



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO CENTRO
DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

ANDRÉ MEDEIROS CHAVES

**PROCESSO ARMA EXPONENCIAL EXPONENCIALIZADO
REPARAMETRIZADO E PROPRIEDADES**

Recife

2021

ANDRÉ MEDEIROS CHAVES

**PROCESSO ARMA EXPONENCIAL EXPONENCIALIZADO
REPARAMETRIZADO E PROPRIEDADES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Estatística do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Estatística.

Área de Concentração: Estatística aplicada

Orientador: Prof. Dr. Abraão D.C. Nascimento

Co-Orientadora: Prof^a. Dra. Maria do Carmo Soares Lima

Recife

2021

Catálogo na fonte
Bibliotecária: Nataly Soares Leite Moro, CRB4-1722

C512p Chaves, André Medeiros.
 Processo arma exponencial exponencializado reparametrizado e
 propriedades / André Medeiros Chaves. – 2021.
 54 f.: il., fig., tab.

 Orientador: Abraão David Costa do Nascimento.
 Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
 Programa de Pós-graduação em Estatística. Recife, 2021.
 Inclui referências e apêndices.

 1. Estatística aplicada. 2. Séries temporais. 3. Função quantílica. 4.
 Verossimilhança. I. Nascimento, Abraão David Costa do (Orientador). II.
 Título.

 310 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2022 - 07

ANDRÉ MEDEIROS CHAVES

“PROCESSO ARMA EXPONENCIAL EXPONENCIALIZADO REPARAMETRIZADO E PROPRIEDADES”

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Estatística.

Aprovada em: 23 de Julho de 2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Abraão David Costa do Nascimento
UFPE

Prof. Dr. Gauss Moutinho Cordeiro
UFPE

Prof. Dr. Fernando Arturo Peña Ramírez
UFSM

RESUMO

Vários fenômenos de natureza física, biológica, financeira, social e econômica demandam o uso de modelos de séries temporais. Muitos avanços têm sido feitos para séries normais, contudo outras distribuições marginais são requeridas frequentemente. Esta dissertação visa contribuir nos âmbitos de séries temporais com retornos positivos. Neste suporte, a distribuição exponencial exponencializada (EE) tem se mostrado uma boa alternativa a outras leis positivas, tais como Gama e Lognormal. Nesta dissertação, inicialmente desenvolvemos uma reparametrização da distribuição EE baseada na função quantílica e em seguida combinamos essa nova distribuição com uma estrutura autorregressiva e de médias móveis (ARMA). Este último modelo é denominado como Exponencial Exponencializado Reparametrizado Autorregressivo e de Médias Móveis (EER-ARMA). Várias propriedades do EER-ARMA são derivadas, como as funções score e a matriz de informação observada. Um procedimento para estimação por máxima verossimilhança dos parâmetros associados é desenvolvido. Por meio de experimentos de Monte Carlo, avalia-se numericamente o comportamento das estimativas sob diferentes cenários, considerando a variação de três funções de ligações distintas. Resultados evidenciam que o uso da função de ligação logaritmo da W de Lambert apresenta desempenho superior quando comparada com as funções de ligação logarítmica e raiz quadrada. Por fim, uma aplicação a dados reais é apresentada, em que o modelo EER-ARMA com estrutura na mediana é comparado ao Gama-ARMA com estrutura na média. Resultados indicam que o modelo EER-ARMA pode superar o modelo Gama-ARMA.

Palavras-chave: séries temporais; função quantílica; verossimilhança.

ABSTRACT

Several physical, biological, financial, social, and economic phenomena demand the use of time series models. Many advances have been made for normal series, however other marginal distributions are often required. This dissertation aims to advance in the scope of time series with positive returns. In this support, the exponentiated exponential distribution (EE) is a good alternative to other positive laws, such as Gamma and Lognormal. In this dissertation, we initially develop a reparametrization of the EE distribution based on the quantile function and, thus, combine this new distribution with an autoregressive and moving average (ARMA) structure. This last model is called Exponentialized Autoregressive and Moving Averages (EER-ARMA). Various properties of the EER-ARMA process are derived, such as the score functions and the observed information matrix. An estimation procedure by maximum likelihood for the EER-ARMA parameters is developed. Through Monte Carlo experiments, the behavior of the estimates is numerically evaluated under different scenarios, considering the variation of three different link functions. Results show that the use of Lambert's W logarithm link function presents superior performance compared to those due to the logarithmic and square root link functions. Finally, an application to real data is presented, where the EER-ARMA model with structure at the median is compared to the Gamma-ARMA model with structure at the mean. Results indicate that the EER-ARMA model can outperform the Gamma-ARMA model.

Keywords: likelihood; quantile function; time series; LTN.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Função densidade de probabilidade da distribuição EE.	17
Figura 2 – Função densidade de probabilidade da distribuição EE repa- rametrizada.	21
Figura 3 – Séries geradas a partir do EER-AR(1) e seus pares (ACF,PACF). .	25
Figura 4 – Séries geradas a partir do EER-MA(1) e seus pares (ACF,PACF). .	26
Figura 5 – Séries geradas a partir do EER-ARMA(1,1) e seus pares (ACF,PACF).	27
Figura 6 – Séries de rendimentos obtidos a partir do LTN.	43
Figura 7 – Séries de rendimento obtidos a partir do LTN.	44
Figura 8 – Séries de resíduos a partir dos melhores ajustes.	45

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resultados das estimativas para o processo EER-AR(1) . . .	33
Tabela 2 – AR(1) Modificando o parâmetro α -	34
Tabela 3 – Processo MA(1)	35
Tabela 4 – Processo MA(1)	37
Tabela 5 – Processo ARMA(1,1)	39
Tabela 6 – Processo ARMA(1,1).	40
Tabela 7 – Estimativas e desempenhos dos modelos autoregressivos utilizados na aplicação em tela.	45

LISTA DE ALGORITMOS

Algorithm 1 – Algoritmo de geração para uma série EER-ARMA(p,q) . . . 24

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais
$\mathbb{E}(\cdot)$	Valor Esperado
$\ell(\cdot)$	Função de Log-Verossimilhança
$\Gamma(\cdot)$	Função Gama
$\mathbb{P}(\cdot)$	Probabilidade de uma variável aleatória
α	Parâmetro de forma da distribuição Exponencia Exponencializada(EE)
λ	Parâmetro de escala da distribuição EE
δ	Parâmetro Intercepto do modelo ARMA
ϕ	Parâmetro Autoregressivo
θ	Parâmetro Médias Móveis
β	Parâmetro do Modelo ARMA associado ao vetor de covariáveis
t	Tempo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	MARCO INICIAL	11
1.2	REVISÃO DA LITERATURA E CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA	12
1.2.1	Revisão sobre o suposto probabilístico adotado	12
1.2.2	Definição da fronteira a ser avançada	14
1.3	OBJETIVOS	15
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	15
1.5	PLATAFORMA COMPUTACIONAL	15
2	UMA NOVA REPARAMETRIZAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL EXPONENCIALIZADA	17
2.1	A DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL EXPONENCIALIZADA	17
2.2	DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL EXPONENCIALIZADA REPARA- METRIZADA E ALGUMAS DE SUAS PROPRIEDADES	19
3	PROCESSO ARMA EXPONENCIAL EXPONENCIALI- ZADO REPARAMETRIZADO	22
3.1	INTRODUÇÃO DO MODELO	22
3.2	DEFININDO E AVALIANDO GERADORES PARA O MODELO EER-ARMA	23
3.3	ESTIMAÇÃO POR MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA	28
3.4	EQUAÇÕES DE PREDIÇÃO	30
4	RESULTADOS NUMÉRICOS	31
4.1	ESTUDO DE SIMULAÇÃO MONTE CARLO	31
4.2	APLICAÇÃO A DADOS REAIS	41
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	47
	REFERÊNCIAS	48
	APÊNDICE A – DERIVAÇÃO DOS COMPONENTES DA FUNÇÃO ESCORE	51
	APÊNDICE B – DERIVAÇÃO DA MATRIZ DE INFOR- MAÇÃO OBSERVADA	53

1 INTRODUÇÃO

1.1 MARCO INICIAL

Vários campos de estudos estão relacionados com a análise de séries temporais (AST), como, por exemplo: taxas de empregos, valores dos preços de ações, produção diária em uma fábrica, seguros, demografia, áreas de engenharia civil, dentre outros. Por esse motivo, aplicar modelos estatísticos em séries temporais tem atraído o interesse de diversos pesquisadores, uma vez que fazer uma análise desses dados é útil para a sociedade. Devido às mudanças que ocorrem em seus valores e seus efeitos ao longo do tempo, a AST objetiva tanto descrever a estrutura de dependência da série como fazer previsão para os valores de uma variável de interesse em um dado horizonte.

A classe de modelos conhecida como processos autoregressivos de médias móveis (*Autoregressive-Moving-Average* - ARMA), largamente discutida em Brockwell e Davis [1991], é muito utilizada para modelar séries temporais. Isso se justifica pois vários resultados matemáticos (proposições relacionadas a existência de um processo estocástico, a relação entre a função de autocorrelação à sua respectiva representação espectral, ...) e estatísticos (estimadores baseados em diferentes critérios, resultados assintóticos associados, teste sob os parâmetros, critérios de seleção de modelo e diagnóstico, ...) têm sido proposto para esta classe. O modelo ARMA costuma assumir normalidade [CHUANG; YU, 2007], o que inviabiliza seu uso em muitas aplicações [TIKU *et al.*, 2000]. Para superar esta limitação, vários processos não normais têm sido propostos na literatura. Eles podem ser classificados como:

- Condicionais ou pela abordagem de regressão: Iniciando com a proposta de Benjamin, Rigby e Stasinopoulos [2003] para o processo ARMA generalizado (*Generalized ARMA* - GARMA) cuja distribuição marginal é qualquer distribuição pertencente à família exponencial (de natureza discreta, Poisson, Binomial, ...; de natureza contínua, normal, gama, gaussiana inversa, ...). Rocha e Cribari-Neto [2009] propuseram o modelo Beta-ARMA para analisar proporções. Recentemente, Almeida-Junior e Nascimento [2021] introduziram o processo $\mathcal{G}_I^0$ -ARMA para descrever intensidades em imagens de radar de abertura sintética.
- Não condicionais:
 - Discretos: Processos autoregressivos (AR) com distribuição Binomial [WEIß;

KIM, 2013], ARMA com marginais Binomial-Negativa e Geométrica e, em geral, processos para valores inteiros considerando sub dispersão [WEIß, 2013].

- Contínuos: Processos Gama [LEWIS; MCKENZIE; HUGUS, 1989] e AR com marginal Laplace generalizada [JOSE; THOMAS, 2011].

Os modelos supracitados se mostraram com propriedades matemáticas bem definidas e aplicáveis a diversos fenômenos. A proposta desta dissertação é apresentar e estudar um modelo dinâmico de série temporal tendo como marginal uma reparametrização da distribuição Exponencial Exponencializada (EE) proposta por Gupta e Kundu [1999]. Esta distribuição foi escolhida devido às suas características analíticas (ambas densidade e função de distribuição acumulada independem de função especiais) e grande flexibilidade para descrever experimentos aplicados. Várias propriedades matemáticas da EE foram estudadas por Nadarajah [2011a].

1.2 REVISÃO DA LITERATURA E CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA

1.2.1 Revisão sobre o suposto probabilístico adotado

O suposto probabilístico desta dissertação recai sobre a distribuição EE que surge com uma extensão da distribuição exponencial através do uso do gerador *exponentiated-G* (“**Exp-G**”): Uma variável X segue a distribuição **Exp-G** se sua função distribuição acumulada (fda) e função densidade de probabilidade (fdp) são dadas por

$$F(x) = [G(x)]^\alpha, \quad \text{for } x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

e

$$f(x) = \alpha g(x) [G(x)]^{\alpha-1}, \quad (1.2)$$

respectivamente, em que $g(\cdot)$ e $G(\cdot)$ representam a fdp e fda de uma distribuição conhecida, chamada pela literatura de novas distribuições de *baseline* [CORDEIRO; SILVA; NASCIMENTO, 2020]. Uma interpretação física para o parâmetro adicional da classe **Exp-G** é discutida a seguir:

- $F(x) = G(x)$ para $\alpha = 1$;
- Tomando $\alpha = n \in \mathbb{N}$, $F(x)$ indica a fda do valor máximo definido sobre uma amostra aleatória (ou seja, independente e identicamente distribuída) n -dimensional

de $Y \sim G$, diga-se $\{Y_1, \dots, Y_n\}$:

$$X(n) = \max\{Y_1, \dots, Y_n\}, \quad (1.3)$$

podendo assim qualquer variável **Exp-G** ser entendida com um sistema que trabalha em paralelo a outras α variáveis oferecendo um retorno se todas as variáveis funcionam adequadamente. Particularmente, a distribuição EE é o resultado de aplicarmos $g(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ e $G(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ nas Equações (1.1) e (1.2).

A distribuição EE é um caso particular da distribuição Gompertz [GOMPERTZ, 1825], inicialmente utilizada para comparar tabelas de mortalidade. Este último modelo vem sendo utilizado em outras áreas; tais como, em problemas relacionados à análise de sobrevivência (ver, por exemplo, Kannan *et al.* [2010] e Abdel-Hamid e AL-Hussaini [2009]) e na área da saúde auxiliando na busca por medicamentos de acordo com a demanda, tal como discutido por Strickland *et al.* [2016]. Além disso, a distribuição EE foi usada para descrever diversos tipos de dados:

Contexto	Referência
Registros de chuva (Previsão bayesiana)	[MADI; RAQAB, 2007]
Tempo de vida de sistema de energia	[COTA-FELIX; RIVAS-DAVALOS; MAXIMOV, 2009]
Dados de veículo aéreo não tripulado	[HAN, 2015]
Tempo de fadiga de cupons de alumínio	[GUPTA; KUNDU, 2004]
Número falhas para rolamentos de esferas	[GUPTA; KUNDU, 2004]

Outros trabalhos constroem uma tratativa mais analítica sobre o modelo EE. Gupta e Kundu [2001] introduzem a distribuição EE como uma alternativa aos modelos Gama e Weibull. De maneira semelhante, Gupta e Kundu [2003] apresentaram a distribuição EE como uma alternativa para a distribuição Gama, enfatizando o fato de que a distribuição EE tem forma mais compacta, ou seja, independe de funções especiais, quando comparada a este último modelo. Os autores mostraram ainda que, em aplicações a dados reais, o ajuste dos modelos gama e EE são muito próximos, concluindo que a distribuição EE pode ser uma alternativa ao modelo gama em alguns casos. Um levantamento sobre resultados existentes é apontado por Gupta e Kundu [2007]. Um tratamento diferenciado foi introduzido por Barros [2008], que comparou a inferência clássica para a distribuição EE com sua abordagem bayesiana.

