UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO MATEMÁTICA-LICENCIATURA

JOSÉ LUCAS DE ARAUJO SILVA

O PENSAMENTO GEOMÉTRICO DOS DISCENTES DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO: Um olhar sob a ótica de Van Hiele

Caruaru
2021

JOSÉ LUCAS DE ARAUJO SILVA

O PENSAMENTO GEOMÉTRICO DOS DISCENTES DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO: Um olhar sob a ótica de Van Hiele

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Ensino (Matemática)

Orientador: Profª. Dr. Verônica Gitirana Gomes Ferreira.

Caruaru

2021

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier - CRB/4 - 1242

S586p Silva, José Lucas de Araujo.
O pensamento geométrico dos discentes do 1º ano do ensino médio: um olhar sob a ótica de Van Hiele. / José Lucas de Araujo Silva. – 2021.
62 f.; il. : 30 cm.

Orientadora: Verônica Gitirana Gomes Ferreira.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2021.
Inclui Referências.

1. Geometria. 2. Triângulos. 3. Educação básica. 4. Professores. 5. Educação matemática. I. Ferreira, Verônica Gitirana Gomes (Orientadora). II. Título.

CDD 371.12 (23. ed.) UFPE (CAA 2021-155)

JOSÉ LUCAS ARAUJO SILVA

O PENSAMENTO GEOMÉTRICO DOS DISCENTES DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO: Um olhar sob a ótica de Van Hiele

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovada em: 30 / 08 / 2021

BANCA EXAMINADORA

____

Profª. Drª. Verônica Gitirana Gomes Ferreira. (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Profª. Drª. Cristiane de Arimatéa Rocha (Examinadora Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Profª. Me. Lidiane Pereira de Carvalho (Examinadora Externa)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico esse trabalho aos meus pais Josina e Laércio, que apesar de todas as dificuldades, apesar da vida sofrida como agricultores e analfabetos, sempre me incentivaram a estudar. Desde cedo, fizeram-me entender que a única forma de ter um pouco mais de conforto na vida é por meio da educação; aos meus irmãos Mateus e Lívia; as minhas sobrinhas Evelyn Layane e Maria Júlia; as minhas avós Alzira e Helena; a minha tia Maria José; e a minha prima/irmã Izabela.

AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar, e ao divino Espírito Santo por todas as bênçãos e proteção, por estar sempre ao meu lado me protegendo, e guiando meus caminhos, permitindo me manter firme diante das adversidades para chegar até aqui. Nossa Senhora das Graças, minha mãezinha das graças e grande intercessora, foi através de sua intercessão que consegui a graça de concluir o curso.

Agradeço a minha mãe Josina pelo amor incondicional e por todo o apoio e palavras de conforto, e por sempre me amparar nas horas de cansaço e nos momentos que pensei em desistir. Ao meu pai Laércio, minhas sobrinhas Evelyn Layane e Maria Júlia, meus irmãos Mateus e Livia, e minhas avós Alzira e Helena, desde sempre me deram apoio de nunca desistir dos meus sonhos e hoje com eles estou realizando um.

A todos os familiares que me apoiaram e me deram o suporte necessário, em momentos até além da conta, mas que contribuíram para minha formação. Em especial a minha Tia Maria José e minha prima/irmã Izabela Alquino, por sempre estar ao meu lado em todos os momentos.

A minha orientadora, a Professora Dr. Verônica Gitirana por ter aceito esse desafio e ter contribuído de maneira significativa na elaboração deste trabalho. Agradeço as professoras Cristiane D’Arimatea e Lidiane Pereira, que fizeram parte da banca pela disponibilidade e pelas contribuições para com o meu trabalho.

Não posso esquecer-me de agradecer aos meus mestres, meus queridos professores, todos eles, desde a educação infantil até a graduação. Alguns me marcaram para sempre, como as professoras Adriana Nilo, Maria Sandra, Roberta Campos e Vaninha Lira que foram minhas professoras de matemática na Educação Básica, elas despertaram o interesse em ser professor de matemática, sou muito grato a elas por isso.

Aos amigos de turma e colegas de curso, que sempre estiveram presentes nos momentos de estudo e além dos muros do CAA, os quais tornaram melhores os meus dias na universidade. Em especial, aos meus amigos e amigas Bruno, Camila, Denise, Luana, Lucas, Natielly e Rebeca. Os levarei para sempre em minha vida.

As amigas e companheiras de transporte, que sempre estiveram presentes nos momentos de alegrias, resenhas e preocupações, as quais tornaram melhores os meus dias na universidade. Sendo elas, Taisa, Helen, Hellida, Laisa, Luanna e Ana Carolina, a turma do fundão. Os levarei para sempre em minha vida.

A todos que participaram de uma forma direta e indireta nesta minha caminhada, os meus agradecimentos. Que Deus os abençoe poderosamente e conto com vocês sempre, pois o dever continua e muitas coisas estão por vim, para vivermos juntos.

“Tudo posso Naquele que me
fortalece” (Filipenses 4,13)

RESUMO

O ensino de geometria na Educação Básica vem sofrendo as consequências da defasagem ocorrida nos anos 80 e 90. Consequentemente, isso contribuiu para um descompasso no desenvolvimento do raciocínio lógico e no pensamento geométrico dos alunos. Nesse contexto, esta pesquisa tem por objetivo analisar o nível do pensamento geométrico de discentes do 1° ano do Ensino Médio, sob a luz dos Níveis do Pensamento Geométricos desenvolvido pelo casal holandês Dina Van Hiele e Pierre Van Hiele. A pesquisa foi realizada por meio da aplicação de um teste com noventa e seis alunos. O teste foi desenvolvido no modelo de questionário composto com questões envolvendo o conhecimento sobre triângulos, com base na ótica do casal Van Hiele. Os resultados nos mostram que os sujeitos dessa pesquisa apresentam dificuldades em geometria, dado que, a maioria dos discentes examinados se encontram no nível 0 (Visualização) da Teoria de Van Hiele, em relação aos conteúdos sobre triângulos.

Palavras-chave: Triângulos. Geometria. Educação Básica. Van Hiele.

ABSTRACT

Elementary Education geometric teaching has been suffering from the lag that occurred in the 80s and 90s. Consequently, it contributed to a mismatch in the development of logical reasoning and geometric thinking of students. In this context, this research aims to analyse the level of geometric thinking of 1st-grade high school students under the light of the geometric thinking levels developed by the Van Hiele couple. The methodology comprised a test undertaken with 96 students. We built the test using a questionnaire model composed of questions about triangles based on the Van Hiele perspective. The results show us that the subjects of this research have difficulties in geometry. Most of the students examined are at level 0 (Visualization) of Van Hiele's Theory, concerning the contents about triangles.

Keywords: Triangles. Geometry. Basic education. Van Hiele.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na educação básica, para o ensino da geometria, propõe-se, entre outros conteúdos, explorar com os estudantes a relação entre figuras, com suas representações geométricas e objetos comuns do cotidiano, articulando-se a uma Matemática presente na rotina dos discentes. Por um longo tempo, com o movimento da matemática moderna, este ramo da Matemática ficou esquecido no ensino trabalhado nas escolas. Contudo, Fonseca (2002 apud BARROS, 2017) ressalta que:

> A preocupação em resgatar o ensino da geometria como uma das áreas fundamentais da Matemática tem levado muitos professores e pesquisadores a se dedicarem à reflexão e à elaboração, implementação e avaliação de alternativas, que busquem superar as dificuldades não raro encontradas na abordagem desse tema, na escola básica ou em níveis superiores de ensino (BARROS, 2017, p. 36)

Por conseguinte, um dos assuntos que vêm sendo discutidos em relação aos currículos de matemática é a defasagem do ensino de geometria, decorrente ainda desse abandono. De acordo com Barros (2017, p. 55), “Uma das grandes dificuldades de professores e alunos está na visualização e na interpretação dos conceitos em Geometria”. Assim, é importante que no ensino de geometria os estudantes sejam orientados a relacionar as figuras e representações geométricas com objetos comuns do cotidiano, como também identificar semelhanças entre figuras geométricas e relacionar suas propriedades. Tais relações podem proporcionar para os educandos a construção de um pensamento geométrico.

A respeito do pensamento geométrico dos alunos, a teoria de Van Hiele, criada pelo casal holandês Dina Van Hiele e Pierre Van Hiele, “centra-se na ideia de que, no processo de aprendizagem da Geometria, o pensamento dos alunos passa por uma série de níveis de desenvolvimento do pensamento que, além de sequenciais, são ordenados” (PINTO, 2011, p. 16). Temos que, essa teoria é desenvolvida por meio das experiências produzidas em face das dificuldades expressas pelos estudantes na área de geometria plana, possibilita detectar o nível de compreensão em relação aos conteúdos de geometria dos estudantes e, também, adequar a sequência de atividades ao nível em que o indivíduo se encontra.

Em nosso estudo adotamos como base os três primeiros níveis da teoria de Van Hiele, a saber: reconhecimento, análise e dedução informal. Com a utilização dos conceitos, definições e propriedades dos triângulos, conteúdos obrigatórios dos anos finais do Ensino Fundamental.

O ensino de geometria nos anos finais do Ensino Fundamental, segundo os Parâmetros Curriculares Comum para a Educação Básica do Estado de Pernambuco, “devem levar o estudante à percepção de que as figuras geométricas são caracterizadas por suas propriedades” (PERNAMBUCO, 2012a, p. 93). Os referidos parâmetros destacam também que o ensino das propriedades de figuras como os triângulos “abre possibilidades de desenvolvimento da percepção espacial, mas é importante salientar que a ênfase não deve recair na memorização dessas propriedades e de nomenclatura” (PERNAMBUCO, 2012a, p.93).

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), os discentes do 6° ano do Ensino Fundamental devem “Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos” (BRASIL, 2017, p. 303). Assim como nos anos finais do Ensino Fundamental, espera-se que “os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples” (BRASIL, 2017, p. 272). De acordo com o Currículo de Matemática para o Ensino Fundamental da rede Estadual de Educação de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012b, p. 6), no início dos anos finais do Ensino Fundamental os discentes devem “Classificar triângulos quanto às medidas dos lados (escaleno, equilátero e isósceles) e dos ângulos (acutângulo, retângulo e obtusângulo)”.

No Ensino Médio a BNCC “propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental” (BRASIL, 2017, p.527). No tocante aos conhecimentos sobre triângulos os discentes devem “Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos” (BRASIL, 2017, p.536). Sendo assim, buscaremos analisar o desenvolvimento dos conhecimentos sobre triângulo dos discentes do primeiro ano do Ensino Médio, visto que tais conteúdos devem ter sido lecionados neste período da Educação Básica.

Com a pesquisa, buscaremos responder, portanto, a seguinte questão:

Quais os níveis do pensamento geométrico de discentes do 1° ano do Ensino Médio, pela ótica de Van Hiele utilizando os conceitos, definições e propriedades dos triângulos?

A preferência desse tema se deu no reencontro que tive com os anos finais do Ensino Fundamental na disciplina de Estágio I. Evidenciei que muitas das dificuldades que eu encontrei durante minha passagem pela Educação Básica ainda são recorrentes entre os alunos das turmas que estagiei. Questionamentos estes advindos das práticas de ensino que evidenciam principalmente a memorização de fórmulas, de propriedades e de conceitos desses conteúdos da geometria. apesar da BNCC ressaltar que a geometria “não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas” (BRASIL, 2017, p. 272). Precisa-se ressaltar a importância de desenvolver argumentos geométricos convincentes e, assim, promover a evolução do pensamento geométrico.

Nesta mesma experiência que tivemos com o estágio I, observamos que os conteúdos de geometria constantemente não são ensinados, haja vista que geralmente os docentes e discentes têm dificuldades em compreender e visualizar alguns conteúdos desse eixo da Matemática. Consequentemente, temos um foco maior para outros eixos da matemática, prejudicando a construção de um pensamento geométrico, que leve o aluno a raciocinar coerentemente sobre os tópicos associados às figuras geométricas.

Dentre os assuntos da geometria abordados nesta pesquisa, destaca-se a definição, propriedades e conceitos dos triângulos, assuntos estes que serão utilizados para a conclusão do Ensino Fundamental, bem como no Ensino Médio. Dessa forma, é necessário que façamos um estudo sobre o nível dos discentes em relação a geometria, pelo olhar da teoria de Van Hiele. Como efeito, estaremos refletindo sobre os efeitos do ensino desse conteúdo. Assim como, procurar caminhos e soluções para a efetivação do ensino desse eixo da Matemática, caso seja necessário.

Dividimos nosso trabalho em oito capítulos, neste primeiro capítulo temos a introdução e justificativa do nosso projeto de pesquisa. No segundo capítulo apresento o nosso objetivo geral e os objetivos específicos que conduziram nossa pesquisa. No capítulo três, traremos uma breve abordagem teórica sobre o histórico do ensino de geometria no Brasil, apresentaremos suas principais limitações, como esse ensino é abordado em sala de aula e os principais desafios para a efetivação de um ensino de qualidade desse eixo da Matemática. No quarto capítulo, faremos uma introdução e revisão dos conteúdos trabalhados nesta pesquisa. Traremos também uma revisão de literatura de estudos sobre o ensino de geometria com abordagens do conteúdo de triângulos, na plataforma Google Sala de Aula.

No capítulo cinco, destacamos a teoria do desenvolvimento do pensamento geométrico segundo o casal van Hiele, evidenciaremos os níveis dessa teoria, quais são as particularidades existentes em cada nível e o que difere a passagem de um nível do pensamento para outro. Como também, relacionamos os níveis dessa teoria com os conceitos sobre triângulos. No sexto capítulo apresentaremos a metodologia adotada para essa pesquisa, os sujeitos estudados, a apresentação e discussão do instrumento de coleta. Bem como, relacionamos o instrumento de coleta de dados com a Teoria de Van Hiele. No sétimo, analisaremos os dados obtidos na coleta, identificamos os principais erros cometidos pelos alunos e os resultados apresentados, comparando com os níveis da Teoria da Van Hiele. E no último capítulo ostentamos nossas considerações finais.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

Caracterizar o pensamento geométrico, no que concerne ao reconhecimento, conceitos, classificação e propriedades dos triângulos, de discentes do 1° ano de uma escola do Ensino Médio, segundo os níveis do pensamento geométrico, sob o olhar da teoria de Van Hiele.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analisar as estratégias de estudantes do 1° ano do EM em questões envolvendo triângulos.
- Identificar os principais erros cometidos pelos alunos em questões envolvendo reconhecimento, visualização, conceitos, representações, relação entre as propriedades e demonstração de triângulos.
- Descrever as principais dificuldades apresentadas por estudantes do 1° ano do EM em questões envolvendo os triângulos.
- Caracterizar as estratégias segundo os níveis do pensamento geométrico dos alunos do 1°ano do Ensino Médio, descritos na Teoria de Van Hiele.

3 O HISTÓRICO DO ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL

Os estudos de Barbosa (2003) e Barros (2017) nos explicitam algumas dificuldades para a efetivação do ensino de Geometria nas escolas brasileiras, sendo elas, a ausência de preparo dos docentes, uma formação limitada, falta de interesse dos alunos, dificuldades na visualização e interpretação dos conteúdos, bem como o modelo exposto nos livros didáticos desse conteúdo. Sob o mesmo ponto de vista, Lovis (2009) em relação aos livros didáticos ressalta que:

> Dificilmente encontramos em livros exercícios que solicitem ao aluno construir objetos geométricos, mais raro ainda é encontrar questões do tipo “o que concluímos nesta situação?”, “e se rotacionarmos ou transladarmos o desenho, o que aconteceria?” ou “é possível fazer generalizações?”, com esse tipo de atividade, estratégias de investigações seriam estabelecidas e desenvolvidas. (LOVIS, 2009, p.58)

O relaxamento do ensino de geometria surge fruto de um movimento da matemática moderna que visava, principalmente, a memorização de fórmulas e na repetição de métodos, deixando a evolução do pensamento geométrico dos discentes de lado. Com início nas décadas de 1960 e 1970, “esse movimento atingiu não somente as finalidades do ensino, como também os conteúdos tradicionais da Matemática, atribuindo uma importância primordial à axiomatização, às estruturas algébricas, à lógica e aos conjuntos” (PINTO, 2005, p. 2).

