



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

NATHAN DOS SANTOS NICOLÁU

**ABORDAGEM DO ESPAÇO DE FOCK PARA CAMINHADAS ALEATÓRIAS
DE LÉVY EM UM INTERVALO UNIDIMENSIONAL:
TEMPO MÉDIO DE PRIMEIRA PASSAGEM E PROBABILIDADES DE ABSORÇÃO**

Recife
2022

NATHAN DOS SANTOS NICOLÁU

**ABORDAGEM DO ESPAÇO DE FOCK PARA CAMINHADAS ALEATÓRIAS
DE LÉVY EM UM INTERVALO UNIDIMENSIONAL:
TEMPO MÉDIO DE PRIMEIRA PASSAGEM E PROBABILIDADES DE ABSORÇÃO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Área de concentração: Física teórica e computacional

Orientador: Prof. Dr. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo

Coorientador: Prof. Dr. Hugo de Andrade Araújo

Universidade Federal de Pernambuco

Recife

2022

Catálogo na fonte
Bibliotecária Nataly Soares Leite Moro, CRB4-1722

- N639a Nicoláu, Nathan dos Santos
Abordagem do espaço de Fock para caminhadas aleatórias de Lévy em um intervalo unidimensional: tempo médio de primeira passagem e probabilidades de absorção / Nathan dos Santos Nicoláu. – 2022.
124 f.: il., fig., tab.
- Orientador: Ernesto Carneiro Pessoa Raposo.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Física, Recife, 2022.
Inclui referências.
1. Física teórica e computacional. 2. Caminhada aleatória. 3. Teorema do limite central. 4. Distribuição α -estável de Lévy. 5. Abordagem do espaço de Fock. I. Raposo, Ernesto Carneiro Pessoa (orientador). II. Título.
- 530.1 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2022 - 35

NATHAN DOS SANTOS NICOLÁU

**ABORDAGEM DO ESPAÇO DE FOCK PARA CAMINHADAS ALEATÓRIAS
DE LÉVY EM UM INTERVALO UNIDIMENSIONAL:
TEMPO MÉDIO DE PRIMEIRA PASSAGEM E PROBABILIDADES DE ABSORÇÃO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Aprovada em: 18/02/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Maurício Domingues Coutinho Filho
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Renê Rodrigues Montenegro Filho
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Marcos Gomes Eleuterio da Luz
Examinador Externo
Universidade Federal do Paraná

Prof. Roberto Rivelino de Melo Moreno
Examinador Externo
Universidade Federal da Bahia

Dedico este trabalho às grandes mulheres da minha vida: minha mãe Valéria, minha irmã Nathália, minha companheira Viviane e minha afilhada Isabela.

AGRADECIMENTOS

À minha família, por me apoiar e incentivar a continuar na busca pela realização dos meus sonhos. Em especial aos meus pais, Valéria Ferreira e Paulo Roberto, pela educação, respeito e por estarem ao meu lado em todos os momentos da minha vida. À minha irmã Nathália, pelo companheirismo de uma irmã dedicada, conselhos e por me reeducar como um homem. Além deles, agradeço também aos meus tios e tias, Alexandre, José Carlos (Branco), Rosane e Seliane e às minhas primas Gabriela e Emanuela. Ao meu irmão Leonardo e minha cunhada Larissa, por me darem um dos papéis mais importantes que um ser humano pode ter, ser padrinho da minha pequena Isabela. Aos meus amigos de longa data, Rafael Gomes, Jonathas Albuquerque e Evelin Nunes, pela amizade eterna e apoio incomparável. Aos meus animais de estimação, Zoe, Will, Zig, Raja e Preta.

À minha segunda família, minha sogra Patrícia, minha cunhada Vanessa e meu sobrinho Cadu. Pela maravilhosa hospedagem durante o primeiro ano de pandemia, pelas risadas incontroláveis e por se tornarem essenciais na minha vida.

À minha companheira de vida e melhor amiga, Viviane Medeiros, pela força e apoio em todas as situações, me ajudando a superar cada obstáculo e dividindo momentos de extrema felicidade. Sem ela, nada nesse mundo faria sentido. Agradeço pela sorte de ter te encontrado e por fazer de mim um homem completo e feliz. Te Amo!

Aos Professores Doutores da Pós-Graduação em Física da UFPE-CCEN. Em especial ao meu orientador e coorientador, Prof. Dr. Ernesto Raposo e Prof. Dr. Hugo Araújo, por terem aceitado o desafio de orientar-me, pela dedicação, paciência e por todos os conhecimentos passados, servindo de inspiração na minha vida profissional. Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), pelo suporte financeiro. Ao grupo de servidores da UFPE.

Aos amigos que adquiri ao longo desses quatro anos de trabalho, que me acolheram e proporcionaram momentos felizes, Carla, Rita, Rosângela, Lis, Karol, Nadja, Felipe, Davi e Neto. Em especial à Roberta e Karina, pelas conversas e momentos de risadas, se tornando grandes amigas. Aos amigos do DF, Marcone e Jheniffer, pelas horas de estudo e discussões sobre física e outros assuntos. À Helena, por ter puxado assunto comigo no início do curso, pelas conversas descontraídas e pelos momentos engraçados, se tornando uma amiga para a vida toda. Aos meus amigos de moradia, Marcelo e Karlos, pelo companheirismo diário, conselhos e discussões sobre vários assuntos, que se tornaram irmãos de vida.

Aos meus familiares que durante esse ano pandêmico se tornaram meus queridos vizinhos, Rosana, Kerman, Danylo, Diego, Amanda, Julya e Nala. Por todo o apoio dado durante esse ano, pelas reuniões divertidas e conselhos de vida. Agradeço por todo o carinho e por tornar meu ano mais leve. Obrigado!

"Que a humanidade deve optar entre liberdade e felicidade e que, para a esmagadora maioria da população, felicidade era o melhor"[1].

RESUMO

Estudamos o problema de uma partícula em movimento aleatório com distribuição de tamanhos de saltos do tipo α -estável de Lévy em um domínio finito unidimensional com limites absorventes, utilizando o formalismo do espaço de Fock. Nessa abordagem, a equação mestra é descrita na forma de uma equação de Schrödinger de valor real com um operador Hamiltoniano relacionado às probabilidades de transição, definidas pelos comprimentos dos saltos. Apresentamos um estudo de quantidades estatísticas importantes para esse problema em função dos autovalores e autovetores do Hamiltoniano, do índice de estabilidade α de Lévy, da posição inicial da partícula e do tempo. Aplicamos esse formalismo em um espaço finito discreto e no limite do espaço contínuo. Para ambos os casos, calculamos as taxas de sobrevivência $S(t)$ e as probabilidades de absorção $P_0(t)$ e $P_N(t)$ pelas fronteiras, ambos os resultados em função do tempo. Em particular, mostramos os diferentes comportamentos dinâmicos de $S(t)$, que inicialmente é regido por uma lei de potência no tempo ($S(t) \sim t^{-\gamma}$), obedecendo o teorema de Sparre-Andersen (para domínios semi-infinitos), e a longo prazo é ditado por um decaimento exponencial ($S(t) \sim e^{-\lambda t}$). Conseguimos ilustrar essa mudança de comportamento dinâmico para alguns valores do índice α . Para o caso do espaço discreto, a abordagem de Fock teve uma excelente concordância com os resultados das simulações numéricas de Monte Carlo. Já para o limite do espaço contínuo, mostramos que o formalismo de Fock vai se ajustando melhor com as curvas numéricas conforme aumentamos o comprimento dos passos (diminuímos α) e aumentamos o intervalo de tempo considerado. Por fim, estudamos o tempo médio de primeira passagem e o comportamento assintótico das probabilidades de absorção pelas fronteiras em função da posição inicial e do índice de estabilidade α . Esse comportamento assintótico é alcançado com precisão no formalismo de Fock. Além disso, ao considerar o limite do espaço contínuo, nossos resultados apresentam concordância muito boa com a expressão analítica exata para uma partícula com distribuição de saltos de Lévy no espaço finito contínuo. Esses últimos resultados são relevantes para uma série de contextos práticos, como forrageamento animal e transmissão de luz em meios de dispersão aleatória, e nossas descobertas podem ser úteis para a melhor compreensão desses sistemas.

Palavras-chaves: caminhada aleatória; teorema do limite central; difusão normal; difusão anômala; distribuição α -estável de Lévy; abordagem do espaço de Fock.

ABSTRACT

We study the problem of a randomly moving particle with Lévy α -stable distribution of step lengths in a one-dimensional finite domain with absorbing limits, using the Fock space formalism. In this approach, the master equation is described in the form of a real-valued Schrödinger equation with a Hamiltonian-like operator related to the transition probabilities, defined by the step lengths. We present a study of important statistical quantities for this problem as a function of the Hamiltonian-like eigenvalues and eigenvectors, the Lévy stability index α , the particle's initial position and time. We apply this formalism in a discrete finite space and in the continuous boundary of space. For both cases, we calculate the survival rates $S(t)$ and the absorption probabilities $P_0(t)$ and $P_N(t)$ to reach the borders, both results as a function of time. In particular, we show the different dynamic behaviors of $S(t)$, which is initially governed by a power law in time ($S(t) \sim t^{-\gamma}$), obeying Sparre-Andersen's theorem (for semi-infinite domains), and in the long term is dictated by an exponential decay ($S(t) \sim e^{-\lambda t}$) when essentially only one of the barriers is actually accessible. We were able to illustrate this dynamic behavior change for some values of the index α . For the case of discrete space, Fock's approach had an excellent agreement with the results of numerical Monte Carlo simulations. For the continuous space limit, we show that the results Fock formalism are better fitted with the numerical curves as we increase the step length (i.e., we decrease α) and we increase the time interval considered. Finally, we study the mean first passage time and the asymptotic behavior of the absorption probabilities by the borders as a function of the initial position and the stability index α . This asymptotic behavior is achieved with fine precision in Fock's formalism. Furthermore, when considering the continuous limit of space, our results show very good agreement with the exact analytical expression for a particle with Lévy jump distribution in the continuous finite space. These latter results are relevant to a number of practical contexts, such as animal foraging and light transmission in randomly scattering media, and our findings may be useful for better understanding these systems.

Keywords: random walk; central limit theorem; normal diffusion; anomalous diffusion; Lévy α -stable distribution; Fock space approach.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Ilustrações das distribuições α -estáveis de Lévy $P(x)$ em função da posição x , para diferentes valores dos parâmetros α , β , b e fixando $\mu = x/2$. Usamos diferentes valores de α e $b = 1$ para $\beta = 0$ em (a) e $\beta = -1$ em (b). Em seguida, para alguns valores de β e $b = 1$ para $\alpha = 3/2$ em (c) e $\alpha = 1$ em (d). Por último, para alguns valores de b com $\alpha = 1/2$, $\beta = 0$ em (e) e $\alpha = 3/2$, $\beta = 1$ em (f). 38
- Figura 2 – Gráfico log-log das distribuições α -estáveis de Lévy $P(x)$ em função da posição x com $\beta = 0$ e $b = 1$ (linhas sólidas), para os valores de $\alpha = 1/2$ (azul), 1 (preto) e $3/2$ (vermelho). Para x grande, o comportamento assintótico da distribuição é um decaimento de lei de potência $P(x) \sim x^{-(\alpha+1)}$, ilustrado pelas linhas tracejadas coloridas. 40
- Figura 3 – Probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j para $\alpha = 2$ (limite gaussiano) com domínio discreto limitado $N = 300$ e iniciando no ponto médio $j_0 = N/2$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos para os diferentes tempo, $t = 5$ (preto), $t = 10$ (vermelho), $t = 20$ (azul), $t = 100$ (verde) e seus respectivos resultados via simulação MC representados em linhas sólidas nas mesmas cores. . . 54
- Figura 4 – Probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j para $\alpha = 2$ (limite gaussiano) com domínio discreto limitado $N = 300$ e iniciando próximo da fronteira esquerda, $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos para os diferentes tempo, $t = 5$ (preto), $t = 10$ (vermelho), $t = 20$ (azul), $t = 100$ (verde) e seus respectivos resultados via simulação MC representados em linhas sólidas nas mesmas cores. 55
- Figura 5 – Gráfico log-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t para o caso gaussiano $\alpha = 2$ com domínio discreto finito $N = 300$ e iniciando no sítio $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos vermelhos e a linha preta sólida é o resultado da simulação numérica MC. Neste caso, apenas a fronteira esquerda é efetivamente alcançada nesse intervalo de tempo, com isso, o comportamento a longo tempo é regido pela lei de potência $S(t) \sim t^{-\gamma}$ (linha tracejada), com o melhor valor $\gamma = 0.491$ 56

- Figura 6 – Gráfico log-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t para o caso gaussiano $\alpha = 2$ com domínio discreto finito pequeno $N = 100$ e iniciando no sítio $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos pretos e a linha preta sólida é o resultado da simulação numérica MC. Neste caso, inicialmente apenas a fronteira esquerda é efetivamente alcançada, gerando um comportamento via lei de potência $S(t) \sim t^{-\gamma}$ (tracejado em azul), com o melhor valor de $\gamma = 0.491$. Ao aumentarmos o tempo, a barreira longínqua da direita começa a ser atingida, mudando assim o comportamento dinâmico para um decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$ (tracejado em vermelho), com o melhor valor de $\lambda = 0.00107$ 57
- Figura 7 – Gráfico linear-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t para o caso gaussiano $\alpha = 2$ com domínio discreto finito pequeno $N = 100$. Iniciamos a abordagem do espaço de Fock em $j_0 = N/2$ (círculos vermelhos) e $j_0 = 10$ (círculos pretos). Os resultados das simulações numéricas MC estão expressos em linhas sólidas nas respectivas cores. As linhas tracejadas representam o comportamento via decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$, que ocorre quando ambas as bordas são atingidas. Para ambos o melhor valor $\lambda = 0.00107$ 58
- Figura 8 – Probabilidades $P_0(t)$ e $P_N(t)$ de absorção das fronteiras $j = 0$ (em azul) e $j = N$ (em vermelho), respectivamente, em função do tempo t para o caso gaussiano $\alpha = 2$, para um pequeno domínio discreto $N = 100$ e iniciando perto da fronteira esquerda $j_0 = 10$. As simulações numéricas MC representadas por asterisco corroboram os resultados do espaço de Fock (em círculos). 59
- Figura 9 – Probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j para $\alpha = 3/2$ com domínio discreto limitado $N = 300$ e iniciando no ponto médio $j_0 = N/2$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos para os diferentes tempo, $t = 5$ (preto), $t = 10$ (vermelho), $t = 15$ (azul), $t = 50$ (verde) e seus respectivos resultados via simulações numéricas MC em linhas sólidas nas mesmas cores. 61
- Figura 10 – Probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j para $\alpha = 3/2$ com domínio discreto limitado $N = 300$ e iniciando próximo da fronteira esquerda, $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos para os diferentes tempo, $t = 5$ (preto), $t = 10$ (vermelho), $t = 15$ (azul), $t = 50$ (verde) e seus respectivos resultados via simulações numéricas MC em linhas sólidas nas mesmas cores. 62

- Figura 11 – Gráfico log-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t para o caso $\alpha = 3/2$ com domínio discreto finito pequeno $N = 100$ e iniciando no sítio $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos pretos e a linha preta sólida é o resultado da simulação numérica MC. Neste caso, inicialmente apenas a fronteira esquerda é efetivamente alcançada, gerando um comportamento via lei de potência $S(t) \sim t^{-\gamma}$ (tracejado em azul), com o melhor valor de $\gamma = 0.5$. Ao aumentarmos o tempo, a barreira longínqua da direita começa a ser atingida, mudando assim o comportamento dinâmico para um decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$ (tracejado em vermelho), com o melhor valor de $\lambda = 0.00537$ 63
- Figura 12 – Gráfico linear-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t para o caso $\alpha = 3/2$ com domínio discreto finito pequeno $N = 100$. Iniciamos a abordagem do espaço de Fock em $j_0 = N/2$ (círculos vermelhos) e $j_0 = 10$ (círculos pretos). Os resultados das simulações numéricas MC estão expressos em linhas sólidas nas respectivas cores. As linhas tracejadas representam o comportamento via decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$, que ocorre quando ambas as bordas são atingidas. Para ambos o melhor valor $\lambda = 0.00537$ 64
- Figura 13 – Probabilidades $P_0(t)$ e $P_N(t)$ de absorção das fronteiras $j = 0$ (em azul) e $j = N$ (em vermelho), respectivamente, em função do tempo t para o caso $\alpha = 3/2$, para um pequeno domínio discreto $N = 100$ e iniciando perto da fronteira esquerda $j_0 = 10$. As simulações numéricas MC representadas por asterisco corroboram os resultados do espaço de Fock (em círculos). 65
- Figura 14 – Probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j para $\alpha = 1$ (caso Cauchy) com domínio discreto limitado $N = 300$ e iniciando no ponto médio $j_0 = N/2$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos para os diferentes tempo, $t = 5$ (preto), $t = 10$ (vermelho), $t = 15$ (azul), $t = 50$ (verde) e seus respectivos resultados via simulações numéricas MC representados em linhas sólidas nas mesmas cores. 66
- Figura 15 – Probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j para $\alpha = 1$ (caso Cauchy) com domínio discreto limitado $N = 300$ e iniciando próximo da fronteira esquerda, $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos para os diferentes tempo, $t = 5$ (preto), $t = 10$ (vermelho), $t = 15$ (azul), $t = 50$ (verde) e seus respectivos resultados via simulações numéricas MC representados em linhas sólidas nas mesmas cores. 67

- Figura 16 – Gráfico linear-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t para o caso $\alpha = 1$ (caso Cauchy) com domínio finito discreto pequeno $N = 100$. Iniciamos a abordagem do espaço de Fock em $j_0 = N/2$ (círculos vermelhos) e $j_0 = 10$ (círculos pretos). Os resultados das simulações numéricas MC estão expressos em linhas sólidas nas respectivas cores. As linhas tracejadas representam o comportamento via decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$, que ocorre quando ambas as bordas são atingidas. Para ambos o melhor valor $\lambda = 0.0243$ 68
- Figura 17 – Probabilidades $P_0(t)$ e $P_N(t)$ de absorção das fronteiras $j = 0$ (em azul) e $j = N$ (em vermelho), respectivamente, em função do tempo t para o caso $\alpha = 1$ (caso Cauchy), para um grande domínio discreto $N = 300$ e iniciando perto da fronteira esquerda $j_0 = 10$. As simulações numéricas MC representadas por asterisco corroboram os resultados do espaço de Fock (em círculos). 69
- Figura 18 – Probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j para $\alpha = 1/2$ com domínio discreto limitado $N = 300$ e iniciando no ponto médio $j_0 = N/2$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos para os diferentes tempo, $t = 5$ (preto), $t = 10$ (vermelho), $t = 15$ (azul), $t = 50$ (verde) e seus respectivos resultados via simulações numéricas MC representados em linhas sólidas nas mesmas cores. 70
- Figura 19 – Probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j para $\alpha = 1/2$ com domínio discreto limitado $N = 300$ e iniciando próximo da fronteira esquerda, $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos para os diferentes tempo, $t = 5$ (preto), $t = 10$ (vermelho), $t = 15$ (azul), $t = 50$ (verde) e seus respectivos resultados via simulações numéricas MC representados em linhas sólidas nas mesmas cores. 71
- Figura 20 – Gráfico log-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t para $\alpha = 1/2$ com domínio finito discreto pequeno $N = 100$ e iniciando no sítio $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos pretos e a linha preta sólida é a simulação numérica MC. Neste caso, inicialmente apenas a fronteira esquerda é efetivamente alcançada, gerando um comportamento via lei de potência $S(t) \sim t^{-\gamma}$ (tracejado em azul), com o melhor valor de $\gamma = 0.5$. Ao aumentarmos o tempo, a barreira longínqua da direita começa a ser atingida, mudando assim o comportamento dinâmico para um decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$ (tracejado em vermelho), com o melhor valor de $\lambda = 0.138$ 72

Figura 21 – Gráfico linear-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t para $\alpha = 1/2$ com domínio finito discreto pequeno $N = 100$. Iniciamos a abordagem do espaço de Fock em $j_0 = N/2$ (círculos vermelhos) e $j_0 = 10$ (círculos pretos). As simulações numéricas MC estão expressas em linhas sólidas nas respectivas cores. As linhas tracejadas representam o comportamento via decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$, que ocorre quando ambas as bordas são atingidas. Para ambos o melhor valor $\lambda = 0.138$	73
Figura 22 – Probabilidades $P_0(t)$ e $P_N(t)$ de absorção das fronteiras $j = 0$ (em azul) e $j = N$ (em vermelho), respectivamente, em função do tempo t para o caso $\alpha = 1/2$, para um grande domínio discreto $N = 300$ e iniciando perto da fronteira esquerda $j_0 = 10$. As simulações numéricas MC representadas por asterisco corroboram os resultados do espaço de Fock (em círculos).	74
Figura 23 – Probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j para os diferentes valores $\alpha = 2$ (preto), $\alpha = 3/2$ (vermelho), $\alpha = 1$ (azul) e $\alpha = 1/2$ (verde) em domínio discreto limitado $N = 300$ e iniciando no ponto médio $j_0 = N/2$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos e as simulações numéricas MC em linhas sólidas para os instantes de tempo $t = 10$ (a) e $t = 15$ (b).	76
Figura 24 – Probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j para os diferentes valores $\alpha = 2$ (a), $\alpha = 3/2$ (b), $\alpha = 1$ (c) e $\alpha = 1/2$ (d) em domínio discreto limitado $N = 300$ e iniciando no ponto médio, $j_0 = N/2$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos e as simulações numéricas MC em linhas sólidas para diferentes instantes de tempo. Podemos ver o efeito da borda absorvente em $j = 0$	77
Figura 25 – Probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j para os diferentes valores $\alpha = 2$ (preto), $\alpha = 3/2$ (vermelho), $\alpha = 1$ (azul) e $\alpha = 1/2$ (verde) em domínio discreto limitado $N = 300$ e iniciando próximo da fronteira esquerda, $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos e as simulações numéricas MC em linhas sólidas para os instantes de tempo $t = 10$ (a) e $t = 15$ (b).	78
Figura 26 – Gráficos linear-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t para os diferentes valores $\alpha = 2$ (preto), $\alpha = 3/2$ (vermelho), $\alpha = 1$ (azul) e $\alpha = 1/2$ (verde) em um domínio discreto limitado $N = 100$ e iniciando no ponto médio $j_0 = N/2$ (a) e próximo a borda esquerda $j_0 = 10$ (b). A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos e as simulações numéricas MC em linhas sólidas.	79

- Figura 27 – Gráfico log-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t com $\alpha = 1.99$ para o limite contínuo de tamanho $N = 300$ e iniciando próximo da fronteira esquerda, $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos vermelhos e a linha preta sólida é o resultado da simulação numérica MC. Neste caso, apenas a fronteira esquerda é efetivamente alcançada nesse intervalo de tempo, com isso, o comportamento a longo tempo é regido por uma lei de potência $S(t) \sim t^{-\gamma}$ (linha tracejada), com o melhor valor $\gamma = 0.48$ 82
- Figura 28 – Gráfico log-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t com $\alpha = 1.99$ para o limite contínuo de tamanho $N = 100$ e iniciando próximo da fronteira esquerda $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos pretos e a linha preta sólida é o resultado da simulação numérica MC. Neste caso, inicialmente apenas a fronteira esquerda é efetivamente alcançada, gerando um comportamento via lei de potência $S(t) \sim t^{-\gamma}$ (tracejado em azul), com o melhor valor de $\gamma = 0.48$. Ao aumentarmos o tempo, a barreira longínqua da direita começa a ser atingida, mudando assim o comportamento dinâmico para um decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$ (tracejado em vermelho), com o melhor valor de $\lambda = 0.00051$ 83
- Figura 29 – Gráfico linear-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t com $\alpha = 1.99$ para o limite contínuo de tamanho $N = 100$. Iniciamos a abordagem do espaço de Fock em $j_0 = N/2$ (círculos vermelhos) e $j_0 = 10$ (círculos pretos). Os resultados das simulações numéricas MC estão expressos em linhas sólidas nas respectivas cores. As linhas tracejadas representam o comportamento via decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$, que ocorre quando ambas as bordas são atingidas. Para ambos o melhor valor $\lambda = 0.00051$ 84
- Figura 30 – Probabilidades $P_0(t)$ e $P_N(t)$ de absorção das fronteiras $j = 0$ (em azul) e $j = N$ (em vermelho), respectivamente, em função do tempo t para $\alpha = 1.99$, no limite contínuo de tamanho $N = 100$ e iniciando perto da fronteira esquerda $j_0 = 10$. Os resultados das simulações numéricas MC representados por asterisco e os resultados do espaço de Fock em círculos. 85

- Figura 31 – Gráfico log-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t com $\alpha = 3/2$ para o limite contínuo de tamanho $N = 100$ e iniciando próximo da fronteira esquerda $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos pretos e a linha preta sólida é o resultado da simulação numérica MC. Neste caso, inicialmente apenas a fronteira esquerda é efetivamente alcançada, gerando um comportamento via lei de potência $S(t) \sim t^{-\gamma}$ (tracejado em azul), com o melhor valor de $\gamma = 0.5$. Ao aumentarmos o tempo, a barreira longínqua da direita começa a ser atingida, mudando assim o comportamento dinâmico para um decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$ (tracejado em vermelho), com o melhor valor de $\lambda = 0.00289$ 86
- Figura 32 – Gráfico linear-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t com $\alpha = 3/2$ para o limite contínuo de tamanho $N = 100$. Iniciamos a abordagem do espaço de Fock em $j_0 = N/2$ (círculos vermelhos) e $j_0 = 10$ (círculos pretos). Os resultados das simulações numéricas MC estão expressos em linhas sólidas nas respectivas cores. As linhas tracejadas representam o comportamento via decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$, que ocorre quando ambas as bordas são atingidas. Para ambos o melhor valor $\lambda = 0.00289$ 87
- Figura 33 – Probabilidades $P_0(t)$ e $P_N(t)$ de absorção das fronteiras $j = 0$ (em azul) e $j = N$ (em vermelho), respectivamente, em função do tempo t para $\alpha = 3/2$, no limite contínuo de tamanho $N = 100$ e iniciando perto da fronteira esquerda em $j_0 = 10$. Os resultados das simulações numéricas MC representados por asterisco e os resultados do espaço de Fock em círculos. 88
- Figura 34 – Gráfico linear-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t com $\alpha = 1$ para o limite contínuo de tamanho $N = 100$. Iniciamos a abordagem do espaço de Fock em $j_0 = N/2$ (círculos vermelhos) e $j_0 = 10$ (círculos pretos). Os resultados das simulações numéricas MC estão expressos em linhas sólidas nas respectivas cores. As linhas tracejadas representam o comportamento via decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$, que ocorre quando ambas as bordas são atingidas. Para ambos o melhor valor $\lambda = 0.0185$ 89
- Figura 35 – Probabilidades $P_0(t)$ e $P_N(t)$ de absorção das fronteiras $j = 0$ (em azul) e $j = N$ (em vermelho), respectivamente, em função do tempo t para $\alpha = 1$, no limite contínuo de tamanho $N = 300$ e iniciando perto da fronteira esquerda em $j_0 = 10$. Os resultados das simulações numéricas MC representados por asterisco e os resultados do espaço de Fock em círculos. 90

- Figura 36 – Gráfico log-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t com $\alpha = 1/2$ para o limite contínuo de tamanho $N = 100$ e iniciando próximo da fronteira esquerda $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos pretos e a linha preta sólida é o resultado da simulação numérica MC. Neste caso, inicialmente apenas a fronteira esquerda é efetivamente alcançada, gerando um comportamento via lei de potência $S(t) \sim t^{-\gamma}$ (tracejado em azul), com o melhor valor de $\gamma = 0.5$. Ao aumentarmos o tempo, a barreira longínqua da direita começa a ser atingida, mudando assim o comportamento dinâmico para um decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$ (tracejado em vermelho), com o melhor valor de $\lambda = 0.128$ 91
- Figura 37 – Gráfico linear-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t com $\alpha = 1/2$ para o limite contínuo de tamanho $N = 100$. Iniciamos a abordagem do espaço de Fock em $j_0 = N/2$ (círculos vermelhos) e $j_0 = 10$ (círculos pretos). Os resultados das simulações numéricas MC estão expressos em linhas sólidas nas respectivas cores. As linhas tracejadas representam o comportamento via decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$, que ocorre quando ambas as bordas são atingidas. Para ambos o melhor valor $\lambda = 0.0128$ 92
- Figura 38 – Probabilidades $P_0(t)$ e $P_N(t)$ de absorção das fronteiras $j = 0$ (em azul) e $j = N$ (em vermelho), respectivamente, em função do tempo t para $\alpha = 1/2$, no limite contínuo de tamanho $N = 300$ e iniciando perto da fronteira esquerda em $j_0 = 10$. Os resultados das simulações numéricas MC representados por asterisco e os resultados do espaço de Fock em círculos. 93
- Figura 39 – Probabilidades $P_0(t)$ e $P_N(t)$ de absorção em função do tempo t , iniciando no local $j_0 = 10$ para as fronteiras $j = 0$ (em azul) e $j = N$ (em vermelho), respectivamente, e iniciando no meio do intervalo em $j_0 = N/2$ (em verde), para ambas as fronteiras absorventes. Os resultados da abordagem do espaço de Fock estão representados em círculos e os resultados das simulações numéricas MC em asterisco para os valores de $\alpha = 1.99$ (a), $\alpha = 3/2$ (b), $\alpha = 1$ (c) e $\alpha = 1/2$ (d). . . 94

- Figura 40 – MFPT $\langle t \rangle$ de um voador de Lévy em um espaço finito discreto de comprimento $N = 300$ e $\Delta x = 1$ com bordas absorventes em função da posição normalizada j_0/N , para diversos valores do índice α de Lévy. Os círculos coloridos representam os resultados da abordagem FS, enquanto as linhas sólidas coloridas os dados da simulação MC. As linhas tracejadas pretas indicam o ajuste dos resultados do FS à Eq. (5.6). Notamos a simetria do espaço $j_0 \leftrightarrow N - j_0$. Além disso, observamos que o MFPT é maior quando começamos próximos do meio do intervalo e para valores de α mais próximos do limite gaussiano $\alpha = 2$ 99
- Figura 41 – MFPT $\langle t \rangle$ de um voador de Lévy em um espaço finito discreto de comprimento $N = 300$ e $\Delta x = 1$ com bordas absorventes em função do índice α de Lévy, para diversos valores da posição inicial normalizada j_0/N . Os círculos coloridos representam os resultados da abordagem FS, enquanto as linhas sólidas coloridas os dados da simulação MC. Notamos que, para cada posição inicial do voador de Lévy, quando $\alpha \rightarrow 0$ temos o mínimo valor de MFPT. Conforme nos aproximamos do regime gaussiano $\alpha = 2$, $\langle t \rangle$ torna-se progressivamente maior. . . 100
- Figura 42 – MFPT $\langle t \rangle$ de um voador de Lévy no limite do espaço contínuo de comprimento $N = 300$ com bordas absorventes em função da posição normalizada j_0/N , para diversos valores do índice α de Lévy. Os círculos coloridos representam os resultados da abordagem FS, enquanto as linhas sólidas coloridas os dados da simulação MC. As linhas tracejadas pretas indicam o resultado exato de um voador de Lévy em um espaço contínuo, Eq. (5.7), sem nenhum ajuste realizado. Notamos a mesma simetria e comportamento da Fig. 40. 101
- Figura 43 – MFPT $\langle t \rangle$ de um voador de Lévy no limite do espaço contínuo de comprimento $N = 300$ com bordas absorventes em função do índice α de Lévy, para diversos valores da posição inicial normalizada j_0/N . Os círculos coloridos representam os resultados da abordagem FS, enquanto as linhas sólidas coloridas os dados da simulação MC. As linhas tracejadas pretas indicam o resultado exato de um voador de Lévy em um espaço contínuo, Eq. (5.7), sem nenhum ajuste realizado. Notamos o mesmo comportamento presente na Fig. 41. 102

- Figura 44 – Diferença relativa Δ , Eq. (5.9), do método FS no espaço discreto para a expressão exata, Eq. (5.7), do espaço contínuo em função do comprimento finito N com $\Delta x = 1$ e limites absorventes, para alguns valores do índice α de Lévy. O voador de Lévy começa no ponto central do domínio, $j_0 = N/2$, com probabilidades de transição dadas pela Eq. (3.4). As linhas tracejadas são ajustadas à forma do decaimento da lei de potência $\Delta \sim N^{-\gamma}$, com $\gamma = 0.35, 0.41$ e 0.64 para $\alpha = 1.5, 0.5$ e 1.0 , respectivamente. 103
- Figura 45 – Diferença relativa Δ , Eq. (5.9), do método FS no limite do espaço contínuo para a expressão exata, Eq. (5.7), do espaço contínuo em função do comprimento finito N com limites absorventes, para alguns valores do índice α de Lévy. O voador de Lévy começa no ponto central do domínio, $j_0 = N/2$, com probabilidades de transição calculadas a partir da Eq. (5.8). As linhas tracejadas são ajustadas à forma do decaimento da lei de potência $\Delta \sim N^{-\gamma}$, com $\gamma \approx 1$ para todo α 104
- Figura 46 – Probabilidades assintóticas de absorção P_0 e P_N pelas bordas $j = 0$ e $j = N$, respectivamente, do voador de Lévy no espaço discreto de comprimento $N = 300$ e $\Delta x = 1$ em função da posição inicial normalizada j_0/N , para vários valores do índice α de Lévy. Os círculos coloridos indicam os resultados da abordagem FS e as linhas sólidas coloridas os dados da simulação MC. Neste gráfico $P_0 \geq 1/2$ e $P_N \leq 1/2$, com $P_0 + P_N = 1$. As linhas tracejadas pretas representam ajustes dos resultados FS ao comportamento assintótico $j_0 \ll N$ de P_N no espaço contínuo, Eq. (5.11). 106
- Figura 47 – Probabilidades assintóticas de absorção P_0 e P_N pelas bordas $j = 0$ e $j = N$, respectivamente, do voador de Lévy no espaço discreto de comprimento $N = 300$ e $\Delta x = 1$ em função do índice α de Lévy, para vários valores da posição inicial normalizada j_0/N . Os círculos coloridos indicam os resultados da abordagem FS e as linhas sólidas coloridas os dados da simulação MC. 106
- Figura 48 – Probabilidades assintóticas de absorção P_0 e P_N pelas bordas $j = 0$ e $j = N$, respectivamente, do voador de Lévy no limite do espaço contínuo de comprimento $N = 300$ em função da posição inicial normalizada j_0/N , para vários valores do índice α de Lévy. Os círculos coloridos indicam os resultados da abordagem FS e as linhas sólidas coloridas os dados da simulação MC. Neste gráfico $P_0 \geq 1/2$ e $P_N \leq 1/2$, com $P_0 + P_N = 1$. As linhas tracejadas pretas representam ajustes dos resultados FS ao comportamento assintótico $j_0 \ll N$ de P_N no espaço contínuo, Eq. (5.11). 107

Figura 49 – Probabilidades assintóticas de absorção P_0 e P_N pelas bordas $j = 0$ e $j = N$, respectivamente, do voador de Lévy no limite do espaço contínuo de comprimento $N = 300$ em função do índice α de Lévy, para vários valores da posição inicial normalizada j_0/N . Os círculos coloridos indicam os resultados da abordagem FS e as linhas sólidas coloridas os dados da simulação MC. 107

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores de A_α e suas respectivas equações assintóticas de lei de potência para os valores de $\alpha = 1/2, 1$ e $3/2$	41
Tabela 2 – Valores de λ do decaimento exponencial de $S(t)$ para os valores de $\alpha = 2$ e 1 , com a abordagem do espaço de Fock (tese), o método da decomposição de Wiener-Hopf e do operador diferencial fracionário discretizado de Riesz.	75
Tabela 3 – Valores de $P_0(t)$ e $P_N(t)$ para cada valor de α , iniciando no local $j_0 = 10$ para os instantes finais.	79
Tabela 4 – Valores de $P_0(t)$ e $P_N(t)$ para cada valor de α , iniciando nos locais $j_0 = 10$ e $j_0 = N/2$ para os instantes finais.	95

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
2	REVISÃO TEÓRICA	27
2.1	Teorema do limite central	27
2.1.1	Teorema do limite central generalizado	30
2.2	Difusão Normal e Anômala	31
2.2.1	Difusão anômala	34
2.3	Distribuições α-estáveis de Lévy	37
2.4	Formalismo do espaço de Fock	41
2.4.1	Segunda quantização	42
2.4.2	Aplicando o formalismo em <i>random walker</i>	45
2.4.3	Cálculo do Hamiltoniano para um sistema de dois níveis	48
3	<i>RANDOM WALKER</i> COM DISTRIBUIÇÕES DE COMPRIMENTOS DE PASSOS DE LÉVY EM DOMÍNIOS FINITOS DISCRETOS	50
3.1	Voador de Lévy em domínio finito discreto para diferentes valores de α via abordagem do espaço de Fock	51
3.1.1	Voador de Lévy com $\alpha = 2$	53
3.1.2	Voador de Lévy com $\alpha = 3/2$	59
3.1.3	Voador de Lévy com $\alpha = 1$	65
3.1.4	Voador de Lévy com $\alpha = 1/2$	69
3.2	Algumas comparações interessantes entre os α	75
4	<i>RANDOM WALKER</i> COM DISTRIBUIÇÃO DE COMPRIMENTO DE PASSOS DE LÉVY NO LIMITE DO ESPAÇO CONTÍNUO	80
4.1	Voador de Lévy com $\alpha = 1.99$	81
4.2	Voador de Lévy com $\alpha = 3/2$	85
4.3	Voador de Lévy com $\alpha = 1$	88
4.4	Voador de Lévy com $\alpha = 1/2$	90
4.5	Discussão dos resultados numéricos	93
5	TEMPO MÉDIO DE PRIMEIRA PASSAGEM E PROBABILIDADES ASSINTÓTICAS DE ABSORÇÃO	96
5.1	Voador de Lévy em um espaço discreto limitado	97
5.2	Voador de Lévy no limite do espaço contínuo finito	100
5.3	Diferença relativa entre os espaços discreto e contínuo	102

5.4	Probabilidades assintóticas de absorção	104
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	109
	REFERÊNCIAS	111

1 INTRODUÇÃO

A física estatística é o ramo da física que estuda fenômenos contendo um número muito grande de constituintes que, por terem muitos graus de liberdade ou por falta de informação que os caracteriza, são abordados segundo técnicas e métodos que aliam conceitos e ferramentas da física e da teoria de probabilidades e estatística. Um dos problemas mais conhecidos e amplamente estudados é a famosa busca aleatória, que pode ser usado para modelar vários fenômenos físicos como os gases [2]. Os primeiros trabalhos relacionados a esse problema vem da Grécia antiga, com as investigações empíricas sobre os organismos e o meio ambiente de Aristóteles e Teofrasto [3]. Contudo, a abordagem matemática só acontece com a formulação da lei de Fick [4]. Apenas no século XX que surge a descrição de caminhante aleatório na literatura, com Karl Pearson [5] e Lord Rayleigh [6]. Com a explicação do movimento browniano, descrita por Albert Einstein em 1905 [7] e observado por Robert Brown [8], surgem as primeiras abordagens das caminhadas aleatórias brownianas.

Podemos definir a caminhada aleatória como um modelo que usa distribuições de probabilidade para ditar o movimento dos objetos em questão, seja a direção ou o comprimento do deslocamento e o tempo entre um passo ou um salto [9]. Assim como no movimento browniano, que descreve o movimento de partículas em um fluido, conseguimos aplicar o estudo da difusão e relacionar sua equação com as probabilidades de um caminhante aleatório estar em um determinado local em um dado instante de tempo [10].

Nos primeiros modelos utilizando caminhadas aleatórias, os passos eram descorrelacionados e sem qualquer tipo de tendência, ou seja, a direção do movimento não dependia do movimento anterior (processo Markovianos) e não havia direção preferencial, logo a direção escolhida no próximo passo era totalmente aleatória [11]. Na década de 1960, o estudo de caminhadas aleatórias começou a ser utilizado no problema de busca alimentícia (ou forrageamento animal), ganhando novos ares. Um dos modelos mais aplicados era denominado de caminhadas aleatórias correlacionadas, com tendência de direção devido ao fato de que a maioria dos animais persistem em andar para frente [12]. Com isso, houve uma mudança para a permanência de direção, ou seja, cada passo tende a permanecer com a mesma direção anterior. Essa abordagem ainda obedece o Teorema do Limite Central (TLC) gerando distribuições gaussianas após um grande número de passos.

Os chamados voos e caminhadas de Lévy têm sido aplicados desde a década de 1990 para modelar problemas que exibem difusão anômala. Para citar alguns, temos cinética de partículas [13, 14], lasers aleatórios [15, 16, 17, 18] e forrageamento animal [19, 20, 21, 22, 23, 24]. As distribuições de Lévy são caracterizadas pela existência de “longa

cauda", que gera uma alternância entre poucos saltos com comprimentos grandes e uma grande variedade de saltos curtos [9]. Essa mistura de saltos de diferentes tamanhos pode acarretar em um decaimento de lei de potência na distribuição, gerando assim uma divergência no segundo momento e dando origem aos processos superdifusivos que convergem para a distribuição α -estável de Lévy após um grande número de passos e são governados pelo TLC generalizado [25, 26, 27]. Em contrapartida, a distribuição gaussiana, que possui segundo momento finito, gera um comportamento difusivo regida pelo TLC [2, 28].

O hidrólogo britânico Harold E. Hurst, analisou a vazão anual de várias represas durante décadas [29]. Seu objetivo era prever as secagens ou transbordamentos nessas represas. Ele chamou a diferença entre o máximo e mínimo da água do reservatório de *range* (R) e utilizou a estatística R/S , onde S é o desvio padrão da vazão da água. Posteriormente, Hurst aplicou esse cálculo para outros fenômenos e descobriu que a estatística R/S é igual à metade do número de observações (N) elevado ao expoente de Hurst (H), com $H = \log(R/S)/\log(N)$. O expoente de Hurst possui uma relação empírica com o movimento browniano e pode ser utilizado para representar as propriedades de memória de longo prazo em caminhadas aleatórias. Logo, podemos relacionar a difusividade de uma partícula de Lévy com índice de estabilidade $\alpha \in (0,2]$, que caracteriza a distribuição [11], com o expoente de Hurst. Os processos superdifusivos são encontrados para os voadores de Lévy com $0 < \alpha < 2$, com expoente Hurst de difusão $H > 1/2$ [25], que gera uma lei de potência acarretando na divergência do segundo momento, enquanto que os processos subdifusivos, o expoente tem valores $H < 1/2$. Para a distribuição gaussiana, guiada pelo TLC e ditados pelo caso limite $\alpha = 2$ com o segundo momento finito, possui difusão normal com o expoente assumindo o valor $H = 1/2$.

Neste ponto, faz-se necessário distinguir um voador de um caminhante de Lévy [19, 20, 21, 22]. Os voos de Lévy são processos Markovianos, ou seja, sem memória (onde o próximo estado depende apenas do último estado e não de outros estados anteriores), com duração do salto (geralmente instantâneo ou constante) independente do comprimento, estando associado a uma velocidade infinita. Por outro lado, os caminhantes de Lévy são dados com velocidade finita (geralmente constante), gerando correlações espaço-temporais e levando a uma evolução temporal não Markoviana. Deste modo, estabelecemos desde já que, a menos que se indique o contrário, os resultados desta tese dizem respeito a voos de Lévy executados por voadores aleatórios de Lévy, e não caminhantes aleatórios de Lévy.

