



Universidade Federal de Pernambuco  
Centro Acadêmico do Agreste  
Núcleo de Formação Docente  
Curso de Física–Licenciatura

Luiz Fernando Alves de Melo

**ANÁLISE DIDÁTICA E EXPERIMENTAL DE LANÇAMENTOS DE PROJÉTEIS  
COM RESISTÊNCIA DO AR COM A UTILIZAÇÃO DE BRINQUEDOS**

Caruaru  
2019

Luiz Fernando Alves de Melo

**ANÁLISE DIDÁTICA E EXPERIMENTAL DE LANÇAMENTOS DE PROJÉTEIS  
COM RESISTÊNCIA DO AR COM A UTILIZAÇÃO DE BRINQUEDOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Física–Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Física.

**Área de concentração:** Física

**Orientador:** Augusto Cesar Moreira

**Coorientador:** Gustavo Camelo Neto

Caruaru  
2019

Catálogo na fonte:  
Bibliotecária - Paula Silva - CRB/4 - 1223

M528a      Melo, Luiz Fernando Alves de.  
                Análise didática e experimental de lançamento de projéteis com resistência  
                do ar com a utilização de brinquedos. / Luiz Fernando Alves de Melo. - 2019.  
                33 f.; il.: 30 cm.

                Orientador: Augusto Cesar Moreira.  
                Coorientador: Gustavo Camelo Neto.  
                Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de  
                Pernambuco, CAA, Licenciatura em Física, 2019.  
                Inclui Referências.

                1. Projéteis.    2. Física – Estudo e ensino.    3. Aprendizagem.    4. Experimentos.  
                5. Brinquedos.    I. Moreira, Augusto Cesar (Orientador).    II. Camelo Neto, Gustavo  
                (Coorientador).    III. Título.

CDD 371.12 (23. ed.)

UFPE (CAA 2019-323)

Luiz Fernando Alves de Melo

**ANÁLISE DIDÁTICA E EXPERIMENTAL DE LANÇAMENTOS DE PROJÉTEIS  
COM RESISTÊNCIA DO AR COM A UTILIZAÇÃO DE BRINQUEDOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Física–Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Física.

Aprovada em: 17 de dezembro de 2019

**BANCA EXAMINADORA**

---

**Gustavo Camelo Neto** (Coorientador)  
Núcleo Interdisciplinar de Ciências Exatas e da  
Natureza

---

**João Eduardo Ramos**  
Núcleo de Formação Docente

---

**João Francisco Liberato de Freitas**  
Núcleo Interdisciplinar de Ciências Exatas e da  
Natureza

Caruaru  
2019

*Dedico este trabalho aos meus pais, que mesmo não possuindo uma formação acadêmica, muito menos uma condição financeira boa, sempre me deram todo o apoio para que eu pudesse ter a oportunidade de estudar e ter um futuro que eles jamais sonharam para nossa família. Pai, mãe, Amo vocês.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço às minhas tias por todo o suporte dado durante esse período, à minha namorada, que embora conheça há pouco tempo já faz parte da minha vida e planos futuros, aos meus professores pelos ensinamentos, em especial ao Professor Augusto, que teve a paciência para estar comigo neste trabalho bem como em muitos outros, ao Professor Gustavo, que mesmo com todos os afazeres dedicou um pouco do seu tempo e sabedoria para finalizarmos este trabalho, e aos meus amigos, sem vocês o caminho teria sido muito mais tortuoso. Agradeço, também, à Escola Alexandrino da Rocha, onde o experimento foi realizado e aos estudantes do terceiro ano do ensino médio de 2019, que participaram da experiência de forma ativa e entusiasmada.

## RESUMO

O estudo do lançamento de projéteis no ensino médio está baseado numa modelagem teórica simplificada, onde o projétil é abstraído em uma partícula sem dimensões e não estando sujeito à interação com o meio onde se propaga, ou seja, não é considerado o efeito resistivo do ar. Neste trabalho, é realizada uma revisão dos modelos teóricos sem e com resistência do ar para o lançamento de uma partícula. No modelo com resistência do ar é levada em consideração uma força resistiva proporcional e oposta à velocidade vetorial e as equações do movimento são resolvidas exatamente, em particular, uma expressão exata para o alcance dos projéteis em termos do ângulo de lançamento é obtida. É proposta, também, uma análise experimental de baixo custo do problema do lançamento de projéteis em sala de aula, onde é mostrado aos estudantes qual a relação entre o ângulo de lançamento e o alcance de projéteis com diferentes formas e massas, levando em consideração o efeito da resistência viscosa do ar. A comparação dos resultados experimentais com as previsões teóricas baseadas nos modelos simplificados evidencia o efeito da resistência do ar e da forma geométrica dos projéteis no movimento. A aprendizagem dos estudantes através da metodologia experimental e do método tradicional baseado na metodologia do modelo teórico simplificado é estimada através da aplicação de dois questionários, evidenciando uma substancial melhoria na aprendizagem significativa através do primeiro método.

Palavras-chave: Lançamento de projéteis. Resistência do ar. Aprendizagem significativa. Modelos experimentais. Brinquedos.

## ABSTRACT

The study of projectile launching in Brazilian high school is based on simplified theoretical modeling, where the projectile is abstracted in a dimensionless particle and not subject to interaction with the environment where it propagates, ie, the resistive effect of air is not considered. In this work, a review of the theoretical models with and without air resistance for a particle launch is performed. In the air-resistance model, a resistive force, proportional and opposite to the vectorial velocity is taken into account and the equations of motion are solved exactly, in particular, an exact expression for the projectile range in terms of the launch angle is obtained. It is also proposed a low-cost experimental analysis of the projectile launching problem in the classroom, where are shown to the students the relationship between the launch angle and the range of projectiles with different shapes and masses, taking into account the effect of viscous air resistance. A comparison of experimental results with theoretical predictions based on simplified models shows the effect of air resistance and the geometric shape of projectiles on movement. Student learning through the experimental methodology and the traditional method based on the simplified theoretical model methodology is estimated by applying two questionnaires, showing a substantial improvement in significant learning through the first method.

**Keywords:** Projectile launching. Air-resistance. Significant learning. Experimental modelling. Toys.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Trajetórias de três projéteis lançados com velocidades iniciais de mesmo módulo $v_0$ e com $y_0 = 0$ , mas em três diferentes ângulos, $30^\circ$ (vermelho), $45^\circ$ (preto), $60^\circ$ (azul). . . . .	14
Figura 2 – Alcance dos projéteis em função do ângulo de lançamento, quando lançados com velocidades de mesmo módulo. . . . .	14
Figura 3 – Coordenadas correspondentes à altura máxima em função do ângulo de lançamento, considerando $y_0 = 0$ . . . . .	15
Figura 4 – Trajetórias de três projéteis idênticos lançados com velocidades iniciais de mesmo módulo $v_0$ e com $y_0 = 0$ , em três diferentes ângulos, $30^\circ$ (vermelho), $45^\circ$ (preto), $60^\circ$ (azul) e sujeitos à força de arrasto linear. . . . .	18
Figura 5 – Trajetórias de projéteis lançados com velocidades iniciais idênticas, em módulo e direção, e com $y_0 = 0$ , mas sujeitos a diferentes forças de resistência linear. . . . .	19
Figura 6 – Alcance do projétil sujeito à força de arrasto linear em função do ângulo de lançamento. . . . .	20
Figura 7 – Alcance de projéteis sujeitos à diferentes forças de arrasto linear em função do ângulo de lançamento. . . . .	20
Figura 8 – Suporte de madeira com escala angular e plataforma ajustável. . . . .	21
Figura 9 – Lançador de brinquedo e projéteis utilizados no experimento. . . . .	21
Figura 10 – Alcance médio de projéteis “bolinha” lançados com diferentes ângulos de lançamento. . . . .	22
Figura 11 – Alcance médio dos projéteis assimétricos: “Dardo de Borracha” e “Dardo com Ventosa”. . . . .	23
Figura 12 – Resultado do questionário 1, realizado com 37 alunos do 3º do ensino médio da Escola Alexandrino da Rocha. . . . .	24
Figura 13 – Resultado do questionário pós-teste, realizado com 25 alunos do 3º do ensino médio da Escola Alexandrino da Rocha. . . . .	26