Esse movimento deu ênfase a uma matemática formalizada, com uma linguagem simbólica, axiomatizada e lógica. Todavia, essa corrente surgiu “repleta de promessas de um ensino mais atraente e descomplicado em superação à rigorosa matemática tradicional. De fato, a Matemática Moderna, chega ao Brasil carregada de formalismos” (PINTO, 2005, p. 5). Proporcionando assim, uma matemática distante da realidade dos discentes, acarretando dificuldades para o ensino e aprendizagem dessa disciplina, como também dos eixos que a compõem. Em relação ao ensino de geometria, Barros (2017) acentua que

> Com o início do Movimento da Matemática Moderna, a Geometria passou a ser desenvolvida por Transformações Geométricas o que ocasionou dificuldade em sua implementação propiciando o não domínio do conteúdo por grande parte dos professores, iniciando-se o distanciamento. (BARROS, 2017, p.22)

Em harmonia com Pinto (2005, p. 5), temos em resumo que “o moderno dessa matemática apresenta-se, para os alunos, mais como um conjunto de novos dispositivos e nomenclaturas descolados de sentidos e significados conceituais, uma disciplina abstrata e desligada da realidade”.

Posteriormente, os Parâmetros curriculares nacionais (BRASIL, 1998) enfatizaram que a geometria não tem bastante destaque no ensino de matemática, chegando a ser confundida com o ensino de medidas. Contudo, aponta que

> Ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Também é fato que as questões geométricas costumam despertar o interesse dos adolescentes e jovens de modo natural e espontâneo. Além disso, é um campo fértil de situações-problema que favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações (BRASIL, 1998, p.122).

Atualmente, a BNCC (2017) reforça a importância de desenvolver o pensamento geométrico dos discentes, pois “esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes” (BRASIL, 2017, p.271).

Com efeito, segundo Pinto (2011, p. 121), “no ensino da Geometria, o professor deve proporcionar diferentes materiais aos alunos e estruturar adequadamente as tarefas a desenvolver”. Por outras palavras, é importante utilizar metodologias diferenciadas, materiais lúdicos e trabalhar com questões que estimulem a criatividade e o raciocínio lógico dos estudantes e envolva-os nas atividades desenvolvidas, ficando a cargo do professor desenvolver atividades que proporcionem tais aptidões. Villiers (2010) aponta que,

> Uma das principais preocupações no ensino da geometria em todo o mundo é o contínuo baixo nível de raciocínio geométrico entre os próprios professores, e até que tal problema seja tratado adequadamente, provavelmente haverá pouco progresso na qualidade do ensino de geometria (VILLIERS, 2010, p.428).

Pelo que foi exposto, buscamos mostrar como está sendo situado o ensino de geometria, principalmente os conhecimentos dos alunos em questões envolvendo triângulos. Em seguida, buscaremos refletir sobre a teoria de Van Hiele, que utilizamos para analisar o nível do pensamento geométrico das turmas a serem pesquisadas.

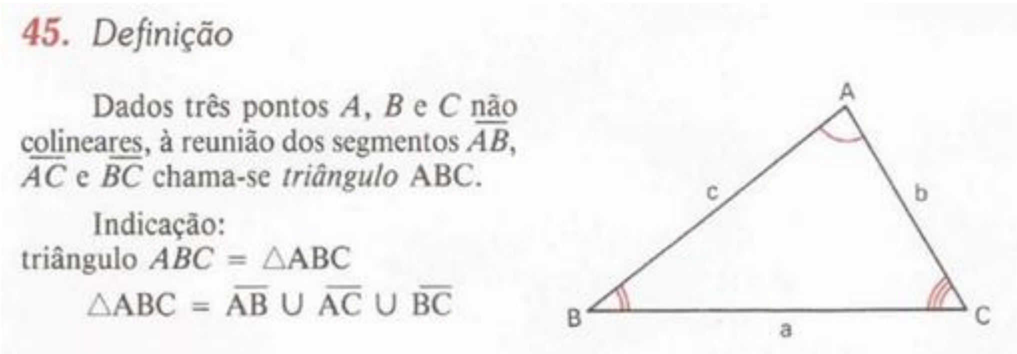
4 TRIÂNGULOS

4.1 DEFINIÇÃO, CONCEITOS E PROPRIEDADES DOS TRIÂNGULOS

Para uma melhor compreensão faremos neste subtópico uma introdução e revisão dos conceitos matemáticos, principalmente no que concerne a definição, conceitos, classificações e propriedades dos triângulos operadas neste trabalho. Essa conceptualização desses conteúdos servirá para possíveis dúvidas advindas dos leitores interessados nesta pesquisa.

Lima e Carvalho (2010, apud PACHÊCO *et al.*, 2020, p.346) destacam que "a definição de triângulo é muito conhecida. Tomamos três pontos A, B e C, que não pertençam a uma mesma reta e os ligamos pelos três segmentos de reta AB, BC e CA. A reunião dos três segmentos é o que se chama um triângulo". Soares (2014) frisar que na definição de triângulos deve-se fazer inclusão de classe com polígonos. A figura 1 apresenta a definição de triângulo do Livro Fundamentos da Matemática Elementar: Geometria Plana dos autores Dolce e Pompeo (2005).

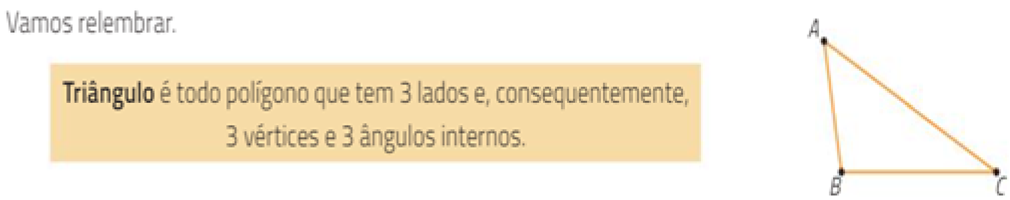
FIGURA 1: Definição de triângulo I



Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.36)

A figura 2 apresenta a definição do triângulo do Livro Teláris Matemática, do 6° ano do Ensino Fundamental, do autor Dante (2018)

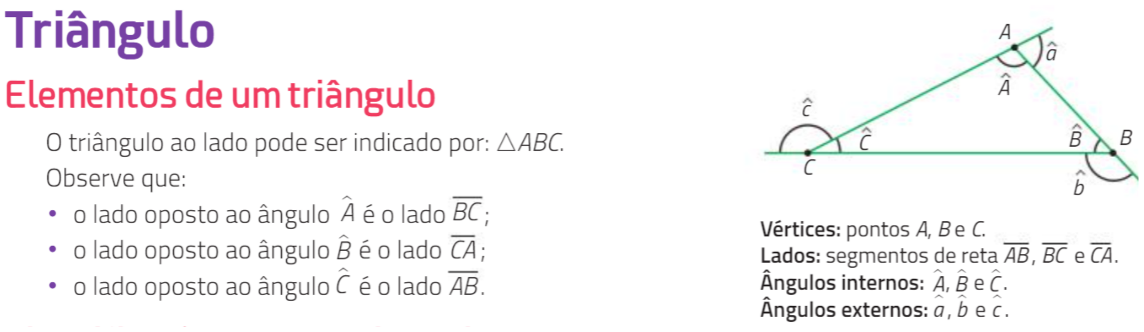
FIGURA 2: Definição de triângulo II



Fonte: Dante (2018, p.150)

Com isso, temos que o triângulo é um polígono formado por três segmentos de reta, três vértices e três ângulos internos. Na figura 3 temos a apresentação desses elementos por Dante (2018), no livro do 7° ano do Ensino Fundamental.

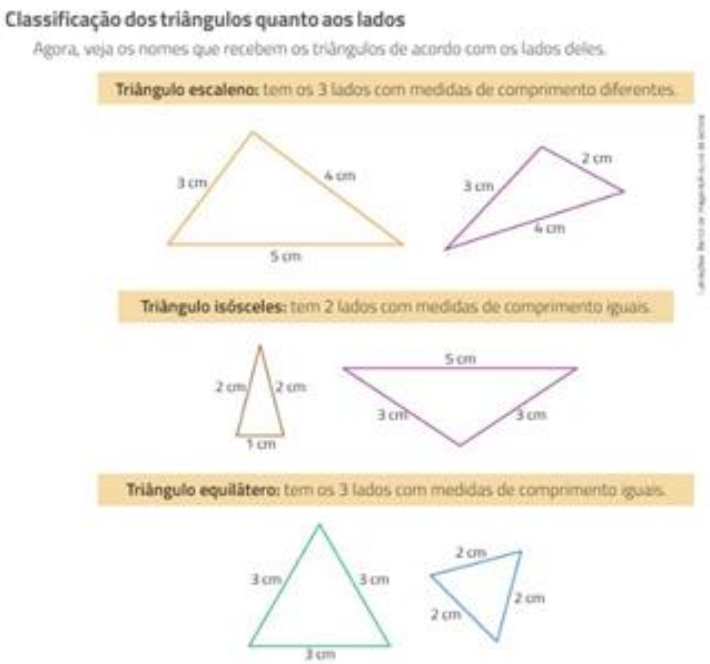
FIGURA 3: Elementos do triângulo



Fonte: Dante (2018, p.155)

Os triângulos podem ser classificados de duas maneiras: por seus lados e por seus ângulos. Perante seus lados; se as medidas de seus três lados foram iguais, é classificado como um triângulo equilátero; se o triângulo tiver dois lados iguais classificamos ele como isósceles, caso o triângulo tenha todos os seus lados diferentes é classificado de triângulo escaleno. A Figura 4 expõe essas classificações em relação aos lados.

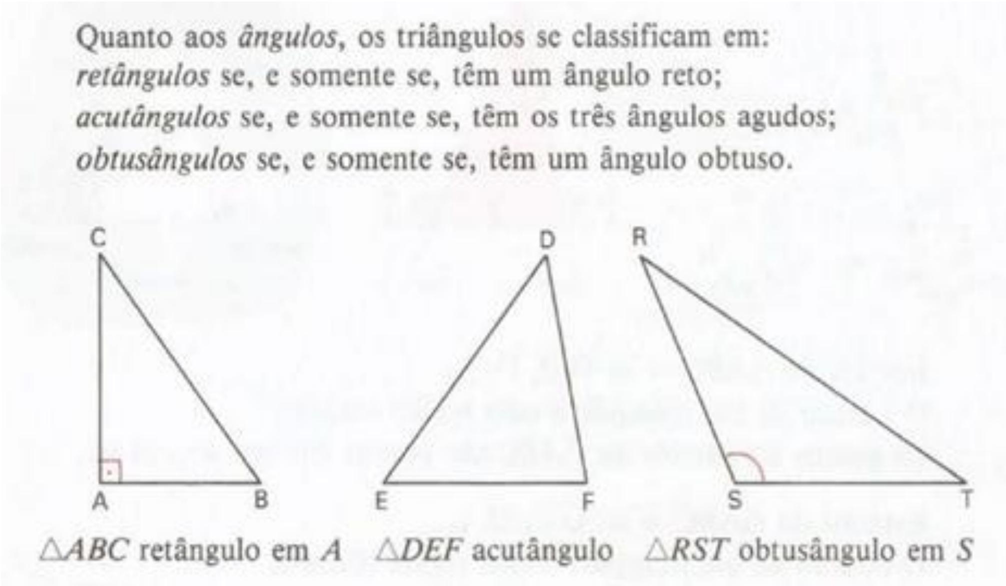
FIGURA 4: Classificação dos triângulos em relação aos seus lados



Fonte: Dante (2018, p.151)

Já em relação aos seus ângulos, os triângulos podem ser classificados de três maneiras diferentes. Quando todos os ângulos dos triângulos são agudos, ou seja, menores que 90°, temos um triângulo acutângulo. Caso o triângulo tenha um ângulo reto, isto é, com medida igual a 90°, temos um triângulos retângulo. Por fim, se os triângulos tiverem um ângulo obtuso, ou seja, um ângulo maior que 90°, classificamos como triângulos obtusângulos. A Figura 5 apresenta a classificação dos triângulos em relação aos seus ângulos.

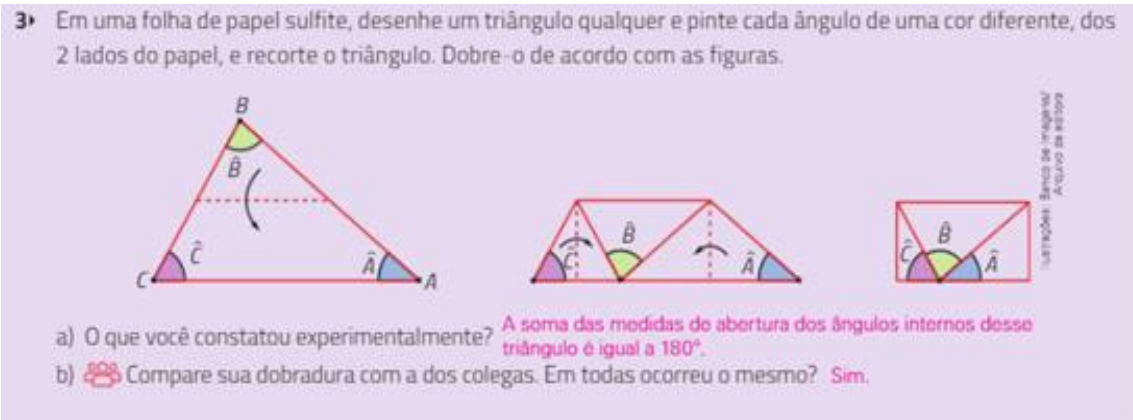
FIGURA 5: Classificação dos triângulos em relação aos seus ângulos



Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p.38)

Por último, temos a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, a qual ressalta que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180°. A seguir temos as figuras 6 e 7 que apresenta duas maneiras de apresentação e demonstração dessa propriedade no livro Teláris Matemática do 7° ano, a Figura 6 apresenta uma atividade, do livro Teláris Matemática do 7° ano do Ensino Fundamental, com um passo a passo para se chegar a uma demonstração empírica dessa propriedade, por meio de recorte de papel. Já na Figura 7 temos a demonstração formal dessa propriedade do mesmo livro.

FIGURA 6: Atividade sobre a soma dos ângulos internos do triângulo



Fonte: Dante (2018, p.164)

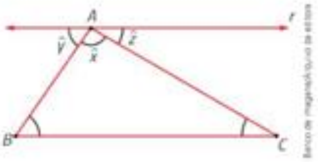
FIGURA 7: Demonstração da soma dos ângulos internos do triângulo

Em todo triângulo, a soma das medidas de abertura dos 3 ângulos internos é igual a 180°.

Veja como podemos **demonstrar** a propriedade verificada no *Explorar e descobrir*, para **todos** os triângulos.

Demonstração

Consideremos um $\triangle ABC$ **qualquer**. Pelo ponto A, podemos sempre traçar uma única reta r paralela ao lado $\overline{BC}$ (verdade aceita sem demonstração), obtendo os ângulos $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$, cujas medidas de abertura são x, y e z e tal que $x + y + z = 180°$.



Podemos notar que:

- $x = m(\hat{A})$, ou seja, x é a medida de abertura do ângulo interno $\hat{A}$ do triângulo;
- $y = m(\hat{B})$, pois a reta r é paralela a $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ é transversal e $\hat{y}$ e $\hat{B}$ são ângulos alternos internos.
- $z = m(\hat{C})$, pois a reta r é paralela a $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ é transversal e $\hat{z}$ e $\hat{C}$ são ângulos alternos internos.

Se $x + y + z = 180°$, então podemos concluir que $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$.

Dessa maneira, está **demonstrada** a propriedade.

Fonte: Dante (2018, p.165)

Portanto, o conteúdo sobre triângulos apresentados neste tópico são os que iremos trabalhar nesta pesquisa. Esta conceituação faz-se necessária até mesmo para se entender as escolhas feitas na pesquisa para definir triângulos isósceles, por exemplo. Esta poderia ser feita, com a inclusão ou não dos triângulos equiláteros como isósceles. No próximo tópico traremos algumas pesquisas que abordam o ensino de geometria e conhecimentos relacionados aos triângulos.

4.2 O ENSINO DE GEOMETRIA E OS TRIÂNGULOS NAS PESQUISAS

Neste subtópico nos deteremos a fazer uma revisão de algumas pesquisas que abordam nosso objeto, principalmente estudos sobre o ensino de geometria com abordagens do conteúdo de triângulos, a fim de buscarmos um mapeamento desta área de pesquisa. Para fazer essa revisão literária utilizamos o *Google Scholar*. Tal plataforma reúne um banco de pesquisa de diversas áreas. Esta plataforma disponibiliza mecanismos para filtrar e selecionar pesquisas que tenham relações com palavras-chave, de modo que teremos os principais trabalhos dos temas solicitados.