Um caso muito importante é o processo de Lévy em um espaço unidimensional com condições de contorno absorventes [19, 20, 30, 31, 32, 33, 34], o que dificulta o cálculo da função densidade de probabilidade $P(x,t)$ de encontrar a partícula em um local x no instante de tempo t . Uma abordagem para diminuir essa dificuldade é o método

das imagens aplicado no regime gaussiano ($\alpha = 2$) [31], contudo esse método falha no regime superdifusivo. Quando utilizamos fronteiras absorventes em caminhadas (ou voos) de Lévy, algumas quantidades são importantes para a análise do problema, como: as probabilidades de absorção das fronteiras em um instante t ($P_0(t)$ e $P_N(t)$), que dependem da posição inicial da partícula [31]; as taxas de sobrevivência $S(t)$, que é a probabilidade da partícula ainda estar ativa no processo (não ser absorvida por alguma fronteira) após um intervalo de tempo ou depois de um certo número de passos [31, 35]; tempo médio de primeira passagem (MFPT) $\langle t \rangle$, que é o tempo médio necessário para que a partícula aleatória com uma certa dinâmica estocástica alcance um determinado local, ou uma coleção de locais, pela primeira vez ao longo de seu caminho [35, 36, 37]. A taxa de sobrevivência pode ser ditada por dois diferentes comportamentos dinâmicos que dependem basicamente do intervalo de tempo, da posição inicial da partícula de Lévy, do comprimento dos passos (ϵ , com isso, do α) e do tamanho do domínio finito. Quando o local de início é próximo de um dos limites absorventes, inicialmente o sistema apresenta uma dinâmica de decaimento na forma de uma lei de potência ($S(t) \sim t^{-\gamma}$), que indica que apenas uma borda foi alcançada para aquele intervalo de tempo. Esse resultado mostra uma concordância com o Teorema de Sparre-Andersen para o espaço semi-infinito ($S(t) \sim t^{-1/2}$) [33, 38]. Continuando com a mesma posição de início perto de uma borda, para grandes intervalos de tempo, esperamos que o outro limite absorvente seja alcançado, mudando o comportamento dinâmico para um decaimento exponencial ($S(t) \sim e^{-\lambda t}$), ocorrendo o mesmo quando partimos do meio do intervalo finito.

O teorema de Sparre-Andersen [9, 33, 38, 39, 40, 41] diz que, para uma distribuição de passos simétrica e contínua em processos Markovianos, a taxa de sobrevivência para uma partícula no espaço semi-infinito escala assintoticamente com o número de passos com $n^{-1/2}$, onde podemos fazer a correlação $n \leftrightarrow t$ para também ser válido em processos com tempo contínuo, com $S(t) \sim t^{-1/2}$ [33]. Vale a pena mencionar que o Teorema de Sparre-Andersen deixa de ser válido para as caminhadas de Lévy, devido a sua dinâmica subdifusiva geradas pela correlação espaço-temporal típicas de processos não Markovianos. Contudo, para os voos de Lévy, esse teorema se aplica devido a não ocorrência de correlações espaço-temporais (processos Markovianos).

Nesta tese, estudamos os voadores de Lévy em espaços finitos unidimensionais, tanto discretos quanto no limite do contínuo, com os extremos absorventes, utilizando uma representação exata de sua equação mestra analisada no espaço de Fock (FS). Este formalismo foi proposto por Masao Doi em 1976 [42, 43] para reações clássicas de difusão em meios líquidos e processos de reações químicas, posteriormente estendida com sucesso para tratar uma variedade de outros sistemas estocásticos [31, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57], por exemplo, dinâmica de reação-difusão, cadeias de spin [58, 59], entre outros. Para esse formalismo, a densidade de

probabilidade de encontrar o sistema em um determinado estado e em um instante de tempo, desempenha um papel semelhante à função de onda na mecânica quântica. Escrevemos a matriz Hamiltoniano (H) na base de estados discretos de Fock, associado ao número de ocupação de cada sítio disponível no domínio. Com isso, calculamos as probabilidades de sobrevivência $S(t)$, as probabilidades de absorção das bordas para qualquer tempo t , as probabilidades assintóticas de absorção (no limite de $t \rightarrow \infty$) e o tempo médio de primeira passagem para vários valores de índice de Lévy $\alpha \in (0,2]$.

Uma observação importante é que o operador H não é hermitiano como na mecânica quântica, pois não é simétrico e nem possui dimensão de energia. Os operadores não-hermitianos com autovalores reais tem sido amplamente estudados e reconhecidos em diversas áreas [60, 61]. Nas últimas décadas, vários cientistas se debruçaram no estudo da possibilidade de um operador não-hermitiano desempenhar o papel de um Hamiltoniano na mecânica quântica, ocasionando modelos concretos que motivou um maior desenvolvimento na área [60, 61]. A física estatística desempenhou um grande papel para alavancar a aplicação dos operadores H não-hermitianos. Vários sistemas Físicos possuem tais operados e conseguem obter expressões para valores esperados de energia e operador número obtidas em termos da temperatura absoluta e do potencial químico [60]. Em outros sistemas, conseguimos obter a magnetização e a entropia usando diferentes ensembles estatísticos [2]. Nesse nosso trabalho, o operador Hamiltoniano é não-hermitiano devido ao domínio ser finito com limites absorventes. Como cada elemento do operador Hamiltoniano se refere a saltos entre dois locais (a soma dos elementos de cada coluna é zero) e sabendo que a partícula não pode saltar das bordas (primeira e última coluna nulas), isso acarreta em dois autovalores nulos relacionados aos autovetores dos extremos absorventes.

Organizamos este trabalho da seguinte forma: no Capítulo 2 são apresentados as ferramentas matemáticas utilizadas, como o TLC e sua generalização, o conceito de difusão e suas divisões (normal e anômala), a apresentação das distribuições α -estáveis de Lévy e o formalismo do espaço de Fock de acordo com os primeiros trabalhos de Masao Doi [42, 43]; Nos Capítulos 3 e 4, são ilustrados os resultados como as taxas de sobrevivência e probabilidades de absorção, ambas em função do tempo, de um voador de Lévy unidimensional com bordas absorventes no espaço discreto (Cap. 3) e no limite do espaço contínuo (Cap. 4); O Capítulo 5 é dedicado aos resultados para o tempo médio de primeira passagem e para as probabilidades assintóticas de absorção, tanto para o espaço discreto quanto para o limite contínuo. Os resultados desse capítulo foram publicados recentemente no trabalho [62]. Logo após, está as conclusões deste trabalho junto com as perspectivas futuras dessa pesquisa.

2 REVISÃO TEÓRICA

2.1 Teorema do limite central

Na teoria de probabilidades, um dos resultados mais importantes e aplicados é o Teorema do Limite Central (TLC) para um grande número de eventos estatísticos (variáveis aleatórias), cuja a sua importância vem do fato de garantir que a soma de um grande número de variáveis aleatórias, com média e variância (primeiro e segundo momentos) finitas, recai em uma distribuição gaussiana. Devido às suas poucas condições matemáticas e a utilização em diversos fenômenos estatísticos, o TLC alavancou a utilização da distribuição gaussiana para modelar sistemas aleatórios, tornando-a uma ferramenta clássica da física estatística. Vamos deduzir este teorema partindo da lei dos grandes números, de acordo com a referência [28].

A lei dos grandes números diz que, para uma sequência de N variáveis aleatórias $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ independentes e com mesma distribuição de probabilidades, temos que

$$y = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j \rightarrow a, \text{ quando } N \rightarrow \infty, \quad (2.1)$$

com $a = \langle \xi_j \rangle$ a média da distribuição. Supondo que essa média exista, podemos calcular a frequência de ocorrência de um dado evento \mathcal{A} em uma sequência de $N \rightarrow \infty$ ensaios. Considere uma certa sequência de N ensaios. Denotamos $\xi_j = 1$ se ocorrer o evento \mathcal{A} e $\xi_j = 0$ quando não ocorrer. Com isso, nesta sequência ficamos com $\ell = (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N)$ vezes em que o evento \mathcal{A} aconteceu, de modo que sua frequência relativa foi ℓ/N . Como $a = \langle \xi_j \rangle$, temos que no limite mencionado

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j = a = \frac{\ell}{N} = p, \text{ quando } N \rightarrow \infty, \quad (2.2)$$

onde p é a probabilidade de ocorrer \mathcal{A} .

Para uma variável aleatória z , definida por

$$z = \frac{1}{\sqrt{Nb}} \left\{ \sum_{j=1}^N \xi_j - Na \right\}, \quad (2.3)$$

com média a e variância b finitas, o TLC afirma que z possui distribuição gaussiana no limite de $N \rightarrow \infty$ da forma

$$\rho(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}. \quad (2.4)$$

Note que, a exigência para o TLC ser válido é a existência da média e da variância, caso contrário não é possível aplicar o teorema, como no exemplo da distribuição de Cauchy-Lorentz. Para provar que a Eq. (2.4) é a distribuição da variável aleatória da Eq. (2.3), partiremos da definição da função característica, que é uma transformada de Fourier da densidade de probabilidade associada a variável z , ou seja,

$$g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(z) e^{ikz} dz = \langle e^{ikz} \rangle, \quad (2.5)$$

com as propriedades $g(0) = 1$ e $|g(k)| \leq 1$. Podemos escrever a função característica em termos dos momentos μ_n , abrindo a Eq. (2.5) em série de Taylor

$$g(k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \mu_n, \quad (2.6)$$

sendo os momentos definidor para n par (os momentos ímpares são nulos) da forma

$$\mu_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^n e^{-z^2/2} dz = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1), \quad (2.7)$$

em geral, $\mu_n = (2b)^{n/2} \Gamma((n+1)/2) / \sqrt{\pi}$ com $\mu_2 = b$ (variância), $\mu_4 = 3b^2$ e $\mu_6 = 15b^3$.

Substituindo a Eq. (2.7) na Eq. (2.6), lembrando que os momentos ímpares são nulos e usando a propriedade $[(2m)! / 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)] = 2^m m!$, obtemos

$$\begin{aligned} g(k) &= \langle e^{ikz} \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^{2m}}{(2m)!} [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-k^2)^m}{2^m m!} = e^{-k^2/2}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

que é a função característica de uma distribuição gaussiana dada pela Eq. (2.4). Nota-se que $g(k)$ também é uma função gaussiana. Para uma variável aleatória qualquer x , usamos a mudança de variável $y = a + x$ e obtemos

$$g(k) = \langle e^{iky} \rangle = e^{ika} \langle e^{ikx} \rangle = e^{ika - k^2 b/2}, \quad (2.9)$$

que é a função característica da distribuição gaussiana de média a e variância $b = \sigma^2$. Podemos escrever a função característica em termos dos cumulantes κ_n , da forma

$$g(k) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \kappa_n \right\}. \quad (2.10)$$

Tomando o logaritmo do lado direita da Eq. (2.6), abrindo em série de Taylor e comparando com o lado direito da Eq. (2.10), obtemos as relações entre os cumulantes e os momentos,

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= \mu_1, \\
\kappa_2 &= \mu_2 - \mu_1^2, \\
\kappa_3 &= \mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

e assim vai. Os cumulantes da distribuição gaussiana são nulos a partir do terceiro. Agora, podemos reescrever a função característica com expansão em cumulantes

$$g(k) = \exp\left\{iak - \frac{1}{2}bk^2 + \mathcal{O}(k^2)\right\}. \tag{2.12}$$

Voltando para a nossa variável z definida pela Eq. (2.3), a sua função característica é dada por

$$g_z(k) = \langle e^{ikz} \rangle = \left\langle \exp\left\{\frac{ik}{\sqrt{Nb}} \sum_{j=1}^N (\xi_j - a)\right\}\right\rangle, \tag{2.13}$$

como as variáveis são independentes e possuem a mesma distribuição de probabilidade, definimos uma nova variável $K = k/\sqrt{Nb}$ e ficamos com

$$g_z(k) = \prod_{j=1}^N \langle e^{iK\xi_j} \rangle e^{-iKa} = \{g(K)e^{-iKa}\}^N. \tag{2.14}$$

Usando a Eq. (2.12) com a expansão em cumulantes, chegamos na função característica da nossa variável z

$$g_z(k) = \exp\left\{-\frac{1}{2}NbK^2 + N\mathcal{O}(K^2)\right\}. \tag{2.15}$$

Como $NbK^2 = k^2$ e $\mathcal{O}(K^2) = \mathcal{O}(N^{-1})$, então $N\mathcal{O}(N^{-1}) \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$, a função característica de z recai mais uma vez na Eq. (2.8)

$$g_z(k) = e^{-k^2/2}, \tag{2.16}$$

que é a função característica correspondente da distribuição gaussiana, com densidade de probabilidade definida pela Eq. (2.4).

A distribuição de Lévy não é regida pelo TLC, por não ter o primeiro e o segundo momentos finitos [63]. Contudo, a versão generalizada do TLC [64] permite a não finitude dos primeiros momentos da distribuição e, com isso, governam as caminhadas e voos de Lévy, como veremos a seguir.

2.1.1 Teorema do limite central generalizado

Considere uma distribuição que dita uma sequência de variáveis aleatórias z . Se a distribuição dos elementos é, a menos de um fator de escala, a mesma da soma dos elementos, então essa distribuição é dita estável [63, 64]. De acordo com o TLC, o resultado de uma soma de N distribuições gaussianas é uma gaussiana, com uma variância N vezes a de cada variável independente. Logo a gaussiana é uma distribuição estável. Por definição, a variável aleatória ξ é considerada estável se, para as suas cópias independentes $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ e as constantes $a, b, \dots, n \in \mathbb{R}$, temos a seguinte condição

$$a\xi_1 + b\xi_2 + \dots + n\xi_n \stackrel{d}{=} c_n\xi + d_n, \quad (2.17)$$

com o símbolo $\stackrel{d}{=}$ indicando que ambos os lados da equação são regidas pela mesma função de probabilidades. De forma geral, as distribuições estáveis são descritas pela função característica da forma

$$g_\alpha(k) = \langle e^{ikz} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(z) e^{ikz} dz = \begin{cases} \exp \{ -b|k|^\alpha [1 - i\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) \text{sign}(k)] + ik\mu \}, & \alpha \neq 1; \\ \exp \{ -b|k| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} \text{sign}(k) \log(|k|)] + ik\mu \}, & \alpha = 1, \end{cases} \quad (2.18)$$

com os valores de $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq 1$ e $\text{sign}(k)$ a função sinal. A simetria de $g_\alpha(k)$ é controlada pelo parâmetro β , ou seja, para $\beta = 0$ temos uma simetria em torno do ponto $k = 0$. Nesta tese usaremos também $\mu = 0$, que é o parâmetro de localização, de modo que a Eq. (2.18) recai em

$$g_\alpha(k) = e^{-b|k|^\alpha}. \quad (2.19)$$

A Eq. (2.19) pode ser obtida se considerarmos a variável aleatória z como uma combinação linear da forma [28]

$$z = \frac{1}{N^\gamma} (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N), \quad (2.20)$$

com $\gamma > 0$. Essa equação recai na Eq. (2.3) para uma variável que possui uma distribuição de probabilidades gaussiana quando $\gamma = 1/2$, com segundo momento finito e média nula ($a = 0$). Para $\gamma = 1/2$, a distribuição de z sempre será gaussiana se as de ξ_j também for, sem a necessidade de N ser grande.

Se considerarmos que a variável z possui a mesma distribuição $\rho(\xi_j)$, podemos encontrar a função característica $g_z(k)$ associada à variável z

$$g_z(k) = \langle e^{ikz} \rangle = \prod_j \langle e^{ik\xi_j/N^\gamma} \rangle = \langle e^{ik\xi_j/N^\gamma} \rangle^N = [g(kN^{-\gamma})]^N, \quad (2.21)$$

onde usamos a função característica $g(k) = \langle e^{ik\tilde{\zeta}_j} \rangle$ associada às variáveis $\tilde{\zeta}_j$. Como z e $\tilde{\zeta}_j$ possuem a mesma distribuição, então $g_\alpha(k) = g(k)$, onde podemos tomar o logaritmo de ambos os lados dessa equação

$$\ln(g(k)) = N \ln(g(kN^{-\gamma})). \quad (2.22)$$

Como $\ln(g(k))$ é uma função homogênea em k , uma solução possível para a Eq. (2.22) é

$$\ln(g(k)) = -b|k|^\alpha \xrightarrow{\alpha > 0} g(k) = e^{-b|k|^\alpha}, \quad (2.23)$$

onde definimos $\alpha = 1/\gamma$. E assim, reencontramos a Eq. (2.19). Essa expressão recai na distribuição gaussiana quando $\gamma = 1/2$ e, com isso, $\alpha = 2$. O matemático Paul Lévy (1930) mostrou que sistemas com primeiros momentos divergentes também possuem distribuições estáveis [63] (não seguindo o TLC), obtendo as chamadas distribuições α -estáveis de Lévy, definida pela Eq. (2.23). Outro exemplo de função característica dessa forma é a distribuição de Cauchy ($\alpha = 1$). Na seção 2.3 deste capítulo, voltaremos às distribuições de Lévy.

2.2 Difusão Normal e Anômala

Começamos essa seção considerando uma caminhada aleatória unidimensional genérica nas distâncias, na qual o caminhante se desloca de um valor x_j do local de início a cada intervalo de tempo τ . Com isso, partindo da origem, sua posição será $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ no instante $t = \tau n$, logo podemos escrever a função característica de x_j [28]

$$g(k) = \langle e^{ikx_j} \rangle = \int P(x_j) e^{ikx_j} dx_j = e^{iAk - Bk^2/2}, \quad (2.24)$$

onde $P(x_j)$ é a sua densidade de probabilidade. Para a última igualdade, expandimos em cumulantes até segunda ordem, assim como fizemos no TLC, desde que a média A e a variância B de x_j existam. Para a variável x , podemos escrever a função característica em termos de $g(k)$ para n grande

$$g_x(k) = [g(k)]^n = e^{inAk - nBk^2/2}. \quad (2.25)$$

Definindo duas novas variáveis como $c = A/\tau$ e $D = B/2\tau$, a Eq. (2.25) fica

$$g_x(k) = e^{ictk - Dtk^2}. \quad (2.26)$$

Logo, a densidade de probabilidade da variável x é obtida fazendo a transformada inversa de Fourier

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-(x-ct)^2/4Dt}. \quad (2.27)$$

Esse resultado pode ser entendido como a distribuição de um conjunto de muitas partículas em movimentos aleatórios independentes, cuja a densidade é proporcional a Eq. (2.27). Assim, se considerarmos que as partículas estão próximas da origem, ao passar o tempo elas estarão espalhadas de acordo com a distribuição acima. Para um intervalo de tempo grande, essa densidade se torna uma gaussiana centrada em $x = ct = \langle x \rangle$ e variância $2Dt$. É importante observar que $\rho(x,t)$ é solução da equação de difusão com arrastamento, onde usamos $c = 0$ na última igualdade para obter a equação da difusão normal

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -c \frac{\partial \rho}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \xrightarrow{c=0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (2.28)$$

Podemos partir da equação diferencial parcial de Fokker-Planck, que dá a evolução temporal da densidade de probabilidade $P(x,t)$, para obter a equação de difusão normal de caminhadas aleatórias regidas pelo TLC [65]. Para isso, definimos a equação de Fokker-Planck para uma variável [28]

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} [f(x)P(x,t)] + \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x,t), \quad (2.29)$$

com $f(x)$ sendo uma função real oriunda da equação de Langevin interpretada como uma força, ou a razão de uma força externa e o coeficiente de atrito. Conseguimos reescrever essa equação em termos do operador evolução definido por

$$\hat{U} = -\frac{\partial}{\partial x} [f(x)] + \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (2.30)$$

onde a Eq. (2.29) fica

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = \hat{U} P(x,t), \quad (2.31)$$

que é a equação de Fokker-Planck. Para uma distribuição $P(x,t_2)$ e já sabendo $P(x,t_1)$ no instante $t_1 \leq t_2$, a solução tem a forma

$$P(x,t_2) = e^{(t_2-t_1)\hat{U}} P(x,t_1). \quad (2.32)$$

Introduzindo uma função delta de Dirac, encontramos

$$P(x_2,t_2) = \int Q(x_2,t_2|x_1,t_1) P(x_1,t_1) dx_1, \quad (2.33)$$

que mostra a propagação de $P(x_1,t_1)$ para $P(x_2,t_2)$, onde $Q(x_2,t_2|x_1,t_1)$ é a probabilidade de transição, entendida como uma densidade de probabilidade condicional, definida por

$$Q(x_2, t_2 | x_1, t_1) = e^{(t_2 - t_1)\hat{U}} \delta(x_2 - x_1), \quad (2.34)$$

que, para o limite de $t_2 \rightarrow t_1$, resgatamos a função delta de Dirac $\delta(x_2 - x_1)$. Usando a identidade $e^{(t_3 - t_1)\hat{U}} = e^{(t_3 - t_2)\hat{U}} e^{(t_2 - t_1)\hat{U}}$ e introduzindo a função delta de Dirac $\delta(x_3 - x_2)$, de forma análoga àquela que fizemos para deduzir a Eq. (2.33) da Eq. (2.32), chegamos na equação de Chapman-Kolmogorov para processos estocásticos markovianos [66]

$$Q(x_1, t_1 | x_3, t_3) = \int Q(x_1, t_1 | x_2, t_2) Q(x_2, t_2 | x_3, t_3) dx_2 \quad , t_1 < t_2 < t_3. \quad (2.35)$$

Definimos $t_3 = t + \tau$ e $t_2 = t$, para reescrever a Eq. (2.35) como

$$Q_{t+\tau}(x_1 | x_3) = \int Q_\tau(x_3 | x_2) Q_t(x_2 | x_1) dx_2, \quad (2.36)$$

e fazendo a expansão em série de Taylor em $\tau \rightarrow 0$, seguindo os procedimentos em [37], com $Q_0(x_2 | x_1) = \delta(x_2 - x_1)$, encontramos

$$Q_\tau(x_3 | x_2) = (1 - a_0 \tau) \delta(x_3 - x_2) + \tau W(x_3 | x_2) + \mathcal{O}(\tau^2), \quad (2.37)$$

com $W(x_3 | x_2) \geq 0$ a probabilidade de transição por unidade de tempo de x_2 para x_3 , e

$$a_0(x_2) = \int W(x_3 | x_2) dx_3. \quad (2.38)$$

Aplicando a Eq. (2.37) na Eq. (2.36) e fazendo

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{P_{t+\tau}(x_1 | x_3) - P_t(x_3 | x_1)}{\tau} = \frac{\partial P_t(x_3 | x_1)}{\partial t}, \quad (2.39)$$

chegamos a uma nova expressão para a Eq. (2.36), que é a equação mestra

$$\frac{\partial Q_\tau(x_3 | x_1)}{\partial t} = \int \{W(x_3 | x_2) P_t(x_2 | x_1) - W(x_2 | x_3) P_t(x_3 | x_1)\} dx_2. \quad (2.40)$$

Generalizamos a Eq. (2.40) para um processo estocástico genérico

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \int \{T(x | x') P(x', t) - T(x' | x) P(x, t)\} dx', \quad (2.41)$$

que é a equação mestra para as variáveis contínuas x e x' , com a taxa de transição $T(x | x')$ do caminhante saltar do local x' para x (com o comprimento do salto sendo $|x - x'|$). Voltaremos a essa equação na seção 2.4 onde iremos discutir a abordagem do espaço de Fock. Vamos reescrever a equação mestra usando $T(x | x') = T(x', r) \simeq T(x' + \Delta x; r) \simeq 0$ para $|r| < \delta$ e $|\Delta x| < \delta$, com $r = x - x'$

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \int T(x - r; r) P(x - r, t) dr - P(x, t) \int T(x; -r) dr, \quad (2.42)$$

e supondo que $P(x,t)$ varie lentamente, podemos expandir o produto do integrando até a segunda ordem em série de Taylor, gerando assim

$$\begin{aligned} T(x-r;r)P(x-r,t) &= T(x;r)P(x,t) - \frac{\partial}{\partial x} \{T(x;r)P(x,t)\}r \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{T(x;r)P(x,t)\}r^2 + \mathcal{O}(r^3). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Substituímos esse resultado na Eq. (2.42), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} &= \int T(x;r)P(x,t)dr - \int r \frac{\partial}{\partial x} \{T(x;r)P(x,t)\}dr \\ &+ \frac{1}{2} \int r^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{T(x;r)P(x,t)\}dr - P(x,t) \int T(x;-r)dr. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Fazendo a expansão de Kramer-Moyal, com momentos

$$a_\nu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} r^\nu T(x;r)dr, \quad (2.45)$$

finalmente, chegamos em uma equação de difusão geral

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \{a_1(x)P(x,t)\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{a_2(x)P(x,t)\}, \quad (2.46)$$

que também é uma equação de Fokker-Planck. Comparando as Eqs. (2.29) e (2.46), concluimos que $a_1(x) = f(x)$ e $a_2(x) = \Gamma$. Para uma partícula aleatória no movimento browniano, temos

$$a_1(x) = \frac{\langle \Delta x \rangle_x}{\Delta t} = 0 \quad (2.47)$$

e

$$a_2(x) = \frac{\langle (\Delta x)^2 \rangle_x}{\Delta t} = 2D, \quad (2.48)$$

e assim retornamos para a Eq. (2.28) da difusão normal.

A difusão normal relaciona o segundo momento da distribuição com o coeficiente de difusão D , ou seja, o desvio quadrático médio é proporcional à raiz quadrada do tempo, com a constante de proporcionabilidade sendo o coeficiente D . Na próxima seção, apresentamos outros tipos de difusão.

2.2.1 Difusão anômala

Na seção anterior, vimos que a caminhada browniana unidimensional gera uma distribuição de probabilidades gaussiana e obedece a equação de difusão normal

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}, \quad (2.49)$$

onde a variância é escrita em termos do coeficiente de difusão ($\sigma^2 = 2Dt$). Logo o espalhamento espacial da caminhada browniana em torno da sua posição média é uma lei de potência no tempo

$$\sigma \sim t^{1/2}. \quad (2.50)$$

Contudo, essa equação não é válida para as distribuições de Lévy, devido ao fato de não considerar as correlações de longo alcance. Vamos analisar a dinâmica dos processos de Lévy, tomando a equação mestra generalizada [32, 33, 67]. Para isso, partimos da Eq. (2.41) reescrita abaixo, onde $T(x|x')$ é a taxa de transição da posição x' para o local x (e, analogamente, $T(x'|x)$ de x para x')

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \int \{T(x|x')P(x',t) - T(x'|x)P(x,t)\} dx'. \quad (2.51)$$

Vamos considerar que os passos são dados instantaneamente, ou seja, estamos interessados nos voadores de Lévy. Levando em consideração a simetria $T(x|x') = T(x'|x)$ e que o voador possui um comprimento de passos $r = |x - x'|$, podemos dizer que $T(x'|x) \rightarrow T(r)$ e $x' \rightarrow x + r$, transformando a equação acima em [68]

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} T(r)[P(x+r,t) - P(x,t)]dr. \quad (2.52)$$

No limite assintótico $r \gg 1$, a distribuição de Lévy com comprimento de passos r possui o comportamento de uma lei de potência $T(r) \sim r^{-(1+\alpha)}$, que podemos substituir na equação acima para obter a generalização da equação de difusão para os voadores de Lévy

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = D^\alpha P(x,t), \quad (2.53)$$

onde D^α é o operador derivada fracionária de Caputo definida como [69]

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{A(\alpha)} \int dr \frac{1}{r^{1+\alpha}} [f(x+r) - f(x)]. \quad (2.54)$$

A derivada fracionária é compreendida como uma extensão da derivada que normalmente usamos, com valores de α não inteiros. As definições dessas derivadas não são únicas, além da definição de Caputo temos a de Riemann-Liouville e Riesz [9]. Optamos pela definição de Caputo pois, além da derivada fracionária de uma constante ser nula, fato que não ocorre na derivada de Riemann-Liouville, ela envolve derivadas usuais, onde podemos aplicar em problemas de difusão, já que podemos ter valores iniciais para a distribuição de probabilidade e para suas derivadas como condição de contorno [9].

Podemos resolver a Eq. (2.53) seguindo o mesmo caminho para o caso browniano apresentado no início da Seção 2.2. Considerando a distribuição α -estável de Lévy dada pela Eq. (2.18), com $\mu = 0$ e que $[g_\alpha(k)]^N \rightarrow [g_\alpha(k)]^{N+1}$ para um único deslocamento,

podemos escrever a função característica de um passo acontecer em um intervalo infinitesimal δt como

$$g(k, \delta t) = e^{-b|k|^\alpha \delta t}. \quad (2.55)$$

Expandindo em torno de $k = 0$ obtemos $g(k) \cong 1 - b|k|^\alpha \delta t$, onde no limite contínuo $N \rightarrow \infty$, $\delta t \rightarrow 0$ e $t = N\delta t$ finito, alcançamos

$$g(k, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} [g(k, \delta t)]^N = \left(1 - \frac{b|k|^\alpha t}{N}\right)^N = e^{-b|k|^\alpha t}, \quad (2.56)$$

de modo que

$$\frac{\partial g(k, t)}{\partial t} = -b|k|^\alpha g(k, t) \quad (2.57)$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier na Eq. (2.56), encontramos a distribuição de probabilidade de Lévy com $\mu = 0$

$$P(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx - b|k|^\alpha t} dk. \quad (2.58)$$

Esse resultado, em conjunto com a Eq. (2.57), sugere uma equação de difusão com diferencial fracionária no espaço, com b constante, da forma

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = b \frac{\partial^\alpha P(x, t)}{\partial x^\alpha}. \quad (2.59)$$

Nas distribuições α -estáveis de Lévy com $0 < \alpha < 2$, o segundo momento diverge. Essa divergência vem do comportamento de lei de potência da taxa de transição $T(r)$. Em particular, considerando a quantidade finita $\sigma_L = \langle |x|^q \rangle^{1/q}$, para $q < \alpha$, é possível verificar através dos resultados já obtidos a caracterização da difusão anômala [70]

$$\sigma_L \sim t^{1/\alpha}. \quad (2.60)$$

Isso mostra que, para os processos de Lévy com $0 < \alpha < 2$, a dispersão é mais rápida do que a browniana, gerando uma superdifusão. A difusão é reestabelecida quando $\alpha = 2$, recaindo no desvio padrão $\sigma \sim t^{1/2}$. De forma geral, o desvio generalizado é proporcional ao expoente de Hurst H [11, 19]

$$\sigma_L \sim t^H. \quad (2.61)$$

Com isso, podemos observar que $H = 1/2$ temos a difusão normal, $H > 1/2$ caracteriza os processos superdifusivos e $H < 1/2$ para os subdifusivos. Um caso particular é quando $H = 1$, que corresponde ao regime balístico. Os casos de superdifusão e subdifusão podem ser geradas nos processos de Lévy. A superdifusão ocorre para os voos de Lévy com $0 < \alpha < 2$, que é a tendência do voador ficar na mesma direção do

passo antecessor. Já a subdifusão, o caminhante de Lévy espera um intervalo de tempo longo antes de dar o próximo passo, ou devido a não tendência de direção (trocando a direção do passo anterior) [68]. A equação para os processos subdifusivos, tem uma forma diferente da superdifusão, sua derivada fracionária é aplicada no tempo [71],

$$\frac{\partial^\alpha P(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x} \{a_1(x)P(x,t)\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{a_2(x)P(x,t)\}. \quad (2.62)$$

Na seção seguinte, vamos analisar as distribuições α -estáveis de Lévy que foram usadas, aplicando o formalismo do espaço de Fock, para obter os resultados dos três últimos capítulos desta tese.

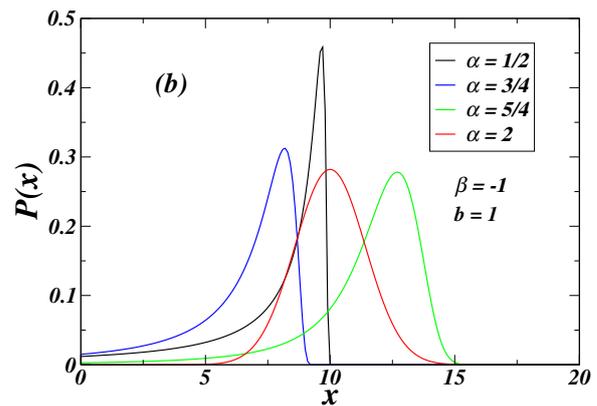
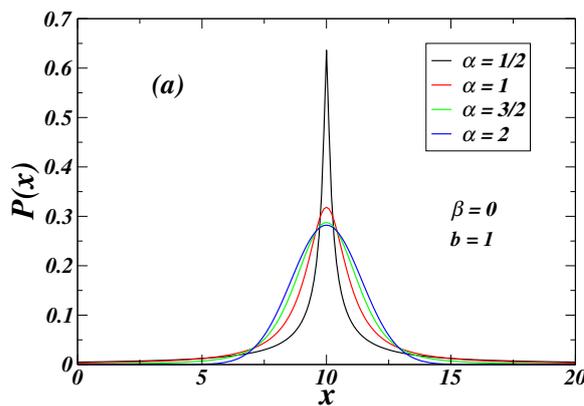
2.3 Distribuições α -estáveis de Lévy

As distribuições α -estáveis de Lévy são descritas por quatro parâmetros, α , β , b e μ . O parâmetro de estabilidade $\alpha \in (0,2]$ mede a extensão da cauda, ou seja, valores baixos implicam em maiores caudas (maior o comprimento do salto). Já $\beta \in [-1,1]$ está associado a simetria da distribuição, isto é, para $\beta = 0$ a distribuição é simétrica, $\beta > 0$ com cauda direita mais longa e $\beta < 0$ a esquerda mais longa. Os outros parâmetros são, o fator de escala $b > 0$ e o de localização $\mu \in \mathbb{R}$. Com isso, é comum denotar a distribuição α -estável de Lévy como $S(\alpha, \beta, b, \mu)$ [64].

Nas Figs. 1, ilustramos os diferentes comportamentos das distribuições α -estáveis de Lévy para diferentes valores do parâmetro de estabilidade $\alpha \in (0,2]$, de simetria $\beta \in [-1,1]$ e do fator de escala $b = 1,2,3$ e 4. Em todas elas usamos $\mu = x/2$, centralizando a distribuição no meio do intervalo. Na figura (a), usamos $\beta = 0$ e $b = 1$ para alguns valores de α , evidenciando a simetria das distribuições. Já na figura (b), mostramos a assimetria para diversos valores de α , usando $\beta = -1$. Nas figuras (c) e (d) fixamos $\alpha = 3/2$ e 1, respectivamente, e usamos diferentes valores de β . Por fim, nas figuras (e) e (f), ilustramos as distribuições para valores do fator de escala b , usando $\alpha = 1/2$ e $\beta = 0$ (simétrico) e $\alpha = 3/2$ com $\beta = 1$ (assimétrico).

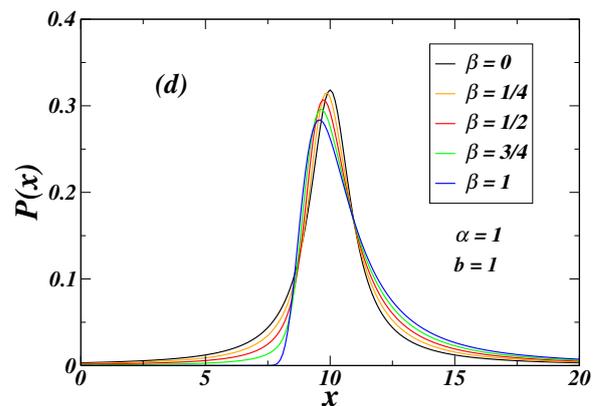
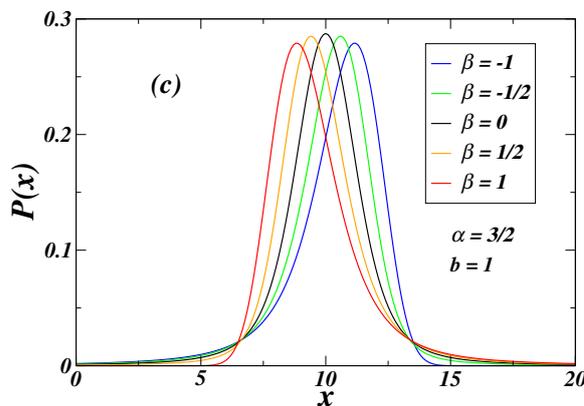
Figura 1 – Ilustrações das distribuições α -estáveis de Lévy $P(x)$ em função da posição x , para diferentes valores dos parâmetros α , β , b e fixando $\mu = x/2$. Usamos diferentes valores de α e $b = 1$ para $\beta = 0$ em (a) e $\beta = -1$ em (b). Em seguida, para alguns valores de β e $b = 1$ para $\alpha = 3/2$ em (c) e $\alpha = 1$ em (d). Por último, para alguns valores de b com $\alpha = 1/2$, $\beta = 0$ em (e) e $\alpha = 3/2$, $\beta = 1$ em (f).

(a) Distribuições simétricas com $\beta = 0$. (b) Distribuições assimétricas com $\beta = -1$.



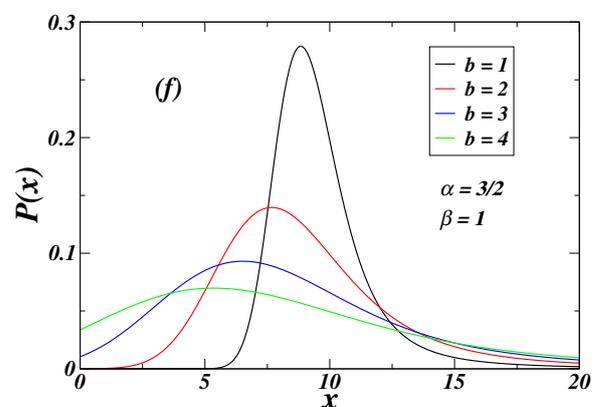
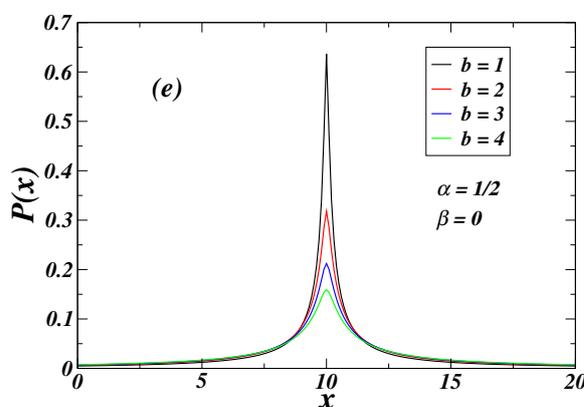
(c) Assimetria com $\alpha = 3/2$.

(d) Assimetria como $\alpha = 1$.



(e) Simetria para $\alpha = 1/2$ com $b \in [1,4]$.

(f) Assimetria para $\alpha = 3/2$ com $b \in [1,4]$.



Fonte: O autor (2022).

Mostramos na Seção 2.1.1 sobre o TLC generalizado, a função característica geral para as distribuições estáveis, descritas pela Eq. (2.18). Essa equação recai Eq. (2.19) quando usamos $\beta = \mu = 0$, que significa uma distribuição simétrica com comprimento de passos x e centrada em $x = 0$. Podemos obter a distribuição de probabilidades de Lévy, aplicando a transformada inversa de Fourier na Eq. (2.19)

$$P_L(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx - b|k|^\alpha} dk = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-b|k|^\alpha} \cos(kx) dk. \quad (2.63)$$

Vamos mostrar que o comportamento assintótico (para x suficientemente grande) de $P_L(x)$ é um decaimento via lei de potência [65]. De acordo com o trabalho [72], para $b = 1$ e $k > 0$ podemos escrever

$$e^{k^\alpha} = \int_0^{\infty} e^{-yk} F'_\alpha(k) dk, \quad (2.64)$$

com

$$F'_\alpha(k) = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \sin(\pi\alpha j) \frac{\Gamma(\alpha j + 1)}{x^{(\alpha j + 1)}}. \quad (2.65)$$

Reescrevendo $P_L(x)$ usando as Eqs. (2.64) e (2.65), ficamos com

$$P_L(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \sin(\pi\alpha j) \frac{\Gamma(\alpha j + 1)}{y^{(\alpha j + 1)}} e^{-yk} dy \right] \cos(kx) dk, \quad (2.66)$$

onde podemos usar a transformada de Laplace do cosseno

$$\int_0^{\infty} e^{-yk} \cos(kx) dk = \mathcal{L}(\cos(kx)) = \frac{y}{y^2 + x^2}, \quad (2.67)$$

para obter

$$P_L(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \sin(\pi\alpha j) \Gamma(\alpha j + 1) \left[\int_0^{\infty} \frac{y^{-\alpha j}}{y^2 + x^2} dy \right]. \quad (2.68)$$

A integral na equação acima, tem solução

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{-\alpha j}}{y^2 + x^2} dy = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}(\alpha j + 1)} \sec\left(\frac{\pi\alpha j}{2}\right), \quad (2.69)$$

e usando as identidades trigonométricas $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ e $\sec(x) = 1/\cos(x)$, temos

$$P_L(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{2\sin\left(\frac{\pi\alpha j}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi\alpha j}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi\alpha j}{2}\right)} \Gamma(\alpha j + 1) \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}(\alpha j + 1)} \right]. \quad (2.70)$$

Simplificando o máximo possível, obtemos

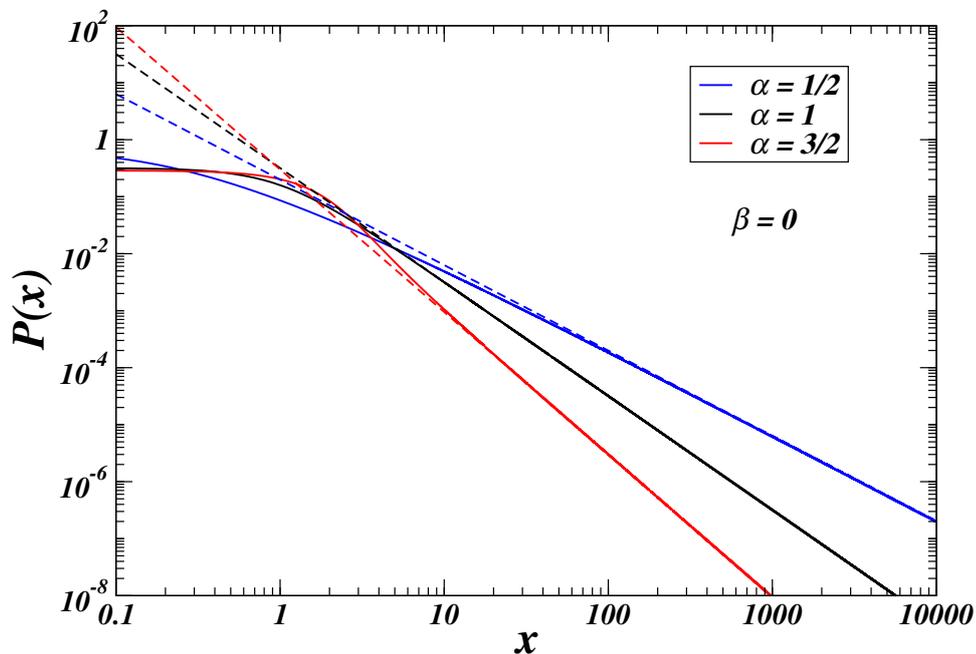
$$P_L(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \frac{(-1)^j \Gamma(\alpha j + 1)}{j! x^{\alpha j + 1}} \sin\left[\frac{\pi \alpha j}{2}\right] + \mathcal{O}(x^{-\alpha(N+1)-1}). \quad (2.71)$$

Essa equação mostra que o comportamento assintótico da distribuição α -estável de Lévy, para um grande valor de x , é um decaimento via lei de potência com $\alpha \in (0,2)$ [28]

$$P_L(x) \sim \frac{A_\alpha}{x^{(\alpha+1)}} \sim x^{-(\alpha+1)}, \quad \text{onde } A_\alpha = \frac{1}{\pi} \Gamma(\alpha + 1) \sin\left(\frac{\pi \alpha}{2}\right). \quad (2.72)$$

Como já dito anteriormente, esse comportamento acarreta na divergência dos primeiros momentos da distribuição de Lévy e, com isso, não obedecendo ao TLC (mas sim ao TLC generalizado). Na Fig. 2, evidenciamos esse comportamento assintótico de lei de potência, em um gráfico log-log das distribuições em função da posição x , para os valores de $\alpha = 1/2$ (em azul), 1 (em preto) e 3/2 (em vermelho) [9, 65].