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>MODELOS TEÓRICOS . . . . .</b>	<b>12</b>
<b>2.1</b>	<b>Modelo sem Resistência do Ar . . . . .</b>	<b>12</b>
<b>2.2</b>	<b>Modelo com Resistência Linear . . . . .</b>	<b>16</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA EXPERIMENTAL . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>4</b>	<b>EFEITO PEDAGÓGICO DA METODOLOGIA EXPERIMENTAL . .</b>	<b>24</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS . . . . .</b>	<b>27</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>29</b>
	<b>APÊNDICE A – MODELO SEM RESISTÊNCIA DO AR COMO CASO PARTICULAR DO MODELO COM RESISTÊNCIA DO AR . . . . .</b>	<b>30</b>
	<b>APÊNDICE B – CÁLCULO EXATO DO TEMPO DE VÔO COM RE- SISTÊNCIA DO AR . . . . .</b>	<b>31</b>
	<b>ANEXO A – QUESTIONÁRIO 1 . . . . .</b>	<b>32</b>
	<b>ANEXO B – QUESTIONÁRIO 2 . . . . .</b>	<b>33</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Durante o ensino médio, nossos professores de Física, em sua maioria, apresentam-nos diversos tipos de movimento; contudo, é sempre mencionado que o efeito da resistência provocada pelo ar não deve ser considerada. Perguntamos-nos, porém, por quê? Uma vez que a interação com o ar está agindo ativamente em todos os movimentos em nosso dia a dia. Nosso mundo não é ideal, na verdade ele é bastante complexo de ser estudado e como veremos, ao adicionarmos forças resistivas em nossos modelos, essa complexidade se torna evidente. No caso do ensino médio, mesmo a adição de um pequeno coeficiente de resistência do ar já é capaz de tornar impraticável o estudo do modelo matemático teórico. É, inclusive, notável que mesmo nos cursos superiores de Física, o estudo do movimento com resistência do ar não é introduzido até o terceiro ou quarto ano nos cursos de bacharelado, podendo mesmo não ser de forma alguma nos cursos de licenciatura. É possível, entretanto, adicionar uma análise mais realista do movimento através de recursos de animação numérica ou demonstrações experimentais. É compreensível que a análise matemática dos modelos teóricos envolvendo o movimento com resistência do ar não é fácil e, portanto, não está ao alcance dos estudantes do ensino médio, nem mesmo de estudantes de Física dos anos iniciais do curso superior. Por isso, não são encontradas em nossas escolas nem nos livros didáticos. O pior legando, entretanto, é ficar a impressão de que apenas modelos sem as forças resistivas sejam os únicos tratados pela Física; muitos livros e professores nem mencionam essa possibilidade, deixando assim, com que o estudante tome como verdade modelos não resistivos em suas visões de mundo.

O modelo para o movimento de um projétil sem a resistência do ar pode ser desenvolvido à partir das *leis de Newton* (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016; THORNTON; MARION, 2011) sendo, normalmente, introduzido no contexto da cinemática vetorial. O modelo, entretanto, não é tratado vetorialmente no ensino médio, mas sim através da ideia de composição do movimento, ou seja, como as dimensões horizontal e vertical são independentes, é feita uma separação artificial do movimento, como apenas o peso do projétil é considerado, não há componente horizontal para a aceleração, logo, a componente horizontal da posição do projétil se comporta como a de uma partícula que se desloca em movimento retilíneo e uniforme (MRU) na horizontal. Por outro lado, a ação do peso impõe uma aceleração vertical e para baixo, dessa forma, a componente vertical da posição do projétil se comporta como a de uma partícula que se desloca em movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV) na vertical. Assim, são obtidas, a partir do conhecimento prévio das equações horárias para o MRU e para o MRUV, um par de equações paramétricas para as componentes  $x(t)$  e  $y(t)$  para o vetor posição do projétil em duas dimensões. O estudante é, portanto, orientado a compreender o movimento em duas dimensões como a composição de dois movimentos independentes em uma dimensão. Este método, pode, no entanto, confundir o estudante a pensar que o comportamento das componente é independente, o que não é verdade, pois as componente devem refletir a posição do móvel, isso

fica evidente apenas quando o tempo é eliminado, encontrando-se uma relação parabólica entre  $y$  e  $x$  (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016). O modelo para o movimento sob resistência viscosa do ar, entretanto, não compartilha a mesma simplicidade. Em sua formulação mais simples, ou seja, ainda simplificada, a resistência do ar é introduzida como uma força proporcional à velocidade do projétil, assim a aceleração se torna função da velocidade, inviabilizando uma resolução da equação do movimento (THORNTON; MARION, 2011), baseada apenas nos conhecimentos de matemática do ensino médio.

Um dos principais problemas enfrentados no Ensino de Física está relacionado com a obtenção de uma *aprendizagem significativa* pelos estudantes. A teoria da aprendizagem significativa é introduzida formalmente por Ausubel (AUSUBEL, 1963; AUSUBEL, 1968; MOREIRA, 2009), como um processo pelo qual estudantes conseguem compreender um novo conhecimento, relacionando-o com aquilo que já é conhecido, de maneira não-literal; para tanto, é importante a postura de como o novo conhecimento é apresentado.

A essência do processo da aprendizagem significativa está, portanto, no relacionamento não-arbitrário e substantivo de ideias simbolicamente expressas a algum aspecto relevante da estrutura de conhecimento do sujeito, isto é, a algum conceito ou proposição que já lhe é significativo e adequado para interagir com a nova informação. (MOREIRA, 2009)

Para tanto, é necessário interagir de forma mais substancial nas relações de ensino-aprendizagem em sala de aula. O ensino deve ser dinâmico, menos mecanizado e proporcionar uma relação de maior significado conceitual. Utilizamos, portanto, este princípio para introduzir os conceitos sobre movimento em duas dimensões, particularmente sobre o lançamento de projéteis, através de uma metodologia construtivista, utilizando um procedimento experimental de baixo custo, de maneira dinâmica e lúdica.

Será feito um paralelo entre o modelo teórico sem resistência do ar e o resultado do experimento aqui proposto, à luz do modelo com resistência do ar. Análises gráficas e computacionais serão utilizadas, mostrando em quais casos o modelo ultra-simplificado sem resistência do ar se adapta bem ao experimento e em quais casos o modelo falha consideravelmente. Uma análise da aprendizagem significativa é, também, realizada com estudantes do ensino médio submetidos à metodologia experimental.

Esta monografia está organizada na seguinte forma: no capítulo 2 serão introduzidos os modelos teóricos com e sem resistência do ar, sendo discutidos suas principais características e as principais previsões teóricas. No capítulo 3 a metodologia experimental é apresentada, juntamente com o equipamento utilizado; são apresentados, também, os dados obtidos para o alcance dos projéteis, especificamente para o alcance em termos do ângulo de lançamento. No capítulo 4 é apresentado o efeito da metodologia de ensino experimental na aprendizagem dos estudantes do terceiro ano do ensino médio. Finalmente, no capítulo 5 são apresentadas nossas conclusões e quais nossas perspectivas para a continuação deste trabalho.

## 2 MODELOS TEÓRICOS

O modelo padrão estudado no ensino médio não considera as dimensões do projétil nem os efeitos da resistência do ar ao movimento. Este modelo ultra-simplificado é necessário, no entanto, por razões didáticas, uma vez que as técnicas matemáticas necessárias para se analisar modelos mais realistas, com resistência viscosa do ar, momento de inércia, rotação são desafiadoras mesmo para cursos de nível superior, de fato, algumas das técnicas envolvendo movimento viscoso e hidrodinâmica só são abordados em cursos de pós-graduação específicos. Nesta seção discutiremos, rapidamente, o modelo de partícula sem resistência do ar e o modelo de partícula com resistência viscosa linear, somente para ilustrar o considerável aumento na dificuldade e obter o resultado para o alcance do projétil com e sem resistência para comparação com os resultados experimentais.

### 2.1 Modelo sem Resistência do Ar

O modelo para lançamento de partícula desprezando-se a resistência do ar consiste em considerar apenas o efeito da aceleração da gravidade sobre a partícula. Por se tratar de uma partícula, não há qualquer outro grau de liberdade, apenas os graus de liberdade de translação. O movimento é, também, considerado em apenas duas dimensões, consideração justificada com base no teorema da conservação do momento angular. Assim, pela segunda lei de Newton,

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g}; \quad (2.1)$$

pois a única força atuando na partícula é a força peso,  $\vec{P} = m\vec{g}$ , portanto,

$$\vec{a} = \vec{g}.$$

Considerando um sistema de referência com eixos  $x$  e  $y$  na horizontal e vertical, respectivamente, e orientando o eixo  $y$  para cima, teremos,

$$a_x = 0; \quad (2.2)$$

$$a_y = -g; \quad (2.3)$$

pois  $\vec{g}$  é vertical e para baixo. Assim, de acordo com (2.2) a componente horizontal da velocidade será constante, portanto,

$$x(t) = x_0 + v_x t; \quad (2.4)$$

onde  $v_x$  será a componente da velocidade horizontal constante, definida a partir da condição inicial. Já, de acordo com (2.3), a componente vertical da velocidade varia uniformemente,

$$v_y(t) = v_{0y} - g t; \quad (2.5)$$

donde,

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2; \quad (2.6)$$

Um mal entendido frequente é considerar que a trajetória da partícula é descrita pela equação (2.6) apenas, quando, na verdade, deve-se considerar o conjunto de equações paramétricas (2.4) e (2.6). Para encontrar a equação da trajetória, as equações (2.4) e (2.6) podem ser utilizadas para eliminar o parâmetro temporal, conduzindo a relação  $y(x)$  entre a altura do projétil ( $y$ ) e sua posição horizontal ( $x$ ),

$$y(x) = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_x}(x - x_0) - \frac{g}{2v_x^2}(x - x_0)^2. \quad (2.7)$$

Podemos simplificar a equação (2.7) posicionando a origem do referencial horizontal no ponto de lançamento do projétil, de modo que  $x_0 = 0$ . Além disso, podemos admitir que o projétil é lançado com velocidade de módulo  $v_0$  numa direção que forma um ângulo  $\theta$  com a horizontal assim,

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \theta; \quad (2.8)$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta; \quad (2.9)$$

Usando (2.8), (2.9) e  $x_0 = 0$  em (2.7) teremos,

$$y(x) = y_0 + \operatorname{tg} \theta x - \frac{g \sec^2 \theta}{2v_0^2} x^2. \quad (2.10)$$

A equação (2.10) representa a trajetória do projétil, evidenciando o comportamento parabólico da altura em relação ao deslocamento horizontal, além da dependência dos parâmetros da parábola com o ângulo de lançamento  $\theta$ . A figura 1 mostra a trajetória para três lançamentos, todos lançados com velocidades de mesmo módulo,  $v_0$ , e da mesma altura inicial,  $y_0 = 0$ ; contudo, com diferentes ângulos de lançamento,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ . Observe que os projéteis lançados com ângulos complementares, no caso,  $30^\circ$  e  $60^\circ$  possuem o mesmo alcance, ou seja, caem no mesmo lugar, enquanto o projétil lançado com o ângulo de  $45^\circ$  atinge uma distância maior.

