UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

THOMÁS FREUD DE MORAIS GONÇALVES

Acerca do Processo-Bell-Touchard: proposta de um processo de contagem baseado na distribuição Bell-Touchard

Recife

2022

THOMÁS FREUD DE MORAIS GONÇALVES

Acerca do Processo-Bell-Touchard: proposta de um processo de contagem baseado na distribuição Bell-Touchard

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Probabilidade

Orientador (a): Pablo Martin Rodriguez

Recife

2022

Catalogação na fonte
Bibliotecária Nataly Soares Leite Moro, CRB4-1722

G635a Gonçalves, Thomás Freud de Morais
Acerca do Processo-Bell-Touchard: proposta de um processo de contagem baseado na distribuição Bell-Touchard / Thomás Freud de Morais Gonçalves. – 2022.
37 f.

Orientador: Pablo Martín Rodriguez.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Estatística, Recife, 2022.
Inclui referências.

1. Probabilidade. 2. Processos de contagem. 3. Processo Bell-Touchard. 4. Família Poisson múltipla. 5. Família Poisson Composta. I. Martín Rodriguez, Pablo (orientador). II. Título.

519.2 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2022 - 34

THOMAS FREUD DE MORAIS GONÇALVES

ACERCA DO PROCESSO-BELL-TOUCHARD: PROPOSTA DE UM PROCESSO DE CONTAGEM BASEADO NA DISTRIBUIÇÃO BELL-TOUCHARD

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Estatística.

Aprovada em: 22 de fevereiro de 2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Pablo Martín Rodriguez
DE/UFPE

Prof. Dr. ÉLCIO LEBENSZTAYN
UNICAMP

Prof. Dr. VALDIVINO VARGAS JUNIOR
UFG

RESUMO

Uma das limitações do processo Poisson é a hipótese de saltos unicamente unitários em intervalos infinitesimais. Todavia essa limitação é contornada pelo processo Poisson composto. Entretanto, em muitos casos a distribuição de probabilidade dos incrementos não tem forma conhecida no processo Poisson composto, limitando sua modelagem ao uso de funções geradoras de probabilidades ou técnicas numéricas e simulações. Neste trabalho, propomos um novo processo de contagem baseado na distribuição Bell-Touchard, denominado processo Bell-Touchard. Entre suas propriedades, verificamos que o processo é membro da família de processos Poisson compostos e Poisson múltiplos e que também é fechado para convolução e decomposição. Mostramos que o processo decorrente da composição de processos Poisson é Bell-Touchard. Apresentamos duas generalizações, o processo Bell-Touchard composto e o processo Bell-Touchard não homogêneo, mostrando que este último pode ser obtido pela composição de um processo Poisson não homogêneo em um processo Poisson homogêneo. Ademais, apresentamos uma estratégia para simulação do novo processo, bem como uma aplicação em teoria da ruína, mediante uma modificação do processo Cramér-Lundberg.

Palavras-chaves: processos de contagem; processo Bell-Touchard; família Poisson múltipla; família Poisson composta; polinômios de Bell.

ABSTRACT

One of the limitations of the Poisson process is the hypothesis of unitary jumps within an infinitesimal interval (rare events hypothesis). That restriction, however, is avoided by the compound Poisson process. Nevertheless, in most situations, we don't have a closed expression for the probability distribution of the increments in the case of compound Poisson processes, leaving us options such as working with probability generating functions, numerical analysis and simulations. In this work, we have proposed a new counting process based on the Bell-Touchard probability distribution, naming it the Bell-Touchard process. We have proved that the process is a compound Poisson process, a multiple Poisson process and that it is closed for convolution plus decomposition operations. Besides, we had shown that the composition of two Poisson processes is a Bell-Touchard process. Moreover, we had proposed two generalizations named the compound Bell-Touchard process and the non-homogeneous Bell-Touchard process, showing that the last one is a result of the composition of a non-homogeneous Poisson process along with a homogeneous Poisson process. Furthermore, we have presented a simulation method for the Bell-Touchard process and an application of ruin theory through a modification of the Cramér-Lundberg process.

Keywords: counting processes; Bell-Touchard processes; multiple Poisson family; compound Poisson family; Bell polynomials.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nesse capítulo apresentamos uma revisão de literatura e de conceitos, revisamos as propriedades dos polinômios de Bell que são relevantes para este trabalho, bem como a distribuição Bell-Touchard e alguns resultados relacionados.

1.1 REVISÃO DE LITERATURA

O processo Poisson é o mais simples dos processos estocásticos definidos em tempo contínuo, dotado de propriedades matemáticas interessantes, implicando, em muitas situações, na obtenção de aplicações matematicamente tratáveis. É um processo bastante explorado na literatura, com alguns livros inteiramente dedicados ao assunto, como [1, 2]. Abordagens mais pragmáticas (sem requerer conhecimentos sobre teoria da medida) acerca das propriedades deste processo, bem como a exploração de aplicações em teoria das filas e em biologia podem ser vistas em [3, 4]. Em estatística atuarial, o processo Poisson é utilizado na modelagem de processos de risco e ruína [5, 6]. Existem algumas generalizações propostas para o processo Poisson, obtidas, em alguns casos, através do relaxamento das suposições do processo Poisson original. Ao relaxarmos a hipótese de estacionariedade de incrementos, obtemos o processo Poisson não-homogêneo. Por outro lado, se relaxarmos a hipótese de saltos unitários em intervalos infinitesimais, obtemos o processo Poisson composto. Há também o que denominamos de processo Poisson espacial, o qual é definido em duas ou mais dimensões [7][8, capítulo 11]. Os processos Poisson comum e o espacial coincidem na reta real.

O processo Poisson composto é uma das generalizações mais interessantes e amplamente aplicadas. Em teoria das filas, surge naturalmente em modelos com chegada em lotes envolvendo tempos exponenciais [9, capítulo 6]. Em teoria da ruína é utilizado na construção do processo Cramér-Lundberg [6, capítulo 4] e em suas generalizações [10, 11]. É utilizado na modelagem da componente aleatória de forças de juros, útil para aplicações em matemática atuarial[12].

A distribuição Poisson, e mais especificamente o processo Poisson composto, têm relação com os polinômios de Bell, os quais, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $x_i \in \mathbb{R},$ para todo $i \in \mathbb{N}$, são definidos pela expressão seguinte (Fórmula de Dobiński):

$$B_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} x^k. \tag{1.1}$$

Os polinômios de Bell surgem em análise combinatória no estudo de partições de conjuntos, e em análise, no processo de derivações sucessivas de funções compostas[13, 14]. Em se tratando da distribuição Poisson, temos que a função geradora de momentos da distribuição Poisson é a mesma função geradora de polinômios Bell, e isto implica à equivalência entre esses polinômios e os momentos da distribuição Poisson. Tal função geradora é dada por:

$$\varphi_x(\theta) := e^{x(e^\theta - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{\theta^n}{n!}, \qquad \text{para } \theta > 0, \tag{1.2}$$

onde, tomando as sucessivas derivadas de (1.2) e avaliando-as em $\theta = 0$ recuperamos os polinômios de Bell. Note-se que expandindo o lado esquerdo de (1.2) e comparando os termos da expansão com o lado direito, obtém-se (1.1).

Os polinômios de Bell possuem aplicações diversas em teoria das probabilidades. Uma relação entre os polinômios de Bell e a soma ponderada de variáveis aleatórias Poisson independentes foi recentemente proposta em [15]. O processo Poisson iterado, obtido a partir da composição de processos Poisson, tem distribuição de incrementos dada como função de polinômios de Bell[16]. As propriedades assintóticas dos polinômios Bell são exploradas no contexto de grafos aleatórios em [17]. Aspectos probabilísticos desses polinômios são utilizados por [18] para demonstrar algumas propriedades de polinômios parciais de Bell.

Dizemos que uma sequência de polinômios $p_n(x)$ com $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, onde $p_n(x)$ tem grau n para todo n, é do tipo binomial se $p_0(x) = 1$, $p_n(0) = 0$ para todo n e

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x)p_{n-k}(y), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

A existência de uma relação entre polinômios do tipo binomial (ver-se-á adiante que os polinômios de Bell são do tipo binomial) e os processos Poisson compostos é comentada em [19]. Posteriormente, tal conexão foi explorada, por exemplo, em [20].

Como bem se sabe, uma das hipóteses básicas do processo Poisson diz respeito ao fato de o tamanho dos saltos ser unitário em intervalos infinitesimais. No entanto, tal hipótese é relaxada por [21], o qual, no processo, obtém a família de distribuições Poisson múltipla, a qual é parametrizada por uma sequência convergente de constantes não negativas $\{c_n\}_{n\geq 1}$. Como a família múltipla foi proposta partindo do relaxamento de uma das hipóteses do processo Poisson (hipótese de saltos unitários em intervalos infinitesimais), o processo decorrente foi denominado processo Poisson múltiplo.

Em um processo Poisson múltiplo $\{\xi(t),\, t \geq 0\}$ dependendo da sequência real não negativa $\{c_n\}_{n\geq 1}$ com $\sum c_n < \infty$, podemos escrever:

$$\xi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\xi_n(t), \tag{1.3}$$

onde $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de processos Poisson independentes com parâmetro c_n para todo $n \in \mathbb{Z}_+^*$. Em outras palavras, o processo em questão corresponde à uma soma ponderada de um número infinito de processos Poisson [21], no qual a variável aleatória $\xi(t)$, que representa o número de eventos no intervalo $[0, t)$, tem distribuição de probabilidade dada por:

$$\Pr[\xi(t) = k] = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} tc_n\right\} \sum_{r_1+2r_2+\cdots+kr_k=k} \frac{(tc_1)^{r_1}(tc_2)^{r_2}\ldots(tc_k)^{r_k}}{r_1!r_2!\ldots r_k!}. \tag{1.4}$$

Uma distribuição membro da família Poisson múltipla é a distribuição Bell, a qual foi proposta por [22] e possui distribuição de probabilidade dada por:

$$\Pr[X = x] = e^{-(e^{\theta}-1)}\frac{\theta^x}{x!}B_x, \quad x \in \mathbb{N}_0 \text{ e } \theta > 0,$$

obtida a partir da expansão em série da função geradora de números Bell (esta que corresponde a (1.2) avaliada em $x = 1$), tomando como constante normalizadora seu recíproco, onde $B_n := B_n(1)$ é o $n-$ésimo número de Bell. A distribuição Bell apresenta propriedades interessantes, tais como a de ser uniparamétrica, infinitamente divisível e ser membro da família exponencial[22].