Figura 2 – Gráfico log-log das distribuições α -estáveis de Lévy $P(x)$ em função da posição x com $\beta = 0$ e $b = 1$ (linhas sólidas), para os valores de $\alpha = 1/2$ (azul), 1 (preto) e 3/2 (vermelho). Para x grande, o comportamento assintótico da distribuição é um decaimento de lei de potência $P(x) \sim x^{-(\alpha+1)}$, ilustrado pelas linhas tracejadas coloridas.



Fonte: O autor (2022).

Na tabela a seguir, mostramos os valores do coeficiente A_α para os valores de α usados acima, utilizando a segunda parte da Eq. (2.72), e suas respectivas equações assintóticas de lei de potência, de acordo com a primeira da mesma equação.

Tabela 1 – Valores de A_α e suas respectivas equações assintóticas de lei de potência para os valores de $\alpha = 1/2, 1$ e $3/2$.

α	A_α	$P_L(x) \sim$
3/2	0.299207	$0.299x^{-2.5}$
1.0	$1/\pi$	$1/(\pi x^2)$
1/2	0.199471	$1.99x^{-1.5}$

Fonte: O autor (2022).

2.4 Formalismo do espaço de Fock

Nesta seção vamos apresentar o formalismo do espaço de Fock, tendo como guia o artigo de M. Doi de 1976 [42]. Vamos partir da segunda quantização, utilizando os operadores de criação e destruição similares aos da mecânica quântica, para representar as probabilidades de transição em termos dos operadores no espaço de Fock. Doi utilizou a forma canônica da teoria quântica de campos para estudar processos de reação-difusão [43]. Fock mostrou como a equação de Schrödinger no espaço de Hilbert pode admitir uma representação em termos do operador número em um espaço de Hilbert de número de ocupação. Logo, como podemos perceber, a segunda quantização não é um método exclusivo da mecânica quântica, podendo ser aplicado também em sistemas clássicos com muitas partículas.

No seu trabalho pioneiro, M. Doi [42] parte da equação de evolução temporal da distribuição de probabilidade (uma equação mestra). Para isso, vamos considerar um sistema com N partículas idênticas, onde q_i é o conjunto de estados de cada partícula (posição, momento, entre outras) e $f^{(N)}(q_1, q_2, \dots, q_N; t) = f^{(N)}(q^N; t)$ é a função distribuição de probabilidade. A evolução temporal dessa distribuição é

$$\frac{\partial}{\partial t} f^{(N)}(q^N; t) = -\mathcal{U}^{(N)} f^{(N)}(q^N; t), \quad (2.73)$$

onde $\mathcal{U}^{(N)}$ é o operador evolução. Vamos esclarecer que para todas as partículas $(1, 2, \dots, N)$, temos os estados $(q_1, q_2, \dots, q_N) = q^N$ ao qual a i -ésima partícula está localizada em q_i ($i = 1, 2, \dots, N$). Como elas são idênticas, não precisamos distinguir os estados. A normalização da função distribuição é dada por

$$\int dq^N f^{(N)}(q^N; t) = 1. \quad (2.74)$$

Agora, podemos definir a probabilidade $F^{(N)}$ de encontrar a partícula em um estado q^N , relacionando com a função distribuição

$$F^{(N)}(q^N; t) = \sum f^{(N)}(q^N; t), \quad (2.75)$$

com a soma feita sobre todas as permutações de q_i . Nota-se que $F^{(N)}$ é simétrico em relação aos seus argumentos. A normalização para $F^{(N)}$ é diferente da Eq. (2.74), uma vez que contamos $N!$ vezes por não precisarmos distinguir os estados $((q_1, q_2, \dots, q_N) = q^N = (q_N, \dots, q_2, q_1))$, logo integramos sobre a condição $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_N$, com

$$\int_{q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_N} dq^N = \frac{1}{N!} \int dq^N = \int dQ^N, \quad (2.76)$$

e a normalização fica

$$\int dQ^N F^{(N)}(q^N; t) = 1. \quad (2.77)$$

Quando o número de partículas não for fixo, devemos considerar um conjunto de funções de probabilidade $\{F^{(0)}(t), F^{(1)}(q^1; t), \dots\} = F(t)$, cuja a normalização é dada por

$$\sum_{N=0}^{\infty} \int dQ^N F^{(N)}(q^N; 1) = 1. \quad (2.78)$$

Agora que já especificamos os estados do problema em questão, partimos para a segunda quantização proposta na mecânica quântica, para depois adaptá-la para o nosso problema. Toda essa abordagem que estamos seguindo, está presente no trabalho do M. Doi [42].

2.4.1 Segunda quantização

Partimos agora para a segunda quantização. Dada um estado quântico $|F(t)\rangle$, com a notação simplificada $|q^N\rangle \equiv |q_1, q_2, \dots, q_N\rangle \equiv a^\dagger(q_1)a^\dagger(q_2)\dots a^\dagger(q_N)|0\rangle$ definido por

$$|F(t)\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \int dQ^N F^{(N)}(q^N; t) |q^N\rangle, \quad (2.79)$$

com $|0\rangle = |0, 0, \dots, 0\rangle$ o estado vazio e os operadores de criação e destruição $a^\dagger(q)$ e $a(q)$, definimos

$$a(q)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|a^\dagger(q) = 0, \quad (2.80)$$

$$[a(q), a^\dagger(q')] = \delta(q - q'), \quad [a(q), a(q')] = [a^\dagger(q), a^\dagger(q')] = 0, \quad (2.81)$$

podemos ver facilmente a identidade $\langle q|q' \rangle = \delta(q - q')$, que podemos escrever como

$$\langle q^N|q'^{N'} \rangle = \delta_{NN'} \sum \prod_{i=1}^N (q_i - q'_i), \quad (2.82)$$

com o somatório feito sobre as permutações de q_i . Aplicando essa identidade na Eq. (2.79), obtemos o produto escalar

$$\langle q^N|F(t) \rangle = F^{(N)}(q^N; t). \quad (2.83)$$

As Eqs. (2.79) e (2.83) mostram a relação entre o conjunto de funções de probabilidade $F^{(N)}$ com o estado quântico $|F\rangle$. Essa correspondência pode ser generalizada para qualquer conjunto de funções (não necessariamente distribuições de probabilidade), bastando que seus componentes sejam funções simétricas.

Agora, usando um operador linear A podemos obter $F_A = AF$, ou seja, transformando o conjunto $F = \{F^{(0)}, F^{(1)}, \dots, F^{(N)}\}$ em $F_A = \{F_A^{(0)}, F_A^{(1)}, \dots, F_A^{(N)}\}$. O análogo quântico desse operador (\hat{A}) acarreta $|F_A\rangle = \hat{A}|F\rangle$. Logo, para um sistemas com partículas idênticas temos

$$F_A^{(N)}(q^N) = \langle q^N|\hat{A}|F\rangle = A^{(N)}(q^N)F^{(N)}(q^N), \quad (2.84)$$

com

$$A^{(N)}(q^N) = \sum_{i=1}^N A_1(q_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} A_2(q_i, q_j) + \dots, \quad (2.85)$$

sendo $A_1(q_i)$ ($A_2(q_i, q_j)$) um operador linear que depende apenas de q_i (q_i e q_j). O operador quântico é calculado ($\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \dots$), com

$$\hat{A}_1 = \int dq a^\dagger(q) A_1(q) a(q), \quad (2.86)$$

$$\hat{A}_2 = \frac{1}{2} \int dq \int dq' a^\dagger(q) a^\dagger(q') A_2(q, q') a(q) a(q'),$$

e assim por diante, que são as equações da teoria quântica de campos. Usando as Eqs. (2.80) e (2.81) na Eq. (2.86), recaímos em $\hat{A}_1|F\rangle = |F_{A_1}\rangle$.

Nesse momento, para dar prosseguimento vamos definir dois estados $|\alpha\rangle$ e $\langle\alpha|$, com α representando um número real, da forma

$$|\alpha\rangle = \exp\left(\alpha \int dq a^\dagger(q)\right) |0\rangle \quad \text{e} \quad \langle\alpha| = \langle 0| \exp\left(\alpha \int dq a(q)\right), \quad (2.87)$$

com as seguintes propriedades (usando a Eqs. (2.80))

$$a(q)|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad \text{e} \quad \langle\alpha|a^\dagger(q) = \alpha\langle\alpha|. \quad (2.88)$$

Um caso particular importante é o estado $|\alpha = 1\rangle \equiv |1\rangle$. O produto escalar com $|F\rangle$ é equivalente a somar todos os estados possíveis. Usando a Eq. (2.83), obtemos

$$\begin{aligned} \langle 1|F\rangle &= \left\langle 0 \left| \exp\left(\int dq a(q)\right) \right| F \right\rangle \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int dq^N \langle q^N | F \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \int dQ^N F^{(N)}(q^N), \end{aligned} \quad (2.89)$$

ou seja, $[\langle 1|\cdots\rangle \Leftrightarrow \sum_N \int dQ^N \cdots]$. Um caso especial é $(\langle 1|a^\dagger(q) = \langle 1|)$, que aplicado na função distribuição $F(t)$ dado pela Eq. (2.79), deixa a condição de normalização da Eq. (2.78) como

$$\langle 1|F(t)\rangle = 1. \quad (2.90)$$

Com isso, podemos expressar o valor médio de uma quantidade física A em termos de $\langle 1|$

$$\bar{A}(t) = \langle 1|\hat{A}|F(t)\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \int dQ^N A^{(N)}(q^N) F^{(N)}(q^N; t). \quad (2.91)$$

O análogo quântico da Eq. (2.73), que descreve a evolução temporal da função distribuição, tem a forma

$$\frac{\partial}{\partial t} |F(t)\rangle = -\hat{\mathcal{U}} |F(t)\rangle, \quad (2.92)$$

onde o operador evolução temporal $\hat{\mathcal{U}}$ é o análogo quântico de $\mathcal{U}^{(N)}$. Que admite como solução

$$|F(t)\rangle = \exp(-\hat{\mathcal{U}}t) |F(t=0)\rangle, \quad (2.93)$$

sendo $|F(t=0)\rangle$ o estado quântico inicial. Com isso, podemos reescrever a Eq. (2.91) em função do operador quântico de evolução temporal, Eq. (2.94), e em termos dos operadores de criação e destruição a^\dagger e a , descrita na Eq. (2.95)

$$\bar{A}(t) = \langle 1|\hat{A} \exp(-\hat{\mathcal{U}}t) |F(t=0)\rangle, \quad (2.94)$$

$$\bar{A}(t) = \left\langle 1 \left| \hat{A}[a^\dagger, a] \exp(-\hat{\mathcal{U}}[a^\dagger, a]t) \right| F(t=0) \right\rangle. \quad (2.95)$$

Com isso, temos uma visão geral sobre a segunda quantização. Como característica principal aqui é que, partindo da equação de evolução temporal da distribuição, podemos abordar sistemas com muitas partículas usando os operadores de criação e destruição, como na mecânica quântica. No artigo de M. Doi [42], ele cita alguns exemplos de aplicação desse formalismo como: dinâmica clássica de muitas partículas, onde é usado o operador Liouvilliano e o ensemble canônico da física estatística; processos de reações químicas do tipo $A + A \rightarrow B$, $A + B \rightarrow C$, $A \rightarrow B$ e $A \rightarrow B + C$; e reações de difusão controlada em um meio líquido. Num segundo artigo [43], ele discute mais profundamente sobre as reações de difusão controlada, utilizando operadores de campo.

Na próxima seção, mostraremos esse formalismo aplicado ao problema de caminhada aleatória, onde os operadores de criação e destruição possuem papéis fundamentais para o andar do caminhante.

2.4.2 Aplicando o formalismo em *random walker*

Um caso interessante da física estatística é o estudo de uma partícula se movendo aleatoriamente em um intervalo finito com os limites absorventes. Esse é de fato o estudo deste trabalho, onde os resultados estão presentes nos capítulos seguintes.

Começamos com a situação de um conjunto M de partículas aleatórias em um intervalo finito de tamanho L ($0 \leq x \leq L$), onde elas podem se mover para a direita (positivo) ou para esquerda (negativo). Os comprimentos dos saltos feitos por elas são obtidos através de uma função de densidade de probabilidade $p(\ell)$, com saltos para direita e esquerda equiprováveis, $p(|\ell|) = p(-|\ell|)$. Para um espaço discreto, as partículas podem ocupar as posições $x_j = j\Delta x$, com $j = 0, 1, 2, \dots, N = L/\Delta x$. Nesse ponto, não restringimos que os locais tenham apenas uma partícula, podendo o estado do sistema ser descrito pelo conjunto dos números de ocupação $\{n_j\}$ (com $n_j \in [0, M]$ inteiro) dos locais (sítios) j em qualquer instante de tempo, com o número total de partículas $\sum_{j=0}^N n_j = M$. Com isso, podemos definir um conjunto de vetores de estado, $\{|n_0, n_1, n_2, \dots, n_{N-1}, n_N\rangle\}$, de forma semelhante à dos estados discretizados de Fock em uma descrição da mecânica quântica de um sistema no espaço de Fock.

Agora, voltamos para o nosso problema em questão que é o caso de uma única partícula, ou seja, $M = 1$ e $\sum_{j=0}^N n_j = 1$ com $n_j = 0$ ou 1 (vazio ou ocupado). Vamos considerar que as bordas $x = 0$ e $x = L$ são absorventes, logo quando a partícula alcança um dos limites do intervalo a dinâmica termina. Obviamente, como os passos podem ser maiores que a distância do local ocupado à borda, ultrapassando assim o limite absorvente, nós truncamos o salto na própria borda. O conjunto de vetores de estado assume a forma $\{|j\rangle\} = \{|0, 0, \dots, n_j = 1, \dots, 0, 0\rangle\}$. Logo, denotamos por $P(x_j, t)\Delta x$ a probabilidade de encontrar a partícula no local j , ou ocupar o estado $|0, 0, \dots, n_j = 1, \dots, 0, 0\rangle$, no instante de tempo t . A condição de normalização fica

$$\sum_{j=0}^N P(x_j, t)\Delta x = 1. \quad (2.96)$$

Além disso, como estamos tratando apenas de uma partícula, não podemos ter dois estados ocupados ao mesmo tempo. Então, se a partícula ocupa o estado $|j\rangle$ no tempo t , temos que $P(x_k, t) = 0$ para qualquer outro estado $|k\rangle$ com $j \neq k$ (mostrando a ortogonalidade dos estados $|j\rangle$ e $|k\rangle$). A descrição estatística da partícula aleatória no tempo t pode ser descrita pela superposição dos seguintes vetores de estado possíveis

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{j=0}^N P(x_j, t) \Delta x |j\rangle. \quad (2.97)$$

Nos trabalhos de M. Doi [42, 43], é usado a equação mestra para resolver alguns problemas estocásticos clássicos. A equação mestra de uma partícula aleatória em um espaço unidimensional discreto finito é [28, 37, 41]

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \sum_{x' \neq x} [T(x, x') P(x', t) - T(x', x) P(x, t)], \quad (2.98)$$

onde $T(x, x')$ é a taxa de transição da partícula saltar da posição x' para x no domínio finito, com comprimento $|x - x'|$. A equação mestra é usada para determinar a taxa de variação temporal da probabilidade de um sistema qualquer estar na posição x no instante t . Por exemplo, x pode ser definido como um conjunto de moléculas de uma reação química, ou o conjunto de números de ocupação de sítios em um sistema de difusão de partículas aleatórias. Podemos construir o vetor de estado do sistema de forma semelhante à Eq. (2.97), tornando a equação mestra como uma equação parecida com a de Schrödinger de valor real em função do operador Hamiltoniano H [31, 42, 43]

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = -H(\{a_j^\dagger, a_j\}) |\psi(t)\rangle, \quad (2.99)$$

com os operadores de criação e destruição a_j^\dagger e a_j , respectivamente, criando e destruindo a partícula no sítio j . Ressaltamos mais uma vez que o operador H não é hermitiano, como na mecânica quântica [73], não é simétrico e nem possui dimensão de energia. Para o vetor vazio $|v\rangle = |0, 0, \dots, 0\rangle$, temos

$$a_j |j\rangle = |v\rangle \quad \text{e} \quad a_j^\dagger |v\rangle = |j\rangle, \quad (2.100)$$

para um vetor genérico $|k\rangle = |n_0, n_1, \dots, n_j, \dots, n_N\rangle$ contendo muitas partículas, obtemos as relações [31, 45, 46, 47]

$$\begin{aligned} a_j^\dagger a_j |n_0, n_1, \dots, n_j, \dots, n_N\rangle &= n_j |n_0, n_1, \dots, n_j, \dots, n_N\rangle, \\ a_j^\dagger |n_0, n_1, \dots, n_j, \dots, n_N\rangle &= |n_0, n_1, \dots, n_j + 1, \dots, n_N\rangle, \\ a_j |n_0, n_1, \dots, n_j, \dots, n_N\rangle &= n_j |n_0, n_1, \dots, n_j - 1, \dots, n_N\rangle, \end{aligned} \quad (2.101)$$

e possuem as seguintes regra de comutação

$$[a_j, a_k^\dagger] = \delta_{jk} \quad \text{e} \quad [a_j, a_j] = [a_j^\dagger, a_j^\dagger] = 0, \quad (2.102)$$

sendo δ_{jk} o delta de Kronecker. Notamos que a aplicação dos operadores a_j^\dagger e a_j em processos estocásticos difere da mecânica quântica [73], que geram $\sqrt{n_j + 1}$ e $\sqrt{n_j}$. Interpretamos as Eqs. (2.101) da seguinte forma [31], na segunda linha temos apenas uma maneira de adicionar uma partícula na posição j quando aplicamos a_j^\dagger no estado

$|k\rangle$, enquanto que temos n_j maneiras de destruir na j -ésima posição quando aplicamos a_j no mesmo estado, de acordo com a terceira linha.

Podemos escrever a solução da Eq. (2.99) da forma

$$|\psi(t)\rangle = e^{-Ht} |\psi(0)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle, \quad (2.103)$$

onde definimos o operador de evolução temporal $U(t) = e^{-Ht}$. Então, considerando uma partícula aleatória partindo da posição $x_0 = j_0\Delta x$ (com $0 \leq x_0 \leq L$ ou $0 \leq j_0 \leq N$) no tempo $t = 0$, com estado inicial $|\psi(0)\rangle = |j_0\rangle$, a probabilidade de encontrar a partícula na posição j no instante t é

$$P(x_j, t)\Delta x = \langle j|\psi(t)\rangle = \langle j|U(t)|j_0\rangle, \quad (2.104)$$

que foi obtida aplicando $\langle j|$ pela esquerda na Eq. (2.103). Pela condição de normalização dada pela Eq. (2.96), ficamos com

$$\sum_{j=0}^N \langle j|U(t)|j_0\rangle = 1. \quad (2.105)$$

Além disso, podemos encontrar o n -ésimo momento da distribuição $P(x_j, t)$ em função do tempo com a seguinte expressão [31]

$$\langle j^n \rangle (t) = \sum_{j=0}^N j^n P(x_j, t)\Delta x. \quad (2.106)$$

Assumindo o tempo como um variável discreta, $t_n = t_0, t_1, t_2, \dots$, podemos expandir o $U(t)$ como [28]

$$e^{Ut} = \mathbf{I} + tU + \frac{t^2}{2!}U^2 + \frac{t^3}{3!}U^3 + \dots = \mathbf{I} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}U^n, \quad (2.107)$$

com \mathbf{I} sendo a matriz identidade. Fazendo o tempo ser um múltiplo inteiro de um intervalo, $t = m\Delta t$, onde m pode ser interpretado como um índice de passos, podemos reescrever nossa Eq. (2.103) da forma

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= |\psi(m\Delta t)\rangle = e^{-Hm\Delta t} |\psi(0)\rangle \\ &= \left(\mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-H\Delta t)^n}{n!} \right)^m |\psi(0)\rangle. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Além disso, podemos definir uma matriz estocástica $S = (\mathbf{I} - H\Delta t)$. Com Δt suficientemente pequeno, S define uma cadeia de Markov de tal forma que

$$|\psi(m\Delta t)\rangle \cong (\mathbf{I} - H\Delta t)^m |\psi(0)\rangle. \quad (2.109)$$

Fazendo $\Delta t \equiv 1$, reescrevemos a equação supracitada como

$$|\psi(m)\rangle \cong (\mathbf{I} - H)^m |\psi(0)\rangle. \quad (2.110)$$

Uma outra alternativa para esse procedimento é fazer o limite para N grande na Eq. (2.103) usando Eq. (2.107)

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-Ht} |\psi(0)\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbf{I} - \frac{Ht}{N} \right)^N |\psi(0)\rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (\mathbf{I} - H\Delta t)^N |\psi(0)\rangle. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Agora que já estamos familiarizados com esse formalismo aplicado em caminhadas aleatórias, vamos ilustrar como calculamos o operador Hamiltoniano em termos dos operadores de criação e destruição para um exemplo de apenas dois níveis (sítios). A partir desse exemplo, podemos extrapolar o número de sítios de forma análoga e obter as propriedades estatísticas importantes.

2.4.3 Cálculo do Hamiltoniano para um sistema de dois níveis

Vamos considerar um caso simples de difusão onde a partícula parte do sítio 1 para 2, com uma taxa de transição D . Nosso vetor de estado é definido como $|n_1, n_2\rangle = a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle$. Nossa Eq. (2.97) fica

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n_1, n_2} P(n_1, n_2; t) |n_1, n_2\rangle = \sum_{n_1, n_2} P(n_1, n_2; t) (a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} |0\rangle. \quad (2.112)$$

Derivando no tempo, chegamos a equação do tipo Schrödinger que é uma equação mestra como a Eq. (2.98)

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} &= \sum_{n_1, n_2} \frac{\partial}{\partial t} P(n_1, n_2; t) (a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} |0\rangle \\ &= \sum_{n_1, n_2} \left[D(n_1 + 1)P(n_1 + 1, n_2 - 1; t) - D(n_1)P(n_1, n_2; t) \right] (a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} |0\rangle. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Agora, vamos usar as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} n_1 (a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} |0\rangle &= n_1 |n_1, n_2\rangle = a_1^\dagger a_1 |n_1, n_2\rangle, \\ (n_1 + 1) (a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} |0\rangle &= (n_1 + 1) |n_1, n_2\rangle = a_1 a_2^\dagger |n_1 + 1, n_2 - 1\rangle, \\ (a_1^\dagger)^{n_1+1} (a_2^\dagger)^{n_2-1} |0\rangle &= |n_1 + 1, n_2 - 1\rangle. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Aplicando na nossa equação mestra obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} &= D \sum_{n_1, n_2} \left[a_2^\dagger a_1 (a_1^\dagger)^{n_1+1} (a_2^\dagger)^{n_2-1} P(n_1+1, n_2-1; t) \right. \\
&\quad \left. - a_1^\dagger a_1 (a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} P(n_1, n_2; t) \right] |0\rangle \\
&= D \sum_{n_1, n_2} \left[P(n_1+1, n_2-1; t) a_2^\dagger a_1 |n_1+1, n_2-1\rangle \right. \\
&\quad \left. - P(n_1, n_2; t) a_1^\dagger a_1 |n_1, n_2\rangle \right]. \tag{2.115}
\end{aligned}$$

Fazendo duas mudanças de variáveis, $m_1 = n_1 + 1$ e $m_2 = n_2 - 1$, conseguimos

$$\frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = D \left[\sum_{m_1, m_2} P(m_1, m_2; t) a_1 a_2^\dagger |m_1, m_2\rangle - \sum_{n_1, n_2} P(n_1, n_2; t) a_1^\dagger a_1 |n_1, n_2\rangle \right], \tag{2.116}$$

e aplicando a Eq. (2.112), encontramos a nossa equação mestra

$$\frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = D [a_2^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_1] |\psi(t)\rangle. \tag{2.117}$$

Comparando as Eqs. (2.117) e (2.99), encontramos o Hamiltoniano do sistema de dois níveis, saltando de 1 para 2 ($H_{1 \rightarrow 2}$). De forma similar, obtemos $H_{2 \rightarrow 1}$ para o sistema saltando de 2 para 1

$$H_{1 \rightarrow 2}(\{a_j^\dagger, a_j\}) = -D(a_2^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_1), \tag{2.118}$$

$$H_{2 \rightarrow 1}(\{a_j^\dagger, a_j\}) = -D(a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_2). \tag{2.119}$$

Para um sistema isotrópico, que permite ambos os saltos, o Hamiltoniano é descrito pela soma $H = H_{1 \rightarrow 2} + H_{2 \rightarrow 1}$,

$$H(\{a_j^\dagger, a_j\}) = -D(a_2^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2). \tag{2.120}$$

No trabalho [65] é aplicado esse formalismo para um exemplo simples de um caminhante aleatório em um espaço unidimensional ilimitado [2], que pode dar um passo para o local vizinho mais próximo à direita com probabilidade p e à esquerda com $q = 1 - p$. Esse exemplo serve para validar o método do espaço de Fock. Ainda no trabalho [65], podemos encontrar o cálculo de H para esse exemplo com $N = 4$ sítios e para a distribuição de Cauchy ($\alpha = 1$) com $N = 6$ sítios.

Aplicamos esse formalismo para os voadores de Lévy, nesse caso a taxa de transição D é gerado a partir das distribuições α -estáveis de Lévy. Nos próximos capítulos, mostraremos os principais resultados como as taxas de sobrevivência $S(t)$ e as probabilidades de absorção das bordas absorventes $P_0(t)$ e $P_N(t)$, ambos para um espaço discreto (Cap. 3) e para o limite do espaço contínuo (Cap. 4). No Cap. 5, estão os resultados para o tempo médio de primeira passagem e as probabilidades assintóticas de absorção, considerando ambos os espaços.

3 RANDOM WALKER COM DISTRIBUIÇÕES DE COMPRIMENTOS DE PASSOS DE LÉVY EM DOMÍNIOS FINITOS DISCRETOS

Partimos do problema de uma partícula aleatória confinada em uma região limitada cujas bordas são absorventes, sujeita a distribuição de comprimento de passos α -estável de Lévy, utilizando a abordagem do espaço de Fock apresentada no Cap. 2. Definimos as distribuições α -estáveis de Lévy da forma [25]

$$p_\alpha(\ell) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-b|k|^\alpha} [1 - \beta \text{sign}(k)\Phi(k)]^{-ik(\ell-\mu)}, \quad (3.1)$$

onde o parâmetro mais importante é $\alpha \in (0,2]$, uma vez que geralmente introduz as propriedades estatísticas de ℓ . De fato, enquanto o caso $\alpha = 2$ corresponde à distribuição Gaussiana governada pelo TLC, o TLC generalizado conduz a dinâmica de flutuação de ℓ quando $0 < \alpha < 2$. Além disso, $\beta \in [-1,1]$ é o parâmetro de assimetria, $b > 0$ é um fator de escala, μ é um parâmetro de deslocamento (localização), sign é a função sinal, e $\Phi = \tan(\pi\alpha/2)$ se $\alpha \neq 1$ e $\Phi(k) = (-2/\pi)\log|k|$ se $\alpha = 1$. No caso de distribuições simétricas centradas em $\ell = 0$, com $p(|\ell|) = p(-|\ell|)$, definimos $\beta = \mu = 0$ na Eq. (3.1). Fixamos o valor de $b = 1$ sem perda de generalidade, transformando a equação supracitada em

$$p_\alpha(\ell) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-|k|^\alpha - ik\ell}. \quad (3.2)$$

É importante ressaltar que no espaço livre, ou seja, sem bordas absorventes, o comprimento do salto absoluto $\langle |\ell| \rangle$ diverge para $0 < \alpha \leq 1$. No entanto, em um domínio finito com limites absorventes, saltos de comprimento infinito são proibidos devido ao truncamento nas fronteiras e, com isso, $\langle |\ell| \rangle$ é limitado com valores progressivamente menores à medida que o limite gaussiano $\alpha = 2$ se aproxima.

Geralmente as distribuições de Lévy não podem ser expressas de forma analítica usando funções elementares [74, 75, 76]. Uma representação geral não elementar se dá em termos de funções de Fox-H [25, 32, 33], envolvendo integrais complexas do tipo Mellin-Barnes. A distribuição de Cauchy ($\alpha = 1$) e o caso da distribuição gaussiana ($\alpha = 2$) são notáveis exceções quando $\beta = 0$. Outro ponto importante que dificulta encontrar expressões fechadas para $P(x,t)$ é o fato de ser possível dar saltos longos para $0 < \alpha < 2$, ou seja, a partícula pode dar um passo tão grande que o levaria além das bordas, sendo absorvida pelo extremo em questão.

3.1 Voador de Lévy em domínio finito discreto para diferentes valores de α via abordagem do espaço de Fock

Aplicamos a metodologia explicada no Cap.2, do espaço de Fock (FS), para uma partícula aleatória com distribuição de comprimento de passos de Lévy em um espaço discreto j ($0,1,2,\dots,N$) e com bordas absorventes, ou seja, com $j = 0$ e $j = N$ absorvedoras. Para um intervalo discreto contendo $N + 1$ sítios disponíveis, o Hamiltoniano (H) assume a forma de uma matriz $(N + 1) \times (N + 1)$ na base $\{|i\rangle\}$ dos estados de Fock. Logo, escolhemos o local de origem (destino) do salto relacionado ao índice da coluna (linha) da matriz H . Com condições de contorno absorventes, saltos começando nas fronteiras são proibidos, ou seja, nenhum sítio intermediário pode ser acessado partindo dos extremos. Como consequência, a primeira e a última coluna da matriz H são nulas, gerando dois autovalores nulos no Hamiltoniano, relacionados aos autovetores $|0\rangle$ e $|N\rangle$. Contudo, notamos que qualquer sítio (incluindo os extremos) podem ser atingidos partindo de qualquer outro sítio inicial (sem contar as bordas absorventes), devido à possibilidade de passos largos. Além disso, a partícula não pode ficar parada em um salto ($i \neq j$), portanto H não é uma matriz simétrica (hermitiana) para uma partícula aleatória em um intervalo finito com extremos absorventes. Com isso, escrevemos o operador H na forma

$$H = - \sum_{j=0}^N \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N-1} P_{ji} (a_j^\dagger a_i - a_i^\dagger a_j), \quad (3.3)$$

onde P_{ji} é a probabilidade de transição da partícula saltar do sítio i para o sítio j . Essencialmente, cada elemento da matriz H se refere a um salto entre dois sítios, como consequência a soma dos elementos de cada coluna da matriz é nula. O primeiro termo da Eq. (3.3), o operador $a_j^\dagger a_i$ destrói a partícula no local i e a cria em j , o segundo termo da equação é o operador número $a_i^\dagger a_i$, resulta do fato de que as taxas de transição são proporcionais ao número de partículas no local de origem [31, 44, 65]. As probabilidades P_{ji} são calculadas da seguinte forma,

$$P_{ji} = \begin{cases} 0, & i = 0 \text{ ou } i = N \text{ ou } i = j; \\ \int_{(|j-i|-1)\Delta x}^{|j-i|\Delta x} p(\ell) d\ell, & 1 \leq i, j \leq N-1, j \neq 0; \\ \int_{(i-1)\Delta x}^{\infty} p(\ell) d\ell, & 1 \leq i \leq N-1, j = 0; \\ \int_{(N-i-1)\Delta x}^{\infty} p(\ell) d\ell, & 1 \leq i \leq N-1, j = N. \end{cases} \quad (3.4)$$

A primeira linha da Eq. (3.4) indica que a partícula não pode saltar das fronteiras ($i = 0$ ou $i = N$) e também não pode permanecer no mesmo local de um salto ($i = j$). A segunda linha considera os saltos não absorvidos pelas bordas ($j \neq 0$ e $j \neq N$). Nesse caso, a simetria esquerda-direita de $p(\ell)$ resulta em $P_{ij} = P_{ji}$. A terceira e a quarta linhas referem-se, respectivamente, aos saltos iniciados no sítio i cujo comprimento é igual ou superior às respectivas distâncias das bordas esquerda e direita, levando a um truncamento nos limites $j = 0$ e $j = N$, respectivamente. Notamos que, devido a simetria das distribuições de Lévy, temos $p_\alpha(|\ell|) = p_\alpha(-|\ell|)$, com isso a integral da terceira linha, que teria argumentos negativos (de $-\infty$ para $-(i-1)\Delta x$), é de fato equivalente à integral correspondente na Eq. (3.4) com argumentos positivos (de $(i-1)\Delta x$ para ∞). Também observamos que a normalização apropriada é $\sum_{j=0}^N P_{ji} = 1$ para $i \neq 0$ e $i \neq N$, indicando que um salto em um local não absorvente certamente termina em algum lugar no domínio finito. As integrais da Eq. (3.4) podem ser expressas para qualquer $\alpha \in (0,2]$ da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
I_\alpha(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\ell \int_0^{\infty} e^{-|k|^\alpha - ik\ell} dk, \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ika - k^\alpha}}{ik} dk, \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} e^{-k^\alpha} dk,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

com $a > 0$, que vem de uma mudança nos limites de integração da variável ℓ . Evidenciamos mais uma vez que, devido a simetria da distribuição e o fato de termos condições de contorno absorventes, $P_{ji} = P_{ij}$, com $P_{ji} = 0$ se $i = 0$ e $i = N$, sabendo que a partícula não pode sair de um local de extremo absorvedouro.

Usando os operadores de criação $\{a_i^\dagger\}$ e destruição $\{a_i\}$, podemos criar e destruir uma partícula na posição x_i (ver Cap. 2). Aplicando a álgebra desses operadores na Eq. (3.3), obtemos os elementos da matriz H com limites absorventes para qualquer índice de Lévy $\alpha \in (0,2]$,

$$\begin{aligned}
\langle m|H|n\rangle &= -\sum_{j=0}^N \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N-1} P_{ji} \langle m| (a_j^\dagger a_i - a_i^\dagger a_j) |n\rangle, \\
&= -\sum_{j=0}^N \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N-1} P_{ji} (\delta_{jm} \delta_{in} - \delta_{im} \delta_{jn}),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

com $n, m = 0, 1, \dots, N$ implicando em $\langle m|H|n\rangle = -P_{mn}$ se $m \neq n$, $\langle m|H|n\rangle = 1$ se $m = n$ e $\langle m|H|n\rangle = 0$ se $n = 1$ ou $n = N$ devido as bordas absorventes $j = 0$ e $j = N$. Para

qualquer valor de N , usamos o software de computação simbólica *Mathematica* para calcular a matriz P_{ji} das probabilidades de saltos do sítio i para o sítio j e, com isso, os autovalores e autovetores da matriz Hamiltoniano H .

3.1.1 Voador de Lévy com $\alpha = 2$

Começamos a análise com $\alpha = 2$, que é o limite gaussiano da distribuição de Lévy (caminhante browniano), com $\beta = \mu = 0$ e com um fator de escala unitário $b = 1$ na Eq. (3.3), de modo que a variância seja $\sigma^2 = 2b = \sqrt{2}$. Logo, a Eq. (3.5) assume

$$I_{\alpha=2}(a) = \frac{\text{erf}(a/2)}{2}, \quad (3.7)$$

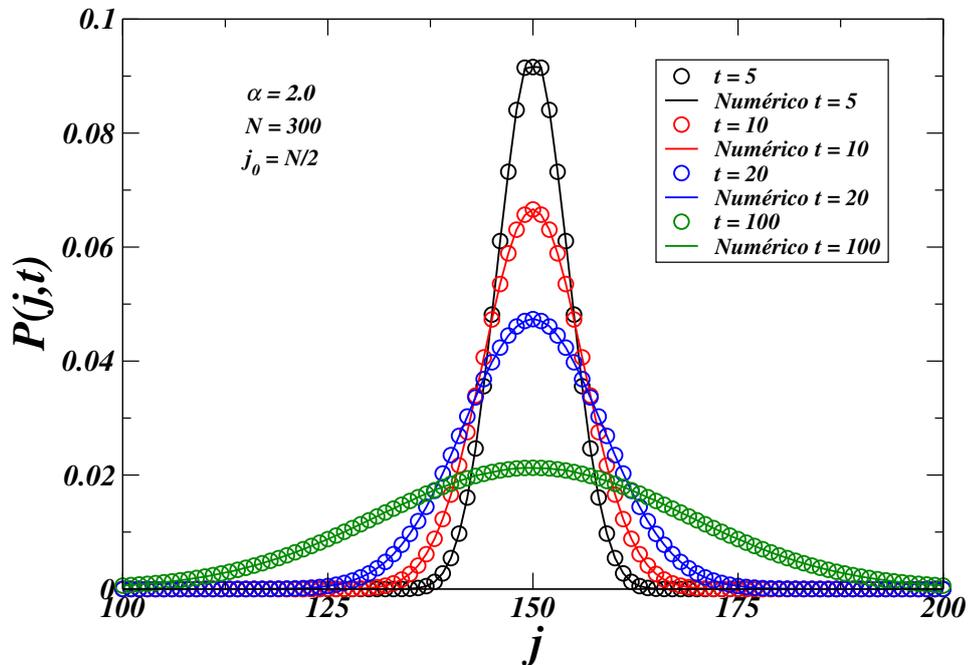
onde erf é a função erro. Para $m \neq n$, $m \neq 1$, $n \neq 1$, $m \neq N$ e $n \neq N$, podemos escrever os elementos fora da diagonal da matriz Hamiltoniano da forma,

$$\langle m | H | n \rangle = \frac{1}{2} [\text{erf}((|m - n| - 1)/2) - \text{erf}(|m - n|/2)]. \quad (3.8)$$

Os outros elementos da matriz H são calculados da mesma forma a partir da Eq. (3.4) (primeira, terceira e quarta linhas), usando $\Delta x = 1$ junto com as Eqs. (3.6) e (3.7).

Calculamos as distribuições de probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j com tamanho limitado de $N = 300$ no instante t . Na Fig. 3 mostramos os resultados partindo do meio do intervalo $j_0 = N/2$ e usando a abordagem do espaço de Fock (representados em círculos) para os tempos discretos $t = 5$ (preto), $t = 10$ (vermelho), $t = 20$ (azul) e $t = 100$ (verde). Como esperado, as curvas são simétricas em relação ao centro (ponto de partida) do intervalo. Observamos também, em todos os casos, uma boa concordância com as simulações numéricas diretas de Monte Carlos (MC)(linhas sólidas).

Figura 3 – Probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j para $\alpha = 2$ (limite gaussiano) com domínio discreto limitado $N = 300$ e iniciando no ponto médio $j_0 = N/2$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos para os diferentes tempo, $t = 5$ (preto), $t = 10$ (vermelho), $t = 20$ (azul), $t = 100$ (verde) e seus respectivos resultados via simulação MC representados em linhas sólidas nas mesmas cores.

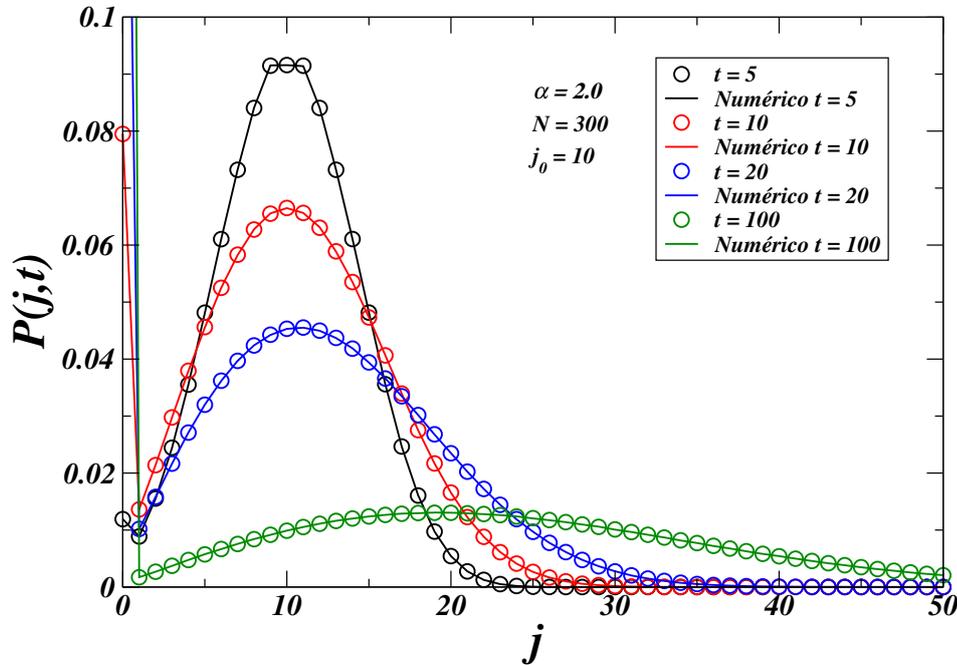


Fonte: O autor (2022).

Para o caso gaussiano ($\alpha = 2$), podemos aplicar o método das imagens usando a variável tempo de forma contínua e fazendo a evolução temporal de acordo com decomposição de Jordan [31, 65]. Contudo, como já falado anteriormente, esse método falha quando estamos no regime superdifusivo ($0 < \alpha < 2$). Todos os resultados desse capítulo foram obtidos usando o tempo como uma variável discreta. Para os gráficos da probabilidade $P(j,t)$, ocorreu flutuações ao redor da condição inicial j_0 devido as simulações numéricas terem sido obtidas com o tempo sendo uma variável discreto.

Na Fig. 4, mostramos a distribuição $P(j,t)$ usando como ponto de partida $j_0 = 10$, ou seja, bem próximo à borda esquerda absorvedora, para os mesmos tempos discretos da Fig. 3. Notamos que, devido à proximidade com a borda, a partícula é absorvida mesmo para pequenos intervalos de tempo, e que a probabilidade de absorção aumenta com o passar do tempo.

Figura 4 – Probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j para $\alpha = 2$ (limite gaussiano) com domínio discreto limitado $N = 300$ e iniciando próximo da fronteira esquerda, $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos para os diferentes tempo, $t = 5$ (preto), $t = 10$ (vermelho), $t = 20$ (azul), $t = 100$ (verde) e seus respectivos resultados via simulação MC representados em linhas sólidas nas mesmas cores.



