UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

MATHEUS JERÔNIMO REBOUÇAS DA CRUZ

COMPREENSÕES DE ESTUDANTES SOBRE A NOÇÃO DE ESPAÇO VETORIAL

CARUARU
2019

MATHEUS JERÔNIMO REBOUÇAS DA CRUZ

COMPREENSÕES DE ESTUDANTES SOBRE A NOÇÃO DE ESPAÇO VETORIAL

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado ao Curso de Graduação em Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a graduação em Licenciatura em Matemática.

Área de concentração: Ensino/ Matemática

Orientador: Profº. Dr. Valdir Bezerra dos Santos Júnior.

CARUARU

2019

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier - CRB/4 - 1242

C957c Cruz, Matheus Jerônimo Rebouças da.
Compreensões de estudantes sobre a noção de espaço vetorial. / Matheus Jerônimo Rebouças da Cruz. – 2019.
42 f. ; il. : 30 cm.

Orientador: Valdir Bezerra dos Santos Júnior.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2019.
Inclui Referências.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Espaços vetoriais. 3. Álgebra linear. 4. Aprendizagem. I. Santos Júnior, Valdir Bezerra dos (Orientador). II. Título.

CDD 371.12 (23. ed.) UFPE (CAA 2019-262)

MATHEUS JERÔNIMO REBOUÇAS DA CRUZ

COMPREENSÕES DE ESTUDANTES SOBRE A NOÇÃO DE ESPAÇO VETORIAL

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado ao Curso de Graduação em Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a graduação em Licenciatura em Matemática.

Aprovado em 11/11/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Valdir Bezerra dos Santos Júnior (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Cristiane de Arimatéa Rocha (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Marcílio Ferreira dos Santos (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

À Deus, pela saúde e paz que me concedeu durante toda minha vida, em particular, durante minha graduação. Por tudo que Ele fez/faz por mim.

À minha família, por todo suporte que me deram, aos meus pais, em especial minha mãe Elizabete por acreditar em mim e sempre estando do meu lado. Aos meus irmãos Onécio e Sidney em que devo muito aprendizado e por sempre me ajudarem no que preciso. A minha namorada Débora, por me incentivar e me inspirar em ser uma pessoa cada vez melhor. E ao meu amigo e cachorro Bobby.

Aos professores que tive durante minha vida como estudante, em que pude aprender com cada um deles.

Ao meu orientador Valdir, em que aceitou o convite de fazer este trabalho, agradeço pelos seus ensinamentos, contribuições e tempo dedicado à pesquisa.

À Universidade Federal de Pernambuco, especialmente ao Centro Acadêmico do Agreste, pela oportunidade em que pude cursar toda minha graduação. A todos os funcionários da mesma, ao qual fizeram tudo isso ser possível, trabalhadores da limpeza, xerox, escolaridade, etc.

Aos colegas de turma, por todos os momentos que passamos juntos e por tudo que vocês me ensinaram.

Enfim, a todas as pessoas que de alguma forma tive contato e me ajudaram durante minha graduação.

RESUMO

Este trabalho busca analisar as compreensões sobre a noção de Espaço Vetorial de licenciandos em Matemática do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco. Como base teórica para esta pesquisa utilizamos a Teoria Antropológica do Didático (TAD), assim como, outras referências que tratam sobre o ensino e aprendizagem em Álgebra Linear, para citar alguns dos autores utilizados, temos: Borges (2007), Fratelli e Monteiro (2007), Coimbra (2008), Furtado (2010), Chiari (2013), entre outros. Para analisar essas compreensões, aplicamos um questionário contendo 5 perguntas sobre as noções de Espaço Vetorial com 17 estudantes da turma do 7º período do curso. Diante as análises das 5 questões observamos que as relações pessoais dos participantes desta pesquisa frente ao objeto Espaço Vetorial tendem a representar um lugar geométrico que possui um conjunto de vetores, como também, que 'vetores no plano e no espaço' possa a ser o conteúdo mais explorado durante a aprendizagem dos estudantes diante a noção Espaço Vetorial na componente curricular Álgebra Linear.

Palavras-chave: Espaço Vetorial. Ensino e aprendizagem em Álgebra Linear. Ensino de Matemática. Teoria Antropológica do Didático.

ABSTRACT

This paper analyzes the comprehension of the notion of Vector Space of Mathematics graduates of the Agreste Academic Center of the Federal University of Pernambuco. As a theoretical basis for this research we use the Anthropological Theory of Teaching (TAD), as well as other references that deal with teaching and learning in Linear Algebra, to name some of the authors used, we have: Borges (2007), Fratelli e Monteiro (2007), Coimbra (2008), Furtado (2010), Chiari (2013), among others. To analyze these understandings, we applied a questionnaire containing 5 questions about the notions of Vector Space with 17 students from the 7th period. Given the analysis of the 5 questions, we observed that the personal relationships of the participants of this research with the object Vector Space tend to represent a geometric place that has a set of vectors, as well as that 'vectors in the plane and in space' can be the content most explored during students learning regarding the notion Vector Space in the Curricular Component Linear Algebra.

Keywords: Vector Space. Teaching and learning in Linear Algebra. Mathematics teaching. Anthropological Theory of Didactics.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho busca analisar as compreensões de licenciandos em Matemática sobre as noções de Espaço Vetorial, ideias presente nas discussões de alguns componentes curriculares do curso de licenciatura em matemática, ao qual se torna fundamental seu entendimento não só para o progresso em componentes como o de Álgebra Linear (AL), mas também para ideias futuras em outros domínios da matemática e até em outras áreas do conhecimento.

Sobre a teoria axiomática de Espaço Vetorial podemos dizer que ainda é recente, quando comparada a outras teorias matemáticas. Como Dorier (1995) apresenta em seu trabalho, é explicitado que Giuseppe Peano trouxe a primeira definição axiomática de espaço vetorial em 1888 e que só a partir dos anos 30, ela começou a ser aceita e usada. É mencionado também, que essa teoria é importante não só para matemática que ajudou a reestruturar provas e demonstrações, mas também serviu como sustento para novas descobertas em outras áreas do conhecimento.

O desconhecimento, às vezes, por partes dos alunos sobre a importância dessa teoria como obrigatória no currículo faz com que a mesma se torne desinteressante. Dorier (2002, p. 876, tradução nossa) em seu trabalho relata que "os estudantes geralmente sentem que eles pousam em outro planeta, eles estão sobrecarregados pelo número de novas definições e pela falta de conexão com o conhecimento prévio"[1], o que pode desencadear nos estudantes certo desapego em aprender, sendo pelo fato de não saberem dizer para que essa teoria sirva ou por acreditarem não saber o que estão fazendo, entre outros motivos. No entanto, quando lhe é solicitado para resolver problemas que exigem alguma generalização e/ou manipulação entre elementos, geralmente tais alunos recorrerem das propriedades algébricas estudadas.

Conhecemos a Álgebra Linear, comumente, como uma disciplina não trivial e que não utilizaremos os conceitos aprendidos em outros conteúdos ou em cálculos no cotidiano, ficando com o pensamento de que o que é discutido e explanado na componente curricular servirá apenas para a mesma. Porém, as operações e as habilidades desenvolvidas servem para além da disciplina como, por exemplo, para entendermos como simples conceitos da matemática são válidos e como são dadas suas implicações em ideias mais abstratas. Celestino (2000, p. 9) relata sobre a relevância desta disciplina em cursos superiores, assim como, pesquisas sobre o seu ensino-aprendizagem, pelo "fato de que ela hoje se encontra subjacente a quase todos os

[1] Trecho na íntegra: "Students usually feel that they land on another planet, they are overwhelmed by the number of new definitions and the lack of connection with previous knowledge".

domínios da Matemática”. Vemos a AL vinculada a diversas áreas da matemática, a saber: Geometria, Equações Diferenciais, Aritmética, Estruturas Algébricas, entre outras áreas.

Dorier (1998, *apud* Furtado e Cabral, 2011, p. 2) também enfatiza a importância dessa componente curricular:

> (…) é fato que a Álgebra Linear constitui uma parte importante no conteúdo matemático que é usado no início da universidade, sendo vista como uma disciplina fundamental por quase todos os matemáticos e por muitos cientistas que a utilizam como ferramenta. Além disto, as dificuldades dos estudantes em Álgebra Linear parecem tão importantes e visíveis, quanto em análise.

Diante o exposto, com o domínio do conhecimento algébrico iremos além de saber operar, podemos desenvolver competências para entender alguns dos padrões e fenômenos reais que nos cercam, como descrevem Howard Anton e Chris Rorres (2012) em seu livro *Álgebra Linear com aplicações*[2], com exemplos de aplicações em: genética, fractais, criptografia, tomografia computadorizada, entre outros. Ou seja, o conhecimento algébrico nos auxilia, dentre outras coisas, a identificar e compreender possíveis padrões expostos a nossa frente e como podemos manipulá-los.

Trazendo um pouco de minhas experiências com o domínio da Álgebra Linear, destacamos que quando estávamos como monitor de AL durante a graduação, observamos ingenuamente nos estudantes que nos procuravam, uma dificuldade em alguns dos conceitos fundamentais, como noções envolvendo Espaço Vetorial, ao qual nossa turma também teve quando estávamos cursando AL. Além disso, reconhecemos a importância e as contribuições da AL para o campo da matemática e, por conseguinte, para compreensão do mundo em que vivemos. Baseado nas experiências vivenciadas no curso de graduação e nas ideias expostas até aqui formulamos a problemática desta pesquisa: Qual a compreensão do estudante de licenciatura em matemática sobre a noção de Espaço Vetorial?

Diante deste questionamento, chegamos ao seguinte objetivo de pesquisa: Analisar a relação pessoal de licenciandos em Matemática sobre a noção de Espaço Vetorial. Com o intuito de alcançar este objetivo, delimitamos dois objetivos específicos que dão suporte a nosso objetivo geral, a saber: identificar como os estudantes compreendem as noções e exemplos sobre Espaço Vetorial e identificar as representações de Espaço Vetorial utilizadas pelos estudantes.

---

[2] Obra originalmente publicada sob o título *Elementary Linear Algebra: Applications Version.* Indicamos a leitura desse livro para as pessoas com curiosidade em saber a aplicação de conhecimentos algébricos em outras áreas.

De forma a buscar a resposta ao questionamento da pesquisa, organizamos a mesma em 6 capítulos, no primeiro trazemos a introdução, em que buscamos descrever brevemente o surgimento da teoria axiomática e a importância de AL, assim como, a organização de nosso trabalho. No segundo capítulo, apresentamos os nossos objetivos. No terceiro, dedicamos aos aspectos teóricos em que iniciamos expondo definições de espaços vetoriais segundo a bibliografia de nosso curso, perpassando pelo cenário das pesquisas sobre o ensino e/ou aprendizagem em AL, depois falamos sobre algumas dificuldades no ensino e aprendizagem em Álgebra Linear e por fim descrevemos alguns elementos da Teoria Antropológica do Didático (TAD). No quarto capítulo abordamos a metodologia de nossa pesquisa, destacamos a natureza da pesquisa, o tipo de pesquisa, os estudantes que participaram e o instrumento de coletas de dados utilizado. No quinto capítulo, descrevemos as análises e discussões dos resultados que tivemos baseado nos questionários aplicados. E, por fim, no sexto capítulo, trazemos nossas considerações finais a respeito do desenvolvimento de toda a pesquisa.

2 OBJETIVOS

2.1 Geral

- Analisar a relação pessoal de licenciandos em Matemática sobre a noção de Espaço Vetorial.

2.2 Específicos

- Identificar como os estudantes compreendem as noções e exemplos sobre Espaço Vetorial.
- Identificar as representações de Espaço Vetorial utilizadas pelos estudantes.
- Observar as dificuldades encontradas pelos estudantes em atividades sobre as noções de Espaço Vetorial.

3 ASPECTOS TEÓRICOS

Dividiremos este capítulo em três partes: primeiro, traremos definições de Espaços Vetoriais de acordo com algumas das referências bibliográficas estudadas em nosso curso e alguns exemplos; segundo, explanaremos algumas dificuldades já vistas no ensino e aprendizagem em Álgebra Linear; por fim, descreveremos alguns elementos da Teoria Antropológica do Didático (TAD).

3.1 Espaços Vetoriais: definições e exemplos

No segundo semestre de 2018, em nosso curso, tivemos quatro livros como referência básica e outros cinco livros como referência complementar para disciplina de AL. Nesta seção, traremos três definições ao total, duas retiradas dos livros da referência básica e uma da referência complementar. Os dois livros que escolhemos da referência básica são: *Álgebra linear* de Boldrini et al. (1980) e *Álgebra linear com aplicações* de Anton e Rorres (2012). E o livro que escolhemos da referência complementar é: *Álgebra linear* de Lima (2014).