Quanto à inferência pontual, Raqab e Ahsanullah [2001] discutiram estimadores para os parâmetros de forma e escala da distribuição EE. Seguindo esta mesma linha, Abdel-Hamid e AL-Hussaini [2009] investigaram a estimação por máxima verossimilhança para os parâmetros da EE baseada na censura do tipo I. Além disso, com o objetivo de verificar as propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança (EMVs), os autores realizaram um estudo de simulação de Monte Carlo e discutiram também sobre métodos de obtenção de intervalos de confiança bootstrap.

No contexto de distribuições bivariadas, Kundu e Gupta [2009] introduziram uma distribuição exponencial exponencializada bivariada de tal forma que as distribuições marginais também seguem distribuição EE. Neste trabalho, os autores constataram que as funções conjuntas da densidade, acumulada e de taxa de falha possuem formas compactas. Os autores ainda sugeriram o uso do algoritmo *Expectation Maximization* para obter os EMVs dos parâmetros desconhecidos.

Em Aslam, Kundu e Ahmad [2010], os autores propuseram planos de amostragem de aceitação para distribuição EE quando o experimento de vida é truncado em um tempo pré-determinado. Essa é uma aplicação bastante atípica à área de novas distribuições, mas que ilustra a importância e amplo alcance do uso da EE.

Apesar de ser uma distribuição amplamente estudada até 2010, Nadarajah [2011a] percebeu que pouca atenção foi dada às propriedades matemáticas do modelo. Sendo assim, o autor derivou expressões para funções matemáticas importantes da distribuição EE, tais como as funções geradora de momentos, característica e geradora de cumulantes. Derivou também os quatro primeiros momentos e os quatro primeiros cumulantes, dentre outras propriedades estatísticas relevantes.

1.2.2 Definição da fronteira a ser avançada

Apesar das muitas contribuições envolvendo a distribuição EE, do melhor de nossa revisão da literatura, não encontramos uma abordagem em séries temporais que adote a distribuição EE como marginal. Nesse sentido, esta dissertação propõe um modelo ARMA com marginal EE estruturada em termos da função quantílica. Além disso, duas questões serão objetos das discussões a serem feitas:

- ¶ Como o modelo proposto descreve variáveis temporais relacionadas ao mercado financeiro, comparativamente ao processo Γ -ARMA proposto por Benjamin, Rigby e

Stasinopoulos [2003]? Esta comparação complementa da perspectiva da suposição de dependência o trabalho de Gupta e Kundu [2001] dedicado ao estudo da relação $EE \times \Gamma$ no contexto de independência.

- ¶ Qual o efeito do parâmetro α (que tem uma justificação física expressa na Equação (1.3)) induzido da classe **Exp-G** no novo processo com marginal EE?

1.3 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é o desenvolvimento de uma reparametrização da distribuição EE e sua posterior utilização como marginal de um novo modelo de séries temporais. Em particular, destacam-se os seguintes objetivos específicos:

- Propor uma reparametrização para a distribuição EE em termos da função da quantílica, que chamamos distribuição Exponencial Exponencializada Reparametrizada (EER);
- Derivar algumas propriedades da distribuição reparametrizada;
- Desenvolver um novo modelo de séries temporais, baseado na marginal EER;
- Propor um procedimento de estimação para os parâmetros do modelo de séries temporais;
- Mostrar que o novo modelo é promissor para predição, mediante uma aplicação a uma variável do mercado financeiro.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O Capítulo 2 aborda a introdução da distribuição EER. Um novo modelo de séries temporais é discutido no Capítulo 3. Os resultados numéricos desta dissertação são apresentados no Capítulo 4: Primeiramente, experimentos para dados simulados e, subsequentemente, um estudo para dados reais relacionados ao mercado financeiro. Finalmente, o Capítulo 5 elenca as principais contribuições deste trabalho. Alguns resultados matemáticos são endereçados nos Apêndices A e B.

1.5 PLATAFORMA COMPUTACIONAL

As avaliações numéricas (tais como geração de séries temporais e construções gráficas associadas) ao longo dessa dissertação foram feitas usando a linguagem R na

versão 4.0.5 para Windows. A linguagem R se encontra disponível gratuitamente no site <https://www.r-project.org>.

Para fins de edição, o trabalho foi digitado usando o sistema de tipografia L^AT_EX. Para maiores detalhes, consultar Goossens, Mittelbach e Samarin [1994].

2 UMA NOVA REPARAMETRIZAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL EXPONENCIALIZADA

2.1 A DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL EXPONENCIALIZADA

Esta seção apresenta uma breve introdução da distribuição EE proposta por Gupta e Kundu [1999] e algumas de suas propriedades. Diz-se que uma variável aleatória X segue uma distribuição EE com parâmetros de forma $\alpha > 0$ e escala $\lambda > 0$, se sua fda é expressa por

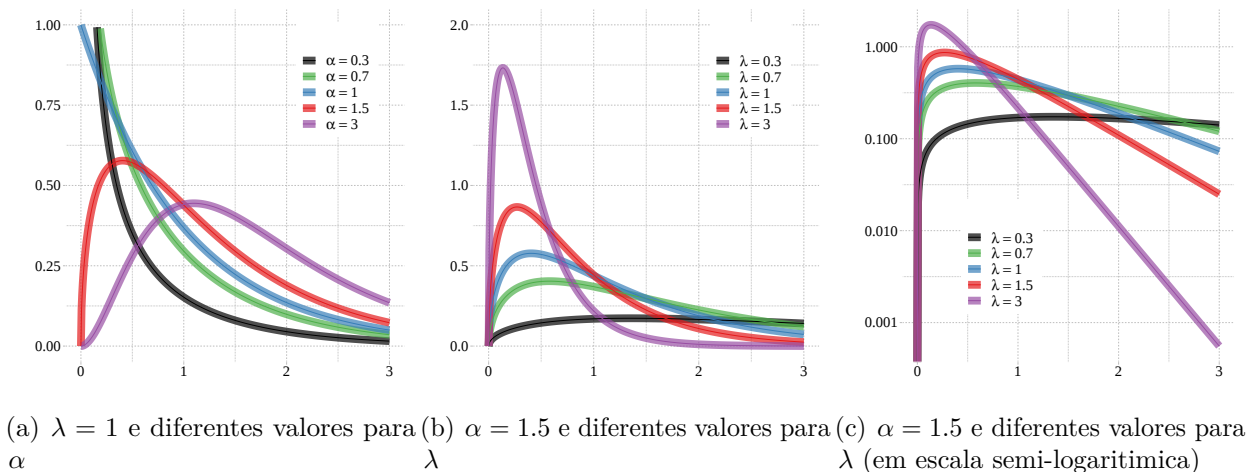
$$F(x; \alpha, \lambda) = [1 - \exp(-\lambda x)]^\alpha, \quad x > 0. \quad (2.1)$$

Denotaremos uma variável aleatória com distribuição EE por $X \sim \text{EE}(\alpha, \lambda)$. A fdp de X é dada por

$$f(x; \alpha, \lambda) = \alpha \lambda \exp(-\lambda x) [1 - \exp(-\lambda x)]^{\alpha-1}, \quad x > 0. \quad (2.2)$$

A Figura 1 apresenta algumas curvas de densidade da distribuição EE para diferentes valores de α e λ . Na Figura 1(a), fixamos o parâmetro $\lambda = 1$ e variamos o parâmetro α . Observa-se que para $\alpha \leq 1$ a distribuição é decrescente e, para $\alpha > 1$, a distribuição é unimodal, possuindo assimetria à direita. Na Figura 1(b), fixamos o parâmetro $\alpha = 1.5$ e variamos o parâmetro λ . Notamos que a diminuição do λ colapsa em curvas unimodais com caudas mais pesadas (como ilustrado pelo gráfico relativo em escala semi-logarítmica na Figura 1(c)).

Figura 1 – Função densidade de probabilidade da distribuição EE.



Fonte: Autoria própria (2021)

A distribuição exponencial é um caso particular da distribuição EE tomando $\alpha = 1$ na Equação (2.2). Além disso, a distribuição EE é um caso particular da distribuição Gompertz [GOMPERTZ, 1825]. Note que se uma variável aleatória T tem distribuição Gompertz com parâmetros ρ , α e λ , então sua fda é dada por

$$F(t; \rho, \alpha, \lambda) = [1 - \rho \exp(-t\lambda)]^\alpha, \quad t > \frac{1}{\lambda} \log \rho,$$

em que $\alpha > 0$ é o parâmetro de forma e $\rho, \lambda > 0$ são parâmetros de escala. De fato, quando $\rho = 1$, temos a fda da distribuição EE.

No que segue, apresentamos algumas propriedades matemáticas importantes. Se $X \sim \text{EE}(\alpha, \beta)$, então sua função geradora de momentos (fgm) é [NADARAJAH, 2011b]

$$M(t) = \alpha \lambda \int_0^\infty z^{-t/\lambda} (1 - z)^{\alpha-1} dz = \alpha B\left(1 - \frac{t}{\lambda}, \alpha\right),$$

em que $B(\cdot, \cdot)$ é a função Beta:

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1 - t)^{b-1} dt.$$

Assim, o k -ésimo momento é dado por

$$\mathbb{E}(X^k) = \frac{(-1)^k \alpha}{\lambda^k} \frac{\partial^k}{\partial p^k} B(\alpha, p + 1 - \alpha) \Big|_{p=\alpha}.$$

Com base nos quatro primeiros momentos de X , as expressões para média, variância, assimetria ($s(\cdot)$) e curtose ($\kappa(\cdot)$) são dadas, respectivamente, por

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\psi(\alpha + 1) + C}{\lambda}, \quad \text{Var}(X) = \frac{\pi^2 - 6\psi'(\alpha + 1)}{6\lambda^2},$$

$$s(X) = \frac{[6\sqrt{6}(2\eta(3) + \psi''(\alpha + 1))]}{[\pi^2 - 6\psi'(\alpha + 1)]^{\frac{3}{2}}}$$

e

$$\kappa(X) = \frac{9 \left\{ 3\pi^4 + 60 [\psi'(\alpha + 1)]^2 - 20\pi^2 \psi'(\alpha + 1) - 20\psi'''(\alpha + 1) \right\}}{5 [\pi^2 - 6\psi'(\alpha + 1)]^2},$$

em que C é a constante de Euler, $\psi(x) = d \log \Gamma(x) / dx$ é a função digamma, $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \exp(-t) dt$ é a função gamma, $\psi'(x)$, $\psi''(x)$ e $\psi'''(x)$ representam as derivadas de primeira, segunda e terceira ordem da função digamma, respectivamente, e $\eta(x) = \sum_{i=1}^\infty i^{-x}$ é a função Zeta de Riemann. Para mais detalhes sobre a distribuição EE, ver Gupta e Kundu [2001], Gupta e Kundu [2007], Barros [2008] e Nadarajah [2011a].

2.2 DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL EXPONENCIALIZADA REPARAMETRIZADA E ALGUMAS DE SUAS PROPRIEDADES

Neste seção, introduziremos uma reparametrização da distribuição EE em termos da função quantílica, que será a base da proposta de um modelo de séries temporais com estrutura ARMA.

Inicialmente, note que a função quantílica da EE, $Q_{EE} = F^{-1}(x)$ com $F(\cdot)$ dada pela Equação (2.1), é facilmente obtida pelo método da inversão da fda de EE:

$$q(\tau) := Q_{EE}(\tau; \alpha, \lambda) = \frac{-\log\left(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}}\right)}{\lambda}, \quad \tau \in (0, 1). \quad (2.3)$$

Da Equação (2.3), a seguinte identidade se verifica:

$$\lambda(\tau; \alpha, q(\tau)) = \frac{-\log\left(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}}\right)}{q(\tau)}. \quad (2.4)$$

Aplicando (2.4) nas Equações (2.1) e (2.2), a reparametrização $(\alpha, \lambda) \mapsto (\alpha, q(\tau))$ induz a seguinte definição.

Definição 2.2.1. *A variável aleatória X segue uma distribuição EE reparametrizada (EER), se suas fda e fdp são dadas, respectivamente, por (para $x > 0$)*

$$F(x; \alpha, q(\tau)) = \left\{ 1 - \exp \left[\frac{\log\left(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}}\right)}{q(\tau)} x \right] \right\}^{\alpha} \quad (2.5)$$

e

$$f(x; \alpha, q(\tau)) = \alpha \left[-\frac{\log\left(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}}\right)}{q(\tau)} \right] \exp \left[\frac{\log\left(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}}\right)}{q(\tau)} x \right] \left[1 - \exp \left(\frac{\log\left(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}}\right)}{q(\tau)} x \right) \right]^{\alpha-1}, \quad (2.6)$$

em que $\alpha > 0$ e $\tau \in (0, 1)$. Essa situação será denotada por $X \sim EER(\alpha, q(\tau))$.

A fgm da distribuição EER é dada por

$$M_{EER}(t) = \alpha B \left(1 + \frac{t q(\tau)}{\log(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}})}, \alpha \right)$$

e seu k -ésimo momento é dado por: Para $X \sim EER(\alpha, q(\tau))$,

$$\mathbb{E}(X^k) = \frac{\alpha (-1)^k q^k(\tau)}{\left[-\log\left(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}}\right) \right]^k} \frac{\partial^k}{\partial p^k} B(\alpha, p + 1 - \alpha) \Big|_{p=\alpha}.$$

Seguindo a mesma derivação feita por Nadarajah [2011b], a seguinte proposição se verifica.