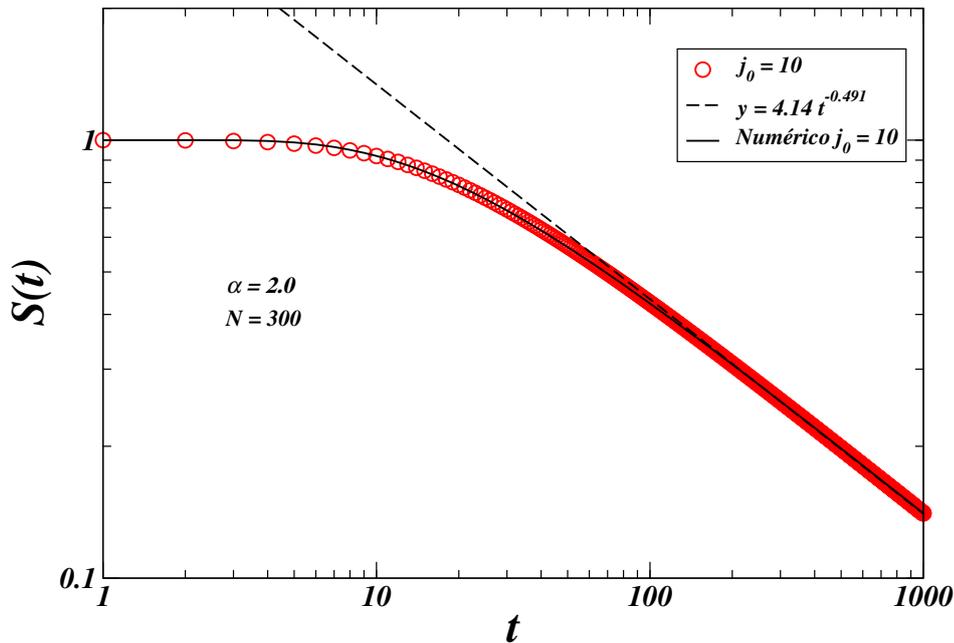
Fonte: O autor (2022).

Continuando com a análise dos resultados para $\alpha = 2$, uma quantidade mais relevante em problemas de passeio aleatório limitado é a taxa de sobrevivência [30, 77, 78, 79], descrita por

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N-1} P(j,t) = 1 - [P_0(t) + P_N(t)], \quad (3.9)$$

com $P_0(t)$ e $P_N(t)$ sendo as probabilidades de absorção das fronteiras nos sítios $j = 0$ e $j = N$, respectivamente. A taxa de sobrevivência é entendida como a probabilidade da partícula não ter sido absorvida pelas bordas absorventes depois de um intervalo de tempo t . Na Fig. 5 mostramos o resultado para $S(t)$ via abordagem de Fock (em círculos vermelhos) em função do tempo na escala log-log. Utilizamos um domínio grande $N = 300$ e iniciamos no sítio $j_0 = 10$ próximo da borda esquerda. A simulação numérica MC está evidenciada em linha preta sólida.

Figura 5 – Gráfico log-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t para o caso gaussiano $\alpha = 2$ com domínio discreto finito $N = 300$ e iniciando no sítio $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos vermelhos e a linha preta sólida é o resultado da simulação numérica MC. Neste caso, apenas a fronteira esquerda é efetivamente alcançada nesse intervalo de tempo, com isso, o comportamento a longo tempo é regido pela lei de potência $S(t) \sim t^{-\gamma}$ (linha tracejada), com o melhor valor $\gamma = 0.491$.



Fonte: O autor (2022).

Esse resultado nos mostra que saltos longos são quase inexistentes para $\alpha = 2$, uma vez que a borda limite à direita não é efetivamente alcançada (para t até 1000). Esse fenômeno é semelhante ao problema de um caminhante aleatório dentro de um domínio semi-infinito e, com isso, o teorema de Sparre-Andersen indica a forma assintótica do comportamento de $S(t)$ via lei de potência da forma [39, 40, 65],

$$S(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}}. \quad (3.10)$$

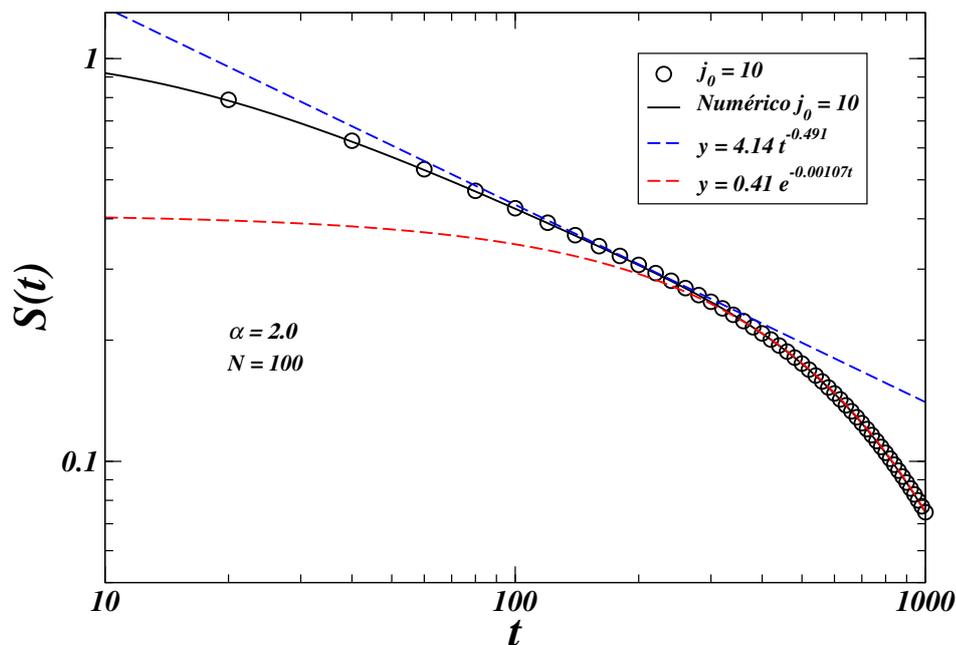
Embora as condições para o teorema de Sparre-Andersen não são estritamente seguidas no nosso problema, já que estamos trabalhando com a distribuição de Lévy em domínio finito, observamos o comportamento $S(t) \sim t^{-\gamma}$ com o valor ajustado de $\gamma = 0.491$ (linha tracejada na Fig. 5). Corroborando esses resultados, para um domínio de $N = 300$ iniciando em $j_0 = 10$, a probabilidade de absorção da borda longínqua $j = 300$ é suficientemente baixa, 8.3×10^{-7} para $t = 1000$.

Um outro comportamento dinâmico interessante acontece quando a outra fronteira absorvedora vai sendo alcançada progressivamente. Nesse caso, a taxa de sobrevivência deixa de ter um caráter de lei de potência e passa a expressar um comportamento de decaimento exponencial [30, 65, 79],

$$S(t) \sim e^{-\lambda t}. \quad (3.11)$$

Evidenciamos essa mudança de comportamento para uma partícula gaussiana ($\alpha = 2$) na Fig. 6 em um intervalo mais estreito com $N = 100$ pois, dessa forma, o limite à direita também é alcançado em tempos curtos. Mostramos o espaço de Fock em círculos pretos e a simulação numérica MC em linha sólida no gráfico log-log de $S(t)$ em função do tempo, iniciando no sítio $j_0 = 10$. Observamos que, para baixos valores de t o comportamento é ditado pelo decaimento via lei de potência (tracejado em azul), ou seja, apenas a borda a esquerda (mais próxima) é atingida. Conforme aumentamos o tempo, esse regime deixa de ser válido dando lugar ao comportamento via decaimento exponencial (tracejado em vermelho), indicando que ambas as bordas (mesmo a mais longe) são atingidas.

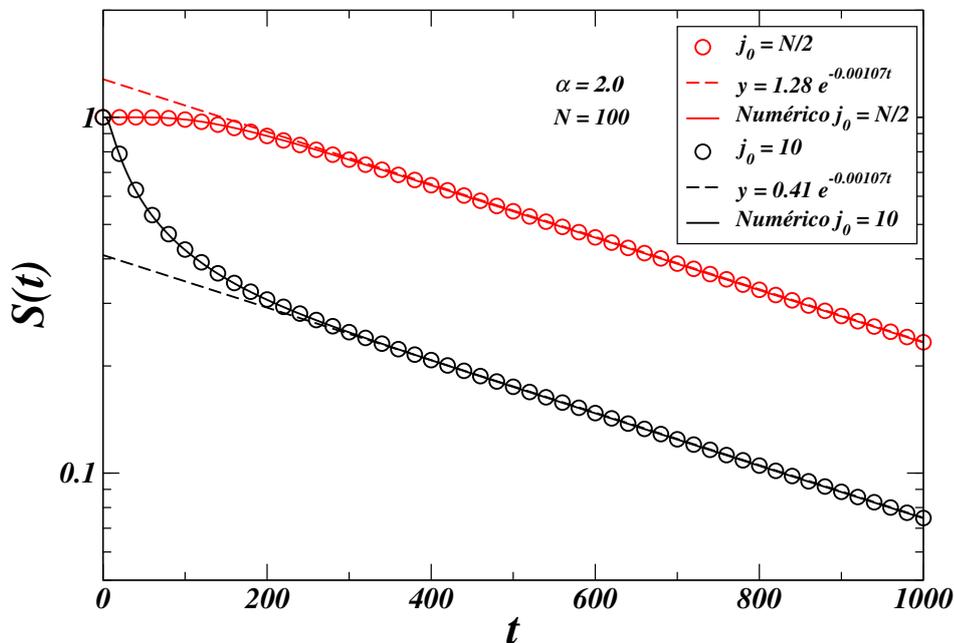
Figura 6 – Gráfico log-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t para o caso gaussiano $\alpha = 2$ com domínio discreto finito pequeno $N = 100$ e iniciando no sítio $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos pretos e a linha preta sólida é o resultado da simulação numérica MC. Neste caso, inicialmente apenas a fronteira esquerda é efetivamente alcançada, gerando um comportamento via lei de potência $S(t) \sim t^{-\gamma}$ (tracejado em azul), com o melhor valor de $\gamma = 0.491$. Ao aumentarmos o tempo, a barreira longínqua da direita começa a ser atingida, mudando assim o comportamento dinâmico para um decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$ (tracejado em vermelho), com o melhor valor de $\lambda = 0.00107$.



Fonte: O autor (2022).

Já na Fig. 7, mostramos o gráfico linear-log de $S(t)$ em função do tempo num domínio limitado $N = 100$ para explicitar que o comportamento exponencial aparece tanto para o sistema iniciado em $j_0 = 10$ (em preto) com tempos longos, quanto para o mesmo sistema iniciado em $j_0 = N/2$ (meio do domínio)(em vermelho), indicando que para esse último caso, ambas as bordas são alcançadas simultaneamente.

Figura 7 – Gráfico linear-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t para o caso gaussiano $\alpha = 2$ com domínio discreto finito pequeno $N = 100$. Iniciamos a abordagem do espaço de Fock em $j_0 = N/2$ (círculos vermelhos) e $j_0 = 10$ (círculos pretos). Os resultados das simulações numéricas MC estão expressos em linhas sólidas nas respectivas cores. As linhas tracejadas representam o comportamento via decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$, que ocorre quando ambas as bordas são atingidas. Para ambos o melhor valor $\lambda = 0.00107$.

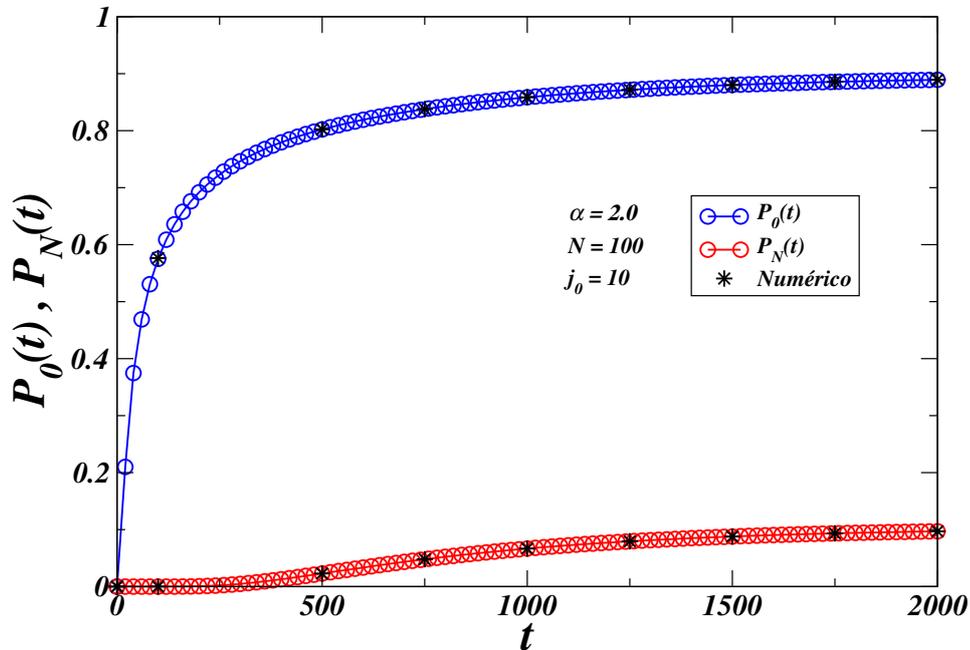


Fonte: O autor (2022).

Como último resultado para $\alpha = 2$, mostramos na Fig. 8 as evoluções temporais das probabilidades dos sítios absorventes $P_0(t)$ (em azul) e $P_N(t)$ (em vermelho) dos limites $j = 0$ e $j = N$, respectivamente, para uma partícula iniciando no local $j_0 = 10$ em um domínio finito $N = 100$ [65]. Como iniciamos em um local muito próximo da borda esquerda ($j = 0$), a probabilidade da partícula ser absorvida por esse sítio é maior do que pelo limite à direita ($j = N$), por esse motivo, $P_0(t)$ tem valores mais altos que $P_N(t)$. Ambas possuem uma boa concordância com as simulações numéricas MC (em asterisco). Conforme aumentamos o tempo, percebemos um aumento tendendo de forma lenta para a saturação, ou seja,

$$P_0 + P_N = 1. \quad (3.12)$$

Figura 8 – Probabilidades $P_0(t)$ e $P_N(t)$ de absorção das fronteiras $j = 0$ (em azul) e $j = N$ (em vermelho), respectivamente, em função do tempo t para o caso gaussiano $\alpha = 2$, para um pequeno domínio discreto $N = 100$ e iniciando perto da fronteira esquerda $j_0 = 10$. As simulações numéricas MC representadas por asterisco corroboram os resultados do espaço de Fock (em círculos).



Os valores de $P_0(t)$ e $P_N(t)$ no instante $t = 2000$ são respectivamente 0.889 e 0.097, ou seja, já muito próximo da saturação. Esse resultado mostra que, para o caso do limite gaussiano ($\alpha = 2$) em um domínio finito $N = 100$ e $t = 2000$, a partícula provavelmente já tenha sido absorvida por uma das bordas. Devido ao fato de termos começado em um local muito próximo da fronteira esquerda ($j_0 = 10$), ela tenha sido absorvida por tal limite que possui a maior probabilidade de absorção.

3.1.2 Voador de Lévy com $\alpha = 3/2$

Partimos agora para a análise dos resultados com $\alpha = 3/2$, usando os mesmos valores dos parâmetros do caso anterior, $\beta = \mu = 0$ e com fator de escala unitário $b = 1$. Para esse valor de α , não temos nenhuma expressão analítica exata para $P(j, t)$. Obtivemos os resultados usando o formalismo do espaço de Fock, de uma partícula presa em um domínio finito com comprimento de passos de acordo com a distribuição de Lévy $p_\alpha(\ell)$.

A Eq. (3.5) para este caso e com esses valores de parâmetros fica,

$$\begin{aligned}
 I_{\alpha=3/2}(a) &= \frac{1}{\pi} [a\Gamma(5/3) {}_3F_4(\mathbf{a}_1; \mathbf{b}_1; c) \\
 &- \frac{a^3}{9} {}_4F_5(\mathbf{a}_2; \mathbf{b}_2; c) \\
 &+ \frac{7a^5}{405} \Gamma(4/3) {}_3F_4(\mathbf{a}_3; \mathbf{b}_3; c)],
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

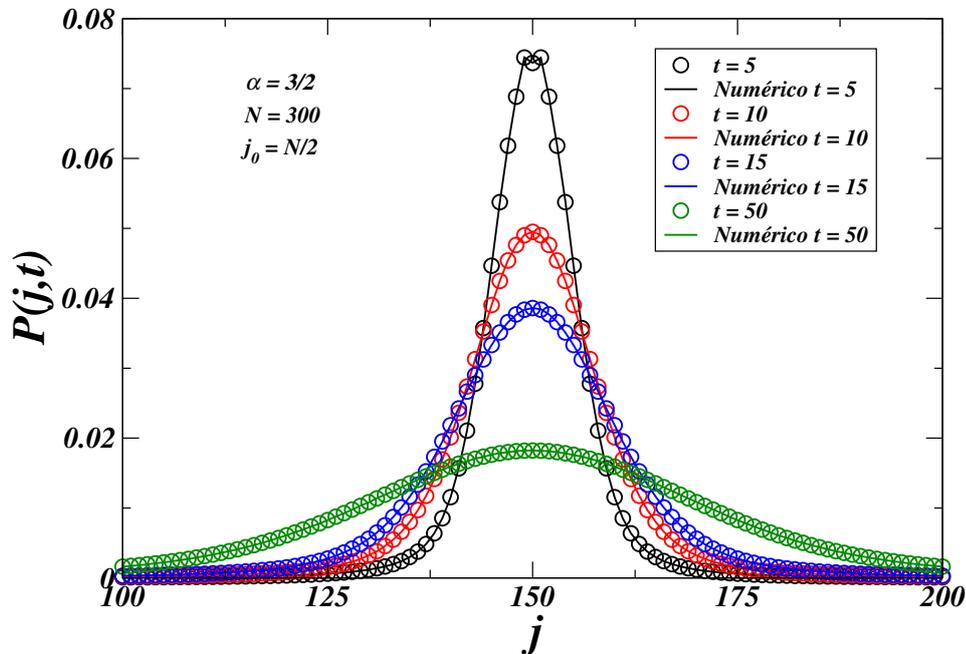
com Γ e ${}_pF_q$ são respectivamente as funções gama e hipergeométrica generalizada, com os parâmetros $\mathbf{a}_1 = (1/6, 5/12, 11/12)$, $\mathbf{a}_2 = (1/2, 3/4, 1, 5/4)$, $\mathbf{a}_3 = (5/6, 13/12, 19/12)$, $\mathbf{b}_1 = (1/3, 1/2, 5/6, 7/6)$, $\mathbf{b}_2 = (2/3, 5/6, 7/6, 4/3, 3/2)$, $\mathbf{b}_3 = (7/6, 3/2, 5/3, 11/6)$ e $c = -4a^6/729$. Os elementos fora da diagonal da matriz Hamiltoniano são,

$$\langle m | H | n \rangle = I_{\alpha=3/2}(|m - n| - 1) - I_{\alpha=3/2}(|m - n|), \tag{3.14}$$

para $m \neq n$, $m \neq 1$, $n \neq 1$, $m \neq N$ e $n \neq N$. Os outros elementos da matriz H são obtidos a partir da primeira, terceira e quarta linhas da Eq. (3.4) usando $\Delta x = 1$, combinada com as Eqs. (3.6) e (3.13).

Na Fig. 9 mostramos as distribuições de probabilidade $P(j, t)$ em função da posição j presente em um domínio finito $N = 300$ e iniciando a partícula no meio do intervalo, $j_0 = N/2$. Os resultados com a abordagem do espaço de Fock estão representadas em círculos e as simulações numéricas MC em linhas sólidas para diferentes instantes de tempo $t = 5$ (preto), $t = 10$ (vermelho), $t = 15$ (azul) e $t = 50$ (verde). Notamos uma boa concordância entre os resultados mostrados.

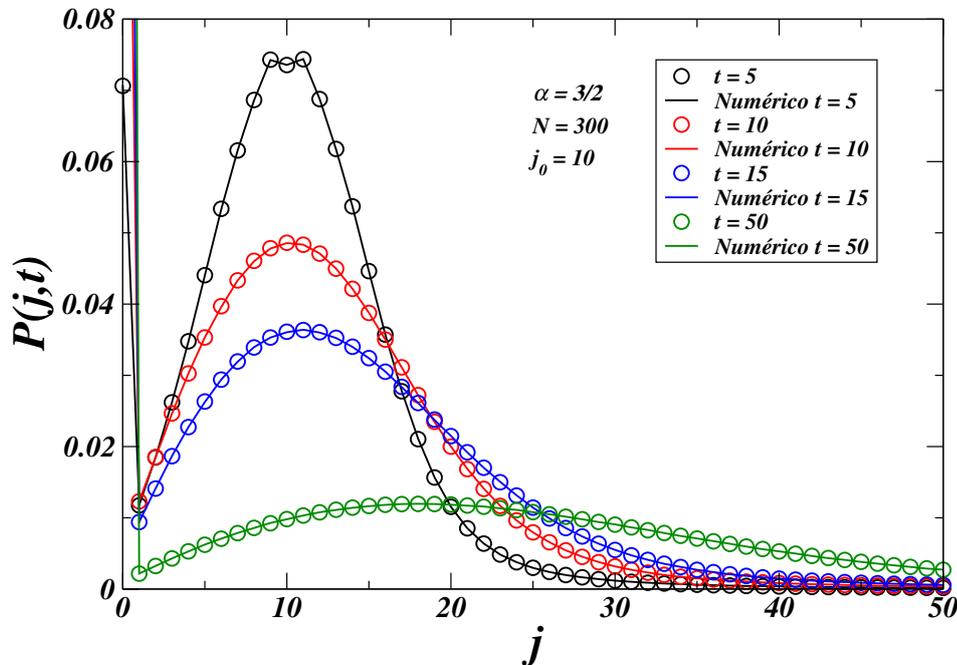
Figura 9 – Probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j para $\alpha = 3/2$ com domínio discreto limitado $N = 300$ e iniciando no ponto médio $j_0 = N/2$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos para os diferentes tempo, $t = 5$ (preto), $t = 10$ (vermelho), $t = 15$ (azul), $t = 50$ (verde) e seus respectivos resultados via simulações numéricas MC em linhas sólidas nas mesmas cores.



Fonte: O autor (2022).

Continuando com as distribuições de probabilidade, na Fig. 10 evidenciamos $P(j,t)$ em função da posição j começando em $j_0 = 10$, ou seja, em um ponto próximo à borda limite esquerda para o mesmo tamanho e os mesmos instantes de tempo da Fig. 9. Fazendo uma breve comparação com o comportamento gaussiano $\alpha = 2$, os comprimentos dos saltos são relativamente maiores nesse regime superdifusivo ($0 < \alpha < 2$), fazendo com que as fronteiras absorvedoras sejam alcançadas pelas partículas em poucos saltos. O comprimento médio de saltos em regimes com $\alpha \leq 1$ é infinito em domínios ilimitados.

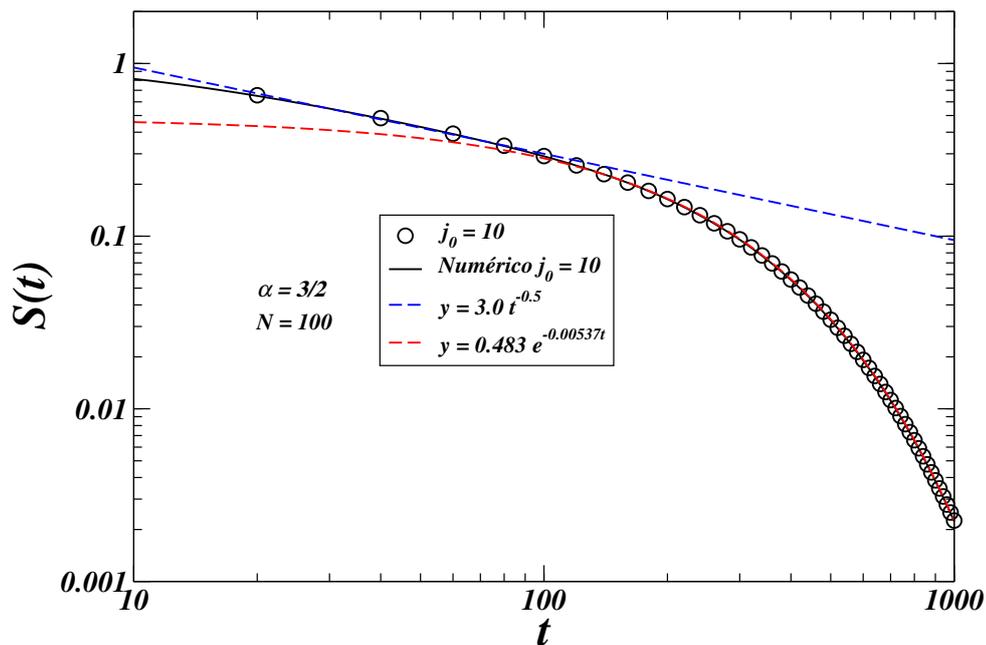
Figura 10 – Probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j para $\alpha = 3/2$ com domínio discreto limitado $N = 300$ e iniciando próximo da fronteira esquerda, $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos para os diferentes tempo, $t = 5$ (preto), $t = 10$ (vermelho), $t = 15$ (azul), $t = 50$ (verde) e seus respectivos resultados via simulações numéricas MC em linhas sólidas nas mesmas cores.



Fonte: O autor (2022).

Partimos agora para as taxas de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t , onde observamos novamente uma mudança no seu comportamento dinâmico. Na Fig. 11, descrevemos o resultado via espaço de Fock (círculos pretos) de uma partícula confinada em um domínio $N = 100$, partindo do sítio $j_0 = 10$ muito próximo do limite esquerdo, representado em um gráfico log-log. Devido à proximidade com a borda absorvedora esquerda, inicialmente apenas esse limite é alcançado, gerando um comportamento via lei de potência representado graficamente por uma linha tracejada azul. Porém, como os comprimentos dos passos são mais largos, quando aumentamos o tempo t o comportamento dinâmico muda para um decaimento exponencial indicado no gráfico pela linha tracejada vermelha, pois agora a partícula também pode acessar a borda longínqua da direita. A linha sólida preta representa a simulação numérica MC.

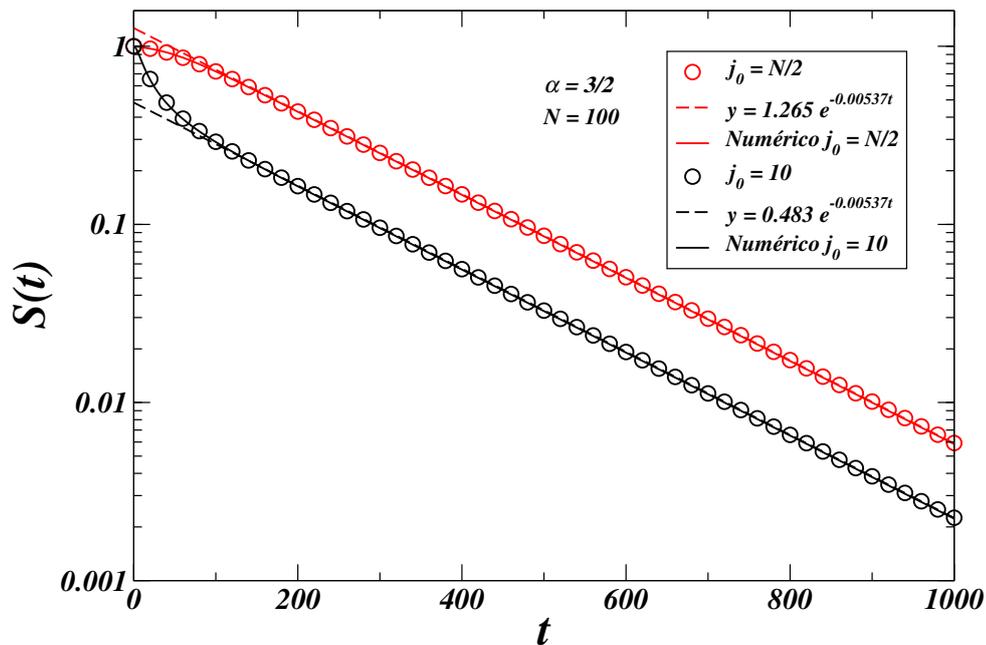
Figura 11 – Gráfico log-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t para o caso $\alpha = 3/2$ com domínio discreto finito pequeno $N = 100$ e iniciando no sítio $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos pretos e a linha preta sólida é o resultado da simulação numérica MC. Neste caso, inicialmente apenas a fronteira esquerda é efetivamente alcançada, gerando um comportamento via lei de potência $S(t) \sim t^{-\gamma}$ (tracejado em azul), com o melhor valor de $\gamma = 0.5$. Ao aumentarmos o tempo, a barreira longínqua da direita começa a ser atingida, mudando assim o comportamento dinâmico para um decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$ (tracejado em vermelho), com o melhor valor de $\lambda = 0.00537$.



Fonte: O autor (2022).

Já na Fig. 12, em um gráfico linear-log de $S(t)$ em função do tempo num domínio limitado de $N = 100$, mostramos mais uma vez que o comportamento via decaimento exponencial (linhas tracejadas) aparece no sistema iniciado em $j_0 = 10$ (em preto) em tempos longos, mas também para o sistema iniciado em $j_0 = N/2$ (em vermelho).

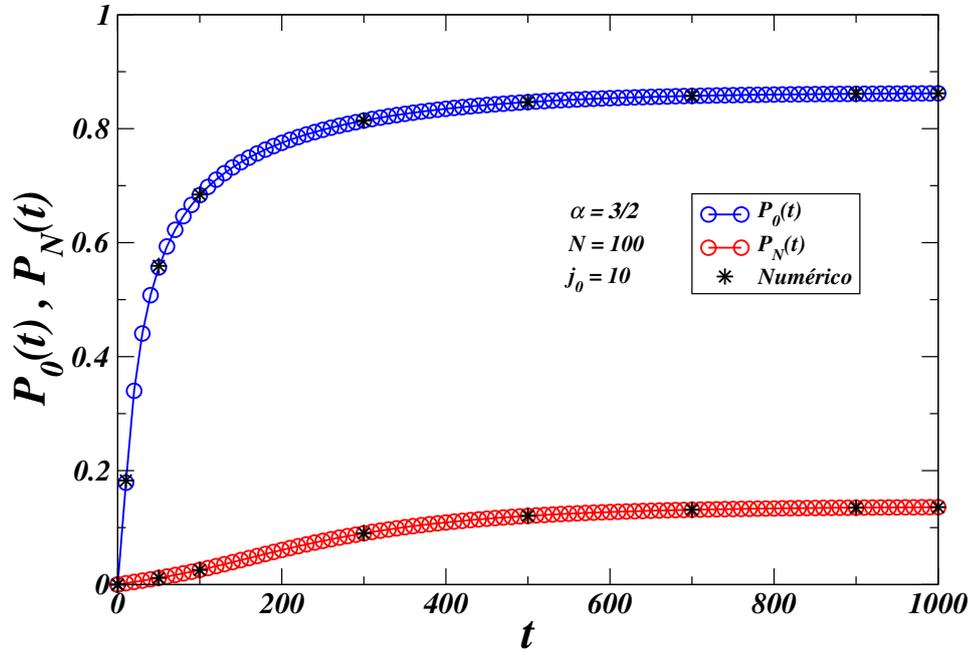
Figura 12 – Gráfico linear-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t para o caso $\alpha = 3/2$ com domínio discreto finito pequeno $N = 100$. Iniciamos a abordagem do espaço de Fock em $j_0 = N/2$ (círculos vermelhos) e $j_0 = 10$ (círculos pretos). Os resultados das simulações numéricas MC estão expressos em linhas sólidas nas respectivas cores. As linhas tracejadas representam o comportamento via decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$, que ocorre quando ambas as bordas são atingidas. Para ambos o melhor valor $\lambda = 0.00537$.



Fonte: O autor (2022).

Por fim, mostramos na Fig. 13 as probabilidades de absorção $P_0(t)$ (em azul) e $P_N(t)$ (em vermelho) dos sítios limites $j = 0$ e $j = N$, respectivamente, para uma partícula começando do local $j_0 = 10$ em um domínio limitado $N = 100$. Como mencionado anteriormente, $P_0(t)$ é maior que $P_N(t)$ devido ao fato de iniciarmos muito próximo da borda esquerda. A concordância com as simulações numéricas MC (em asterisco) são claras. Quando aumentamos o tempo, notamos uma rápida tendência para a saturação $P_0 + P_N = 1$. Essa rapidez é justificada por um maior comprimento de passos para o caso $\alpha = 3/2$ e, com isso, a borda da direita é alcançada mais rapidamente do que o caso gaussiano $\alpha = 2$.

Figura 13 – Probabilidades $P_0(t)$ e $P_N(t)$ de absorção das fronteiras $j = 0$ (em azul) e $j = N$ (em vermelho), respectivamente, em função do tempo t para o caso $\alpha = 3/2$, para um pequeno domínio discreto $N = 100$ e iniciando perto da fronteira esquerda $j_0 = 10$. As simulações numéricas MC representadas por asterisco corroboram os resultados do espaço de Fock (em círculos).



No instante $t = 1000$ os valores de $P_0(t)$ e $P_N(t)$ são 0.862 e 0.136 respectivamente. Esse resultado explicita que, para $\alpha = 3/2$ com domínio finito $N = 100$ e $t = 1000$, a partícula provavelmente já foi absorvida por um dos dois sites absorvedores. Notamos também que a saturação foi alcançada mais rapidamente para o caso $\alpha = 3/2$ (aproximadamente $t = 1000$) do que para $\alpha = 2$ (aproximadamente $t = 2000$), isso é justificado devido ao fato de termos um comprimento de passos maior quando comparado ao limite gaussiano.

3.1.3 Voador de Lévy com $\alpha = 1$

O próximo passo foi analisar os resultados para um caminhante de Cauchy, usando $\alpha = 1$ na distribuição de Lévy com os mesmos valores de parâmetros usados anteriormente, $\beta = \mu = 0$ e $b = 1$ na Eq. (3.3). Para esse caso temos uma expressão analítica definida, partindo da Eq. (3.5),

$$I_{\alpha=1}(a) = \frac{\arctan(a)}{\pi}, \quad (3.15)$$

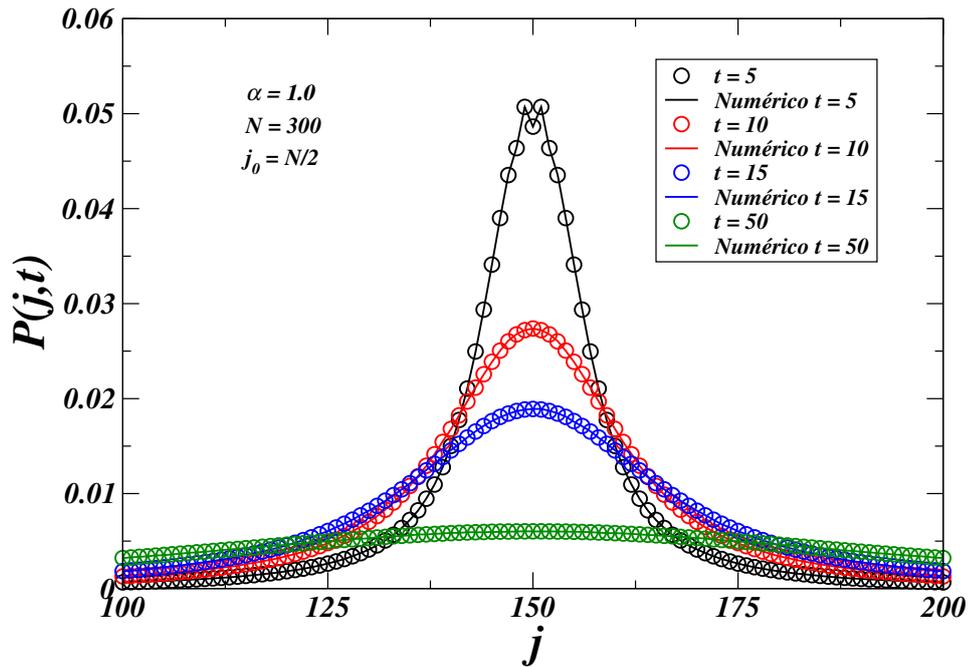
com os elementos fora da diagonal da matriz Hamiltoniano sendo,

$$\langle m | H | n \rangle = [\arctan(|m - n| - 1) - \arctan(|m - n|)] / \pi, \quad (3.16)$$

para $m \neq n$, $m \neq 1$, $n \neq 1$, $m \neq N$ e $n \neq N$. Os outros elementos da matriz H são obtidos a partir da primeira, terceira e quarta linhas da Eq. (3.4) usando $\Delta x = 1$, combinada com as Eqs. (3.6) e (3.15).

Como primeiro resultado, mostramos na Fig. 14 as distribuições de probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j de uma partícula confinada em um domínio finito $N = 300$ e começando no meio do intervalo, $j_0 = N/2$. A abordagem via espaço de Fock está ilustrada em círculos junto com suas respectivas simulações numéricas MC representadas em linhas sólidas. Os instantes de tempos escolhidos foram $t = 5$ (preto), $t = 10$ (vermelho), $t = 15$ (azul) e $t = 50$ (verde).

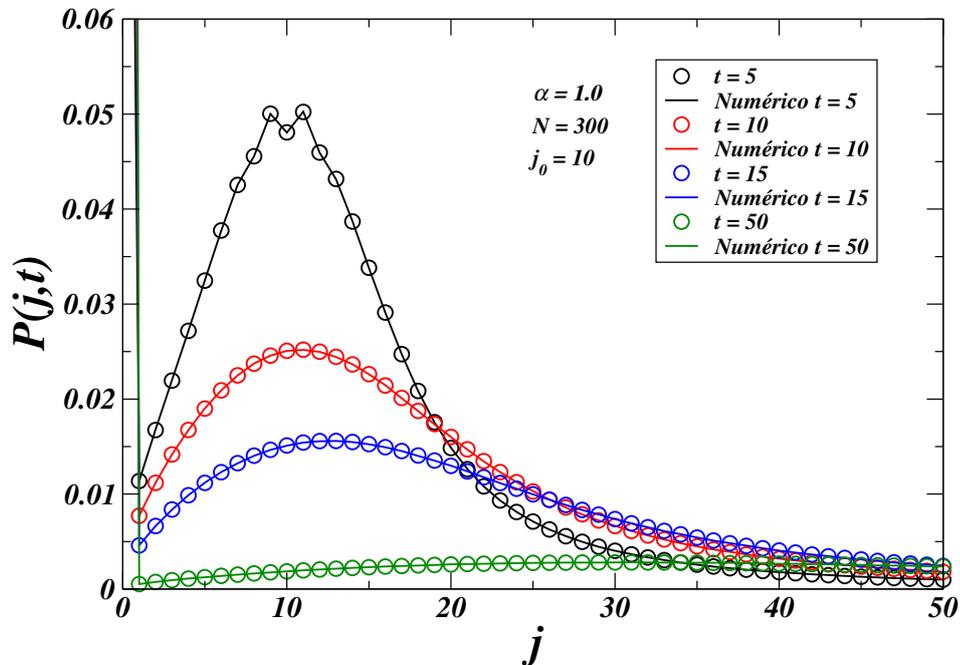
Figura 14 – Probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j para $\alpha = 1$ (caso Cauchy) com domínio discreto limitado $N = 300$ e iniciando no ponto médio $j_0 = N/2$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos para os diferentes tempo, $t = 5$ (preto), $t = 10$ (vermelho), $t = 15$ (azul), $t = 50$ (verde) e seus respectivos resultados via simulações numéricas MC representados em linhas sólidas nas mesmas cores.



Fonte: O autor (2022).

Em seguida, na Fig. 15, fizemos as distribuições de probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j iniciando em um ponto muito próximo do limite esquerdo, ou seja, em $j_0 = 10$. Foram utilizados o mesmo domínio e os mesmos instantes da Fig. 14. Comparando esses resultados para diferentes α até o momento, podemos concluir que os comprimentos dos saltos são maiores em $\alpha = 1$ do que os anteriores (lembrando que estamos em um regime superdifusivo ($0 < \alpha < 2$)). Quanto maior o comprimento do salto, maior a probabilidade das fronteiras absorvedoras serem alcançadas nos mesmos instantes de tempo anteriores.

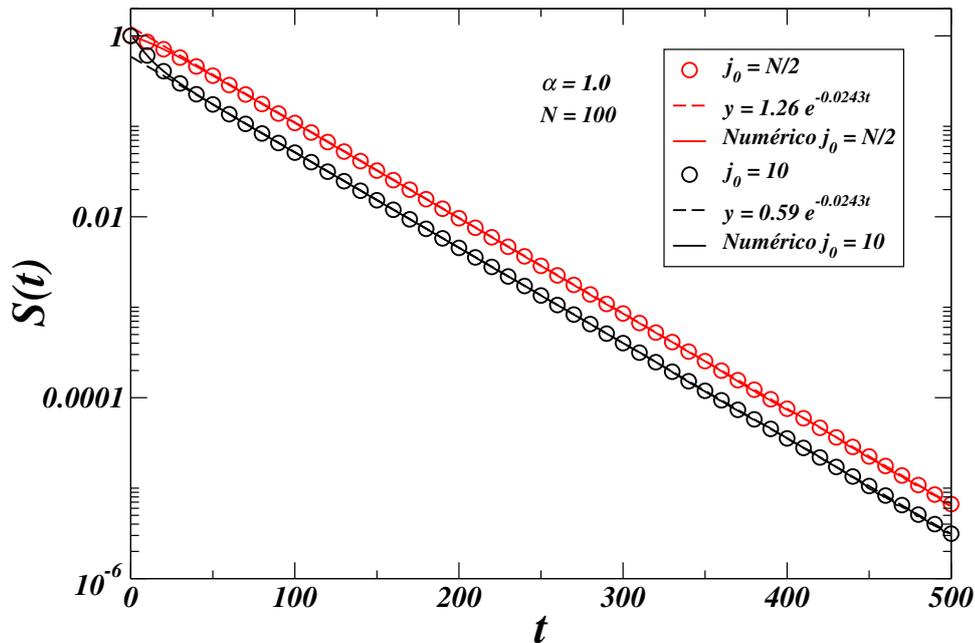
Figura 15 – Probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j para $\alpha = 1$ (caso Cauchy) com domínio discreto limitado $N = 300$ e iniciando próximo da fronteira esquerda, $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos para os diferentes tempo, $t = 5$ (preto), $t = 10$ (vermelho), $t = 15$ (azul), $t = 50$ (verde) e seus respectivos resultados via simulações numéricas MC representados em linhas sólidas nas mesmas cores.



Fonte: O autor (2022).

As probabilidades de sobrevivência $S(t)$ estão ilustradas na Fig. 16 para o caso de Cauchy, em um domínio $N = 100$ iniciando o sistema em dois diferentes locais, $j_0 = N/2$ (vermelho) e $j_0 = 10$ (preto). Os resultados via abordagem de Fock estão em círculos e as simulações numéricas MC em linhas sólidas. As linhas tracejadas evidenciam o decaimento exponencial da Eq. (3.11) e comprovam que os comprimentos dos passos para $\alpha = 1$ são maiores que seus anteriores, uma vez que o comportamento exponencial é logo alcançado para tempos curtos. Em particular, nossos resultados demonstram uma taxa de decaimento da Eq. (3.11) com $\lambda = 0.0243$, em concordância com as técnicas do operador diferencial fracionário de Riesz discretizado [80] ($\lambda = 0.0236$) e com a decomposição de Wiener-Hopf [30] ($\lambda = 0.0231$).