Tomando  $y(R) = 0$  em (2.10) obtemos o alcance  $R$  do projétil, ou seja, o deslocamento vertical para o qual o projétil retorna ao referencial da altura, ou seja, ao chão,

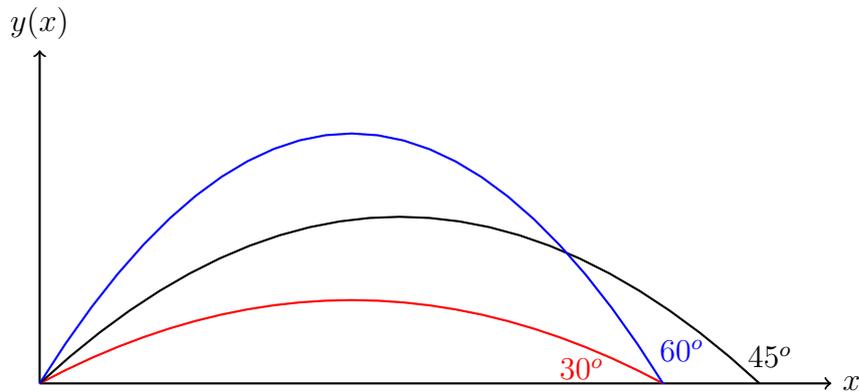
$$R = \frac{v_0 \sin \theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta + 2gy_0}}{g} v_0 \cos \theta;$$

no caso em que o projétil é lançado de  $y_0 = 0$ , teremos,

$$R(\theta) = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}. \quad (2.11)$$

O alcance especificado na equação (2.11), como função do ângulo de lançamento, pode ser observado na figura 2. O alcance máximo é obtido quando  $\theta = 45^\circ$ , de acordo com o fato de que  $\sin(90^\circ) = 1$ ; observe, também, que o alcance é simétrico em torno de  $45^\circ$ , isso porque

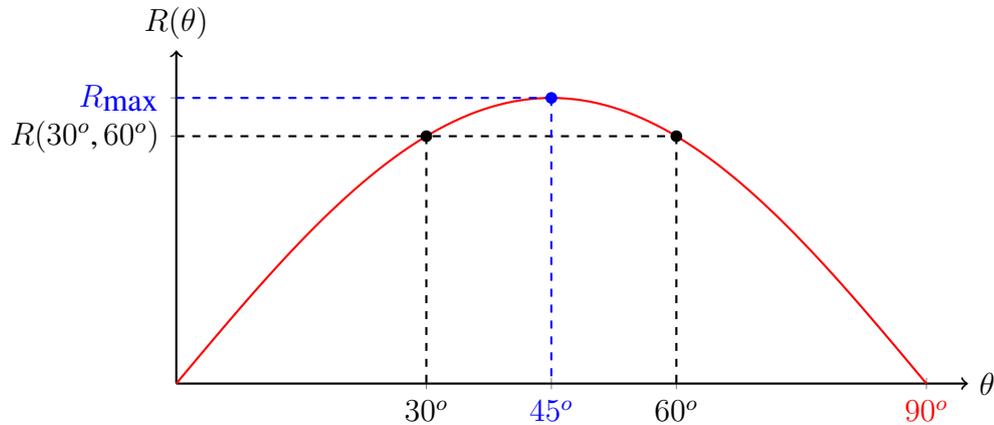
Figura 1 – Trajetórias de três projéteis lançados com velocidades iniciais de mesmo módulo  $v_0$  e com  $y_0 = 0$ , mas em três diferentes ângulos,  $30^\circ$  (vermelho),  $45^\circ$  (preto),  $60^\circ$  (azul).



a função seno é simétrica em relação ao ângulo de  $90^\circ$ , no intervalo de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ . O alcance máximo será, portanto,

$$R_{\max} = \frac{v_0^2}{g}. \quad (2.12)$$

Figura 2 – Alcance dos projéteis em função do ângulo de lançamento, quando lançados com velocidades de mesmo módulo.



É curioso o fato de que o alcance do projétil seja o mesmo para ângulos complementares, embora as alturas máximas atingidas não sejam as mesmas, como observado na figura 1, onde é notável que a altura máxima atingida pelo projétil lançado a um ângulo de  $60^\circ$  é maior que a do projétil lançado a um ângulo de  $30^\circ$ . De fato, podemos obter a altura máxima considerando o ponto onde a componente vertical da velocidade se anula. Eliminando o tempo entre as equações (2.4) e (2.5), tomando  $x_0 = 0$ , teremos,

$$v_y(x) = v_0 \sin \theta - \frac{g}{v_0 \cos \theta} x,$$

assim, para  $v_y = 0$ ,

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin(2\theta), \quad (2.13)$$

portanto, a altura máxima será,

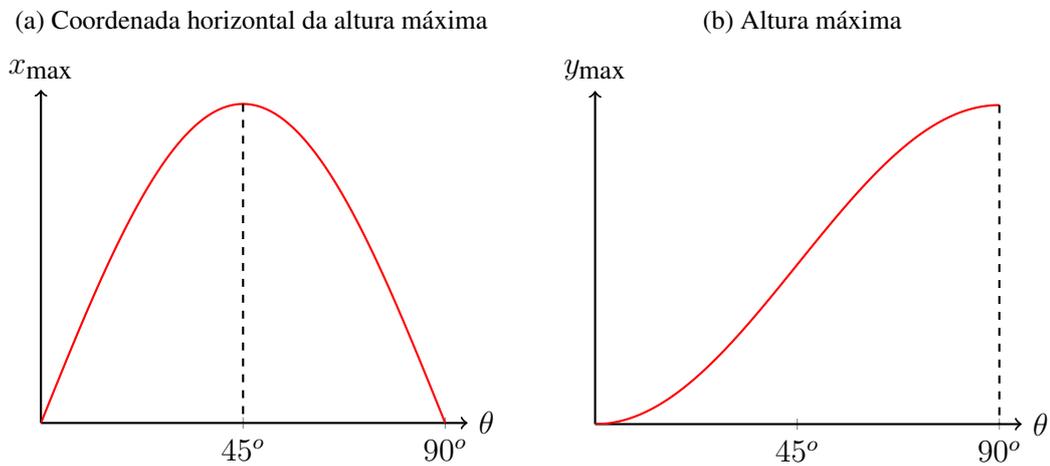
$$y_{\max} = y_0 + \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \theta. \quad (2.14)$$

A figura 3 apresenta o comportamento das coordenadas  $x_{\max}$  (3a) e  $y_{\max}$  (3b) da altura máxima em função do ângulo de lançamento,  $\theta$ , considerando  $y_0 = 0$ . A altura máxima cresce monotonamente com o ângulo de lançamento, atingindo seu valor máximo em  $\theta = 90^\circ$ , ou seja, quando a partícula é lançada verticalmente para cima. Esse comportamento pode ser facilmente compreendido em termos do conceito de energia, ou seja, quando o lançamento é feito a um ângulo de  $90^\circ$ , toda a energia cinética inicial estará concentrada em um único grau de liberdade, correspondente à coordenada  $y$ , contudo, quando o ângulo de lançamento é menor, a energia cinética inicial estará dividida em dois graus de liberdade, logo haverá menos energia cinética concentrada na coordenada  $y$  para ser convertida em energia potencial gravitacional. Em termos mais elementares, mantendo-se constante o módulo da velocidade inicial, a componente vertical da velocidade inicial será máxima no lançamento vertical, de fato,

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta \xrightarrow{\theta \rightarrow 90^\circ} v_0 \geq v_0 \sin \theta, \forall \theta \in [0, 90^\circ],$$

portanto demorará mais tempo para parar, atingindo uma altura maior.

Figura 3 – Coordenadas correspondentes à altura máxima em função do ângulo de lançamento, considerando  $y_0 = 0$ .