A soma de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição Bell tem distribuição biparamétrica Bell-Touchard, da qual a distribuição Bell é um caso particular. A distribuição Bell-Touchard foi proposta por [23], pertence à família Poisson múltipla, como veremos adiante, e tem distribuição de probabilidade:

$$\Pr[X = x] = e^{-\alpha(e^{\theta}-1)}\frac{\theta^x}{x!}B_x(\alpha), \quad x \in \mathbb{N}_0 \text{ e } \theta, \alpha > 0,$$

cuja constante normalizadora é o recíproco da função geradora de polinômios de Bell univariados, o que equivale ao polinômio de Touchard, daí o nome proposto para a distribuição, onde $B_n(x)$ é o $n-$ésimo polinômio Bell univariado. Entre suas propriedades, essa distribuição é infinitamente divisível e fechada para convolução em um dos parâmetros. Posteriormente, foi proposta uma generalização para essas duas distribuições, a qual é baseada na expansão em série da função geradora de polinômios r-Bell, formando uma distribuição discreta de três parâmetros, denominada família r-Bell. A distribuição r-Bell foi proposta por [24]. Sua função de probabilidade é dada por:

$$\Pr[X = x] = e^{-\alpha(e^\theta - 1) - r\theta} \frac{\theta^x}{x!} B_{x,r}(\alpha), \quad x \in \mathbb{N}_0 \text{ e } \theta, \alpha, r > 0,$$

onde

$$B_{x,r}(\alpha) = \frac{1}{e^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+r)^x}{k!} \alpha^k.$$

A função geradora de polinômios r-Bell tem a seguinte estrutura:

$$\varrho_x(\theta) := e^{x(e^\theta - 1) + r\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,r}(x) \frac{\theta^n}{n!}.$$

A distribuição r-Bell é equivalente à distribuição "Short", e esta decorre da convolução de uma variável aleatória Neyman Tipo A com outra Poisson[25, 26]. A distribuição Bell-Touchard equivale à distribuição Neyman Tipo A, mediante uma parametrização conveniente [22, Remark 8]. A diferença entre elas é que, na distribuição Neyman Tipo A, temos uma variável aleatória Poisson composta na qual as variáveis somadas são Poisson, na distribuição Bell-Touchard, as variáveis somadas são Poisson truncada em zero. Essa diferença decorre, justamente, da escolha de parâmetros. A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória Neyman Tipo A é da seguinte forma[26]:

$$\Pr[X = x] = \theta^x \frac{e^{-\lambda}}{x!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{-\theta})^k}{k!} k^x, \text{ com } \theta > 0, x \in \mathbb{N}_0.$$

Por ser membro da família Poisson múltipla, variáveis aleatórias seguindo distribuições Bell, Bell-Touchard e r-Bell podem ser escritas conforme (1.3), bastando, para isso, uma escolha conveniente para a sequência $\{c_n\}_{n\geq 1}$. Além disso, como essas distribuições são obtidas a partir da expansão em série de funções geradoras de polinômios Bell, os quais são do tipo binomial, as três distribuições são casos particulares da distribuição Poisson composta, o que está de acordo com a relação entre polinômios binomiais e a distribuição Poisson composta apontada por [19].

Embora essas distribuições sejam casos específicos da família Poisson múltipla, elas não foram exploradas sob uma abordagem de processos estocásticos por nenhum dos trabalhos citados, exceto [16], o qual obteve a distribuição Neyman Tipo A partindo da composição de processos Poisson. Dito isto, nesse trabalho, exploramos a distribuição Bell-Touchard utilizando uma abordagem complementar àquela empregada em [21], ou seja, no contexto de processos estocásticos. Isso equivale a investigar o processo $\{\xi(t),\, t \geq 0\}$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$, onde $c_n = \alpha\theta^n/n!, n \geq 1$, com $\alpha > 0$ e $\theta > 0$. Sendo assim, propomos um processo de contagem cuja distribuição dos incrementos é Bell-Touchard com parâmetros α, θ e exploramos suas principais propriedades.

1.2 POLINÔMIOS DE BELL

Os polinômios de Bell têm papel importante nesse trabalho, por conta disso, apresentamos alguns resultados acerca deles. Estas e outras propriedades interessantes podem ser exploradas em [27, 28, 29, 30].

Para qualquer $k \in \mathbb{N}_0$ e $x_i \in \mathbb{R}$, para todo $i \in \mathbb{N}$, os polinômios de Bell podem ser definidos pela Fórmula de Faà di Bruno, como segue:

$$B_k(x_1, \dots, x_k) := \sum_{r_1+2r_2+\cdots+kr_k=k} \frac{k!}{r_1!r_2!\cdots r_k!} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{r_1} \left(\frac{x_2}{2!}\right)^{r_2} \cdots \left(\frac{x_k}{k!}\right)^{r_k}. \tag{1.5}$$

Fixando $x = x_1 = x_2 = \cdots = x_k$ em (1.5) obtemos

$$B_0(x) := 1, \quad B_k(x) := \sum_{r_1+2r_2+\cdots+kr_k=k} \frac{k!}{r_1!r_2!\cdots r_k!} \frac{x^{r_1+r_2+\cdots+r_k}}{(1!)^{r_1}(2!)^{r_2}\cdots(k!)^{r_k}}, \tag{1.6}$$

que corresponde aos polinômios de Bell univariados.

Seja $\partial_\theta^n := d^n/d\theta^n$ o operador diferencial. Tomando (1.2) e usando ∂_θ^n obtemos

$$\begin{aligned} \partial_\theta^k \varphi_x(\theta) &= \sum_{n=k}^{\infty} B_n(x) n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\frac{\theta^{n-k}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+k}(x)(n+k)(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+1)\frac{\theta^n}{(n+k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+k}(x)\frac{\theta^n}{n!}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Dizemos que (1.7) corresponde à função geradora de polinômios Bell transladada em k posições.

Considere a função $f(\theta) = e^{xe^\theta}$ e sua expansão em série de Taylor:

$$e^{xe^\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xe^\theta)^k}{k!} \tag{1.8}$$

Derivando ambos os lados da expressão em relação à θ, obtemos:

$$e^{xe^\theta} xe^\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(xe^\theta)^k}{k!},$$

onde a operação de diferenciação é possível em decorrência do fato de que séries de potências são diferenciáveis em seu raio de convergência [31, capítulo 24]. Tomando a segunda derivada em relação à θ em ambos os lados obtemos:

$$e^{xe^\theta}[(xe^\theta)^2 + xe^\theta] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2(xe^\theta)^k}{k!}.$$

Fazendo o mesmo para a n-ésima derivada, podemos escrever o lado esquerdo da expressão resultante como o produto da função $f(\theta)$ com um polinômio $p_n(xe^\theta)$.

$$e^{xe^\theta} p_n(xe^\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n (xe^\theta)^k}{k!}. \tag{1.9}$$

Comparando o lado direito de (1.9) com (1.1), temos que $p_n(xe^\theta) = B_n(xe^\theta)$, levando-nos a:

$$\partial_\theta^n e^{xe^\theta} = B_n(xe^\theta) e^{xe^\theta}. \tag{1.10}$$

Partindo de (1.2), escrevendo $\varphi_x(\theta) = e^{x(e^\theta - 1)} = e^{xe^\theta} e^{-x}$ e usando (1.10) temos:

$$\partial_\theta^k \varphi_x(\theta) = B_k(xe^\theta) \varphi_x(\theta), \quad \text{(ver [14])}. \tag{1.11}$$

Segue como consequência de (1.11) e (1.7) que:

$$B_k(xe^\theta)\varphi_x(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+k}(x) \frac{\theta^n}{n!}. \tag{1.12}$$

Os polinômios de Bell são sequências binomiais, obedecendo à identidade:

$$B_n(x+y) = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} B_l(x) B_{n-l}(y), \text{ para } n \geq 0. \tag{1.13}$$

Esse resultado pode ser obtido tomando (1.2) e substituindo x por $x + y$, adotando a regra de Cauchy para o produto de séries infinitas,

$$e^{(x+y)(e^\theta - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x+y) \frac{\theta^n}{n!}, \tag{1.14}$$

mas temos também que

$$\begin{aligned} e^{(x+y)(e^\theta - 1)} &= \sum_{l=0}^{\infty} B_l(x) \frac{\theta^l}{l!} \sum_{n=0}^{\infty} B_n(y) \frac{\theta^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} B_l(x) B_{n-l}(y) \right\} \frac{\theta^n}{n!}, \end{aligned} \tag{1.15}$$

onde a troca de ordem dos somatórios decorre do Teorema de Fubini para séries infinitas [32, capítulo 7]. Logo, ao compararmos (1.14) e (1.15), obtemos (1.13).

1.3 DISTRIBUIÇÃO BELL-TOUCHARD

Nessa seção vamos recapitular algumas da propriedades da distribuição Bell-Touchard apresentadas em [23]. Além disso, apresentamos as demonstrações das proposições trazidas, complementando o trabalho original.

Definição 1.1. *Uma variável aleatória discreta Y é dita ter distribuição Bell-Touchard com parâmetros $(\alpha, \theta) \in \mathbb{R}_+^2$ se sua função de probabilidade é dada por*

$$\Pr[Y = y] = e^{-\alpha(e^{\theta}-1)} \frac{\theta^y}{y!} B_y(\alpha), \; y \in \mathbb{N}_0 \tag{1.16}$$

onde $B_y(\alpha)$ é o polinômio de Bell.