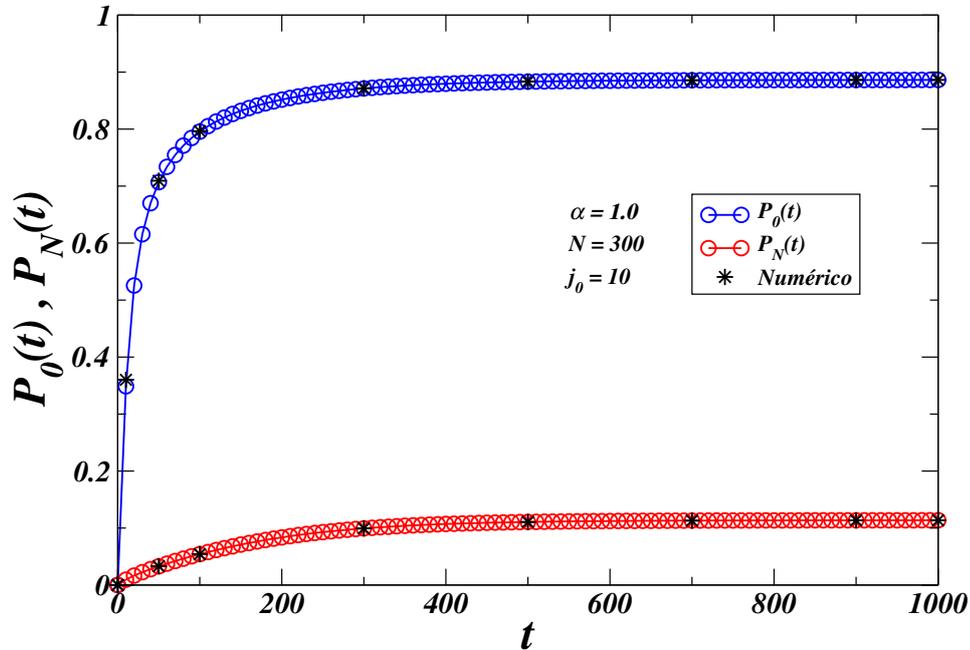
Figura 16 – Gráfico linear-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t para o caso $\alpha = 1$ (caso Cauchy) com domínio finito discreto pequeno $N = 100$. Iniciamos a abordagem do espaço de Fock em $j_0 = N/2$ (círculos vermelhos) e $j_0 = 10$ (círculos pretos). Os resultados das simulações numéricas MC estão expressos em linhas sólidas nas respectivas cores. As linhas tracejadas representam o comportamento via decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$, que ocorre quando ambas as bordas são atingidas. Para ambos o melhor valor $\lambda = 0.0243$.



Fonte: O autor (2022).

Para concluir os resultados de $\alpha = 1$, mostramos na Fig. 17 as probabilidades de absorção $P_0(t)$ (em azul) e $P_N(t)$ (em vermelho) em função do tempo dos limites $j = 0$ e $j = N$, respectivamente, iniciando a partícula no local $j_0 = 10$, muito próximo ao limite esquerdo e em um domínio finito $N = 300$. Mais uma vez foi constatada a concordância com as simulações numéricas MC (em asterisco). Notamos uma rápida tendência para a saturação $P_0 + P_N = 1$ conforme aumentamos o tempo, justificada por um maior comprimento de passos. Para o instante $t = 1000$, os valores de $P_0(t)$ e $P_N(t)$ são 0.886 e 0.113, respectivamente. Logo, a partícula provavelmente já tenha sido absorvida por uma das bordas absorvedoras.

Figura 17 – Probabilidades $P_0(t)$ e $P_N(t)$ de absorção das fronteiras $j = 0$ (em azul) e $j = N$ (em vermelho), respectivamente, em função do tempo t para o caso $\alpha = 1$ (caso Cauchy), para um grande domínio discreto $N = 300$ e iniciando perto da fronteira esquerda $j_0 = 10$. As simulações numéricas MC representadas por asterisco corroboram os resultados do espaço de Fock (em círculos).



Fonte: O autor (2022).

3.1.4 Voador de Lévy com $\alpha = 1/2$

Por fim, analisamos a distribuição de Lévy com $\alpha = 1/2$ utilizando os mesmos valores dos parâmetros $\beta = \mu = 0$ e o fator de escala $b = 1$. Assim como no caso para $\alpha = 3/2$, não temos nenhuma expressão analítica exata para $P(j,t)$. Usamos o formalismo do espaço de Fock para uma partícula presa em uma região limitada com comprimentos de passos de Lévy $p_\alpha(\ell)$. A Eq. (3.5) para esses valores de parâmetros fica,

$$\begin{aligned}
 I_{\alpha=1/2}(a) &= \frac{1}{2} - \text{Fresnel } C \left[\frac{1}{\sqrt{2a\pi}} \right] + \text{Fresnel } C \left[\frac{1}{\sqrt{2a\pi}} \right]^2 \\
 &\quad - \text{Fresnel } S \left[\frac{1}{\sqrt{2a\pi}} \right] + \text{Fresnel } S \left[\frac{1}{\sqrt{2a\pi}} \right]^2,
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

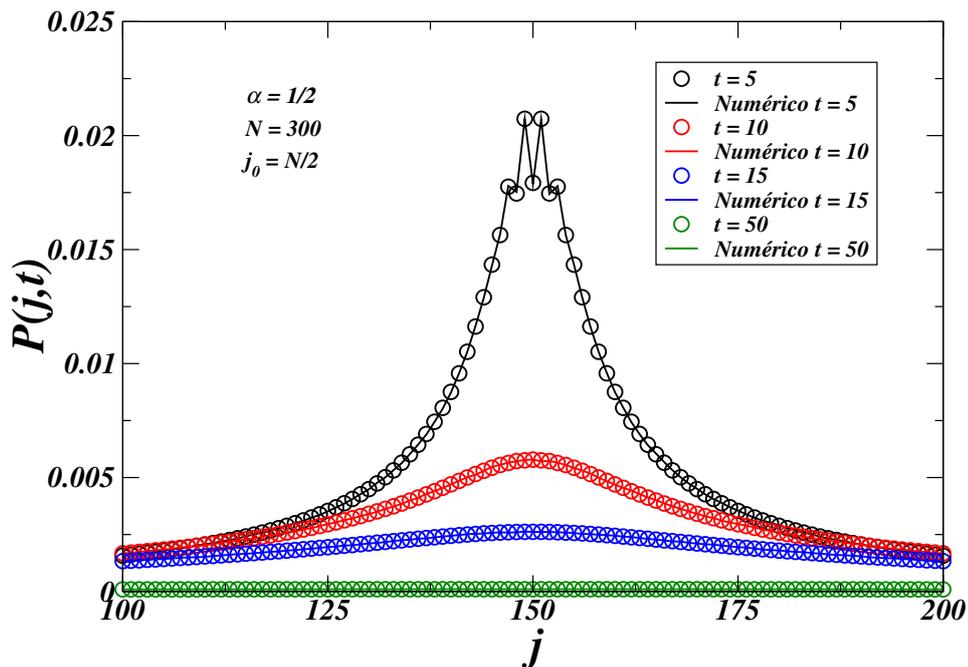
onde *Fresnel C* e *Fresnel S* são as integrais de Fresnel do cosseno e seno ditas transcendentais, ou seja, são funções que não podem ser expressas por uma combinação finita de operações algébricas. Os elementos fora da diagonal da matriz Hamiltoniano são,

$$\langle m | H | n \rangle = I_{\alpha=1/2}(|m - n| - 1) - I_{\alpha=1/2}(|m - n|), \tag{3.18}$$

para $m \neq n$, $m \neq 1$, $n \neq 1$, $m \neq N$ e $n \neq N$. Os outros elementos da matriz H são obtidos a partir da primeira, terceira e quarta linhas da Eq. (3.4) usando $\Delta x = 1$, combinada com as Eqs. (3.6) e (3.17).

Calculamos as distribuições de probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j para diferentes instantes de tempo e usando um tamanho de espaço finito $N = 300$. Na Fig. 18 mostramos esses resultados para uma partícula partindo do meio do intervalo $j_0 = N/2$, usando a abordagem do espaço de Fock (em círculos) para os instantes de tempo $t = 5$ (preto), $t = 10$ (vermelho), $t = 15$ (azul), $t = 50$ (verde). Novamente, observamos uma boa concordância com as simulações numéricas MC representadas em linhas sólidas nos diferentes instantes de tempo (com suas respectivas cores).

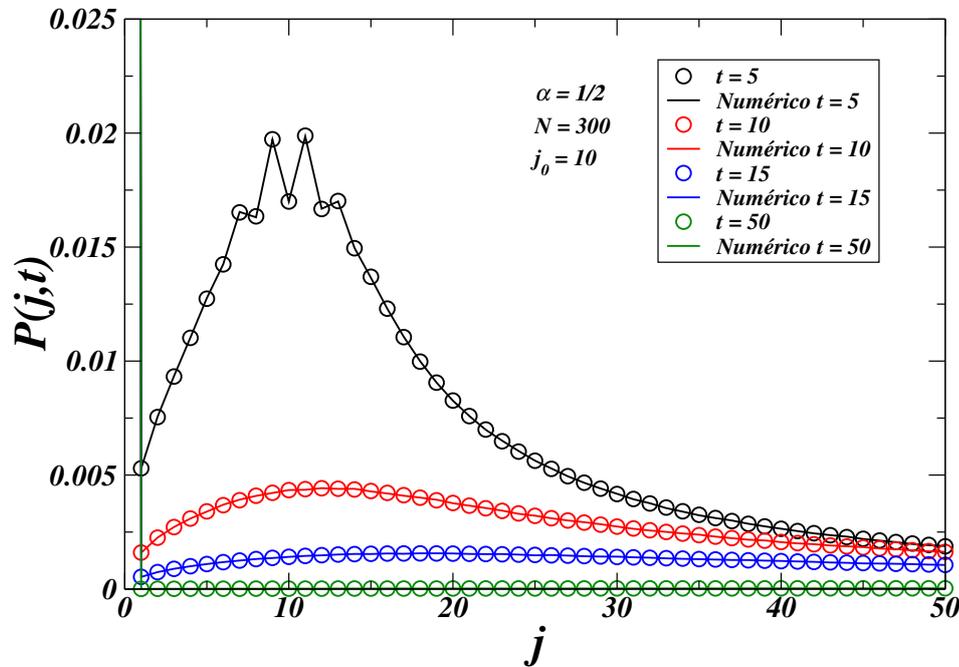
Figura 18 – Probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j para $\alpha = 1/2$ com domínio discreto limitado $N = 300$ e iniciando no ponto médio $j_0 = N/2$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos para os diferentes tempo, $t = 5$ (preto), $t = 10$ (vermelho), $t = 15$ (azul), $t = 50$ (verde) e seus respectivos resultados via simulações numéricas MC representados em linhas sólidas nas mesmas cores.



Fonte: O autor (2022).

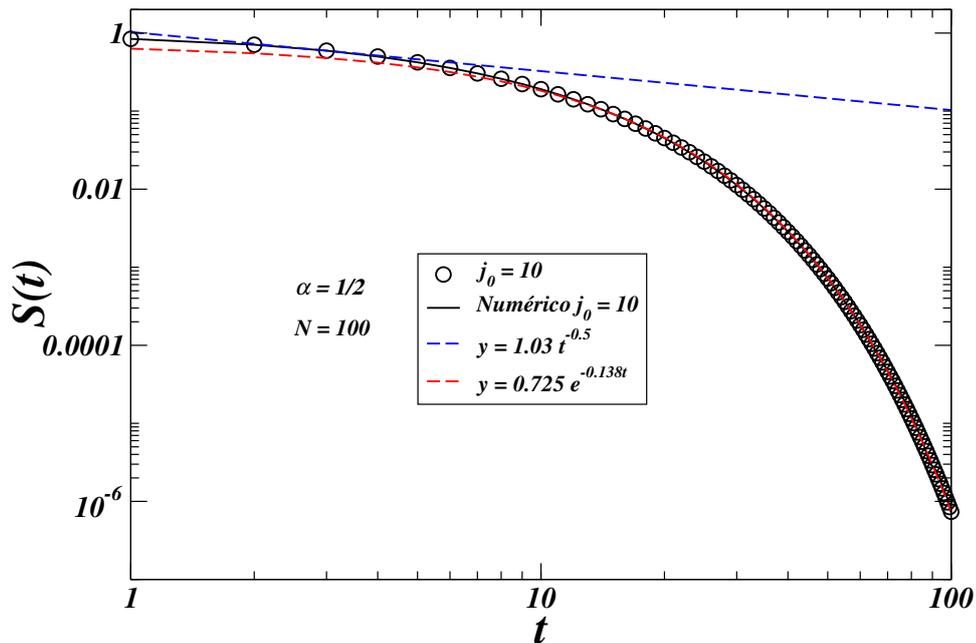
Na Fig. 19, evidenciamos a distribuição $P(j,t)$ em função da posição j para uma partícula presa em um domínio finito de tamanho $N = 300$ e iniciando no local $j_0 = 10$, ou seja, bem próxima ao limite esquerdo, para os mesmo instantes de tempo da Fig. 18. Devido a proximidade com a borda da esquerda, a partícula tem maior probabilidade de ser absorvida por ela do que a borda longínqua da direita.

Figura 19 – Probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j para $\alpha = 1/2$ com domínio discreto limitado $N = 300$ e iniciando próximo da fronteira esquerda, $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos para os diferentes tempo, $t = 5$ (preto), $t = 10$ (vermelho), $t = 15$ (azul), $t = 50$ (verde) e seus respectivos resultados via simulações numéricas MC representados em linhas sólidas nas mesmas cores.



Na Fig. 20, mostramos os diferentes comportamentos para a probabilidade de sobrevivência $S(t)$ em um gráfico log-log com o tempo t . Iniciamos com a partícula no local $j_0 = 10$ em um domínio finito de tamanho $N = 100$. A abordagem com o espaço de Fock está representada em círculos pretos e a simulação numérica MC em linha sólida. Notamos que, para baixos valores de tempo o comportamento é ditado pela lei de potência (tracejado em azul), ou seja, apenas o limite esquerdo do domínio é alcançado devido a proximidade com o local de início. Esse comportamento vai deixando de ser válido e dando lugar ao decaimento exponencial (tracejado em vermelho) conforme aumentamos o tempo, indicando que a borda mais distante da direita também é atingida.

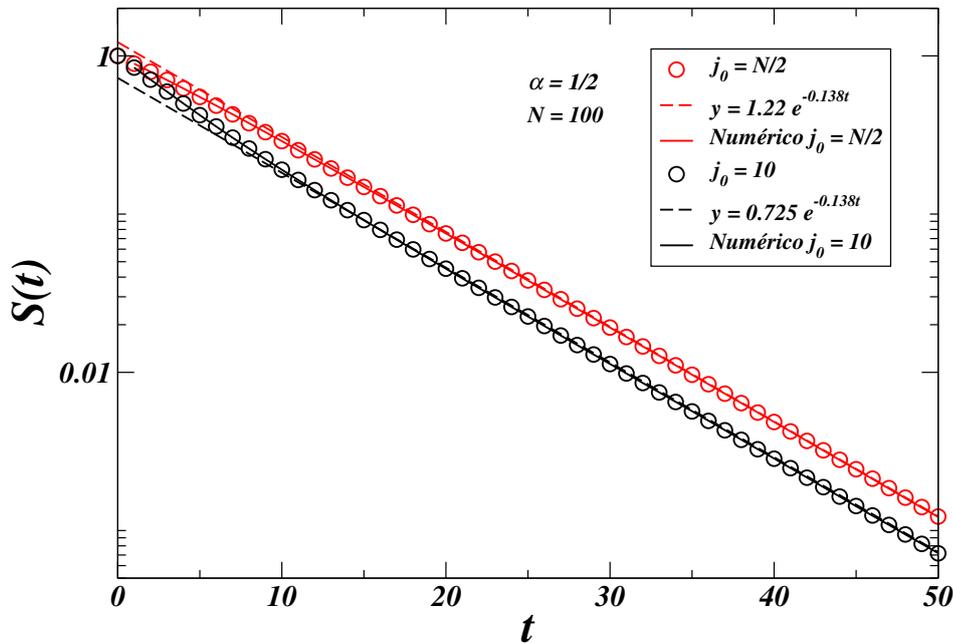
Figura 20 – Gráfico log-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t para $\alpha = 1/2$ com domínio finito discreto pequeno $N = 100$ e iniciando no sítio $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos pretos e a linha preta sólida é a simulação numérica MC. Neste caso, inicialmente apenas a fronteira esquerda é efetivamente alcançada, gerando um comportamento via lei de potência $S(t) \sim t^{-\gamma}$ (tracejado em azul), com o melhor valor de $\gamma = 0.5$. Ao aumentarmos o tempo, a barreira longínqua da direita começa a ser atingida, mudando assim o comportamento dinâmico para um decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$ (tracejado em vermelho), com o melhor valor de $\lambda = 0.138$.



Fonte: O autor (2022).

Ilustramos na Fig. 21 o gráfico linear-log de $S(t)$ em função do tempo para um domínio limitado de $N = 100$, com o intuito de explicar que o comportamento exponencial aparece tanto para o sistema iniciando em $j_0 = 10$ (em preto), quanto para o mesmo iniciando em $j_0 = N/2$ (em vermelho), indicando que para esse ultimo caso, ambas as bordas são atingidas simultaneamente.

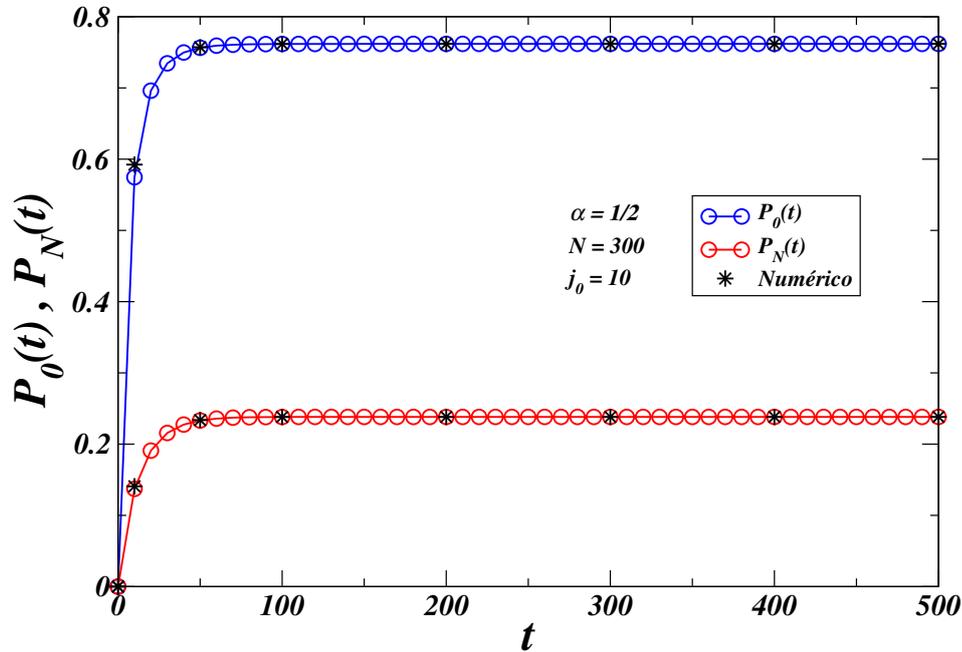
Figura 21 – Gráfico linear-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t para $\alpha = 1/2$ com domínio finito discreto pequeno $N = 100$. Iniciamos a abordagem do espaço de Fock em $j_0 = N/2$ (círculos vermelhos) e $j_0 = 10$ (círculos pretos). As simulações numéricas MC estão expressas em linhas sólidas nas respectivas cores. As linhas tracejadas representam o comportamento via decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$, que ocorre quando ambas as bordas são atingidas. Para ambos o melhor valor $\lambda = 0.138$.



Fonte: O autor (2022).

Como ultimo resultado, mostramos na Fig. 22 as probabilidades de absorção $P_0(t)$ (em azul) e $P_N(t)$ (em vermelho) das bordas $j = 0$ e $j = N$, respectivamente, para uma partícula iniciada em $j_0 = 10$ em um domínio limitado de tamanho $N = 300$. A curva de $P_0(t)$ é maior do que a de $P_N(t)$ devido a partícula começar em um local próximo do limite esquerdo e, com isso, ter maior probabilidade de absorção. As simulações numéricas MC (em asterisco) corroboram a análise via espaço de Fock (em círculos). Devido a um maior comprimento de passos, a saturação $P_0 + P_N = 1$ já é alcançada em um curto intervalo de tempo. Como exemplo, o valor de $P_0(t)$ e $P_N(t)$ são de aproximadamente 0.762 e 0.238, respectivamente, já para $t = 140$, mudando apenas as ultimas casas decimais conforme aumentamos o tempo.

Figura 22 – Probabilidades $P_0(t)$ e $P_N(t)$ de absorção das fronteiras $j = 0$ (em azul) e $j = N$ (em vermelho), respectivamente, em função do tempo t para o caso $\alpha = 1/2$, para um grande domínio discreto $N = 300$ e iniciando perto da fronteira esquerda $j_0 = 10$. As simulações numéricas MC representadas por asterisco corroboram os resultados do espaço de Fock (em círculos).



Um ponto importante que observamos e que deve ser mencionado, são os diferentes métodos para se obter os expoentes λ com resultados muito próximos, o que nos leva a pensar em uma conexão entre a abordagem do espaço de Fock e o espectro de autovalores λ_k do operador Laplaciano [80, 81, 82]. Como citado no trabalho [80], os valores exatos de λ_k além de não serem conhecidos seus cálculos ainda são um mistério. Peguemos um exemplo, nesse mesmo artigo supracitado, uma forma de se escrever a probabilidade de sobrevivência é

$$S(t) = \sum_k a_k e^{-|\lambda_k|t}, \quad (3.19)$$

logo, o menor autovalor $|\lambda_{k=1}|$ (valor absoluto) determina o comportamento a longo prazo de $S(t)$, ou seja, $\lambda = |\lambda_{k=1}|$. Com a abordagem do espaço de Fock, encontramos

$$S(t) = \sum_i c_i e^{-\mu_i t}, \quad (3.20)$$

com os parâmetros c_i e $\mu > 0$ obtidos dos cálculos dos autovalores e autovetores da matriz $\exp(-tH)$. Outra coisa que observamos usando o espaço de Fock foi que conseguimos ilustrar o comportamento a curto prazo de $S(t)$, usando o cálculo de $P(j,t)$ para todo tempo t , diferentemente dos métodos de decomposição de Wiener-Hopf [30] e do operador diferencial fracionário discretizado de Riesz [80]. Para fins de comparação,

na tabela a seguir mostramos os valores de λ do nosso trabalho e dos métodos de Wiener-Hopf e Riesz, para os valores de $\alpha = 1$ e 2.

Tabela 2 – Valores de λ do decaimento exponencial de $S(t)$ para os valores de $\alpha = 2$ e 1, com a abordagem do espaço de Fock (tese), o método da decomposição de Wiener-Hopf e do operador diferencial fracionário discretizado de Riesz.

α	tese	Wiener-Hopf	Reisz
2.0	0.00107	0.000955	0.00099
1.0	0.0243	0.0231	0.0236

Fonte: O autor (2022).

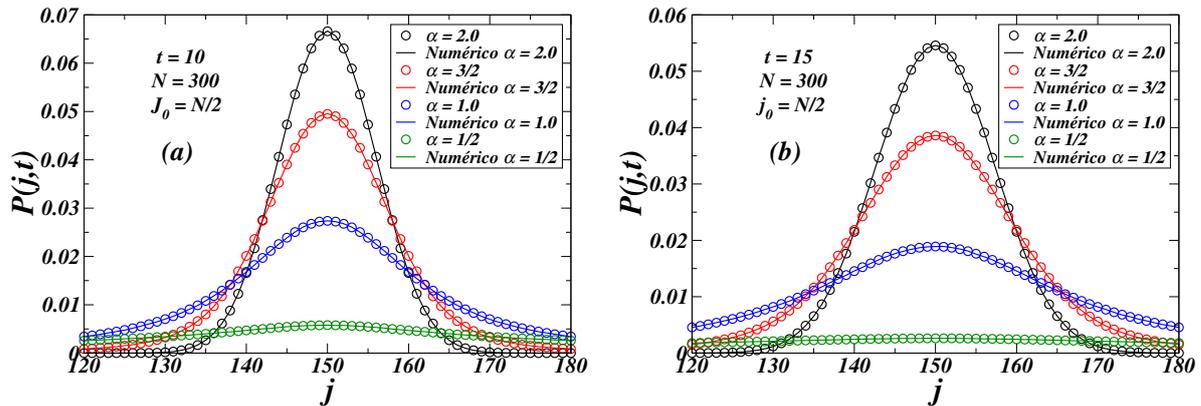
3.2 Algumas comparações interessantes entre os α

A partir dos dados anteriores, vamos fazer algumas comparações importantes dos resultados para os diferentes valores de α . Começamos com as distribuições de probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j iniciando no ponto central $j_0 = N/2$ em um domínio de tamanho $N = 300$, representados na Fig. 23. As abordagens via espaço de Fock estão representadas em círculos para $\alpha = 2$ (preto), $\alpha = 3/2$ (vermelho), $\alpha = 1$ (azul) e $\alpha = 1/2$ (verde), as linhas sólidas representam as simulações numéricas MC para esses valores de α com suas respectivas cores. Na figura (a) usamos o instante de tempo $t = 10$ e na figura (b) usamos $t = 15$. Notamos que as distribuições são mais estreitas em $t = 10$ em relação ao instante $t = 15$, devido ao fato de que quanto maior o tempo mais passos o caminhante (ou a partícula) pode dar, gerando assim maiores probabilidades em locais mais afastados da origem. Outra observação importante é que conforme diminuimos o valor de α maior fica o comprimento dos passos, logo para um mesmo instante de tempo e α menor o caminhante pode alcançar sítios mais afastados.

Figura 23 – Probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j para os diferentes valores $\alpha = 2$ (preto), $\alpha = 3/2$ (vermelho), $\alpha = 1$ (azul) e $\alpha = 1/2$ (verde) em domínio discreto limitado $N = 300$ e iniciando no ponto médio $j_0 = N/2$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos e as simulações numéricas MC em linhas sólidas para os instantes de tempo $t = 10$ (a) e $t = 15$ (b).

(a) $P(j,t)$ para o instante $t = 10$.

(b) $P(j,t)$ para o instante $t = 15$.

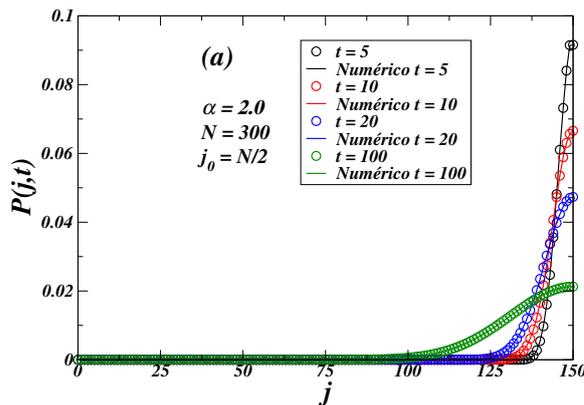


Fonte: O autor (2022).

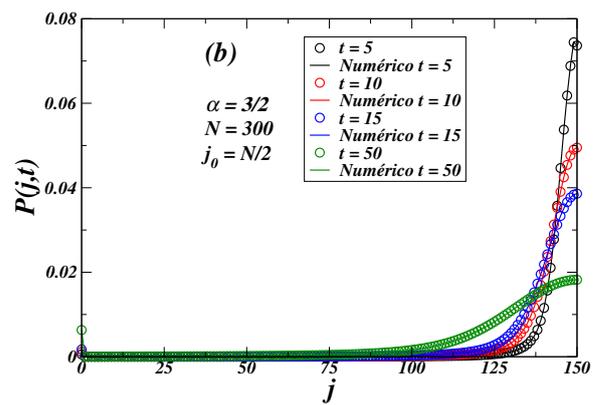
Nas Figs. 24, temos as probabilidades $P(j,t)$ em função do tempo para cada α usado neste capítulo e nos mesmo intervalos de tempo das seções anteriores, para um domínio de tamanho $N = 300$. Mudamos a escala do gráfico no eixo x para evidenciar que o efeito de borda em $j = 0$ já pode ser alcançado para alguns instantes de tempo e com o sistema começando no meio do intervalo, ou seja, $j_0 = N/2$. Notamos que para $\alpha = 2$, não existe tal efeito devido aos passos serem pequenos (caso gaussiano). Conforme diminuimos α , aumentamos o comprimento dos passos e, com isso, a borda começa a ser alcançada gerando assim o efeito de borda. Quanto maior o comprimento dos passos e maior o intervalo de tempo, maior é a probabilidade da partícula ser absorvida nesse instante. Enfatizamos que, devido a simetria do sistema, esse efeito também ocorre no extremo à direita, em $j = N$.

Figura 24 – Probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j para os diferentes valores $\alpha = 2$ (a), $\alpha = 3/2$ (b), $\alpha = 1$ (c) e $\alpha = 1/2$ (d) em domínio discreto limitado $N = 300$ e iniciando no ponto médio, $j_0 = N/2$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos e as simulações numéricas MC em linhas sólidas para diferentes instantes de tempo. Podemos ver o efeito da borda absorvente em $j = 0$.

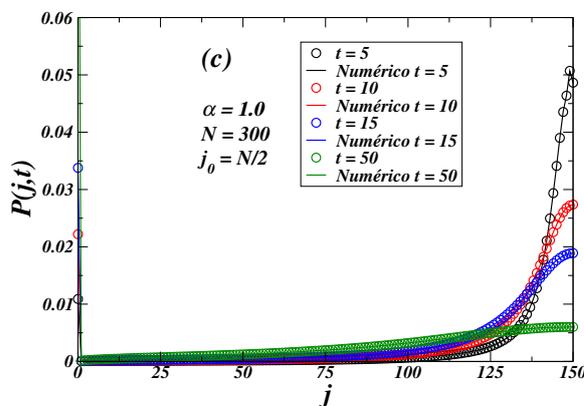
(a) Distribuições com $\alpha = 2$.



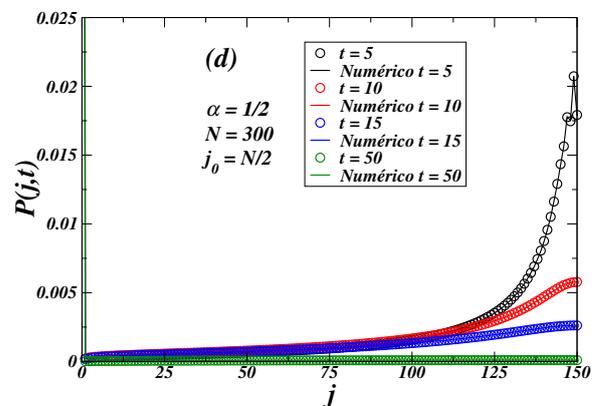
(b) Distribuições com $\alpha = 3/2$.



(c) Distribuições com $\alpha = 1$.



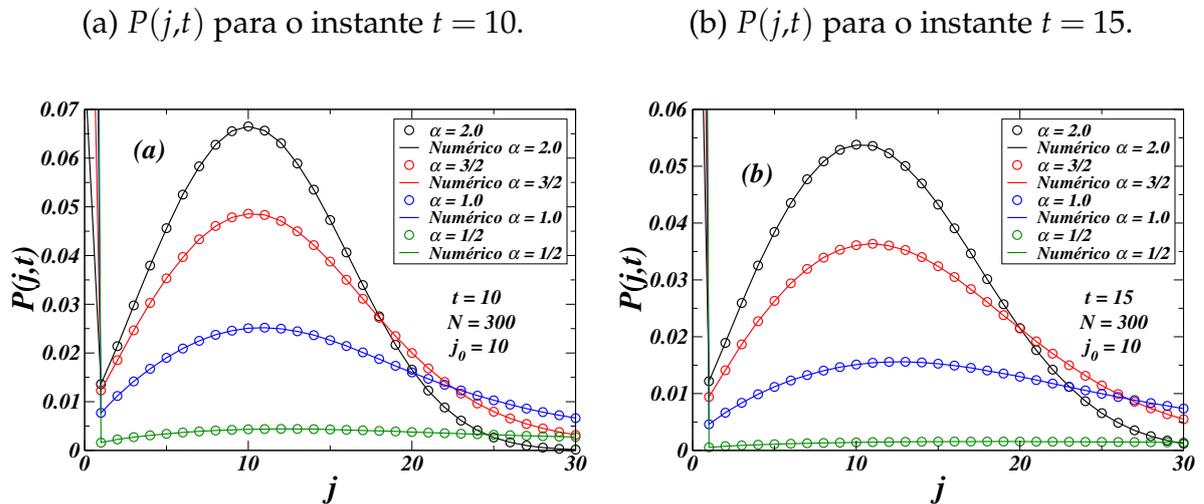
(d) Distribuições com $\alpha = 1/2$.



Fonte: O autor (2022).

Continuando com as distribuições de probabilidade $P(j,t)$ em função do tempo, para os mesmos valores supracitados e iniciando no local $j_0 = 10$, nas Fig. 25 mostramos os resultados para os instantes $t = 10$ (a) e $t = 15$ (b). Notamos os mesmos comportamentos citados anteriormente, quanto maior t maior a largura da distribuição e quanto menor α maior o alcance da partícula.

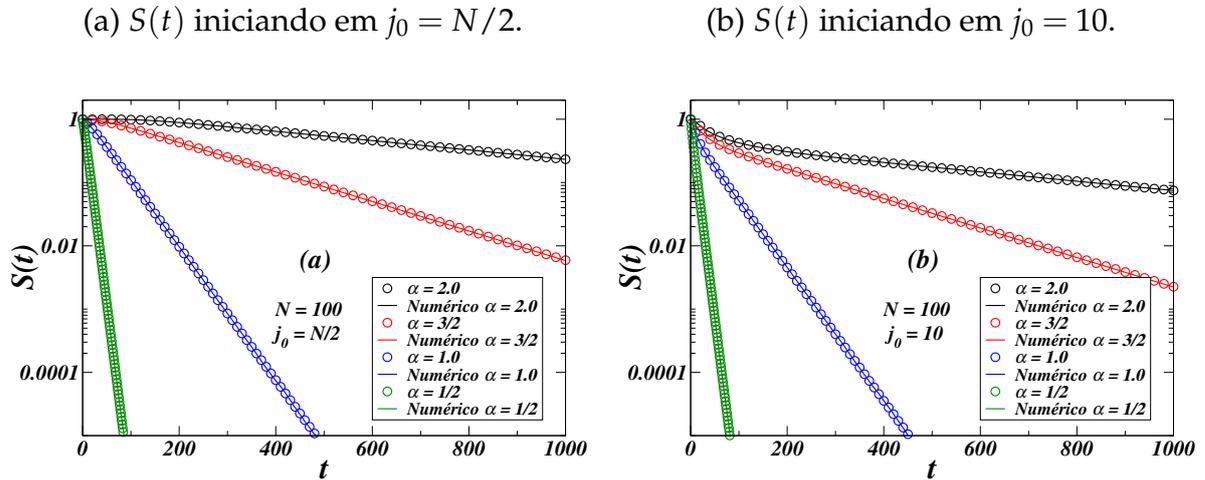
Figura 25 – Probabilidade $P(j,t)$ em função da posição j para os diferentes valores $\alpha = 2$ (preto), $\alpha = 3/2$ (vermelho), $\alpha = 1$ (azul) e $\alpha = 1/2$ (verde) em domínio discreto limitado $N = 300$ e iniciando próximo da fronteira esquerda, $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos e as simulações numéricas MC em linhas sólidas para os instantes de tempo $t = 10$ (a) e $t = 15$ (b).



Fonte: O autor (2022).

Por fim, partimos agora para a comparação das taxas de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t . Na Fig. 26 (a) iniciamos no meio do intervalo $j_0 = N/2$ e em (b) no local $j_0 = 10$ próximo da borda esquerda. A abordagem via espaço de Fock estão representadas em círculos para $\alpha = 2$ (preto), $\alpha = 3/2$ (vermelho), $\alpha = 1$ (azul) e $\alpha = 1/2$ (verde), as linhas sólidas representam as simulações numéricas MC para esses valores de α com suas respectivas cores. Observamos que, conforme diminuimos α a taxa de sobrevivência também diminui, mostrando que para menores α maior é o comprimento dos passos. Uma vez que os passos são mais largos, maior a probabilidade de alcançar os limites absorventes, diminuindo assim a taxa de sobrevivência dos caminhantes.

Figura 26 – Gráficos linear-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t para os diferentes valores $\alpha = 2$ (preto), $\alpha = 3/2$ (vermelho), $\alpha = 1$ (azul) e $\alpha = 1/2$ (verde) em um domínio discreto limitado $N = 100$ e iniciando no ponto médio $j_0 = N/2$ (a) e próximo a borda esquerda $j_0 = 10$ (b). A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos e as simulações numéricas MC em linhas sólidas.



Na tabela a seguir, mostramos os valores de $P_0(t)$ e $P_N(t)$ para os índices α de Lévy usados anteriormente, iniciando no local $j_0 = 10$ nos tempos finais de cada intervalo. Notamos que a saturação ($P_0 + P_N = 1$) para esses valores de tempo já é alcançada para cada α com seus respectivos tempos.

Tabela 3 – Valores de $P_0(t)$ e $P_N(t)$ para cada valor de α , iniciando no local $j_0 = 10$ para os instantes finais.

α	Domínio (N)	Tempo (t)	$P_0(t)$	$P_N(t)$
2.0	100	2000	0.889	0.097
3/2	100	1000	0.862	0.136
1.0	300	1000	0.886	0.113
1/2	300	500	0.762	0.238

Fonte: O autor (2022).

4 RANDOM WALKER COM DISTRIBUIÇÃO DE COMPRIMENTO DE PASSOS DE LÉVY NO LIMITE DO ESPAÇO CONTÍNUO

Neste capítulo, vamos analisar alguns resultados importantes para uma partícula aleatória presa em um domínio finito com extremos absorventes no limite do espaço contínuo, sujeita a distribuição de comprimento de passos α -estável de Lévy já mencionada anteriormente, via abordagem do espaço de Fock mostrada no Cap. 2. Foram definidos no Cap. 3 a distribuição α -estável de Lévy, Eq. (3.1), e o operador Hamiltoniano, Eq. (3.3). As probabilidades de transição P_{ji} são calculadas de acordo com a Eq. (3.4) reescrita abaixo,

$$P_{ji} = \begin{cases} 0, & i = 0 \text{ ou } i = N \text{ ou } i = j; \\ \int_{(|j-i|-1)\Delta x}^{|j-i|\Delta x} p(\ell) d\ell, & 1 \leq i, j \leq N-1, j \neq 0; \\ \int_{(i-1)\Delta x}^{\infty} p(\ell) d\ell, & 1 \leq i \leq N-1, j = 0; \\ \int_{(N-i-1)\Delta x}^{\infty} p(\ell) d\ell, & 1 \leq i \leq N-1, j = N. \end{cases} \quad (4.1)$$

Ressaltamos que a primeira linha indica a não possibilidade dos saltos partirem das bordas absorventes, não podendo também permanecer no mesmo local do salto. A segunda linha representa os saltos não absorvidos pelos extremos. Continuamos com a simetria esquerda-direita ($P_{ij} = P_{ji}$). As linhas três e quatro indicam os saltos que foram absorvidos pelos limites absorventes $j = 0$ e $j = N$, respectivamente.

Para abordar o limite do espaço contínuo, usamos $\Delta x/N \rightarrow 0$ na Eq. (4.1) do formalismo discreto no espaço de Fock. Para obter uma maior rapidez na convergência da abordagem do espaço de Fock (erro relativo máximo de 0.004 para $\Delta x/N = 0.01$ com $\alpha = 1/2$) [65], combinamos essa abordagem com a aproximação de espaço contínuo das probabilidades de transição P_{ji} [80], $P_{ji} = -A(|j-i|)/A(0)$, com

$$A(n) = -\frac{\Gamma(n-\alpha/2)\Gamma(\alpha+1)}{\pi\Gamma(n+\alpha/2+1)} \sin(\pi\alpha/2), \quad (4.2)$$

para $1 \leq i, j \leq N-1$ e P_{ji} com $j = 0$ ou $j = N$ calculado pela soma da Eq. (4.1) sobre os comprimentos de saltos que excedem a distância das bordas limites. Observamos que $A(n) = 0$ para $n > \alpha/2$, devido a compensação dos polos de $\Gamma(n-\alpha/2)$ com os zeros de $\sin(\pi\alpha/2)$. Todos os elementos fora da diagonal de $A(n)$ são positivos quando $0 < \alpha < 2$, e com sinais opostos quando $\alpha > 2$. Assim, quando $\alpha < 2$ podemos normalizar a matriz

$A(n)$ e interpreta-la como as probabilidades de transição para um voador de Lévy com índice de estabilidade α [80]. Notamos também que a Eq. (4.1) no limite $\Delta x/N \rightarrow 0$ é bastante geral, podendo ser aplicada em qualquer distribuição de comprimentos de passos $p(\ell)$, já a Eq. (4.2) é usada especificamente para o voador de Lévy.

Nas próximas seções, mostraremos os resultados para as taxas de sobrevivência $S(t)$ e as probabilidades de absorção $P_0(t)$ e $P_N(t)$ dos extremos, ambos em função do intervalo de tempo t , para diferentes valores do índice α de Lévy.

4.1 Voador de Lévy com $\alpha = 1.99$

A matriz $A(n)$ descrita pela Eq. (4.2), diverge quando usamos $\alpha = 2$, por esse motivo, e para analisarmos o limite gaussiano da distribuição de Lévy, usamos o valor $\alpha = 1.99$. Calculamos as probabilidades de transição na forma

$$P_{ji} = -\frac{A(|j-i|)}{A(0)}, \quad (4.3)$$

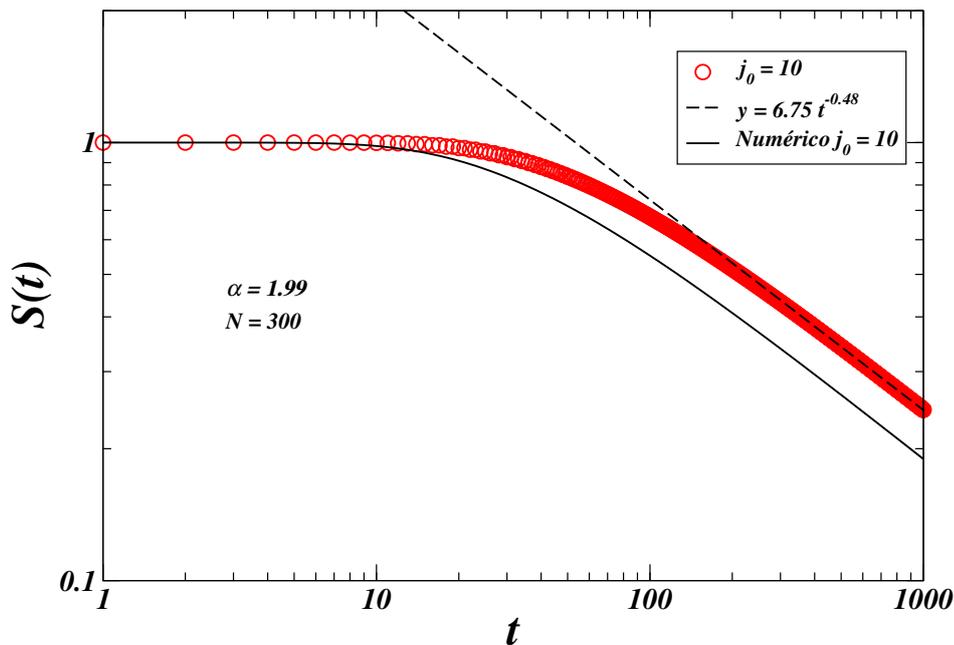
onde $A(|j-i|)$ é descrita pela Eq. (4.2). Para $\alpha = 1.99$, encontramos um valor de $A(0) = 1.99003$.