Observamos que, mesmo versando sobre o mesmo objeto matemático, as definições que explicitamos nos tópicos a seguir trazem particularidades em seus enunciados. Por exemplo, o número de axiomas enunciados por cada autor é diferente, pois para alguns certos axiomas estão implícitos. Não é nosso objetivo analisar as definições, no entanto, acreditamos ser importante estarmos atentos as diferenças na enunciação da definição de espaço vetorial para que em nossa análise, possamos enxergar possíveis categorias de análise. Desta forma, traremos a seguir algumas definições de Espaço Vetorial e posteriormente alguns exemplos de espaços vetoriais.

3.1.1 Definições de Espaço Vetorial segundo Boldrini et al. (1980), Anton Rorres (2012) e Lima (2014)

Boldrini et al. (1980, p.103) trazem em seu livro um capítulo de nome *Espaço Vetorial* e dentro deste uma seção chamada *Espaços Vetoriais* em que definem:

> Um espaço vetorial real[3] é um conjunto V, não vazio, com duas operações: soma, $V \times V \xrightarrow{+} V$, e multiplicação por escalar, $R \times V \xrightarrow{\cdot} V$, tais que, para quaisquer $u, v, w \in V$ e $a, b \in R$, as propriedades de *i)* a *viii)* sejam satisfeitas:

[3] Espaço vetorial real, pois, os escalares pertencem ao conjunto dos números reais. Se ao invés disso os escalares fossem números complexos, estaríamos falando de um espaço vetorial complexo (BOLDRINI et al., 1980).

i) $(u + v) + w = u + (v + w)$
ii) $u + v = v + u$
iii) $Existe\ \mathbf{0} \in V\ tal\ que\ u + \mathbf{0} = u\ (\mathbf{0}$ é $chamado\ vetor\ nulo)$
iv) $Existe - u \in V\ tal\ que\ u + (-u) = \mathbf{0}$
v) $a(u + v) = au + av$
vi) $(a + b)v = av + bv$
vii) $(ab)v = a(bv)$
viii) $\mathbf{1}u = u$

Falando agora do livro *Álgebra linear com aplicações*, Anton e Rorres (2012, p. 172) traz um capítulo nomeado de *Espaços Vetoriais Arbitrários* e nele uma seção *Espaços vetoriais reais*, ao qual possui a seguinte definição:

> Seja V um conjunto não vazio qualquer de objetos no qual estejam definidas duas operações, a adição e a multiplicação por escalares. Por ***adição*** entendemos uma regra que associa cada par de objetos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V um objeto $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, denominado ***soma*** de $\mathbf{u}$ com $\mathbf{v}$; por ***multiplicação por escalar*** entendemos uma regra que associa a cada escalar a e cada objeto $\mathbf{u}$ em V um objeto $a\mathbf{u}$, denominado ***multiplico escalar*** de $\mathbf{u}$ por a. Se os axiomas seguintes forem satisfeitos por todos os objetos $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ em V e quaisquer escalares a e b, diremos que V é um ***espaço vetorial*** e que os objetos de V são ***vetores***.
> **1.** Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são objetos em V, então $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é um objeto em V.
> **2.** $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
> **3.** $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
> **4.** Existe um objeto $\mathbf{0}$ em V, denominado $\boldsymbol{vetor\ nulo}$ de V, ou $\boldsymbol{vetor\ zero}$, tal que $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$, com qualquer $\mathbf{u}$ em V.
> **5.** Dado qualquer $\mathbf{u}$ em V, existe algum objeto $-\mathbf{u}$, denominado $\boldsymbol{negativo}$ de $\mathbf{u}$, tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
> **6.** Se a for qualquer escalar e $\mathbf{u}$ um objeto em V, então $a\mathbf{u}$ é um objeto em V.
> **7.** $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
> **8.** $(a + b)\mathbf{u} = a\boldsymbol{u} + \mathrm{b}\boldsymbol{u}$
> **9.** $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$
> **10.** $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Por fim, Lima (2014, p.1) em seu livro *Álgebra linear* escreve em seu primeiro capítulo *Espaços Vetoriais* a definição de um Espaço Vetorial:

> Um espaço vetorial E é um conjunto, cujos elementos são chamados *vetores*, no qual estão definidas duas operações: a *adição*, que a cada par de vetores $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathrm{E}$ faz corresponder um novo vetor $\mathrm{u} + \mathrm{v} \in \mathrm{E}$, chamado a *soma* de u e v, e a *multiplicação por um número real*, que a cada número $\alpha \in \mathbb{R}$ e a cada vetor $\mathrm{v} \in \mathrm{E}$ faz corresponder um vetor $\alpha \cdot \mathrm{v}$, ou $\alpha\mathrm{v}$, chamado o *produto* de α por v. Essas operações devem satisfazer, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w} \in \mathrm{E}$, as condições abaixo, chamadas os *axiomas* de espaço vetorial:
> **comutatividade:** $\mathrm{u} + \mathrm{v} = \mathrm{v} + \mathrm{u}$;
> **associatividade:** $(\mathrm{u} + \mathrm{v}) + \mathrm{w} = \mathrm{u} + (\mathrm{v} + \mathrm{w})$ e $(\alpha\beta)\mathrm{v} = \alpha(\beta\mathrm{v})$;
> **vetor nulo:** existe um vetor $0 \in \mathrm{E}$, chamado *vetor nulo*, ou *vetor zero*, tal que $\mathrm{v} + 0 = 0 + \mathrm{v} = \mathrm{v}$ para todo $\mathrm{v} \in \mathrm{E}$;
> **inverso aditivo:** para cada vetor $\mathrm{v} \in \mathrm{E}$ existe um vetor $-\mathrm{v} \in \mathrm{E}$, chamado o *inverso aditivo*, ou o *simétrico* de v, tal que $-\mathrm{v} + \mathrm{v} = \mathrm{v} + (-\mathrm{v}) = 0$;

distributividade: $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ e $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
multiplicação por 1: $1 \cdot v = v$.

Assim sendo, acreditamos que dentre as três definições aqui descritas a definição dos autores Anton e Rorres (2012) é a que mais faz sentido para nós, uma vez que eles trazem de forma mais detalhada cada axioma, sem juntar alguns axiomas como sendo um, por exemplo, os axiomas de associatividade (da soma e do produto) em que trazem de forma separada. Além de deixar explícito como chamamos alguns dos elementos contidos nos axiomas.

3.1.2 Exemplos de espaços vetoriais

O mais simples de todos os espaços vetoriais é o conjunto $\{\vec{0}\}$, em que contém apenas o vetor nulo. Esse conjunto é um espaço vetorial que chamamos de espaço vetorial nulo ou espaço vetorial trivial. Utilizando qualquer uma das três definições de Espaços Vetoriais apresentadas neste trabalho, conseguimos concluir que o conjunto apenas com o vetor nulo é um espaço vetorial. De fato, esse conjunto obedece às propriedades essenciais, isto é, adicionar o vetor nulo a si mesmo ou multiplicá-lo por qualquer escalar (número) o resultado será o mesmo: o vetor nulo.

Trazendo outro exemplo, o conjunto dos pares ordenados de números reais ($\mathbb{R}^2$) é um espaço vetorial. Para provar, vamos considerar as operações como as usuais, isto é, dados dois elementos de $\mathbb{R}^2$, por exemplo, (x_1, y_1) e (x_2, y_2), e α um número real qualquer, então $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ e $\alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1 + \alpha y_1)$.

Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^2$, tais que $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2)$ e $w = (x_3, y_3)$, e α, β números reais. Assim, temos que:

- $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = v + u$;
- $(u + v) + w = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) + (x_3, y_3) = (x_1 + x_2 + x_3,\ y_1 + y_2 + y_3) = (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = u + (v + w)$;
- O elemento **0** satisfaz: $u + \mathbf{0} = (x_1, y_1) + (0, 0) = (x_1 + 0, y_1 + 0) = (x_1, y_1) = u$;
- Sendo $-u = (-x_1, -y_1)$, temos que $u + (-u) = (x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) = \big(x_1 + (-x_1)\big), (y_1 + (-y_1)) = (x_1 - x_1, y_1 - y_1) = (0, 0) = \mathbf{0}$;
- $\alpha(u + v) = \alpha(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) = \big(\alpha(x_1 + x_2), \alpha(y_1 + y_2)\big) = ((\alpha x_1 + \alpha x_2), (\alpha y_1 + \alpha y_2)) = (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2) = \alpha u + \alpha v$;
- $(\alpha + \beta)v = (\alpha + \beta)(x_2, y_2) = \big((\alpha + \beta)x_2, (\alpha + \beta)y_2\big) = (\alpha x_2 + \beta x_2, \alpha y_2 + \beta y_2) = \alpha(x_2, y_2) + \beta(x_2, y_2) = \alpha v + \beta v$;

- $\alpha(\beta v) = \alpha(\beta x_2, \beta y_2) = (\alpha\beta x_2,\ \alpha\beta y_2) = \alpha\beta(x_2, y_2) = (\alpha\beta)v$;
- $\mathbf{1}u = 1(x_1, y_1) = (1x_1, 1y_1) = (x_1, y_1) = u$.

Portanto, o conjunto $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial.

Outro exemplo de espaço vetorial em um corpo[4] K é o próprio corpo K. Nesse seguimento, o conjunto $\mathbb{Q}$ de número racionais, o conjunto $\mathbb{R}$ de números reais e o conjunto $\mathbb{C}$ de números complexos são exemplos de espaços vetoriais em si mesmos. De fato, o modelo desses espaços vetoriais é o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ (com n natural), isto é, a forma de demonstrar que $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ são espaços vetoriais em si mesmos seguirá o mesmo raciocínio para mostrar que $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial nele mesmo. Assim, considerando $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ com x_i e y_i $(1 \leq i \leq n)$ todos pertencendo a $\mathbb{R}$ ao qual sua adição interna é definida por: $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots, x_n + y_n)$ e a multiplicação por escalar como: $\alpha(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \dots, \alpha x_n)$. Chamamos $\mathbb{R}^n$ de modelo para os outros espaços vetoriais pois sabemos que existe pelo menos um vetor em $\mathbb{R}^n$ com coordenadas de dimensão n, a saber: o vetor nulo $(0, 0, 0, \dots, 0)$. Sabemos que o inverso aditivo de $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ é $(-x_1, -x_2, -x_3, \dots, -x_n)$ e, assim, utilizando qualquer uma das três definições citadas, conseguimos concluir que $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial.

Temos que o conjunto das matrizes de ordem 2 de números reais $M_{2x2}(\mathbb{R})$ também é um espaço vetorial. De fato, considerando as operações usuais de adição matricial e multiplicação matricial da forma:

$$u + v = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix}$$

$$au = a\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au_{11} & au_{12} \\ au_{21} & au_{22} \end{bmatrix}$$

E, utilizando qualquer uma das 3 definições descritas podemos concluir que o conjunto das matrizes de ordem 2 de números reais $M_{2x2}(\mathbb{R})$ é um Espaço Vetorial.

Como também, temos que o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2 (P_2) também é um Espaço Vetorial. Levando em consideração as operações usuais de polinômios temos que:

$$u + v = (a_0 + a_1u_1 + a_2u_2^2) + (a_0 + a_1v_1 + a_2v_2^2) = a_0 + a_1(u_1 + v_1) + a_2(u_2^2 + v_2^2)$$

$$\beta u = \beta(a_0 + a_1u_1 + a_2u_2^2) = \beta a_0 + \beta a_1u_1 + \beta a_2u_2^2$$

[4] Conceito estudado no campo da álgebra, mas que não nos aprofundaremos em nosso trabalho. Indicamos a leitura do livro *Introdução à Álgebra* de Adilson Gonçalves para mais informações.

E, da mesma forma, utilizando qualquer uma das definições descritas, conseguimos concluir que o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2 (P_2) é um Espaço Vetorial.

Os dois exemplos que descreveremos brevemente a seguir se tratam de espaços vetoriais fora do domínio da matemática e foram retirados do site *tangente-mag*[5]. Não nos dedicamos a mostrar a formalização das provas desses exemplos, e sim apresentá-los. Deixamos no rodapé os endereços eletrônicos para quem quiser se aprofundar no assunto. O primeiro exemplo, escrito por Georges Marty sob o título *Le dessin de la toile d'araignée*[6], fala sobre o espaço vetorial de teias de aranha. No site citado, o autor cria um modelo de tela em formato quadrado, em que a aranha anda em linha reta. Por se tratar de recorrências geométricas simples, segundo Georges, é permitido mudar de ideias. Para isso, ele define sequências numéricas e mostra que a aranha está convergindo a um ponto.