Usamos a notação $Y \sim BT(\alpha, \theta)$ para indicar que Y é uma variável aleatória Bell-Touchard com parâmetros (α, θ).

Proposição 1.1. *Seja $Y \sim BT(\alpha, \theta)$. Então a função geratriz de probabilidades de Y é dada por*

$$G_Y(s) = \exp\{\alpha(e^{s\theta} - e^{\theta})\}, \quad |s| < 1. \tag{1.17}$$

Demonstração. Segue de (1.16) e (1.2) e da definição de função geradora de probabilidades que

$$\begin{aligned}
G_Y(s) := \mathbb{E}[s^y] &= \sum_{y=0}^{\infty} s^y \Pr[Y = y] \\
&= e^{-\alpha(e^{\theta}-1)} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{B_y(\alpha)(s\theta)^y}{y!} \\
&= e^{-\alpha(e^{\theta}-1)} e^{\alpha(e^{s\theta}-1)} \\
&= \exp\{\alpha(e^{s\theta} - e^{\theta})\}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.2. *Seja uma sequência de variáveis aleatórias independentes $\{Y_i\}_{i=1}^n$ com $Y_i \sim BT(\alpha_i, \theta)$, então $\sum_{i=1}^n Y_i \sim BT(\alpha, \theta)$, com $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.*

Demonstração. Tomando a sequência $\{Y_i\}_{i=1}^n$, fazendo $Z = \sum_{i=1}^n Y_i$ e usando a Proposição 1.1 temos:

$$\begin{aligned}
G_Z(s) &= \prod_{i=1}^n G_{Y_i}(s) \\
&= \prod_{i=1}^n \exp\{\alpha_i(e^{s\theta} - e^{\theta})\} \\
&= \exp\{\sum_{i=1}^n \alpha_i(e^{s\theta} - e^{\theta})\}, \text{ fazendo } \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i \\
&= \exp\{\alpha(e^{s\theta} - e^{\theta})\}.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Como consequência da unicidade da função geradora de probabilidade, tem-se que a distribuição Bell-Touchard é fechada para convolução.

□

Proposição 1.3. *Se $Y \sim BT(\alpha, \theta)$, então a função geratriz de momentos de Y é dada por*

$$M_Y(t) = \exp\{\alpha e^{\theta}[e^{\theta(e^t-1)} - 1]\}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{1.19}$$

Demonstração. A demonstração segue da expansão em série da função de probabilidade da distribuição Bell-Touchard.

$$\begin{aligned} M_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}] &= \sum_{y=0}^{\infty} e^{ty} \Pr[Y = y] \\ &= e^{-\alpha(e^{\theta}-1)} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{B_y(\alpha)(e^t\theta)^y}{y!} \\ &= e^{-\alpha(e^{\theta}-1)} e^{\alpha(e^{e^t\theta}-1)} \\ &= \exp\{\alpha(e^{e^t\theta} - e^{\theta})\} \\ &= \exp\{\alpha e^{\theta}[e^{\theta(e^t-1)} - 1]\}. \end{aligned}$$

□

Tomando o logaritmo de (1.19), obtém-se a função geratriz de cumulantes da distribuição Bell-Touchard. Ademais, considerando $\mu_1^{'} = \mathbb{E}[Y]$ e $\mu_2^{'} = \mathbb{E}[Y^2]$, sabemos que $\mu_1^{'} = \kappa_1$ e $\mu_2^{'} = \kappa_2 + \kappa_1^2$, onde κ_1 e κ_2 são o primeiro e segundo cumulantes. A partir disso

$$\mathcal{K}(t) = \alpha e^{\theta}[e^{\theta(e^t-1)} - 1] \tag{1.20}$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial \mathcal{K}(t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= \kappa_1 = \alpha\theta e^{\theta}, \\ \left.\frac{\partial^2 \mathcal{K}(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} &= \kappa_2 = (\theta + 1)\alpha\theta e^{\theta}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Escrevendo os momentos como função dos cumulantes e usando o fato de que a variância pode ser definida como função dos dois primeiros momentos, obtemos a média e a variância para a distribuição em questão:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \alpha\theta e^{\theta}, \\ \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) &= \theta(\theta + 1)\alpha e^{\theta}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

2 O PROCESSO BELL-TOUCHARD

Nesse capítulo propomos o processo Bell-Touchard e investigamos suas principais propriedades. Além disso, propomos uma generalização para o processo, relaxando a hipótese de homogeneidade. Mostramos que o processo Bell-Touchard é membro da classe de processos Poisson múltiplos e que também pode ser visto como um processo Poisson iterado.

2.1 DEFINIÇÃO DO PROCESSO BELL-TOUCHARD

Um processo de contagem é um processo estocástico $\{N(t),\, t \geq 0\}$ onde $N(t)$ representa o número total de eventos que ocorrem no intervalo de comprimento t, com $N(t) \in \mathbb{N}_0$. Denota-se a probabilidade de ocorrência de k eventos no intervalo $[0, t)$ por $\Pr[N(t) = k]$, supondo ainda que $\Pr[N(0) = 0] = 1$, $\Pr[N(0) = k] = 0$, para $k > 0$, e $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \Pr[N(t) = k] = 1$. Ademais, um processo de contagem tem incrementos estacionários quando a probabilidade de ocorrência de k eventos em um intervalo $(t_1,\, t_2)$ depende somente de seu comprimento $t = t_2 - t_1$. Dizemos que o processo tem incrementos independentes quando eventos que ocorrem em intervalos disjuntos são independentes. Por fim, considere que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $o(s)$ se $\lim_{s \to 0} f(s)/s = 0$. Com isso, definimos o processo Bell-Touchard.

Definição 2.1. *Um processo de contagem $\{N(t),\, t \geq 0\}$ é dito ser um processo Bell-Touchard com parâmetros (α, θ) se as seguintes suposições são verdadeiras:*

1. $N(0) = 0$;
2. $\{N(t),\, t \geq 0\}$ *tem incrementos independentes e estacionários;*
3. $\Pr[N(t + s) - N(t) = k] = \alpha s \theta^k / k! + o(s)$, $k \in \mathbb{N}$ *e* $s > 0$.

As hipóteses da definição implicam que o processo Bell-Touchard apresenta saltos não unitários com probabilidade não-negligenciável. Outra consequência da definição é estabelecida no teorema seguinte.

Teorema 2.1. *Se $\{N(t),\, t \geq 0\}$ é um processo Bell-Touchard com parâmetros (α, θ) então $N(t) \sim BT(\alpha t, \theta)$, para todo $t \geq 0$.*

Para demonstrar o Teorema 2.1 usar-se-á o fato de que uma variável aleatória não negativa X, cuja função geradora de momentos é dada por $M_X(t)$, possui transformada de Laplace denotada por $g(t) = M_X(-t) = \mathbb{E}[e^{-tX}]$, para $t \geq 0$. Implicando, nesse caso, que a transformada de Laplace também determina univocamente a distribuição de probabilidade, ver [3, capítulo 2].

Prova. Seja

$$g(t) = \mathbb{E}[\exp\{-uN(t)\}], \text{ para todo } t,$$

vamos montar e solucionar uma equação diferencial para $g(t)$, observando que $g(0) = 1$.

$$\begin{aligned} g(t+s) &= \mathbb{E}[\exp\{-uN(t+s)\}] \\ &= \mathbb{E}[\exp\{-u(N(t) + N(t+s) - N(t))\}] \\ &= \mathbb{E}[\exp\{-uN(t)\}\exp\{-u(N(t+s) - N(t))\}] \\ &= \mathbb{E}[\exp\{-uN(t)\}]\mathbb{E}[\exp\{-u(N(t+s) - N(t))\}] \\ &= g(t)\mathbb{E}[\exp\{-uN(s)\}], \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde os dois últimos passos decorrem da hipótese de independência e estacionariedade dos incrementos. Como consequência da hipótese (3) da Definição 2.1, temos que

$$\begin{aligned} \Pr[N(s) = 0] &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[N(s) = k] \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha s \frac{\theta^k}{k!} + o(s) \\ &= 1 - \alpha s(e^{\theta} - 1) + o(s). \end{aligned}$$

Logo, condicionando em $N(s) = k$, para todo $k \in \mathbb{N}_0$, vemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp\{-u(N(s)\}] &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-uk} \Pr[N(s) = k] \\ &= 1 - \alpha s(e^{\theta} - 1) + o(s) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-uk} \alpha s \frac{\theta^k}{k!} \\ &= 1 - \alpha s(e^{\theta} - 1) + o(s) + \alpha s[e^{\theta e^{-u}} - 1] \\ &= 1 + \alpha s[e^{\theta e^{-u}} - e^{\theta}] + o(s). \end{aligned} \tag{2.2}$$

E a partir de (2.1) e (2.2), temos

$$g(t+s) = g(t)(1 + \alpha s[e^{\theta e^{-u}} - e^{\theta}]) + o(s),$$

de onde pode-se obter

$$\frac{g(t+s) - g(t)}{s} = g(t)\alpha[e^{\theta e^{-u}} - e^{\theta}] + \frac{o(s)}{s}$$

e fazendo $s \to 0$, tem-se

$$\frac{dg(t)}{dt} = g(t)\alpha[e^{\theta e^{-u}} - e^{\theta}].$$

Resolvendo a equação diferencial, obtemos

$$g(t) = \exp\{\alpha t e^{\theta}[e^{\theta(e^{-u}-1)} - 1]\},$$

que corresponde a transformada de Laplace de uma variável aleatória $X \sim BT(\alpha t, \theta)$, ou ainda, a função geradora de momentos (1.19) avaliada em $-t$.

$\square$

Como consequência do Teorema 2.1, apresentamos uma definição alternativa ao processo Bell-Touchard.