A coordenada horizontal onde ocorre a altura máxima, no entanto, aumenta até ser atingido o ângulo de  $45^\circ$ , que também corresponde ao ângulo do alcance máximo, diminuindo novamente até se anular quando o lançamento é vertical. Esse comportamento já é mais difícil de explicar em termos do ensino médio, por isso se torna importante a abordagem experimental. Um argumento em termos de velocidade como o seguinte pode ser utilizado: quando o ângulo de lançamento é pequeno, o projétil não atinge uma altura muito grande, retornando rapidamente para a altura de lançamento, portanto, tendo um alcance também pequeno; quando o

ângulo de lançamento é muito grande, o projétil atinge uma grande altura, no entanto, a componente horizontal de sua velocidade é muito pequena, de modo que mesmo tendo um grande tempo de voo, ainda assim ele não sofre um grande deslocamento horizontal. Para ângulos intermediários, há uma compensação entre o tempo de voo e a velocidade horizontal, sendo essa compensação ótima em  $\theta = 45^\circ$ , quando as componentes horizontal e vertical da velocidade inicial são iguais.

Verificado o modelo parabólico, é necessário fazer corresponder os cálculos teóricos com a realização física do movimento, ou seja, é preciso que o estudante compreenda que o conjunto de parábolas definidas pela equação (2.10) e exemplificadas na figura 1 representem o movimento de uma partícula de qualquer massa lançada com uma velocidade inicial sujeita apenas à ação da gravidade. É especialmente notável, e contra-intuitivo, o fato de que o movimento do projétil não dependa de sua massa, muito menos de sua forma! Assim, o experimento com diferentes projéteis propiciará uma discussão interessante sobre essas expectativas teóricas. A independência da forma se deve à consideração do projétil como uma partícula, sem dimensões, portanto não estando sujeito à torques. A independência da massa aparece já na equação (2.1), pois como a única força atuando no projétil é a força da gravidade, as massas inercial e gravitacional, consideradas iguais, são eliminadas. Esse cenário não permanecerá se for introduzida a força de resistência viscosa do ar, como veremos mais adiante.

## 2.2 Modelo com Resistência Linear<sup>1</sup>

O movimento de um corpo, ou mesmo de uma partícula, através de um fluido, tal como o ar, certamente estará sujeito a uma força resistiva. Tratando o ar como um fluido contínuo, o móvel precisa atravessar o ar, deslocando-o, à medida que se movimenta, é natural, portanto, identificar que o ar exerce uma força no móvel que se opõe ao seu movimento. Além disso, quanto maior for a velocidade do móvel, maior deve ser a força de oposição do ar, pois mais ar precisará ser deslocado por unidade de tempo. Newton estudou o movimento de uma partícula sujeita a forças de resistência do ar que eram proporcionais ao módulo da velocidade ou proporcionais ao quadrado do módulo da velocidade da partícula (NEWTON, 2008). J. Bernoulli expandiu os estudos de Newton para forças proporcionais a qualquer potência do módulo da velocidade, contudo, os termos *lei de resistência de Stokes* e *lei de resistência de Newton* podem ser encontrados para especificar forças de resistência do ar proporcionais ao módulo da velocidade e ao quadrado do módulo da velocidade, respectivamente (THORNTON; MARION, 2011).

Há várias forças atuando em um projétil ao longo de sua trajetória, que dependem da densidade do ar, da forma e da rugosidade do projétil, se o projétil gira ou vibra, etc. Duas componentes dessas forças são particularmente interessantes, a força de arrasto, ou simplesmente força de resistência, que é oposta à velocidade do projétil; e a força de sustentação, perpendicular à força de arrasto, normalmente responsável pela sustentação do voo de aeronaves. Entretanto,

<sup>1</sup> O modelo com resistência do ar será tratado aqui como parte integrante do trabalho, contudo ele não será mostrado para os alunos do ensino médio.

para este trabalho, tomaremos o caso mais simples, o de uma partícula sujeita a uma força de arrasto proporcional ao módulo da velocidade, ou seja,

$$\vec{f}_a = -b\vec{v}, \quad (2.15)$$

onde  $b$  é um coeficiente positivo que depende apenas das características da interação da partícula com o ar, que consideramos isotrópica.

Utilizando o formalismo newtoniano, um projétil lançado sob a ação da gravidade e da força de arrasto (2.15) será regido pela seguinte equação do movimento,

$$m\vec{a} = m\vec{g} - b\vec{v}, \quad (2.16)$$

utilizando a notação padrão,

$$m\ddot{\vec{r}} + b\dot{\vec{r}} = m\vec{g},$$

onde  $\vec{r}$  é o vetor posição do projétil e cada ponto representa uma derivação temporal total. Considerando o movimento em duas dimensões, sendo o eixo  $x$  horizontal e o eixo  $y$  vertical e orientado para cima, teremos,

$$m\ddot{x} + b\dot{x} = 0;$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} = -mg.$$

Definindo  $\gamma \equiv b/m$ , teremos,

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} = 0; \quad (2.17)$$

$$\ddot{y} + \gamma\dot{y} = -g. \quad (2.18)$$

As equações do movimento (2.17) e (2.18) são as equações do movimento do projétil pontual de massa  $m$ . Observem que a massa não foi eliminada, ela está embutida no parâmetro  $\gamma$ ; o caso  $\gamma = 0$  se reduz ao caso sem resistência do ar, descrito pelas equações (2.2) e (2.3), respectivamente.

Considerando que o projétil é lançado com uma velocidade de módulo  $v_0$  que forma um ângulo  $\theta$  com a horizontal e que o ponto de lançamento coincide com a origem do sistema de referência, teremos o seguinte conjunto de condições iniciais,

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos \theta;$$

$$y(0) = 0; \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin \theta;$$

dessa forma, a equação (2.17) pode ser resolvida, levando a,

$$x(t) = v_0 \cos \theta \left( \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} \right). \quad (2.19)$$

reproduzindo (2.4) quando a força de arrasto é desprezada. Como  $\gamma$  é inversamente proporcional à massa, espera-se que um projétil de maior massa sofra menos os efeitos da resistência do ar, visto que suas dimensões estão sendo desprezadas.

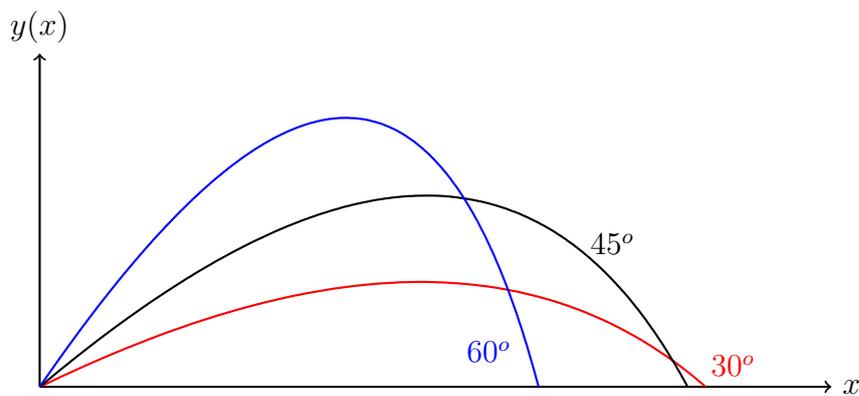
A equação (2.18) também pode ser resolvida com as mesmas condições iniciais, levando a,

$$y(t) = -\frac{gt}{\gamma} + (\gamma v_0 \sen \theta + g) \left( \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma^2} \right). \quad (2.20)$$

O limite  $\gamma \rightarrow 0$  não é evidente nas equações (2.19) e (2.20), entretanto, conforme descrito no apêndice A, as equações (2.4) e (2.6) com  $y_0 = 0$  podem ser reproduzidas como esperado fisicamente.

Encontrar a equação da trajetória eliminando  $t$  entre as equações (2.19) e (2.20) já não é simples, portanto, continuaremos utilizando as equações paramétricas para estudar o movimento. A figura 4 apresenta a trajetória de três projéteis idênticos, com mesma massa, lançados com velocidades de mesmo módulo, mas com diferentes ângulos de lançamento,  $\theta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ . Observa-se que, diferentemente do que acontece no caso sem resistência do ar, observado na figura 1, o alcance máximo não ocorre necessariamente no ângulo de  $45^\circ$ , nem tão pouco os lançamentos em ângulos complementares têm o mesmo alcance.

Figura 4 – Trajetórias de três projéteis idênticos lançados com velocidades iniciais de mesmo módulo  $v_0$  e com  $y_0 = 0$ , em três diferentes ângulos,  $30^\circ$  (vermelho),  $45^\circ$  (preto),  $60^\circ$  (azul) e sujeitos à força de arrasto linear.