No segundo, *Espaces vectoriels musicaux*[7] de Iannis Xenakis, é explanado a forma de como podemos ver um espaço vetorial dentro do arranjo de uma música. Em seu livro *Musiques formelles*[8] no capítulo cinco *Musique symbolique* ele trabalha mais especificamente sobre isso.

3.2 Dificuldades no ensino e aprendizagem em Álgebra Linear

Iniciaremos esta seção secundária descrevendo brevemente o cenário recente das pesquisas feitas com os temas ensino ou aprendizagem em Álgebra Linear. Para tal, utilizamos o trabalho de Chiari (2013) para apresentar os dados. A autora relata que entre 2000 e 2010 apenas treze trabalhos entre teses e dissertações no banco de dados da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), em cursos de graduação do Brasil, tiveram como objetivo geral o estudo do ensino ou aprendizagem em Álgebra Linear. E, entre os treze trabalhos, apenas um teve como tema Espaço Vetorial. Ela menciona também, que onze dos treze trabalhos foram defendidos a partir de 2005, mostrando um aumento de interesse pelo tema citado.

Apesar de Chiari (2013) descrever um aumento de interesse pelo ensino ou aprendizagem de AL durante o intervalo entre 2000 e 2010, fizemos uma busca de dissertações e teses também no banco de dados da CAPES entre 2011 e 2018, com filtros em 'Tipo' como 'Mestrado' e 'Doutorado', 'Grande Área Conhecimento' como 'Ciências Exatas e da Terra' e

[5] Para mais informações: http://www.tangente-mag.com.
[6] Para quem se interessar em saber como é feito a demonstração: http://www.tangente-mag.com/article.php?id=3622. Acesso em 15/08/19.
[7] Para mais informações: http://www.tangente-mag.com/article.php?id=3579. Acesso em 15/08/19.
[8] Livro disponível no site: http://iannis-xenakis.org/fxe/ecrits/mus_form.html. Acesso em 15/08/19.

em ‘Área de Conhecimento’ como ‘Matemática’. Tivemos 1273 resultados para ‘álgebra linear ensino’ e 1228 resultados para ‘álgebra linear aprendizagem’, no entanto, buscamos em ambos os resultados, individualmente, pelas palavras chaves ‘ensino’, ‘aprendizagem’, ‘álgebra linear’ e ‘espaço vetorial’, e só encontramos dois trabalhos. Um mesmo trabalho apareceu na busca em ‘álgebra linear ensino’ e ‘álgebra linear aprendizagem’ com o título “Tópicos de Álgebra Linear explorados com o auxílio da teoria de Galois” e o segundo trabalho apareceu na busca ‘álgebra linear aprendizagem’ com o título “Aprendizagem profunda para reconhecimento de gestos da mão usando imagens e esqueletos com aplicações em libras”, em ambos, não tivemos como objetivo geral o estudo do ensino e/ou aprendizagem em Álgebra Linear, tampouco, sobre Espaço Vetorial. Dessa forma, pudemos notar um déficit pelo interesse das pesquisas sobre os temas supracitados, que a priori estava aumentando como apresentado em Chiari (2013).

Normalmente, os licenciandos em matemática sentem mais dificuldades nas componentes curriculares que tratam sobre domínios da matemática como: Análise, Álgebra Linear, Estruturas Algébricas, etc., ao qual envolve algum tipo de demonstração e/ou prova matemática. Silva, Barboza e Cunha (2018) em pesquisa sobre a avaliação da aprendizagem do curso, no qual também investigamos, envolvendo 145 estudantes, mostra que a maioria dos discentes (63,16%) têm mais dificuldade nas avaliações de disciplinas da matemática pura e que essas são as que mais detém reprovações.

Em AL não é diferente, enquanto estudante fazemos e/ou estudamos muitas das vezes aquilo que o professor sugere, mesmo não sabendo para que serve, qual sua aplicação ou qual o objetivo de determinado assunto, apenas executamos pensando em nossa aprovação. Para Borges (2007, p.13) o não entendimento dos estudantes sobre qual é objetivo da AL pode ser causada pelo fato de que “nos cursos de graduação, a noção de espaço vetorial é apresentada isolada das outras áreas da matemática; os alunos trabalham com espaços vetoriais de dimensão finita, sem que essa teoria seja aproveitada”. Ou seja, a teoria é apresentada com domínio próprio e restrito à disciplina, sem que haja relação, associação ou aplicação em outro conteúdo.

Outra dificuldade apontada por Borges (2007, p.13) é a “que os alunos possuem em darem um salto, da necessidade de visualização do objeto para representá-lo ou entendê-lo, para um trabalho com estruturas geométricas que não possuem uma correspondência com esse objeto”. Situação que ocorre corriqueiramente, pois essa disciplina possui um teor na demonstração durante toda a sua duração, fazendo com que o estudante possa não compreender as noções do que está estudando dentro daquele conteúdo específico, e até mesmo, com outros domínios da matemática.

Fratelli e Monteiro (2007, p. 3) relatam em seu trabalho que os cursos de AL comumente iniciam pela definição de espaços vetoriais gerais e que “a maioria dos estudantes não entende a construção axiomática e suas implicações, com isso os conceitos deixam de fazer sentido e não se desenvolve uma intuição sobre os assuntos, tão importante nessa fase inicial de aprendizado”. Desta maneira, uma vez não consolidado o conhecimento fundamental para seguir nela, cria-se uma bola de neve de desordem das ideias estudadas, ocasionando assim, um quantitativo considerável de reprovações nesta componente curricular, como aponta Celestino (2000) em sua dissertação.

Uma noção que os estudantes apresentam dificuldades no ensino de Álgebra Linear é a palavra ‘vetor’. Coimbra (2008, p. 58-59) relata em sua dissertação que:

> Essa palavra, para o aluno do ensino médio, está carregada de significados físicos como direção, sentido e comprimento e que admite uma representação geométrica como uma seta. Não há, para os alunos, nenhuma relação entre esse vetor, com funções, polinômios, e matrizes, também estudados por eles no ensino médio. O conflito é inevitável, pois ao tratar espaços vetoriais, cujos elementos são ditos vetores, a imagem mental de um vetor que é uma seta não encontra congruência, por exemplo, com a imagem mental de um polinômio do segundo grau ou mesmo com uma matriz cuja representação mental é apenas de uma tabela.

Dessa forma, o estudante inicia os seus estudos em AL com uma noção de vetor que aprendeu no ensino médio ou até mesmo na graduação que acredita servir para todos os domínios em AL. Quando se depara com uma ideia de ‘vetor’ mais ampla àquela estudada, há um confronto de ideias que se não for bem investigada e estudada poderá causar detrimento às noções desenvolvidas em AL.

Ademais, se faz necessário que estudemos AL de forma objetiva e efetiva, explicando-a, por exemplo, para que serve e quais suas aplicações, no intuito de os estudantes internalizarem sua relevância no campo das ciências. Chiari (2013, p.7) diz que “além de permitir estabelecer conexões entre diferentes ramos, a Álgebra Linear também introduz uma linguagem e um raciocínio abstrato com os quais os alunos que a estudam pela primeira vez não estão acostumados a lidar”. Muitas vezes a forma como é visto esta disciplina, sem representações e significados usuais e mais definições, teoremas e demonstrações, dificulta a compreensão entre os conceitos e procedimentos vistos na mesma, uma vez que “exige que os alunos aprendam a sua natureza conceitual, com as suas características de abstração e formalismo e a centralidade da prova” (MORO; VISEU; SIPLE, 2016, p. 2). É o que pode ser verificado na dissertação de Furtado (2010), na qual, dos catorze alunos analisados por ela, a maioria, nove, dizem que a abstração presente em AL é a maior dificuldade e, outros quatro estudantes, descrevem a falta de aplicação também como uma dificuldade.

No entanto, Dorier (1990, *apud* Furtado e Cabral, 2011, p. 4) relata em seu trabalho que as dificuldades em compreender o aspecto formal da teoria dos espaços vetoriais não é algo estritamente ligado ao formalismo, mas possivelmente de compreender o uso do formalismo na teoria de Espaço Vetorial, como também, "a interpretação dos conceitos formais em relação aos contextos mais intuitivos como geometria ou sistema de equação linear, em que eles historicamente emergiram". Ou seja, os estudantes, podem ter compreendido o aspecto formal da teoria de Espaço Vetorial, mas por não saberem o que representa de fato o que estão fazendo ou até mesmo a sua relação com outros assuntos da matemática, apresentam dificuldades na mesma. Podemos ver algo semelhante no trabalho de Cardoso (2014, p. 33) quando ele diz que uma das dificuldades pode ser dada pelo "fato de os estudantes ficarem presos ao uso de algoritmos e teoremas de forma mecânica e não tentarem entender o sentido geral daquilo que é solicitado no problema".

A falta de contato do estudante com demonstrações ou deduções de fórmulas na Educação Básica, pode ser outra dificuldade encontrada, como aponta Cardoso (2014, p. 32) em sua tese "assim, saem da escola, pensando que a Matemática é apenas formada por operações mecânicas, envolvendo números e, em alguns casos, algumas variáveis". Dessa forma, vemos a importância do professor nesse nível de ensino, em propor em sala de aula situações para que seus estudantes tenham conhecimento do surgimento ou validade de determinada fórmula. Para que futuramente, no ensino superior, o professor possa ajudar sabendo como os seus alunos estudam, as suas necessidades e o que pode ser feito para fomentar a aprendizagem em Álgebra Linear (DAY; KALMAN, 1999, *apud* CARDOSO, 2014, p. 32).

Assim, analisamos a Álgebra Linear como uma das áreas fundamentais da matemática e a sua não compreensão pode provocar problemas de aprendizagem não só diretamente relacionada a ela, como também, a outros conteúdos matemáticos, dificultando assim, o entendimento desses assuntos por parte dos estudantes. Diante as confusões de ideias sobre esse conhecimento científico - que colegas de curso também possuíam - relacionado a aprendizagem em Álgebra Linear, sentimos instigados em analisar como os estudantes compreendem as noções de Espaço Vetorial.

3.3 Elementos da Teoria Antropológica do Didático – TAD

Neste capítulo, descrevemos algumas noções sobre a Teoria Antropológica do Didático – TAD desenvolvida por Yves Chevallard e colaboradores, teoria ao qual buscamos para fundamentar nossa análise e, assim, ir ao encontro de nosso objetivo que é analisar as relações pessoais de licenciandos em Matemática sobre a noção de Espaço Vetorial.

Lembremos que essa teoria é longa e aborda vários termos técnicos que fazem parte de sua própria linguagem, em que nosso estudo não se objetiva à totalidade dessa discussão. Desse modo, explanaremos apenas algumas noções fundamentais à teoria ao qual aproveitaremos em nosso trabalho, a saber: objeto, relação pessoal, pessoa e instituição.

Iniciaremos falando sobre o que é um *objeto*, para Chevallard (2009, p.1, tradução nossa) "é qualquer entidade, material ou imaterial, que existe para pelo menos um indivíduo". Dessa forma, vemos que qualquer ideia ou algo pode ser considerado um objeto, basta que exista para pelo menos um indivíduo, por exemplo, uma caneta, o pensamento sobre uma comida, a noção matemática sobre Espaço Vetorial, etc. Ou seja, "todo produto intencional da atividade humana, é um objeto" (CHEVALLARD, 2009, p.1, tradução nossa).

Com essa definição de objeto, conseguimos concluir que durante nossa escrita, diversos são os objetos abordados, porém, direcionaremos ao estudo do objeto noção de Espaço Vetorial através das compreensões de licenciandos em Matemática.

Continuando com as ideias fundamentais à TAD, traremos agora a noção de *relação pessoal de um indivíduo x com um objeto o*. Chevallard (2009) traz uma notação para determinar essa relação: $R(x;o)$. Essa notação representa todas as interações que um indivíduo x pode ter com um objeto o, isto é, como ele trabalha com o objeto, a forma de manipular, de sonhar, etc. Em suma, podemos afirmar que um objeto o existe para um indivíduo x se a relação pessoal de x com o é não vazia, denotada por: $R(x;o) \neq \emptyset$ (CHEVALLARD, 2009).

A terceira noção fundamental dessa teoria é a de *pessoa*. Chevallard (2009, p.1, tradução nossa) define como " a dupla formada por um indivíduo x e o sistema de suas relações pessoais $R(x;o)$, em um dado momento da história de x". Dessa maneira, entendemos por *pessoa* o resultado das relações pessoais vivenciadas, em algum instante, pelo indivíduo. Por exemplo, os licenciandos em Matemática têm relações pessoais com objeto aula, prova, atividade, etc. em sua graduação; os professores têm relações pessoais com objeto estudante, plano de aula, livro didático, etc. em sua profissão.