Com isso, conseguimos calcular o Hamiltoniano e fazer a evolução temporal, utilizando o propagador temporal da mecânica quântica [73], $U(0,t) = [U(\delta t)]^n$, com $U(\delta t) = \mathbf{I} - H\delta t$ e \mathbf{I} o operador matriz identidade. Calculamos a probabilidade de sobrevivência $S(t)$, descrita pela Eq. (3.9) e reescrita abaixo

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N-1} P(j,t) = 1 - [P_0(t) + P_N(t)], \quad (4.4)$$

com $P_0(t)$ e $P_N(t)$ sendo as probabilidades de absorção dos limites $j = 0$ e $j = N$, respectivamente. Mostramos na Fig. 27 o resultado para $S(t)$ via abordagem do espaço de Fock (círculos vermelhos) em função do tempo na escala log-log, para um domínio finito de tamanho $N = 300$ e iniciando no local $j_0 = 10$, próximo do limite esquerdo. A linha sólida preta representa o resultado via simulação numérica MC e a não compatibilidade com o resultado via espaço de Fock está explicada na Seção 4.5.

Figura 27 – Gráfico log-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t com $\alpha = 1.99$ para o limite contínuo de tamanho $N = 300$ e iniciando próximo da fronteira esquerda, $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos vermelhos e a linha preta sólida é o resultado da simulação numérica MC. Neste caso, apenas a fronteira esquerda é efetivamente alcançada nesse intervalo de tempo, com isso, o comportamento a longo tempo é regido por uma lei de potência $S(t) \sim t^{-\gamma}$ (linha tracejada), com o melhor valor $\gamma = 0.48$.

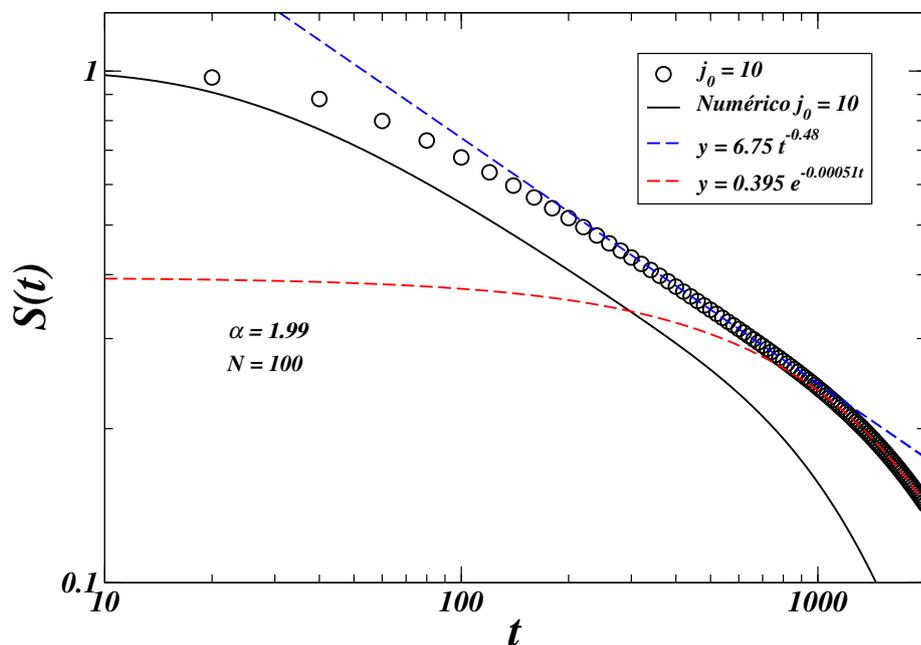


Assim como no caso do espaço discreto, o extremo à direita não é efetivamente alcançado para $t = 1000$, uma vez que os saltos longos são quase inexistentes para esse valor de α . Com isso, podemos descrever via o teorema de Sparre-Andersen o comportamento assintótico de $S(t)$ como uma lei de potência $S(t) \sim t^{-\gamma}$ [39, 40], com o valor ajustado de $\gamma = 0.48$ (linha tracejada na Fig. 27).

Quando ambos os extremos absorventes são alcançados, um outro comportamento dinâmico aparece. Para esse caso, a taxa de sobrevivência passa a ter um comportamento assintótico via decaimento exponencial, $S(t) \sim e^{-\lambda t}$. Evidenciamos essa mudança progressiva na Fig. 28, para um domínio finito menor, de tamanho $N = 100$, para que ambos os extremos possam ser alcançados em um tempo curto. O resultado da abordagem do espaço de Fock está ilustrado em círculos pretos e a simulação numérica MC em linha sólida na mesma cor, no gráfico log-log de $S(t)$ em função do tempo, iniciando no local $j_0 = 10$. Inicialmente o comportamento é ditado pelo decaimento da lei de potência (tracejado em azul), mostrando que apenas o extremo esquerdo é atingido. Conforme evolui o tempo o limite direito é alcançado, logo ambas as bordas são encontradas, fazendo o comportamento mudar para o decaimento exponencial

(tracejado em vermelho), com um valor de $\lambda = 0.00051$.

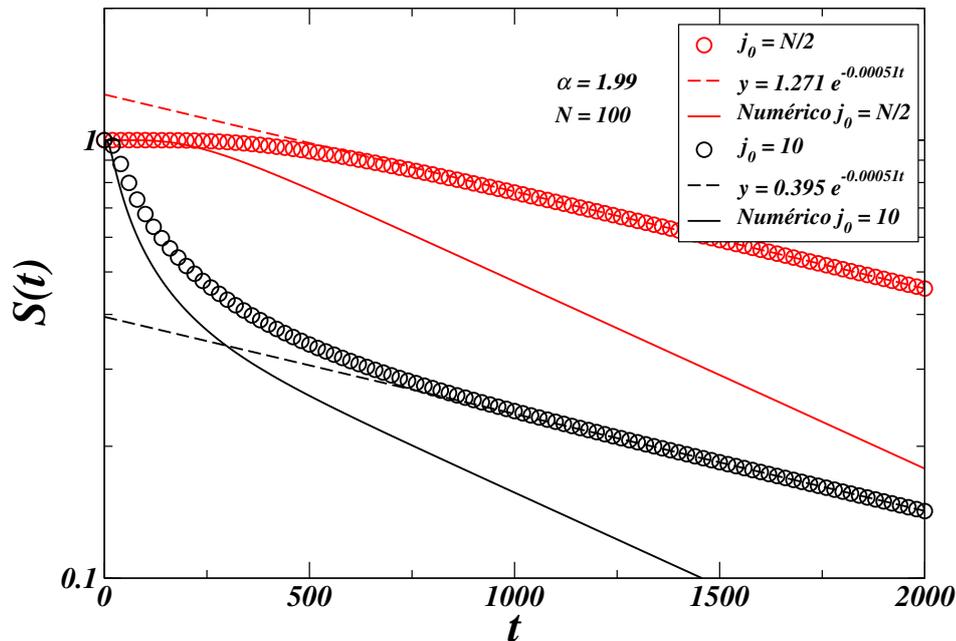
Figura 28 – Gráfico log-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t com $\alpha = 1.99$ para o limite contínuo de tamanho $N = 100$ e iniciando próximo da fronteira esquerda $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos pretos e a linha preta sólida é o resultado da simulação numérica MC. Neste caso, inicialmente apenas a fronteira esquerda é efetivamente alcançada, gerando um comportamento via lei de potência $S(t) \sim t^{-\gamma}$ (tracejado em azul), com o melhor valor de $\gamma = 0.48$. Ao aumentarmos o tempo, a barreira longínqua da direita começa a ser atingida, mudando assim o comportamento dinâmico para um decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$ (tracejado em vermelho), com o melhor valor de $\lambda = 0.00051$.



Fonte: O autor (2022).

Já na Fig. 29, mostramos o gráfico linear-log de $S(t)$ em função do tempo para evidenciar que o comportamento exponencial aparece tanto para o sistema iniciado em $j_0 = 10$ (em preto), quanto para $j_0 = N/2$ (meio do domínio) (em vermelho), em um domínio de tamanho $N = 100$.

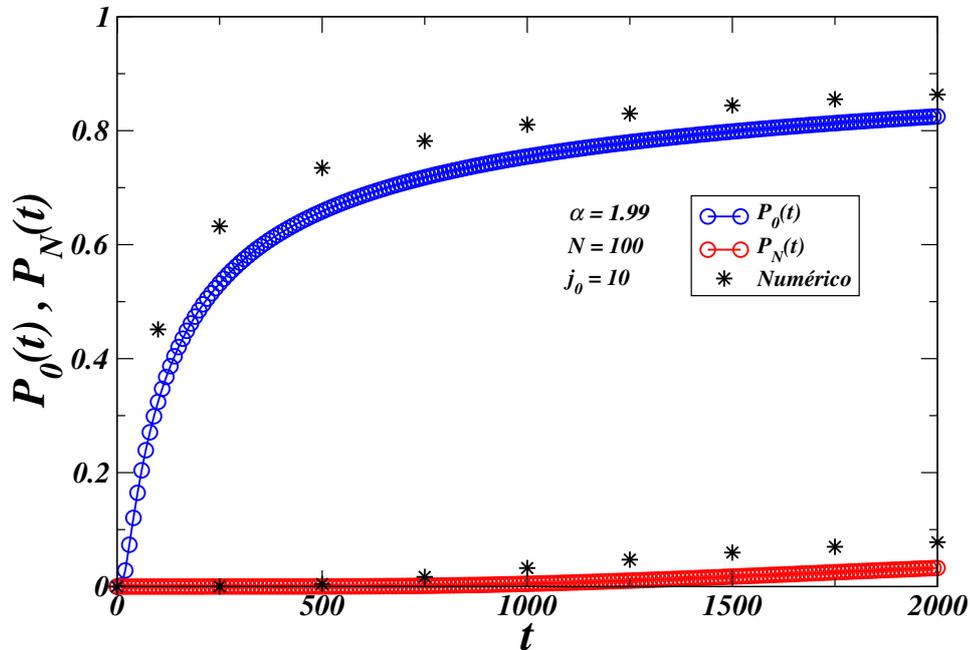
Figura 29 – Gráfico linear-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t com $\alpha = 1.99$ para o limite contínuo de tamanho $N = 100$. Iniciamos a abordagem do espaço de Fock em $j_0 = N/2$ (círculos vermelhos) e $j_0 = 10$ (círculos pretos). Os resultados das simulações numéricas MC estão expressos em linhas sólidas nas respectivas cores. As linhas tracejadas representam o comportamento via decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$, que ocorre quando ambas as bordas são atingidas. Para ambos o melhor valor $\lambda = 0.00051$.



Fonte: O autor (2022).

Como último resultado desta seção, mostramos na Fig. 30 as evoluções temporais das probabilidades de absorção $P_0(t)$ (em azul) e $P_N(t)$ (em vermelho) dos extremos $j = 0$ e $j = N$, respectivamente, para um domínio finito de tamanho $N = 100$ iniciando no local $j_0 = 10$. Os asteriscos representam os resultados das simulações numéricas MC, onde notamos uma discrepância entre eles e os da abordagem de Fock. Contudo, notamos também que conforme aumentamos o tempo, as curvas das simulações numéricas MC e da abordagem de FS tendem a se encontrar. A probabilidade de absorção do limite $j = 0$ é maior devido a proximidade com o local de início. Conforme aumentamos o tempo, percebemos uma tendência a saturação $P_0 + P_N = 1$.

Figura 30 – Probabilidades $P_0(t)$ e $P_N(t)$ de absorção das fronteiras $j = 0$ (em azul) e $j = N$ (em vermelho), respectivamente, em função do tempo t para $\alpha = 1.99$, no limite contínuo de tamanho $N = 100$ e iniciando perto da fronteira esquerda $j_0 = 10$. Os resultados das simulações numéricas MC representados por asterisco e os resultados do espaço de Fock em círculos.



Fonte: O autor (2022).

Os valores de $P_0(t)$ e $P_N(t)$ no instante $t = 2000$ são respectivamente 0.825 e 0.033, ou seja, para $\alpha = 1.99$ no domínio $N = 100$ e $t = 2000$ a partícula provavelmente já tenha sido absorvida por uma das bordas. Devido ao local de início ser mais próximo da borda esquerda, a partícula tenha sido absorvida por tal limite, que possui a maior probabilidade de absorção.

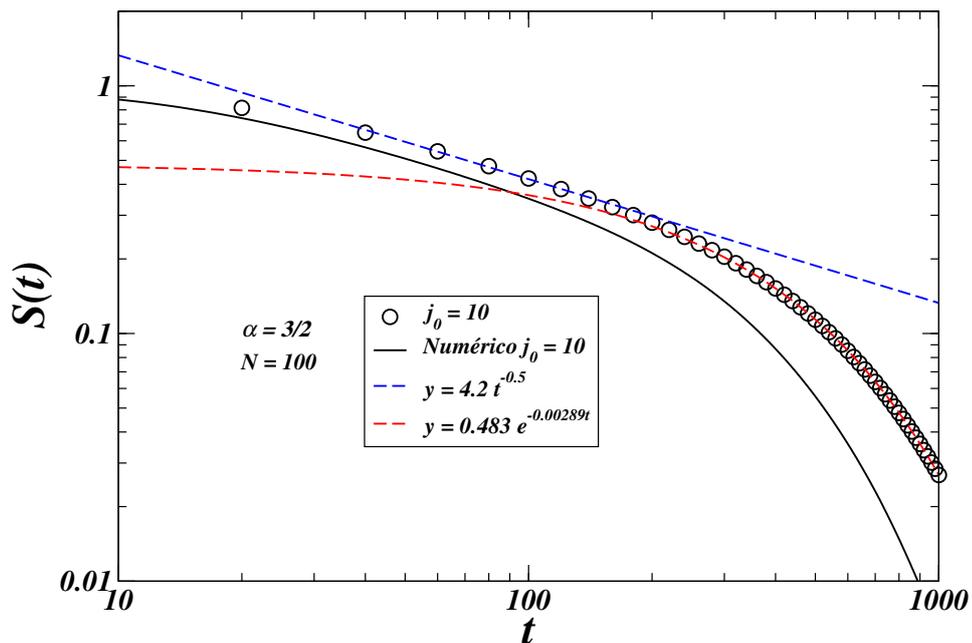
4.2 Voador de Lévy com $\alpha = 3/2$

Partimos agora para a análise dos resultados com o valor do índice de Lévy $\alpha = 3/2$. Calculamos as probabilidades de transição na forma da Eq. (4.3) e encontramos um valor de $A(0) = 1.57379$. Calculamos o Hamiltoniano H e evoluímos no tempo usando o operador propagador temporal da mecânica quântica $U(0,t)$.

Na Fig. 31, descrevemos em um gráfico log-log o resultado para as probabilidades de sobrevivência, Eq. (4.4), em função do tempo t via abordagem do espaço de Fock (círculos pretos) para um domínio finito de tamanho $N = 100$ iniciando no local $j_0 = 10$, ou seja, próximo ao extremo esquerdo. Inicialmente, devido a proximidade, apenas a borda esquerda é alcançada, gerando um comportamento (decaimento) via lei de potência ($S(t) \sim t^{-\gamma}$) (tracejado azul), com $\gamma = 0.5$. Conforme o tempo evolui, a borda

direita começa a ser atingida, fazendo com que ambas as bordas sejam alcançadas, mudando assim o comportamento dinâmico para um decaimento exponencial ($S(t) \sim e^{-\lambda t}$) (tracejado vermelho), com o melhor $\lambda = 0.00289$. A linha sólida preta representa a simulação numérica MC, onde podemos perceber uma aproximação mais justa entre ele e a abordagem do espaço de Fock em comparação com o mesmo gráfico para o $\alpha = 1.99$ na Fig. 28. Essa aproximação se deve ao maior comprimento de passos para $\alpha = 3/2$.

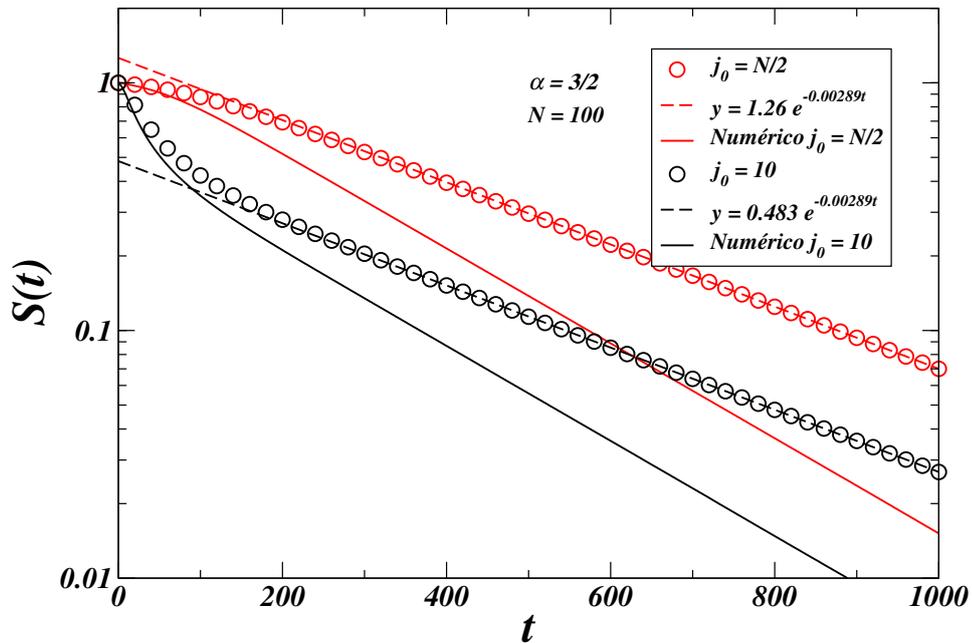
Figura 31 – Gráfico log-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t com $\alpha = 3/2$ para o limite contínuo de tamanho $N = 100$ e iniciando próximo da fronteira esquerda $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos pretos e a linha preta sólida é o resultado da simulação numérica MC. Neste caso, inicialmente apenas a fronteira esquerda é efetivamente alcançada, gerando um comportamento via lei de potência $S(t) \sim t^{-\gamma}$ (tracejado em azul), com o melhor valor de $\gamma = 0.5$. Ao aumentarmos o tempo, a barreira longínqua da direita começa a ser atingida, mudando assim o comportamento dinâmico para um decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$ (tracejado em vermelho), com o melhor valor de $\lambda = 0.00289$.



Fonte: O autor (2022).

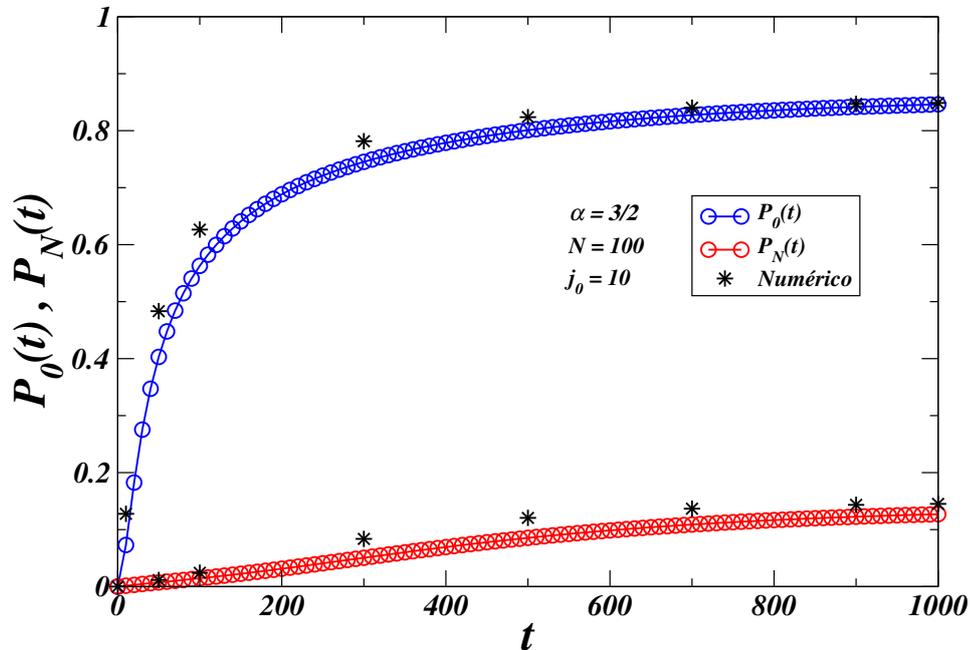
Mostramos na Fig. 32 o gráfico linear-log das probabilidades de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t , em um domínio finito de tamanho $N = 100$, para evidenciar o comportamento exponencial tanto iniciando no local $j_0 = 10$ (em preto) quanto em $j_0 = N/2$ (em vermelho). A abordagem do espaço de Fock representada em círculos e os resultados das simulações numéricas em linhas sólidas. As linhas tracejadas representam as melhores curvas do decaimento exponencial para os locais de início.

Figura 32 – Gráfico linear-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t com $\alpha = 3/2$ para o limite contínuo de tamanho $N = 100$. Iniciamos a abordagem do espaço de Fock em $j_0 = N/2$ (círculos vermelhos) e $j_0 = 10$ (círculos pretos). Os resultados das simulações numéricas MC estão expressos em linhas sólidas nas respectivas cores. As linhas tracejadas representam o comportamento via decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$, que ocorre quando ambas as bordas são atingidas. Para ambos o melhor valor $\lambda = 0.00289$.



Ilustramos na Fig. 33 as evoluções temporais das probabilidades de absorção dos extremos $P_0(t)$ (em azul) e $P_N(t)$ (em vermelho), para um domínio finito com comprimento $N = 100$ iniciando no local $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos e os resultados das simulações numéricas MC em asterisco. Mais uma vez, percebemos que as simulações numéricas vão de encontro com a abordagem do espaço de Fock para tempos grandes. Como já mencionado anteriormente, $P_0(t)$ é maior devido ao local de início ser próximo do extremo esquerdo. Conforme o tempo evolui, percebemos mais uma vez a tendência para a saturação $P_0 + P_N = 1$. No instante $t = 1000$ os valores de $P_0(t)$ e $P_N(t)$ são 0.846 e 0.127, respectivamente, mostrando que a saturação já é quase alcançada para esse tempo.

Figura 33 – Probabilidades $P_0(t)$ e $P_N(t)$ de absorção das fronteiras $j = 0$ (em azul) e $j = N$ (em vermelho), respectivamente, em função do tempo t para $\alpha = 3/2$, no limite contínuo de tamanho $N = 100$ e iniciando perto da fronteira esquerda em $j_0 = 10$. Os resultados das simulações numéricas MC representados por asterisco e os resultados do espaço de Fock em círculos.

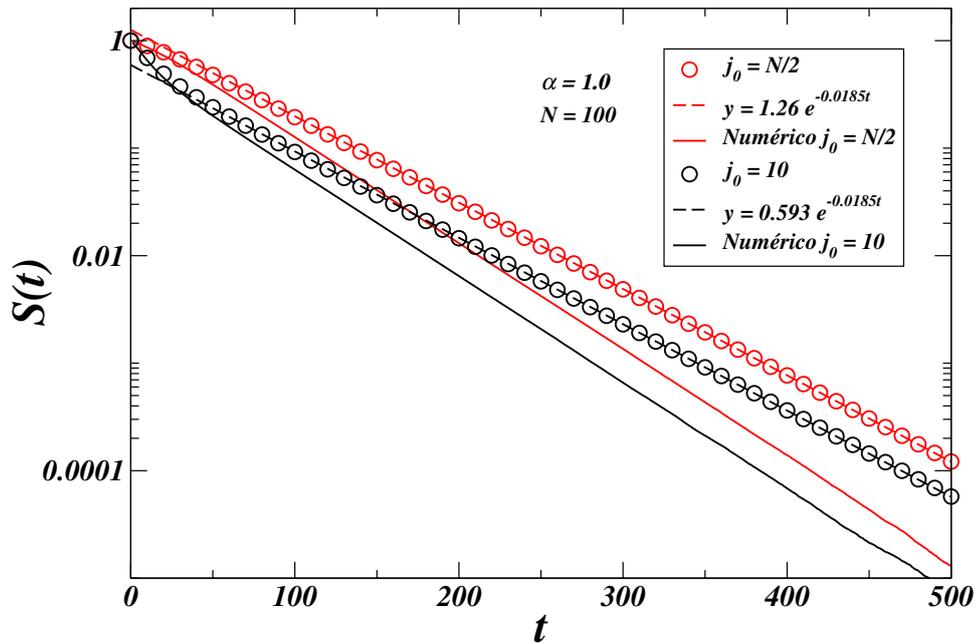


4.3 Voador de Lévy com $\alpha = 1$

Dando continuidade às análises dos resultados para o limite do espaço contínuo, usamos $\alpha = 1$ para encontrar as probabilidades de transição para calcularmos as taxas de sobrevivência $S(t)$ e as probabilidades de absorção, ambas em função do tempo. Para a Eq. (4.3), encontramos um valor de $A(0) = 1.27324$.

Ilustramos na Fig. 34 o gráfico linear-log de $S(t)$ em função do tempo para um domínio finito de tamanho $N = 100$, evidenciando o comportamento exponencial em ambos os locais de início, $j_0 = 10$ em preto e $j_0 = N/2$ em vermelho. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos, os resultados das simulações numéricas MC em linhas sólidas e as melhores curvas exponenciais em linhas tracejadas.

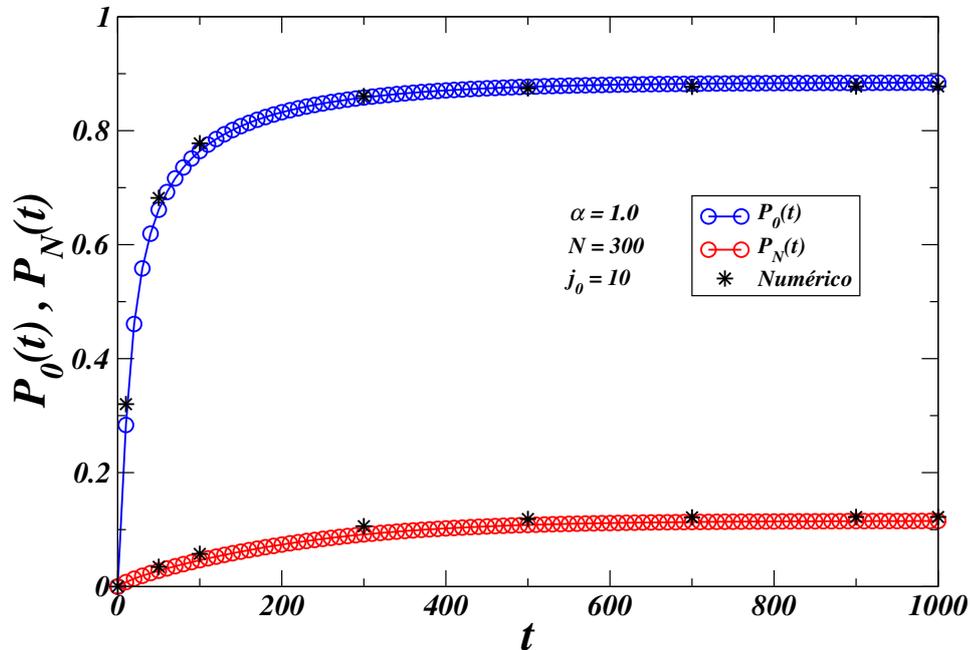
Figura 34 – Gráfico linear-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t com $\alpha = 1$ para o limite contínuo de tamanho $N = 100$. Iniciamos a abordagem do espaço de Fock em $j_0 = N/2$ (círculos vermelhos) e $j_0 = 10$ (círculos pretos). Os resultados das simulações numéricas MC estão expressos em linhas sólidas nas respectivas cores. As linhas tracejadas representam o comportamento via decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$, que ocorre quando ambas as bordas são atingidas. Para ambos o melhor valor $\lambda = 0.0185$.



Fonte: O autor (2022).

Na Fig. 35, mostramos as probabilidades de absorção $P_0(t)$ (em azul) e $P_N(t)$ (em vermelho) em função do tempo dos limites absorventes $j = 0$ e $j = N$, respectivamente, iniciando no local $j_0 = 10$ para um domínio de tamanho $N = 300$. Representamos a abordagem do espaço de Fock em círculos e os resultados das simulações numéricas MC em asterisco. Notamos que para esse valor de α as curvas dos resultados numéricos e de Fock se ajustam melhor do que para os outros valores já abordados anteriormente. Devido a proximidade do local de início com a borda absorvente esquerda, $P_0(t) > P_N(t)$. Notamos que a saturação $P_0 + P_N = 1$ já é quase alcançada para $t = 1000$, onde os valores são $P_0(t) = 0.884$ e $P_N(t) = 0.115$.

Figura 35 – Probabilidades $P_0(t)$ e $P_N(t)$ de absorção das fronteiras $j = 0$ (em azul) e $j = N$ (em vermelho), respectivamente, em função do tempo t para $\alpha = 1$, no limite contínuo de tamanho $N = 300$ e iniciando perto da fronteira esquerda em $j_0 = 10$. Os resultados das simulações numéricas MC representados por asterisco e os resultados do espaço de Fock em círculos.

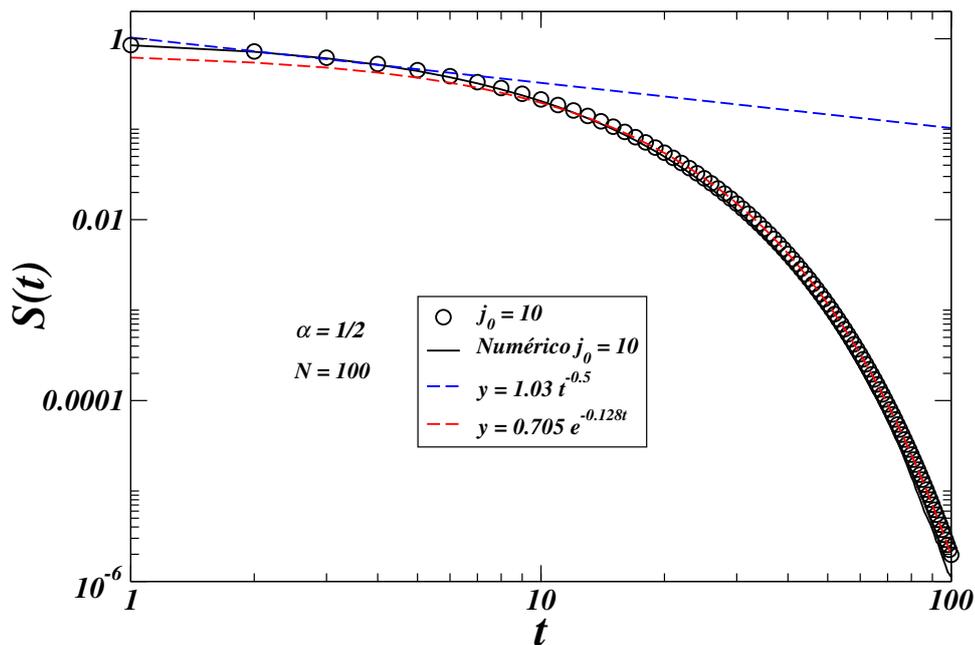


4.4 Voador de Lévy com $\alpha = 1/2$

Por fim, analisamos os resultados para o valor do índice de Lévy $\alpha = 1/2$. Da mesma forma que nas seções anteriores, calculamos as probabilidades de transição via Eq. (4.3) e encontramos o valor de $A(0) = 1.07871$. Calculamos a matriz Hamiltoniano H e usamos o operador evolução temporal $U(0,t)$.

Na Fig. 36, descrevemos em um gráfico log-log o resultado para as probabilidades de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo, para um domínio finito de tamanho $N = 100$ e iniciando no local $j_0 = 10$. A abordagem via espaço de Fock está representada em círculos pretos e o resultado da simulação numérica MC em linha sólida. Como já esperado, inicialmente o comportamento é ditado via um decaimento do tipo lei de potência ($S(t) \sim t^{-\gamma}$) (tracejado azul), com $\gamma = 0.5$. Conforme aumentamos o tempo, a borda longínqua da direita começa a ser alcançada, fazendo o comportamento dinâmico mudar para um decaimento exponencial ($S(t) \sim e^{-\lambda t}$) (tracejado vermelho), com o valor $\lambda = 0.128$. Percebemos que a simulação numérica MC se ajusta perfeitamente para baixos valores do tempo t e se afasta conforme evoluímos o sistema. Comparando esse gráfico com as Figs. 28 e 31 dos $\alpha = 1.99$ e $\alpha = 3/2$, respectivamente, notamos uma melhor concordância numérica MC para este valor de $\alpha = 1/2$.

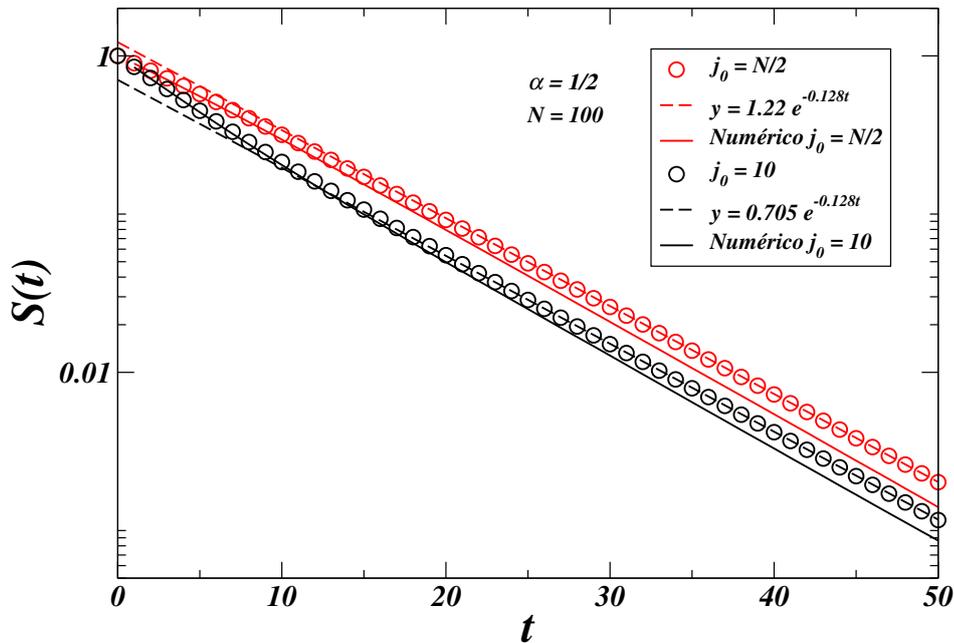
Figura 36 – Gráfico log-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t com $\alpha = 1/2$ para o limite contínuo de tamanho $N = 100$ e iniciando próximo da fronteira esquerda $j_0 = 10$. A abordagem do espaço de Fock está representada em círculos pretos e a linha preta sólida é o resultado da simulação numérica MC. Neste caso, inicialmente apenas a fronteira esquerda é efetivamente alcançada, gerando um comportamento via lei de potência $S(t) \sim t^{-\gamma}$ (tracejado em azul), com o melhor valor de $\gamma = 0.5$. Ao aumentarmos o tempo, a barreira longínqua da direita começa a ser atingida, mudando assim o comportamento dinâmico para um decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$ (tracejado em vermelho), com o melhor valor de $\lambda = 0.128$.



Fonte: O autor (2022).

Mostramos na Fig. 37, o gráfico linear-log das probabilidades de sobrevivência em função do tempo, para um intervalo finito de tamanho $N = 100$, para explicar que o comportamento exponencial aparece tanto para o sistema iniciando no local $j_0 = 10$ (em preto), quanto para em $j_0 = N/2$ (em vermelho). Comparando esse gráfico com as Figs. 29, 32 e 34 para os valores do índice de Lévy $\alpha = 1.99, 3/2$ e 1 , respectivamente, percebemos uma maior aproximação dos resultados das simulações numéricas MC (linhas sólidas) com a abordagem do espaço de Fock (em círculos) para este valor de $\alpha = 1/2$, devido ao maior comprimento de passos.

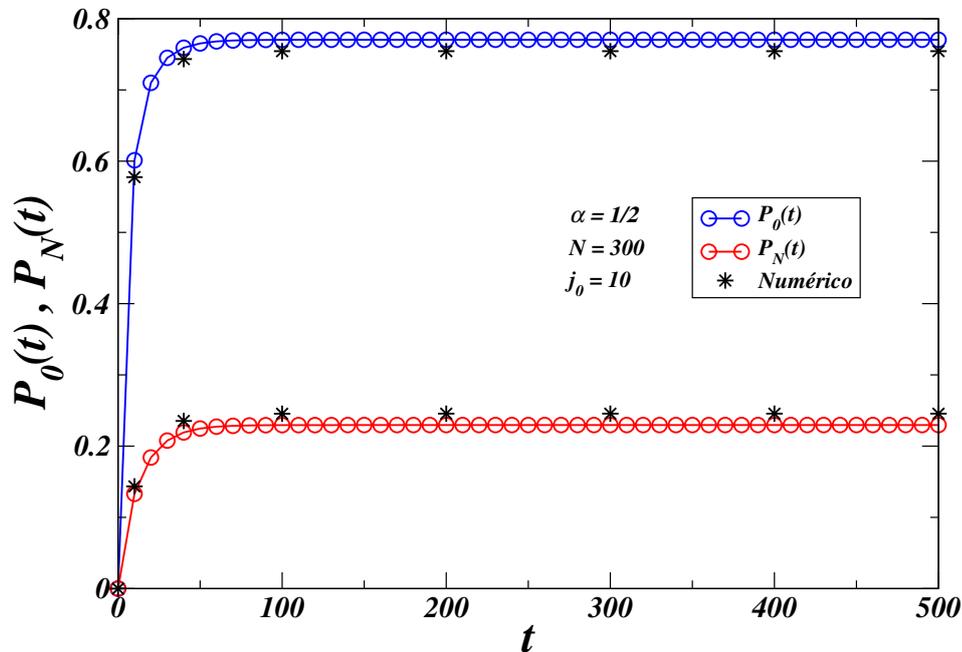
Figura 37 – Gráfico linear-log da taxa de sobrevivência $S(t)$ em função do tempo t com $\alpha = 1/2$ para o limite contínuo de tamanho $N = 100$. Iniciamos a abordagem do espaço de Fock em $j_0 = N/2$ (círculos vermelhos) e $j_0 = 10$ (círculos pretos). Os resultados das simulações numéricas MC estão expressos em linhas sólidas nas respectivas cores. As linhas tracejadas representam o comportamento via decaimento exponencial $S(t) \sim e^{-\lambda t}$, que ocorre quando ambas as bordas são atingidas. Para ambos o melhor valor $\lambda = 0.0128$.



Fonte: O autor (2022).

Por último, representamos na Fig. 38 as evoluções temporais das probabilidades de absorção $P_0(t)$ (em azul) e $P_N(t)$ (em vermelho) em função do tempo das bordas absorventes $j = 0$ e $j = N$, respectivamente. Utilizamos um domínio de tamanho $N = 300$ e iniciamos no local $j_0 = 10$. Evidenciamos mais uma vez que $P_0(t) > P_N(t)$, devido o local de início ser próximo a borda esquerda. Os asteriscos representam os resultados das simulações numéricas MC que tendem a se manter muito próximo independente do tempo. Encontramos os valores de $P_0(t) = 0.770$ e $P_N(t) = 0.229$ já para $t = 120$, o que permanece até $t = 500$, mostrando que a saturação $P_0 + P_N = 1$ acontece rapidamente. Esse fato ocorre devido ao maior comprimento de passos para esse índice de Lévy.

Figura 38 – Probabilidades $P_0(t)$ e $P_N(t)$ de absorção das fronteiras $j = 0$ (em azul) e $j = N$ (em vermelho), respectivamente, em função do tempo t para $\alpha = 1/2$, no limite contínuo de tamanho $N = 300$ e iniciando perto da fronteira esquerda em $j_0 = 10$. Os resultados das simulações numéricas MC representados por asterisco e os resultados do espaço de Fock em círculos.



Fonte: O autor (2022).

4.5 Discussão dos resultados numéricos

Os gráficos apresentados nesse capítulo mostram uma divergência entre os resultados das simulações numéricas MC com a abordagem do espaço de Fock, para os valores do índice de Lévy que geram passos curtos ($\alpha = 1.99$). Mostramos que essa divergência vai diminuindo conforme diminuimos o valor de α (ou aumentamos o comprimento dos passos). Isso acontece devido a proximidade do local de início (j_0) com os limites absorventes $j = 0$ e $j = N$. Conforme afastamos o local de início das barreiras absorventes e diminuimos o valor de α , essa divergência tende a diminuir mais.

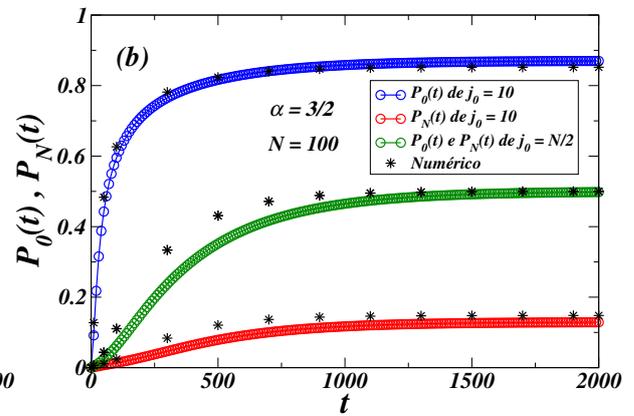
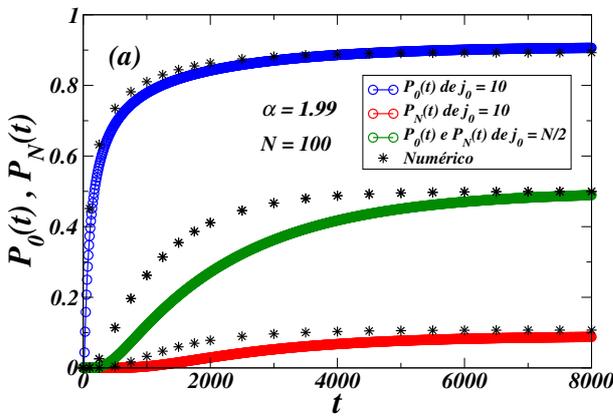
Mostramos nas Figs. 39 as evoluções temporais das probabilidades de absorção $P_0(t)$ e $P_N(t)$ em função do tempo das bordas absorventes $j = 0$ e $j = N$, respectivamente. Os resultados para a abordagem do espaço de Fock estão representados em círculos para $j_0 = 10$ com $P_0(t)$ em azul e $P_N(t)$ em vermelho e $j_0 = N/2$ com tanto $P_0(t)$ e $P_N(t)$ em verde. Os asteriscos são os resultados via simulação numérica MC. Na figura (a) usamos $\alpha = 1.99$ em um domínio finito de tamanho $N = 100$, em (b) usamos $\alpha = 3/2$ com um domínio de mesmo tamanho $N = 100$, na figura (c) temos $\alpha = 1$ em um espaço

limitado de $N = 300$ e em (d) usamos $\alpha = 1/2$ com um domínio de mesmo tamanho $N = 300$.