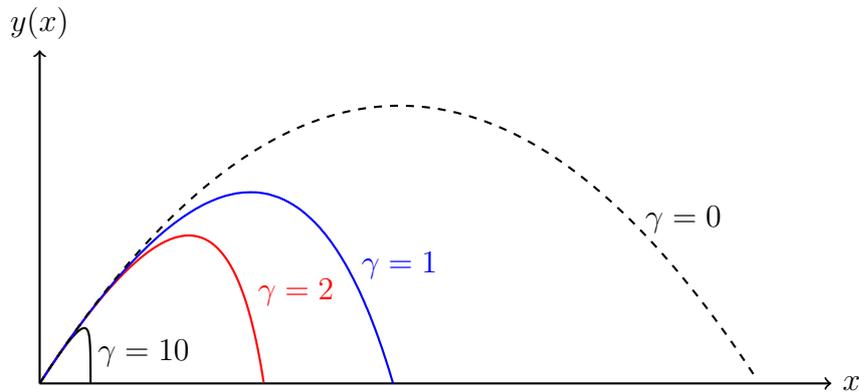


O efeito da resistência do ar pode ser observado na figura 5, onde são observadas as trajetórias de projéteis lançados com a mesma velocidade, em módulo e direção, à partir de  $x_0 = 0$  e  $y_0 = 0$ , contudo sujeitos a forças de arrasto lineares de intensidades menos relevantes, juntamente com o limite em que o projétil não está sujeito à resistência do ar. A redução do efeito pode ser interpretada como um mesmo projétil sendo lançado em uma região onde se faz vácuo cada vez mais alto, tornando o ar mais e mais rarefeito, ou projéteis pontuais (partículas) de massas cada vez maiores, tornando o efeito da resistência do ar desprezível.

Fazendo  $y = 0$  na equação (2.20) encontramos o tempo de vôo,  $T$ , que deve satisfazer,

$$\gamma T = \left( \frac{\gamma v_0 \sen \theta}{g} + 1 \right) (1 - e^{-\gamma T}).$$

Figura 5 – Trajetórias de projéteis lançados com velocidades iniciais idênticas, em módulo e direção, e com  $y_0 = 0$ , mas sujeitos a diferentes forças de resistência linear.



trivialmente,  $T = 0$  é uma solução, mas que significa o instante de lançamento, quando o projétil se encontra em  $y = 0$ , portanto, o tempo de voo será representado pela solução não-trivial,  $T > 0$ .

Definindo,

$$\tau \equiv \gamma T, \text{ e}$$

$$A \equiv \frac{\gamma v_0 \text{sen } \theta}{g} + 1,$$

teremos,

$$\tau = A(1 - e^{-\tau}). \quad (2.21)$$

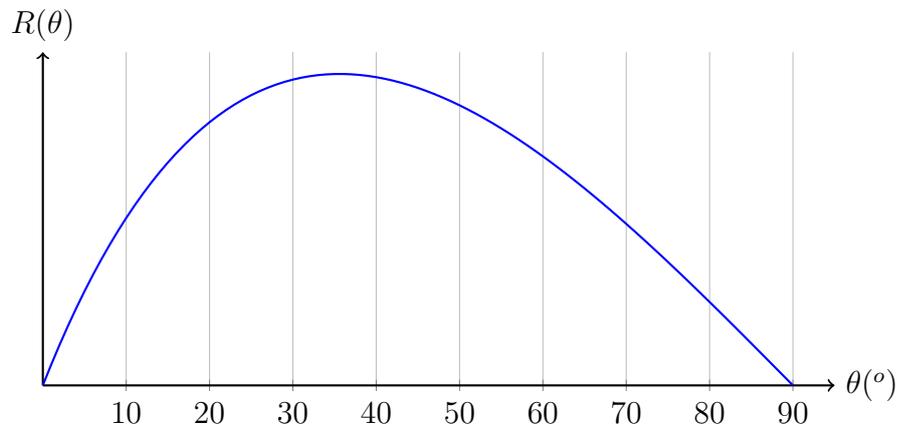
A equação (2.21) é uma equação *transcendental*, contudo, ela pode ser resolvida em termos da *função W de Lambert* (CORLESS et al., 1996), resultando em,

$$\tau = A + W(-Ae^{-A}). \quad (2.22)$$

Apesar da solução exata, um método numérico pode ser mais simples dentro de nossa proposta didática, para tanto, será utilizado o método de Newton (PRESS et al., 1992) para obter as soluções não-triviais de (2.21). Utilizando o tempo de voo na equação (2.19) é obtido o alcance do projétil, como pode ser observado na figura 6, o alcance de um projétil lançado com velocidades de mesmo módulo, mas com diferentes ângulos de lançamento. É possível verificar, além da assimetria, que o alcance máximo ocorre, neste caso, em algum ângulo no intervalo  $(30^\circ, 40^\circ)$ , diferentemente do que acontece no lançamento sem resistência do ar, onde o alcance máximo é obtido quando o lançamento se dá num ângulo de  $45^\circ$ .

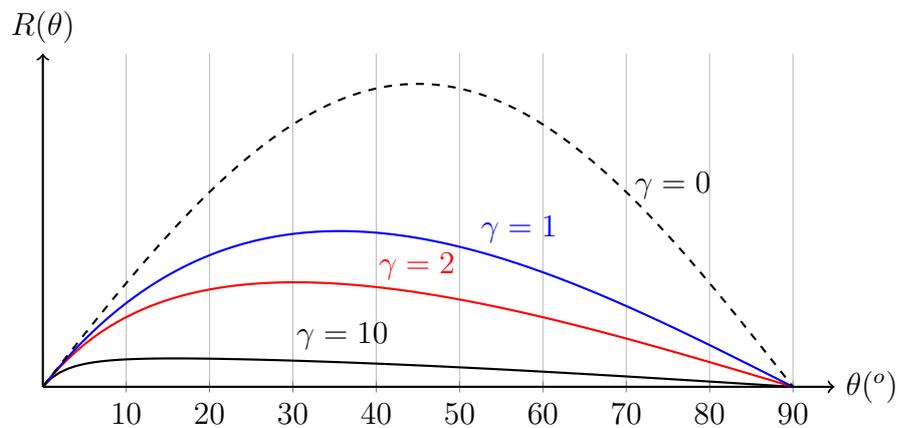
Finalmente, a figura 7 apresenta o comportamento do alcance dos projéteis lançados com velocidades de mesmo módulo e mesma direção, mas sujeitos forças de arrasto menos relevantes, correspondentes às trajetórias apresentadas na figura 5. É observado, como se espera, que o alcance para qualquer ângulo aumenta com a redução da força de arrasto. Entretanto, é curioso que o alcance máximo ocorra com ângulos menores, quando maior for a força de arrasto.

Figura 6 – Alcance do projétil sujeito à força de arrasto linear em função do ângulo de lançamento.



Além disso, o comportamento do alcance se torna mais assimétrico em relação ao ângulo de  $45^{\circ}$ , conforme a força de arrasto se torna mais relevante, evidenciando a não correspondência dos alcances de projéteis lançados com ângulos complementares, como acontece quando não há resistência do ar.

Figura 7 – Alcance de projéteis sujeitos à diferentes forças de arrasto linear em função do ângulo de lançamento.



Dessa maneira, observamos que a introdução de uma força de resistência viscosa linear já é suficiente para modificar qualitativamente o comportamento de um projétil em relação ao lançamento sem resistência do ar. Entretanto, o resultado sem resistência do ar pode ser utilizado com precisão razoável no caso em que a força de resistência se torna desprezível, por exemplo, lançando-se projéteis geometricamente idênticos, porém de massas maiores, desde que a forma dos projéteis não introduzam novos componentes, como rotação, ou outros graus de liberdade.

### 3 METODOLOGIA EXPERIMENTAL

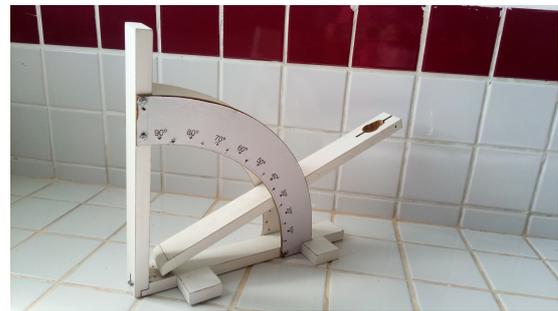
Os experimentos foram realizados com um equipamento artesanal, produzido através de materiais de baixo custo, fácil montagem e utilização. O protótipo possui um suporte de madeira, apresentado na figura 8, composto por uma plataforma de lançamento ajustável, a qual pode ser fixada por prego, alfinete, clipe de papel, etc, em uma escala angular.

Figura 8 – Suporte de madeira com escala angular e plataforma ajustável.

(a) Fotografia de perfil do suporte de madeira.



(b) Fotografia lateral do suporte de madeira.



O lançamento é realizado com pistolas de mola de brinquedo, uma delas é apresentada na figura 9a, acopladas à plataforma de madeira. Os projéteis são uma bolinha de plástico, um dardo de borracha e um dardo com ventosa com massas 0,6606g; 1,1870g e 1,1939g respectivamente, apresentados na figura 9b. Cada projétil é lançado por uma pistola apropriada, é apresentada na figura 9a a pistola para o dardo com ventosa. Além do suporte e do lançador, são necessários

Figura 9 – Lançador de brinquedo e projéteis utilizados no experimento.

(a) Fotografia de uma das pistolas de brinquedo utilizadas como lançador.



(b) Fotografia dos projéteis lançados com as pistolas de brinquedo.



uma trena, para medirmos o alcance dos projéteis, e um cronômetro para medir o tempo de vôo dos projéteis; o cronômetro pode ser encontrado em aparelhos de telefone celular do tipo *smartphones*, hoje de uso comum entre docentes e estudantes.

