)]. Comprimentos são adimensionalizados pelo raio da gota R e velocidades por $b^2 \mu_0 H_0^2 / [12(\eta_1 + \eta_2) R]$. As funções de modos acoplados são dadas por

$$\begin{aligned}F(n, p) &= |n| \left\{ \frac{\chi}{2} \left[1 + \chi(1 + (n-p)p) \right] \right. \\ &\left. + J^2 [3 - \chi(n-p)p] \right\} - B \left[1 - \frac{p}{2}(3p+n) \right] + ip\chi^2 J,\end{aligned}\quad (\text{D.2})$$

$$G(n, p) = A|n|[1 - \text{sgn}(np)] - 1, \quad (\text{D.3})$$

$$I(n, p, q) = A|n|[1 - \text{sgn}(nq)] - 1 + |q|\text{sgn}(pq)[|n| - |n|\text{sgn}(nq) - A], \quad (\text{D.4})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(n, p, q) &= |n| \left\{ \chi \left\{ 2J^2 (\chi pq - 1) - iq\chi J [1 + p(n-p-q)] \right\} \right. \\ &\left. + B \left[1 - 3p^2 - \frac{3}{2}q(n-p-q)(p^2 + 1) \right] \right\},\end{aligned}\quad (\text{D.5})$$

$$K(n, p, q) = \frac{(A-1)\mathcal{A}(n, p, q) + (A+1)\mathcal{B}(n, p, q)}{2|p|} - \frac{|n|(|p| + A)}{2}, \quad (\text{D.6})$$

$$\mathcal{A}(n, p, q) = (n-p-q)(2p-p|p|) - \frac{1}{2}|p|(|p|-1)(|p|-2), \quad (\text{D.7})$$

$$\mathcal{B}(n, p, q) = (n-p-q)(2p+p|p|) + \frac{1}{2}|p|(|p|+1)(|p|+2). \quad (\text{D.8})$$

APÊNDICE E – EQUAÇÃO DE MODOS ACOPLADOS PARA A CÉLULA DE HELE-SHAW RETANGULAR COM UM FLUIDO MAGNETOELÁSTICO

E.1 CÉLULA HORIZONTAL

Apresentamos a equação de modos acoplados em terceira ordem utilizada durante o capítulo 5. Através da Eq. (5.4), conseguimos obter

$$A \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) - \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) = -\frac{b^2}{12(\eta_1 + \eta_2)} \left[(p_1 - p_2) + \mu_0 \frac{M^2}{b} \varphi \right] + A v_\infty y, \quad (\text{E.1})$$

tal que, juntamente com as Eqs. (2.13), (5.9) e (5.10), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_k = & \Lambda(k) \zeta_k + \sum_{q \neq 0} \left\{ F(k, q) \zeta_q \zeta_{k-q} + G(k, q) \dot{\zeta}_q \zeta_{k-q} \right\} \\ & + \sum_{p, q \neq 0} \left\{ H(k, p, q) \dot{\zeta}_p \zeta_{q-p} \zeta_{k-q} + I(k, p, q) \dot{\zeta}_p \zeta_q \zeta_{k-p-q} \right. \\ & \left. + [J(k, p, q) + K(k, p, q)] \zeta_p \zeta_q \zeta_{k-p-q} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

onde

$$\Lambda(k) = |k| \left[N_B W_1(k) + AU - k^4 \right], \quad (\text{E.3})$$

$$W_1(k) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{ik\tau}) \left\{ \frac{2}{\tau^2} \left[\sqrt{1 + \tau^2} - |\tau| \right] \right\} d\tau, \quad (\text{E.4})$$

$$F(k, q) = \frac{N_B}{2} |k| q (k - q), \quad (\text{E.5})$$

$$G(k, q) = A |k| [1 - \text{sgn}(kq)], \quad (\text{E.6})$$

$$H(k, p, q) = |k| |q| \text{sgn}(pq) [1 - \text{sgn}(kq)], \quad (\text{E.7})$$

$$I(k, p, q) = p \left[k - q - \frac{p}{2} - \frac{|k||p|}{2p} \right], \quad (\text{E.8})$$

$$J(k, p, q) = |k| (k - p - q)^2 \left[C \lambda^2 p^2 q^3 (12p + 6q) - \frac{5}{2} (k - p - q)^2 pq - 10p^3 q - \frac{5}{2} p^2 q^2 \right], \quad (\text{E.9})$$

$$K(k, p, q) = N_B |k| \left[\frac{3}{2} W_2(k - p - q, p, q) - \frac{pq}{2} W_3(k - p - q, p, q) \right], \quad (\text{E.10})$$

$$W_2(k, p, q) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(e^{ik\tau} - 1) (e^{ip\tau} - 1) (e^{iq\tau} - 1) \right] \\ \times \left\{ \frac{2}{3\tau^2} \left[\frac{2\sqrt{1+\tau^2} - |\tau|}{\tau^2} - \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \right] \right\} d\tau, \quad (\text{E.11})$$

e

$$W_3(k, p, q) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(e^{ik\tau} - 1) e^{ip\tau} e^{iq\tau} \right] \left\{ \frac{2}{\tau^2} [\sqrt{1+\tau^2} - |\tau|] \right\} d\tau. \quad (\text{E.12})$$