Sendo assim, para esta análise utilizamos as palavras "Triângulos" e "Ensino de Geometria" como norteadoras para nossa pesquisa. Especificamos nossa busca no período dos anos de 2010 à 2021, tivemos como resultado 2.480 pesquisas. Utilizamos como critério de inclusão as primeiras 8 pesquisas apresentadas que tratavam do ensino de Geometria, com relação com o conteúdo dos triângulos que fossem ambientadas na educação básica, indicadas na plataforma como mais relevantes. Vale ressaltar que não tivemos como aplicar outros filtros para diminuir a quantidade de pesquisa, portanto utilizamos os critérios ressaltados e aproveitamos a ordem apresentada pela plataforma, excluindo as pesquisas que não tinham relação com nosso tema de pesquisa. O Quadro 1 a seguir apresenta as pesquisas que utilizamos para fazer essa análise.

QUADRO 1 – Pesquisas da revisão de literatura

Ano	**Título**	**Autor(es)**	**Tipo de produção**
2018	Triângulos: uma experiência utilizando a teoria de Van Hiele	Jussara Aparecida da Fonseca, José Carlos Pinto Leivas	Artigo
2016	O ensino de semelhança de triângulos na opinião de alunos	Sandra Regina Ferreira Pereira, Marcos Fabrício Ferreira Pereira	Artigo
2019	Desafios do ensino de geometria no ensino médio	Lydia Fernandes Lobato, Gustavo de Oliveira Andrade	Artigo
2020	Identificando o conhecimento geométrico de alunos do 6º ano do ensino fundamental sobre triângulos	Franklin Fernando Ferreira Pachêco, Andreza Santana da Silva, Jailson Cavalcante de Araújo e Jaelson Dantas da Silva	Artigo
2016	Um estudo de caso sobre o uso do software régua e compasso no ensino de triângulos	André Tenório, Maria Beatriz de Mattos Richa Ribeiro, Thais Tenório	Artigo
2014	O ensino das propriedades de triângulos e paralelogramos enfocando o uso de construções geométricas	Ideogar Pereira Soares	Dissertação
2010	Ensino e aprendizagem de triângulos: uma experiência didática	Kátia Alves da Silva	Monografia
2015	Classificação dos triângulos quanto aos lados e ângulos, apresentação do teorema de Pitágoras.	Mauro Breni de Almeida Brizola	Artigo

Fonte: Elaborado pelo autor

Em sua pesquisa, Fonseca e Leivas (2018) tiveram como objetivo examinar de que forma alunos ingressantes em um curso de Licenciatura de Matemática identificam, definem e classificam triângulos, com o suporte da teoria de Van Hiele. As atividades foram desenvolvidas em forma de oficinas, participaram dessa pesquisa dez alunos do segundo semestre do curso de licenciatura em Matemática do Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete. Os autores constataram “que a maioria dos sujeitos participantes está em processo de transição do nível 1 para o nível 2, indicando a necessidade de mudanças no processo de ensino de Geometria na Educação Básica” (FONSECA; LEIVAS, 2018, p. 137). Com isso eles frisam que é necessário repensar o fazer educacional da geometria, de maneira que assuma um processo de ensino e aprendizagem mais dinâmico, significativo e efetivo.

A pesquisa de Pereira e Pereira (2016) analisou o processo de ensino e aprendizagem de semelhança de triângulos a partir do ponto de vista de discentes egressos do ensino fundamental de uma escola pública do estado do Pará. A pesquisa foi realizada por meio de um questionário. Os autores constataram que a maioria dos discentes apresentam dificuldades em questões envolvendo cálculos, em questões com situações de triângulos semelhantes de forma contextualizada, verificaram também que os relatos dos alunos sugerem que as dificuldades na aprendizagem deste conteúdo estão ligadas a metodologia aplicada pelos docentes em suas aulas. De igual modo, destacam que:

> Por hora, basta-nos a constatação de que o ensino de semelhança de triângulos é um conteúdo que de uma forma ou de outra apresenta dificuldades que precisam ser reconhecidas e trabalhadas pelos professores de forma a construir uma educação de melhor qualidade. (PEREIRA; PEREIRA, 2016, p. 8)

Lobato e Andrade (2019) expõem em sua pesquisa as dificuldades e possibilidades para efetivação do ensino de geometria no Ensino Médio. Os autores relatam que as dificuldades financeiras das escolas, a deficiência de materiais pedagógicos, incompreensão dos alunos que não sabem pra que serve ou porque estão estudando tais tópicos, como também as dificuldades dos professores em trabalhar com a geometria são os principais desafios a serem superados para um ensino de qualidade. Contudo, Lobato e Andrade (2019), por meio de uma pesquisa bibliográfica, destacam que a melhor maneira de se trabalhar a contextualização geometria e matemática no ambiente escolar é utilizando de questões do cotidiano e objetos manipuláveis, como atividades de construir sólidos com palitos de dente e jujubas, trabalhando com ladrilhos, planificações com auxílio de latas de alimentos do cotidiano dos discentes. Esse artigo destaca que para trabalhar com o cálculo do perímetro, área, arestas, vértices e construção de polígonos e triângulos podem utilizar Geoplano que é um objeto “formado por uma placa de madeira ou madeirite, onde são cravados pregos, formando uma malha composta por linhas e colunas dispostas” (LOBATO; ANDRADE, 2019, p.10).

A investigação de Pachêco *et al.* (2020, p.343) teve por objetivo “identificar o nível de conhecimento geométrico de alunos de uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental sobre triângulos caracterizados pelas medidas dos comprimentos de seus lados”. Participaram dessa pesquisa 26 alunos do 6° ano do Ensino Fundamental, por meio da teoria de Van Hiele constataram que esses discentes não apresentam dificuldades para reconhecer triângulos e possuem conhecimentos geométricos para identificar algumas propriedades dos triângulos. Apesar disso, segundo Pachêco *et al.* (2020, p.358), os resultados do trabalho mostram “com ênfase que a devida temática deve ser fonte de novas investigações para se diminuir lacunas existentes no processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo”. Para realizar esta pesquisa os autores produziram questionários com questões de múltipla escolha, porém concluíram que essa ferramenta não permite uma reflexão crítica dos discentes, sobre isso sugerem “que próximos estudos se apoiem no uso de atividades abertas no qual os participantes possam explicar quais estratégias matemáticas adotaram para as resoluções” (PACHÊCO *et al.* 2020, p.358).

Nas suas investigações com vinte e oito alunos do ensino Fundamental Tenório, Ribeiro e Tenório (2016) realizaram um estudo de caso, com o objetivo de analisar como a utilização do software “Régua e Compasso” pode influenciar no ensino de triângulos. Na análise dos resultados os autores observaram que os alunos têm dificuldade para desenhar triângulos variados com instrumentos de desenho. Outros erros evidentes destacados foram associar “equivocadamente a soma dos lados à soma dos ângulos internos (180º). Outro erro comum foi considerar ângulos externos na soma dos ângulos internos. Falhas no desenvolvimento de equações do 1º grau também foram comuns” (TENÓRIO; RIBEIRO; TENÓRIO, 2016, p.51). Após análise deste trabalho destacamos que a utilização de ferramentas como o geogebra ou alternativas interativas, motivam os discentes a participar das atividades solicitadas, sendo essa uma alternativa viável para promover a atenção para a geometria e conteúdos relacionados aos triângulos. O mesmo ponto de vista é salientado por Tenório, Ribeiro e Tenório (2016),

> Os alunos mostraram maior interesse e participação nas aulas com o software. A principal potencialidade do recurso tecnológico para a construção do conhecimento foi a possibilidade do aluno visualizar diferentes figuras geométricas. Isso os motivou a investigarem suas diferenças e a desenharem construções próprias. Todavia, estatisticamente, o software não influenciou na proficiência acadêmica. (TENÓRIO; RIBEIRO; TENÓRIO, 2016, p.55).

Soares (2014) em sua dissertação de mestrado analisou sobre o uso das construções geométricas no ensino de propriedades de triângulos e paralelogramos nos anos finais do Ensino Fundamental, com a hipótese que o uso de materiais didáticos com base na resolução de problema é a melhor forma de ensinar geometria. Ao realizar uma pesquisa de campo um dos questionamento era que os alunos indicassem uma definição de triângulos, constataram que “em nenhum momento houve referência ao termo polígonos" (SOARES, 2014, p.27). Então, o autor destacou que os alunos não fazem ligações entre o conjunto dos triângulos e o conjunto dos polígonos, levando a observar que esses discentes não fazem inclusão de classe. Após constatar o déficit de conhecimento em relação aos triângulos e paralelogramos, desenvolveram atividades com a participação dos alunos. Em relação a essas intervenções acentuam que o uso das construções geométricas e o uso de régua e compasso para as construções de figuras planas é fundamental para despertar o interesse dos alunos na realização das atividades. Posteriormente, analisaram que os sujeitos dessa pesquisa conseguiam definir paralelogramo e triângulos distintos, bem como realizavam aplicação de algumas propriedades básicas dessas formas geométricas, chegando a classificá-los no nível 2 da Teoria de Van Hiele. Por fim, concluíram que:

> Seja por motivação, por tornar assimiláveis os processos de abstrações ou por possibilitar a construção do conhecimento discente através de sua própria ação, as construções geométricas mostram-se como uma alternativa plausível à solução dos problemas do processo de ensino e aprendizagem de Geometria. (SOARES, 2014, p.102)

Em seu trabalho, Silva (2010) expõe uma experiência didática com alunos do 8° ano do Ensino Fundamental e teve como principal objetivo desenvolver conhecimentos sobre os triângulos, criando situações para os alunos desenvolverem competências para comparar, relacionar, diferenciar, classificar e generalizar. Em sua análise prévia com 28 alunos, Silva (2010) observou que a maioria desses discentes definem triângulos, como sendo um polígono que possui três lados, uma figura geométrica de três lados iguais ou que é um polígono de três partes. A autora destaca que nenhum aluno soube destacar o que seria polígono, alegando ter estudado quase nada sobre esse conteúdo. A pesquisa também destaca que os sujeitos sabem as diferenças entre triângulos, quadrados e retângulos, porém têm dificuldades em diferenciar losango e paralelogramo. Silva (2010) pontua que após sua experiência didática com a utilização de algumas plataformas e materiais manipuláveis os alunos continuaram com pequenas confusões ao aplicar os casos de congruência dos triângulos, contudo tiveram um bom aproveitamento nos conhecimentos sobre triângulos.

Em sua proposta didática Brizola (2015) teve a finalidade de levar os discentes a reconhecer as características e as propriedades matemáticas envolvidas em cada tipo de triângulo, classificar quanto aos ângulos e lados, reconhecer cada elemento do triângulo retângulo e fazer a aplicação do teorema de Pitágoras em situações problemas, através da utilização do Geogebra. Em relação ao reconhecimento dos triângulos retângulos constatou que os alunos têm dificuldade em reconhecer ângulos retos quando não aparece o “quadradinho” no ângulo e quando os alunos vão identificar a hipotenusa como sendo o lado maior do triângulo, mais a posição dos triângulos é desfavorável. Com a utilização do Geogebra, Brizola (2015) desenvolveu atividades com os alunos e notou que eles conseguiam construir triângulos variados, todavia quando foram solicitados para descrever o processo de construção desses triângulos tiveram dificuldades nas nomenclaturas a serem utilizadas e como descrever as ferramentas utilizadas. Por fim, Brizola destaca que,

> Trabalhar com o software Geogebra não é difícil, com algumas explicações e demonstrações rápidas, a grande maioria dos alunos resolveram as atividades com facilidade, mas eles mesmos colocaram que encontram muitas dificuldades quando necessitam descrever o que realizaram quais as etapas desenvolvidas, dificuldades ao fazer o uso de linguagem matemática nas descrições. (BRIZOLA, 2015, p.25)

Ao fazer essa análise, pudemos perceber que na plataforma Google Acadêmico, poucas pesquisas tratam exclusivamente sobre classificar o nível de pensamento geométrico em relação ao conteúdo triângulos. Constatamos que muitas pesquisas tratam da utilização de ferramentas e aplicativos on-line exemplo o Geogebra, como também de materiais manipuláveis no ensino de geometria. Por fim, destacamos a necessidade dessa revisão literária para uma melhor contextualização dos assuntos estudados e para nos auxiliarem na análise dos resultados desse trabalho.

5 TEORIA DE VAN HIELE

Nesta pesquisa, o referencial teórico central será a teoria do casal Van Hiele. A escolha desta teoria deve-se à adequação para fazer uma análise do pensamento geométrico e dos conhecimentos sobre triângulos dos participantes.

O casal holandês Pierre van Hiele e Dina van Hiele Geldof. Propuseram uma teoria sobre os conhecimentos em relação à geometria em seus trabalhos de Doutorado na Universidade de Utrecht, Holanda. Lançada inicialmente em 1959, pouco tempo depois com o falecimento da esposa, coube a Pierre reformular até chegar a atual teoria. O desenvolvimento dessa teoria se deu pela análise dos alunos do casal resolvendo atividades de geometria.

A teoria de Van Hiele se sustenta na existência de cinco níveis de aprendizagem da geometria, sendo eles: Nível 0 (visualização); Nível 1 (análise); Nível 2 (dedução informal); Nível 3 (dedução); e Nível 4 (rigor). Em relação a esses níveis, Walle (2009, apud ASSAD, 2017) indica algumas características essenciais. Os níveis são sequências, para se chegar a um nível superior é preciso ter alcançado o nível inferior. Temos, também, que quando é repassado um ensino de geometria com uma linguagem superior a do estudante, haverá uma incompreensão dos assuntos ensinados. Segundo Villiers (2010):

> Os Van Hiele atribuíram a principal razão da falha do currículo de geometria tradicional ao fato de que o currículo era apresentado em um nível mais alto do que o dos alunos, ou seja, eles não conseguiam entender o professor e o professor não conseguia entender o porquê eles não conseguiam entender. (VILLIERS, 2010, p.401)

Seguindo o mesmo entendimento, Pinto (2011) destaca que:

> O modelo de van Hiele centra-se na ideia de que, no processo de aprendizagem da Geometria, o pensamento dos alunos passa por uma série de níveis de desenvolvimento do pensamento que, além de sequenciais, são ordenados, de tal modo que não se pode saltar/omitir nenhum. (PINTO, 2011, p.16)

Como nosso intuito é analisar o primeiro ano do ensino médio, concentramos nesta pesquisa os níveis 0, 1 e 2. De acordo com Assad (2017), os discentes quando iniciam os estudos no Ensino Médio, devem estar no nível 2 da Teoria de Van Hiele. Sendo assim, devem ser capazes de compreender uma dedução informal sobre figuras e suas propriedades. Ao finalizar o ensino fundamental, os estudantes devem realizar e entender problemas da geometria com uma linguagem matemática entre os níveis 1 e 2.

Para utilizarmos essa teoria, explicitamos as características do conhecimento dos estudantes em cada nível e o que difere a passagem de um nível para outro.

5.1 NÍVEL 0 (VISUALIZAÇÃO)

No nível 0 os indivíduos podem distinguir uma figura, todavia as propriedades dessa figura não são reconhecidas. Segundo Assad (2017, p. 62), “esperava-se que o estudante associasse o nome correto das figuras”. Nesse sentido, Kaleff e colaboradores (1994, p.25) evidencia que “neste estágio inicial, os alunos raciocinam basicamente por meio de considerações visuais. Conceitos geométricos são levados em conta como um todo sem considerações explícitas das propriedades dos seus componentes”.

Assim sendo, os discentes identificam as figuras geométricas visualmente, porém não reconhecem suas propriedades. Reconhecem triângulos, quadrados, círculos, entre outros, por sua forma. “Os alunos, nesta fase, conseguem reproduzir figuras dadas e aprender vocabulário geométrico básico” (PINTO, 2011, p.17). Todavia os discentes neste nível não conseguem classificar os triângulos em relação aos seus ângulos e lados e correlacionar suas propriedades.

5.2 NÍVEL 1 (ANÁLISE)

No nível 1, os alunos entendem as propriedades das figuras por meio da confrontação e compreendem a simbologia apropriada para detalhá-las, todavia não conseguem relacionar essas propriedades. Esse nível “exige dos estudantes a percepção das características das figuras, identificando propriedades, os estudantes podem separar as figuras de acordo com suas propriedades e classificação formal” (ASSAD, 2017, p. 48).

Em resumo, Kaleff (1994) ressalta que os alunos começam a identificar características das figuras geométricas e estabelecer propriedades usadas para classificar classes e figuras.

No tocante ao assunto de triângulos os alunos reconhecem algumas propriedades, classificam os triângulos em equilátero, isósceles e escaleno, reconhecendo que a propriedade dos ângulos internos é igual a 180°, entre outras propriedades. Entretanto, não classificam um triângulo equilátero como sendo isósceles.