Proposição 2.2.1. *Seja $X \sim EER(\alpha, q(\tau))$ para $\tau \in (0, 1)$, a média, variância, assimetria e curtose de X são dadas por*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{q(\tau)[\psi(\alpha + 1) + C]}{-\log\left(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}}\right)}, \quad \text{Var}(X) = \frac{q^2(\tau) [\pi^2 - 6\psi(\alpha + 1)]}{6[-\log\left(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}}\right)]^2},$$

$$s(X) = \frac{[6\sqrt{6} (2\eta(3) + \psi''(\alpha + 1))] }{[\pi^2 - 6\psi'(\alpha + 1)]^{\frac{3}{2}}}$$

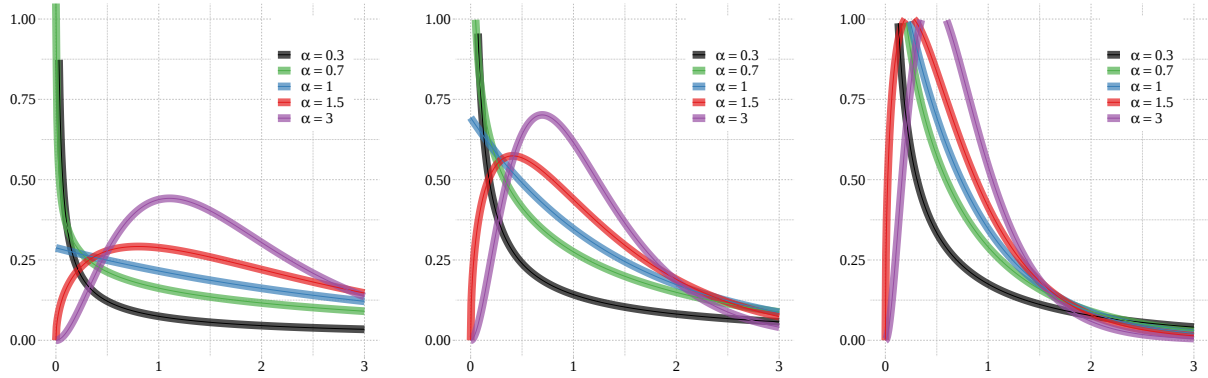
e

$$\kappa(X) = \frac{9 \left\{ 3\pi^4 + 60 [\psi'(\alpha + 1)]^2 - 20\pi^2 \psi'(\alpha + 1) - 20\psi'''(\alpha + 1) \right\}}{5 [\pi^2 - 6\psi'(\alpha + 1)]^2}.$$

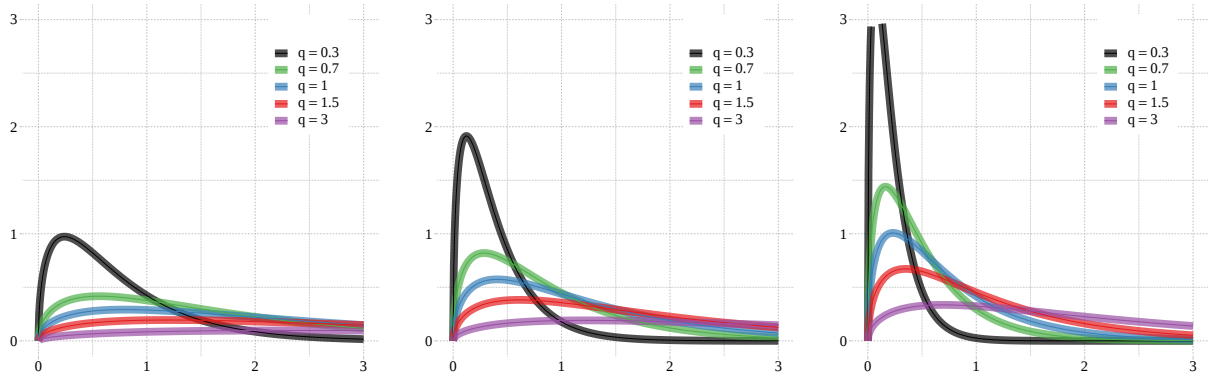
Pode-se observar da Proposição 2.2.1 que a assimetria e curtose das distribuições EE e EER coincidem, pois elas não dependem do parâmetro λ .

A Figura 2 exibe as curvas de densidade da distribuição EER, considerando diferentes valores para os parâmetros α e q . Além de se concluir os mesmos comportamentos das curvas de densidade da distribuição EE, esta figura destaca o efeito do $\tau \in (0, 1)$ na densidade da EER. Pode-se observar que o aumento de τ tende a tornar as curvas mais leptocúrticas.

Figura 2 – Função densidade de probabilidade da distribuição EE reparametrizada.



(a) $q = 1, \tau = 0.25$ e diferentes valores para α (b) $q = 1, \tau = 0.5$ e diferentes valores para α (c) $q = 1, \tau = 0.75$ e diferentes valores para α



(d) $\alpha = 1.5, \tau = 0.25$ e diferentes valores para q (e) $\alpha = 1.5, \tau = 0.5$ e diferentes valores para q (f) $\alpha = 1.5, \tau = 0.75$ e diferentes valores para q

Fonte: Autoria própria (2021)

3 PROCESSO ARMA EXPONENCIAL EXPONENCIALIZADO REPARAMETRIZADO

3.1 INTRODUÇÃO DO MODELO

Um modelo bastante utilizado em séries temporais é o Autoregressivo e de Médias Móveis (ARMA), para mais detalhes ver Brockwell e Davis [2016]. O processo ARMA(p, q) é uma combinação entre processos AR e MA, em que p representa a ordem do processo autoregressivo e q a ordem do processo de médias móveis.

Nesta seção, introduziremos um modelo de série temporal segundo a abordagem de regressão para a distribuição EER (EER-ARMA) com preditor estruturado a partir dos seus quantis condicionais. A construção desse modelo é similar àquela empregada no GARMA [BENJAMIN; RIGBY; STASINOPOULOS, 2003], BARMA [ROCHA; CRIBARI-NETO, 2009], KARMA [BAYER; BAYER; PUMI, 2017], $\mathcal{G}_I^0$ ARMA [ALMEIDA-JUNIOR; NASCIMENTO, 2021] e, mais recentemente, em Ribeiro [2020]. Para tal, precisamos da definição de uma componente sistemática e de uma aleatória.

Como componente sistemática, assumiremos a relação: Sejam $\{x_t; t = 1, \dots, n\}$ uma série temporal observada, $q_t = q_t(\tau) = F^{-1}(\tau \mid \mathcal{F}_{t-1})$ o quantil τ da distribuição EER no instante t e $\mathcal{F}_t = \sigma(X_t, X_{t-1}, \dots)$ a σ -álgebra gerada por informações observadas até o tempo t ,

$$g(q_t) = \eta_t = \delta + \mathbf{z}_t^\top \boldsymbol{\beta} + \sum_{i=1}^p \phi_i \left[g(x_{t-i}) - \mathbf{z}_{t-i}^\top \boldsymbol{\beta} \right] + \sum_{k=1}^q \boldsymbol{\theta}_k r_{t-k}, \quad (3.1)$$

em que

- $g(\cdot)$ é uma função de ligação estritamente monótona e duplamente diferenciável (que objetiva relacionar o quantil q_t ao preditor linear η_t);
- $r_t = g(x_t) - g(q_t)$ é um erro (de natureza determinística) associado à estrutura (3.1);
- δ é o intercepto do modelo;
- $\mathbf{z}_t \in \mathbb{R}^k$ ($t = 1, \dots, n$) é um conjunto de k séries temporais que ocorrem conjuntamente à série de interesse, x_t ;
- $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_k)^\top$ é um vetor de parâmetros desconhecidos associados ao vetor de covariáveis $\mathbf{z}_t = (z_{t1}, \dots, z_{tk})^\top$; e
- $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_p)^\top$ e $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_q)^\top$ são os vetores de parâmetros dos modelos AR e MA, respectivamente.

A forma do modelo AR(p) obtida de (3.1) é dada por

$$g(q_t) = \eta_t = \delta + \mathbf{z}_t^\top \boldsymbol{\beta} + \sum_{i=1}^p \phi_i [g(x_{t-i}) - \mathbf{z}_{t-i}^\top \boldsymbol{\beta}].$$

A forma do modelo MA(q) obtida de (3.1) é expressa por

$$g(q_t) = \eta_t = \delta + \sum_{k=1}^q \theta_k r_{t-k}.$$

Nesta dissertação, escolhemos três funções de ligação para fazer o mapeamento dos reais positivos para os reais, $g(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Elas deverão satisfazer $\eta_t = g^{-1}(q_t) \Leftrightarrow q_t = g(\eta_t)$.

Por outro lado, a componente aleatória é definida no que segue.

Definição 3.1.1. *Sejam $\{X_t; t = 1, \dots, n\}$ uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição $EER(\alpha, q(\tau))$ e $\mathcal{F}_t = \sigma(X_t, X_{t-1}, \dots)$ a σ -álgebra gerada por informações observadas até o tempo t . Dado um conjunto mensurável de informações anteriores, a distribuição condicional de cada $X_t | \mathcal{F}_{t-1}$ segue a distribuição EER, ou seja $X_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim EE(\alpha, q_t)$ tal que q_t é dada na Equação (3.1), dessa forma a densidade de X é dada por*

$$f(x_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \alpha \left[-\frac{\log(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}})}{q_t} \right] \exp \left[\frac{\log(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}})}{q_t} x_t \right] \left\{ 1 - \exp \left[\frac{\log(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}})}{q_t} x_t \right] \right\}^{\alpha-1}. \quad (3.2)$$

O modelo decorrente da Definição 3.1.1 será denotado por $X_t \sim \text{EER-ARMA}(p, q) : g(\cdot), \tau$.

3.2 DEFININDO E AVALIANDO GERADORES PARA O MODELO EER-ARMA

Nesta seção, apresentam-se alguns exemplos para alguns submodelos de EER-ARMA(p,q):

- EER-AR(1): $g(q_t) = \delta + \phi g(x_{t-1})$, ou, equivalentemente, $g(x_t) = \delta + \phi g(x_{t-1}) + \underbrace{g(x_t) - g(q_t)}_{r_t}$;
- EER-MA(1): $g(q_t) = \delta + \theta [g(x_{t-1}) - g(q_{t-1})]$ ou, equivalentemente, $g(x_t) = \delta + \theta r_{t-1} + r_t$;
- EER-ARMA(1,1): $g(q_t) = \delta + \phi g(x_{t-1}) + \theta [g(x_{t-1}) - g(q_{t-1})]$ ou, equivalentemente, $g(x_t) = \delta + \phi g(x_{t-1}) + \theta r_{t-1} + r_t$.

Estes submodelos são gerados satisfazendo o pseudo código dado pelo Algoritmo 1.

É esperado dos livros clássicos de AST [BROCKWELL; DAVIS, 2016] que

- o processo AR(1) tenha um corte no primeiro lag da PACF e a ACF com um decrescimento exponencial ou senoidal;

Algorithm 1: Algoritmo de geração para uma série EER-ARMA(p,q)

- 1 Atribua valores para os parâmetros λ , δ , $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_p)^\top$ e $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_q)^\top$ e para os pares (x_i, q_i) tal que $i = 1, \dots, m$, e $m = \max\{p, q\}$;
- 2 Calcule q_t para $t \geq m + 1$ usando:

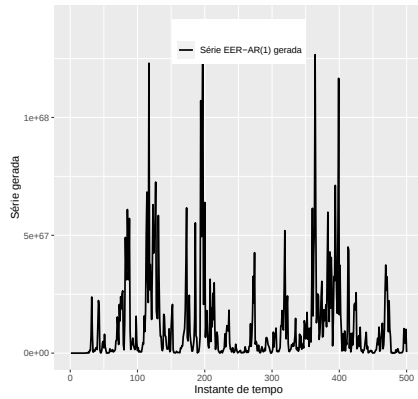
$$q_t = g^{-1} \left(\delta + \sum_{i=1}^p \phi_i g(x_{t-i}) + \sum_{i=1}^q \theta_i [g(x_{t-i}) - g(q_{t-i})] \right).$$

- 3 Gere $X_t \sim EER(\alpha, q_t)$ para $t = m + 1, \dots, n$.
 - 4 Repita os passos 2 e 3 até que os n valores da série sejam obtidos.
-

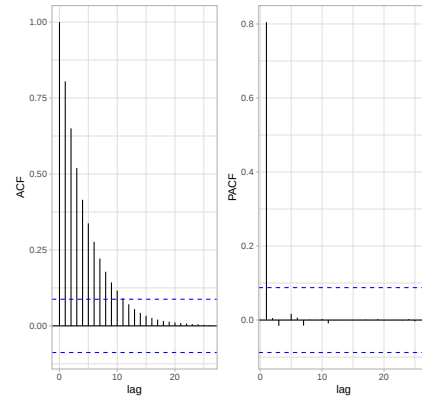
- o processo MA(1) tenha um corte no primeiro lag da ACF e a PACF com um decaimento exponencial ou senoidal;
- o processo ARMA(1,1) não tenha cortes claramente definidos.

As Figuras 3, 4 e 5 apresentam cenários de simulação para os submodelos EER-AR(1), EER-MA(1) e EER-ARMA(1,1). Pode-se observar que o comportamento esperado é alcançado e, assim, os cortes nos pares amostrais (ACF, PACF) também se constituem para o novo processo um mecanismo de identificação de ordem em processos puramente autoregressivos ou de médias móveis.

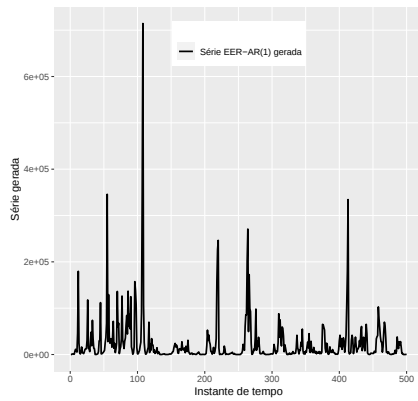
Figura 3 – Séries geradas a partir do EER-AR(1) e seus pares (ACF,PACF).