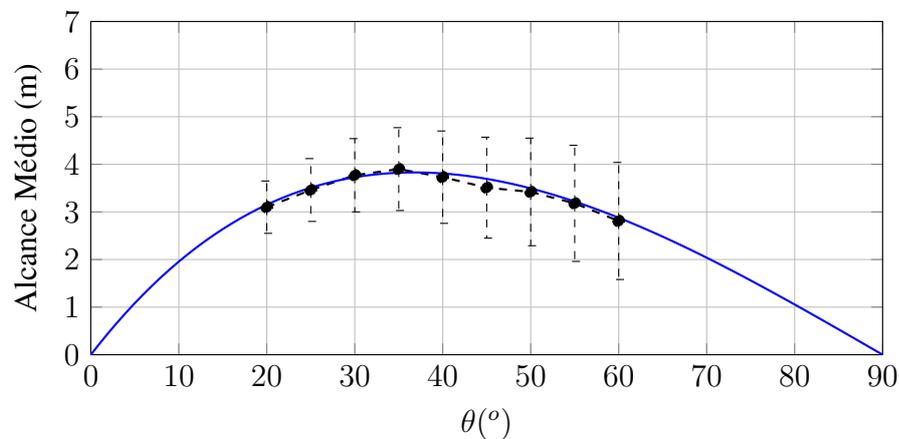
Os experimentos foram realizados em ambiente fechado, para evitar correntes de ar e suficientemente amplo para permitir o vôo completo dos projéteis. Além disso, a plataforma e

os lançadores eram cuidadosamente reposicionados a cada lançamento, para permitir que as condições iniciais fossem sempre similares.

Mesmo sendo tomados os cuidados necessários, ainda há incertezas produzidas por imprecisões aleatórias, por exemplo, há uma imprecisão na medida do tempo de voo, devido ao tempo de reação do experimentador tanto ao acionar o cronômetro no instante do lançamento quanto ao paralisá-lo no instante da aterrissagem. A distensão da mola no interior da pistola também não é conhecida com precisão, podendo ser diferente a cada lançamento. Além disso, o ponto de queda do projétil observado a olho, também é medido com imprecisão. Para reduzir os efeitos dos erros aleatórios, são realizados vários lançamentos idênticos, para se produzir valores médios dessas grandezas, juntamente com seus respectivos desvios padrões.

Cada projétil é lançado em diferentes ângulos, variando de  $20^\circ$  até  $60^\circ$  em intervalos de  $5^\circ$ , sendo medidos o tempo de voo e o alcance do projétil. Cada medida é repetida 10 vezes para obter valores médios, reduzindo os erros aleatórios discutidos acima. As medidas para ângulos inferiores a  $20^\circ$  e superiores a  $60^\circ$  apresentaram dificuldades de medição, por isso foram descartas neste trabalho.

Figura 10 – Alcance médio de projéteis “bolinha” lançados com diferentes ângulos de lançamento.

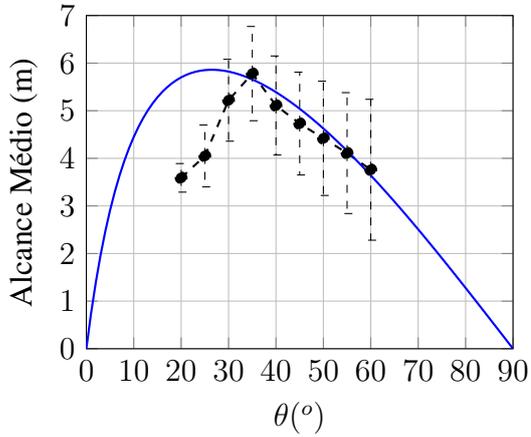


A figura 10 apresenta o alcance médio do projétil em forma de “bolinha” (fig. 9b) com os respectivos desvios padrões. A curva contínua representa o comportamento teórico do alcance de um projétil pontual sujeito à resistência viscosa linear do ar. Para o ajuste feito de forma empírica (por olho) foram usados os parâmetros:  $v_0 = 8,2m/s$ ,  $g = 9,81m/s^2$  e  $\gamma = 1,0N/(Kg\ m/s)$ . Indicando que um projétil esférico é bem representado por uma partícula, desde que o projétil não seja lançado com algum momento angular, o que poderia potencializar forças de sustentação.

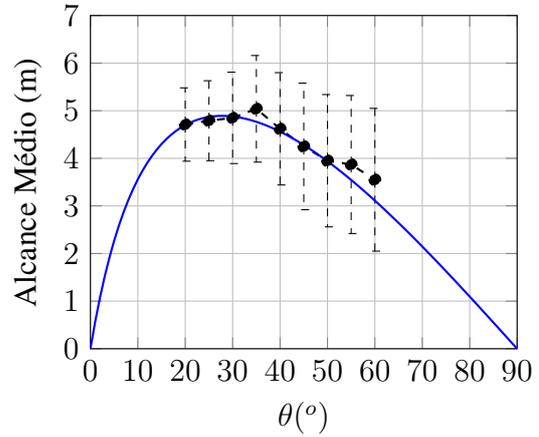
A figura 11, por sua vez, apresenta o alcance médio dos projéteis assimétricos, o “dardo de borracha” (fig. 11a) e o “dardo com ventosa” (fig 11b). Nestes casos não é possível um ajuste completo dos dados pelo modelo teórico para o lançamento de uma partícula com resistência linear, seria necessário acrescentar, portanto, as dimensões dos projéteis. Contudo, ainda é pos-

Figura 11 – Alcance médio dos projéteis assimétricos: “Dardo de Borracha” e “Dardo com Ventosa”.

(a) Alcance médio de projéteis “Dardo de Borracha” lançados com diferentes ângulos de lançamento.



(b) Alcance médio de projéteis “Dardo com Ventosa” lançados com diferentes ângulos de lançamento.



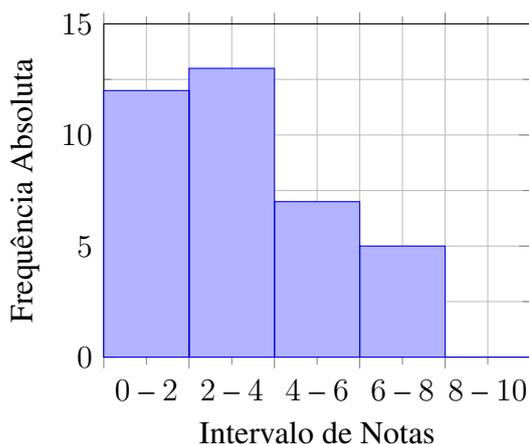
sível aproximar algumas regiões, como é o caso do lançamento do “dardo de borracha” para grandes ângulos observado na figura 11a, onde foram utilizados os seguintes parâmetros para o ajuste:  $v_0 = 15,0m/s$ ,  $g = 9,81m/s^2$  e  $\gamma = 2,0N/(Kg\ m/s)$ . O comportamento do “dardo com ventosa”, espantosamente, apresentou uma boa concordância com o modelo teórico para a partícula dentro da barra de erro, embora o comportamento médio não aparente acompanhar a mesma curvatura, neste caso o ajuste foi realizado com os parâmetros:  $v_0 = 13,0m/s$ ,  $g = 9,81m/s^2$  e  $\gamma = 2,0N/(Kg\ m/s)$ .

#### 4 EFEITO PEDAGÓGICO DA METODOLOGIA EXPERIMENTAL

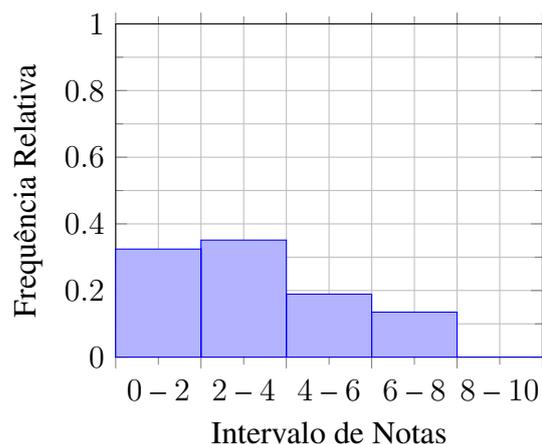
O experimento descrito no capítulo 3 foi utilizado como instrumento mediador em em aulas aplicadas a uma turma de terceiro ano do ensino médio da escola Alexandrino da Rocha, localizada na cidade de Bonito, no estado de Pernambuco. Inicialmente, foi realizada uma aula conceitual e teórica sobre os assuntos relevantes ao lançamento de um projétil, revisando o modelo para lançamento sem resistência do ar, descrito na seção 2.1. Foram particularmente abordadas as questões relacionadas ao alcance do projétil e sua relação com o ângulo de lançamento, sendo discutido o que poderia ser diferente caso o efeito da resistência do ar fosse levado em consideração, no final, o equipamento experimental foi apresentado, mas sem ser utilizado neste momento. A aula teve duração de 1h40 (uma hora de quarenta minutos) após a qual foi aplicado o questionário 1, apresentado no anexo A, com 6 questões discursivas para verificar o quanto os alunos tinham compreendido e quais suas conclusões sobre o tema. Para efeito de análise, foram atribuídas notas numa escala de 0 a 10 a cada estudante e os resultados foram agrupados em histogramas de frequência, apresentados na figura 12, utilizando-se intervalos de classe de comprimento 2 pontos. Desta primeira aula participaram 37 estudantes, o histograma das frequências absolutas é apresentado no figura 12a e um segundo histograma com as frequências relativas é apresentado na figura 12b. Podemos observar uma acumulação em uma região

Figura 12 – Resultado do questionário 1, realizado com 37 alunos do 3º do ensino médio da Escola Alexandrino da Rocha.