Em relação a transição do Nível 0 para o Nível 1, Villiers (2010, p. 402) ressalta que, “envolve mais do que simplesmente a aquisição de linguagem, ela envolve o reconhecimento de algumas novas relações entre conceitos e o refinamento e a renovação de conceitos existentes”. Dessa maneira é preciso restabelecer e rearranjar os conhecimentos aprendidos no nível anterior.

5.3 NÍVEL 2 (DEDUÇÃO INFORMAL)

No nível 2, em conformidade com Pinto (2011)

> Há compreensão da existência de relações de propriedades dentro das figuras e entre figuras, deduzindo-se propriedades. Os alunos começam a ser capazes de compreender demonstrações feitas pelo professor, repeti-las e adaptá-las para situações semelhantes. (PINTO, 2011, p. 17)

Sendo assim, nesta fase os alunos começam a fazer relações entre propriedades para demonstrar informalmente que uma propriedade de uma figura, pode ser útil para outra figura semelhante. Todavia não reconhecem o papel dos axiomas utilizados nas demonstrações formais.

Nessa fase, o discente começa a distinguir e perceber as igualdades das figuras geométricas, por exemplo, classificam como triângulo isósceles todo triângulo equilátero, pois todo equilátero tem dois lados iguais. Sendo assim "Os estudantes deverão ser capazes de perceber relações e propriedades comuns entre diferentes figuras" (ASSAD, 2017, p. 49).

Em relação à transição do nível 1 para o nível 2, Villires (2010) ressalta que ambos os níveis têm uma rede de relações completamente diferentes. Enquanto no nível 1, "envolve a associação de propriedades a tipos de figuras e relações entre figuras de acordo com tais propriedades" (VILLIRES, 2010, p. 402); no nível 2, "envolve as relações lógicas entre as propriedades das figuras" (VILLIRES, 2010, p 402). Então, ao chegar no nível 2, o discente além de saber fazer relações entre figuras, deve fazer relações entre essas propriedades.

5.4 NÍVEL 3 (DEDUÇÃO FORMAL)

No nível 3, o discente deve estar preparado para ir além das propriedades das figuras geométricas, sendo capaz de demonstrar algumas dessas propriedades formalmente, com a utilização dos axiomas. "A geometria é entendida como um processo dedutivo. Os alunos são capazes de reformular teoremas, compreender e desenvolver demonstrações formais, servindo-se de axiomas" (PINTO, 2011, p. 17).

Neste estágio, os alunos têm o domínio de métodos de demonstração, por exemplo, em relação aos conhecimentos dos triângulos, são capazes de demonstrar as propriedades dos triângulos utilizando congruência de triângulos. Portanto, para transitar neste nível é preciso saber organizar e utilizar argumentos lógicos dedutivos para demonstrar propriedade, reconhecidas e relacionadas nos níveis anteriores.

5.5 NÍVEL 4 (RIGOR)

Neste nível o discente está apto a operar com distintos sistemas axiomáticos, como as geometrias não euclidianas. “Os sistemas axiomáticos são estudados. Realizam-se demonstrações abstratas, há compreensão e utilização de outras Geometrias, além da de Euclides” (PINTO, 2011, p. 17).

Esse quarto e último nível é o menos estudado nas pesquisas, pois a Geometria estudada nas escolas não supera o nível da dedução formal. Ao trabalhar com turmas do ensino médio, Villires (2010, p. 401) ressaltar que, “embora a teoria de Van Hiele faça distinção entre os cinco diferentes níveis de pensamento, aqui nos concentramos apenas nos quatro primeiros níveis, já que eles são os mais relevantes para a geometria do ensino médio”.

6 METODOLOGIA

A abordagem dessa pesquisa ocorreu pela utilização de uma metodologia desenvolvida em quatro etapas: revisão bibliográfica, elaboração de questionário contendo questões organizadas com base nos níveis da teoria de Van Hiele, aplicação do questionário e análise dos resultados. Através dessas etapas caracterizaremos o pensamento geométrico, no que concerne ao reconhecimento, conceitos, classificação e propriedades dos triângulos, de discentes do 1° ano de uma escola do Ensino Médio, segundo os níveis do pensamento geométrico, sob o olhar da teoria de Van Hiele. Como também, analisar as estratégias usadas, identificar os principais erros cometidos e descrever as principais dificuldades apresentadas por esses estudantes em questões envolvendo os triângulos.

Os sujeitos dessa pesquisa são 96 (noventa e seis) discentes das turmas do 1° Ano do Ensino Médio de uma Escola de Referência no Ensino Médio, situada no agreste pernambucano. Esses discentes estavam separados em 3 turmas dessa escola, por causa do distanciamento social, foram divididas em dois setores. Para não promover aglomeração e escola funcionava uma semana com o 1° setor, que corresponde a metade dos discentes da escola, posteriormente na outra semana operava com o 2° setor, equivalente a outra metade dos discentes. Com isso, para alcançar uma quantidade maior de sujeitos a pesquisa foi aplicada em dois dias de semanas diferentes, com um tempo médio de uma hora para cada aplicação.

Primeiramente, pensamos em realizar essa pesquisa com alunos do 9° ano dos anos finais do Ensino Fundamental, todavia com a pandemia do Coronavirus todo esse nível de ensino estava acontecendo de forma remota. Cabe destacar que as únicas escolas com ensino presencial no estado de Pernambuco no momento da coleta de dados, foram as escolas estaduais, sendo esse um ponto importante na escolha dos sujeitos dessa pesquisa. Além disso, os conhecimentos que buscamos analisar nesta pesquisa, são lecionados na etapa anterior ao Ensino Médio.

Destacamos que o ano letivo de 2020 foi um ano muito conturbado em decorrência da pandemia, tornando as dificuldades do dia a dia do ambiente escolar mais evidentes. Alto número de faltas, desistências, desinteresse pelos estudos, professores sobrecarregados, foram alguns dos principais problemas na educação no ano de 2020. Evidenciamos que um dos principais fatores desses problemas foi a falta de aparelhos eletrônicos e acesso a uma internet de boa qualidade para a participação nas aulas online e para a comunicação entre educandos e educadores. Portanto, os sujeitos dessa pesquisa tiveram um final de ensino fundamental com algumas dificuldades para efetivar os conhecimentos dessa pesquisa.

Reforçamos que para ter contato com os sujeitos dessa pesquisa e realizar a coleta de dados, por meio da aplicação de um questionário, seguimos todas as normas sanitárias contra a Covid-19, solicitadas pela instituição de ensino e pelos órgãos competentes.

6.1 INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS

Após a coleta dos dados, refletimos sobre as respostas apresentadas e os conhecimentos em geometria desses discentes. “Os dados coletados são descritivos e o pesquisador é o mediador e o instrumento que analisa e observa todo o desenvolvimento das atividades propostas, o que torna o trabalho do pesquisador independente” (BARROS, 2017, p. 74).

O questionário que preparamos envolvendo os conceitos sobre triângulos, foi constituído por dez questões de respostas livres. A seguir, faremos uma apresentação do nosso instrumento de coleta como também uma discussão da relação de cada questão com os objetivos traçados nesta pesquisa.

6.1.1 Explanação, descrição e análise do questionário

Para conhecermos melhor os sujeitos dessa pesquisa, inicialmente nas questões 1 e 2 solicitamos algumas informações pessoais desses discentes. No quadro 2, temos a apresentação dessas questões.

QUADRO 2 – Questões 1 e 2

1- Nome
2- Idade

Fonte: Elaborado pelo autor

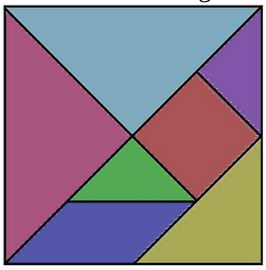
Na questão 1 e 2, buscamos identificar melhor os discentes, caso aconteça alguma dúvida ou observações nas respostas desses sujeitos, essas informações solicitadas serão de extrema importância, para a localização deles.

As questões 3, 4 e 5 referem-se ao nível 0 (visualização), que exige o reconhecimento, a visualização e a indicação dos nomes das figuras geométricas. No quadro 3, temos a apresentação dessas questões.

QUADRO 3 – Questões 3, 4 e 5

O Tangram é um quebra-cabeça formado por figuras geométricas, como podemos ver na imagem abaixo cada cor mostra uma peça desse jogo.

FIGURA 8 - Tangram



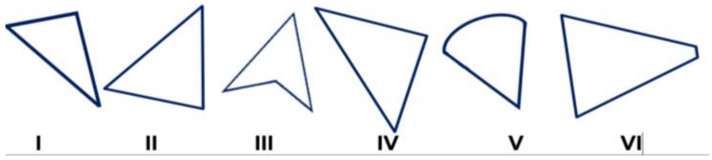
Fonte: Os autores (2021)

3- Considerando como compondo o Tangram, figuras de uma cor apenas. Quais as figuras geométricas que você consegue identificar, que formam o quebra-cabeça Tangram?

4- Enumere a quantidade de cada figura geométrica que você identificou na questão 3:

5- (Adaptada) Das figuras abaixo qual(is) é/são triângulo(s)?

FIGURA 9 - Figuras da questão 5



Fonte: Adaptada de Silva e Pachêco (2017, p.6).

Fonte: Elaborado pelo autor

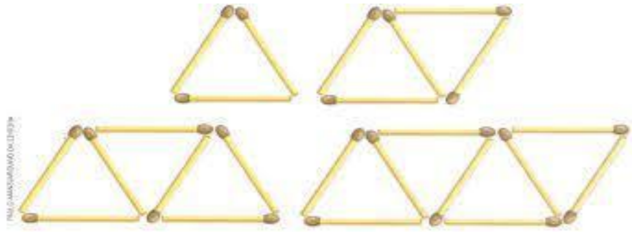
A questão 3 teve como objetivo analisar o reconhecimento e a visualização de figuras geométricas. Esperava-se que o discente indicasse o nome correto das figuras geométricas presentes no quebra-cabeça Tangram. Uma resposta satisfatória seria encontrar triângulos, quadrado e paralelogramo. Porém, se o estudante considerar que uma figura tenha duas cores, pode identificar um trapézio.

Já na questão 4, buscava observar se o discente conseguiria quantificar corretamente as figuras nomeadas na questão 4. O estudante deveria encontrar 5 triângulos e 2 paralelogramos ou quadriláteros. Caso identifique 5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramo, não considerará a inclusão de classes. Ele pode também identificar 1 losango. Nestas duas questões uma dificuldade que pode ocorrer no reconhecimento dessas figuras é em relação às dimensões desses triângulos, pois temos no Tangran dois triângulos pequenos, um triângulo médio e dois grandes.

Na questão 5, os discentes deveriam reconhecer os triângulos da figura 2, como sendo uma figura geométrica formada por três lados. As alternativas I, II e IV seriam as alternativas corretas. Visto que, as figuras III, V e VI não são triângulos. Na figura V o aluno pode indicar como sendo um triângulo, pois ela é formada por 3 curvas, entretanto uma dessas curvas não é segmento, ou seja, não tem curvatura nula. Portanto não é um polígono e nem triângulo. Temos que, as figuras III e IV é formada por mais de 3 segmentos, assim sendo não são triângulos.

Nas questões 6, 7 e 8 refere-se ao nível 1 (Análise), requer além do reconhecimento das figuras geométricas, que os estudantes devem definir, classificar corretamente os triângulos e identificar algumas propriedades fundamentais. No quadro 4, temos a apresentação dessas questões.

QUADRO 4 – Questões 6, 7, e 8

6- O que é um triângulo?
Observe a imagem abaixo: FIGURA 10 – Triângulos formados por fósforos  Fonte:https://pt-static.z-dn.net/files/d36/56338f10838aa674d062a64a4a0c42b0.png **7-** Indique algumas características similares a todos os triângulos formados por esses palitos de fósforo.
8- Qual a classificação desses triângulos, em relação aos seus ângulos e seus lados

Fonte: Elaborado pelo autor

Na questão 6, buscamos observar se os discentes definem o que é um triângulo. Uma resposta satisfatória seria definir essa figura geométrica como um polígono formado por três lados e três ângulos, logo temos um triângulo. Em seu trabalho, Soares (2014) destaca que em questões como essa, como também na questão anterior de identificação, devemos observar se os discentes fazem inclusão de classes, devendo relacionar os triângulos com os polígonos. Um exemplo sem inclusão de classes seria definir o triângulo, como sendo uma figura de três lados e três ângulos, sem fazer relações com os polígonos. Sendo assim, observamos se esses discentes realizavam essa relação, pois ao fazer essa inclusão de classe eles estariam apresentando aspectos do nível 2 da teoria de Van Hiele.

Na questão 7, buscamos identificar se os discentes indicavam que esses triângulos têm todos os seus lados e ângulos iguais, para isso os discentes deveriam reconhecer que todos os triângulos foram construídos por palitos de fósforos que têm as mesmas dimensões. Consequentemente na questão 8, buscamos detectar se os discentes classificavam um triângulo que tem seus lados iguais, como sendo um triângulo equilátero. Tal como, reconhecer e classificar um triângulo que tem todos os seus ângulos agudos, sendo um triângulo acutângulo.

As questões 9 e 10 referem-se ao nível 2 (dedução informal), exigindo que os discentes classifiquem os triângulos, realizem relações entre as propriedades, demonstrem a propriedade de uma figura ou que ela pode ser útil para outra figura. Ele deve ser capaz de fazer relação entre as propriedades. No quadro 5, temos a apresentação dessas questões.

QUADRO 5 – Questões 9 e 10

9– Construa os triângulos a seguir, seguindo as características e classificações solicitadas:

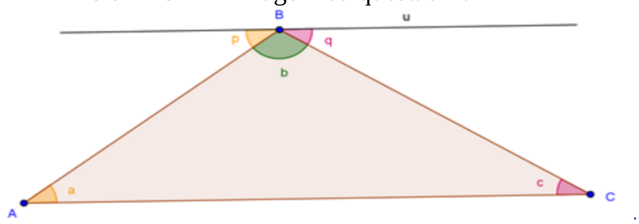
a) Um triângulo acutângulo e escaleno;

b) Um triângulo isóscele e obtusângulo;

c) Um triângulo retângulo e equilátero;

10- Seja um triângulo ABC qualquer com ângulos internos a, b e c. A figura abaixo ilustra uma construção geométrica que auxilia na demonstração da propriedade de que “em todo triângulo a soma dos ângulos internos é 180°”:

FIGURAS 11 - Imagem da questão 10



Fonte: Nascimento, Santos e Lima (2015, p. s/n)

a) Como são chamados os elementos geométricos representados por u, B, a e $\overline{AC}$?

b) Vocês conseguem identificar alguma propriedade na figura. Qual(is)?

c) Coloquem em ordem, de 1 a 5, as frases abaixo a fim de obter a demonstração do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo:

( ) p + b + q = 180°
( ) Seja um triângulo ABC qualquer e nomeamos seus ângulos internos como a, b e c
( ) p = a e q = c, pois, são ângulos alternos internos
( ) Pelo vértice B, traçamos uma reta paralela ao lado $\overline{AC}$ obtendo $\hat{p}$ e $\hat{q}$
( ) Conclusão: a + b + c = 180°.

d) Demonstrem de outra maneira que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Fonte: Nascimento, Santos e Lima (2015, p. s/n)

Fonte: Elaborado pelo autor

A questão 9 teve por objetivo detectar se os discentes são capazes de construir triângulos, seguindo as classificações dadas em relação aos seus ângulos e lados. Nesta questão apresentamos diferentes classificações de triângulos. Buscamos na alternativa c, observar se os estudantes conseguiam analisar que não existe um triângulo retângulo e equilátero, sendo essa última alternativa um absurdo. Possíveis erros nesta questão serão os discentes se confundirem ou não reconhecerem as classificações solicitadas.

Na questão 10, no item a, buscamos identificar se os discentes reconheceram os elementos geométricos solicitados. Já no item b, deveriam reconhecer as propriedades presentes na figura apresentada, sendo a soma dos ângulos internos de um triângulo, ângulos suplementares, ângulos alternos internos, entre outras.

Na questão 10 no item c, Nascimento, Santos, Lima e Lins (2015, p. s/n) buscaram identificar se os discentes conseguiram “ordenar de forma correta a demonstração do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo”, caso conseguisse indicar corretamente essa sequência, os sujeitos dessa pesquisa “podem está no nível três de Van Hiele por terem conseguido realizar a ordenação lógica do teorema proposto” (NASCIMENTO; SANTOS; LIMA, 2015, p. s/n), sendo assim estariam no nível da dedução informal.