Definição 2.2. *Um processo de contagem $\{N(t),\, t \geq 0\}$ é dito ser um processo Bell-Touchard com parâmetros (α, θ) se as seguintes suposições são verdadeiras.*

1. $N(0) = 0$;
2. $\{N(t),\, t \geq 0\}$ *tem incrementos independentes e estacionários;*
3. $\Pr[N(t) = k] = e^{-\alpha t(e^{\theta}-1)}\frac{\theta^k}{k!}B_k(\alpha t),\ k \in \mathbb{N}_0$,

onde $B_k(\alpha)$ é o k-ésimo polinômio de Bell avaliado em α.

2.2 PROPRIEDADES

Considere um processo Poisson múltiplo $\{\xi(t),\, t \geq 0\}$ dependendo da sequência real não negativa $\{c_n\}_{n\geq 1}$ com $\sum c_n < \infty$. O próximo resultado estabelece que o processo Bell-Touchard é também um processo Poisson múltiplo.

Proposição 2.1. *Se $\{N(t), t \geq 0\}$ é um processo Bell-Touchard com parâmetros (α, θ), então $N(t)$ tem função de probabilidade dada por* (1.4) *com $c_n = \alpha\theta^n/n!$.*

Demonstração. A partir do Teorema 2.1, tomando (1.16) e substituindo $B_y(\alpha t)$ pela definição dada em (1.6) e fazendo $k = y$ tem-se que

$$\Pr[N(t) = k] = \theta^k e^{-\alpha t(e^{\theta}-1)} \sum_{r_1+2r_2+\cdots+kr_k=k} \frac{(\alpha t)^{r_1+r_2+\ldots r_k}}{(1!)^{r_1}(2!)^{r_2}\ldots(k!)^{r_k} r_1! r_2! \ldots r_k!},$$

mas $k = r_1 + 2r_2 + \cdots + kr_k$ tal que $\theta^k = \theta^{r_1+2r_2+\cdots+kr_k}$, então

$$\Pr[N(t) = k] = e^{-\alpha t(e^\theta - 1)} \sum_{r_1+2r_2+\cdots+kr_k=k} \frac{\theta^{r_1+2r_2+\cdots+kr_k}(\alpha t)^{r_1+r_2+\ldots r_k}}{(1!)^{r_1}(2!)^{r_2}\ldots(k!)^{r_k} r_1! r_2! \ldots r_k!}.$$

Expandindo a exponencial na última expressão em série de Taylor centrada em zero e combinando $\theta' s$ e $\alpha t' s$ sob os expoentes $r' s$ obtemos

$$\Pr[N(t) = k] = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \alpha t \frac{\theta^n}{n!}\right\} \sum_{r_1+2r_2+\cdots+kr_k=k} \frac{(t\alpha\theta)^{r_1}(t\alpha\theta^2)^{r_2}\ldots(t\alpha\theta^k)^{r_k}}{(1!)^{r_1}(2!)^{r_2}\ldots(k!)^{r_k} r_1! r_2! \ldots r_k!}.$$

Comparando a última expressão com (1.4), pode-se observar que $c_n = \alpha\theta^n/n!$, então a sequência convergente é dada por $\{c_n = \alpha\theta^n/n!\}_{n\geq 1}$, finalizando a demonstração.

□

Outra propriedade do processo Bell-Touchard diz respeito aos tempos de espera. Primeiro define-se, para todo $i \in \mathbb{N}$, a variável aleatória $\tau_i := \inf\{t > 0 \mid N(t) - N(\tau_{i-1}) \geq 1\}$, com $\tau_0 = 0$.

Proposição 2.2. *$\tau_1, \tau_2, \ldots$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, as quais seguem uma distribuição exponencial com parâmetro $\lambda = \alpha(e^\theta - 1)$.*

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 2.1 que $\tau_1 \sim$ Exp$(\alpha(e^\theta - 1))$. Para ver isso, basta notar que

$$\Pr[\tau_1 > t] = \Pr[N(t) = 0] = e^{-\alpha t(e^\theta - 1)}.$$

Para τ_2, vemos que

$$\begin{aligned}
\Pr[\tau_2 > s \mid \tau_1 = t] &= \Pr[0 \text{ eventos em } (t, t+s] \mid \tau_1 = t], \\
&= \Pr[0 \text{ eventos em } (t, t+s]], \ \text{(pelos incrementos independentes)} \\
&= e^{-\alpha s(e^\theta - 1)} \ \text{(pelos incrementos estacionários)},
\end{aligned}$$

seguindo indutivamente para $i \geq 2$, finaliza-se a demonstração.

□

Definimos os tempos de chegada de $\{N(t), t \geq 0\}$ por $\delta_n := \sum_{i=0}^{n} \tau_i$. Isto é, δ_n denota o comprimento do intervalo dentro do qual temos ocorrências do processo. Como os saltos do processo Bell-Touchard têm magnitude maior ou igual a um (de acordo com a Definição 2.1), então $N(\delta_n) \geq n$. Ou seja, o número de pontos em um intervalo de tempo será maior ou igual ao número de saltos do processo naquele mesmo intervalo, com $N(\delta_n) = n$ ocorrendo apenas no caso de todos os saltos apresentarem tamanho unitário. Isso mostra que estamos diante de um processo Poisson composto. Note que aqui estabelecemos uma distinção entre o número de saltos e o número de pontos do processo, onde o número de pontos em um salto corresponde ao tamanho desse salto, definido em $\mathbb{N}$.

Proposição 2.3. *Seja $\{M(t), t \geq 0\}$ um processo Poisson com parâmetro $\alpha(e^\theta - 1)$ e seja $\{X_i\}_{i\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas que também são independentes de $\{M(t), t \geq 0\}$ e que têm distribuição de probabilidade dada por*

$$\Pr[X_i = x] = \frac{\theta^x / x!}{e^\theta - 1}, \text{ para todo } x \in \mathbb{N}.$$

Então, temos a seguinte igualdade em distribuição:

$$N(t) \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{M(t)} X_i, \text{ para } t \geq 0. \tag{2.3}$$

Onde $N(t)$ é o número de eventos de um processo Bell-Touchard no intervalo $(0, t]$.

Demonstração. Seja $\gamma(s) = \mathbb{E}[s^{X_i}]$ a função geradora de probabilidade de X_i, então

$$\gamma(s) = \frac{e^{\theta s} - 1}{e^\theta - 1}. \tag{2.4}$$

Considerando (2.3),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[s^{N(t)}] &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}[s^{\sum_{i=1}^{M(t)} X_i} | M(t)]\} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha t(e^\theta - 1)}[\alpha t(e^\theta - 1)]^i}{i!} \gamma(s)^i \\
&= \exp\{-\alpha t(e^\theta - 1)(1 - \gamma(s))\} \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

e substituindo (2.4) em (2.5) obtemos

$$G_{N(t)}(s) := \mathbb{E}[s^{N(t)}] = \exp\{\alpha t[e^{\theta s} - e^\theta]\} \text{ para } |s| < 1, \tag{2.6}$$

a função geradora de probabilidades de uma variável aleatória Bell-Touchard com parâmetros αt e θ, como pode ser visto em (1.17) na Proposição 1.1.

□

A partir da Proposição 2.3, vemos que o processo Bell-Touchard é membro da família de processos do tipo Poisson composto, com as variáveis convolucionadas seguindo uma distribuição Poisson truncada em zero.

O próximo resultado diz respeito a superposição de processos Bell-Touchard, que trata-se da combinação de n processos independentes. Nesse caso, o processo decorrente da soma de n processos Bell-Touchard é um processo Bell-Touchard, considerando que os processos têm o mesmo parâmetro θ.

Proposição 2.4. *Seja* $\{N_i(t), t \geq 0\}_{i\in\mathbb{N}}$ *uma família de processos Bell-Touchard com respectivos parâmetros* $\{\alpha_i, \theta\}_{i\in\mathbb{N}}$ *e seja* $\tilde{N}_n(t) = \sum_{i=1}^{n} N_i(t)$*, para todo* $t \geq 0$*. Então* $\{\tilde{N}_n(t), t \geq 0\}$ *é um processo Bell-Touchard com parâmetros* $(\tilde{\alpha}_n, \theta)$*, onde* $\tilde{\alpha}_n := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$*.*

Demonstração. A demonstração será feita por indução. Para n, assumimos que a distribuição de $\tilde{N}_n(t)$ é dada por:

$$\Pr[\tilde{N}_n(t) = k] = e^{-\tilde{\alpha}_n t(e^\theta - 1)}\frac{\theta^k}{k!}B_k(\tilde{\alpha}_n t)$$

Para $n = 2$, fazemos

$$\begin{aligned}
\Pr[N_1(t) + N_2(t) = k] &= \sum_{i=0}^{k} \Pr[N_1(t) = i]\Pr[N_2(t) = k - i] \\
&= \sum_{i=0}^{k} e^{-\alpha_1 t(e^\theta - 1)}\frac{\theta^i}{i!}B_i(\alpha_1 t)e^{-\alpha_2 t(e^\theta - 1)}\frac{\theta^{k-i}}{(k-i)!}B_{k-i}(\alpha_2 t) \\
&= e^{-(\alpha_1 t + \alpha_2 t)(e^\theta - 1)}\frac{\theta^k}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}B_i(\alpha_1 t)B_{k-i}(\alpha_2 t) \\
&= e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t(e^\theta - 1)}\frac{\theta^k}{k!}B_k((\alpha_1 + \alpha_2)t) \\
\Pr[\tilde{N}_2(t) = k] &= e^{-\tilde{\alpha}_2 t(e^\theta - 1)}\frac{\theta^k}{k!}B_k(\tilde{\alpha}_2 t)
\end{aligned}$$

Assumimos a hipótese indutiva para n. Sendo assim, considerando $n + 1$, temos

$$\begin{aligned}
\Pr[\tilde{N}_n(t) + N_{n+1}(t) = k] &= \sum_{i=0}^{k} \Pr[\tilde{N}_n(t) = i]\Pr[N_{n+1}(t) = k - i] \\
&= \sum_{i=0}^{k} e^{-\tilde{\alpha}_n t(e^\theta - 1)}\frac{\theta^i}{i!}B_i(\tilde{\alpha}_n t)e^{-\alpha_{n+1} t(e^\theta - 1)}\frac{\theta^{k-i}}{(k-i)!}B_{k-i}(\alpha_{n+1} t) \\
&= e^{-(\tilde{\alpha}_n t + \alpha_{n+1} t)(e^\theta - 1)}\frac{\theta^k}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}B_i(\tilde{\alpha}_n t)B_{k-i}(\alpha_{n+1} t) \\
&= e^{-(\tilde{\alpha}_n + \alpha_{n+1})t(e^\theta - 1)}\frac{\theta^k}{k!}B_k((\tilde{\alpha}_n + \alpha_{n+1})t) \\
\Pr[\tilde{N}_{n+1}(t) = k] &= e^{-\tilde{\alpha}_{n+1} t(e^\theta - 1)}\frac{\theta^k}{k!}B_k(\tilde{\alpha}_{n+1} t),
\end{aligned}$$

concluindo assim a demonstração.