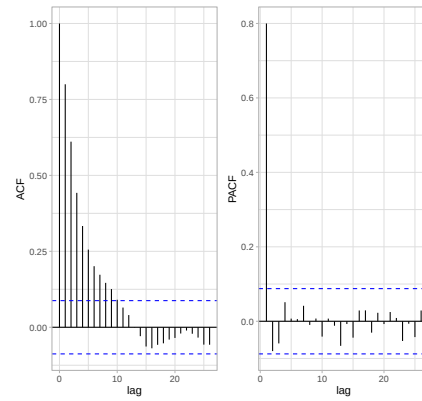
(a) Série gerada de EER-AR(1): $(\delta, \phi, \alpha, g(x), \tau)$
 $(1, 0.8, 1, \log W(x), 0.5)$



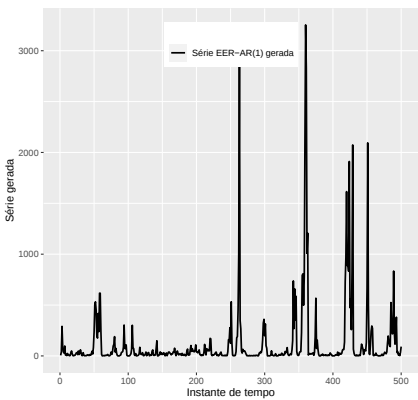
(b) ACF-PACF



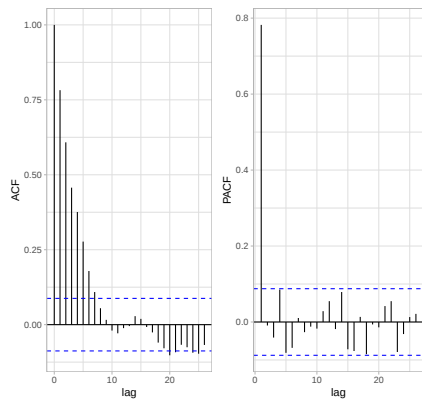
(c) Série gerada de EER-AR(1): $(\delta, \phi, \alpha, g(x), \tau)$
 $(1, 0.8, 1, \log(x), 0.5)$



(d) ACF-PACF



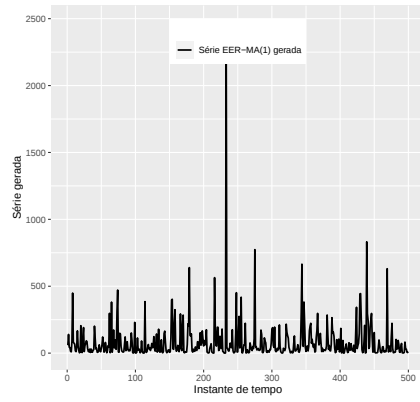
(e) Série gerada de EER-AR(1): $(\delta, \phi, \alpha, g(x), \tau)$
 $(1, 0.8, 1, \sqrt{x}, 0.5)$



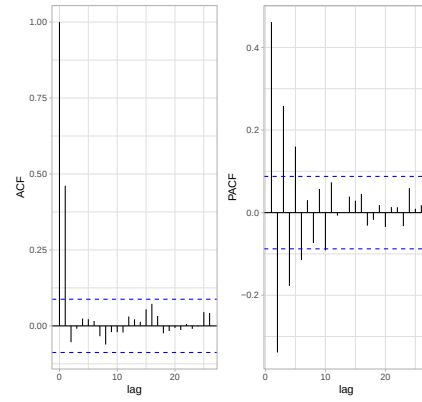
(f) ACF-PACF

Fonte: Autoria própria (2021)

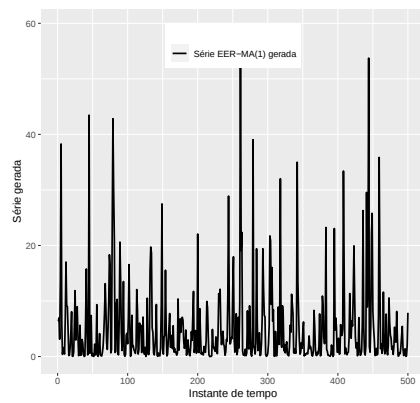
Figura 4 – Séries geradas a partir do EER-MA(1) e seus pares (ACF,PACF).



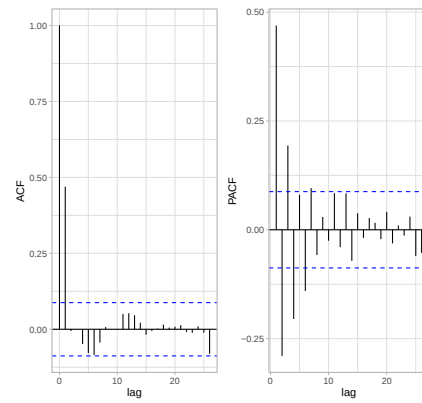
(a) Série gerada de EER-MA(1): $(\delta, \theta, \alpha, g(x), \tau)$
 $(1, 0.8, 1, \log W(x), 0.5)$



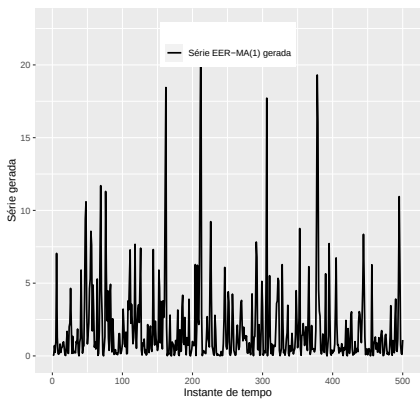
(b) ACF-PACF



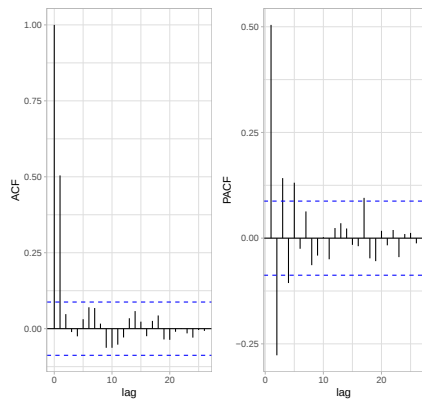
(c) Série gerada de EER-MA(1): $(\delta, \theta, \alpha, g(x), \tau)$
 $(1, 0.8, 1, \log(x), 0.5)$



(d) ACF-PACF



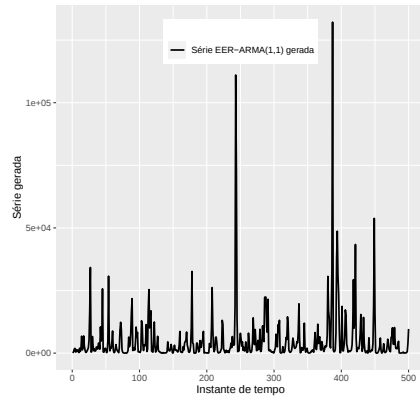
(e) Série gerada de EER-MA(1): $(\delta, \theta, \alpha, g(x), \tau)$
 $(1, 0.8, 1, \sqrt{x}, 0.5)$



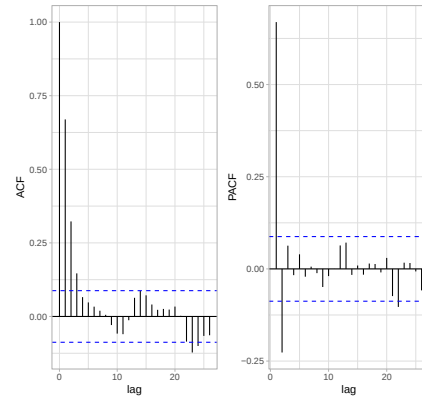
(f) ACF-PACF

Fonte: Autoria própria (2021)

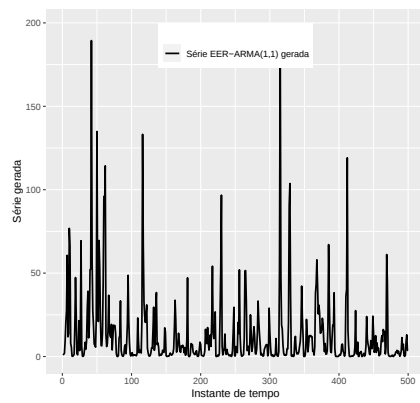
Figura 5 – Séries geradas a partir do EER-ARMA(1,1) e seus pares (ACF,PACF).



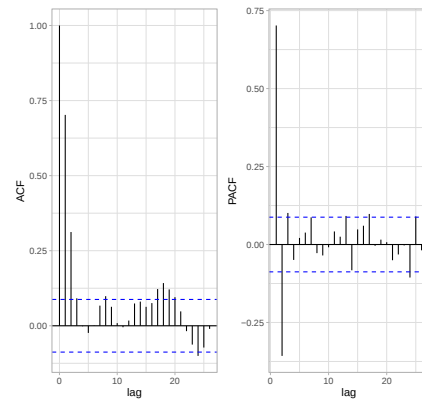
(a) Série gerada de EER-ARMA(1,1): $(\delta, \phi, \theta, \alpha, g(x), \tau) = (1, 0.45, 0.45, 1, \log W(x), 0.5)$



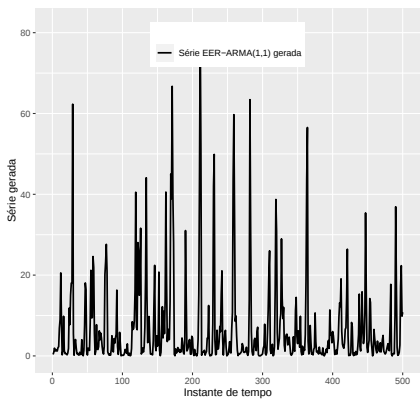
(b) ACF-PACF



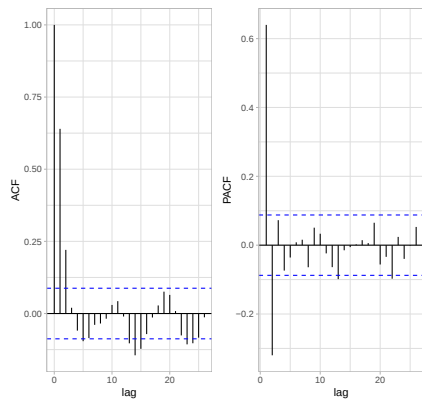
(c) Série gerada de EER-ARMA(1,1): $(\delta, \phi, \theta, \alpha, g(x), \tau) = (1, 0.45, 0.45, 1, \log(x), 0.5)$



(d) ACF-PACF



(e) Série gerada de EER-ARMA(1,1): $(\delta, \phi, \theta, \alpha, g(x), \tau) = (1, 0.45, 0.45, 1, \sqrt{x}, 0.5)$



(f) ACF-PACF

Fonte: Autoria própria (2021)

3.3 ESTIMAÇÃO POR MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

Esta seção aborda a estimação por máxima verossimilhança condicional para os parâmetros do modelo EER-ARMA(p,q). Seja $\{x_1, \dots, x_n\}$ uma série temporal observada a partir da série estocástica $\{X_1, \dots, X_n\}$ tal que $X_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim \text{EER-ARMA}(p, q) : \{\alpha, q_t\}$, em que q_t é dada na Equação (3.1). Neste caso, o vetor de parâmetros associado é $\boldsymbol{\pi} = (\alpha, \boldsymbol{\beta}^\top, \delta, \boldsymbol{\phi}^\top, \boldsymbol{\theta}^\top)^\top$. A estimação por máxima verossimilhança condicional consiste em maximizar a função de log-verossimilhança condicional em $\boldsymbol{\pi}$ dada por

$$\ell(\boldsymbol{\pi}) = \ell(\boldsymbol{\pi}; x_{m+1}, \dots, x_n) = \sum_{t=m+1}^n \underbrace{\log f(x_t; \boldsymbol{\pi})}_{\ell_t(\boldsymbol{\pi}; x_t)} = \sum_{t=m+1}^n \ell_t(\boldsymbol{\pi}; x_t),$$

em que

$$\begin{aligned} \ell_t(\boldsymbol{\pi}; x_t) = & \log(\alpha) - \log(q_t) + \log[-\log(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}})] + \frac{\log(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}})x_t}{q_t} \\ & + (\alpha - 1) \log \left\{ 1 - \exp \left[\frac{\log(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}})x_t}{q_t} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Uma vetor importante para o processo de estimação por máxima verossimilhança é a vetor escore,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\boldsymbol{\pi}) &= \left[\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\pi})}{\partial \alpha}, \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\beta}^\top}, \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\pi})}{\partial \delta}, \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\phi}^\top}, \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top} \right] \\ &= \sum_{t=m+1}^n \left[\underbrace{\frac{\partial \ell_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \alpha}}_{U_{\alpha,t}}, \underbrace{\frac{\partial \ell_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\beta}^\top}}_{U_{\boldsymbol{\beta},t}}, \underbrace{\frac{\partial \ell_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \delta}}_{U_{\delta,t}}, \underbrace{\frac{\partial \ell_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\phi}^\top}}_{U_{\boldsymbol{\phi},t}}, \underbrace{\frac{\partial \ell_t(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top}}_{U_{\boldsymbol{\theta},t}} \right], \end{aligned}$$

em que as componentes são determinadas na seguinte proposição.

Proposição 3.3.1. *Seja $\mathbf{U}(\boldsymbol{\pi})$ o vetor escore associado à série $\{x_t; t = 1, \dots, n\}$. Ele é*

determinado pelas seguintes componentes:

$$\begin{aligned}
U_{\alpha,t} &= \frac{1}{\alpha} + \log \left\{ 1 - \exp \left[\frac{x_t \log(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}})}{q_t} \right] \right\} - \frac{\log(\tau) \tau^{1/\alpha}}{\alpha^2 [-\log(1 - \tau^{1/\alpha})](1 - \tau^{1/\alpha})} \\
&\quad + \frac{\log(\tau) \tau^{1/\alpha} x_t}{\alpha^2 (1 - \tau^{1/\alpha}) q_t} + \frac{(\alpha - 1) \exp \left[\frac{x_t \log(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}})}{q_t} \right] x_t \log(\tau) \tau^{1/\alpha}}{q_t (1 - \tau^{1/\alpha}) \left\{ 1 - \exp \left[\frac{x_t \log(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}})}{q_t} \right] \right\}}; \\
U_{\beta_i,t} &= \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\pi}; x_t)}{\partial q_t} \frac{1}{g'(q_t)} \left(\mathbf{z}_t^\top - \sum_{i=1}^p \phi_i \mathbf{z}_{t-i}^\top - \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial \eta_{t-j}}{\partial \boldsymbol{\beta}^\top} \right); \\
U_{\delta,t} &= \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\pi}; x_t)}{\partial q_t} \frac{1}{g'(q_t)} \left(1 - \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial \eta_{t-j}}{\partial \delta} \right); \\
U_{\phi_i,t} &= \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\pi}; x_t)}{\partial q_t} \frac{1}{g'(q_t)} \left(g(x_{t-i}) - \mathbf{z}_{t-i}^\top \boldsymbol{\beta} - \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial \eta_{t-j}}{\partial \phi_i} \right); \\
U_{\theta_l,t} &= \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\pi}; x_t)}{\partial q_t} \frac{1}{g'(q_t)} \left(r_{t-l} - \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial \eta_{t-j}}{\partial \theta_l} \right).
\end{aligned}$$

Detalhes sobre a dedução destes termos podem ser achados no Apêndice A. Outra função importante é a matriz observada associada cujos componentes é derivada no Apêndice B.