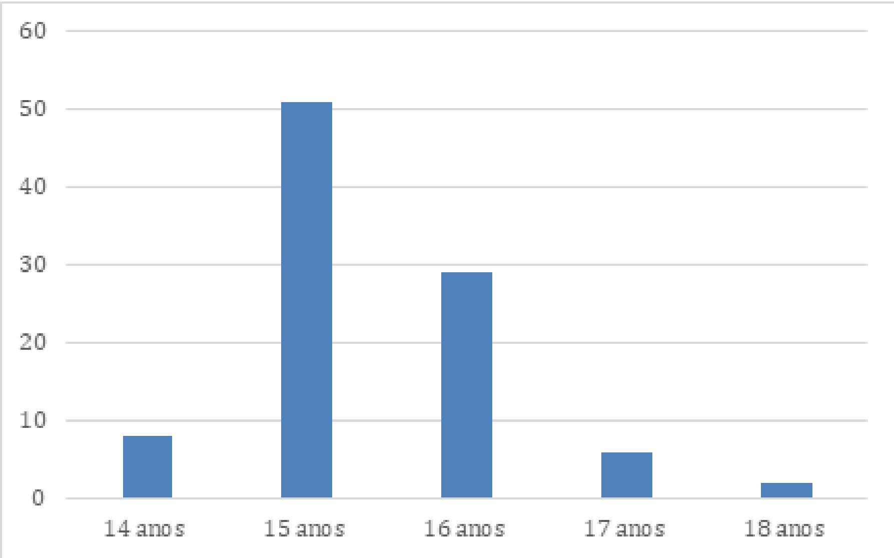
Por fim, no item d da questão 10, buscamos analisar se os alunos conseguiam demonstrar o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo de uma maneira diferente da alternativa anterior. Portanto, nesta última alternativa, procuramos sondar se o sujeito tinha indícios de estar numa fase de transição entre o nível 2, para o nível 3 da dedução formal.

Agora, no próximo tópico estaremos discutindo os dados coletados, os principais erros e dificuldades dos sujeitos dessa pesquisa e apresentando os principais apontamentos que encontramos com essa pesquisa.

7 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste item, apresentamos uma análise dos resultados a partir dos dados coletados na aplicação dos questionários. Atermo-nos a análise das principais respostas apresentadas e, consequentemente, as discutiremos. Frisamos, também, o nível de pensamento geométrico dos sujeitos. Tivemos a participação de 96 alunos, para garantir a privacidade desses sujeitos, identificamos eles por L1, L2, L3, ..., L96. A partir da segunda questão, que solicitava a idade dos estudantes, constatamos que os sujeitos dessa pesquisa têm em média entre 15 e 16 anos, sendo a idade esperada para estar no primeiro ano do Ensino Médio. O gráfico 1 apresenta essa faixa etária.

GRÁFICO 1 - Histograma da faixa etária



Fonte: Elaborado pelo autor

Começaremos essa análise por meio da questão 3, as duas primeiras solicitavam o nome e a idade do discente. Esta questão solicitava o reconhecimento das figuras que compõem o quebra-cabeça Tangram. Com dela pudemos constatar que a maioria dos estudantes conseguem identificar e distinguir o triângulo e o quadrado presente nas peças que formam o Tangram, porém apresenta dificuldades para reconhecer o paralelogramo. Somente 12 alunos reconheceram corretamente as peças do Tangram, a figura 12 apresenta a resposta de L47 (2021). Outros 37 alunos identificam triângulo e quadrado, consequentemente esses alunos não indicaram a existência do paralelogramo, ademais 8 alunos reconheceram somente os triângulos.

FIGURA 12 - Resposta da questão 3

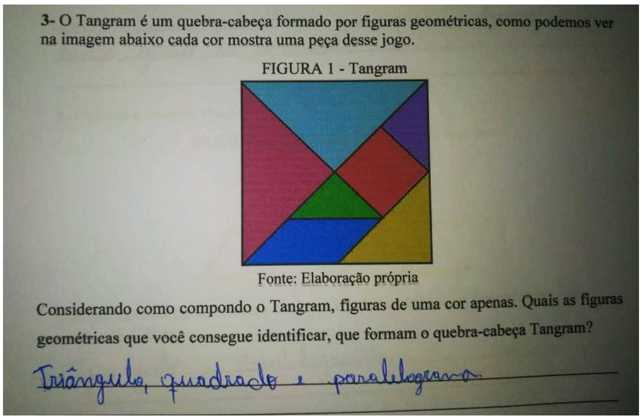

3- O Tangram é um quebra-cabeça formado por figuras geométricas, como podemos ver na imagem abaixo cada cor mostra uma peça desse jogo.

FIGURA 1 - Tangram

Fonte: Elaboração própria

Considerando como compondo o Tangram, figuras de uma cor apenas. Quais as figuras geométricas que você consegue identificar, que formam o quebra-cabeça Tangram?

Triângulo, quadrado e paralelogramo

Fonte: Protocolo de L47

Outros 20 alunos indicaram que o Tangram era composto por “triângulo, quadrado e retângulo”, logo reconhecem os triângulos e o quadrado, a única figura que os discentes afirmaram ser um retângulo, foi o paralelogramo. Temos que, o retângulo é um paralelogramo, pois possui pares de lados paralelos e iguais. No entanto, a figura apresentada não possui ângulos retos para se configurar um retângulo, a figura 13 expõe a resposta de L72. Já outros 10 discentes confundiram o paralelogramo com o trapézio, paralelepípedo ou indicando ser um triângulo equilátero ou retângulo. Outros nove alunos não responderam a esta questão.

FIGURA 13 - Resposta da questão 3

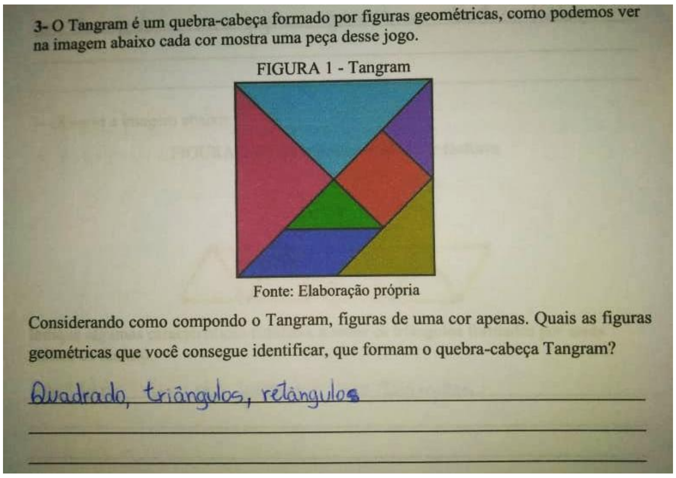

3- O Tangram é um quebra-cabeça formado por figuras geométricas, como podemos ver na imagem abaixo cada cor mostra uma peça desse jogo.

FIGURA 1 - Tangram

Fonte: Elaboração própria

Considerando como compondo o Tangram, figuras de uma cor apenas. Quais as figuras geométricas que você consegue identificar, que formam o quebra-cabeça Tangram?

Quadrado, triângulos, retângulos

Fonte: Protocolo de L72

Em consonância com Silva (2010, p. 83), temos que a maioria dos alunos “sabe a diferença entre triângulos, quadrados e retângulos. Porém, há pequenas dificuldades em diferenciar losango e paralelogramo, apresentando algumas confusões”. Constata-se que, figuras como triângulos, quadrados e retângulos são mais estudadas no ambiente escolar, pela facilidade de trabalhar e encontrar essas figuras em inúmeras situações do dia a dia, consequentemente, é possível promover situações que favoreçam a argumentação dos alunos. Cabe observar que a BNCC vai fazer referência aos paralelogramos somente nas orientações relativas ao 3° ano do Ensino Fundamental, ainda que faça ênfase ao ensino de polígonos e quadriláteros na maioria dos anos subsequentes.

Portanto, após análise dessa primeira questão conseguimos dividir os sujeitos em 4 grupos em relação ao nível 0 da Teoria de Van Hiele. O primeiro é composto por 8 alunos que apresentam conhecimentos para o nível 0 em relação aos triângulos, ou seja, reconhecem triângulos e não reconhecem quadrados e paralelogramos. O outro grupo são dos alunos que visualizam triângulos e quadrados, porém não conseguem reconhecer o paralelogramo, sendo desse grupo 37 alunos. O próximo grupo são os alunos que reconhecem triângulos, quadrados e confundem o paralelogramo com o retângulo, trapézio, paralelepípedo ou alguma classificação do triângulo formando esse grupo de 30 alunos. O quarto é constituído por 12 alunos que estão no nível 0 em relação aos triângulos, quadrados e paralelogramos. Por fim, o último grupo é formado por 9 alunos que não estão no nível 0 para essas figuras, pois não reconhecem ou não responderam a essa questão. O Quadro 6 apresenta uma análise das questões 3 e 4.

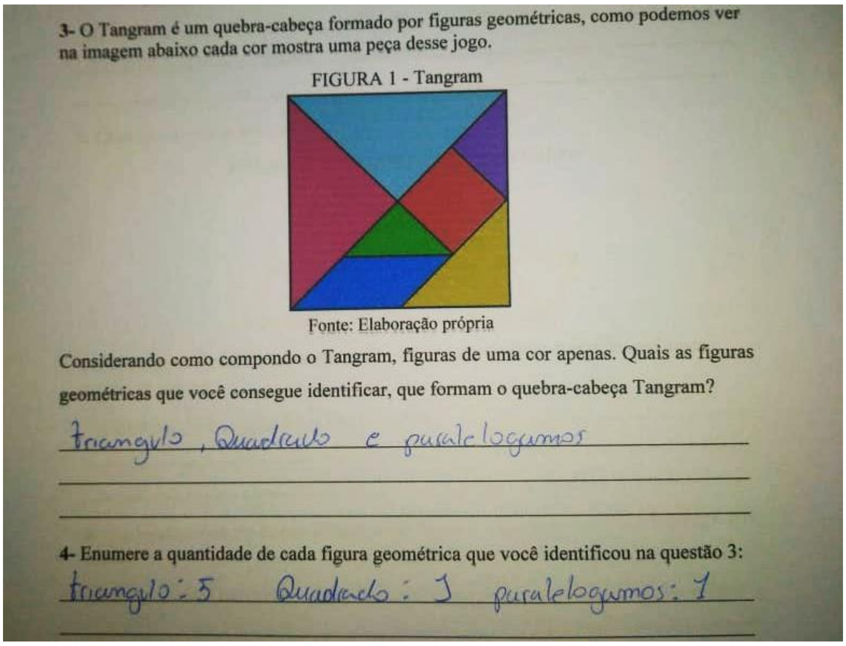
QUADRO 6 - Análise das respostas das questões 3 e 4

Grupo	Estudantes	Qtde de estudantes
Nível 0 somente em relação a triângulos	L1, L3, L9, L27, L38, L45, L61 e L78	8
Nível 0 somente em relação a triângulos e quadrados	L2, L7, L10, L11, L14, L20, L22, L24, L25, L26, L29, L31, L32, L34, L35, L39, L43, L46, L48, L51, L54, L60, L62, L65, L67, L69, L71, L73, L77, L80, L82, L83, L84, L85, L87, L90 e L91	37
Nível 0 em relação a triângulos e quadrados, e confundem o paralelogramo com o retângulo, trapézio, paralelepípedo ou alguma classificação do triângulo	L4, L6, L13, L15, L16, L18, L19, L21, L23, L28, L30, L33, L40, L41, L42, L44, L50, L53, L64, L66, L70, L72, L74, L76, L79, L81, L86, L88, L92 e L93	30
Nível 0 em relação aos triângulos, quadrados e paralelogramos.	L5, L8, L17, L37, L47, L49, L55, L56, L58, L68, L89 e L96	12
Não reconhecem as figuras	L12, L36, L52, L57, L59, L63, L75, L94, L95	9

Fonte: Elaborado pelo autor

A questão 4 solicitava que os discentes enumerassem as figuras presentes no Tangram, destacadas na questão anterior. Notamos que todos os alunos seguiram a mesma linha de resolução da questão 3: Os discentes que reconhecem o triângulo, destacam encontrar 5 triângulos. Já os que identificam triângulo e quadrado, indicam ter 5 triângulos e 1 quadrado. O grupo 3 que visualizaram o triângulo, quadrado e confundem o paralelogramo com outra figura, enumeraram 5 triângulos, 1 quadrado e a figura confundida. Os 12 alunos que responderam corretamente à questão 3, indicaram que o Tangram é composto por 5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramo. Os alunos que não responderam a questão 3 também não responderam essa questão. Em relação a este último grupo, Teixeira (2008 apud PINTO, 2011, p.16) frisa que é necessário a existência de um nível do pré-reconhecimento "precedente ao da visualização, em que o aluno não distingue exemplos de figuras geométricas de não exemplos, e as imagens mentais dessas figuras ainda não estão formadas". A figura 14 traz a resposta de L96 que respondeu corretamente às questões 3 e 4.

FIGURA 14 - Resposta das questões 3 e 4



3- O Tangram é um quebra-cabeça formado por figuras geométricas, como podemos ver na imagem abaixo cada cor mostra uma peça desse jogo.

FIGURA 1 - Tangram

Fonte: Elaboração própria

Considerando como compondo o Tangram, figuras de uma cor apenas. Quais as figuras geométricas que você consegue identificar, que formam o quebra-cabeça Tangram?

triangulo , Quadrado e paralelogamos

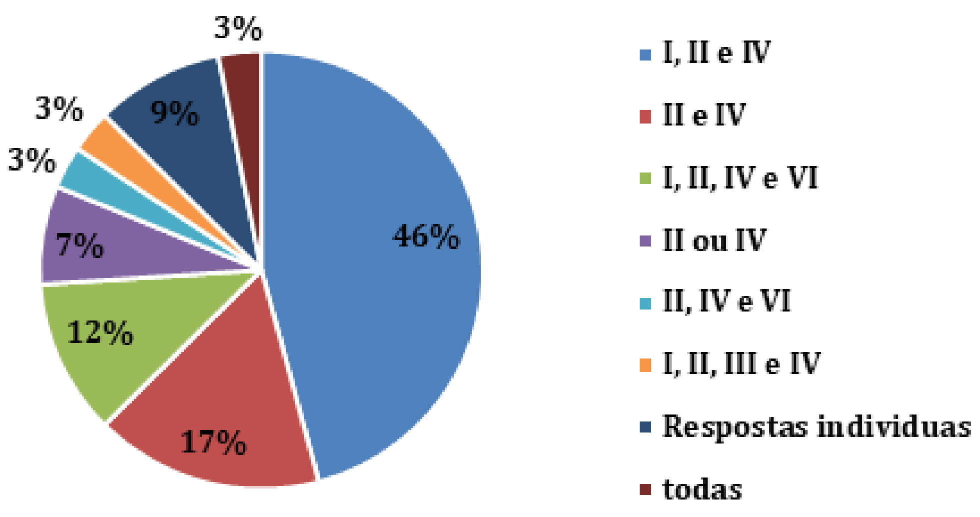
4- Enumere a quantidade de cada figura geométrica que você identificou na questão 3:

triangulo : 5 Quadrado : 1 paralelogamos : 1

Fonte: Protocolo de L96

A questão 5 também busca reconhecer se os estudantes estão no nível 0, exigindo principalmente o reconhecimento dos triângulos. Esta questão apresentava seis figuras, tendo o aluno que indicar quais eram triângulos, sendo triângulos as figuras I, II e IV. O gráfico 2 apresenta a distribuição percentual de tipos de respostas a esta questão.