Conforme vamos vivendo, o sistema de relações pessoais de um indivíduo x se desenvolve, isto é, aqueles objetos que existiam inicialmente podem não existir mais, os objetos que não existiam podem começar a existir, e para alguns, a relação pessoal de x muda. Desse modo, o invariante é o indivíduo e quem muda é a pessoa (CHEVALLARD, 2009).

Conhecendo as ideias de relação pessoal e de pessoa, conseguimos concluir que quando um objeto o existe para uma pessoa x, então x conhece o. Além disso, Chevallard (2009) unifica as noções de objeto e relação pessoal e define a noção de *universo cognitivo de x* que simbolicamente é representado por: $UC(x) = \{(o, R(x; o))/R(x; o) \neq \emptyset\}$. Citando um exemplo, enquanto pessoa um estudante tem suas relações pessoais com estudo, universidade, transporte e outros objetos, a interação que o estudante tem com eles é que constitui o universo cognitivo.

Conforme Chevallard (2009), para esclarecer a formação e evolução do universo cognitivo de uma pessoa x é preciso entender outra noção fundamental, a da *instituição*. Ele diz que

> Uma instituição I é um dispositivo social "total", que certamente pode ter apenas uma extensão muito pequena no espaço social (existem "micro instituições"), mas que permite - e impõe - aos seus *sujeitos*, isto é, às pessoas x que vêm a ocupar ali as diferentes *posições* p oferecidas em I, pôr em jogo *maneiras de fazer e pensar próprias* - isto é, de *praxeologias*. (CHEVALLARD, 2009, p. 2, tradução e aspas nossas, itálicos do autor).

Ou seja, uma vez que os *indivíduos* ocupam suas diferentes *posições p* em *I,* tornam-se sujeitos das *instituições* (CHEVALLARD, 2009).

Destacamos que a instituição norteadora de nosso trabalho será a sala de aula de um componente curricular de AL num curso de formação de professores de matemática. Com isso, surge a indagação: "Como se constitui, e como muda o universo cognitivo $UC(x)$ de um indivíduo x? Como explicar esta *dinâmica cognitiva*?" (CHEVALLARD, 2009, p. 2, tradução nossa, itálicos do autor).

Dessa forma, inteiramos que através do encontro de um indivíduo x com objeto o nas instituições em que mora e onde x ocupa alguma posição p que o coloca em contato com o, a relação pessoal de x com o objeto o é modificada ou então é criada, caso não exista (CHEVALLARD, 2009). Assim, podemos dizer que todo *indivíduo* está sujeito à várias *instituições* desde o seu nascimento, e ainda, "é por seus *assujeitamentos*, pelo fato de ser o sujeito de uma multidão de instituições, que o indivíduo x é constituído em uma *pessoa*" (CHEVALLARD, 2009, p. 2, tradução nossa, itálicos do autor).

De acordo com Chevallard (ibid.), as noções discutidas sobre *objeto, pessoa e relação pessoal* servem como um esboço para teoria do conhecimento sobre indivíduos, ao qual também vale para instituições. Dessa maneira, “dado um *objeto o*, uma *instituição I* e uma *posição p* em *I*, uma *relação institucional* de um *objeto o* em uma *posição p* e denotada por $R_I(p; o)$ é a relação com o objeto *o* que deveria ser, idealmente, aquela dos sujeitos de *I* em posição *p*” (CHEVALLARD, 2009, p. 2, tradução nossa, itálicos do autor).

Com isso, Chevallard (ibid.) indica que existe uma busca de harmonia entre *relação pessoal de x* e *relação institucional em posição p*, para isso, ele utiliza o símbolo “≅” para indicar essa *conformidade*, assim, a *conformidade* da *relação pessoal de x* à *relação institucional em posição p* pode ser simbolicamente representada por: $R(x; o) \cong R_I(p; o)$. Em outras palavras, quer “dizer que *x* é um bom *sujeito* de *I* em posição *p*” (CHEVALLARD, 2009, p. 2, tradução nossa, itálicos do autor).

Em nossa pesquisa, ressaltamos a instituição sala de aula de um componente curricular de AL num curso de formação de professores de matemática em que os participantes da pesquisa (estudantes) estão sujeitos a ela. Para melhor entender como se cria ou modifica as relações pessoais em volta do objeto Espaço Vetorial através das compreensões de licenciandos em Matemática, precisamos entender a noção de *praxeologia*.

Conhecer essa noção de *praxeologia* é familiarizar-se na teoria, pois “está no coração da TAD” (CHEVALLARD, 2009, p. 4, tradução nossa). Sua estrutura praxeológica mais simples é a *pontual*, assim chamada pelo autor, e é constituído por

> um *tipo de tarefa T*, uma *técnica* τ, uma maneira de executar as tarefas *t* do tipo *T*, de uma *tecnologia* θ, um discurso raciocinado (*logos*) sobre a técnica (*tekhnê*) que se pretende tornar τ inteligível como um meio de realizar as tarefas do tipo *T* e por fim – mas não menos importante – um componente *teórico* Θ, que governa a tecnologia θ em si (e, portanto, todos os componentes da praxeologia) (CHEVALLARD, 2009, p. 4, tradução nossa, itálicos e parênteses do autor).

Esta praxeologia é denotada por: $[T/\ \tau\ /\ \theta/\ \Theta]$; e o “ponto” seria os tipos de tarefas T (CHEVALLARD, 2009). Ela é constituída em duas partes: “uma parte prático-técnica $\Pi = [T/\ \tau]$, ou *praxis* (que pode, se necessário, ser chamado de ‘saber-fazer’) e uma parte tecnológico-teórica $\Lambda = [\theta/\ \Theta]$, ou *logos* (que pode ser identificado como ‘saber’ no sentido comum do termo)” (CHEVALLARD, 2009, p. 4, tradução nossa, itálicos e parênteses do autor). Em suma, podemos dizer que a *praxeologia* pontual representa os tipos de tarefas (*T*) que são desenvolvidas e envolvem as técnicas (τ), tecnologias (θ) e teorias (Θ).

4 ELEMENTOS METODOLÓGICOS

Descrevemos, neste capítulo, o percurso metodológico que iremos seguir com o propósito de ir ao encontro de nosso objetivo, a relembrar: analisar a relação pessoal de licenciandos em Matemática sobre a noção de Espaço Vetorial.

Para tal, realizamos uma pesquisa de natureza qualitativa classificada como estudo de caso de acordo com Godoy (1995), e o nosso instrumento para coleta dos dados foi o questionário, ao qual aplicamos com estudantes do sétimo período do curso de Matemática-Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste – CAA que já cursaram a componente curricular Álgebra Linear. Escolhemos estudantes que já tenham cursado AL como campo de pesquisa pois AL foi a primeira componente curricular que deparamos em nosso curso que formalmente estudou as noções de Espaço Vetorial.

A natureza qualitativa de nossa pesquisa foi apoiada em que Godoy (1995) traz em seu trabalho

> Algumas características básicas identificam os estudos denominados “qualitativos”. Segundo esta perspectiva, um fenômeno pode ser melhor compreendido no contexto em que ocorre e do qual é parte, devendo ser analisado numa perspectiva integrada. Para tanto, o pesquisador vai a campo buscando “captar” o fenômeno em estudo a partir da perspectiva das pessoas nele envolvidas, considerando todos os pontos de vista relevantes. Vários tipos de dados são coletados e analisados para que se entenda a dinâmica do fenômeno (GODOY, 1995, p. 21, aspas do autor).

Assim, podemos perceber que numa pesquisa qualitativa necessitamos de uma participação ativa do pesquisador para ir em busca de dados com o intuito de melhor entender o fenômeno que se estuda, levando em consideração os pontos de vistas necessários para o desenvolvimento de sua pesquisa. De forma análoga, é o que buscamos em nosso trabalho, aplicamos questionários numa turma que já tinha cursado AL em busca de analisar as relações pessoais de licenciandos em Matemática, ou seja, seus pontos de vista, sobre a noção de Espaço Vetorial.

Escolhemos em nossa pesquisa, como dito, o questionário como instrumento de coleta de dados. Compactuamos com a definição de Gil (2008, p. 121), ao qual descreve como: “a técnica de investigação composta por um conjunto de questões que são submetidas a pessoas com o propósito de obter informações sobre conhecimentos, crenças, sentimentos, valores, interesses, expectativas, aspirações, temores, comportamento presente ou passado etc.”. Assim, aplicamos o questionário na intenção de que os alunos participantes conseguissem expor suas ideias frente à noção de Espaço Vetorial, no intuito de que pudéssemos analisar suas relações pessoais frente ao tema.

Sabemos que não existe apenas um caminho para se seguir na investigação de nosso objeto de estudo, entender quais suas contribuições, implicações, questionamentos, etc. Com isso, o caminho que seguiremos para tipificar a nossa pesquisa é o estudo de caso de acordo como Godoy (1995, p. 25) descreve: "o estudo de caso se caracteriza como um tipo de pesquisa cujo objeto é uma unidade que se analisa profundamente. Visa ao exame detalhado de um ambiente, de um simples sujeito ou de uma situação em particular". Nesse sentido, enfatizamos que o nosso objeto de estudo é a relação pessoal dos estudantes sobre a noção de Espaço Vetorial.

Em suma, o nosso trabalho se classifica como estudo de caso visto que temos como caso próprio a relação pessoal dos estudantes sobre a noção de Espaço Vetorial numa turma que já tenha cursado AL no curso de formação de professores de matemática de uma universidade pública.

Inicialmente, realizamos um questionário teste com dois estudantes de nosso curso que já tinham cursado AL e que não eram da turma em que gostaríamos de aplicar. Os resultados do questionário teste estavam dentro do esperado por nós, e assim, não fizemos alterações. O questionário em questão se encontra no Apêndice A. Tivemos dois momentos de aplicação, o primeiro, no dia 5 de setembro de 2019, se deu na disciplina de Estágio 2 em que aproveitamos sete questionários, e pela quantidade, resolvemos fazer uma nova aplicação. Realizamos então um segundo momento no dia 18 de setembro de 2019, ela aconteceu na disciplina de Metodologia do Ensino de Matemática 3, em que resultou na soma de dez questionários ao que tínhamos. Dessa forma, analisamos dezessete questionários ao todo.

4.1 Os participantes

Os estudantes cursam AL, normalmente, no sexto período do curso, assim, optamos por escolher a turma do sétimo período. Escolhemos essa turma pois em tese já teriam cursado a componente curricular AL e assim poderíamos aplicar nossos questionários e posteriormente fazer nossa análise. De fato, a maioria dos estudantes já tinham cursado e assim fizemos as aplicações dos questionários.

Iniciamos o questionário perguntando um pouco sobre o perfil dos discentes, como nome, curso ao qual estava matriculado e ano de ingresso na universidade. No quadro (Quadro 1) a seguir ilustramos esses dados.

Quadro 1 – Informações sobre o perfil dos participantes.

Nome fictício	Curso	Ano de ingresso
Estudante 1	Matemática-Licenciatura	2011
Estudante 2	Matemática-Licenciatura	2016
Estudante 3	Matemática-Licenciatura	2015
Estudante 4	Matemática-Licenciatura	2016
Estudante 5	Matemática-Licenciatura	2015
Estudante 6	Matemática-Licenciatura	2015
Estudante 7	Matemática-Licenciatura	2015
Estudante 8	Matemática-Licenciatura	2015
Estudante 9	Matemática-Licenciatura	2015
Estudante 10	Matemática-Licenciatura	2016
Estudante 11	Matemática-Licenciatura	2016
Estudante 12	Matemática-Licenciatura	2016
Estudante 13	Matemática-Licenciatura	2016
Estudante 14	Matemática-Licenciatura	2016
Estudante 15	Matemática-Licenciatura	2016
Estudante 16	Matemática-Licenciatura	2013
Estudante 17	Matemática-Licenciatura	2016

Fonte: O autor, 2019.

Por questões de abreviatura, daqui em diante, utilizaremos apenas E1 quando falarmos do Estudante 1, E2 para Estudante E2 e assim por diante até E17 para o Estudante 17.

4.2 O questionário

Nesta seção descreveremos as perguntas do nosso questionário e o objetivo de cada questão. Fizemos um quadro (Quadro 2) para ilustrar essas informações.

Quadro 2 – Questionário: perguntas e objetivos.