As estimativas de máxima verossimilhança condicionais (EMVCs) são dadas por

$$\hat{\boldsymbol{\pi}} = \arg \max_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^+} [\ell(\boldsymbol{\pi})]$$

ou, equivalentemente, pela solução do sistema não linear de equações $\mathbf{U}(\boldsymbol{\pi})|_{\boldsymbol{\pi}=\hat{\boldsymbol{\pi}}} = \mathbf{0}$. Como essas equações não possuem formas fechadas, recorreremos ao uso de métodos iterativos para obter as EMVCs. Nesta dissertação, utilizamos o método iterativo de Nelder-Mead (NM) que está disponível no software **R** e, como chute inicial para os estimadores de $[\delta, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}]$, o estimador de mínimos quadrados ordinários

$$[\delta, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}, \widetilde{\boldsymbol{\phi}}, \widetilde{\boldsymbol{\theta}}] = (\mathbf{Z}^\top \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (3.4)$$

em que

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{1}_{n-m}, \{z_{t,1}, \dots, z_{t,k}, g(x_{t-1}), \dots, g(x_{t-p}), r_{t-1}, \dots, r_{t-q}; t = m+1, \dots, n\}],$$

em que $z_{t,j}$ é a j -ésima coluna de $\mathbf{z}_t$. Como chute inicial para α , o estimador máxima verossimilhança para α ao se eliminar a dependência para o caso EE não reparametrizado:

$$\tilde{\alpha}(\tau) = \frac{n}{-\sum_{t=m+1}^n \log[1 - \exp(-\tilde{\lambda}_t(\tau) x_t)]},$$

em que $\tilde{\lambda}_t(\tau) = -\log(1 - \tau)/\tilde{q}_t(\tau)$ e $\tilde{q}_t(\tau)$ representa a Equação (3.1) depois de substituir os parâmetros pelo estimador (3.4).

3.4 EQUAÇÕES DE PREDIÇÃO

A predição no modelo EER-ARMA(p,q) será feita com base nos quantis q_t :

$$q_t = g^{-1} \left\{ \delta + \mathbf{z}_t^\top \boldsymbol{\beta} + \sum_{i=1}^p \phi_i \left[g(x_{t-i}) - \mathbf{z}_{t-i}^\top \boldsymbol{\beta} \right] + \sum_{k=1}^q \boldsymbol{\theta}_k r_{t-k} \right\}, \quad (3.5)$$

em que

$$r_t = \begin{cases} g(x_t) - g(q_t); m < t < n, \\ 0; t < m \end{cases}$$

Dado o modelo preditivo, para determinar um modelo de previsão em série temporal, usaremos a expressão (3.5) para predizer valores futuros a partir do observado. Dessa forma o modelo de previsão usado será:

$$q_{n+h} = g^{-1} \left\{ \delta + \mathbf{z}_{n+h}^\top \boldsymbol{\beta} + \sum_{i=1}^p \phi_i \left[g(x_{n+h-i}) - \mathbf{z}_{n+h-i}^\top \boldsymbol{\beta} \right] + \sum_{k=1}^q \boldsymbol{\theta}_k r_{n+h-k} \right\}.$$

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

4.1 ESTUDO DE SIMULAÇÃO MONTE CARLO

Esta seção endereça um estudo de simulação de Monte Carlo a fim de quantificar o desempenho das EMVs para os parâmetros do processo EE-ARMA. Como diferentes preditores podem ser definidos a partir de expressões dos quantis, trataremos daquele decorrente da mediana (ao invés da média como na abordagem proposta por Benjamin, Rigby e Stasinopoulos [2003]). Como critérios de avaliação, consideramos a mediana dos valores estimados e Erro quadrático médio (EQM). Além disso, é analisada a influência de três funções de ligações, a saber: logarítmica, $\log(\cdot)$, raiz quadrada, $\sqrt{(\cdot)}$, e a função logarítmica W de Lambert, $\log W(\cdot)$. Almeida-Junior e Nascimento [2021] apresentou detalhes sobre o uso da ligação $\log W(\cdot)$ para variáveis aleatórias com suporte positivo.

Especificando os fatores de variação da simulação, consideramos 10.000 réplicas de Monte Carlo levando em consideração os tamanhos amostrais $n \in \{25, 120, 220\}$. Os valores assumidos para os parâmetros foram: $\delta = 1$, $\phi \in \{-0.2, 0.2\}$ e $\alpha \in \{0.5, -0.5\}$. Como regra de avaliação, as melhores avaliações são associadas aos menores valores EQM.

As Tabelas 1, 2 e 3 apresentam os valores para as medidas de avaliação consideradas referentes aos modelos EER-AR(1), MA(1) e ARMA(1,1), respectivamente. Os valores destacados indicam as menores estimativas, que em geral são associadas à função $\log W(\cdot)$, para todos os tamanhos amostrais. Conforme o esperado, a mediana dos valores das estimativas se aproximam dos valores dos parâmetros. Os valores do EQM diminuem com o aumento dos tamanhos das series, $n \in \{25, 120, 220\}$.

Quanto à mudança dos valores de ϕ , passando de um valor positivo para negativo, observou-se um efeito relevante na estimação: Um valor de EQM maior para valores negativos (independente da função de ligação). Outro ponto importante é que o valor α não mostrou influência no resultado da estimação de ϕ ou δ .

No que segue, apresenta-se uma análise das estimativas da Tabela 1 através de desigualdades do EQM para o modelo AR(1):

- Para $n = 25$ e $\alpha = 0.5$:

$$\left\{ \begin{array}{l} EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\delta}) < EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\delta}) < EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\delta}); \quad \text{para } \delta = 1. \\ EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\phi}) < EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\phi}) < EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\phi}); \quad \text{para } \phi = 0.2. \\ EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\phi}) < EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\phi}) < EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\phi}); \quad \text{para } \phi = -0.2. \end{array} \right.$$

- Para $n = 120$ e $\alpha = 0.5$

$$\left\{ \begin{array}{l} EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\delta}) < EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\delta}) < EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\delta}); \quad \text{para } \delta = 1. \\ EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\phi}) < EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\phi}) < EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\phi}); \quad \text{para } \phi = 0.2. \\ EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\phi}) < EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\phi}) < EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\phi}); \quad \text{para } \phi = -0.2. \end{array} \right.$$

- Para $n = 220$ e $\alpha = 0.5$

$$\left\{ \begin{array}{l} EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\delta}) < EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\delta}) < EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\delta}); \quad \text{para } \delta = 1. \\ EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\phi}) < EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\phi}) < EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\phi}); \quad \text{para } \phi = 0.2. \\ EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\phi}) < EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\phi}) < EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\phi}); \quad \text{para } \phi = -0.2. \end{array} \right.$$

Tabela 1 – Resultados das estimativas para o processo EER-AR(1)

Ligação	Medidas	n	$\pi = (\delta, \phi, \alpha)$			$\pi = (\delta, \phi, \alpha)$		
			$\delta = 1$	$\phi = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\delta = 1$	$\phi = -0.2$	$\alpha = 0.5$
$\log(\cdot)$	Mediana	25	0.9794	0.1855	0.5372	0.9735	-0.2006	0.5432
		120	0.9891	0.1901	0.5194	0.9735	-0.2004	0.5113
		220	0.9934	0.1988	0.5078	0.9953	-0.1996	0.5078
	EQM	25	0.2325	0.1067	0.0939	0.2912	0.4904	0.2150
		120	0.2337	0.0908	0.0949	0.2423	0.4885	0.2418
		220	0.2286	0.0849	0.0921	0.2388	0.4874	0.2330
$\sqrt{(\cdot)}$	Mediana	25	1.0600	0.1462	0.5428	1.0192	-0.2264	0.5422
		120	1.0056	0.1898	0.5073	1.0048	-0.2061	0.5068
		220	1.0041	0.1879	0.5038	1.0012	-0.2013	0.5023
	EQM	25	0.2873	0.1434	0.0932	0.2826	0.5242	0.2168
		120	0.2549	0.0966	0.0943	0.2559	0.4981	0.2128
		220	0.2461	0.0712	0.0913	0.2246	0.4146	0.2067
$\log W(\cdot)$	Mediana	25	0.9883	0.1949	0.5370	0.9820	-0.1924	0.5404
		120	0.9954	0.2011	0.5070	0.9971	-0.1971	0.5078
		220	0.9981	0.2007	0.5030	0.9981	-0.1988	0.5028
	EQM	25	0.2342	0.0942	0.0952	0.2305	0.4811	0.2164
		120	0.2446	0.0901	0.0945	0.2308	0.4809	0.2245
		220	0.2281	0.0807	0.0815	0.2241	0.4761	0.2080

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 2 – AR(1) Modificando o parâmetro α -

Ligação	Medidas	n	$\pi = (\theta, \phi, \alpha)$			$\pi = (\theta, \phi, \alpha)$		
			$\delta = 1$	$\phi = 0.2$	$\alpha = 2$	$\delta = 1$	$\phi = -0.2$	$\alpha = 2$
$\log(\cdot)$	Mediana	25	1.0307	0.1593	2.2290	0.9956	-0.2156	2.2067
		120	1.0037	0.1916	2.0364	0.9975	-0.2030	2.0413
		220	1.0013	0.1973	2.0197	1.0001	-0.2025	2.0246
	EQM	25	0.5296	0.6995	1.7542	0.8904	1.4744	1.9784
		120	0.6271	0.6498	1.0919	0.9994	1.4492	1.0997
		220	0.6396	0.6444	1.0338	0.9975	1.4524	1.0500
$\sqrt{(\cdot)}$	Mediana	25	1.0600	0.1462	0.5428	1.0174	-0.2246	2.2295
		120	1.0322	0.1663	0.5247	1.0038	-0.2064	2.0405
		220	1.0078	0.1898	0.5073	1.0016	-0.2026	2.0275
	EQM	25	0.2873	0.1434	0.0932	0.9015	1.5042	1.9724
		120	0.2694	0.1188	0.0941	0.9903	1.4542	1.0973
		220	0.2549	0.0966	0.0943	0.9949	1.4455	1.0604
$\log W(\cdot)$	Mediana	25	0.9883	0.1949	0.5370	0.9938	-0.1987	2.2289
		120	0.9905	0.1979	0.5221	0.9984	-0.1998	2.0478
		220	0.9954	0.2011	0.5070	0.9994	-0.2004	2.0233
	EQM	25	0.2342	0.0942	0.0952	0.9997	1.4442	2.0378
		120	0.9905	0.1979	0.5221	1.0026	1.4434	1.1021
		220	0.9954	0.2011	0.5070	0.9992	1.4428	1.0501

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 3 – Processo MA(1)

Ligação	Medidas	N	$\alpha = 2$			$\alpha = 2$		
			$\delta = 1$	$\theta = -0.2$	$\alpha = 2$	$\delta = 1$	$\theta = 0.2$	$\alpha = 2$
$\log(\cdot)$	Mediana	25	0.9883	-0.2782	2.2438	0.9980	0.1791	2.2261
		120	0.9980	-0.2077	2.0541	0.9958	0.1873	2.0444
		220	1.0011	-0.2074	2.0386	0.9976	0.1967	2.0182
	MSE	25	0.9508	1.6121	2.1971	0.5570	0.6828	1.7592
		120	0.9935	1.4512	1.1017	0.6241	0.6529	1.0992
		220	0.9909	1.4467	1.0407	0.6366	0.6391	1.0752
$\sqrt{\cdot}$	Mediana	25	1.0033	-0.2667	2.2135	1.0008	0.1784	2.2383
		120	1.0026	-0.2087	2.0337	1.0039	0.1963	2.0640
		220	1.00047	-0.2059	2.0205	0.9996	0.1986	2.0442
	MSE	25	0.9874	1.6079	2.0680	0.6203	0.6788	1.7949
		120	0.9972	1.4574	1.0424	0.6463	0.6424	1.1238
		220	0.9960	1.4606	1.0438	0.6366	0.6390	1.0752
$\log W(\cdot)$	Mediana	25	0.9975	-0.2374	2.2705	0.9978	0.1866	2.2261
		120	0.9993	-0.2036	2.03835	0.9998	0.1992	2.0508
		220	0.9988	-0.2024	2.0258	1.0001	0.1993	2.0129
	MSE	25	1.0035	1.5592	2.1113	0.6382	0.6533	1.7694
		120	1.0012	1.4501	1.0683	0.6405	0.6463	1.1267
		220	1.0023	1.4430	1.0701	0.63819	0.6533	1.7694

Fonte: Autoria própria (2021)

A Tabela 3 mostra os resultados para as estimações dos parâmetros do processo MA(1). A mudança do valor do parâmetro θ se mostrou invariante sobre os valores das estimativas de δ e α . Nota-se a diminuição do EQM, para valores positivos de $\hat{\theta}$ e, assim, as estimativas para valores dos parâmetros são melhores para θ positivo.

Seguem-se as desigualdades para o processo MA(1), observadas na Tabela 3:

- Para $n = 25, 120$ e 220 , respectivamente, e $\delta = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\delta}) < EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\delta}) < EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\delta}); \quad \text{para } \alpha = 2. \\ EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\delta}) < EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\delta}) < EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\delta}); \quad \text{para } \alpha = 2. \\ EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\delta}) < EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\delta}) < EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\delta}); \quad \text{para } \alpha = 2. \end{array} \right.$$

- Para $n = 25, 120$ e 220 , respectivamente, e $\theta = -0.2$

$$\left\{ \begin{array}{l} EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\theta}) < EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\theta}) < EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\theta}); \quad \text{para } \alpha = 2. \\ EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\theta}) < EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\theta}) < EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\theta}); \quad \text{para } \alpha = 2. \\ EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\theta}) < EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\theta}) < EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\theta}); \quad \text{para } \alpha = 2. \end{array} \right.$$

- Para $n = 25, 120$ e 220 , respectivamente, e $\theta = -0.2$

$$\left\{ \begin{array}{l} EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\theta}) < EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\theta}) < EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\theta}); \quad \text{para } \alpha = 2. \\ EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\theta}) < EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\theta}) < EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\theta}); \quad \text{para } \alpha = 2. \\ EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\theta}) < EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\theta}) < EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\theta}); \quad \text{para } \alpha = 2. \end{array} \right.$$

Outro ponto relevante é notar que a função de ligação logarítmica obteve melhores estimativas para valores positivos, enquanto a função de ligação logarítmica W de Lambert se saiu melhor para valores negativos (na Tabela 3, com $\phi = -0.2$). A Tabela 4 mostra que, mesmo para um processo MA(1), a função log W de Lambert obteve melhores estimativas, que implica afirmar que tal fato deve acontecer para valores menores de α .