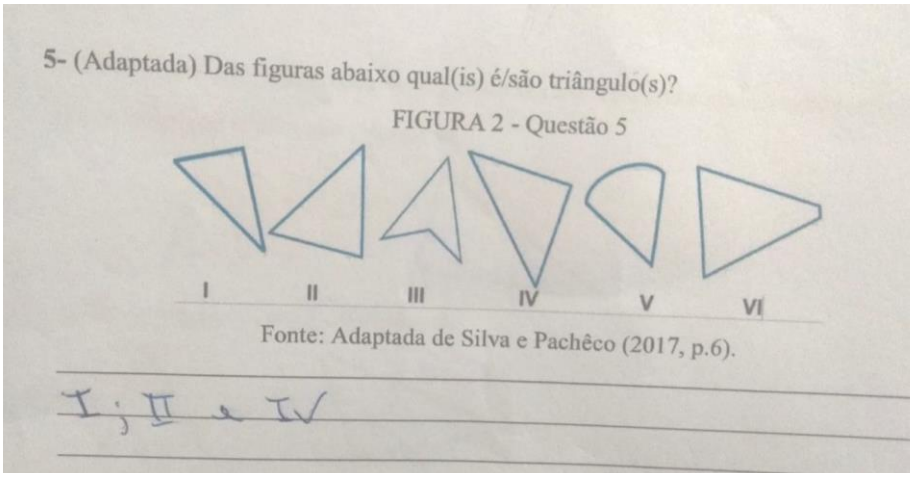
GRÁFICO 2 - Distribuição percentual dos tipos de respostas da questão 5



Fonte: Elaborado pelo autor

Ao compararmos esta questão com as anteriores, dos 12 alunos que responderam corretamente a anterior, somente 8 acertaram essa questão. Dos alunos que reconheceram triângulos na questão 3 e 4, apenas cinco erraram totalmente essa questão, sendo os mesmos do grupo que responderam ter encontrado “triângulos e quadrado”. Todos os alunos responderam essa questão, no entanto nove alunos não reconheceram nenhum dos três triângulos. Cinco desses discentes fazem parte do grupo que reconhecem triângulos e quadrados, posto isso, temos que ambos reconheceram os triângulos presente no Tangram, porém não fizeram o reconhecimento dos triângulos apresentados nesta questão. Os outros quatro discentes erraram ou não realizaram as questões anteriores. A figura 15 a seguir mostra a resposta de L1, que respondeu corretamente essa questão.

FIGURA 15 - Resposta de L1 à questão 5



Fonte: Protocolo de L1

Destaca-se que 29 alunos não reconheceram a figura I, presente nesta questão, como sendo um triângulo, desses 12 alunos fazem parte do grupo que responderam ter encontrado "triângulo e quadrado" no Tangram. Distingue 20 alunos que responderam ser um triângulo a figura VI, temos que a figura apresenta um pequeno segmento, porém é um quadrilátero. Fonseca e Leivas (2018, p. 145) salientam que "com base nas respostas fornecidas pelos estudantes, percebeu-se que, mesmo sendo alunos já egressos da Educação Básica, não há uma unanimidade em relação ao reconhecimento de triângulo pela sua forma, o que aponta fragilidades no ensino de Geometria".

O quadro 7 traz uma comparação dessa questão com os 5 grupos destacados anteriormente.

QUADRO 7 - Comparação das questões 3 e 4, com a questão 5

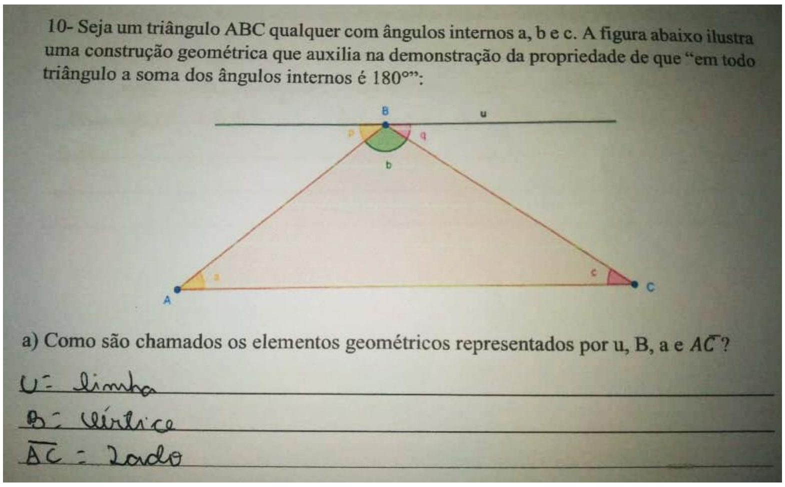
Grupos	Desempenho na questão 3 e 4	Acertaram a questão 5	Reconhecem 2 ou 1 triângulos	Reconhecem 2 ou 3 triângulos e indicam outra figura como triângulo.
Grupo 1 8 alunos	Reconhecem triângulos.	4 alunos	3 alunos	1 aluno
Grupo 2 37 alunos	Reconhecem triângulos e quadrados.	16 alunos	10 alunos	6 alunos
Grupo 3 30 alunos	Reconhecem triângulos e quadrados, porém confundem o paralelogramo.	16 alunos	5 alunos	9 alunos
Grupo 4 12 alunos	Reconhecem triângulos, quadrados e paralelogramo.	8 alunos	3 alunos	1 aluno
Grupo 5 9 alunos	Não responderam	1 aluno	3 alunos	1 aluno

Fonte: Elaborado pelo autor

Podemos observar que nos grupos 1, 3 e 4 a metade ou mais, dos alunos conseguiram acertar a questão. O grupo 4 foi o que teve melhor aproveitamento. Apesar de que a maioria dos estudantes tenha apresentado dificuldades, evidenciasse que mais da metade conseguiram ter um desempenho parcial nesta questão reconhecendo dois dos triângulos. Pachêco *et al.* (2020, p. 354) em atividade semelhante vai ressaltar que "Os alunos que acertaram parcialmente, assinalando apenas um ou dois triângulos entre os três, estão progredindo seus conhecimentos geométricos".

A alternativa "a" da questão 10, solicitava o reconhecimento de um ângulo, um segmento de reta, uma reta e um ponto, sendo assim faz parte do nível 0 da Teoria de Van Hiele. Nessa questão somente um discente respondeu corretamente os elementos solicitados, sendo o mesmo do grupo 3. Outros 6 alunos reconheceram três elementos. A figura 16 traz a resposta de um desses alunos nesta alternativa. Ao utilizar esta questão, Nascimento e colaboradores (2015, p. s/n) destaca que, ao apresentar uma resposta correta, o discente satisfaz ao nível 0 da Teoria de Van Hiele, pois os alunos identificaram os elementos geométricos presentes na figura. Cinquenta e quatro alunos não responderam esta alternativa.

FIGURA 16 - Resposta da questão 10 alternativa a



Fonte: Protocolo de L68

Portanto, analisando essas três questões e essa alternativa constatamos que os alunos apresentam mais facilidade nesse reconhecimento quando em polígonos e figuras planas. Já quando é levado a reconhecer outros elementos geométricos apresentam dificuldades. Em relação a alunos, como esses, que estão iniciando o ensino médio e apresentam dificuldades nesta etapa de ensino Lobato e Andrade (2019, p. 2) destaca que:

> Muitos estudantes chegam ao Ensino Médio com dificuldades no aprendizado em geometria, isso acontece porque muitos professores e nem a escola estão preparados para trabalhar com esse grupo de alunos que requerem uma atenção diferenciada e necessitam de atividades que aprimorem e desenvolvam os conhecimentos, desobstruindo as barreiras existentes entre o ensino e aprendizagem.

Seguiremos agora para as questões do nível 1 da Teoria de Van Hiele. A sexta questão questionava o que era um triângulo, percebemos que a maioria dos discentes não conseguem definir esta figura. Em relação a essa dificuldade em definir Silva (2010, p.59) frisa que, "para uma parte dos alunos, os conceitos não ficaram claros, estão confusos ou são utilizados conceitos que não se enquadram na definição solicitada".

As principais respostas para este sexto quesito foram: O triângulo é uma figura geométrica que possui 3 lados, apresentada por 25 alunos. O triângulo é uma figura geométrica, definida por 7 alunos. O triângulo é uma figura geométrica que possui 3 ângulos, por 5 alunos. Outros alunos apresentaram respostas parecidas, porém definiram os triângulos como sendo uma forma geométrica, sendo uma definição errônea. No entanto, temos que esses alunos podem não ter sido levado a fazer a diferenciação entre figura e forma em sala de aula, destacamos que 20 alunos manifestaram essa definição.

Também nessa questão, tivemos as respostas de 11 alunos que fazem referências a pontas, linhas, lados iguais, pontas iguais e comparações com pirâmides. Barros (2017, p. 93) destaca em sua pesquisa que os discentes ao serem questionados sobre a diferença do triângulo para os quadriláteros definem, "os triângulos como três pontas e quadriláteros sem pontas ou quatro pontas ou quatro lados. Nota-se, portanto, que eles têm noções desses conceitos e apenas precisam trabalhar a nomenclatura dos mesmos". Silva (2010, p.82) evidencia em sua pesquisa que "um aluno citou que o triângulo tem três vértices, mas não usou a palavra vértice e sim pontas". Em relação a essas respostas Soares (2014), aponta que,

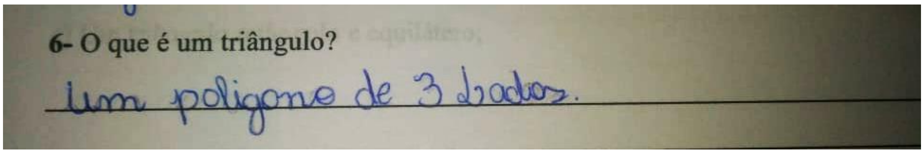
> Notamos que os resultados das avaliações não mostram necessariamente que os participantes não reconhecem o que é um triângulo, apenas revelam a imaturidade dos conceitos formados por eles ao longo do ensino fundamental. As experiências com este tipo de figuras não foram suficientes para produzir uma concepção correta. (SOARES, 2014, p.27)

Evidenciamos a resposta apresentada por dez alunos que destacaram que, "os triângulos são polígonos que possuem 3 lados", temos que essa seria a resposta mais adequada, onde o aluno faz a inclusão de classes com os triângulos. Metade desses discentes fazem parte do grupo que respondeu corretamente às questões 3 e 4, a outra metade faz parte dos grupos que responderam parcialmente essas questões, como também identificaram corretamente os triângulos da questão 5. Por fim, destacamos que nove alunos não responderam essa questão. Em seu trabalho Soares (2014) destaca que

> Em nenhum momento houve referência ao termo polígonos. Então, não se faz ligação entre o conjunto dos triângulos e o conjunto dos polígonos, o que nos leva a observar que eles não fazem inclusão de classe. Além disso, erram ao utilizar a igualdade para comparar entes geométricos quando deveriam utilizar o termo congruência. (SOARES, 2014, p.27)

Temos que os alunos L5, L37 e L58 foram os únicos a apresentarem respostas totalmente corretas para essas quatro primeiras questões. No entanto, eles erraram ou não responderam às próximas questões. Portanto, podemos dizer que esses três alunos estão em fase de transição entre a fase 0 para a fase 1. A figura 17 traz a resposta de um desses alunos na questão 6.

FIGURA 17 - Resposta de L5 à questão 6

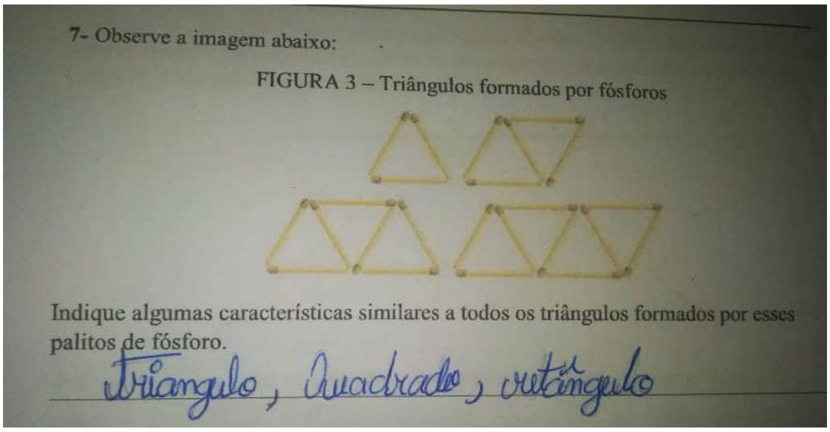


Fonte: Protocolo de L5

Para iniciar a análise das próximas questões, evidenciamos que ambas contiveram altos percentuais de respostas em branco ou resposta erradas. Isso pode ter acontecido pelos alunos não estarem aptos para esse nível de questão.

Na sétima questão, 30 discentes não responderam e 47 deles apresentaram respostas sem sentidos ou incorretas. Essa questão solicitava que os alunos reconhecessem semelhanças entre triângulos formados por palitos de fósforo. Das respostas erradas, destacamos duas delas. A primeira foi apresentada por 15 alunos que fizeram o reconhecimento das figuras formadas pelos triângulos, reconhecendo as figuras como Triângulo, quadrado, retângulo, paralelogramos, trapézios. Temos que esses alunos conseguem identificar as figuras pelo todo, sem reconhecer nenhuma semelhança entre os triângulos. A figura 18 destaca uma dessas respostas.

FIGURA 18 - Resposta incorreta de L88 à questão 7



Fonte: Protocolo de L88

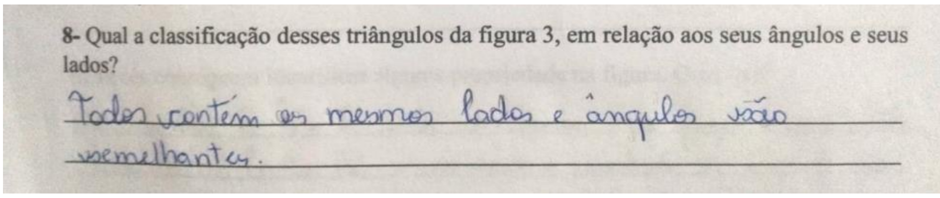
A segunda resposta incorreta foi apontada por 10 discentes que perceberam um processo de formação dessas figuras, segundo L68 “A cada triângulo formado por 3 palitos, são adicionados mais 2 palitos ao lado, formando outro triângulo mantendo um padrão similar". Cabe frisar que em ambos os grupos destacados anteriormente tivemos tais respostas.

Nesta questão consideramos como correto as seguintes respostas: Tem o mesmo tamanho e tem a mesma classificação, eles têm o mesmo ângulos e lados, todos triângulos tem 3 lados e 3 ângulos, todos são formados por palitos de fósforos ou todos são triângulos, essas respostas foram apresentadas por 19 alunos. Temos que do grupo 4 que vinham acertando todas as questões anteriores, somente um discente acertou a questão. Nove alunos do grupo que reconheceram triângulos e quadrados acertaram essa questão. Do grupo que reconheceu somente triângulos, somente três alunos acertaram essa. No grupo 3, seis alunos acertaram essa questão. Temos que, a maioria desses discentes que acertaram essa questão, alcançaram ou atingiram parcialmente os objetivos das questões anteriores. Em relação ao reconhecimento de triângulos congruentes e semelhantes, a BNCC (BRASIL, 2017, p. 272) indica que os alunos devem ser "capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples".

A próxima questão solicitava que os discentes apresentassem a classificação dos triângulos apresentados na questão anterior, perante seus lados e perante seus ângulos. Chamar a atenção que somente um estudante consegue fazer tal classificação, que os triângulos são equiláteros e acutângulos. Segunda a BNCC, já no 6° ano, os alunos devem ser capazes de "Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos" (BRASIL, 2017, p. 303).

Realçamos que três alunos frisaram que os triângulos são equiláteros e outros três alunos classificam os triângulos como sendo acutângulos, entendemos que esses alunos só conseguem realizar uma classificação dos triângulos. Em sua pesquisa com licenciandos do curso de matemática Fonseca e Leivas (2018, p.143) revela que "foi possível perceber que os alunos apresentaram conhecimentos prévios sobre a identificação da forma geométrica de triângulos, mas não mostraram clareza em relação à classificação de triângulos quanto aos lados e aos ângulos". Temos que outros dois alunos indicaram que os triângulos possuem lados e ângulos semelhantes, porém não indicou nenhuma classificação. A figura 19 apresenta uma dessas respostas. Nota-se que essa resposta era satisfatória na questão anterior. Desses 8 alunos, dois erraram a questão 7, apesar disso tiveram um bom aproveitamento nas anteriores.

FIGURA 19 - Resposta de L6 à questão 8


8- Qual a classificação desses triângulos da figura 3, em relação aos seus ângulos e seus lados?

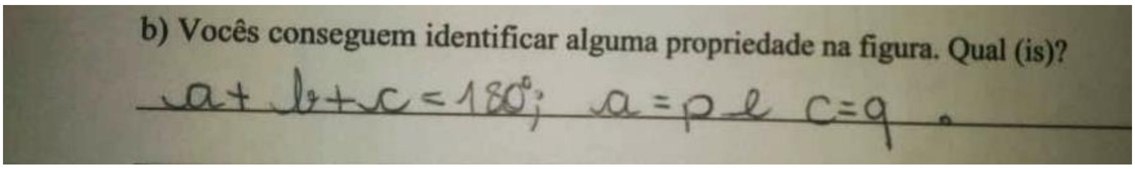
Todos contém os mesmos lados e ângulos são semelhantes.