Perguntas	Objetivos
1. O que você entende por espaço vetorial?	Analisar quais as compreensões os estudantes têm sobre Espaço Vetorial. Se irá definir pelas propriedades,

	se entende por representações geométricas (de vetores no espaço), conjuntos ($M_{2x2}(\mathbb{R})$, por exemplo), ou outras representações.
2. Existe alguma diferença entre os elementos do $\mathbb{R}^3$ e $\boldsymbol{M_{2x2}}(\mathbb{R})$? Podemos chamar ambos de vetores? Justifique.	Identificar se os estudantes conseguem diferenciar os elementos dos espaços vetoriais (a saber: triplas ordenadas e matrizes de ordem 2, ambos com números reais) e saber que os elementos das matrizes ou de qualquer espaço vetorial, também podemos chamar de vetores.
3. O conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2 ($\boldsymbol{P_2}$) é um espaço vetorial? Justifique.	Analisar se os estudantes conseguem identificar um espaço vetorial e fazer sua justificativa para tal (se vão utilizar as propriedades algébricas ou não).
4. As operações feitas no $\mathbb{R}^2$ – soma de dois vetores e o produto de um vetor por um número (escalar) – podem ser realizadas no $\mathbb{R}^3$? E no $\boldsymbol{P_2}$? Porquê?	Perceber se os estudantes generalizam a ideia de que as operações - soma de dois vetores e o produto de um vetor por um número (escalar) - podem ser realizadas em qualquer espaço vetorial, obedecendo a sua definição e os elementos dos respectivos conjuntos. Acontece por todos serem espaços vetoriais.
5. Cite, sem precisar justificar, alguns exemplos de espaços vetoriais.	Conhecer alguns dos espaços vetoriais que os estudantes sabem/estudaram.

Fonte: O autor, 2019.

A seguir apresentaremos o capítulo sobre nossa análise e discussão dos dados coletados nesta pesquisa através dos questionários aplicados relacionando-os com os aspectos teóricos aqui já discutidos.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Nesta seção expomos a nossa análise das respostas dos 17 estudantes referente ao questionário (Apêndice A) aplicado e, em seguida, aquilo que conseguimos observar de acordo com as categorizações evidenciadas. Identificaremos as categorizações nas subseções deste capítulo.

Criamos 5 subseções em que cada uma se destinará para a análise de uma questão, seguindo o que esperamos para o enunciado, como já informado na metodologia. Enfatizamos que o intuito de nossa pesquisa não é aprofundar nos erros ou analisar quantitativamente os erros e acertos que tivemos no final da cada questão e, sim, o que nos diz cada resposta, para isso, fundamentamos nos elementos da TAD para verificar quais as relações pessoais (CHEVALLARD, 2009) os participantes da pesquisa possuem com o objeto Espaço Vetorial.

5.1 Análise da questão 1

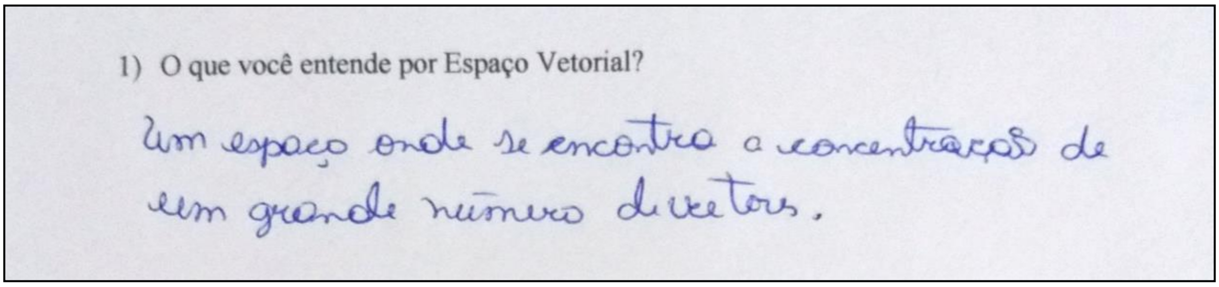
Iniciamos a análise do questionário destacando as repostas coletadas na primeira questão. Cabe relembrar que a questão de número 1 foi: "O que você entende por Espaço Vetorial?". Como afirmamos na metodologia nossa justificativa para essa questão foi analisar quais as compreensões os estudantes têm sobre Espaço Vetorial. Se irá definir pelas propriedades, se entende por representações geométricas (de vetores no espaço), conjuntos ($M_{2x2}(\mathbb{R})$, por exemplo), ou outras representações.

Diante das respostas dos 17 estudantes encontramos 6 categorias. As categorias que podemos identificar são: lugar geométrico que possui um conjunto de vetores, representação algébrica, representação por polinômios, espaço em 3D, não lembra e não sabe explicar/definir. Salientamos que classificamos 'em branco' como 'não sabe explicar/definir'.

Além disso, diferentemente das outras 4 questões, não quisemos classificar aqui as respostas como 'acertos' ou 'erros' por se tratar de uma pergunta subjetiva ao qual nos atentamos em identificar a relação pessoal do estudante com o objeto Espaço Vetorial.

Identificamos que 10 estudantes entendem que Espaço Vetorial é um lugar geométrico que possui um conjunto de vetores. Verificamos na figura 1, um extrato de um dos estudantes.

Figura 1: Extrato do E11 da questão 1.



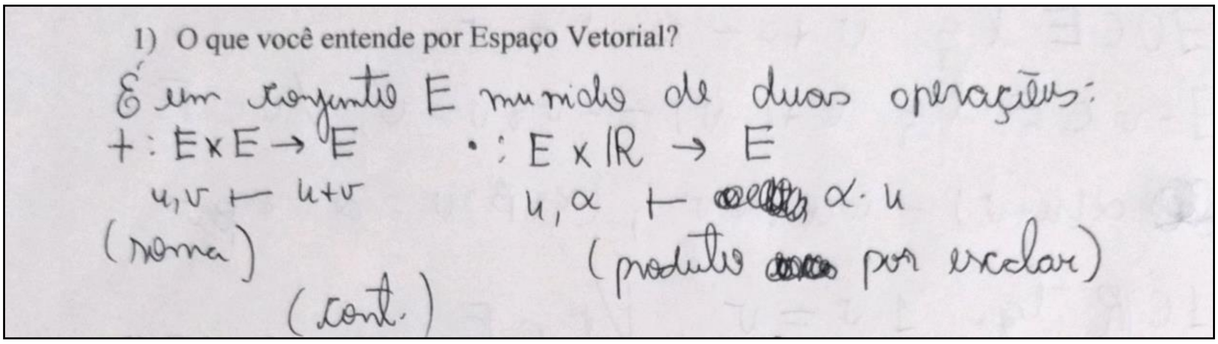
1) O que você entende por Espaço Vetorial?

Um espaço onde se encontra a concentração de um grande número di vetores.

Fonte: Dados da pesquisa.

Tivemos que 2 estudantes entendem Espaço Vetorial tentando definir a partir de uma representação algébrica. Observamos nas figuras 2 e 3 abaixo, um destes exemplos.

Figura 2: Extrato do E2 da questão 1.



1) O que você entende por Espaço Vetorial?

É um conjunto E munido de duas operações:

$+ : E \times E \to E$ $\quad$ $\cdot : E \times \mathbb{R} \to E$

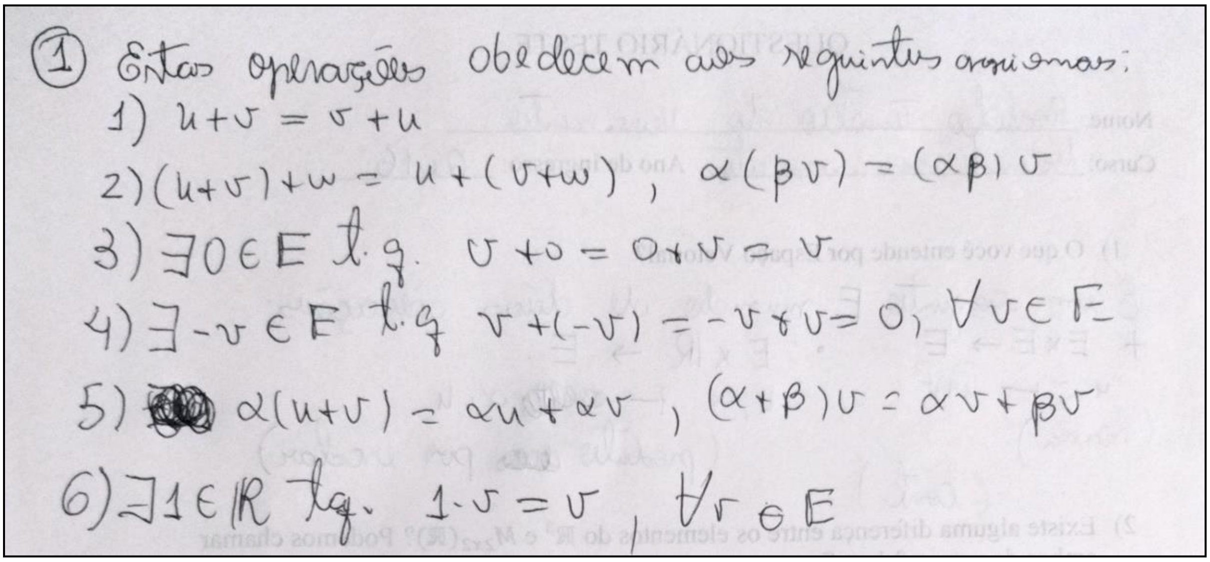
$u, v \mapsto u+v$ $\quad$ $u, \alpha \mapsto \alpha \cdot u$

(soma) $\quad$ (produto por escalar)

(cont.)

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 3: Extrato do E2 da continuação da questão 1.



1 Estas operações obedecem aos seguintes axiomas:

1) $u+v = v+u$

2) $(u+v)+w = u+(v+w)$, $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$

3) $\exists 0 \in E$ t.q. $v+0 = 0+v = v$

4) $\exists -v \in E$ t.q. $v+(-v) = -v+v = 0$, $\forall v \in E$

5) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$, $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$

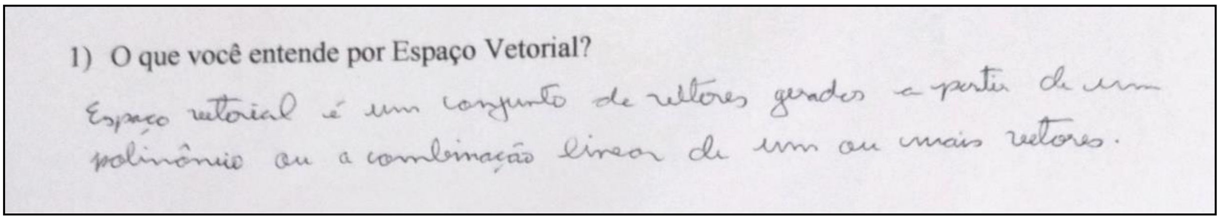
6) $\exists 1 \in \mathbb{R}$ t.q. $1 \cdot v = v$, $\forall v \in E$

Fonte: Dados da pesquisa.

Tais modos de tentar definir o espaço vetorial como exemplificado nas figuras 2 e 3 mostra uma preocupação do estudante em definir propriedades que compõe a noção de Espaço Vetorial.

Cabe destacar a outra categoria que identificamos, na qual 1 estudante entende Espaço Vetorial como uma representação por polinômios. Ilustramos através da Figura 4 este exemplo.

Figura 4: Extrato do E4 da questão 1.

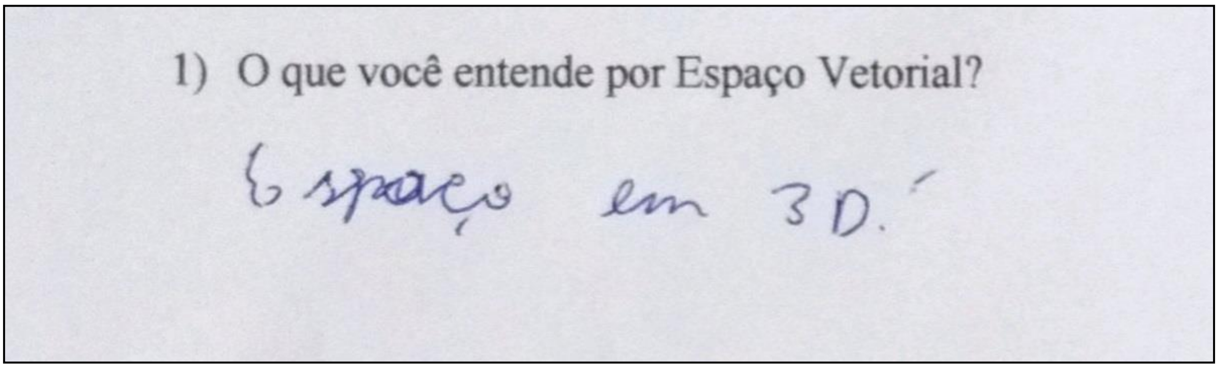

1) O que você entende por Espaço Vetorial?