Tabela 4 – Processo MA(1)

Ligação	Medidas	N	$\alpha = 0.5$			$\alpha = 0.5$		
			$\delta = 1$	$\theta = -0.2$	$\alpha = 0.5$	$\delta = 1$	$\theta = 0.2$	$\alpha = 0.5$
$\log(\cdot)$	Mediana	25	0.9775	-0.2181	0.5424	0.9689	0.2061	0.5430
		120	0.9950	-0.2026	0.5073	0.9829	0.1969	0.5076
		220	1.0087	-0.2017	0.5043	0.9951	0.1998	0.5038
	MSE	25	0.2566	0.5202	0.2171	0.2274	0.1001	0.0958
		120	0.2465	0.4940	0.2432	0.2124	0.0937	0.0945
		220	0.2519	0.4917	0.2464	0.2467	0.0917	0.0929
$\sqrt{\cdot}$	Mediana	25	1.0117	-0.2353	0.5462	1.0059	0.1859	0.5467
		120	1.0015	-0.2080	0.5041	1.0048	0.1964	0.5093
		220	1.0008	-0.2048	0.5035	1.0032	0.1971	0.5037
	MSE	25	0.2552	0.5316	0.2118	0.2550	0.1595	0.0987
		120	0.2518	0.5005	0.2416	0.2566	0.0902	0.0975
		220	0.2515	0.4974	0.2460	0.2541	0.0908	0.0922
$\log W(\cdot)$	Mediana	25	1.0003	-0.1953	0.5389	0.9968	0.2029	0.5396
		120	1.0017	-0.1974	0.5079	0.9988	0.2027	0.5043
		220	1.0019	-0.1982	0.5052	1.0009	0.2009	0.5056
	MSE	25	0.2500	0.4816	0.2208	0.2458	0.0891	0.0953
		120	0.2530	0.4864	0.2417	0.2006	0.0033	0.0063
		220	0.2513	0.4877	0.2444	0.2550	0.0903	0.0916

Fonte: Autoria própria (2021)

A Tabela 5 mostra os resultados para as estimações dos parâmetros do processo ARMA(1,1). Conforme é observado as menores estimativas ficaram distribuídas para as funções de ligações $\log(\cdot)$ e $\log W(\cdot)$. O valor de α mostrou não ter influência sobre o comportamentos dos valores das estimativas dos demais parâmetros. Seguem as desigualdades para o processo ARMA(observadas na Tabela 5).

- Para $n = 25, 100$ e 200 , respectivamente, e $\delta = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\delta}) < EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\delta}) < EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\delta}); \quad \text{para } \alpha = 2. \\ EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\delta}) < EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\delta}) < EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\delta}); \quad \text{para } \alpha = 2. \\ EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\delta}) < EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\delta}) < EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\delta}); \quad \text{para } \alpha = 2. \end{array} \right.$$

- Para $n = 25, 100$ e 200 , respectivamente, e $\phi = 0.5$

$$\left\{ \begin{array}{l} EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\phi}) < EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\phi}) < EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\phi}); \quad \text{para } \alpha = 2. \\ EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\phi}) < EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\phi}) < EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\phi}); \quad \text{para } \alpha = 2. \\ EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\phi}) < EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\phi}) < EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\phi}); \quad \text{para } \alpha = 2. \end{array} \right.$$

- Para $n = 25, 100$ e 200 , respectivamente, e $\theta = 0.5$

$$\left\{ \begin{array}{l} EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\theta}) < EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\theta}) < EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\theta}); \quad \text{para } \alpha = 2. \\ EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\theta}) < EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\theta}) < EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\theta}); \quad \text{para } \alpha = 2. \\ EQM_{\sqrt{(\cdot)}}(\hat{\theta}) < EQM_{\log(\cdot)}(\hat{\theta}) < EQM_{\log W(\cdot)}(\hat{\theta}); \quad \text{para } \alpha = 2. \end{array} \right.$$

Tabela 5 – Processo ARMA(1,1)

Ligação	Medidas	N	$\alpha = 2$			$\alpha = 2$		
			$\delta = 1$	$\phi = 0.5$	$\theta = 0.5$	$\alpha = 2$	$\delta = 1$	$\phi = 0.5$ $\theta = 0.5$ $\alpha = 2$
$\log(\cdot)$	Mediana	25	1.0197	0.4685	0.5263	2.1423	0.9448	-0.4608 -0.6397 2.4590
		100	1.0229	0.4812	0.5210	2.0897	0.9814	-0.4831 -0.5406 2.0807
		200	1.0061	0.4900	0.5113	2.0456	0.9904	-0.4940 -0.5127 2.0383
	EQM	25	0.2509	0.1032	0.0971	1.7525	1.3809	0.6056 1.2529 5.0853
		100	0.2669	0.1159	0.0840	1.6517	1.2936	0.7613 0.8659 3.9676
		200	0.2705	0.0975	0.0839	1.5354	1.1792	0.7959 0.7842 3.4667
$\sqrt{\cdot}$	Mediana	25	1.0472	0.4756	0.5281	2.1864	0.9992	-0.4971 -0.5371 2.4115
		100	1.0148	0.4959	0.5068	2.0795	0.9944	-0.4924 -0.5081 2.1116
		200	1.0038	0.4902	0.5058	2.0376	1.0002	-0.5015 -0.4999 2.0488
	EQM	25	0.2987	0.1120	0.0749	1.8101	1.4449	0.6346 1.0372 4.9121
		100	0.2766	0.0990	0.0716	1.6264	1.3815	0.6937 0.9040 3.9935
		200	0.2501	0.1001	0.0665	1.5597	1.3231	0.9878 0.8354 3.6393
$\log W(\cdot)$	Mediana	25	1.0079	0.4943	0.5078	2.1675	0.9797	-0.4764 -0.5630 2.3855
		100	1.0064	0.4959	0.5065	2.0982	0.9885	-0.4868 -0.5091 2.0993
		200	1.0153	0.4932	0.5005	2.0609	0.9972	-0.4975 -0.5026 2.0440
	EQM	25	0.2549	0.0615	0.1019	1.7426	1.5822	0.6875 1.2397 4.3051
		100	0.2495	0.0786	0.0769	1.6801	1.5842	0.7917 0.8534 1.1364
		200	0.2608	0.0823	0.0875	1.6245	1.5720	0.9069 0.7298 1.0245

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 6 – Processo ARMA(1,1).

Ligação	Medidas	n	$\alpha = 0.5$			$\alpha = 2$				
			$\delta = 1$	$\phi = -0.7$	$\theta = 0.5$	$\alpha = 0.5$	$\delta = 1$	$\phi = -0.5$	$\theta = -0.5$	$\alpha = 2$
$\log(x)$	Mediana	25	0.9661	-0.6947	0.4744	0.5245	0.9448	-0.4608	-0.6397	2.4591
		100	0.9778	-0.7015	0.4913	0.5076	0.9814	-0.4832	-0.5407	2.0808
		200	0.9862	-0.6946	0.4873	0.5050	0.9905	-0.4941	-0.5128	2.0383
$\log(x)$	MSE	25	0.2769	1.3704	0.1666	0.0856	1.3810	0.6056	1.253	5.0855
		100	0.2432	1.4207	0.1262	0.1029	1.4937	0.7614	0.8659	3.9676
		200	0.2275	1.4170	0.1135	0.0821	1.5793	0.7959	0.7842	3.4667
$\sqrt{x}$	Mediana	25	0.9810	-0.6879	0.4869	0.5287	0.9992	-0.4972	-0.5371	2.4115
		100	0.9954	-0.7031	0.4917	0.5117	0.9944	-0.4924	-0.5081	2.1117
		200	0.9981	-0.7002	0.4939	0.5028	1.0003	-0.5015	-0.4999	2.0488
$\sqrt{x}$	MSE	25	0.2341	1.3371	0.1775	0.0729	1.4451	0.6345	1.0373	4.9121
		100	0.2450	1.4331	0.1336	0.0606	1.3816	0.6937	0.9040	3.9935
		200	0.2485	1.4387	0.1179	0.0866	1.6231	0.9879	0.9354	3.6394
$\log W(x)$	Mediana	25	0.9750	-0.6908	0.4959	0.5266	0.9797	-0.4765	-0.5631	2.3855
		100	0.9895	-0.6958	0.4976	0.5068	0.9885	-0.4868	-0.50913	2.0994
		200	0.9983	-0.6960	0.4992	0.5042	0.9973	-0.4976	-0.5026	2.0440
$\log W(x)$	MSE	25	0.2256	1.4123	0.1245	0.0660	1.5822	0.6876	1.2397	4.3051
		100	0.2432	1.4345	0.1139	0.0632	1.584	0.7918	0.8535	4.0364
		200	0.2449	1.4330	0.1125	0.0878	1.5720	0.9069	0.9298	3.4245

Fonte: Autoria própria (2021)

Ao fazer uma comparação entre as Tabelas 5 e 6 observa-se o comportamento das estimativas tanto para valores positivos e negativos. Dessa forma, nota-se que as estimativas foram precisas em ambas as tabelas. O valor de $\alpha = 2$ traz menores EQM o que quer dizer melhores estimativas. A Tabela 6 mostra que a função de ligação $\log W(x)$ se sobressaiu melhor para valores positivos de δ e ϕ , enquanto a função de ligação logarítmica se sobressaiu melhor para valores negativos.

4.2 APLICAÇÃO A DADOS REAIS

Essa aplicação considera um título público do **Tesouro Direto** de taxas pré-fixadas então nominado **Tesouro Prefixado**, conhecido como Letra do Tesouro Nacional - **LTN**. Títulos do Tesouro, tal como o **LTN**, representam ativos de Renda Fixa; isto é, na compra do título, sabe-se quanto receberá no vencimento do título. Eles são chamado de título de baixo risco. A **LTN** é atrelada à taxa **Selic** (Sistema Especial de Liquidação e Custódia - **Selic**), que pode ser entendida como uma plataforma que organiza as custódias com as liquidações das operações financeiras dos títulos públicos.

Investidores costumam recorrer aos títulos públicos para fazer investimento que forneça rendas previsíveis. Objetivamente a procura por um título está associado aos juros que ele paga. Comumente investidores não estão tão atentos ao preço real de um título, mas ao seu rendimento. Ao comprar um título, é importante quantificar a diferença entre o rendimento de compra e o relativo ao de venda; valendo-se então analisar a liquidez do mercado de títulos e quantificar o risco sobre o retorno. No que segue, avaliaremos o rendimento associado à **LTN**.

A Figura 7(a) apresenta uma série de tamanho 981 correspondente ao rendimentos diários (úteis) do ativo **LTN** no período de 2012-02-01 a 2015-12-31. Vê-se uma queda nos rendimentos deste ativo até final de 2013, seguindo-se após um crescimento até o início de 2016 (interpolado por algumas quedas não expressivas). Algumas medidas descritivas da série são dadas abaixo:

Min	1º Quartil	Mediana	Média	Desvio	Coef. Var.	3º Quartil	Máximo
0.0799	0.0949	0.1150	0.1138	0.0192	16.8406%	0.1278	0.1489

Do que se conclui que os rendimentos de **LTN** variam on intervalo (0.0799, 0.1489), as diferenças entre os pares (Min, 1º Quartil), (Mediana, Média), (3º Quartil, Máximo) não se

mostram tão pronunciadas e o coeficiente de variação (Coef. Var.) indica uma dispersão média. A Figura 7(b) apresenta a versão amostral para o par (ACF,PACF) da série em tela. Vê-se uma ACF típica de séries com forte tendência aleatória, como verificável na série observada. Já o PACF parece sugerir (guardada as devidas proporções do desconhecimento da ACF) um processo autoregressivo de primeira ordem (as séries simuladas na Figura 3 parecem dar suporte a essa conclusão).

Caso seguissemos uma abordagem tipo *Box-Jenkins* (grosso modo, a abordagem que lida com tendência pelo uso de operações de diferenciação [BROCKWELL; DAVIS, 2016]), a série em tela seria classificada como não estacionária (segundo os testes de Dickey-Fuller Aumentado e Phillips-Perron como valores-p de 0.1705 e 0.5241, respectivamente). A Figura 7(c) representa o par (ACF,PACF) após uma diferenciação de ordem um, revelando que a série resultante é um ruído branco e, portanto, não se descartaria a possibilidade da série original ser um passeio aleatório (resultado confirmado pelo uso da função `auto.arima` do software R), $X_t = X_{t-1} + Z_t$ sendo X_t o rendimento da LTN e Z_t um ruído branco.

Esta aplicação parte da premissa de sugerir o modelo EER-AR(1), tendo em vista melhor ajuste quando comparado ao modelo EER-MA(1), como uma alternativa mais interpretável à análise dos rendimentos de LTN. Adicionalmente, o ajuste da proposta será comparado com modelo Γ -AR(1) segundo a proposição de Benjamin, Rigby e Stasinopoulos [2003]. De [ROCHA; CRIBARI-NETO, 2009], pode-se notar que a abordagem por regressão (condicional ou modelo dinâmico) não requer a satisfação da condição de estacionaridade para ser aplicada, tal como o uso da abordagem de suavização por modelos de espaço de estado, discutido detalhadamente por Hyndman *et al.* [2008].