Fonte: Protocolo de L6

Ainda na questão 8, tivemos seis estudantes que destacaram que os triângulos eram isósceles, conforme Assad (2017, p.106) “Em diversos casos, os estudantes determinaram como isósceles o triângulo que possui os três lados iguais”, temos que, esses estudantes confundiram essa classificação de tais figuras, no entanto através das definições apresentadas, anteriormente, a maioria dos livros não fazem uma diferenciação entre o triângulo equilátero e isósceles, levando o estudante a classificar um triângulo de três lados, como sendo isósceles.

Na alternativa B da questão 10, solicitava-se o reconhecimento de algumas propriedades presentes na figura, portanto, está no nível 1 da teoria de Van Hiele. Frisamos que somente cinco discentes conseguiram indicar alguma propriedade presente na figura dada. Quatro deles acertaram parcialmente a alternativa A desta questão. Após análise dessa alternativa, podemos notar que esses estudantes apresentam dificuldades em conteúdo que envolva ângulos, retas e pontos. A figura 20 expõe uma das respostas corretas dessa alternativa, destacamos que tais alunos reconhecem ângulos suplementares, a soma dos ângulos internos do triângulo e ângulos alternos. Em sua pesquisa, Barros (2017, p. 150), ao utilizar uma questão sobre ângulos, com a problemática de um skatista, evidenciou “o não conhecimento de uma parte dos alunos em relação aos ângulos”.

FIGURA 20 - Resposta de L95 à alternativa b questão 10

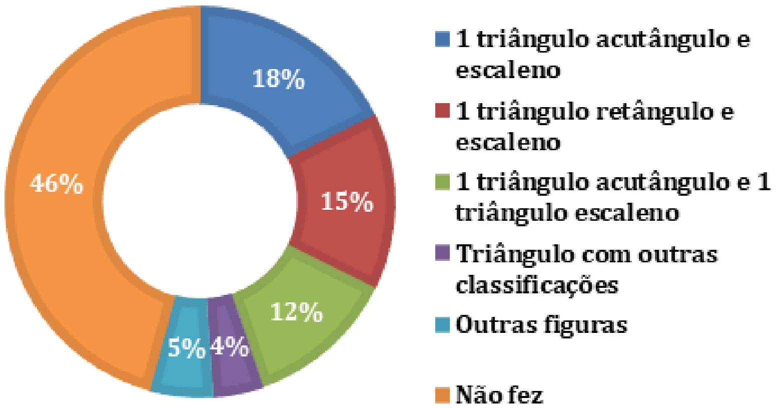

b) Vocês conseguem identificar alguma propriedade na figura. Qual (is)?

$a+b+c=180°$; $a=p$ e $c=q$.

Fonte: Protocolo de L95

A penúltima questão apresentava três alternativas com classificações de triângulos, sendo solicitado que os discentes desenhassem esses triângulos com as classificações indicadas. Observamos que todos os alunos tiveram dificuldades nesta questão, como também tiveram dificuldades para compreender as classificações apresentadas. Primeiramente, na alternativa A, essa questão solicitava um triângulo acutângulo e escaleno, o gráfico 3 apresenta as principais respostas dessa questão. Temos que das alternativas, essa foi a que teve o maior número de acertos.

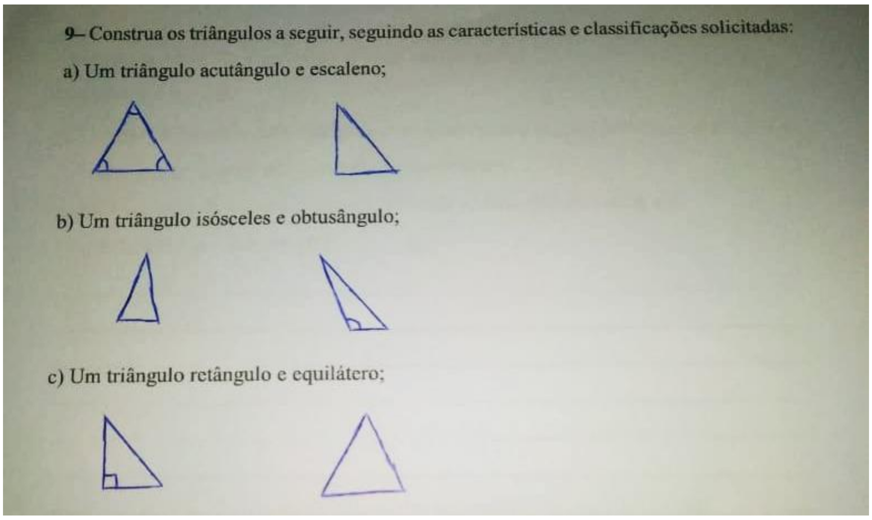
GRÁFICO 3 -Distribuição percentual dos tipos de respostas da alternativa A questão 9



Fonte: Elaborado pelo autor

Destacamos que 17 alunos conseguiram desenhar um triângulo com a classificação solicitada. Chamar a atenção os alunos que desenharam nesta questão duas figuras, um triângulo acutângulo e outra de um triângulo escaleno, temos que ambos os alunos lembram das classificações, porém não conseguem relacionar ambas em uma mesma figura. Apontamos que a falta dessa relação entre as propriedades indica uma dificuldade de fazer inclusão de classes ou uma visão excludente das classificações, na qual um triângulo não pode ter duas classificações. A figura 21 apresenta essa resposta. Fonseca e Leivas (2018) vai sublinhar em relação às propriedades e classificações dos triângulos em seu trabalho, que os alunos "ao destacar suas propriedades, relataram, de forma aleatória, algumas delas como, por exemplo, a classificação quanto aos ângulos e aos lados, não sabendo explicitar com clareza os elementos necessários para cada classificação" (FONSECA; LEIVAS, 2018, p.143).

FIGURA 21 - Protocolo de L16 com resposta da questão 9

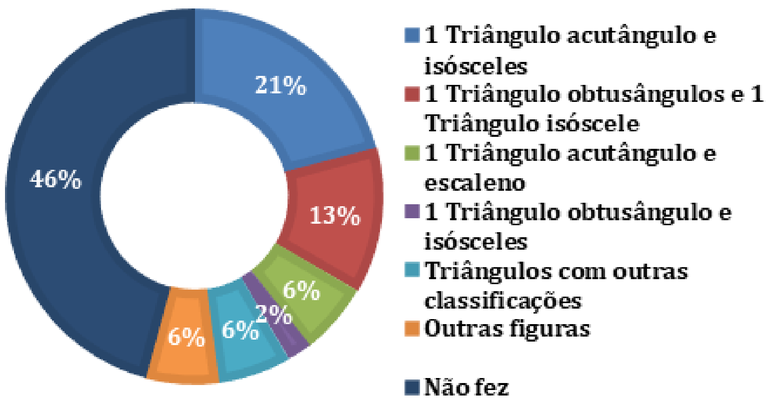


Fonte: Protocolo de L16

Outro ponto a destacar é a utilização de triângulos retângulos por 14 alunos. Tal fato pode vir a acontecer, pois nos últimos anos do ensino fundamental essa classificação é bem estudada, durante a abordagem das relações métricas e do Teorema de Pitágoras. Novamente por Fonseca e Leivas (2018, p.148) "pode-se conjecturar que a caracterização e distinção do triângulo retângulo deveu-se, tanto ao fato deste estar presente em diferentes situações do cotidiano, como à importância que é dada ao seu estudo na Educação Básica".

Já na próxima alternativa, requisitava-se aos discentes a construção de um triângulo obtusângulo e isóscele, o gráfico 4 apresenta as principais respostas dessa questão. Temos que a maioria dos discentes que responderam essa questão conhecem o que é um triângulo isósceles, porém não conseguem apresentar um triângulo obtusângulo. Destaca-se que somente 2 alunos conseguiram responder corretamente essa questão. Os mesmos 12 alunos que apresentaram um triângulo para cada classificação na questão anterior, apresentaram esta alternativa.

GRÁFICO 4 - Distribuição percentual dos tipos de respostas da alternativa B questão 9



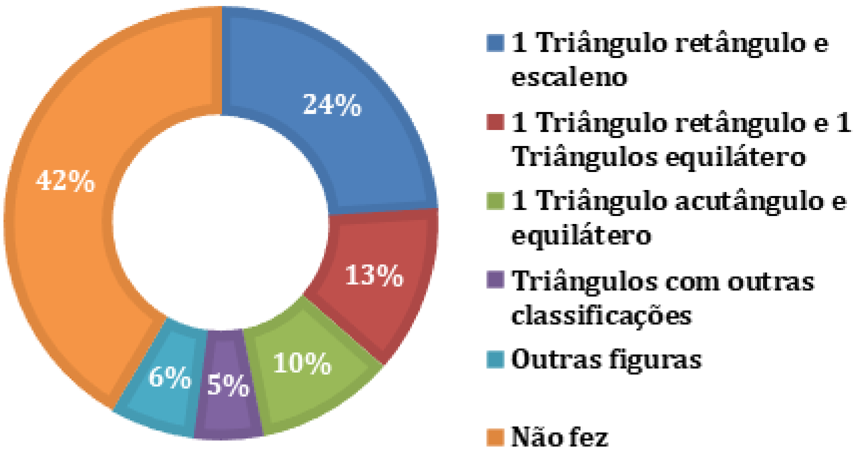
Fonte: Elaborado pelo autor

Após análise das respostas dessa alternativa, observamos que a participação continuou a mesma da questão anterior, no entanto a quantidade de erros foi maior. Em concordância Brizola (2015, p. 9), nesta questão:

> Ao analisar cada figura construída foi possível ver que a escrita não condiz com os desenhos feitos, um triângulo eqüilátero que deveria ter os três lados iguais conforme definição, analisando o desenho verificou-se que está irregular, isto nos demonstra que o aluno não entendeu que a parte teórica tinha que fechar com a representação geométrica, essas dificuldades aumenta ainda mais a necessidade da utilização de softwares que facilitem a visualização e a manipulação, ou seja, a geometria dinâmica.

Por fim, na última alternativa solicitava que o discente apresentasse um triângulo equilátero e retângulo, ou seja, um absurdo. Destacamos que nenhum aluno indicou que esse triângulo não existiria. Vinte e três alunos desenharam um triângulo retângulo e escaleno, já outros 10 alunos desenharam um triângulo equilátero e acutângulo. Em sua pesquisa com alunos do 1° ano do Ensino Médio Assad (2017), em uma pergunta semelhante evidenciou algumas situações de acertos parciais, como o estudante acerta a classificação do triângulo equilátero, porém indica como triângulo isósceles o triângulo escaleno. Temos então a confirmação que muitos desses discentes conhecem alguma das classificações de triângulos, todavia não conseguem relacioná-las. O gráfico 5 a seguir apresenta as principais respostas para essa alternativa.

GRÁFICO 5 - Distribuição percentual dos tipos de respostas da alternativa C questão 9



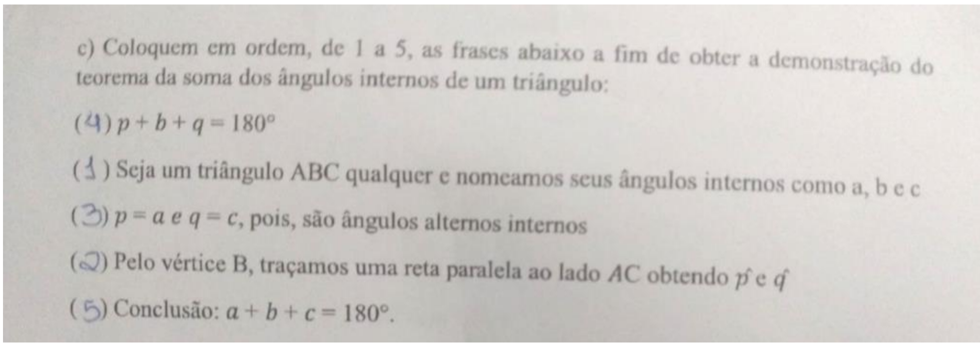
Fonte: Elaborado pelo autor

Frisamos que alguns discentes nas três alternativas apresentaram o desenho de outras figuras, sendo elas, trapézio, quadrilátero e paralelogramo indicando ser um triângulo, Assad (2017) observou que os discentes confundem o trapézio com o triângulo escaleno e, ainda, a pirâmide com o triângulo equilátero. Portanto, dos 61 discentes que tentaram responder à questão 9, somente dois desenharam corretamente os triângulos da alternativa A e B, sendo também os únicos que acertaram a letra B. Esses discentes acertaram parcialmente as primeiras questões e erraram as duas anteriores. Logo, podemos observar que os discentes conhecem algumas das classificações de triângulos, porém têm bastante dificuldades em relacionar ambas e fazer uma representação de um triângulo com as classificações solicitadas.

Dos 61 discentes que tentaram responder à questão 9, quarenta e oito deles desenharam, pelo menos, um triângulo retângulo em algumas das alternativas. Como destacamos anteriormente, temos que esse reconhecimento acontece pelo fato dos triângulos retângulos serem mais evidenciados nos anos finais do Ensino Fundamental. No 9° ano do ensino médio a BNCC indica o estudo “das relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos” (BRASIL, 2017, p. 303). Cabe observar que nenhum discente questionou se o triângulo retângulo, poderia ser também equilátero. Mediante essa questão, podemos constatar que esses discentes apresentam dificuldades para estarem no nível 2 da Teoria de Van Hiele.

Por último, as alternativas c e d da questão 10. A alternativa C solicitava a ordenação da demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo. Temos que, 28 discentes apresentaram uma resposta correta. Ao utilizar essa questão, Nascimento e colaboradores (2015) indica que os discentes que acertaram essa alternativa podem estar no nível 2 da Teoria de Van Hiele por terem realizado a ordenação lógica da demonstração. Não obstante, observamos o desenvolvimento desses discentes que acertaram essa questão, chamamos a atenção para 25 discentes, que apesar de ter acertado essa alternativa, não responderam ou responderam incorretamente A e B. Logo, o aluno pode ter respondido por ser uma das únicas questões fechadas do questionário e/ou encontrou facilidade em achar uma lógica de montar a demonstração. A Figura 22 exibe uma das respostas corretas dessa alternativa.

FIGURA 22 - Resposta da alternativa C, questão 10



c) Coloquem em ordem, de 1 a 5, as frases abaixo a fim de obter a demonstração do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo:

(4) $p + b + q = 180°$

(1) Seja um triângulo ABC qualquer e nomeamos seus ângulos internos como a, b e c

(3) $p = a$ e $q = c$, pois, são ângulos alternos internos

(2) Pelo vértice B, traçamos uma reta paralela ao lado AC obtendo $\hat{p}$ e $\hat{q}$

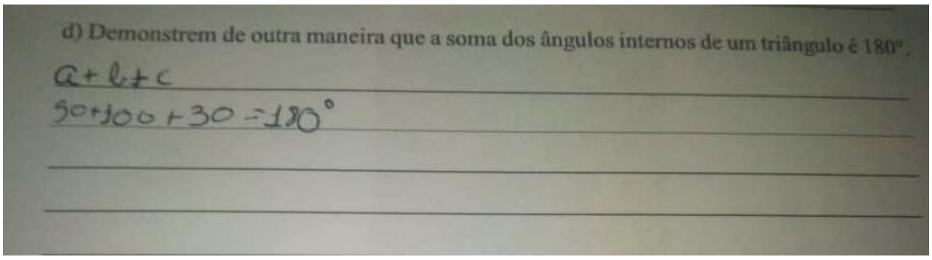
(5) Conclusão: $a + b + c = 180°$.

Fonte: Protocolo de L16

Portanto, como esses discentes não conseguiram desenvolver bem as alternativas anteriores, que solicitava o reconhecimento de figuras e propriedades presentes na demonstração, ainda que eles ordenem corretamente essa demonstração, apresentará dificuldades no nível 2 da teoria de Van Hiele, pois como destaca Pinto (2011) não se pode saltar ou estar em um nível da Teoria de Van Hiele, sem passar ou omitir um nível inferior. No mesmo sentido, Soares (2014, p.41) aponta que “A Teoria Van Hiele é sequencial e ordenada porque um nível superior de compreensão só pode ser alcançado quando o aluno domina as habilidades do nível imediatamente anterior”.

Já na última alternativa, que solicitava uma demonstração alternativa da soma dos ângulos internos, nenhum discente apresentou uma demonstração formal. Setenta alunos não responderam essa questão. Logo nenhum aluno apresenta sinais para estar em transição para o nível 3. Destacam-se cinco discentes que apresentaram exemplos para justificar essa propriedade, como mostra a figura 23.