Espaço vetorial é um conjunto de vetores gerados a partir de um polinômio ou a combinação linear de um ou mais vetores.

Fonte: Dados da pesquisa.

Poderíamos indicar a reposta do E4 também como algébrica, mas estávamos nesse caso mais preocupados com a representação utilizada, que nesse caso foi a língua natural, que remetia diretamente a noção de polinômio. Outra categoria identificada nas respostas da questão um é a que possui 1 estudante que entende Espaço Vetorial como um espaço em 3D. Mostramos através da figura 5 este exemplo.

Figura 5: Extrato do E6 da questão 1.


1) O que você entende por Espaço Vetorial?

É espaço em 3D.

Fonte: Dados da pesquisa.

Criamos uma classificação para essa resposta como ‘espaço em 3D’, pois essa foi simplesmente sua resposta. Acreditamos que tal resposta pode estar relacionada a palavra “espaço” e o estudante relacionou com um “espaço em 3d”, o que não faz muito sentido. Apesar de talvez o E6 esteja pensando em lugar geométrico, não classificamos como ‘lugar geométrico que possui vetores’.

Classificamos ainda 1 estudante como ‘não lembra’ e 2 estudantes como ‘não sabe explicar/definir’, totalizando assim, as 17 respostas analisadas.

Por meio da análise destas respostas observamos que as relações pessoais dos estudantes frente ao objeto Espaço Vetorial em sua maioria tendem a ser um lugar geométrico que possui um conjunto de vetores. Cabe destacar também a possibilidade de definição a partir da representação algébrica. Com isso, percebemos que ‘vetores no plano e no espaço’ possa a ser o conteúdo mais explorado durante a aprendizagem dos estudantes diante a noção Espaço Vetorial na componente curricular Álgebra Linear.

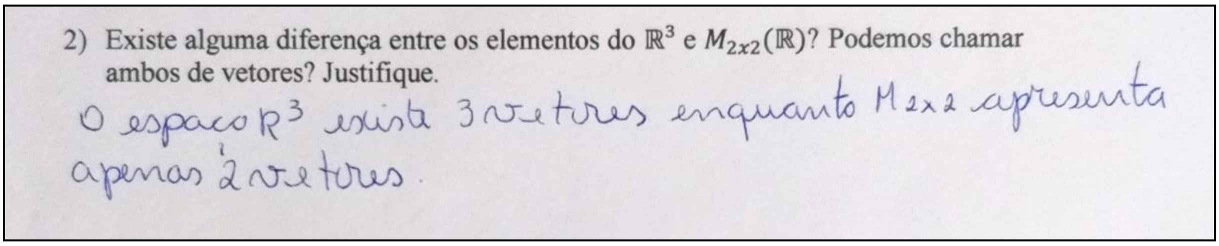
5.2 Análise da questão 2

Começamos a análise da segunda questão relembrando-a: “Existe alguma diferença entre os elementos do $\mathbb{R}^3$ e $M_{2x2}(\mathbb{R})$? Podemos chamar ambos de vetores? Justifique.”, ao qual sua justificativa foi identificar se os estudantes conseguem diferenciar os elementos dos espaços vetoriais (a saber: triplas ordenadas e matrizes de ordem 2, ambos com números reais) e saber que os elementos das matrizes ou de qualquer espaço vetorial, também podemos chamar de vetores.

De acordo com as 17 respostas dos estudantes conseguimos classificar em duas categorias, a saber: acertos e erros. Dos quais criamos três subcategorias para os ‘erros’. As subcategorias são: em branco, não soube identificar os elementos dos dois conjuntos e identifica corretamente os elementos de $\mathbb{R}^3$ mas não soube identificar os elementos de $M_{2x2}(\mathbb{R})$. Gostaríamos de destacar que classificamos ‘em branco’ como ‘erros’.

Dando destaque a categoria dos erros começamos identificando que 7 estudantes não souberam identificar os elementos dos dois conjuntos, que foi uma das subcategorias identificadas. Ilustramos tal situação por meio da figura 6.

Figura 6: Extrato do E3 da questão 2.

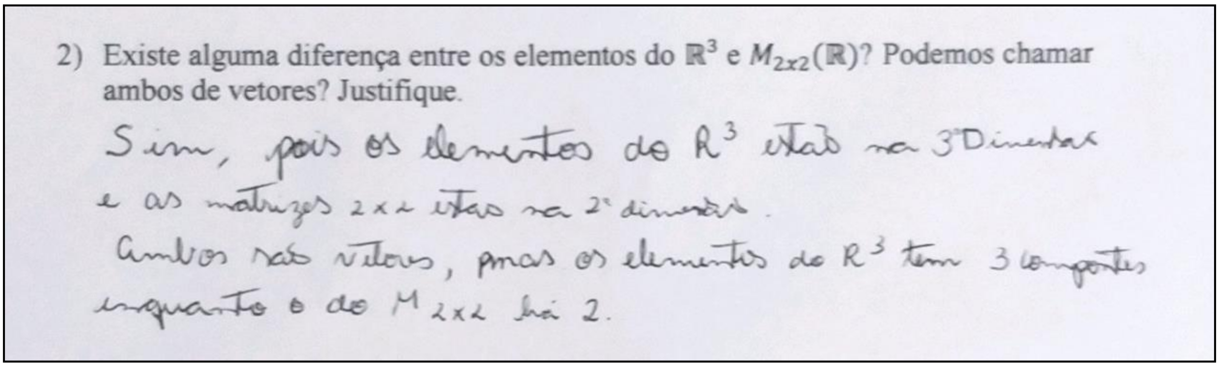

2) Existe alguma diferença entre os elementos do $\mathbb{R}^3$ e $M_{2x2}(\mathbb{R})$? Podemos chamar ambos de vetores? Justifique.

O espaço $\mathbb{R}^3$ existe 3 vetores enquanto M_{2x2} apresenta apenas 2 vetores.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na outra subcategoria do erro identificada, tivemos 8 estudantes que identificaram corretamente os elementos de $\mathbb{R}^3$ mas não souberam identificar os elementos de $M_{2x2}(\mathbb{R})$. A figura 7 ilustra um desses estudantes.

Figura 7: Extrato do E15 da questão 2.


2) Existe alguma diferença entre os elementos do $\mathbb{R}^3$ e $M_{2x2}(\mathbb{R})$? Podemos chamar ambos de vetores? Justifique.

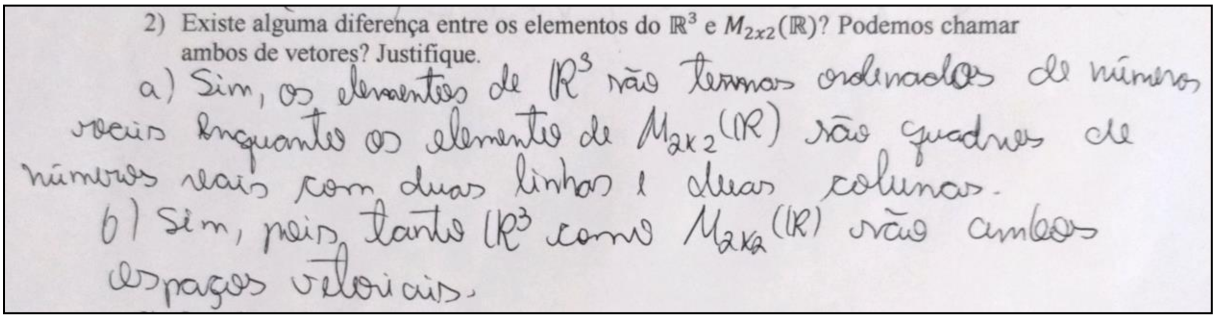
Sim, pois os elementos do R^3 estão na 3ª Dimensão
e as matrizes 2x2 estão na 2ª dimensão.
Ambos são vetores, mas os elementos do R^3 tem 3 componentes
enquanto o do M_{2x2} há 2.

Fonte: Dados da pesquisa.

Classificamos esse estudante desta forma pois suponhamos que o E15 sabe os elementos de $\mathbb{R}^3$ quando escreve "elementos de $\mathbb{R}^3$ tem 3 componentes" e "estão na 3ª Dimensão", mas não soube identificar os elementos do conjunto $M_{2x2}(\mathbb{R})$, uma vez que o discente diz que "as matrizes 2×2 estão na 2ª dimensão" e "os elementos do $\mathbb{R}^3$ tem 3 componentes enquanto o do M_{2x2} há 2". Desconfiemos que o E15 acredita que $M_{2x2}(\mathbb{R})$ representa um plano.

Ainda sobre a análise da questão dois, registramos apenas 1 estudante que respondeu satisfatoriamente à pergunta. A figura 8 traz este exemplo.

Figura 8: Extrato do E2 da questão 2.


2) Existe alguma diferença entre os elementos do $\mathbb{R}^3$ e $M_{2x2}(\mathbb{R})$? Podemos chamar ambos de vetores? Justifique.

a) Sim, os elementos de $\mathbb{R}^3$ são ternos ordenados de números
reais enquanto os elementos de $M_{2x2}(\mathbb{R})$ são quadros de
números reais com duas linhas e duas colunas.
b) Sim, pois tanto $\mathbb{R}^3$ como $M_{2x2}(\mathbb{R})$ são ambos
espaços vetoriais.

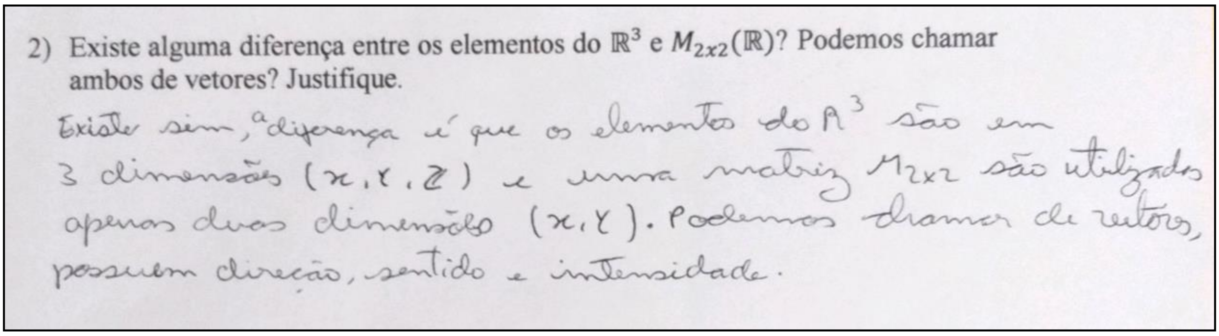
Fonte: Dados da pesquisa.

Dessa forma, totalizamos 1 estudante que respondeu de forma correta, 1 em branco e 15 estudantes que tiveram justificativas insuficientes para questão 2. Assim, classificamos como 1 'acerto' e 16 'erros' a segunda questão.

Observamos através desta segunda questão que os estudantes tiveram muita dificuldade em identificar os elementos dos dois conjuntos para assim diferenciá-los, em especial, os elementos das matrizes de ordem 2 com coeficientes reais ($M_{2x2}(\mathbb{R})$), em que dos 17 estudantes analisados nesta pesquisa apenas 1 soube identificar corretamente.

Vale ressaltar também que apenas 1 estudante reconhece que podemos chamar ambos os elementos dos conjuntos de vetores, os demais estudantes que responderam sobre esse questionamento (11 estudantes) restringiram a ideia de vetores para coordenadas cartesianas ou então vetores como representação física, com intensidade, sentido e direção, um exemplo pode ser visualizado na figura 9.

Figura 9: Extrato do E4 da questão 2.


2) Existe alguma diferença entre os elementos do $\mathbb{R}^3$ e $M_{2x2}(\mathbb{R})$? Podemos chamar ambos de vetores? Justifique.

Existe sim, a diferença é que os elementos do R^3 são em 3 dimensões (x, y, z) e uma matriz M_{2x2} são utilizados apenas duas dimensões (x, y). Podemos chamar de vetores, possuem direção, sentido e intensidade.

Fonte: Dados da pesquisa.

A seguir continuaremos com as análises, partiremos agora para as análises da questão de número três.