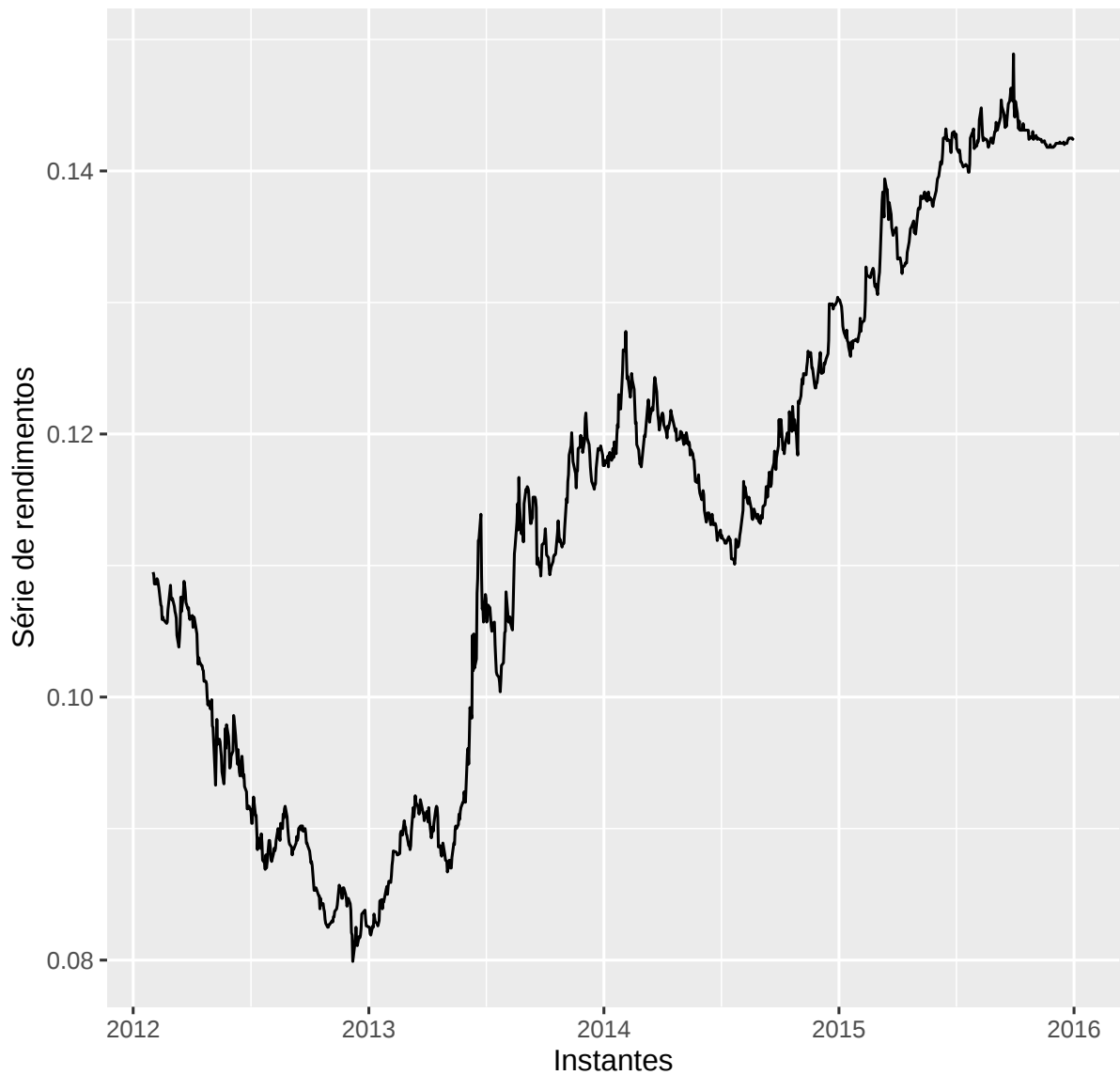
A Figura 7 exhibe os ajustes dos quatro modelos considerados aos dados. Observam-se predições razoáveis tanto pelo processo EER-AR(1) como pelo Γ -AR(1). Contudo, convém destacar – similarmente à comparação feita por Gupta e Kundu [2001] no contexto de independência – que a distribuição marginal EER não depende de funções especiais como o faz a distribuição Γ . Relativamente ao processo proposto, forneceram-se ajustes para três valores de $\tau = 0.25, 0.5, 0.75$ a fim de ilustrar sua proposta. O maior efeito de τ foi sobre a ligação $\log(\cdot)$. Convém destacar, assim como apontado por Almeida-Junior e Nascimento [2021], que

$$\frac{d}{dx}[\log(x)] \geq \frac{d}{dx}[\log W(x)] \geq \frac{d}{dx}[\sqrt{x}] > 0; \quad (4.1)$$

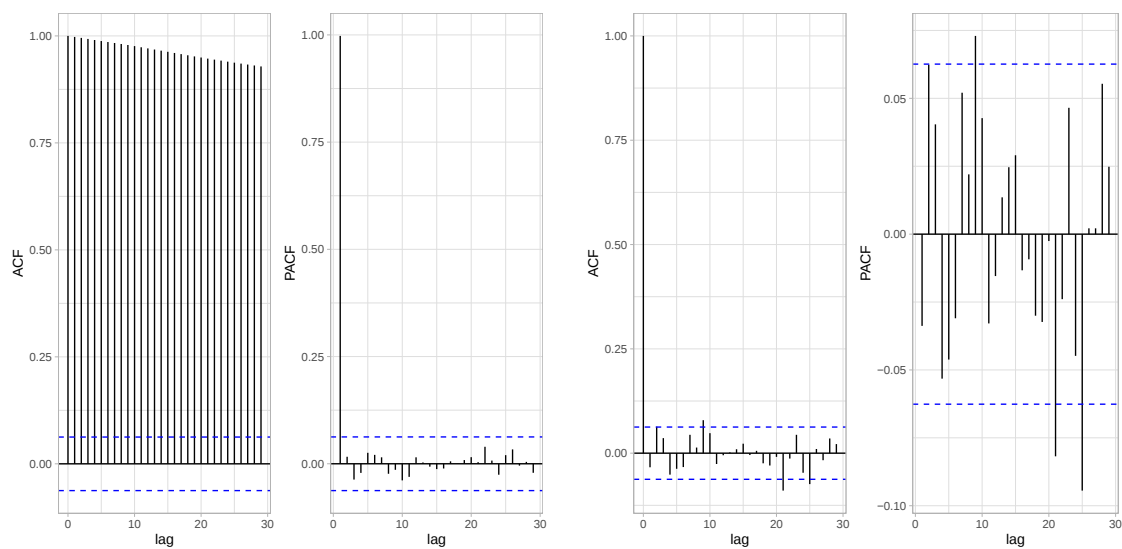
isto é, a ligação $\log(\cdot)$ apresenta a maior taxa de mudança, o que faz com que ela seja

Figura 6 – Séries de rendimentos obtidos a partir do LTN.

Série de rendimentos do LTN

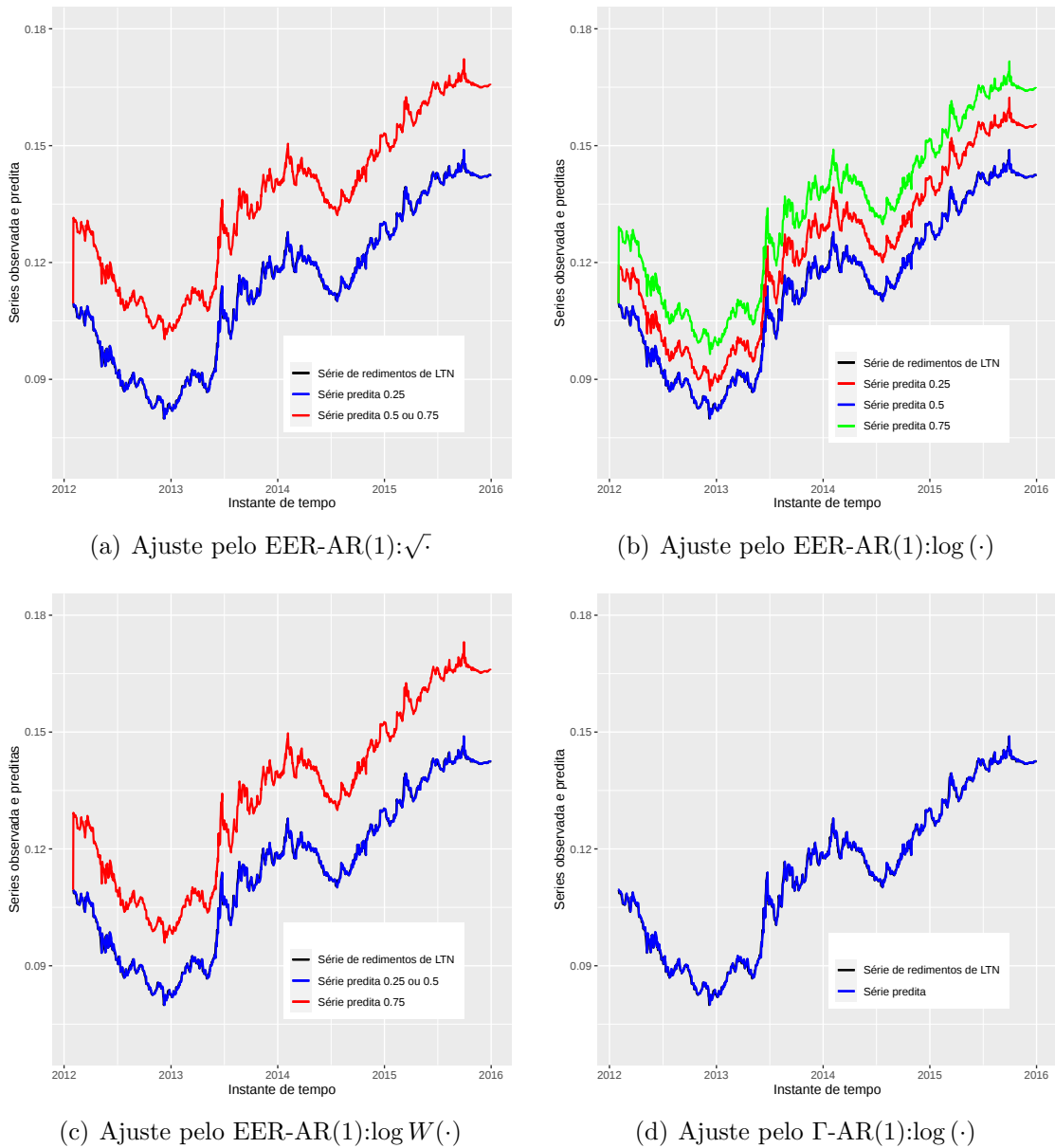


(a) Série de LTN real



(b) (ACF,PACF) amostral da série de LTN real (c) (ACF,PACF) amostral da série de LTN real diferenciada

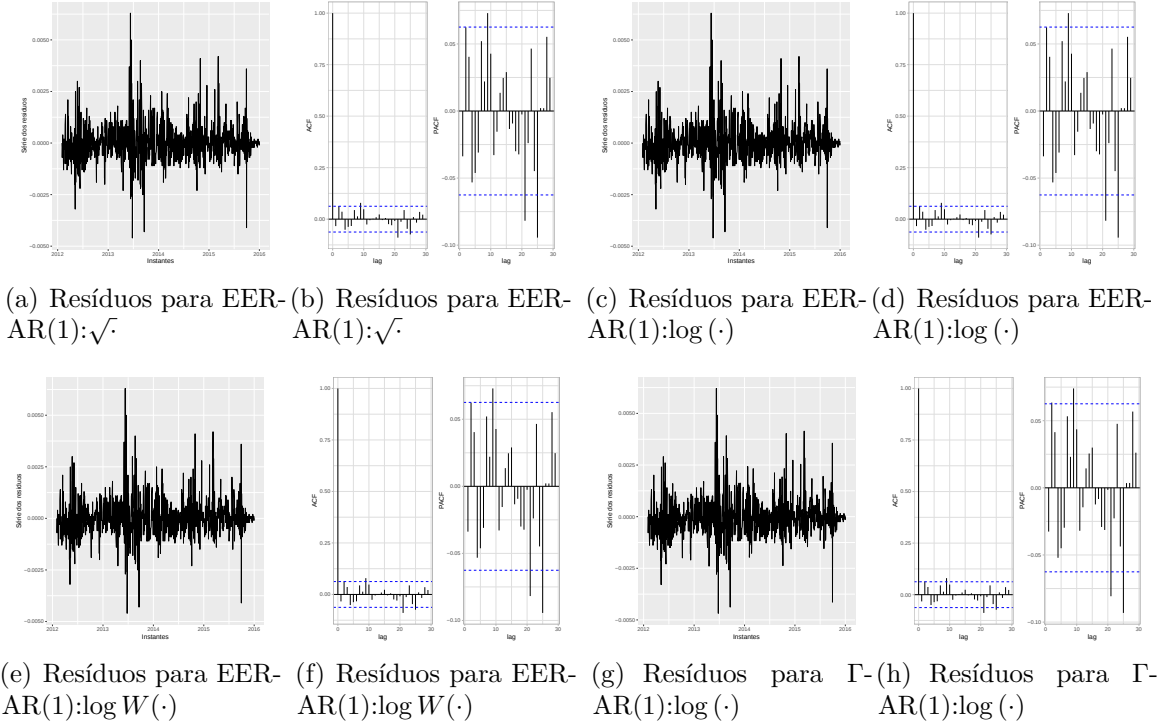
Figura 7 – Séries de rendimento obtidos a partir do LTN.



Fonte: Autoria própria (2021)

mais sensível ao valor de q_t . Em resumo, os ajustes foram bons para ambos os modelos, mas o processo proposto parece ter um maior grau de flexibilidade às flutuações de séries temporais, o que poderá ser uma vantagem em outras situações. As estimativas dos ajustes são apresentadas na Tabela 7. Em geral, o comportamento das estimativas dos parâmetros dos preditores foram bem similares: estimativas para o intercepto aproximadamente nulas e para o parâmetro autoregressivo próximas de um (apontando para um comportamento de um passeio aleatório, tal como discutido anteriormente). A diferença se deu quanto às estimativas para o parâmetro associado a distribuição: Para o processo Γ -AR(1), o valor de 171.61 parece sugerir a convergência para um processo gaussiano (indicando uma marginal

Figura 8 – Séries de resíduos a partir dos melhores ajustes.



Fonte: Autoria própria (2021)

quase simétrica), enquanto os valores para $\hat{\alpha}$ foram 1.22, 1.95 e 1.935 (pela discussão da Figura 2, indicando uma assimetria mais acentuada) para as ligações $\sqrt{\cdot}$, $\log(\cdot)$ e $\log W(\cdot)$, respectivamente. A magnitude de $\hat{\alpha}$ parece estar alinhada com as desigualdades na Equação (4.1), essa será uma questão a ser investigada mais detalhadamente em estudos futuros.

Tabela 7 – Estimativas e desempenhos dos modelos autoregressivos utilizados na aplicação em tela.

Modelos	τ	$\hat{\delta}$ (SE)	$\hat{\phi}$ (SE)	$\hat{\alpha}$ (SE)	MASE
EER-AR(1): $\sqrt{\cdot}$	0.25	1.00×10^{-5} (0.03)	1.00 (0.22)	1.22 (0.23)	0.99
EER-AR(1): $\log(\cdot)$	0.5	1.27×10^{-5} (0.32)	1.00 (0.15)	1.95 (0.08)	0.99
EER-AR(1): $\log W(\cdot)$	0.5	1.01×10^{-5} (0.47)	1.00 (0.21)	1.35 (0.05)	0.99
Γ -AR(1): $\log(\cdot)$	•	-3.21×10^{-3} (0.29)	1.00 (0.17)	171.61 (0.07)	1.012

Fonte: Autoria própria (2021)

Agora, estamos em posição de estabelecer uma comparação entre EER-AR(1) e Γ -AR(1). A Tabela 7 também apresenta valores da medida de predição erro médio absoluto escalado (*Mean Absolute Scaled Error* - MASE), definida como Hyndman e Koehler [2006]:

$$MASE = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |e_t|}{\frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n |e_t^*|},$$

em que $e_t = Z_t - \hat{Z}_t$ representa o resíduo, $\hat{Z}_t$ é o valor predito e $e_t^* = Z_t - Z_{t-1}$. Pode-se

observar que EER-AR(1) forneceu uma leve vantagem em relação ao Γ -AR(1).