(a) Frequência Absoluta das notas com 37 alunos



(b) Frequência Relativa das notas com 37 alunos.



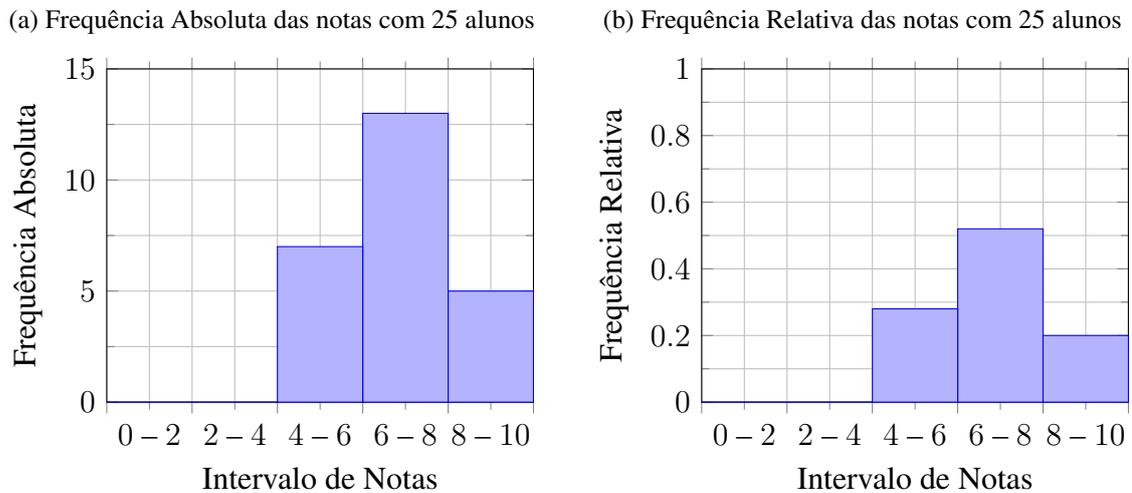
de notas baixas, sendo mais frequentes as notas no intervalo 2 – 4 e nenhuma nota no intervalo 8 – 10, além da alta dispersão dos dados, evidenciando uma aprendizagem pobre em média e extremamente heterogênea. Em outras palavras, a grande maioria dos estudantes não consegue compreender os conceitos significativamente, embora alguns dos estudantes demonstrem aptidão ao assunto.

Uma análise qualitativa do questionário 1 mostra que muitas das conclusões dos estudantes sobre o lançamento de projéteis continuam erradas e confusas, mesmo com uma aula de revisão antes da aplicação do questionário, fica evidente a existência de concepções distorcidas. Foi verificado, por exemplo, que para muitos dos estudantes o efeito da resistência do ar não iria alterar as conclusões baseadas no modelo sem resistência do ar, entre outros o ângulo necessário para obtermos o maior alcance, continuaria sendo o ângulo de  $45^\circ$ , utilizando os mesmos argumentos que explicam esse comportamento do modelo sem resistência do ar, por exemplo, alguns indicam que com um ângulo acima de  $45^\circ$  o projétil atingirá uma maior altura, porém não se afastará muito horizontalmente, retornando à uma distância menor do que voltariam com um ângulo menor de lançamento; para outros, no entanto, há uma confusão conceitual, argumentando que se o projétil for lançado com um ângulo inferior a  $45^\circ$  ele não atingirá uma velocidade suficientemente grande para se afastar significativamente do ponto de lançamento. Dessa forma, a maioria dos estudantes não foi capaz de argumentar satisfatoriamente sobre a segunda questão do questionário 1. Analogamente, em relação à terceira questão, que fala sobre ângulos complementares, e que podemos fazer uma relação com a geometria, tivemos também um resultado bastante insatisfatório, visto que os estudantes não conseguiram perceber a semelhança do comportamento do alcance nos ângulos de  $30^\circ$  e  $60^\circ$ .

Numa segunda aula, ocorrida uma semana após a primeira, foi dado seguimento à atividade. Desta vez, os alunos foram encaminhados para a quadra poliesportiva da escola, onde o experimento foi realizado. Inicialmente, foi pedido que eles apenas observassem, como analistas experimentais, enquanto o experimento de lançamento era realizado. Neste momento, eles poderiam anotar tudo que achassem necessário e tirassem suas conclusões relacionadas aos lançamentos, muitos queriam ver o que acontecia com os projéteis, foi claro o confronto de ideias quando viram na prática que o alcance máximo não se dava no ângulo de  $45^\circ$ . Outro confronto de ideias apareceu quando foram lançados os três objetos em sequência, aqui eles puderam verificar o real efeito que a resistência do ar tem sobre o lançamento do projétil e o seu impacto no modelo teórico simplificado. No final, eles puderam fazer o lançamento que eles desejassem. Após a atividade, foi aplicado o questionário 2, apresentado do anexo B, conceitualmente semelhante ao questionário 1 (anexo A) e também com 6 questões discursivas. Novamente, para efeito de análise, foram atribuídas notas numa escala de 0 a 10 a cada estudante e os resultados foram agrupados em histogramas de frequência, apresentados na figura 13. Nesta aula, entretanto, apenas 25 alunos dos 37 iniciais estiveram presentes, por esse motivo, a comparação dos resultados deve ser feita pelas frequências relativas.

Conforme pode ser observado na figura 13 os resultados são bastante positivos. As questões relativas ao experimento foram respondidas com melhores argumentos pela maioria dos alunos e questões relacionadas aos conceitos teóricos do modelo simplificado também ficaram mais claras. A maioria das notas ficaram no intervalo de classe 6 – 8 e uma fração considerável dos estudantes se encaixaram nas faixas 4 – 6 e 8 – 10, sem nenhuma nota nas classes 0 – 2 e 2 – 4. Além das notas mais altas, é verificado, também, uma pequena dispersão, evidenci-

Figura 13 – Resultado do questionário pós-teste, realizado com 25 alunos do 3º do ensino médio da Escola Alexandrino da Rocha.



ando, portanto, uma aprendizagem mais efetiva e mais uniforme, ou seja, os alunos conseguem compreender os conceitos de maneira menos dependente de uma predisposição anterior. Assim, comparando as figuras 12b e 13b, podemos verificar um notável aumento da média das notas, assim como um sensível estreitamento da distribuição de frequências, evidenciando a acentuada melhoria na aprendizagem.

Numa análise qualitativa, verificou-se, novamente, que na terceira questão, relacionada a ângulos complementares, mesmo com a experimentação, os estudantes não conseguiram atingir uma concepção sobre o comportamento em ângulos complementares. Nas demais questões as respostas foram mais consistentes, embora ainda tenham sido observadas algumas concepções mal compreendidas.

No caso particular dessa turma, 3º ano do ensino médio, os alunos ficaram bastante entusiasmados com a “revisão” extraordinário de um tema que fora estudado ainda no início do 1º ano, uma vez que eles estavam prestes a realizar o exame nacional do ensino médio, o ENEM. Além disso, a escola Alexandrino da Rocha é famosa na cidade de Bonito por participar de campeonatos de lançamentos de foguetes, facilitando a contextualização, pois os alunos sempre relacionavam as discussões das aulas com esta atividade realizada pela escola.

## 5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho revisamos os modelos teóricos para o lançamento de projéteis com e sem resistência do ar. No caso do modelo com resistência do ar, foi considerada apenas a força de resistência dependente linearmente da velocidade. Ambos os modelos consideraram os projéteis como partículas pontuais e se descolando em duas dimensões. Foram deduzidas expressões analíticas para o alcance dos projéteis em termos dos parâmetros relevantes, como o coeficiente de resistência do ar, o ângulo e o módulo da velocidade de lançamento. Verificamos como os resultados esperados podem ser qualitativamente e quantitativamente discrepantes e em que situações essas discrepâncias podem ser desprezadas.

Um experimento de baixo custo, consistindo de uma plataforma de lançamento de madeira com ajuste angular e “pistolas” de brinquedo foi desenvolvido e utilizado para lançar projéteis de diferentes formas: uma bolinha de plástico, um dardo de borracha e um dardo com ventosa. Para cada um dos projéteis foi medido o alcance em termos do ângulo de lançamento. O equipamento funcionou bem, embora as medições para ângulos menores que  $20^\circ$  e maiores que  $60^\circ$  foram de difícil obtenção, portanto foram descartadas.