FIGURA 23 - Resposta da alternativa D, questão 10


d) Demonstrem de outra maneira que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

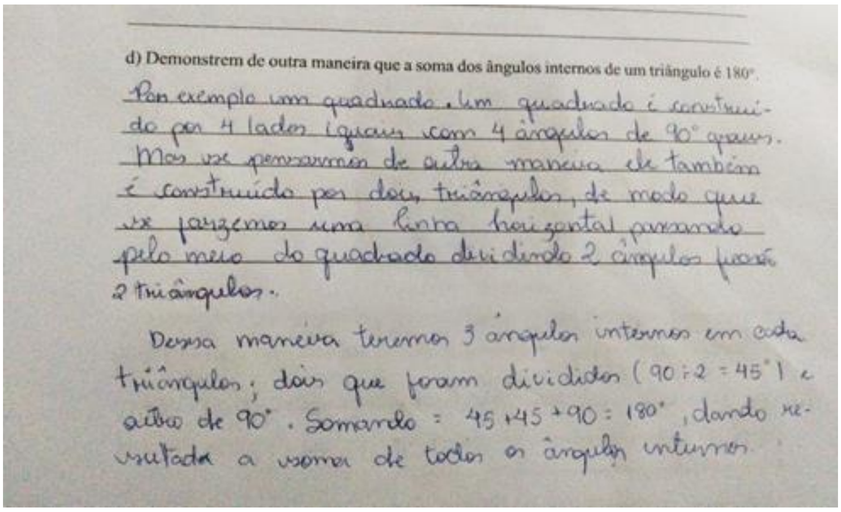
a+b+c

50+100+30=180°

Fonte: Protocolo de L24

Destacamos que somente um aluno apresentou uma argumentação que demonstra uma compreensão mais ampla, que estabelece relações, mas que não apresenta rigor suficiente para ser uma demonstração, frisamos essa resposta na Figura 24. Frisamos que esse discente acertou as alternativas anteriores obtendo um bom desempenho nesta questão, tal como apresentou um bom rendimento nas questões anteriores. Logo, podemos afirmar que o discente L6 está em transição para o nível 2 dessa teoria.

FIGURA 24 - Resposta da alternativa D, questão 10


d) Demonstrem de outra maneira que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Por exemplo um quadrado. Um quadrado é construído por 4 lados iguais com 4 ângulos de 90° graus. Mas se pensarmos de outra maneira ele também é construído por dois triângulos, de modo que se fazermos uma linha horizontal passando pelo meio do quadrado dividindo 2 ângulos formá 2 triângulos.

Dessa maneira teremos 3 ângulos internos em cada triângulos; dois que foram divididos (90÷2 = 45°) e outro de 90°. Somando = 45+45+90 = 180°, dando resultado a soma de todos os ângulos internos.

Fonte: Protocolo de L6

Em conformidade com Nascimento e colaboradores (2015, p. s/n), que fizeram o uso dessa questão, temos que a mesma “confirma o que pesquisas já apontaram, ou seja, que alunos da educação básica utilizam justificativas informais, com destaque para aquelas que recorrem a exemplos ou provas ingênuas para justificar suas demonstrações”.

Por fim, fazendo uma análise geral em relação aos conhecimentos que concerne aos triângulos, vimos que a maioria dos estudantes reconhecem e visualizam triângulos nas questões 3, 4 e 5, com isso a maior parte desses alunos estão no nível 0 para triângulos, como também em relação aos quadrados. No entanto, apresenta dificuldades para visualizar paralelogramos, retas, segmentos de retas, ângulos e pontos/vértices. Em relações as questões do nível 1 da Teoria de Van Hiele boa parte desses alunos conseguem definir informalmente o triângulo, porém apresentam dificuldades em reconhecer semelhanças e propriedades em um conjunto de triângulos equiláteros e acutângulos, com isso poucos alunos se enquadra neste nível ou em transição para tal.

No tocante às questões do nível 2, somente 2 alunos conseguiram apresentar triângulos corretos seguindo suas classificações, porém não reconhecem ser um triângulo retângulo pode ser equilátero. Alguns alunos conseguem ordenar uma demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo, porém a maioria deles não consegue reconhecer os elementos e propriedades para tal demonstração. Tal qual, somente um discente conseguiu apresentar uma argumentação, para a soma dos ângulos internos do triângulo. Posto isso, temos que somente um aluno expõe sinais de estar no nível 2 ou em transição para o nível 3.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao principiamos essa pesquisa de Conclusão de Curso, o nosso principal objetivo foi de verificar em qual nível de pensamento geométrico, no que concerne ao reconhecimento, classificação de conceitos e propriedades relativas aos triângulos, se encontravam os alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma Escola Pública do Estado de Pernambuco. Para encontrar respostas para essa pergunta que originou esta problemática foi aplicado um teste com perguntas que envolvia o conteúdo de triângulos, seguindo a classificação perante a Teoria de Van Hiele.

A partir da análise dos dados coletados, vimos que a realidade desses conteúdos estudados está com uma grande defasagem, comparados com as indicações da BNCC. Percebemos que a maioria dos alunos não conseguem realizar corretamente as questões que envolvam definições, propriedades e elementos geométricos simples. Em relação aos conteúdos que envolvem triângulos, poucos alunos conseguiram ultrapassar o nível 0 da teoria de Van Hiele, sendo que neste nível a principal cobrança está na visualização das figuras e na comparação entre as demais figuras e suas nomenclaturas. Cabe destacar que, em relação ao paralelogramo apresentado na questão 3, grande parte dos sujeitos dessa pesquisa não estão no nível 0.

Averiguamos com os resultados coletados, que os conteúdos que envolvem o pensamento geométrico sobre triângulos, ainda são poucos trabalhados e aprofundados no Ensino Fundamental, acarretando dificuldades para o desenvolvimento desses conteúdos e da Geometria nos anos posteriores, pois é indispensável a consolidação desses conteúdos básicos para o avanço de outros mais rebuscados.

No entanto, evidenciamos que no ano de 2020 e 2021, o sistema educacional vem enfrentando grandes desafios, dificuldades simples do cotidiano escolar se tornaram mais evidentes com a chegada da epidemia do coronavírus. Os principais contratempos enfrentados hoje pela educação são: muitos faltas, desistências, desinteresse pelos estudos, professores desmotivados e as dificuldades em levar a educação em tempo de isolamento social para alunos que não possuem aparelhos eletrônicos e internet de boa qualidade para a participação nas aulas.

Sendo assim, uma das nossas principais limitações para realizar esta pesquisa foi o período pandêmico, de isolamento social, no qual tivemos que produzir, com orientações e aulas remotas.

Realçamos que, quando a pesquisa foi aplicada, os estudantes estavam voltando de um período de isolamento. Sendo assim, as aulas estavam acontecendo de forma remota. Assim, é necessária uma nova investigação em relação a esses conteúdos, em um período Pós Pandemia, para averiguar como se comporta o pensamento geométrico e os conhecimentos sobre triângulos dos estudantes.

Contudo o que foi exposto, apesar dos esforços de milhares de professores para desenvolver um processo de ensino e aprendizagem eficaz, principalmente durante as aulas remotas. É necessário um aperfeiçoamento dessas práticas que venha a elevar o nível dos conteúdos ensinados, dado que ainda precisamos trabalhar permanentemente para o melhoramento do ensino da Geometria em nossas escolas públicas. Temos que, é importante utilizar metodologias alternativas, saindo do normal de todo dia.

Como indicações para pesquisas futuras, destacamos a necessidade de pesquisar o nível de pensamento geométrico dos alunos a finalizar o Ensino Médio, posteriormente em um período pós-pandêmico. Como também temos a necessidade de investigar os anos finais do Ensino Fundamental, com foco no nível 0 da Teoria de Van Hiele, para constatar se os discentes conseguem visualizar, reconhecer e diferenciar as nomenclaturas de figuras geométricas

REFERÊNCIAS

ASSAD, A. **Usando o Geogebra para analisar os níveis de pensamento geométrico dos alunos de Ensino Médio na perspectiva de Van Hiele**. 2017, 159f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ponta Grossa. 2017.

BARBOSA, P. M. O Estudo da Geometria. **Revista Benjamin Constant**, Rio de Janeiro, n. 25, p. 14-22, ago. 2003.

BARROS, P. B. Z. **A arte na matemática: contribuições para o ensino de geometria. 2017**. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado em Docência para a Educação Básica), Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho. Bauru. São Paulo. 2017

BRASIL, Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática.** Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricular.** Brasília, DF, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: out. 2020.

BRIZOLA, M. B. A. **Classificação dos triângulos quanto aos lados e ângulos, apresentação do teorema de Pitágoras**. 2015. Especialização. Polo de Picada Café. Picada Café. Rio Grande do Sul. 2015

DOLCE, O; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana.** Volume 9. 7ª ed. São Paulo: Editora Atual, 2005.

DANTE, L. R. **Teláris Matemática**. 3° ed. São Paulo: Editora Ática, 2018.

FONSECA, J. A.; LEIVAS, J. C. P. Triângulos: uma experiência utilizando a teoria de Van Hiele. **e-Mosaicos**. Rio de Janeiro. v. 7, n. 14, p. 137-154, 2018.

KALEFF, A. M. et al. Desenvolvimento do pensamento geométrico: Modelo de van Hiele. **Bolema**, Rio Claro, v. 10, p. 21-30, 1994.

LOBATO, L. F.; ANDRADE, G. O. **Desafios do ensino de geometria no ensino médio.** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, 2019.

LOVIS, K. A. **Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria Dinâmica: o que pensam e o que sabem os professores**. 2009. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Maringá. Maringá. Paraná. 2009

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. 2. Ed. Rio de Janeiro: Editora E.P.U., 2013.

NASCIMENTO, A. A. et al. Análise do nível do pensamento geométrico, segundo a teoria de Van Hiele dos alunos do 1º ano do Ensino Médio. **II Congresso Nacional da Educação**. Campina Grande - PB, 2015

PACHÊCO, F. F. F; et al. Identificando o conhecimento geométrico de alunos do 6º ano do ensino fundamental sobre triângulos. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, *[S. l.]*, v. 8, n. 1, p. 343-359, 2020.

PEREIRA, S. R. F; PEREIRA, M. F. F. O ensino de semelhança de triângulos na opinião de alunos. **Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades,** São Paulo, v. 13. 2016

PERNAMBUCO, S. **Parâmetros para a educação básica do estado de Pernambuco: Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio**. Recife, 2012a. Disponível em http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/4171/matematica_ef_em.pdf. Acesso em : out. 2020.

PERNAMBUCO, S. **Currículo de Matemática para o Ensino Fundamental com base nos Parâmetros Curriculares do Estado de Pernambuco**, Recife, 2012b. Disponível em http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/750/curriculo_matematica_ef.pdf. Acesso em: out. 2020

PINTO, N. B.. Marcas históricas da matemática moderna no Brasil. **Revista Diálogo Educacional**, v. 5, n. 16, p. 25-38, 2005.

PINTO, S. R. **Desenvolvimento do pensamento geométrico: Uma proposta para o ensino das isometrias**. Tese de mestrado. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Viana do Castelo, Portugal. 2011

SILVA, A. D. P. R.; PACHÊCO, F. F. F. Reconhecendo figuras planas por meio de sua forma: um estudo sobre triângulos e quadrados com alunos do 5º ano do ensino fundamental à luz da teoria de Van Hiele. In: **Anais do XV congresso internacional de tecnologia na educação**. Recife: SENAC, 2017. v. 1.

SOARES, I. P. O **ensino das propriedades de triângulos e paralelogramos enfocando o uso de construções geométricas**. Tese de Mestrado. Universidade Federal de Alagoas. Maceió. Alagoas. 2014.

SILVA, K. A. **Ensino e aprendizagem de triângulos: uma experiência didática.** Monografia. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Sapiranga. Rio Grande do Sul. 2010.

TENÓRIO, A; RIBEIRO, M. B. M. R; TENÓRIO, T. Um estudo de caso sobre o uso do software régua e compasso no ensino de triângulos. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, Rio de Janeiro, v. 6, n. 1, 2016.

VILLIERS, M. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 12, n. 3, 2010.

ANEXO A - QUESTIONÁRIO

Prezados discentes, este questionário faz parte de minha pesquisa de Trabalho de conclusão de curso, que visa investigar o nível de pensamento geométrico dos discentes do 1° ano do Ensino Médio: um olhar sob a ótica de Van Hiele. Diante disso, peço responsabilidade nas suas respostas. Desde de já, garanto o SIGILO das informações nele contidas, sendo utilizadas posteriormente para a análise dos dados.

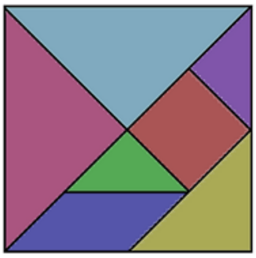
Atenciosamente, José Lucas de Araujo Silva.

1- Nome completo: ____

2- Idade: _____

3- O Tangram é um quebra-cabeça formado por figuras geométricas, como podemos ver na imagem abaixo cada cor mostra uma peça desse jogo.

FIGURA 1 - Tangram



Fonte: Elaboração própria

Considerando como compondo o Tangram, figuras de uma cor apenas. Quais as figuras geométricas que você consegue identificar, que formam o quebra-cabeça Tangram?

____

____

____

4- Enumere a quantidade de cada figura geométrica que você identificou na questão 3:

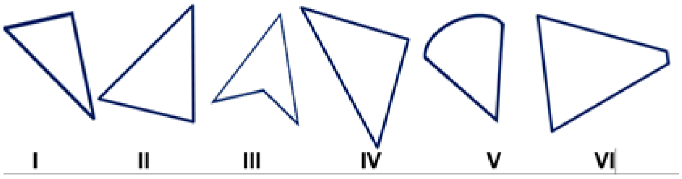
____

____

____

5- (Adaptada) Das figuras abaixo qual(is) é/são triângulo(s)?

FIGURA 2 - Questão 5



Fonte: Adaptada de Silva e Pachêco (2017, p.6).

____

____

____

6- O que é um triângulo?

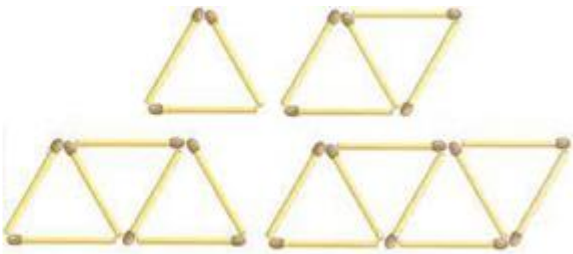
____

____

____

7- Observe a imagem abaixo:

FIGURA 3 – Triângulos formados por fósforos



Indique algumas características similares a todos os triângulos formados por esses palitos de fósforo.

____

____

____

8- Qual a classificação desses triângulos da figura 3, em relação aos seus ângulos e seus lados?

____

____

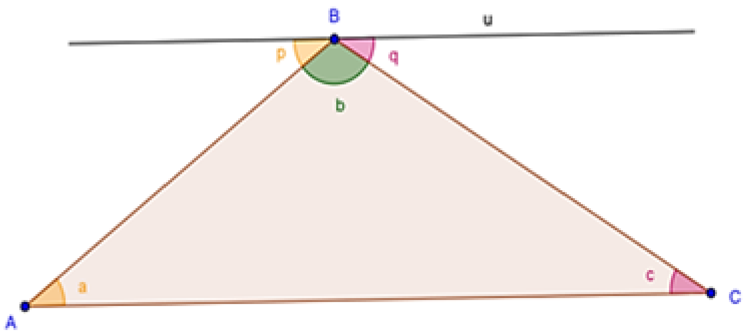
9– Construa os triângulos a seguir, seguindo as características e classificações solicitadas:

a) Um triângulo acutângulo e escaleno;

b) Um triângulo isósceles e obtusângulo;

c) Um triângulo retângulo e equilátero;

10- Seja um triângulo ABC qualquer com ângulos internos a, b e c. A figura abaixo ilustra uma construção geométrica que auxilia na demonstração da propriedade de que "em todo triângulo a soma dos ângulos internos é 180°":



a) Como são chamados os elementos geométricos representados por u, B, a e $\overline{AC}$?

____

____

____

b) Vocês conseguem identificar alguma propriedade na figura. Qual (is)?

____

____

____

c) Coloquem em ordem, de 1 a 5, as frases abaixo a fim de obter a demonstração do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo:

( ) $p + b + q = 180°$

( ) Seja um triângulo ABC qualquer e nomeamos seus ângulos internos como a, b e c

( ) $p = a$ e $q = c$, pois, são ângulos alternos internos

( ) Pelo vértice B, traçamos uma reta paralela ao lado AC obtendo $\hat{p}$ e $\hat{q}$

( ) Conclusão: $a + b + c = 180°$.

____
____
____
____
____
____

d) Demonstrem de outra maneira que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

____
____
____
____
____
____