Figura 39 – Probabilidades $P_0(t)$ e $P_N(t)$ de absorção em função do tempo t , iniciando no local $j_0 = 10$ para as fronteiras $j = 0$ (em azul) e $j = N$ (em vermelho), respectivamente, e iniciando no meio do intervalo em $j_0 = N/2$ (em verde), para ambas as fronteiras absorventes. Os resultados da abordagem do espaço de Fock estão representados em círculos e os resultados das simulações numéricas MC em asterisco para os valores de $\alpha = 1.99$ (a), $\alpha = 3/2$ (b), $\alpha = 1$ (c) e $\alpha = 1/2$ (d).

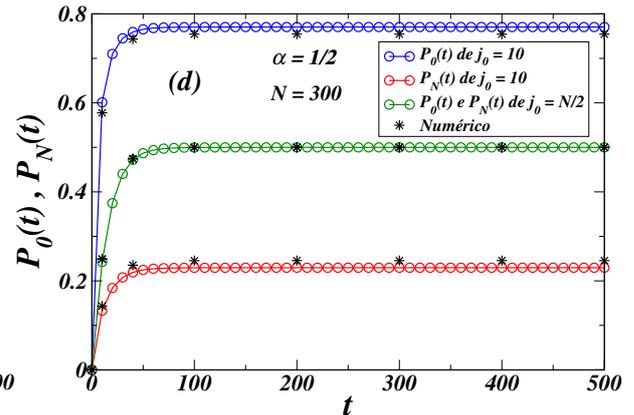
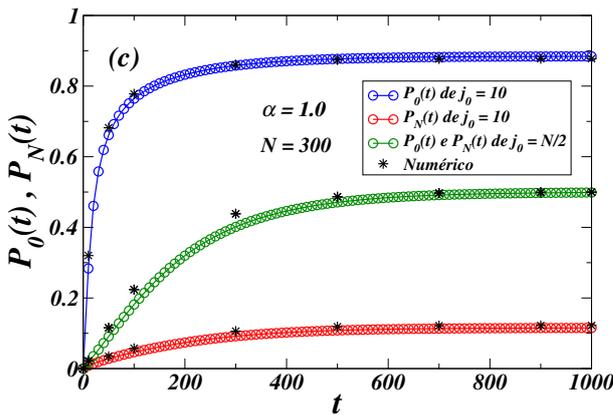
(a) para $\alpha = 1.99$ com $N = 100$.

(b) para $\alpha = 3/2$ com $N = 100$.



(c) para $\alpha = 1$ com $N = 300$.

(d) para $\alpha = 1/2$ com $N = 300$.



Fonte: O autor (2022).

Podemos perceber nas figuras acima que, quando começamos no local $j_0 = 10$, os resultados das simulações numéricas MC não se ajustam perfeitamente com os da abordagem do espaço de Fock para todos os valores de α . Porém, notamos que a melhor aproximação se dá para o valor de $\alpha = 1$, Figs. 35 e 39(c). Quando começamos do meio do intervalo, ou seja, $j_0 = N/2$, para tempos pequenos a concordância entre os

resultados vai melhorando conforme diminuimos α (ou aumentamos o comprimento de passos), tendo um ótimo ajuste para $\alpha = 1/2$. Já para tempos grandes, com $j_0 = N/2$, percebemos em todos os casos uma excelente concordância entre os resultados, logo podemos generalizar a convergência entre as simulações numéricas MC e a abordagem do espaço de Fock, fazendo o limite do tempo t tendendo ao infinito. Como veremos no próximo capítulo.

Na tabela a seguir, mostramos os valores de $P_0(t)$ e $P_N(t)$ para os índices α de Lévy usados anteriormente, iniciando nos locais $j_0 = 10$ e $j_0 = N/2$ nos tempos finais de cada intervalo. Notamos que a saturação ($P_0 + P_N = 1$) para esses valores de tempo já é alcançado para cada α com seus respectivos tempos.

Tabela 4 – Valores de $P_0(t)$ e $P_N(t)$ para cada valor de α , iniciando nos locais $j_0 = 10$ e $j_0 = N/2$ para os instantes finais.

α	Domínio (N)	Tempo (t)	$P_0(t)/P_N(t)$ de $j_0 = 10$	$P_0(t)/P_N(t)$ de $j_0 = N/2$
1.99	100	8000	0.906/0.087	0.489/0.489
3/2	100	2000	0.869/0.128	0.498/0.498
1.0	300	1000	0.884/0.115	0.498/0.498
1/2	300	500	0.770/0.229	0.500/0.500

Fonte: O autor (2022).

5 TEMPO MÉDIO DE PRIMEIRA PASSAGEM E PROBABILIDADES ASSINTÓTICAS DE ABSORÇÃO

O tempo médio de primeira passagem (MFPT) é geralmente definido como o tempo médio necessário para que uma partícula aleatória com uma certa dinâmica estocástica alcance um determinado local, ou uma coleção de locais, pela primeira vez ao longo de seu caminho [35, 36, 37]. As primeiras abordagens dos processos de tempo de primeira passagem (FPT) vieram com Schrödinger [83] e von Smoluchowski [84], que consideravam uma partícula livre com difusão da dinâmica browniana em um meio de alta viscosidade. Desde então, o interesse neste tema aumentou consideravelmente, principalmente nas últimas décadas, incluindo estudos sobre processos markovianos e não markovianos em diversas áreas do conhecimento como física e astrofísica [38, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102], matemática e estatística [103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110], biologia e neurociência [111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119], química [120, 121, 122, 123, 124, 125, 126] e finanças [127, 128, 129]. Um ramo relevante dos processos de FPT, com aplicações na física estatística de busca aleatória e teoria de forrageamento animal [19, 20, 21, 22, 130], é o MFPT de uma partícula de Lévy, ou seja, um caminhante de Lévy que percorre passos da família de distribuições α -estáveis de Lévy [25].

No Cap. 1, diferenciamos o voador e o caminhante de Lévy. Enquanto o primeiro é markoviano com duração do salto independente do comprimento, o segundo possui velocidade finita gerando processos não markovianos. Como consequência, o MFPT de um voador de Lévy é proporcional ao seu número de passos, enquanto o MFPT de um caminhante de Lévy é proporcional ao comprimento total do percurso até chegar a uma borda. Isso faz com que o cálculo do MFPT para o voador seja consideravelmente mais simples do que o do caminhante [87, 131]. Neste trabalho nos preocupamos em obter o MFPT $\langle t \rangle$ de um voador de Lévy, ou de forma equivalente, o número médio de passos $\langle n \rangle$ de um caminhante de Lévy, até a absorção por um dos limites.

Uma série de técnicas de física estatística têm sido empregadas para estudar ps processos de FPT com dinâmica de Lévy em diversos contextos. Alguns incluem soluções de difusão espacial fracionária e equações mestras com distribuição de comprimento de passos de Lévy [92], outros uma versão discretizada do operador Laplaciano fracionário [80] e técnicas de simulação numérica [79]. Nos estendemos a chamada abordagem do espaço de Fock (FS) [42, 43] para obter as probabilidades de MFPT e absorção de um voador de Lévy em um intervalo finito discreto com limites absorventes, apresentados nas seções 5.1 e 5.3. Investigamos o limite do espaço contínuo, ilustrado na seção 5.2, para comparar nossos resultados com a expressão exata. Para comparação, também fornecemos os resultados de simulações de Monte Carlo (MC) de um voador de Lévy

nas mesmas condições do cálculo do espaço de Fock. Nas simulações MC, consideramos que os comprimentos dos passos ℓ do voador são traçados a partir da distribuição simétrica de Lévy [25]

$$p_\alpha(\ell) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-b|k|^\alpha} [1 - \beta \text{sign}(k)\Phi(k)]^{-ik(\ell-\mu)}, \quad (5.1)$$

com $b = 1$ e $\beta = \mu = 0$, usando o algoritmo de McCulloch [132]. As médias nas simulações MC foram obtidas em 5×10^4 execuções.

5.1 Voador de Lévy em um espaço discreto limitado

Começamos aplicando a abordagem do espaço de Fock para calcular o MFPT $\langle t \rangle$ de um voador de Lévy (ou, como já mencionado, o número médio de passos $\langle n \rangle$ de um caminhante de Lévy) confinado em um domínio finito discreto de comprimento N até a absorção por qualquer uma das bordas $j = 0$ e $j = N$.

Foi definido no Cap. 3 a probabilidade de sobrevivência, ou seja, a probabilidade do voador permanecer no domínio sem ser absorvido até o tempo t . No espaço discreto com i locais disponíveis ($i = 0, 1, 2, \dots, N$), somando as probabilidades $\langle i|U(t)|i_0 \rangle$ de encontrar o voador em um local não absorvente ($i \neq 0$ e $i \neq N$) no tempo t , tendo iniciado no local i_0 , $S(t)$ fica

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N-1} \langle i|U(t)|i_0 \rangle = 1 - P_0(t) - P_N(t), \quad (5.2)$$

onde usamos a condição de normalização $\sum_{i=0}^N \langle i|U(t)|i_0 \rangle = 1$ com as probabilidades do voador ser absorvido pelas bordas $j = 0$ e $j = N$ até o tempo t , definidas na forma

$$P_0(t) = \langle 0|U(t)|i_0 \rangle \quad \text{e} \quad P_N(t) = \langle N|U(t)|i_0 \rangle. \quad (5.3)$$

Com isso, podemos escrever o MFPT para o voador de Lévy da forma [35, 36, 37]

$$\langle t \rangle = - \int_0^\infty t \frac{\partial S}{\partial t} dt, \quad (5.4)$$

com $\partial S / \partial t < 0$, uma vez que a probabilidade de sobrevivência diminui com o tempo, $S(0) = 1$ (o voador está ativo para o primeiro salto) e $S(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ (o voador sempre acaba sendo absorvido por uma das bordas). Agora, se $\{|\lambda_k\rangle\}$ representa o conjunto $N + 1$ autovetores de H com autovalores $\{\lambda_k\}$, então a expressão $|i_0\rangle = \sum_{k=1}^{N+1} b_k |\lambda_k\rangle$ junto com as Eqs. (5.3) e (5.4) torna o MFPT,

$$\langle t \rangle = - \sum_{k=2}^N \frac{b_k}{\lambda_k} (\langle 0|\lambda_k\rangle + \langle N|\lambda_k\rangle), \quad (5.5)$$

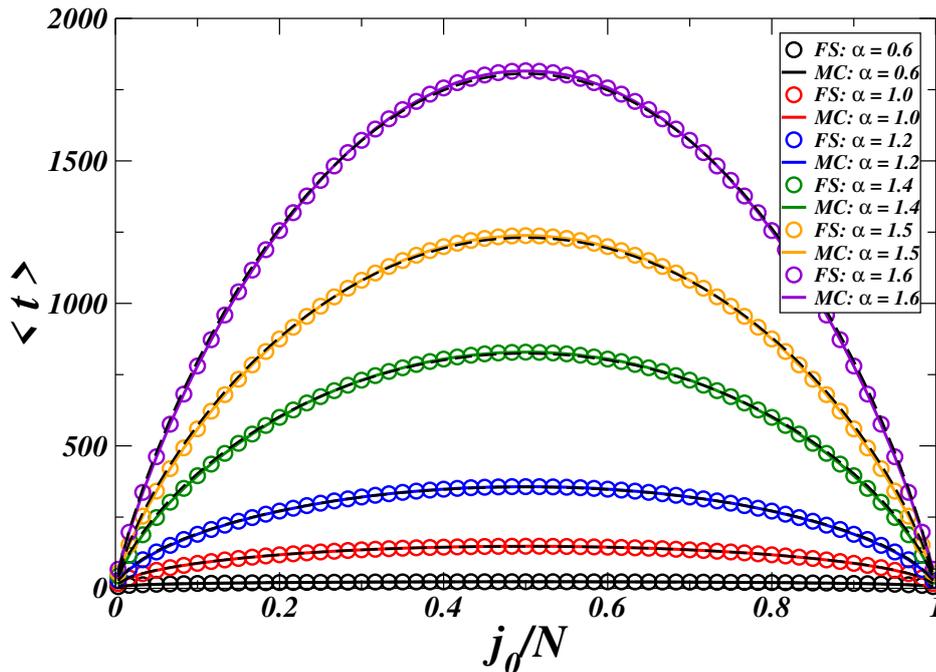
onde atribuímos os índices $k = 1$ e $k = N + 1$ aos dois autovalores nulos de H associados aos autovetores $|\lambda_{k=1}\rangle = |0\rangle$ e $|\lambda_{k=N+1}\rangle = |N\rangle$, respectivamente.

Na Fig. 40, mostramos o MFPT $\langle t \rangle$ em função da posição normalizada j_0/N para um grupo de valores do índice α de Lévy, com $N = 300$ e $\Delta x = 1$. Verificamos a simetria $j_0 \leftrightarrow N - j_0$ do espaço limitado. Além disso, como esperado, o MFPT máximo para qualquer valor de α é alcançado quando o voador de Lévy começa no meio do intervalo, em $j_0 = N/2$. Notamos uma excelente concordância em todos os valores de α entre os resultados do FS e a simulação MC, representados respectivamente na Fig. 40 por círculos coloridos e linhas sólidas coloridas. Além disso, as linhas tracejadas pretas (coincidindo quase perfeitamente com as linhas sólidas coloridas) representam ajustes dos resultados do FS para a expressão

$$\langle t \rangle = A_\alpha [j_0(N - j_0)]^{\alpha/2}, \quad (5.6)$$

que mostra a dependência de $\langle t \rangle$ em j_0 e N semelhante para o voador de Lévy no espaço limitado contínuo (mostrado na próxima seção). A concordância mostrada na Fig. 40 sugere que a expressão supracitada também pode ser aplicada para o espaço discreto. Para esse problema, usando $\Delta x = 1$, os valores da amplitude A_α na Eq. (5.6) são consideravelmente próximos do prefator $1/\Gamma(\alpha + 1)$ do resultado exato com fator de escala $b = 1$ no espaço contínuo, onde $\Gamma(x)$ denota a função gama (ver Eq. (5.7) na próxima seção). Como exemplos, para $\alpha = 1$ obtemos $A_\alpha = 0.982$ em comparação com $1/\Gamma(\alpha + 1) = 1$, enquanto que para $\alpha = 0.6$ os valores ficam $A_\alpha = 1.147$ e $1/\Gamma(\alpha + 1) = 1.119$. Com isso, descobrimos que, para qualquer valor de α , $A_\alpha \rightarrow 1/\Gamma(\alpha + 1)$ no limite do espaço contínuo $\Delta x/N \rightarrow 0$.

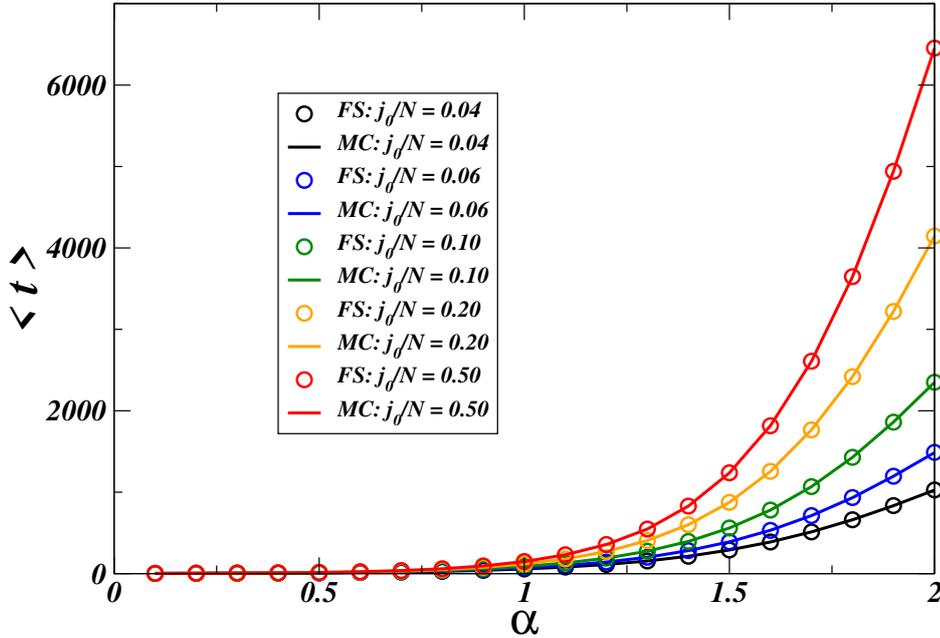
Figura 40 – MFPT $\langle t \rangle$ de um voador de Lévy em um espaço finito discreto de comprimento $N = 300$ e $\Delta x = 1$ com bordas absorventes em função da posição normalizada j_0/N , para diversos valores do índice α de Lévy. Os círculos coloridos representam os resultados da abordagem FS, enquanto as linhas sólidas coloridas os dados da simulação MC. As linhas tracejadas pretas indicam o ajuste dos resultados do FS à Eq. (5.6). Notamos a simetria do espaço $j_0 \leftrightarrow N - j_0$. Além disso, observamos que o MFPT é maior quando começamos próximos do meio do intervalo e para valores de α mais próximos do limite gaussiano $\alpha = 2$.



Fonte: O autor (2022).

Mostramos na Fig. 41 o MFPT $\langle t \rangle$ em função de α para valores selecionados do local de partida j_0/N , com $N = 300$ e $\Delta x = 1$. Devido a simetria $j_0 \leftrightarrow N - j_0$, não exibimos na figura dados no intervalo $1/2 < j_0/N < 1$. Como já esperando, conforme nos aproximamos do regime gaussiano $\alpha = 2$, que possuem menores comprimentos de salto, $\langle t \rangle$ aumenta. De forma similar à Fig. 40, os resultados do FS (em círculos coloridos) e as simulações numéricas MC (linhas coloridas) concordam bastante, evidenciando que a abordagem do espaço de Fock é uma ferramenta de grande utilidade para descrever os processos do voador de Lévy em espaços discretos finitos.

Figura 41 – MFPT $\langle t \rangle$ de um voador de Lévy em um espaço finito discreto de comprimento $N = 300$ e $\Delta x = 1$ com bordas absorventes em função do índice α de Lévy, para diversos valores da posição inicial normalizada j_0/N . Os círculos coloridos representam os resultados da abordagem FS, enquanto as linhas sólidas coloridas os dados da simulação MC. Notamos que, para cada posição inicial do voador de Lévy, quando $\alpha \rightarrow 0$ temos o mínimo valor de MFPT. Conforme nos aproximamos do regime gaussiano $\alpha = 2$, $\langle t \rangle$ torna-se progressivamente maior.



Fonte: O autor (2022).

5.2 Voador de Lévy no limite do espaço contínuo finito

Partimos agora para o problema do voador de Lévy em um espaço contínuo finito, onde o MFPT possui uma expressão exata na forma [87, 88, 104]

$$\langle t \rangle = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[\frac{j_0(N - j_0)}{b^2} \right]^{\alpha/2}. \quad (5.7)$$

Em particular, observamos como resultado da Eq. (5.7) [35, 36, 37] $\langle t \rangle = j_0(N - j_0)/\sigma^2$, para uma partícula aleatória com $\alpha = 2$ e distribuição gaussiana de comprimento de passos $p(\ell)$ com variância $\sigma^2 = 2b^2$. Além disso, identificamos que $\langle t \rangle \rightarrow 1$ quando $\alpha \rightarrow 0$, indicando que ambas as bordas limites absorventes são alcançadas em apenas uma unidade de tempo do voador (ou em apenas uma etapa do caminhante) quando o sistema tende ao limite máximo de comprimento de salto. Este comportamento também é encontrado em simulação numérica de uma partícula de Lévy em espaço contínuo usando a equação estocástica de Langevin com intervalos discretos de tempo [79, 133].

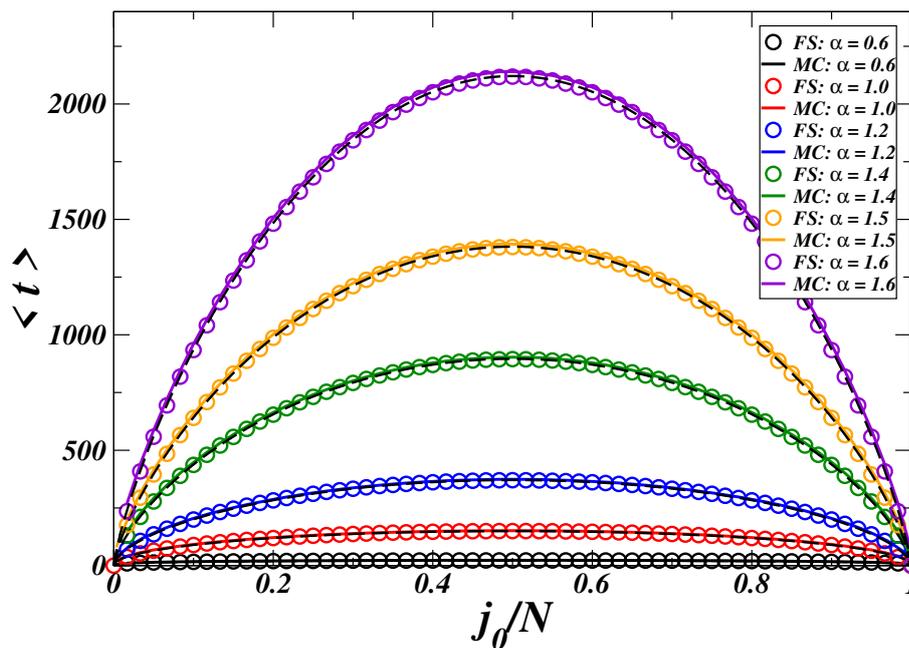
Uma alternativa para obter uma convergência um pouco mais rápida para o resultado da Eq. (5.7) é a combinação da abordagem FS com a aproximação de espaço contínuo para as probabilidades de transição [80], $P_{ji} = -A(|j - i|)/A(0)$, sendo

$$A(n) = -\frac{\Gamma(n - \alpha/2)\Gamma(\alpha + 1)}{\pi\Gamma(n + \alpha/2 + 1)} \sin(\pi\alpha/2), \quad (5.8)$$

para $1 \leq i, j \leq N - 1$ e P_{ji} com $j = 0$ ou $j = N$ calculado pela soma da Eq. (5.8) sobre os comprimentos de salto que excedem a distância das bordas limites.

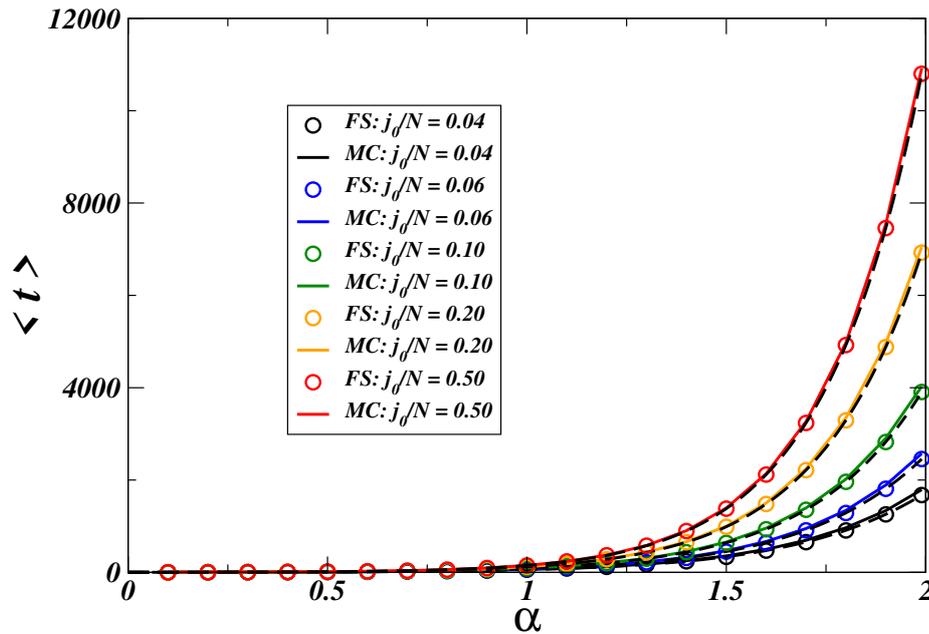
As Figs. 42 e 43 mostram os resultados para MFPT em função de j_0/N e α , respectivamente, para o limite do espaço contínuo com a abordagem do espaço de Fock, para $N = 300$ e $\Delta x = 1$, que são análogos às Figs. 40 e 41 do espaço discreto, sendo que usamos a Eq. (5.8) para calcular as probabilidades de transição P_{ji} . Notamos uma boa concordância em ambas as figuras entre a abordagem FS (círculos coloridos) e os resultados via simulação de MC (linhas sólidas coloridas). Além disso, observamos também que as linhas tracejadas pretas nas Figs. 42 e 43, que representam a Eq. (5.7) sem nenhum ajuste, combinam quase perfeitamente com os resultados do método FS.

Figura 42 – MFPT $\langle t \rangle$ de um voador de Lévy no limite do espaço contínuo de comprimento $N = 300$ com bordas absorventes em função da posição normalizada j_0/N , para diversos valores do índice α de Lévy. Os círculos coloridos representam os resultados da abordagem FS, enquanto as linhas sólidas coloridas os dados da simulação MC. As linhas tracejadas pretas indicam o resultado exato de um voador de Lévy em um espaço contínuo, Eq. (5.7), sem nenhum ajuste realizado. Notamos a mesma simetria e comportamento da Fig. 40.



Fonte: O autor (2022).

Figura 43 – MFPT $\langle t \rangle$ de um voador de Lévy no limite do espaço contínuo de comprimento $N = 300$ com bordas absorventes em função do índice α de Lévy, para diversos valores da posição inicial normalizada j_0/N . Os círculos coloridos representam os resultados da abordagem FS, enquanto as linhas sólidas coloridas os dados da simulação MC. As linhas tracejadas pretas indicam o resultado exato de um voador de Lévy em um espaço contínuo, Eq. (5.7), sem nenhum ajuste realizado. Notamos o mesmo comportamento presente na Fig. 41.



Fonte: O autor (2022).

5.3 Diferença relativa entre os espaços discreto e contínuo

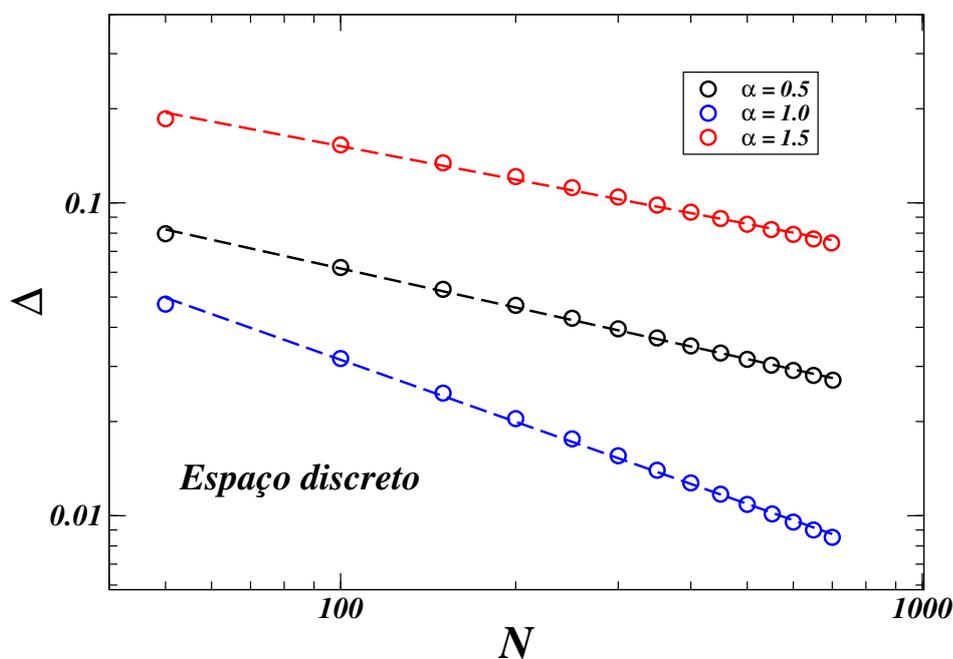
A boa descrição da abordagem do espaço de Fock para o MFPT do voador de Lévy confinado tanto no espaço discreto quanto no limite do espaço contínuo nos motivou a investigar a relação entre esses domínios. Para fazer essa comparação, definimos a diferença relativa

$$\Delta = \frac{|\langle t \rangle_{\text{FS}} - \langle t \rangle_{\text{cont}}|}{\langle t \rangle_{\text{cont}}}, \quad (5.9)$$

onde $\langle t \rangle_{\text{FS}}$ é o MFPT obtido através do método FS no espaço discreto e $\langle t \rangle_{\text{cont}}$ é dada pela Eq. (5.7). Esperamos que os resultados para o espaço discreto tendam para os de espaço contínuo quando usamos $\Delta x/N \rightarrow 0$ na Eq. (3.4) de P_{ji} . Conseguimos nos aproximar desse limite definindo $\Delta x = 1$ e aumentando N . Além disso, uma vez que Δ depende de N , α e principalmente j_0 , consideramos $j_0 = N/2$ nos cálculos da Eq. (5.9) levando a uma máxima diferença relativa Δ para N e α fixos.

Na Fig. 44, mostramos a diferença relativa Δ em função do tamanho N para três diferentes valores do índice α de Lévy no espaço discreto. Observamos que Δ decai com N na forma de uma lei de potência dependente de α , $\Delta \sim N^{-\gamma}$, com $0.35 \lesssim \gamma \lesssim 0.64$ para os valores de α mostrados. Como exemplo, para $\alpha = 1$ notamos que Δ diminui de cerca de 0.05 para 0.01 quando aumentamos N de 50 para 700. Por outro lado, para $\alpha = 1.5$ a diminuição é de 0.11 para 0.08 nessa mesma faixa de N .

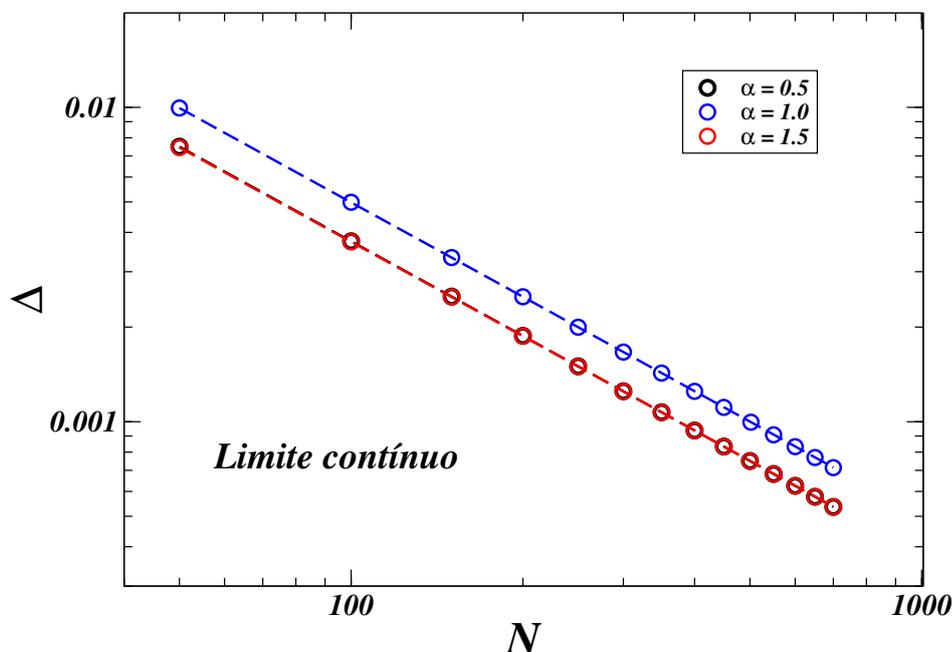
Figura 44 – Diferença relativa Δ , Eq. (5.9), do método FS no espaço discreto para a expressão exata, Eq. (5.7), do espaço contínuo em função do comprimento finito N com $\Delta x = 1$ e limites absorventes, para alguns valores do índice α de Lévy. O voador de Lévy começa no ponto central do domínio, $j_0 = N/2$, com probabilidades de transição dadas pela Eq. (3.4). As linhas tracejadas são ajustadas à forma do decaimento da lei de potência $\Delta \sim N^{-\gamma}$, com $\gamma = 0.35, 0.41$ e 0.64 para $\alpha = 1.5, 0.5$ e 1.0 , respectivamente.



Fonte: O autor (2022).

A Fig. 45 é o correspondente no limite do espaço contínuo da Fig. 44 no espaço discreto, mas com P_{ji} obtido da Eq. (5.8), conforme já mencionado. Observamos a mesma forma de decaimento via lei de potência. Para $\alpha = 1.5$ (e para $\alpha = 0.5$) a diferença relativa Δ já é muito baixa, 0.008 para $N = 50$, diminuindo para cerca de 0.0005 para $N = 700$. Este achado é consistente com a concordância fina mostrada nas Figs. 42 e 43 entre os resultados da abordagem FS e a Eq. (5.7). Contudo, apesar da boa concordância, devemos expressar o fato de que enquanto a Eq. (3.4) para as probabilidades de transição P_{ji} é bastante geral, portanto passível de ser aplicada a qualquer distribuição $p(\ell)$ de comprimento de passo, a Eq. (5.8) é específica para saltos de Lévy.

Figura 45 – Diferença relativa Δ , Eq. (5.9), do método FS no limite do espaço contínuo para a expressão exata, Eq. (5.7), do espaço contínuo em função do comprimento finito N com limites absorventes, para alguns valores do índice α de Lévy. O voador de Lévy começa no ponto central do domínio, $j_0 = N/2$, com probabilidades de transição calculadas a partir da Eq. (5.8). As linhas tracejadas são ajustadas à forma do decaimento da lei de potência $\Delta \sim N^{-\gamma}$, com $\gamma \approx 1$ para todo α .



Fonte: O autor (2022).

Comparando os desempenhos das técnicas FS e MC, é evidente que ambos os códigos são executados em um tempo que depende basicamente do comprimento do domínio N , do local inicial j_0 e do índice de estabilidade α de Lévy. Como exemplo, para $\alpha = 1$, $N = 100$ e $j_0 = N/2$, o código FS é executado em menos de 10s, enquanto as simulações MC, com esses valores de parâmetros, com média de 5×10^4 execuções, levam 3 minutos para terminar, ambas utilizando um processador Intel Core i7. Por outro lado, para $\alpha = 3/2$, $N = 100$ e $j_0 = N/2$, o método FS leva cerca de 6 minutos para executar, já as simulações MC precisam de quase 19 minutos. Em geral, observamos que a técnica FS tem um desempenho mais eficiente do que as simulações MC para chegar a resultados semelhantes.

5.4 Probabilidades assintóticas de absorção

Por fim, voltamos às probabilidades de absorção das fronteiras absorventes. Com o caminhante de Lévy dando saltos dentro do intervalo finito $0 < j < N$, tendo começado em j_0 , após um intervalo de tempo (um número de passos) um dos limites de absorção $j = 0$ ou $j = N$ será inevitavelmente alcançado. Denotamos por $P_0 \equiv P_0(t \rightarrow \infty)$ e $P_N \equiv$

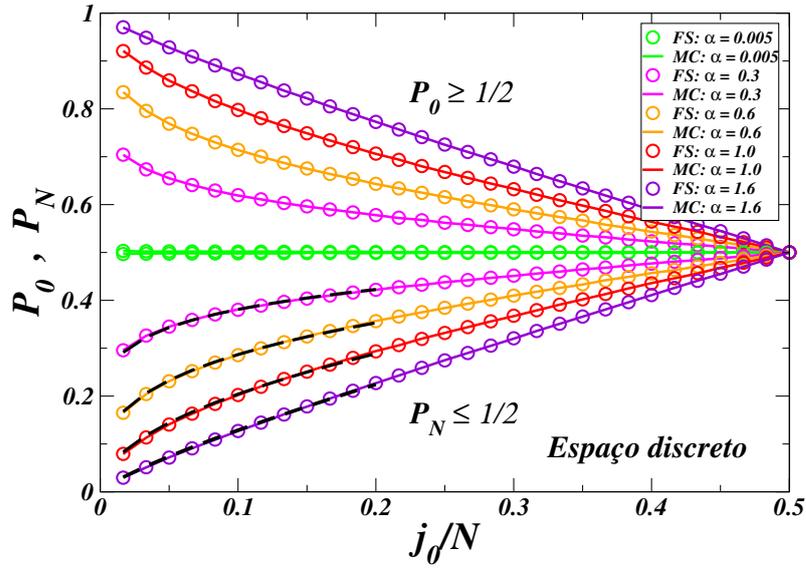
$P_N(t \rightarrow \infty)$ as respectivas probabilidades assintóticas de serem absorvidos a qualquer momento (até $t \rightarrow \infty$) pelo sítio limite em $j = 0$ e $j = N$. Como dito anteriormente, uma vez que o passageiro (caminhante) sempre acabará absorvido por uma das bordas, então $P_0 + P_N = 1$. Podemos interpretar o contexto de atingir os limites do domínio como sair do intervalo finito, então P_0 e P_N também podem ser chamados de probabilidades de escape ou transmissão [87, 88, 134, 135]. Nos trabalhos [78, 136, 137], P_N foi calculada como uma função da razão j_0/N e expresso em termos da função beta incompleta regularizada $I_z(a,b)$, com $z = j_0/N$ e um único parâmetro $a = b = \alpha/2$,

$$P_N = I_{j_0/N}(\alpha/2, \alpha/2) = \frac{\Gamma(\alpha)}{[\Gamma(\alpha/2)]^2} \int_0^{j_0/N} [u(1-u)]^{(\alpha/2-1)} du. \quad (5.10)$$

Notamos que a ideia de dividir a probabilidade de absorção entre P_0 e P_N também foi usado em alguns problemas [138]. Até onde sabemos, um estudo sistemático e abrangente de tais probabilidades de absorção em relação ao índice α de Lévy e a posição inicial j_0 de um voador ou caminhante de Lévy em um domínio finito com bordas absorventes, não foi relatado na literatura.

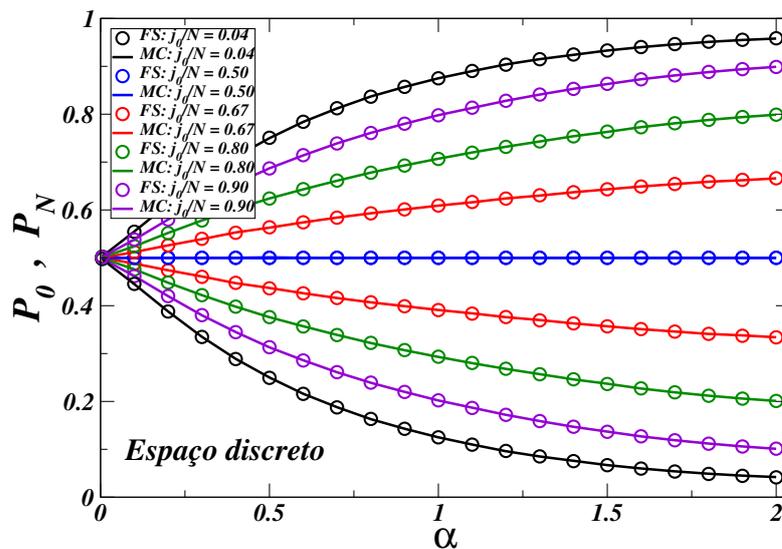
Mostramos as probabilidades assintóticas de absorção P_0 e P_N das bordas absorventes $j = 0$ e $j = N$, respectivamente, nas Figs. 46 e 47 para um domínio discreto e nas Figs. 48 e 49 para o limite do espaço contínuo, ambas com o mesmo tamanho finito $N = 300$. Para isso, tomamos o limite $t \rightarrow \infty$ na Eq. (5.3). Nas Figs. 46 e 48, fizemos essas probabilidades em função da posição inicial normalizada j_0/N para diversos valores do índice α , consideramos $0 < j_0 \leq N/2$ de modo que P_0 (P_N) corresponde à probabilidade de ser absorvido pela borda mais próxima (mais distante), implicando $P_0 \geq 1/2$ e $P_N \leq 1/2$. Já nas Figs. 47 e 49, fizemos em função do índice α de Lévy para diversos valores de j_0/N e notamos que $P_0 = P_N = 1/2$ quando o voador começa simetricamente do meio do domínio, $j_0 = N/2$, como já esperado. Evidenciamos também que P_0 (P_N) é maior (menor) quando o voador começa perto da borda mais próxima com j_0/N pequeno, extraindo ℓ de uma distribuição $p(\ell)$ com um grande α no limite de curto comprimento de salto. Podemos perceber que em todas as figuras abaixo, quando $\alpha \rightarrow 0$ há chances iguais de encontrar o voador em qualquer uma das bordas, conforme aumentamos o índice α de Lévy em direção ao limite gaussiano $\alpha = 2$ a borda mais próxima é alcançada com mais frequência. Em todos os casos, observamos uma boa concordância entre os resultados FS (círculos coloridos) e as simulações MC (linhas sólidas coloridas).

Figura 46 – Probabilidades assintóticas de absorção P_0 e P_N pelas bordas $j = 0$ e $j = N$, respectivamente, do voador de Lévy no espaço discreto de comprimento $N = 300$ e $\Delta x = 1$ em função da posição inicial normalizada j_0/N , para vários valores do índice α de Lévy. Os círculos coloridos indicam os resultados da abordagem FS e as linhas sólidas coloridas os dados da simulação MC. Neste gráfico $P_0 \geq 1/2$ e $P_N \leq 1/2$, com $P_0 + P_N = 1$. As linhas tracejadas pretas representam ajustes dos resultados FS ao comportamento assintótico $j_0 \ll N$ de P_N no espaço contínuo, Eq. (5.11).



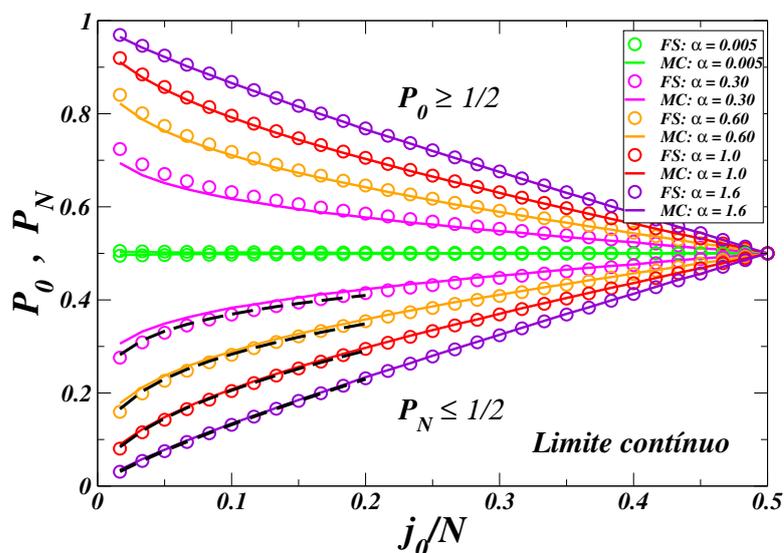
Fonte: O autor (2022).

Figura 47 – Probabilidades assintóticas de absorção P_0 e P_N pelas bordas $j = 0$ e $j = N$, respectivamente, do voador de Lévy no espaço discreto de comprimento $N = 300$ e $\Delta x = 1$ em função do índice α de Lévy, para vários valores da posição inicial normalizada j_0/N . Os círculos coloridos indicam os resultados da abordagem FS e as linhas sólidas coloridas os dados da simulação MC.