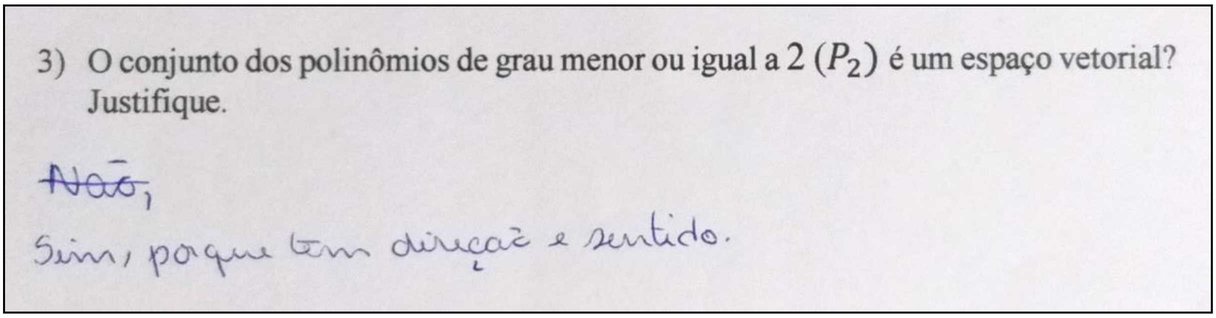
5.3 Análise da questão 3

Antes de iniciar a análise da questão 3, vamos retomar o seu enunciado: “O conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2 (P_2) é um espaço vetorial? Justifique.”, em que tivemos como justificativa analisar se os estudantes conseguem identificar um espaço vetorial e fazer sua justificativa para tal (e se iriam utilizar as propriedades algébricas ou não).

Através das 17 respostas classificamos em 2 categorias, são elas: acertos e erros. Criamos 4 subcategorias para as que foram categorizadas como erradas, são elas: não soube justificar, em branco, não lembra e não sabe. Classificamos ‘não soube justificar’ para os estudantes que tiveram sua justificativa inválida, ‘em branco’ para aqueles que não escreveram no local destinado a resposta, ‘não lembra’ para aqueles que assim indicaram em suas repostas e ‘não sabe’ para aqueles que assim indicaram. Assim, classificamos ‘não soube justificar’, ‘em branco’, ‘não lembra’ e ‘não sabe’ como ‘erros’.

Registramos em nossa pesquisa 8 estudantes que não souberam identificar o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2 (P_2) como Espaço Vetorial por não saberem justificar suas respostas. Classificamos aqui ‘não soube justificar’ para os estudantes que fugiram as noções esperadas pela questão 3. A figura 10 explicita um destes exemplos.

Figura 10: Extrato do E3 da questão 3.


3) O conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2 (P_2) é um espaço vetorial? Justifique.

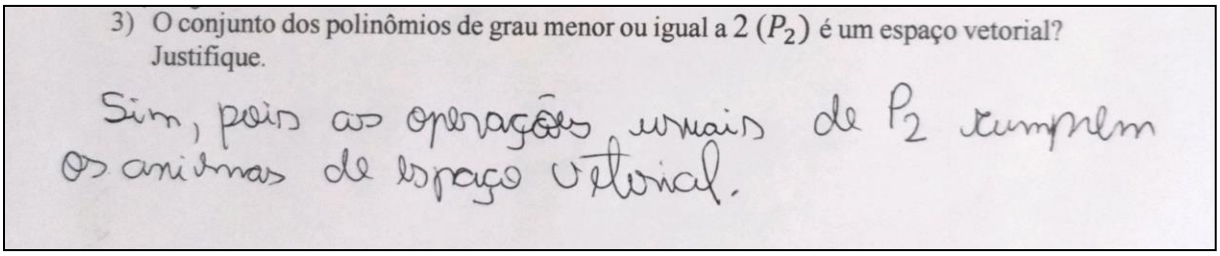
~~Não,~~

Sim, porque tem direção e sentido.

Fonte: Dados da pesquisa.

Assim como a questão anterior, só tivemos apenas 1 acerto para essa questão. A propósito, se trata do mesmo estudante que respondeu corretamente à questão 2. A figura 11 ilustra este exemplo.

Figura 11: Extrato do E2 da questão 3.


3) O conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2 (P_2) é um espaço vetorial? Justifique.

Sim, pois as operações usuais de P_2 cumprem os axiomas de espaço vetorial.

Fonte: Dados da pesquisa.

Classificamos ainda 3 estudantes como ‘em branco’, 2 estudantes como ‘não lembra’ e 3 estudantes como ‘não sabe’. Somando os 8 estudantes que classificamos como ‘não soube justificar’, 3 estudantes como ‘em branco’, 2 estudantes como ‘não lembra’ e 3 estudantes como ‘não sabe’, ao total, tivemos 16 estudantes classificados como ‘erros’ para questão 3. Registramos apenas 1 estudante como ‘acerto’.

Note que o único estudante que classificamos como ‘acerto’ ele não demonstra ou prova que P_2 é um Espaço Vetorial, isto é, os estudantes não precisavam destes recursos para responder satisfatoriamente a questão 3, observamos então outra dificuldade dos participantes desta pesquisa, a falta de fundamentos em seus argumentos para justificar se tal conjunto (P_2) é um Espaço Vetorial.

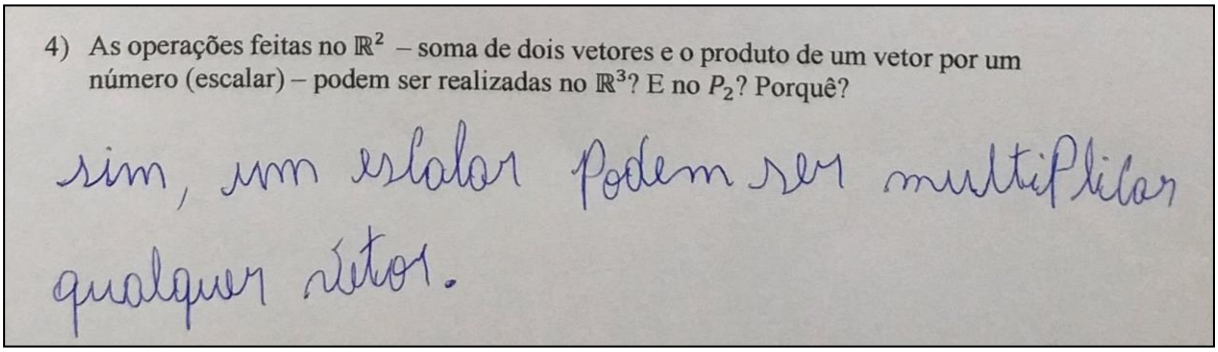
5.4 Análise da questão 4

Iniciamos a análise da questão 4 relembrando-a: “As operações feitas no $\mathbb{R}^2$ – soma de dois vetores e o produto de um vetor por um número (escalar) – podem ser realizadas no $\mathbb{R}^3$? E no P_2? Porquê?”, em que sua justificativa foi perceber se os estudantes generalizam a ideia de que as operações - soma de dois vetores e o produto de um vetor por um número (escalar) - podem ser realizadas em qualquer espaço vetorial, obedecendo a sua definição e os elementos dos respectivos conjuntos. Acontece por todos serem espaços vetoriais.

Através da análise dos 17 questionários verificamos que todas as questões poderiam ser categorizadas como erro. Dentro desta categoria identificamos 4 subcategorias, a saber: não soube justificar, operações do $\mathbb{R}^2$, em branco e não sabe. Classificamos como 'não soube justificar' para os estudantes que tiveram sua justificativa inválida, 'operações do $\mathbb{R}^2$' para os estudantes que acreditaram que as operações eram restritas do conjunto $\mathbb{R}^2$, 'em branco' para aqueles que não escreveram no local destinado a resposta e 'não sabe' para aqueles que responderam neste sentido. Assim, classificamos 'não soube justificar', 'operações do $\mathbb{R}^2$', 'em branco' e 'não sabe' como 'erros'. Infelizmente, não observamos acerto para essa questão.

Levando em consideração a subcategoria 'não soube justificar' contamos 10 estudantes. Aqui, classificamos 'não soube justificar' para os estudantes que justificaram inadequadamente ou que fugiram ao que esperávamos para questão 4. A figura 12 mostra um desses exemplos.

Figura 12: Extrato do E1 da questão 4.



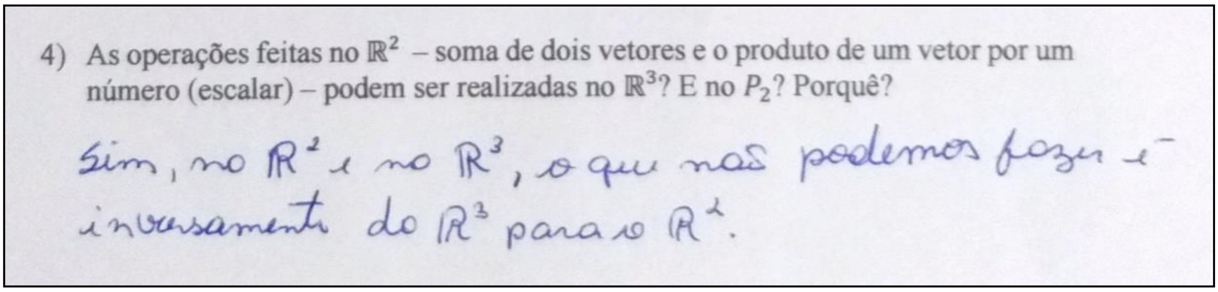
4) As operações feitas no $\mathbb{R}^2$ – soma de dois vetores e o produto de um vetor por um número (escalar) – podem ser realizadas no $\mathbb{R}^3$? E no P_2? Porquê?

sim, um escalar Podem ser multiplicar qualquer vetor.

Fonte: Dados da pesquisa.

Classificamos 3 estudantes em 'operações do $\mathbb{R}^2$' pois supomos que esses discentes acreditaram que as operações eram do conjunto $\mathbb{R}^2$ e não de um conjunto qualquer. Ilustramos por meio da figura 13 uma dessas respostas.

Figura 13: Extrato do E11 da questão 4.



4) As operações feitas no $\mathbb{R}^2$ – soma de dois vetores e o produto de um vetor por um número (escalar) – podem ser realizadas no $\mathbb{R}^3$? E no P_2? Porquê?

Sim, no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$, o que nós podemos fazer é inversamente do $\mathbb{R}^3$ para o $\mathbb{R}^2$.

Fonte: Dados da pesquisa.

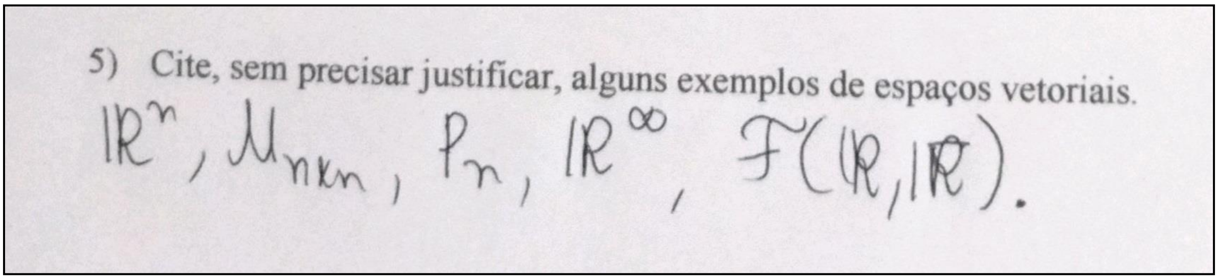
Registramos ainda 3 estudantes como ‘não sabe’ e 1 estudante como ‘em branco’. Infelizmente não contamos com acerto para essa pergunta, ao qual podemos observar nesta questão de número quatro outras possíveis dificuldades dos estudantes, por exemplo, a de generalizar as noções de operações realizadas em espaços vetoriais, como também, em se fundamentar para fazer uma justificativa plausível seguindo as noções dadas na questão.

5.5 Análise da questão 5

Antes de iniciar a análise da questão 5 vamos relembrar o seu enunciado: “Cite, sem precisar justificar, alguns exemplos de espaços vetoriais.”, em que sua justificava foi conhecer alguns dos espaços vetoriais que os estudantes sabem/estudaram.

Analisando as respostas dos 17 estudantes classificamos em 2 categorias, a saber: acertos e erros. Dos quais criamos 2 subcategorias para as respostas que classificamos como erradas, são elas: elementos de conjuntos e operações entre elementos. Contamos ‘em branco’ como ‘erros’. Tivemos 6 participantes classificados como ‘acertos’ e os outros 11 como ‘erros’ para questão 5. Entre os 6 estudantes que citaram exemplos de espaços vetoriais de forma correta tivemos os seguintes exemplos: $\mathbb{R}^n$, M_{nxn}, P_n, $\mathbb{R}^\infty$, $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, M_{2x2}, M_{3x3}, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$e $\mathbb{R}^3$. Na figura 14 ilustramos um desses estudantes.

Figura 14: Extrato do E2 da questão 5.