□

Suponha que temos dois processos Bell-Touchard $\{N_1(t), t \geq 0\}$ e $\{N_2(t), t \geq 0\}$, com respectivos parâmetros (α_1, θ_1) e (α_2, θ_2) e queremos formar o processo $\{V(t), t \geq 0\}$ onde $V(t) = N_1(t) + N_2(t)$. Nesse caso, o processo resultante não é um processo Bell-Touchard, mas pode ser facilmente obtido a partir das propriedades da família Poisson composta. Nesse caso, pode-se usar do fato de que processos Poisson compostos são fechados para soma (ver [3, capítulo 5]).

Proposição 2.5. *Sejam $\{N_1(t), t \geq 0\}$ e $\{N_2(t), t \geq 0\}$, processos Bell-Touchard com respectivos parâmetros (α_1, θ_1) e (α_2, θ_2), e seja $\nu(\theta_i) := e^{\theta_i} - 1$. Então $\{V(t), t \geq 0\}$ com $V(t) = N_1(t) + N_2(t)$ é um processo poisson composto com*

$$V(t) = \sum_{i=1}^{J(t)} X_i \text{ para } t \geq 0,$$

onde $\{J(t), t \geq 0\}$ é um processo Poisson com parâmetro $\lambda = \alpha_1\nu(\theta_1) + \alpha_2\nu(\theta_2)$ e a distribuição de probabilidade de X_i dada por:

$$\Pr[X_i = x] = \frac{\theta_1^x + \theta_2^x}{[\nu(\theta_1) + \nu(\theta_2)]x!}, \ x \in \mathbb{N}_0.$$

Demonstração. Seja $\lambda_i = \alpha_i t(e^{\theta_i} - 1)$. Substituindo λ_i em (2.5), vemos

$$\begin{aligned} G_{V(t)}(s) &= \exp\{\lambda_1(\gamma_1(s) - 1) + \lambda_2(\gamma_2(s) - 1)\} \\ &= \exp\{\lambda_1\gamma_1(s) + \lambda_2\gamma_2(s) - \lambda_1 - \lambda_2)\} \\ &= \exp\{-\lambda[1 - \gamma(s)]\} \end{aligned}$$

onde $\gamma(s) = (\lambda_1\gamma_1(s) + \lambda_2\gamma_2(s))/\lambda$ e $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

□

Outra propriedade interessante trata-se da decomposição de um processo Bell-Touchard $\{N(t), t \geq 0\}$. Considere o número de ocorrências $N(t)$ desse processo em um intervalo de comprimento t. Assumimos também que tais ocorrências são classificadas como do tipo I com probabilidade p e do tipo II com probabilidade $1 - p$. Define-se $N_1 := N_1(t)$ como sendo o número de eventos do tipo I. Dizemos que N_1 é uma decomposição de $N := N(t)$.

Teorema 2.2. *Seja $\{N(t), t \geq 0\}$ um processo Bell-Touchard com parâmetros (α, θ). Se $\{N_1(t), t \geq 0\}$ é uma decomposição de $\{N(t), t \geq 0\}$ com a proporção de eventos $N_1(t)$*

dada por p, então $N_1(t)$ tem distribuição de probabilidade dada por

$$\Pr[N_1(t)=k]=\frac{(p\theta)^k}{k!}\exp\{-\alpha t\widetilde{\theta}(e^{p\theta}-1)\}B_k(\alpha t\widetilde{\theta}), \tag{2.7}$$

onde $\widetilde{\theta} := e^{(1-p)\theta}$.

Prova do Teorema 2.2. Note que a distribuição condicional de N_1 dado que $N=n$ é binomial com parâmetros n, p. Ou seja

$$\Pr[N_1=k|N=n]=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Condicionando em N, tem-se que

$$\begin{aligned}
\Pr[N_1=k] &= \sum_{n=k}^{\infty}\Pr[N_1=k|N=n]\Pr[N=n] \\
&= \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\frac{\theta^n}{n!}e^{-\alpha t(e^{\theta}-1)}B_n(\alpha t) \\
&= e^{-\alpha t(e^{\theta}-1)}\frac{(p\theta)^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}(1-p)^{n-k}\frac{\theta^{n-k}}{(n-k)!}B_n(\alpha t) \\
&= e^{-\alpha t(e^{\theta}-1)}\frac{(p\theta)^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}B_{n+k}(\alpha t)\frac{((1-p)\theta)^n}{n!},
\end{aligned}$$

mas de (1.12)

$$\Pr[N_1=k]=e^{-\alpha t(e^{\theta}-1)}\frac{(p\theta)^k}{k!}B_k(\alpha te^{(1-p)\theta})\varphi_{\alpha t}((1-p)\theta),$$

e a partir de (1.2), tem-se que $\varphi_{\alpha t}((1-p)\theta)=e^{\alpha t[e^{(1-p)\theta}-1]}$ e, portanto

$$\begin{aligned}
\Pr[N_1=k] &= e^{-\alpha t(e^{\theta}-1)}\frac{(p\theta)^k}{k!}B_k(\alpha te^{(1-p)\theta})e^{\alpha t[e^{(1-p)\theta}-1]} \\
&= \frac{(p\theta)^k}{k!}e^{-\alpha te^{(1-p)\theta}(e^{p\theta}-1)}B_k(\alpha te^{(1-p)\theta})
\end{aligned}$$

e finaliza-se a demonstração fazendo $\widetilde{\theta} := e^{(1-p)\theta}$ na expressão anterior.

□

Uma consequência do Teorema 2.2 é que $N_1(t)$ também é um processo Bell-Touchard. Usando o mesmo método, pode-se deduzir a distribuição de $N_2(t)$, assumindo que a proporção de eventos, nesse caso, é dada por $1-p$. Embora os processos resultantes da decomposição descrita sejam do tipo Bell-Touchard, eles não são independentes. Pode-se verificar isso encontrando a função de probabilidade conjunta de $(N_1(t), N_2(t))$. Considere

$$N(t)=N_1(t)+N_2(t).$$

E sejam n e k inteiros positivos. Note que

$$\Pr[N_1(t) = k, N_2(t) = n] = \Pr[N_1(t) = k, N_2(t) = n | N(t) = n + k] \Pr[N(t) = n + k].$$

Mas dado que $N(t) = n + k$, considerando que as ocorrências de eventos do tipo I e do tipo II sejam independentes de quaisquer outros eventos, temos que o número de eventos do tipo I segue uma distribuição binomial com parâmetros $n + k$ e p. Portanto

$$\Pr[N_1(t) = k, N_2(t) = n | N(t) = n + k] = \binom{n+k}{k} p^k (1-p)^n.$$

Combinando esses resultados, temos

$$\Pr[N_1(t) = k, N_2(t) = n] = \binom{n+k}{k} p^k (1-p)^n e^{-\alpha t(e^\theta - 1)} \frac{(\alpha t)^{n+k}}{(n+k)!} B_{n+k}(\alpha t). \tag{2.8}$$

Mas como não podemos fatorar $B_{n+k}(\alpha t)$ como um produto de funções de n e k, não podemos obter $\Pr[N_1(t) = k, N_2(t) = n] = \Pr[N_1(t) = k] \Pr[N_2(t) = n]$, implicando que $N_1(t)$ e $N_2(t)$ não são independentes.

Poder-se-ia questionar o resultado anterior, afinal, o único fato que sustenta tal resultado é o de não podermos fatorar $B_{n+k}(\alpha t)$. Pode-se contornar isso usando a função geradora de momentos de (2.8). Note que tal função geradora de momentos é dada por:

$$M_{N_1,N_2}(t_1, t_2) = \exp\{\alpha t[e^{\theta(pe^{t_2} + qe^{t_1})} - e^\theta]\}, \text{ onde } q = 1 - p. \tag{2.9}$$

Note também que

$$M_{N_1}(t_1) = M_{N_1,N_2}(t_1, 0) = \exp\{\alpha t[e^{\theta(p + qe^{t_1})} - e^\theta]\}$$
$$M_{N_2}(t_2) = M_{N_1,N_2}(0, t_2) = \exp\{\alpha t[e^{\theta(pe^{t_2} + q)} - e^\theta]\}.$$

Agora basta usarmos o fato de que N_1 e N_2 são independentes se, e somente se, $M_{N_1,N_2}(t_1, t_2) = M_{N_1}(t_1) M_{N_2}(t_2)$. E como isso não é verdadeiro para (2.9), N_1 e N_2 não são independentes (para uma demonstração desse resultado, ver [33, capítulo 8]).