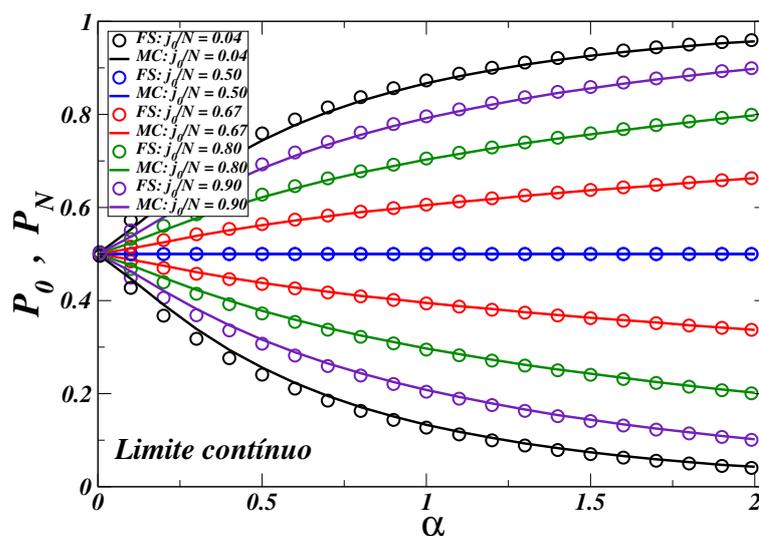
Fonte: O autor (2022).

Figura 48 – Probabilidades assintóticas de absorção P_0 e P_N pelas bordas $j = 0$ e $j = N$, respectivamente, do voador de Lévy no limite do espaço contínuo de comprimento $N = 300$ em função da posição inicial normalizada j_0/N , para vários valores do índice α de Lévy. Os círculos coloridos indicam os resultados da abordagem FS e as linhas sólidas coloridas os dados da simulação MC. Neste gráfico $P_0 \geq 1/2$ e $P_N \leq 1/2$, com $P_0 + P_N = 1$. As linhas tracejadas pretas representam ajustes dos resultados FS ao comportamento assintótico $j_0 \ll N$ de P_N no espaço contínuo, Eq. (5.11).



Fonte: O autor (2022).

Figura 49 – Probabilidades assintóticas de absorção P_0 e P_N pelas bordas $j = 0$ e $j = N$, respectivamente, do voador de Lévy no limite do espaço contínuo de comprimento $N = 300$ em função do índice α de Lévy, para vários valores da posição inicial normalizada j_0/N . Os círculos coloridos indicam os resultados da abordagem FS e as linhas sólidas coloridas os dados da simulação MC.



Fonte: O autor (2022).

Além disso, ilustramos nas Figs. 46 e 48 linhas tracejadas pretas, que são bons ajustes dos resultados FS para a previsão teórica do comportamento assintótico da probabilidade P_N do voador ou caminhante de Lévy ser absorvido pela borda distante $j = N$ [78, 88, 136, 137],

$$P_N \sim \left(\frac{j_0}{N}\right)^{\alpha/2}, \quad j_0 \ll N/2. \quad (5.11)$$

Nessas mesmas Figs. 46 e 48, limitamos os ajustes à região $j_0/N \leq 0.2$. Em particular, notamos que $P_N \rightarrow 1/2$ (e então $P_0 \rightarrow 1/2$) quando $\alpha \rightarrow 0$, concordando com o fato de que no limite de comprimento grande de salto cada borda é alcançada com a mesma probabilidade no primeiro pulo. Além disso, também é interessante observar a dependência linear $P_N \sim j_0/N$ para $j_0 \ll N/2$ no regime gaussiano $\alpha = 2$ na Eq. (5.11).

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesta tese aplicamos o formalismo do espaço de Fock para estudar os voadores de Lévy unidimensionais em espaços finitos com limites absorventes. As distribuições α -estáveis de Lévy tem diversas aplicações em várias áreas do conhecimento, uma delas é o problema de busca alimentícia de animais na natureza. Neste contexto, os animais predadores fazem o papel da partícula (voador) em busca de comida e as bordas absorventes o local onde foi encontrado algum alimento. Foram estudados dois casos importantes: (i) utilizando um domínio finito discreto, onde cada local determinado (sítio) representa onde o animal (partícula) possa ter passado, (ii) o limite do espaço contínuo finito, onde não existe um local pré definido onde o animal possa ter ido. A abordagem do limite do espaço contínuo é uma forma de melhorar a representação dos passos curtos e, com isso, as probabilidades de absorção e o MFPT ($\langle t \rangle$) junto das barreiras.

O formalismo do espaço de Fock se mostrou uma ferramenta matemática de grande importância para este estudo, uma vez que as distribuições de Lévy, guiadas pelo TLC generalizado, possuem poucas formas fechadas quando estamos trabalhando no regime superdifusivo. Com esse método, conseguimos obter excelentes resultados de quantidades estatísticas relevantes para esse tipo de problema. Como exemplos, conseguimos obter as taxas de sobrevivência e mostrar seus diferentes comportamentos dinâmicos, como seu decaimento tipo lei de potência (de acordo com o teorema de Sparre-Andersen para um domínio semi-infinito) quando apenas uma das bordas é efetivamente alcançada e o decaimento exponencial para longos tempos, para quando ambas as bordas são atingidas. Tivemos uma boa concordância com os resultados obtidos em outros trabalhos envolvendo métodos diferentes, como a do operador diferencial fracionário discretizado de Riesz e da decomposição de Wiener-Hopf. Conseguimos calcular também as probabilidades de absorção das fronteiras em função do tempo e mostrar seu comportamento assintótico para o limite de t indo para o infinito. Para o domínio finito discreto, encontramos uma excelente concordância entre os resultados da abordagem do espaço de Fock e das simulações numéricas de Monte Carlos. Já pra o limite do espaço contínuo, mostramos que os resultados do espaço de Fock e das simulações numéricas MC não possuem um bom ajuste quando os comprimentos dos passos são curtos (grande valores de α) e para pequenos intervalos de tempo. Contudo, conforme aumentamos o comprimento dos passos (diminuímos α) e para grandes intervalos de tempo, os resultados vão convergindo para uma mesma curva.

Empregamos também esse formalismo para o cálculo do tempo médio de primeira passagem (MFPT) em função dos parâmetros relevantes do sistema. Os primeiros estudos sobre tempo de primeira passagem (FPT) vieram com Schrödinger e Smolu-

chowski e o interesse sobre esse tema tem aumentado consideravelmente nas últimas décadas, sendo aplicado em diversos contextos relevantes. Nossa análise considerou graus distintos de difusividade, definidos pelo índice de estabilidade α de Lévy e o ponto de partida do voador. Os resultados do espaço discreto finito e do limite do espaço contínuo concordam perfeitamente com as simulações de Monte Carlo e as previsões teóricas no espaço contínuo.

Observamos que o formalismo do espaço de Fock pode ser aplicado para diferentes partículas aleatórias com diferentes distribuições de comprimento de passos, para a difusão de um conjunto de partículas em domínios finitos e em outros contextos onde outros métodos podem encontrar dificuldades técnicas. Essa ferramenta nos possibilitou trabalhar com a estrutura da mecânica quântica em processos estocásticos e, embora ela não permita obter as trajetórias individuais do voador de Lévy, ela possibilita o cálculo de $P(x,t)$ e, com isso, obter todas as quantidades estatísticas relevantes de um dado sistema.

Como perspectivas futuras para a continuação deste trabalho, devido a grande abrangência deste formalismo e a sua eficácia, podemos aplica-lo em diversos estudos como nos processos de reação-difusão, com muitas partículas, átomos ou moléculas de vários tipos que se difundem e interagem entre si. Contudo, seria interessante dar continuidade ao trabalho sobre o voador de Lévy, para tentar obter: (i) a eficiência da busca, que está associada ao número de sítios alcançados (atingidos pelo voador) e a distância total percorrida; (ii) a recorrência, uma vez que já analisamos o tempo de primeira passagem; (iii) o estudo da produção de entropia, já que com bordas absorventes o sistema é irreversível; (iv) passeios aleatórios assimétricos, mudando o parâmetro β de simetria da distribuição de Lévy.

REFERÊNCIAS

- [1] ORWELL, G. 1984. 1. ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2009. ISBN 978-85-359-1484-9
- [2] REIF, F. *Fundamentals of statistical and thermal physics*. 1. ed. Boston: McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1965. (McGraw-Hill Series in Fundamentals of Physics). ISBN 0070518009,9780070518001.
- [3] GOODENOUGH, J.; MCGUIRE, B.; JAKOB, E. *Perspectives on Animal Behavior*. 3 ed. Wiley, 2009. ISBN 0470045175,9780470045176. Disponível em: <<http://libgen.rs/book/index.php?md5=588bca90cc32e58004e9d0d0dd6d7c81>>.
- [4] FICK, D. A. **Ueber diffusion**. *Annalen der Physik*, John Wiley and Sons v. 170, p. 59-86, 1855. ISSN 0003-3804,1521-3889. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/andp.18551700105>>.
- [5] PEARSON, K. **The Problem of the Random Walk**. *Nature*, v. 72, p. 294, July 1905. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/072294b0>>.
- [6] RAYLEIGH. **The Problem of the Random Walk**. *Nature*, v. 72, p. 318, Aug. 1905. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/072318a0>>.
- [7] EINSTEIN, A. **Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden füssigkeiten suspendierten teilchen**. *Annalen der Physik*. John Wiley and Sons, v. 322, p. 549-560, 1905. ISSN 0003-3804,1521-3889. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/andp.19053220806>>.
- [8] BROWN, R. **Xxvii. a brief account of microscopical observation made in the months of june and august 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies**. *Philosophical Magazine Series 2*, v. 4, p. 161-173, 1828. ISSN 1941-5850,1941-5869. Disponível em: <<http://doi.org/10.1080/14786442808674769>>.
- [9] ARAÚJO, H. de A. *Superdifusão em espaços finitos e derivadas fracionárias*. Tese de Doutorado, Ufpe, 2017.
- [10] MONTROLL, E. W.; WEST, B. J. *On an enriched collection of stochastic processes in: Fluctuation phenomena*. ed. New York: Elsevier, 1979. ISBN 978-0-444-85248-9. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/B978-0-444-85248-9.X5001-8>>.
- [11] WEISS, G. H. *Aspects and applications of the random walk*. ed. North-Holland, 1994. ISBN 0444816062-9780444816061.

-
- [12] SOUZA LIMA, T. A. G. B. *Estudos de eficiência em buscas aleatórias unidimensionais*. Dissertação de Mestrado, Ufpe, 2010.
- [13] ZABURDAEV, V.; DENISOV, S.; KLAFTER, J. **Lévy walks**. *Reviews of Modern Physics*, v. 87, p. 483-530, Jun. 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.87.483>>.
- [14] MANDELBROT, B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. ed. San Francisco, CA.: W. H. Freeman, 1982. ISBN 0716711869-9780716711865.
- [15] BARDOU, F. *Lévy Statistics and Laser Cooling: How Rare Events Bring Atoms to Rest*. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. ISBN 9780521808217.
- [16] RAPOSO, E. P.; GOMES, A. S. L. **Analytical solution for the Lévy-like steady-state distribution of intensities in random lasers**. *Physical Review A*, v. 91, p. 043827, Apr. 2015. ISSUE 4. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.043827>>.
- [17] LIMA, B. C.; GOMES, A. S. L.; PINCHEIRA, P. I. R.; MOURA, A. L.; GAGNÉ, M.; RAPOSO, E. P.; DE ARAÚJO, C. B.; KASHYAP, R. **Observation of Lévy statistics in one-dimensional erbium-based random fiber laser**. *Journal of the Optical Society of America B*, v. 34, p. 293-299, Feb. 2017. ISSUE 2. Disponível em: <<https://doi.org/10.1364/JOSAB.34.000293>>.
- [18] WOSNIACK, M. E.; SANTOS, M. C.; RAPOSO, E. P.; VISWANATHAN, G. M.; DA LUZ, M. G. E. **The evolutionary origins of Lévy walk foraging**. *PLoS Computational Biology* v. 13, p. 1-31, Oct. 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1005774>>.
- [19] VISWANATHAN, G. M. E.; DA LUZ, M. G.; RAPOSO, E. P.; STANLEY, H. E. *The Physics of Foraging: An Introduction to Random Searches and Biological Encounters*. Cambridge University Press, 2011. ISBN 1107006791,9781107006799. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=12e75db686c94a603fd2744e3461fba5>>.
- [20] MÉNDEZ, V.; CAMPOS, D.; BARTUMEUS, F. *Stochastic Foundations in Movement Ecology*. ed. Berlin: Springer, 2014. ISBN 978-3-642-39010-4. Disponível em: <<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-39010-4>>.
- [21] VISWANATHAN, G. M.; RAPOSO, E. P.; DA LUZ, M. G. E. **Lévy flights and superdiffusion in the context of biological encounters and random searches**. *Physics of Life Reviews*, Elsevier Science, v. 5, p. 133-150, Sep. 2008. ISSN 1571-0645. Disponível em: <<http://doi.org/10.1016/j.plrev.2008.03.002>>.

-
- [22] RAPOSO, E. P.; BULDYREV, V. S.; DA LUZ, M. G. E.; VISWANATHAN, G. M.; STANLEY, H. E. **Lévy flights and random searches**. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 42, p. 434003, Oct. 2009. ISSUES 1-2. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(00\)00071-6](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(00)00071-6)>.
- [23] BARTUMEUS, F.; RAPOSO, E. P.; VISWANATHAN, G. M.; DA LUZ, M. G. E. **Stochastic Optimal Foraging: Tuning Intensive and Extensive Dynamics in Random Searches**. *PLoS One*, v. 9, p. e106373, Sep. 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1371/journal.pone.0106373>>.
- [24] SANTANA-FILHO, J. V.; RAPOSO, E. P.; MACÊDO, A. M. S.; VASCONCELOS, G. L.; VISWANATHAN, G. M.; BARTUMEUS, F.; DA LUZ, M. G. E. **A Langevin dynamics approach to the distribution of animal move lengths**. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, v. 2020, p. 023406, Feb. 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1742-5468/ab6ddf>>.
- [25] ZOLOTAREV, V. M.; UCHAIKIN, V. V. *Chance and Stability. Stable Distributions and their Applications*. Modern Probability and Statistics, Walter de Gruyter, 1999. ISBN 9067643017,9789067643016. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=bf957d0c659535f5322a000c69905b2d>>.
- [26] SHLESINGER, J. K. G. Z. M. **Lévy walks in dynamical systems**. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier Science, v. 200, p. 222-230, 1993. ISSN 0378-4371. Disponível em: <<http://doi.org/10.1016/0378-4371%2893%2990520-e>>.
- [27] HUGHES, B. D. *Random Walks and Random Environments. vol. 1: Random Walks*. Oxford Science Publications: Clarendon Press, 1995. ISBN 978-0198537885.
- [28] TOMÉ, T.; OLIVEIRA, M. J. *Dinâmica estocástica e irreversibilidade*. 2 ed. São Paulo: Universidade de São Paulo (edusp), 2014. ISBN 978-85-314-1480-0.
- [29] HURST, H. E. **The long-term storage capacity of reservoir**. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, v. 116, p. 770-799, 1951. Disponível em: <<https://ascelibrary.org/doi/10.1061/TACEAT.0006518>>.
- [30] ARAÚJO, H. A.; RAPOSO, E. P. **Lévy flights between absorbing boundaries: Revisiting the survival probability and the shift from the exponential to the sparre-andersen limit behavior**. *Physical Review E*. v. 94, p. 032113, Sep. 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.94.032113>>.
- [31] ARAÚJO, H. A.; LUKIN, M. O.; DA LUZ, M. G. E.; VISWANATHAN, G. M.; SANTOS, F. A. N.; RAPOSO, E. P. **Revisiting lévy flights on bounded**

- domains: a fock space approach.** *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, IOP Publishing, v. 2020, p. 083202, Aug. 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1742-5468%2Faba593>>.
- [32] METZLER, R.; KLAFTER, J. **The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach.** *Physics Reports*, v. 339, p. 1-77, Dec. 2000. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(00\)00070-3](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00070-3)>.
- [33] METZLER, R.; KLAFTER, J. **The restaurant at the end of the random walk: Recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics.** *Journal of Physics A: Mathematical and General Physics*, v. 37, p. R161, July 2004. Disponível em: <stacks.iop.org/JPhysA/37/R161>.
- [34] KLAFTER, J.; SOKOLOV, I. M. *First Step in Random Walks: From Tools to Applications*. Oxford University Press, 2013. ISBN 9780199234868.
- [35] REDNER, S. *A Guide to First-Passage Processes*. Cambridge University Press, 2001. ISBN 9780511606014.
- [36] METZLER, R.; OSHSNIN, G.; REDNER, S. *First-Passage Phenomena and Their Applications*. World Scientific, 2014. Disponível em: <<https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9104>>.
- [37] KAMPEN, N. V. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. 3 ed. North-Holland personal library, Elsevier, 2007. ISBN 9780444529657,0444529659. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=78da212d8fe17e2f7632fc20933dc6a9>>.
- [38] CHECHKIN, A. V.; METZLER, R.; GONCHAR, V. Y.; KLAFTER, J.; TANATAROV, L. V. **First passage and arrival time densities for Lévy flights and the failure of the method of images.** *Journal of Physics A: Mathematical and General Physics*, v. 36, p. L537-L544, Oct. 2003. ISSN 0305-4470,0022-3689. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0305-4470%2F36%2F41%2FL01>>.
- [39] ANDERSEN, E. S. **On the fluctuations of sums of random variables.** *MATHEMATICA SCANDINAVICA*, v. 1, p. 263-285, Dec. 1953. Disponível em: <<https://www.mscaand.dk/article/view/10385>>.
- [40] ANDERSEN, E. S. **On the fluctuations of sums of random variables.** *Mathematica Scandinavica*, v. 1, n. 2, p. 263-285, Dec. 1954. ISSN 00255521,19031807. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/24488934>>.
- [41] FELLER, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, vol. 2*. 2 ed. Wiley, 1971. ISBN 0471257095,9780471257097. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=5ee1e3564baa8470668e6a8a28c7e416>>.

-
- [42] DOI, M. **Second quantization representation for classical many-particle system.** *Journal of Physics A: Mathematical and General Physics*, v. 9, p. 1465-1477, 1976. ISSN 0305-4470,0022-3689. Disponível em: <<http://doi.org/10.1088/0305-4470%2F9%2F9%2F008>>.
- [43] DOI, M. **Stochastic theory of diffusion-controlled reaction.** *Journal of Physics A: Mathematical and General Physics*, IOP Publishing, v. 9, p. 1479-1495, 1976. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F0305-4470%2F9%2F9%2F009>>.
- [44] TÄUBER, U. C.; HOWARD, M.; VOLLMAYR-LEE, B. P. **Applications of field-theoretic renormalization group methods to reaction-diffusion problems.** *Journal of Physics A: Mathematical and General Physics*, v. 38, p. R79-R131, April 2005. ISSN 0305-4470,0022-3689. Disponível em: <<http://doi.org/10.1088/0305-4470%2F38%2F17%2FR01>>.
- [45] MATTIS, D. C.; GLASSER, M. L. **The uses of quantum field theory in diffusion-limited reactions.** *Reviews of Modern Physics*, v. 70, p. 979-1001, Jul. 1998. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.70.979>>.
- [46] BAEZ, J.; BIAMONTE, J. *Quantum Techniques in Stochastic Mechanics*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2018. ISBN 9789813226937.
- [47] ISAACSON, S. A. **Relationship between the reaction-diffusion master equation and particle tracking models.** *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 41, p. 065003, Jan. 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1751-8113%2F41%2F6%2F065003>>.
- [48] GRASSBERGER, P.; SCHEUNERT, M. **Fock-Space Methods for Identical Classical Objects.** *Fortschritte der Physik*, v. 28, n. 10, p. 547-578, 1980. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/prop.19800281004>>.
- [49] DICKMAN, R. **Nonequilibrium lattice models: Series analysis of steady states.** *Journal of Statistical Physics*, v. 55, p. 997-1026, June 1989. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01041076>>.
- [50] DICKMAN, R.; JENSEN, I. **Time-dependent perturbation theory for nonequilibrium lattice models.** *Physical Review Letters*, v. 67, n. 17, p. 2391-2394, Oct. 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.67.2391>>.
- [51] DICKMAN, R.; WANG, J.; JENSEN, I. **Random sequential adsorption: Series and virial expansions.** *Journal Chemical Physics*, v. 94, p. 8252, 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.460109>>.

-
- [52] JENSEN, I.; DICKMAN, R. **Time-dependent perturbation theory for nonequilibrium lattice models.** *Journal of Statistical Physics*, v. 71, p. 89-127, Apr. 1993. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01048090>>.
- [53] PELITI, L. **Path integral approach to birth-death processes on a lattice.** *Journal de Physique France*, v. 46, p. 1469-1483, Sep. 1985. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/jphys:019850046090146900>>.
- [54] SANTOS, F. A. N.; GADÊLHA, H.; GAFFNEY, E. A. **Fock space, symbolic algebra, and analytical solutions for small stochastic systems.** *Physical Review E*, v. 92, p. 062714, Dec. 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.062714>>.
- [55] DUARTE-FILHO, G. C.; SANTOS, F. A. N.; GAFFNEY, E. A. **Fock-space methods for diffusion: Capturing volume exclusion via fermionic statistics.** *Physical Review E*, v. 102, p. 052101, Nov. 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.102.052101>>.
- [56] CHEVROLLIER, M. **Radiation trapping and Lévy flights in atomic vapours: an introductory review.** *Contemporary Physics*, v. 53, p. 227-239, May 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00107514.2012.684481>>.
- [57] MERCADIER, N.; GUERIN, W.; CHEVROLLIER, M.; KAISER, R. **Lévy flights of photons in hot atomic vapours.** *Nature Physics*, v. 5 p. 602-605, May 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/nphys1286>>.
- [58] ALCARAZ, F. C.; DROZ, M.; HENKEL, M.; RITTENBERG, V. **Reaction-Diffusion Processes, Critical Dynamics, and Quantum Chains.** *Annals of Physics*, v. 230, p. 250-302, March 1994. ISSUE 2. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/aphy.1994.1026>>.
- [59] HENKEL, M.; ORLANDINI, E.; SANTOS, J. **Reaction-Diffusion Processes from Equivalent Integrable Quantum Chains.** *Annals Physics*, v. 259, p. 163-231, Sep. 1997. ISSUE 2. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/aphy.1997.5712>>.
- [60] BEBIANO, N.; DA PROVIDÊNCIA, J.; NISHIYAMA, S.; DA PROVIDÊNCIA, J. P. **A quantum system with a non-hermitian Hamiltonian.** *Journal of Mathematical Physics*, v. 61, p. 082106, Aug. 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/5.0011098>>.
- [61] BENDER, C. M.; BOETTCHER, S. **Real spectra in non-hermitian Hamiltonians having PT symmetry.** *Physical Review Letters*, v. 80, p. 5243-5246, Jun. 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.5243>>.

-
- [62] NICOLAU, N. S.; ARAÚJO, H. A.; VISWANATHAN, G. M.; DA LUZ, M. G. E.; RAPOSO, E. P. **Mean first passage time and absorption probabilities of a Lévy flier on a finite interval: discrete space and continuous limit via Fock space approach.** *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 54, n. 32, p. 325006, July 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1751-8121/ac0f17>>.
- [63] KLAFTER, J.; SHLESINGER, M. F.; ZUMOFEN, G. **Beyond brownian motion.** *Physics Today*, v. 49, p. 33-39, 1996. ISSUE 2. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.881487>>.
- [64] NOLAN, J. P. *Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data*. Boston: Birkhauser, 2018. Em progresso, Capítulo 1 disponível online em <http://fs2.american.edu/jpnolan/www/stable/stable.html>.
- [65] LUKIN, M. R. O. *Diffusion process of a random particle in a one-dimensional finite interval in the Fock space approach*. Tese de Doutorado, Ufpe, 2020.
- [66] HAAG, G. *Modelling with the Master Equation: Solution Methods and Applications in Social and Natural Sciences*. Springer, 2017. ISBN 978-3-319-60299-8.
- [67] KLAFTER, J.; BLUMEN, A.; SHLESINGER, F. **Stochastic pathway to anomalous diffusion.** *Physical Review A*, v. 35, p. 3081-3085, Apr. 1987. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.35.3081>>.
- [68] NETO, P. J. R. *Análise da dinâmica energética de busca aleatória*. Tese de Doutorado, Ufpe, 2012.
- [69] PODLUBNY, I. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, London, 1999. ISBN 0-12-558840-2.
- [70] FOGEDBY, H. C. **Lévy flights in quenched random force fields.** *Physical Review E*, The American Physical Society, v. 58, p. 1690-1712, Aug. 1998. ISSN 1539-3755,1550-2376. Disponível em: <<http://doi.org/10.1103/physreve.58.1690>>.
- [71] DENTZ, M.; CORTIS, A.; SCHER, H.; BERKOWITZ, B. **Time behavior of solute transport in heterogeneous media: transition from anomalous to normal transport.** *Advances in Water Resources*, v. 27, p. 155-173, 2004. ISSN 0309-1708. Disponível em: <<http://doi.org/10.1016/j.advwatres.2003.11.002>>.
- [72] BERGSTRÖM, H. **On some expansions of stable distribution functions.** *Arkiv för Matematik*, Springer Netherlands, v. 2, p. 375-378, 1952. ISSN 0004-2080,1871-2487. Disponível em: <<http://doi.org/10.1007/bf02591503>>.

-
- [73] SAKURAI, J. J. *Modern quantum mechanics*. Rev. ed. Addison-Wesley Pub. Co, 1994. ISBN 9780201539295,0201539292. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=135c77b33b4d32d809c3e39335dd6ae2>>.
- [74] PENSON, K. A.; GÓRSKA, K. **Exact and explicit probability densities for one-sided lévy stable distributions**. *Physical Review Letters*, v. 105, p. 210604, Nov. 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.210604>>.
- [75] GÓRSKA, K.; PENSON, K. A. **Lévy stable two-sided distributions: Exact and explicit densities for asymmetric case**. *Physical Review E*, v. 83, p. 061125, June 2011. ISSN 1539-3755,1550-2376. Disponível em: <<http://doi.org/10.1103/PhysRevE.83.061125>>.
- [76] ROCHA, É, C.; DA LUZ, M. G. E.; RAPOSO, E. P.; VISWANATHAN, G. M. **Why Lévy α -stable distributions lack general closed-form expressions for arbitrary α** *Physical Review E*, v. 100, p. 010103, July 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.010103>>.
- [77] COX, D. *The Theory of Stochastic Processes*. 1 ed. Chapman and Hall/CRC, 2017. ISBN 1138460346,9781138460348. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=c56d4d941044b7fdaf2b976ca4b58ba>>.
- [78] BLUMENTHAL, R. M.; GETOOR, R. K.; RAY, D. B. **On the distribution of first hits for the symmetric stable processes**. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 99, p. 540-554, June 1961. ISSN 0002-9947,1088-6850. Disponível em: <<http://doi.org/10.1090/S0002-9947-1961-0126885-4>>.
- [79] DYBIEC, B.; GUDOWSKA-NOWAK, E.; CHECHKIN, A. **To hit or to pass it over-remarkable transient behavior of first arrivals and passages for lévy flights in finite domains**. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 49, p. 504001, Nov. 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1751-8113%2F49%2F50%2F504001>>.
- [80] ZOIA, A.; ROSSO, A.; KARDAR, M. **Fractional laplacian in bounded domains**. *Physical Review E*, v. 76, p. 021116, Aug 2007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.76.021116>>.
- [81] KWASNICKI, M. **Eigenvalues of the fractional laplace operator in the interval**. *Journal of Functional Analysis*, v. 262, n. 5, p. 2379 - 2402, Dec. 2012. ISSN 0022-1236. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022123611004344>>.
- [82] GARBACZEWSKI, P.; STEPHANOVICH, V. **Fractional laplacians in bounded domains: Killed, reflected, censored and taboo lévy**

- flights.** *Physical Review E*, v. 99, p. 042126, Apr 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.99.042126>>.
- [83] SCHRÖDINGER, E. **Zur theorie der fall-und steigversuche an teilchen mit Brownscher bewegung.** *Physikalische Zeitschrift*, v. 16, p. 289-295, 1915.
- [84] SMOLUCHOWSKI, M. **Notiz über die Berechnung der Brownschen Molekularbewegung bei der Ehrenhaft-Millikanschen Versuchsanordnung".** *Physikalische Zeitschrift*, v. 16, p. 318-321, 1915.
- [85] CHANDRASEKHAR, S. **Dynamical Friction. II. The Rate of Escape of Stars from Clusters and the Evidence for the Operation of Dynamical Friction.** *Astrophysical Journal*, v. 97, p. 263, March 1943. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1943ApJ....97..263C/abstract>>.
- [86] GITTERMAN, M. **Mean first passage time for anomalous diffusion.** *Physical Review E*, v. 62, p. 6065-6070, Nov. 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.62.6065>>
- [87] BULDYREV, S. V.; HAVLIN, S.; KAZAKOV, A. Y.; DA LUZ, M. G. E.; RAPOSO, E. P.; STANLEY, H. E.; VISWANATHAN, G. M. **Average time spent by Lévy flights and walks on an interval with absorbing boundaries.** *Physical Review E*, v. 64, n. 4, p. 041108, Sep. 2001. ISSN 1095-3787. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.64.041108>>.
- [88] BULDYREV, S.; GITTERMAN, M.; HAVLIN, S.; KAZAKOV, A.; DA LUZ, M. G. E.; RAPOSO, E. P.; STANLEY, H.; VISWANATHAN, G. M. **Properties of Lévy flights on an interval with absorbing boundaries.** *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 302, n. 1, p. 148-161, Dec. 2001. ISSN 0378-4371. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437101004617>>.
- [89] KURZYŃSKI, M.; CHELMINIAK, P. **Mean First-Passage Time in the Stochastic Theory of Biochemical Processes. Application to Actomyosin Molecular Motor.** *Journal of Statistical Physics*, v. 110, p. 137-181, Jan. 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1021018728312>>.
- [90] SOKOLOV, I. M. **Cyclization of a Polymer: First-Passage Problem for a Non-Markovian Process.** *Physical Review Letters*, v. 90, p. 080601, Feb. 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.90.080601>>.
- [91] DYBIEC, B.; GUDOWSKA-NOWAK, E.; HÄNGGI, P. **Lévy-Brownian motion on finite intervals: Mean first passage time analysis.** *Physical Review E*, v. 73, p. 046104, April 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.046104>>.

-
- [92] KOREN, T.; LOMHOLT, A.; CHECHKIN, A. V.; KLAFTER, J.; METZLER, R. **Leapover Lengths and First Passage Time Statistics for Lévy Flights**. *Physical Review Letters*, v. 99, p. 160602, Oct. 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.160602>>.
- [93] TEJEDOR, V.; BÉNICHOU, O.; VOITURIEZ, R. **Global mean first-passage times of random walks on complex networks**. *Physical Review E*, v. 80, p. 065104, Dec. 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.80.065104>>.
- [94] CAMPOS, D.; BARTUMEUS, F.; RAPOSO, E. P.; MÉNDEZ, V. **First-passage times in multiscale random walks: The impact of movement scales on search efficiency**. *Physical Review E*, v. 92, p. 052702, Nov. 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.052702>>.
- [95] GUÉRIN, T.; LEVERNIER, N.; BÉNICHOU, O.; VOITURIEZ, R. **Mean first-passage times of non-Markovian random walkers in confinement**. *Nature*, v. 534, p. 356-359, June 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/nature18272>>.
- [96] GODEC, A.; METZLER, R. **First passage time distribution in heterogeneity controlled kinetics: going beyond the mean first passage time**. *Scientific Reports*, v. 6, p. 20349, Feb. 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/srep20349>>.
- [97] GODEC, A.; METZLER, R. **Universal Proximity Effect in Target Search Kinetics in the Few-Encounter Limit**. *Physical Review X*, v. 6, p. 041037, Nov. 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevX.6.041037>>.
- [98] DYBIEC, B.; GUDOWSKA-NOWAK, E.; BARKAI, E.; DUBKOV, A. A. **Lévy flights versus Lévy walks in bounded domains**. *Physical Review E*, v. 95, p. 052102, May 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.95.052102>>.
- [99] HARTICH, D.; GODEC, A. **Extreme value statistics of ergodic Markov processes from first passage times in the large deviation limit**. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 52, p. 244001, May 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1751-8121/ab1eca>>.
- [100] PADASH, A.; CHECHKIN, A. V.; DYBIEC, B.; PAVLYUKEVICH, I.; SHOKRI, B.; METZLER, R. **First-passage properties of asymmetric Lévy flights**. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 52, p. 454004, Oct. 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1751-8121/ab493e>>.
- [101] WALTER, B.; PRUESSNER, G.; SALBREUX, G. **First passage time distribution of active thermal particles in potentials**. *Physical Review Research*, v. 3, p. 013075, Jan. 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.3.013075>>.

-
- [102] FERREIRA, J.; RAPOSO, E. P.; ARAÚJO, H. A.; DA LUZ, M. G. E.; VISWANATHAN, G. M.; BARTUMEUS, F.; CAMPOS, D. **Landscape-scaled strategies can outperform Lévy random searches.** *Physical Review E*, v. 103, p. 022105, Feb. 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.103.022105>>.
- [103] DARLING, D. A.; SIEGERT, A. J. F. **The First Passage Problem for a Continuous Markov Process.** *The Annals of Mathematical Statistics*, v. 24, Issue 4, p. 624-639, Dec. 1953. Disponível em: <<https://doi.org/10.1214/aoms/1177728918>>.
- [104] GETOOR, R. K. **First passage times for symmetric stable processes in space.** *Transaction of the American Mathematical Society*, v. 101, p. 75-90, 1961. ISSN 0002-9947,1088-6850. Disponível em: <<http://doi.org/10.1090/S0002-9947-1961-0137148-5>>.
- [105] VANMARCKE, E. H. **On the Distribution of the First-Passage Time for Normal Stationary Random Processes.** *Journal of Applied Mechanics*, v. 42, Issue 1, p. 215-220, March 1975. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3423521>>.
- [106] BUONOCORE, A.; NOBILE, A. G.; RICCIARDI, L. M. **A new integral equation for the evaluation of first-passage-time probability densities.** *Advances in Applied Probability*, v. 19, Issue 4, p. 784-800, Dec. 1987. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/1427102>>.
- [107] DOMINÉ, M. **Moments of the first-passage time of a Wiener process with drift between two elastic barriers.** *Journal of Applied Probability*, v. 32, Issue 4, p. 1007-1013, Dec. 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/3215214>>.
- [108] SACERDOTE, L.; TOMASSETTI, F. **On evaluations and asymptotic approximations of first-passage-time probabilities.** *Advances in Applied Probability*, v. 28, n. 1, Issue 1, p. 270-284, March 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/1427921>>.
- [109] PESKIR, G.; SHIRYAEV, A. N. **On the Brownian First-Passage Time Over a One-Sided Stochastic Boundary.** *Theory of Probability and Its Applications*, v. 42, Issue 3, p. 444-453, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/S0040585X97976313>>.
- [110] LO, C. F.; HUI, C. H. **Computing the first passage time density of a time-dependent Ornstein-Uhlenbeck process to a moving boundary.** *Applied Mathematics Letters*, v. 19, Issue 12, p. 1399-1405, Dec. 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.aml.2006.02.011>>.
- [111] MONTROLL, E. W. **Random Walks on Lattices. III. Calculation of First-Passage Times with Application to Exciton Trapping on Photosynthetic**

- Units.** *Journal of Mathematical Physics*, v. 10, p. 753, 1969. Disponible em: <<https://doi.org/10.1063/1.1664902>>.
- [112] CAPOCELLI, R. M.; RICCIARDI, L. M. **Diffusion approximation and first passage time problem for a model neuron.** v. 8, p.214-223, June 1971. Disponible em: <<https://doi.org/10.1007/BF00288750>>.
- [113] RICHTER-DYN, N.; GOEL, N. S. **On the extinction of a colonizing species.** *Theoretical Population Biology*, v. 3, Issue 4, p. 406-433, Dec. 1972. Disponible em: <[https://doi.org/10.1016/0040-5809\(72\)90014-7](https://doi.org/10.1016/0040-5809(72)90014-7)>.
- [114] SHIMOKAWA, T.; PAKDAMAN, K.; TAKAHATA, T.; TANABE, S.; SATO, S. **A first-passage-time analysis of the periodically forced noisy leaky integrate-and-fire model.** *Biological Cybernetics*, v. 83, p. 327-340, Sep. 2000. Disponible em: <<https://doi.org/10.1007/s004220000156>>.
- [115] MAZUREK, M. E.; ROITMAN, J. D.; DITTERICH, J.; SHADLEN, M. N. **A Role for Neural Integrators in Perceptual Decision Making.** *Cerebral Cortex*, v. 13, p. 1257-1269, Nov. 2003. Disponible em: <<https://doi.org/10.1093/cercor/bhg097>>.
- [116] FAUCHALD, P.; TVERAA, T. **USING FIRST-PASSAGE TIME IN THE ANALYSIS OF AREA-RESTRICTED SEARCH AND HABITAT SELECTION.** *Ecology*, v. 84, n. 2, p. 282-288, Feb. 2003. Disponible em: <10.1890/0012-9658(2003)084[0282:UFPTIT]2.0.CO;2>.
- [117] SAEBØ, S.; ALMØY, T.; HERINGSTAD, B.; KLEMETSDAL, G.; AASTVEIT, A. H. **Genetic evaluation of mastitis resistance using a first-passage time model for wiener processes for analysis of time to first treatment.** *Journal of Dairy Science*, v. 88, ISSUE 2, p. 834-841, Feb. 2005. Disponible em: <[https://doi.org/10.3168/jds.S0022-0302\(05\)72748-X](https://doi.org/10.3168/jds.S0022-0302(05)72748-X)>.
- [118] TAILLEFUMIER, T.; MAGNASCO, M. O. **A phase transition in the first passage of a Brownian process through a fluctuating boundary with implications for neural coding.** *Proceeding of the National Academy of Sciences*, v. 110, p. E1438-E1443, March 2013. Disponible em: <<https://doi.org/10.1073/pnas.1212479110>>.
- [119] GHUSINGA, K. R.; DENNEHY, J. J.; SINGH, A. **First-passage time approach to controlling noise in the timing of intracellular events.** *Proceeding of the National Academy of Sciences*, v. 114, p. 693-698, Jan. 2017. Disponible em: <<https://doi.org/10.1073/pnas.1609012114>>.
- [120] SZABO, A.; SCHULTEN, K.; SCHULTEN, Z. **First passage time approach to diffusion controlled reactions.** *Journal of Chemical Physics*, v. 72, p. 4350, 1980. Disponible em: <<https://doi.org/10.1063/1.439715>>.

-
- [121] SOLC, M. **Time Necessary for Reaching Chemical Equilibrium: First Passage Time Approach.** *Zeitschrift für Physikalische Chemie*, v. 214, p. 253, Feb. 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1524/zpch.2000.214.2.253>>.
- [122] CHELMINIAK, P.; KURZYNSKI, M. **Mean first-passage time in the steady-state kinetics of biochemical processes.** *Journal of Molecular Liquids*, v. 86, Issue 1-3, p. 319-325, June 2000. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0167-7322\(99\)00155-5](https://doi.org/10.1016/S0167-7322(99)00155-5)>.
- [123] ANSARI, A. **Mean first passage time solution of the Smoluchowski equation: Application to relaxation dynamics in myoglobin.** *Journal Chemical Physics*, v. 112, p. 2516, Jan. 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.480818>>.
- [124] GOYCHUK, I.; HÄNGGI, P. **Ion channel gating: A first-passage time analysis of the Kramers type.** *Biophysics and Computational Biology*, v. 99, p. 3552-3556, March 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1073/pnas.052015699>>.
- [125] ARRIBAS, E.; MUÑOZ-LOPES, A.; GARCIA-MESEGUER, M. J.; LOPEZ-NAJERA, A.; AVALOS, L.; GARCIA-MOLINA, F.; GARCIA-MORENO, M.; VARRON, R. **Mean Lifetime and First-Passage Time of the Enzyme Species Involved in an Enzyme Reaction. Application to Unstable Enzyme Systems.** *Bulletin of Mathematical Biology*, v. 70, p. 1425, May 2008. ISSN 0092-8240. Disponível em: <<https://agris.fao.org/agris-search/search.do?recordID=US201301720850>>.
- [126] ABDOLVAHAB, R. H.; METZLER, R.; EJTEHADI, M. R. **First passage time distribution of chaperone driven polymer translocation through a nanopore: Homopolymer and heteropolymer cases.** *Journal of Chemical Physics*, v. 135, p. 245102, Dec. 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.3669427>>.
- [127] ZHANG, D.; MELNIK, R. V. N. **First passage time for multivariate jump-diffusion processes in finance and other areas of applications.** *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, v. 25, Issue 5, p. 565-582, Dec. 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/asmb.745>>.
- [128] YI, C. **On the first passage time distribution of an Ornstein–Uhlenbeck process.** *Quantitative Finance*, v. 10, Issue 9, p. 957-960, Oct. 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/14697680903373684>>.
- [129] METZLER, R.; OSHANIN, G.; REDNER, S. *First-Passage Phenomena and Their Applications*. Singapore: World Scientific, p 447, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/9104>>.
- [130] DA LUZ, M. G. E.; GROSBERG, A.; RAPOSO, E. P.; VISWANATHAN, G. M. **The random search problem: trends and perspectives.** *Journal of Physics A:*

-
- Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 42, p. 430301, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1751-8121/42/43/430301>>.
- [131] DRYSDALE, P. M.; ROBINSON, P. A. **Lévy random walks in finite systems**. *Physical Review E*, v. 58, p. 5382-5394, Nov. 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.58.5382>>.
- [132] CHAMBERS, J. M.; MALLOWS, C. L.; STUCK, B. W. **A Method for Simulating Stable Random Variables**. *Journal of the American Statistical Association*, v. 71, p. 340-344, Jun. 1976. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/2285309>>.
- [133] SAMORADNITSKY, G.; TAQQU, M. S. *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*. London: Chapman and Hall/CRC, 1994. ISBN 9780412051715. Disponível em: <<https://doi.org/10.1201/9780203738818>>.
- [134] GAO, T.; DUAN, J.; LI, X.; SONG, R. **Mean Exit Time and Escape Probability for Dynamical Systems Driven by Lévy Noises**. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 36, p. A887-A906, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/120897262>>.
- [135] PFEILSTICKER, K. **First geometrical path length probability density function derivation of the skylight from high-resolution oxygen A-band spectroscopy: 2. Derivation of the Lévy index for the skylight transmitted by midlatitude clouds**. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, v. 104, p. 4101-4116, Feb. 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1029/1998JD200081>>.
- [136] WIDOM, H. **Stable processes and integral equations**. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 98, n. 3, p. 430-449, March 1961. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/1993340>>.
- [137] MAJUMDAR, S. N.; ROSSO, A.; ZOIA, A. **Hitting Probability for Anomalous Diffusion Processes**. *Physical Review Letters*, v. 104, p. 020602, Jan. 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.104.020602>>.
- [138] DYBIEC, B.; GUDOWSKA-NOWAK, E.; SOKOLOV, I. M. **Transport in a Lévy ratchet: Group velocity and distribution spread**. *Physical Review E*, v. 78, p. 011117, Jul. 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.78.011117>>.