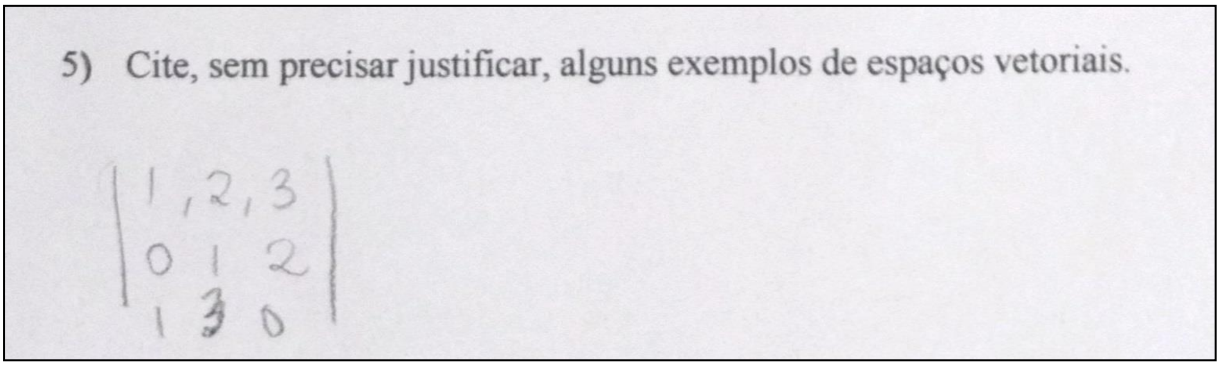

5) Cite, sem precisar justificar, alguns exemplos de espaços vetoriais.

$\mathbb{R}^n$, M_{nxn}, P_n, $\mathbb{R}^\infty$, $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Fonte: Dados da pesquisa.

Olhando para os 11 estudantes que classificamos como ‘erros’ pudemos observar que 6 citaram ‘elementos de conjuntos’ como exemplos de espaços vetoriais. Para mostrar um desses casos, trouxemos na figura 15 o recorte da questão 5 do E5 que citou um elemento da matriz de ordem 3 como exemplo.

Figura 15: Extrato do E5 da questão 5.



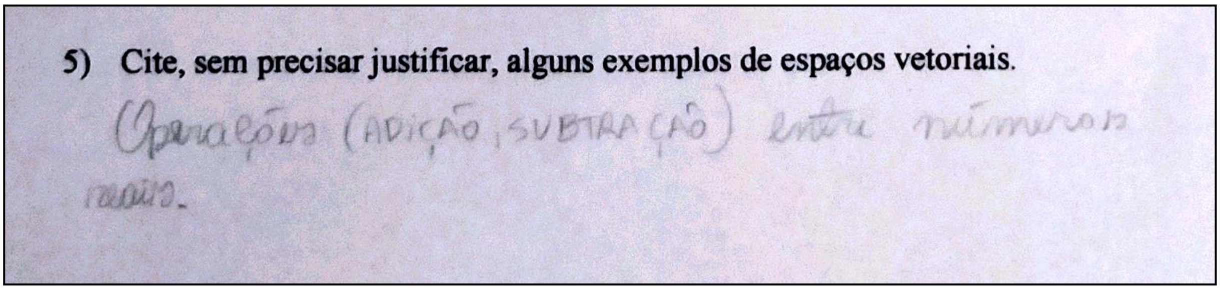
5) Cite, sem precisar justificar, alguns exemplos de espaços vetoriais.

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Ainda dentro dos 11 estudantes, registramos outros 4 estudantes classificados como ‘erros’ em ‘operações entre elementos’. Como o nome sugere, classificamos ‘operações entre elementos’ os estudantes que citaram como exemplo operações entre elementos de um conjunto. Ilustramos através da figura 16, um desses estudantes.

Figura 16: Extrato do E12 da questão 5.



5) Cite, sem precisar justificar, alguns exemplos de espaços vetoriais.

Operações (ADIÇÃO, SUBTRAÇÃO) entre números reais.

Fonte: Dados da pesquisa.

O estudante que falta para classificação ‘erros’ foi o que deixou em branco. Notamos que os dois conjuntos mais citados pelos estudantes como exemplo de Espaço Vetorial foram o $\mathbb{R}^2$ e o $\mathbb{R}^3$. Em que pode representar os espaços vetoriais mais estudados pelos estudantes, reforçando a ideia já discutida na análise da questão 1, em que o bloco de saber que talvez tenha sido mais explorado na aprendizagem dos participantes de nossa pesquisa ao estudar Espaço Vetorial foi ‘vetores no plano e no espaço’.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desenvolvemos esta pesquisa com o objetivo geral de analisar a relação pessoal de licenciandos em Matemática sobre a noção de Espaço Vetorial. Para tal, baseamos em dois objetivos específicos, a saber: identificar como os estudantes compreendem as noções e exemplos sobre Espaço Vetorial e identificar as representações de Espaço Vetorial utilizadas pelos estudantes, no intuito de responder nossa questão de pesquisa que é: Qual a compreensão dos estudantes de licenciatura em matemática sobre a noção de Espaço Vetorial?

Damos início as nossas considerações a respeito do que pudemos observar com as compreensões dos estudantes sobre as noções e exemplos de Espaço Vetorial. Pudemos notar através da análise da questão 2 uma dificuldade dos estudantes em diferenciar os elementos dos conjuntos $\mathbb{R}^3$ e $M_{2x2}(\mathbb{R})$, uma vez que apenas 1 estudante reconheceu de forma correta os elementos dos conjuntos. Reiteramos o que Coimbra (2008) relata em seu trabalho, a noção de vetor como elemento de um Espaço Vetorial é uma outra noção que os participantes desta pesquisa também mostraram dificuldades, visto que a maioria restringiu a noção de vetor como coordenadas cartesianas ou vetores como representação física, com intensidade, sentido e direção. Em que somente 1 estudante identificou que também podemos chamar de vetores os elementos dos espaços vetoriais. Mostrando que os estudantes podem ter suas noções de vetores (como elementos de espaços vetoriais) confundidas com as noções próprias de conjuntos.

Além disso, a falta de fundamentos nos argumentos dos participantes desta pesquisa que analisamos nas respostas da questão 3 e 4 nos chamou atenção de forma negativa. Dado que na questão de número três para justificar se P_2 era um Espaço Vetorial os discentes não precisavam provar ou demonstrar que P_2 é um Espaço Vetorial. Lembremos que apenas 1 dos 17 estudantes respondeu satisfatoriamente à questão 3 e nenhum dos participantes conseguiu responder de forma plausível a questão 4.

Considerando as noções que abordamos na questão 4 e comparando com as respostas dos participantes desta pesquisa pudemos notar uma carência em suas compreensões diante as noções de operações feitas em espaços vetoriais. Podemos citar como uma outra possível dificuldade dos estudantes: perceber se as operações ao qual a questão se tratava eram operações quaisquer em um Espaço Vetorial.

Referente ao que observamos com as representações de Espaço Vetorial dos participantes desta pesquisa é que suas relações pessoais frente ao objeto Espaço Vetorial tendem a representar um lugar geométrico que possui um conjunto de vetores. A qual conseguimos notar uma relação com as repostas da questão 5, em que registramos os conjuntos

$\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ como os exemplos de espaços vetoriais mais citados pelos os estudantes, o que pode nos mostrar que talvez estes tenham sidos os conjuntos que mais tenham estudados. Como também, nos induzindo a perceber que 'vetores no plano e no espaço' possa a ser o conteúdo mais explorado durante a aprendizagem dos estudantes diante a noção Espaço Vetorial na componente curricular Álgebra Linear.

Em suma, verificamos de acordo com as análises das 5 questões de nosso questionário que a maioria dos participantes da pesquisa tiveram dificuldades sobre as noções abordadas no mesmo, as quais podemos destacar: identificar os elementos dos conjuntos, diferenciar elementos de um conjunto e conjunto, entender a noção de vetor como elemento de um Espaço Vetorial, justificar se determinado conjunto é um Espaço Vetorial, generalizar as noções de operações realizadas em espaços vetoriais e, de maneira geral, fundamentos nos argumentos para justificarem suas respostas.

Assim, entendemos que a pessoa estudante de nossa pesquisa na instituição sala de aula de um componente curricular de AL num curso de formação de professores de matemática possa ter sua relação pessoal frente ao objeto Espaço Vetorial durante os seus estudos representada por conceitos além dos estudados nela, como as que classificamos 'lugar geométrico que possui um conjunto de vetores', devido a uma confusão originada mediante as noções de outros conteúdos da matemática não firmadas, como já mencionadas aqui.

Desta forma, diante o que conseguimos investigar através de nosso trabalho de conclusão de curso acreditamos ser possível desenvolver futuros estudos com outros problemas de pesquisa, em que nosso trabalho não atende à essas perspectivas. Com isso, levando em consideração os objetivos de cada pesquisa, evidenciamos alguns problemas de pesquisas que poderão ser feitos: Quais os principais obstáculos os estudantes enfrentam na aprendizagem em Álgebra Linear ou da noção Espaço Vetorial? O que os erros cometidos pelos estudantes podem nos dizer frente a noção de Espaço Vetorial? Os discentes iniciam a disciplina de Álgebra Linear com as noções necessárias para o seu desenvolvimento nela? Os alunos têm contato com as significações dos conceitos estudados em Álgebra Linear ou apenas ficam diante as abstrações da mesma? Os professores da componente curricular Álgebra Linear proporcionam momentos para que os estudantes tomem conhecimento da aplicabilidade das noções discutidas na mesma?

Dessa maneira, consideramos que pesquisas feitas com os problemas expostos acima podem contribuir para o ensino e aprendizagem de Álgebra Linear e, com isso, quem sabe entender melhor as dificuldades encontradas pelos estudantes durante o seu desenvolvimento, como também, ajudar a compreender as relações pessoais dos estudantes frente a noção de Espaço Vetorial.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Editora Harbra, 1980.

BORGES, M. F. Obstáculos encontrados pelos alunos na aprendizagem da Álgebra Linear. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte, **Anais...** Belo Horizonte: Universidade de Belo Horizonte, 2007. p. 1-16.

CARDOSO, V. C. **Ensino e aprendizagem de álgebra linear:** uma discussão acerca de aulas tradicionais, reversas e de vídeos digitais. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação. São Paulo, 2014.

CELESTINO, M. R. **Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear:** as pesquisas brasileiras na década de 90. 113 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2000.

CHEVALLARD, Y. **La TAD face au professeur de mathématiques**. 2009. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_TAD_face_au_professeur_de_mathematiques.pdf>. Acesso em: 27/04/2019.

CHIARI, A. S. S. Ensino de Álgebra Linear e Tendências em Educação Matemática: Relações possíveis. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba, **Anais...** Curitiba: Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2013. p. 1-15.

COIMBRA, J. L. **Alguns aspectos problemáticos relacionados ao ensino-aprendizagem da Álgebra Linear**. 2008. 77 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2008.

DORIER, J. L. A general outline of the genesis of vector space theory. **Historia mathematica**, 1995, vol. 22, no. 3, p. 227-261.

DORIER, J. L. Teaching Linear Algebra at University. **Proceedings of the ICM**, Beijing, 2002, vol. 3, p. 875-884.

FRATELLI, B. C.; MONTEIRO, M. S. **Dificuldades do Ensino e Aprendizagem de Álgebra Linear**. São Paulo, 2007. p. 1-4.

FURTADO, A. L. C.; CABRAL, M. A. P. Aprendizagem de Conceitos de Álgebra Linear. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife, **Anais...** Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2011. p. 1-12.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GODOY, A. S. Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. **Revista de Administração de Empresas**, São Paulo, v. 35, n. 3, p. 20-29, 1995.

LIMA, E. L. **Álgebra linear**. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

MORO, G.; VISEU, F. A. V.; SIPLE, I. Z. Ensino de Álgebra Linear: Traços de uma pesquisa. In: COLÓQUIO LUSO-BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO, 2., 2016, Joinville, **Anais...** Joinville: Centro de Ciências Tecnológicas, 2016. p. 243-256.

SILVA, J. M. L.; BARBOZA, A. L. C.; CUNHA, K. S. A avaliação da aprendizagem no curso de Matemática– Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 5., 2018, Olinda, **Anais...** Olinda: Centro de Convenções de Pernambuco, 2018. p. 1-10.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO

QUESTIONÁRIO

Nome: ____

Curso: ____________________________ Ano de ingresso: _____________

1) O que você entende por Espaço Vetorial?

2) Existe alguma diferença entre os elementos do $\mathbb{R}^3$ e $M_{2x2}(\mathbb{R})$? Podemos chamar ambos de vetores? Justifique.

3) O conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2 (P_2) é um espaço vetorial? Justifique.

4) As operações feitas no $\mathbb{R}^2$ – soma de dois vetores e o produto de um vetor por um número (escalar) – podem ser realizadas no $\mathbb{R}^3$? E no P_2? Porquê?

5) Cite, sem precisar justificar, alguns exemplos de espaços vetoriais.