Os dados obtidos foram comparados com os modelos teóricos, o projétil “bolinha de plástico” e o projétil “dardo com ventosa” tiveram boa concordância com o modelo em que a resistência do ar foi considerada. O projétil “bolinha” foi bem ajustado com um coeficiente de resistência viscosa  $\gamma = 1,0 \text{ N}/(\text{Kg m/s})$ , enquanto o projétil “dardo com ventosa” foi bem ajustado com um coeficiente de resistência viscosa  $\gamma = 2,0 \text{ N}/(\text{Kg m/s})$ , o que parece razoável, pois a bolinha, por sua simetria e suas dimensões, deve sofrer menor resistência durante o movimento, enquanto o “dardo com ventosa” oferece uma maior área de contato e uma maior assimetria. O projétil “dardo de borracha”, no entanto, não apresentou boa concordância com os modelos teóricos, particularmente para ângulos de lançamento menores que  $35^\circ$ , onde o alcance foi muito menor do que o esperado pelo modelo teórico com resistência do ar em relação ao alcance do mesmo projétil para ângulos a partir de  $35^\circ$ . Esse comportamento do “dardo de borracha” foi surpreendente, esperávamos que o “dardo com ventosa” apresentasse um resultado mais discrepante, pela forte assimetria. Acreditamos que essa discrepância possa ser explicada pela rotação do projétil em torno de um eixo normal ao plano da trajetória, contudo, deixaremos como perspectiva futura a realização de uma análise mais detalhada do comportamento do “dardo de borracha”.

O equipamento experimental foi, então, utilizado como parte de uma metodologia de ensino dos conceitos envolvidos no movimento de um projétil em uma turma do 3º ano do ensino médio da escola Alexandrino Rocha, localizada no município pernambucano de Bonito. Uma análise do impacto pedagógico da metodologia experimental indicou uma melhoria significativa da compreensão dos estudantes sobre os conceitos envolvidos em comparação com a metodologia dita tradicional, onde os conceitos são introduzidos através de modelos matemáticos, que

embora simplificados, ainda apresentam um grande desafio para os estudantes. Além do mais, uma avaliação qualitativa da dinâmica em sala de aula indica que a atividade experimental estimula a curiosidade, a discussão e a interação entre os estudantes.

Apesar dos fortes indicativos de melhoria da compreensão, ainda assim, percebe-se uma tendência dos estudantes em ignorar os resultados experimentais e insistir em acreditar nos resultados discutidos nos livros didáticos, ou seja, no modelo simplificado, associando as discrepâncias entre as medições experimentais e a previsão teórica do modelo sem resistência do ar a erros do procedimento experimental. De certa forma, os estudantes passam a entender melhor o modelo teórico, pois o questionamento experimental os leva a verificar novamente qual seria a previsão teórica, contudo, parecem não acreditar nas evidências experimentais, assumindo como verdade o modelo teórico.

Como perspectiva de continuidade, propomos o estudo do lançamento com bolinhas de vários tamanhos, lançadas em um mesmo ângulo, para avaliar o efeito da área de contato com o ar sobre o alcance dos projéteis. O lançamento de bolinhas de mesmo tamanho mais de várias massas, lançadas em um mesmo ângulo, para verificar o efeito da massa dos projéteis sobre o alcance. Como já adiantado, analisar a causa das discrepâncias verificadas no projétil “dardo de borracha” em relação ao modelo teórico para pequenos ângulos de lançamento, apesar da concordância para grandes ângulos de lançamento.

## REFERÊNCIAS

- AUSUBEL, D. P. *The psychology of meaningful verbal learning*. New York: Grune Grune and Stratton, 1963. 11
- AUSUBEL, D. P. *Educational psychology: a cognitive view*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968. 11
- CORLESS, R. M. et al. On the lambertw function. *Advances in Computational Mathematics*, v. 5, n. 1, p. 329–359, Dec 1996. ISSN 1572-9044. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02124750>>. 19
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de Física*. 10<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: LTC, 2016. v. 1. 10, 11
- MOREIRA, M. A. Aprendizagem significativa: um conceito subjacente. *Instituto de Física da UFRGS*, 2009. 11
- NEWTON, I. *Principia: princípios matemáticos de filosofia natural: O sistema do mundo*. 1<sup>a</sup>. ed. São Paulo: USP/EDUSP, 2008. 16
- PRESS, W. H. et al. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. 2<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1992. 19
- THORMTON, S.; MARION, J. *Dinâmica clássica de partículas e sistemas*. [S.l.]: Cengage Learning, 2011. 10, 11, 16

APÊNDICE A – MODELO SEM RESISTÊNCIA DO AR COMO CASO PARTICULAR  
DO MODELO COM RESISTÊNCIA DO AR

O modelo sem resistência do ar pode ser recuperado a partir do modelo com resistência linear no limite  $\gamma \rightarrow 0$ . Entretanto, esse limite não é evidente nas equações (2.19) e (2.20), sendo necessário um cálculo cuidadoso, o qual será feito aqui.

Tomando a equação (2.19), temos que,

$$x(t) = v_0 \cos \theta \left( \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} \right),$$

notando que,

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \left( \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} \right) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} t e^{-\gamma t} = t, \quad (\text{A.1})$$

pela regra de *L'Hopital*, ficamos com,

$$x(t) \rightarrow v_0 \cos(\theta)t,$$

como esperado para a situação sem resistência do ar.

Tomando, agora, a equação (2.20), temos que,

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{gt}{\gamma} + (\gamma v_0 \sen \theta + g) \left( \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma^2} \right). \\ &= -\frac{gt}{\gamma} + v_0 \sen \theta \left( \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} \right) + g \left( \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma^2} \right), \end{aligned}$$

no segundo termo do lado direito, podemos utilizar o limite (A.1), contudo, o primeiro e o terceiro termos precisam ser combinados antes de tomarmos o limite  $\gamma \rightarrow 0$ , vamos, então, expandir,

$$\frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma^2} = \frac{t}{\gamma} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}\gamma + \dots, \quad (\text{A.2})$$

assim,

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{gt}{\gamma} + v_0 \sen \theta \left( \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} \right) + g \left( \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma^2} \right) \\ &= -\frac{gt}{\gamma} + v_0 \sen \theta t + g \frac{t}{\gamma} - g \frac{t^2}{2} + g \frac{t^3}{6}\gamma + \dots, \end{aligned}$$

portanto,

$$y(t) \rightarrow v_0 \sen(\theta)t - \frac{g}{2}t^2,$$

reproduzindo (2.6) com  $y_0 = 0$ .

## APÊNDICE B – CÁLCULO EXATO DO TEMPO DE VÔO COM RESISTÊNCIA DO AR

Uma expressão analítica pode ser obtida para o tempo de vôo, solução da equação (2.21) em termos da função  $W$  de Lambert.

De fato, se  $W(x)$  é a função de Lambert, então,

$$W(x)e^{W(x)} = x,$$

desse modo, podemos reescrever (2.21),

$$\begin{aligned}\tau e^\tau &= A(e^\tau - 1) \\ &= Ae^\tau - A,\end{aligned}$$

donde,

$$(\tau - A)e^\tau = -A,$$

assim,

$$(\tau - A)e^{\tau - A} = -Ae^{-A},$$

portanto, tomando  $u \equiv \tau - A$ , teremos

$$ue^u = -Ae^{-A},$$

logo,

$$u = W(-Ae^{-A}),$$

donde,

$$\tau = A(\theta) + W[-A(\theta)e^{-A(\theta)}].$$

## ANEXO A – QUESTIONÁRIO 1

1. Analisando o experimento com base em seus conhecimentos, qual seria o ângulo necessário para que tivéssemos o maior alcance?
2. Se considerarmos as resistências que nosso projétil encontrará pelo seu caminho durante a trajetória, o alcance será maior, menor ou o mesmo que o da questão anterior?
3. Durante um experimento, foi lançado um projétil com um ângulo de  $30^\circ$  e logo em seguida, foi lançado o mesmo projétil com um ângulo de  $60^\circ$ . Existe uma relação entre esses ângulos? em sua opinião qual deles obteve o maior alcance?
4. Temos três projeteis para serem lançados, qual dos três você acha que terá um maior alcance, como você chegou a essa conclusão?
5. De acordo com os seus conhecimentos, quais os cuidados o experimentador deve ter ao realizar um experimento como este?
6. Caso o experimentador não tome os cuidados necessários, quais discrepâncias podemos ter ao analisarmos os dados coletados?

## ANEXO B – QUESTIONÁRIO 2

1. Com base em seu conhecimento a cerca do lançamento de projéteis, qual o ângulo necessário para o projétil tenha o maior alcance?
2. Como analista experimental nesta aula, levando em consideração o experimento feito, qual o ângulo para que eu tenha um alcance máximo? Foi maior, menor ou igual ao da resposta anterior?
3. No experimento realizado hoje na escola, foi lançado o mesmo projétil de dois ângulos diferentes,  $30^\circ$  e  $60^\circ$  você consegue identificar alguma relação entre esses ângulos? Para você, qual obteve o maior alcance?
4. Vimos que três projéteis foram lançados, qual dos três obteve o maior alcance? Por que você acha que isso aconteceu?
5. Levando em consideração o que você viu durante o experimento realizado hoje, quais os cuidados que o experimentador tem que tomar para que os dados não sofram alterações durante sua coleta?
6. Caso o experimentador não tome os cuidados necessários durante a realização deste experimento, que tipo de erro podemos encontrar?