Para mostrar que $N_1(t)$ é um processo Bell-Touchard, devemos mostrar que $\{N_1(t), t \geq 0\}$ possui incrementos estacionários. Assim, para $s < t$ e qualquer $k \in \mathbb{N}$

$$\Pr[N_1(t) - N_1(s) = k] = \sum_{n \geq 0} \Pr[N_1(t) - N_1(s) = k, N(t) - N(s) = n + k].$$

Ao condicionarmos em $N(s) - N(t) = n + k$, a distribuição de $N_1(t) - N_1(s)$ é binomial com parâmetros $n + k$ e p. Daí

$$\Pr[N_1(t) - N_1(s) = k] = \sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{k} p^k (1-p)^n \Pr[N(t) - N(s) = n + k],$$

e como $N(s) - N(t) \sim BT(\alpha(t-s), \theta)$, segue

$$\begin{aligned}
\Pr[N_1(t) - N_1(s) = k] &= \sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{k} p^k (1-p)^n \exp[-\alpha(t-s)(e^{\theta} - 1)] \frac{\theta^{n+k}}{(n+k)!} B_{n+k}(\alpha(t-s)), \\
&= \exp[-\alpha(t-s)\widetilde{\theta}(e^{p\theta} - 1)] \frac{(p\theta)^k}{k!} B_k(\alpha(t-s)\widetilde{\theta}),
\end{aligned}$$

onde o resultado obtido segue da aplicação do mesmo método usado na prova do Teorema 2.2 e fazendo $\widetilde{\theta} := e^{(1-p)\theta}$. Isso mostra que a distribuição de $N_1(t) - N_1(s)$ só depende do comprimento do intervalo $(s, t]$. Assim, temos o corolário seguinte.

Corolário 2.2.1. $\{N_1(t), t \geq 0\}$ *é um processo Bell-Touchard com parâmetros* (α^*, θ^*). *Onde* $\alpha^* := \alpha e^{(1-p)\theta}$ *e* $\theta^* := p\theta$, *com* $p \in (0, 1)$.

O Teorema 2.2 pode ser generalizado para qualquer número finito de decomposições. Sumarizamos isso no corolário seguinte.

Corolário 2.2.2. *Seja* $\{N_i(t), t \geq 0\}$ *a* i*-ésima decomposição de um processo Bell-Touchard* $\{N(t), t \geq 0\}$ *com parâmetros* (α, θ), *tal que a proporção de eventos da* i*-ésima decomposição é denotada por* p_i, *onde* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *e* $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. *Então* $\{N_i(t), t \geq 0\}$ *é um processo Bell-Touchard com parâmetros* $\alpha_i^* := \alpha e^{(1-p_i)\theta}$ *e* $\theta_i^* := p_i\theta$.

Definição 2.3. *Considere dois processos Poisson homogêneos e independentes* $\{N_1(t), t \geq 0\}$ *com parâmetro* $\nu > 0$ *e* $\{N_2(t), t \geq 0\}$ *com parâmetro* $\omega > 0$. *O processo* $\{\hat{N}(t), t > 0\}$ *onde* $\hat{N}(t) := N_1(N_2(t))$, *para* $t > 0$ *é denominado processo Poisson iterado.*

Nesse caso, vemos que o processo $\{\hat{N}(t), t > 0\}$ é obtido através de uma operação de composição de $\{N_1(t), t \geq 0\}$ e $\{N_2(t), t \geq 0\}$. Além disso, sua trajetória ocorre sobre aquela do processo mestre (aquele com parâmetro ω). Mais detalhes sobre a composição de processos Poisson podem ser vistos em [16, 34].

Teorema 2.3. *O processo iterado* $\{\hat{N}(t), t > 0\}$ *é Bell-Touchard com parâmetros* $\alpha := \omega e^{-\nu}$ *e* $\theta := \nu$.

Demonstração. Note que

$$\Pr[\hat{N}(t) = k] = \sum_{r=0}^{\infty} \Pr[N_1(r) = k | N_2(t) = r] \Pr[N_2(t) = r],$$

mas como os processos são independentes

$$\begin{aligned}\Pr[\hat{N}(t) = k] &= \sum_{r=0}^{\infty} \Pr[N_1(r) = k] \Pr[N_2(t) = r],\\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{e^{-\nu r}(\nu r)^k}{k!} \frac{e^{-\omega t}(\omega t)^r}{r!},\\ &= \frac{e^{-\omega t}\nu^k}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r^k(\omega t e^{-\nu})^r}{r!},\end{aligned}$$

multiplicando a última igualdade por $e^{-\omega t e^{-\nu}}/e^{-\omega t e^{-\nu}}$ e usando (1.1), temos

$$\Pr[\hat{N}(t) = k] = e^{-\omega t e^{-\nu}[e^{\nu}-1]} \frac{\nu^k}{k!} B_k(\omega t e^{-\nu}), \qquad k \geq 0, t > 0.$$

Onde a última expressão corresponde à distribuição de probabilidade de uma variável aleatória Bell-Touchard com $\alpha := \omega e^{-\nu}$ e $\theta := \nu$. $\square$

2.3 GENERALIZAÇÕES

Nessa seção introduzimos o processo Bell-Touchard não-homogêneo. Apresentamos também um resultado relacionado à composição de um processo Poisson não-homogêneo por um processo Poisson homogêneo, indicando que o processo decorrente seja Bell-Touchard não-homogêneo.

Definição 2.4. *Um processo de contagem $\{N(t),\, t \geq 0\}$ é dito ser um processo Bell-Touchard não-homogêneo com parâmetros $(\alpha(t), \theta)$, com $\alpha(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, se as suposições seguintes são válidas.*

1. $N(0) = 0$;
2. $\{N(t),\, t \geq 0\}$ *tem incrementos independentes;*
3. $\Pr[N(t+s) - N(t) = k] = \alpha(t)s\theta^k/k! + o(s)$.

Note que aqui fixamos θ e definimos o parâmetro $\alpha(t)$ como uma função do tempo. Definimos a função

$$m(t) := \int_0^t \alpha(w)dw,$$

e a denominamos função média de saltos.

Lema 2.1. *Seja* $\{N(t), t \geq 0\}$ *um processo Bell-Touchard não-homogêneo e seja* $N_t(s) = N(t+s) - N(t)$ *com* $s \geq 0$*. Então* $\{N_t(s), t \geq 0\}$ *é também um processo Bell-Touchard não-homogêneo com* $\alpha_t(s) = \alpha(t+s)$*.*

A função média de saltos de $N_t(s)$ é dada por

$$\begin{aligned} m_t(s) &= \int_0^s \alpha_t(w)dw \\ &= \int_0^s \alpha(t+w)dw \\ &= \int_t^{t+s} \alpha(u)du \\ m_t(s) &= m(t+s) - m(s). \end{aligned}$$

Posto isto, apresentamos o próximo teorema, o qual estabelece que para um processo Bell-Touchard não-homogêneo vale que $N(t) \sim BT(m(t), \theta)$.

Teorema 2.4. *Seja* $\{N(t), t \geq 0\}$ *um processo Bell-Touchard não-homogêneo com parâmetros* $(\alpha(t), \theta)$*. Então* $N(t)$ *tem função de probabilidade dada por*

$$\Pr[N(t) = k] = \exp\{-m(t)(e^\theta - 1)\}\frac{\theta^k}{k!}B_k(m(t)). \tag{2.10}$$

Prova do Teorema 2.4. Assim como na demonstração do Teorema 2.1, escrevemos

$$g(t) = \mathbb{E}[\exp\{-uN(t)\}].$$

Vamos montar e solucionar uma equação diferencial para $g(t)$.

$$\begin{aligned} g(t+s) &= \mathbb{E}[\exp\{-uN(t+s)\}] \\ &= \mathbb{E}[\exp\{-u(N(t) + N(t+s) - N(t))\}] \\ &= \mathbb{E}[\exp\{-uN(t)\}\exp\{-u(N(t+s) - N(t))\}] \\ &= g(t)\mathbb{E}[\exp\{-uN_t(s)\}], \end{aligned} \tag{2.11}$$

onde o último passo decorre da hipótese de independência de incrementos. Como consequência da hipótese (3) da Definição 2.4, vemos que

$$\Pr[N_t(s) = 0] = 1 - \alpha(s+t)s(e^\theta - 1) + o(s).$$

Assim, condicionando em $N_t(s) = k, \forall k \in \mathbb{N}_0$ e usando o Lema 2.1, tem-se que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\exp\{-uN_t(s)\}] &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-uk} \Pr[N_t(s) = k] \\
&= 1 - \alpha(t+s)s(e^{\theta} - 1) + o(s) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-uk}\alpha(t+s)s\frac{\theta^k}{k!} \\
&= 1 + \alpha(t+s)s[e^{\theta e^{-u}} - e^{\theta}] + o(s) \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Logo, a partir de (2.11) e (2.12), tem-se que

$$g(t+s) = g(t)(1 + \alpha(t+s)s[e^{\theta e^{-u}} - e^{\theta}]) + o(s),$$

de onde obtém-se

$$\frac{g(t+s) - g(t)}{s} = g(t)\alpha(t+s)[e^{\theta e^{-u}} - e^{\theta}] + \frac{o(s)}{s}$$

e fazendo $s \to 0$, tem-se

$$\frac{dg(t)}{dt} = g(t)\alpha(t)[e^{\theta e^{-u}} - e^{\theta}].$$

Resolvendo a equação diferencial com a condição inicial $g(0) = 1$, obtemos

$$g(t) = \exp\{m(t)e^{\theta}[e^{\theta(e^{-u}-1)} - 1]\}$$

que corresponde a transformada de Laplace de uma variável aleatória $X \sim BT(m(t), \theta)$, ou ainda, a função geradora de momentos (1.19) avaliada em $-t$, substituindo α por $m(t)$.

$\square$

Uma consequência do Teorema 2.4 e da Proposição 2.3 é que $\{N(t), t \geq 0\}$ é também um processo Poisson composto não-homogêneo. A demonstração desse fato pode ser obtida usando funções geradoras de probabilidades.

Teorema 2.5. *Seja o processo $\{\hat{\mathcal{N}}(t), t > 0\}$ com $\hat{\mathcal{N}}(t) = N_1(\mathcal{N}_2(t))$ onde $\{N_1(t), t \geq 0\}$ é um processo Poisson com parâmetro $\nu > 0$ e $\{\mathcal{N}_2(t), t \geq 0\}$ é um processo Poisson não-homogêneo com parâmetro $\lambda(t), t > 0$ (ambos independentes). Sendo assim, $\{\hat{\mathcal{N}}(t), t > 0\}$ é um processo Bell-Touchard não-homogêneo com parâmetros $\alpha := m(t)e^{-\nu}$ e $\theta := \nu$.*

Demonstração. A prova segue a mesma estratégia aplicada na demonstração do Teorema 2.3. Considerando a igualdade seguinte:

$$\Pr[\hat{\mathcal{N}}(t) = k] = \sum_{r=0}^{\infty} \Pr[N_1(r) = k | \mathcal{N}_2(t) = r] \Pr[\mathcal{N}_2(t) = r],$$

mas como os processos são independentes

$$\begin{aligned}
\Pr[\hat{\mathcal{N}}(t) = k] &= \sum_{r=0}^{\infty} \Pr[N_1(r) = k] \Pr[\mathcal{N}_2(t) = r], \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{e^{-\nu r}(\nu r)^k}{k!} \frac{e^{-m(t)} m(t)^r}{r!}, \\
&= \frac{e^{-m(t)}\nu^k}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{e^{-\nu r} r^k m(t)^r}{r!},
\end{aligned}$$

multiplicando a última igualdade por $e^{-m(t)e^{-\nu}}/e^{-m(t)e^{-\nu}}$ e usando (1.1), temos

$$\Pr[\hat{\mathcal{N}}(t) = k] = e^{-m(t)e^{-\nu}[e^{\nu}-1]} \frac{\nu^k}{k!} B_k(m(t)e^{-\nu}), \qquad k \geq 0, t > 0,$$

onde $m(t) := \int_0^t \lambda(s)ds$. Comparando a última igualdade com o Teorema 2.4 conclui-se a demonstração.

$\square$

3 SIMULAÇÃO E APLICAÇÕES

O objetivo desse capítulo é apresentar um modelo de simulação para o processo Bell-Touchard. Além disso, também propomos uma aplicação em teoria da ruína.

3.1 SIMULAÇÃO DO PROCESSO BELL-TOUCHARD

Considere uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas $\{X_i\}_{i\geq 1}$ e seja $N \in \mathbb{N}$ uma variável aleatória independente da sequência $\{X_i\}_{i\geq 1}$. Então

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{3.1}$$

é dita ser uma variável aleatória composta. Chamaremos X_i de variáveis de convolução. As identidades seguintes são válidas para (3.1) (para demonstrações ver [3]).

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_N] &= \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X], \\ \mathbb{V}\mathrm{ar}[S_N] &= \mathbb{E}[N]\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] + [\mathbb{E}[X]]^2\mathbb{V}\mathrm{ar}[N]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Definição 3.1. *Seja $\{Z_i\}_{i=1}$ uma sequência de variáveis aleatórias e $\{N(t), t \geq 0\}$ um processo Bell-Touchard com parâmetros (α, θ). Então*

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i,\ t \geq 0 \tag{3.3}$$

é um processo Bell-Touchard composto.

Considerando a Proposição 2.3 e a Definição 3.1 podemos reescrever (3.3) como

$$X(t) = \sum_{i=1}^{M(t)} \sum_{j=1}^{X_i} Z_i,\ t \geq 0.$$

Sabemos, pela Proposição 2.3, que o processo Bell-Touchard é também um processo Poisson composto, com $N(t)$ podendo ser descrito como segue.

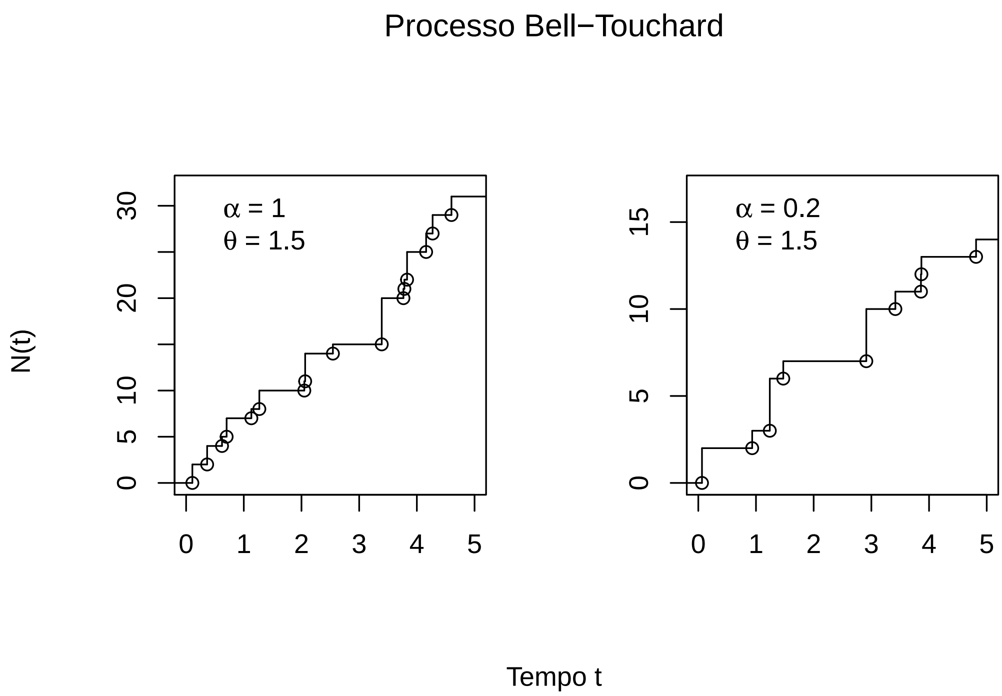
$$N(t) \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{M(t)} X_i,$$

onde $\{M(t), t \geq 0\}$ é um processo Poisson com taxa $\lambda = \alpha(e^\theta - 1)$ e X_i é uma variável aleatória Poisson truncada em zero, cuja distribuição de probabilidade é denotada por:

$$\Pr[X_i = x] = \frac{\theta^x / x!}{e^\theta - 1},\ \text{para todo } (i, x) \in \mathbb{N}^2.$$

Com isso, podemos simular o processo Bell-Touchard. Para tanto, geramos um processo Poisson com taxa $\lambda = \alpha(e^{\theta} - 1)$. Para cada salto desse processo, geramos um tamanho simulando a variável aleatória X. Diremos que X corresponde à intensidade do salto.

Figura 1 – Simulação de trajetórias do processo Bell-Touchard



Fonte: O autor (2022)

Vemos que o parâmetro θ controla tanto a quantidade de saltos quanto sua intensidade. Entretanto, ao aumentarmos θ, aumenta-se, exponencialmente, a quantidade de saltos, efeito esse que pode ser indesejado em alguns casos. Isso pode ser compensando através do parâmetro α, o qual controla apenas a quantidade de saltos. Nessas circuntâncias, ao modelarmos fenômenos de rara ocorrência (α pequeno), mas de alta intensidade (θ grande), poderíamos fazer uso dessas propriedades, isso para fins de simulação. Como a intensidade de saltos é controlada por θ, ao modelarmos eventos de frequência baixa, mas de alta intensidade, deve-se considerar a relação exponencial entre θ e a frequência de saltos. Nessas circunstâncias, escolher $\alpha := \gamma \exp{(-\theta)}$ poderia garantir a modelagem de eventos de alta intensidade e baixa fraquência, onde $\gamma > 0$. Nesse caso, estaríamos diante do processo iterado.

3.2 PROPOSTA DE APLICAÇÃO

Suponha que acidentes acontecem em determinada região segundo um processo Poisson $\{M(t), t \geq 0\}$ com taxa $\lambda = \alpha(e^{\theta} - 1)$, para α e θ definidos no conjunto dos números reais positivos. Suponha que em cada acidente ocorrido, o número de pessoas envolvidas X segue distribuição Poisson truncada em zero com parâmetro θ. Sendo assim, o número de vítimas durante um intervalo de tempo de comprimento $t > 0$, indicado por $N(t)$, é modelado segundo um processo Bell-Touchard(α, θ). Nesse caso, quantidades como a média de pessoas acidentadas e variância são facilmente deduzidas a partir das propriedades estudadas anteriormente. Supondo que ao selecionarmos aleatoriamente um indivíduo dentre o total de vítimas em um acidente, esse indivíduo selecionado será uma mulher com probabilidade p. Nesse caso, o número de mulheres acidentadas em um intervalo de tempo formaria uma decomposição do processo Bell-Touchard, que poderia ser analisado segundo as propriedades estudadas.

Suponha que cada uma das pessoas envolvidas sofre perda material que segue distribuição gama, cuja função densidade de probabilidade é a seguinte.

$$f_Y(y) = \frac{\beta^{\eta}}{\Gamma(\eta)} y^{\eta-1} e^{-\beta x}, \text{ com } (\beta, \eta) \in \mathbb{R}_+^2. \tag{3.4}$$

Como consequência, a perda material $\mathcal{L}(t)$ em um intervalo de tempo $t > 0$ segue um processo Bell-Touchard composto

$$\mathcal{L}(t) = \sum_{i=1}^{M(t)} \sum_{\ell=1}^{X_i} Y_\ell, \ t \geq 0. \tag{3.5}$$

Assumindo que as variáveis aleatórias Y_i sejam independentes e identicamente distribuídas, podemos reescrever (3.5) como:

$$\mathcal{L}(t) = \sum_{\ell=1}^{N(t)} Y_\ell, \ t \geq 0, \tag{3.6}$$

onde $\{N(t), t \geq 0\}$ é o processo Bell-Touchard que acabamos de definir. Segue de (3.2) e de $\mathbb{E}[Y_1] = \eta/\beta$ que:

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}(t)] = \alpha t \theta e^{\theta} \frac{\eta}{\beta}. \tag{3.7}$$

O processo de risco clássico[6] modela o saldo do capital de uma seguradora $R(t)$ ao longo do tempo $t \geq 0$, dado que ela tenha um capital inicial $u \geq 0$ e receba prêmios à uma taxa ρ por unidade de tempo t. Além disso, clientes notificam sinistros segundo um processo Poisson composto N_t, considerando que tais sinistros sejam independentes e cujo valor individual é uma variável aleatória positiva U_i. Tal processo é dado pela seguinte expressão.

$$\mathcal{R}_t = u + \rho t - \sum_{k=0}^{N_t} U_k. \tag{3.8}$$

Propomos uma modificação desse processo, substituindo (3.6) pelo processo Poisson composto em (3.8)

$$\mathcal{R}_t = u + \rho t - \mathcal{L}(t). \tag{3.9}$$

Além disso, existe uma constante ρ tal que o seguinte é verdade.

$$\frac{1}{t}\mathcal{L}(t) \xrightarrow{q.c} \rho, \quad t \to \infty. \tag{3.10}$$

Portanto, ρ corresponde ao valor médio de sinistros notificados. Considerando (3.10) e (3.7), definimos:

$$\rho_\varepsilon := (1+\varepsilon)\alpha\theta e^{\theta}\frac{\eta}{\beta}$$

onde $\varepsilon \geq 0$ é chamado carregamento de segurança. Como consequência, temos que:

$$\mathbb{E}[\mathcal{R}_t] = u + \varepsilon\alpha\theta e^{\theta}\frac{\eta}{\beta}.$$

Sendo assim, temos uma modificação do processo de risco clássico.

$$\mathcal{R}_t = u + \rho_\varepsilon t - \mathcal{L}(t), \tag{3.11}$$

no qual as notificações de sinistro chegam segundo um processo Bell-Touchard composto.

Considerando que $R_0 = u$, uma questão de interesse seria: qual a probabilidade de a seguradora entrar em ruína. Ou seja:

$$\psi(u) := \Pr[\inf_{t\geq 0} R_t < 0] = \Pr[\inf_{t\geq 0} R_t < 0 | R_0 = u]. \tag{3.12}$$

Nesse sentido, a ruína ocorre quando a reserva de capital da seguradora torna-se negativa pela primeira vez, para algum $t \geq 0$. Podemos reescrever $\psi(u)$ de outra forma, a começar por definir o tempo de ruína.

$$\tau(u) := \inf\{t \geq 0 : R_t < 0\},$$

daí (3.12) equivale a

$$\psi(u) = \Pr[\tau < \infty].$$

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho, foi proposto um novo processo de contagem baseado em uma distribuição Bell-Touchard, denominado processo Bell-Touchard. Para tanto, exploramos algumas propriedades relevantes dos polinômios de Bell, assim como apresentamos as principais propriedades da distribuição Bell-Touchard, considerando a proposta desse trabalho. Mostramos também que esse novo processo é membro da classe de processos Poisson múltiplos, assim como é um caso específico de um processo Poisson composto. Algumas propriedades do processo Bell-Touchard foram apresentadas e demonstradas, quando pertinente. Mostramos que o processo Bell-Touchard é fechado para convolução. Também vimos que a decomposição de um processo Bell-Touchard gera processos que são também Bell-Touchard não independentes. Mostramos que um processo iterado a partir de dois processos Poisson homogêneos e independentes é um processo Bell-Touchard.

Também apresentamos duas generalizações do processo, o processo Bell-Touchard não homogêneo e o processo Bell-Touchard composto. Verificamos que a iteração de um processo Poisson não homogêneo em um processo Poisson homogêneo gera um processo Bell-Touchard não homogêneo. Foi proposta uma estratégia de simulação do processo Bell-Touchard partindo do fato de que ele é um membro da classe dos processos Poisson compostos com o tamanho dos saltos seguindo uma variável aleatória Poisson truncada em zero. E, com isso, apresentamos uma proposta de aplicação em teoria da ruína, esta que decorre de uma modificação do processo clássico de risco (modelo Cramér-Lundberg).

O processo proposto pode ser aplicado em situações diversas, tais como, análise e modelagem de risco e catástrofes, teoria das filas, teoria da ruína e telecomunicações e serviços de atendimentos, pra citar algumas. Em tese, o processo Bell-Touchard poderia ser aplicado em qualquer situação onde a generalização do Processo Poisson para saltos com tamanhos maiores que um fosse necessária, mantendo ainda uma distribuição subjacente com forma conhecida e matematicamente tratável. Nesse trabalho também foi proposto um processo Bell-Touchard não homogêneo definindo o parâmetro $\alpha(t)$ para $t \geq 0$. Considerando isso, sugerimos como um trabalho futuro uma modificação do processo Bell-Touchard não homogêneo, tomando o parâmetro $\theta(t)$, para $t \geq 0$. Nesse caso, o processo resultante teria intensidade de saltos controlada por uma função $\theta : t \to [0, \infty)$. A grande vantagem dessa modificação seria a obtenção de um processo cujos tamanhos dos saltos fossem não estacionários. Adicionalmente, considerando a aplicação proposta, fica em aberto a possibilidade de obtenção de um limitante superior para a probabilidade de ruína, mediante uma modificação da desigualdade de Lundberg.

REFERÊNCIAS

[1] G. Last and M. Penrose, *Lectures on the Poisson process*, vol. 7. Cambridge University Press, 2017.

[2] J. F. C. Kingman, *Poisson processes*, vol. 3. Clarendon Press, 1992.

[3] S. M. Ross, *Introduction to probability models*. Academic press, 2010.

[4] R. B. Schinazi, *Classical and Spatial Stochastic Processes: With Applications to Biology*. Springer, 2014.

[5] H. Bühlmann, *Mathematical methods in risk theory*, vol. 172. Springer Science & Business Media, 2007.

[6] S. Asmussen and H. Albrecher, *Ruin probabilities*, vol. 14. World scientific, 2010.

[7] P. A. Ferrari and A. Galves, *Acoplamento e processos estocásticos*. IMPA Rio de Janeiro, 1997.

[8] N. Privault, *Understanding Markov Chains: Examples and Applications*. Springer, 2018.

[9] J.-L. A. Balakrishnan, *Statistics for Industry and Technology*. Springer, 2007.

[10] Y. Li and K. P. Sendova, "A surplus process involving a compound poisson counting process and applications," *Communications in Statistics-Theory and Methods*, vol. 49, no. 13, pp. 3238–3256, 2020.

[11] A. V. Boikov, "The cramer–lundberg model with stochastic premium process," *Theory of Probability & Its Applications*, vol. 47, no. 3, pp. 489–493, 2003.

[12] S. Li, C. Yin, X. Zhao, and H. Dai, "Stochastic interest model based on compound poisson process and applications in actuarial science," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2017, 2017.

[13] S. Noschese and P. E. Ricci, "Differentiation of multivariable composite functions and bell polynomials," *Journal of Computational Analysis and Applications*, vol. 5, no. 3, pp. 333–340, 2003.

[14] K. N. Boyadzhiev, "Exponential polynomials, stirling numbers, and evaluation of some gamma integrals," in *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2009, 2009.

[15] K. K. Kataria, P. Vellaisamy, and V. Kumar, "A probabilistic interpretation of the bell polynomials," *Stochastic Analysis and Applications*, pp. 1–13, 2021.

[16] E. Orsingher and F. Polito, "Compositions, random sums and continued random fractions of poisson and fractional poisson processes," *Journal of Statistical Physics*, vol. 148, no. 2, pp. 233–249, 2012.

[17] O. Khorunzhiy, "On asymptotic properties of bell polynomials and concentration of vertex degree of large random graphs," *Journal of Theoretical Probability*, pp. 1–32, 2020.

[18] S. Eger, "Identities for partial bell polynomials derived from identities for weighted integer compositions," *Aequationes mathematicae*, vol. 90, no. 2, pp. 299–306, 2016.

[19] G.-C. Rota, D. Kahaner, and A. Odlyzko, "On the foundations of combinatorial theory. viii. finite operator calculus," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 42, no. 3, pp. 684–760, 1973.

[20] A. J. Stam, "Polynomials of binomial type and compound poisson processes," *Journal of mathematical analysis and applications*, vol. 130, no. 2, pp. 493–508, 1988.

[21] L. Jánossy, A. Rényi, and J. Aczél, "On composed poisson distributions, i," *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*, vol. 1, no. 2-4, pp. 209–224, 1950.

[22] F. Castellares, S. L. Ferrari, and A. J. Lemonte, "On the bell distribution and its associated regression model for count data," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 56, pp. 172–185, 2018.

[23] F. Castellares, A. J. Lemonte, and G. Moreno-Arenas, "On the two-parameter bell–touchard discrete distribution," *Communications in Statistics-Theory and Methods*, vol. 49, no. 19, pp. 4834–4852, 2020.

[24] D. Bhati and E. Calderín-Ojeda, "On the $r\mathcal{B}\mathrm{ell}$ family of distributions with actuarial applications," *ASTIN Bulletin*, p. 1–26, 2021.

[25] R. by: J. O. Irwin, "The personal factor in accidents," *Journal of the Royal Statistical Society Series A (General) vol. 127 iss. 3*, vol. 127, 1964.

[26] C. Kemp, "On a contagious distribution suggested for accident data," *Biometrics*, pp. 241–255, 1967.

[27] E. T. Bell, "Exponential numbers," *The American Mathematical Monthly*, vol. 41, no. 7, pp. 411–419, 1934.

[28] E. T. Bell, "Exponential polynomials," *Annals of Mathematics*, pp. 258–277, 1934.

[29] M. Mihoubi, "Bell polynomials and binomial type sequences," *Discrete Mathematics*, vol. 308, no. 12, pp. 2450–2459, 2008.

[30] D. San Kim and T. Kim, "Some identities of bell polynomials," *Science China Mathematics*, vol. 58, no. 10, pp. 1–10, 2015.

[31] M. Spivak, *Calculus*. Publish or Perish, Inc., 4. ed., 2008.

[32] T. Tao, *Analysis I: Third Edition*. Texts and Readings in Mathematics, Springer Singapore, 2016.

[33] R. B. Schinazi, *Probability with statistical applications*. Springer Science & Business Media, 2011.

[34] A. Di Crescenzo, B. Martinucci, and S. Zacks, "Compound poisson process with a poisson subordinator," *Journal of Applied Probability*, vol. 52, no. 2, pp. 360–374, 2015.