Agora estamos em posição de fazer uma análise de diagnóstico, para ratificar a satisfação das suposições de que os resíduos associados são ruídos branco. Para tal, a Figura 8 apresenta as séries dos resíduos e de seus pares (ACF, PACF) amostrais associados. Em todos os casos, observam-se que os resíduos são simétricos em torno do zero e que não há indício de estruturas de dependência. Na Tabela a seguir, apresentam os valores p obtidos da aplicação do teste de Ljung-Box sobre as séries de resíduos através função `Box.test(.,lag=20,type="Ljung")`:

EER-AR(1): $\sqrt{\cdot}$	EER-AR(1):log($\cdot$)	EER-AR(1):log $W(\cdot)$	Γ -AR(1):log $W(\cdot)$
0.2034	0.2033	0.2033	0.1992

Nota-se que em todos os casos, não há evidências para rejeitar a hipótese nula $H_0 : \rho(1) = \dots = \rho(20) = 0$ sendo $\rho(h)$ a ACF dos resíduos. Assim, tem-se que os ajustes são confiáveis. Vale-se mencionar a presença de blocos de volatilidade que apontam para de uma estrutura tipo GARCH (*heteroscedasticidade condicional auto-regressiva generalizada*), que indicamos como marcadores para estudos futuros como desdobramentos desta dissertação.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Esta dissertação objetivou introduzir um novo modelo para séries temporais tendo como distribuição marginal uma reparametrização da distribuição Exponencial Exponencializada (EE), denominado como Modelo Exponencial Exponencializado Reparametrizado Autorregressivo e de Médias Móveis (EER-ARMA). Algumas de suas propriedades matemáticas são derivada, tais como função escore e matriz de informação observada. Fornecemos uma discussão sobre a estimação por máxima verossimilhança condicional para os parâmetros do processo EER-ARMA. Experimentos de Monte Carlo endereçaram o comportamento das estimativas para diferentes tamanhos de séries, tipos de estruturas de dependência e tipos de ligação. Em geral, os resultados satisfizeram o esperado mesmo para séries de tamanho pequeno. Convém destacar que a função Logaritmo da função W de Lambert tanto para autocorrelações positivas quanto negativas do parâmetro ϕ forneceu melhores desempenhos. Finalmente, o modelo EER-ARMA foi aplicado para descrever rendimentos adivindos LTN, mostrando desempenho superior ao processo Gama-ARMA.

Espera-se que esta proposta possa ser usada nas seguintes pesquisas futuras:

- Considerando um processo com marginal EER tendo estrutura ARMA-GARCH;
- Visando descrever outros contextos aplicados, tais como hidrológico, econômico, de análise de confiabilidade;
- Fazendo uma análise com outros tipos de resíduos;
- Avanliando o desempenho dos testes clássicos para este modelo.

REFERÊNCIAS

- ABDEL-HAMID, A. H.; AL-HUSSAINI, E. K. Estimation in step-stress accelerated life tests for the exponentiated exponential distribution with type-i censoring. **Computational statistics & data analysis**, Elsevier, v. 53, n. 4, p. 1328–1338, 2009.
- ALMEIDA-JUNIOR, P. M.; NASCIMENTO, A. D. C. $\mathcal{G}_i^0$ arma process for speckled data. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, Taylor & Francis, v. 0, n. 0, p. 1–29, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00949655.2021.1922688>>.
- ASLAM, M.; KUNDU, D.; AHMAD, M. Time truncated acceptance sampling plans for generalized exponential distribution. **Journal of Applied Statistics**, Taylor & Francis, v. 37, n. 4, p. 555–566, 2010.
- BARROS, A. A. A. **Distribuições Exponencializadas e Estendidas: Uma Abordagem Clássica e Bayesiana**. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em biometria e Estatística, Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2008.
- BAYER, F. M.; BAYER, D. M.; PUMI, G. Kumaraswamy autoregressive moving average models for double bounded environmental data. **Journal of Hydrology**, Elsevier, v. 555, p. 385–396, 2017.
- BENJAMIN, M. A.; RIGBY, R. A.; STASINOPOULOS, D. M. Generalized autoregressive moving average models. **Journal of the American Statistical association**, Taylor & Francis, v. 98, n. 461, p. 214–223, 2003.
- BROCKWELL, P. J.; DAVIS, R. A. Stationary time series. In: **Time Series: Theory and Methods**. [S.l.]: Springer, 1991. p. 1–41.
- BROCKWELL, P. J.; DAVIS, R. A. **Introduction to time series and forecasting**. [S.l.]: Springer, 2016.
- CHUANG, M.-D.; YU, G.-H. Order series method for forecasting non-gaussian time series. **Journal of Forecasting**, Wiley Online Library, v. 26, n. 4, p. 239–250, 2007.
- CORDEIRO, G.; SILVA, R.; NASCIMENTO, A. **Recent Advances in Lifetime and Reliability Models**. Bentham Science Publishers, 2020. ISBN 9781681083469. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=wvbkDwAAQBAJ>>.
- COTA-FELIX, J.; RIVAS-DAVALOS, F.; MAXIMOV, S. An alternative method for estimating mean life of power system equipment with limited end-of-life failure data. In: IEEE. **2009 IEEE Bucharest PowerTech**. [S.l.], 2009. p. 1–4.
- GOMPERTZ, B. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. **Philosophical transactions of the Royal Society of London**, JSTOR, v. 115, p. 513–583, 1825.
- GOOSSENS, M.; MITTELBAACH, F.; SAMARIN, A. **The LATEX companion**. [S.l.]: Addison-Wesley Reading, 1994. v. 1.
- GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Theory & methods: Generalized exponential distributions. **Australian & New Zealand Journal of Statistics**, Wiley Online Library, v. 41, n. 2, p. 173–188, 1999.

GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Exponentiated exponential family: an alternative to gamma and weibull distributions. **Biometrical Journal: Journal of Mathematical Methods in Biosciences**, Wiley Online Library, v. 43, n. 1, p. 117–130, 2001.

GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Closeness of gamma and generalized exponential distribution. **Communications in statistics-theory and methods**, Taylor & Francis, v. 32, n. 4, p. 705–721, 2003.

GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Discriminating between gamma and generalized exponential distributions. **Journal of Statistical Computation & Simulation**, Taylor & Francis, v. 74, n. 2, p. 107–121, 2004.

GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Generalized exponential distribution: Existing results and some recent developments. **Journal of Statistical planning and inference**, Elsevier, v. 137, n. 11, p. 3537–3547, 2007.

HAN, D. Estimation in step-stress life tests with complementary risks from the exponentiated exponential distribution under time constraint and its applications to uav data. **Statistical Methodology**, Elsevier, v. 23, p. 103–122, 2015.

HYNDMAN, R.; KOEHLER, A.; ORD, J.; SNYDER, R. **Forecasting with Exponential Smoothing: The State Space Approach**. Springer Berlin Heidelberg, 2008. (Springer Series in Statistics). ISBN 9783540719182. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=GSyzox8Lu9YC>>.

HYNDMAN, R. J.; KOEHLER, A. B. Another look at measures of forecast accuracy. **International journal of forecasting**, Elsevier, v. 22, n. 4, p. 679–688, 2006.

JOSE, K. K.; THOMAS, M. M. Generalized laplacian distributions and autoregressive processes. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, v. 40, n. 23, p. 4263–4277, 2011. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/03610926.2010.508863>>.

KANNAN, N.; KUNDU, D.; NAIR, P.; TRIPATHI, R. The generalized exponential cure rate model with covariates. **Journal of Applied Statistics**, Taylor & Francis, v. 37, n. 10, p. 1625–1636, 2010.

KUNDU, D.; GUPTA, R. D. Bivariate generalized exponential distribution. **Journal of multivariate analysis**, Elsevier, v. 100, n. 4, p. 581–593, 2009.

LEWIS, P.; MCKENZIE, E.; HUGUS, D. K. Gamma processes. **Communications in Statistics. Stochastic Models**, v. 5, n. 1, p. 1–30, 1989. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/15326348908807096>>.

MADI, M. T.; RAQAB, M. Z. Bayesian prediction of rainfall records using the generalized exponential distribution. **Environmetrics: The official journal of the International Environmetrics Society**, Wiley Online Library, v. 18, n. 5, p. 541–549, 2007.

NADARAJAH, S. **The exponentiated exponential distribution: a survey**. [S.l.]: Springer, 2011.

NADARAJAH, S. The exponentiated exponential distribution: a survey. **AStA Adv Stat Anal**, v. 95, p. 219–251, 2011.

RAQAB, M. M.; AHSANULLAH, M. Estimation of the location and scale parameters of generalized exponential distribution based on order statistics. **Journal of Statistical computation and Simulation**, Taylor & Francis, v. 69, n. 2, p. 109–123, 2001.

RIBEIRO, T. F. **Essays on the unit Burr XII distribution: regression and time series models**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2020.

ROCHA, A. V.; CRIBARI-NETO, F. Beta autoregressive moving average models. **Test**, Springer, v. 18, n. 3, p. 529, 2009.

STRICKLAND, J. C.; LILE, J. A.; RUSH, C. R.; STOOPS, W. W. Comparing exponential and exponentiated models of drug demand in cocaine users. **Experimental and clinical psychopharmacology**, American Psychological Association, v. 24, n. 6, p. 447, 2016.

TIKU, M. L.; WONG, W.-K.; VAUGHAN, D. C.; BIAN, G. Time series models in non-normal situations: Symmetric innovations. **Journal of Time Series Analysis**, Wiley Online Library, v. 21, n. 5, p. 571–596, 2000.

WEIß, C. H. Integer-valued autoregressive models for counts showing underdispersion. **Journal of Applied Statistics**, Taylor & Francis, v. 40, n. 9, p. 1931–1948, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/02664763.2013.800034>>.

WEIß, C. H.; KIM, H.-Y. Binomial $ar(1)$ processes: moments, cumulants, and estimation. **Statistics**, Taylor & Francis, v. 47, n. 3, p. 494–510, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/02331888.2011.605893>>.

APÊNDICE A – DERIVAÇÃO DOS COMPONENTES DA FUNÇÃO ESCORE

O vetor escore será obtido com base na equação de log-verossimilhança em $\boldsymbol{\pi} = [\alpha, \boldsymbol{\beta}^\top, \delta, \boldsymbol{\phi}^\top, \boldsymbol{\theta}^\top]^\top$:

$$\ell(\boldsymbol{\pi}) = \ell(\boldsymbol{\pi}; x_{m+1}, \dots, x_n) = \sum_{t=m+1}^n \ell(\boldsymbol{\pi}; x_t) = \sum_{t=m+1}^n \ell_t(\boldsymbol{\pi}),$$

em que $\ell(\boldsymbol{\pi}) = \ell(\boldsymbol{\pi}; x_{m+1}, \dots, x_n)$, $\ell_t(\boldsymbol{\pi}) = \ell(\boldsymbol{\pi}; x_t)$ e

$$\begin{aligned} \ell_t(\boldsymbol{\pi}; x_t) &= \log(\alpha) - \log(q_t) + \log[-\log(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}})] \\ &\quad + \frac{\log(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}})x_t}{q_t} + (\alpha - 1) \log \left\{ 1 - \exp \left[\frac{\log(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}})x_t}{q_t} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Com base em $\ell(\boldsymbol{\pi})$, a função escore associada ao problema é dada

$$\begin{aligned} U(\boldsymbol{\pi}) &= [U(\alpha), U^\top(\boldsymbol{\beta}), U(\delta), U^\top(\boldsymbol{\phi}), U^\top(\boldsymbol{\theta})] = \left[\frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}^\top}, \frac{\partial}{\partial \delta}, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\phi}^\top}, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top} \right] \ell(\boldsymbol{\pi}) \\ &= \sum_{m+1}^n \left[\frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}^\top}, \frac{\partial}{\partial \delta}, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\phi}^\top}, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top} \right] \ell_t(\boldsymbol{\pi}) \end{aligned}$$

Por aplicar a regra da cadeia, os componentes da função escore pode ser escritos em função das seguintes derivadas parciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_t(\boldsymbol{\pi}; x_t)}{\partial \pi_i} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell_t(\boldsymbol{\pi}; x_t)}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \pi_i}, \quad \text{para } i \geq 2, \\ \frac{\partial \ell_t(\boldsymbol{\pi}; x_t)}{\partial q_t} &= - \frac{(1 - \alpha)x_t \log(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}}) \exp \left[\frac{x_t \log(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}})}{q_t} \right]}{q_t^2 \left\{ 1 - \exp \left[\frac{\log(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}})x_t}{q_t} \right] \right\}} - \frac{x_t \log(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}})}{q_t^2} - \frac{1}{q_t}, \\ \frac{\partial \ell_t(\boldsymbol{\pi}; x_t)}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\alpha} + \log \left\{ 1 - \exp \left[\frac{x_t \log(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}})}{q_t} \right] \right\} - \frac{\log(\tau) \tau^{1/\alpha}}{\alpha^2 [-\log(1 - \tau^{1/\alpha})](1 - \tau^{1/\alpha})} \\ &\quad + \frac{\log(\tau) \tau^{1/\alpha} x_t}{\alpha^2 (1 - \tau^{1/\alpha}) q_t} + \frac{(\alpha - 1) \exp \left[\frac{x_t \log(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}})}{q_t} \right] x_t \log(\tau) \tau^{1/\alpha}}{q_t (1 - \tau^{1/\alpha}) \left\{ 1 - \exp \left[\frac{x_t \log(1 - \tau^{\frac{1}{\alpha}})}{q_t} \right] \right\}}, \\ \frac{\partial \ell_t(\boldsymbol{\pi}; x_t)}{\partial \delta} &= \frac{\partial \ell_t(\boldsymbol{\pi}; x_t)}{\partial q_t} \frac{1}{g'(q_t)} \underbrace{\left(1 - \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial \eta_{t-j}}{\partial \delta} \right)}_{\partial \eta_t / \partial \delta}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ell_t(\boldsymbol{\pi}; x_t)}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial \ell_t(\boldsymbol{\pi}; x_t)}{\partial q_t} \frac{1}{g'(q_t)} \underbrace{\left(\mathbf{z}_t^\top - \sum_{i=1}^p \phi_i \mathbf{z}_{t-i}^\top - \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial \eta_{t-j}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right)}_{\partial \eta_t / \partial \boldsymbol{\beta}},$$

$$\frac{\partial \ell_t(\boldsymbol{\pi}; x_t)}{\partial \phi_i} = \frac{\partial \ell_t(\boldsymbol{\pi}; x_t)}{\partial q_t} \frac{1}{g'(q_t)} \underbrace{\left(g(x_{t-i}) - \mathbf{z}_{t-i}^\top \boldsymbol{\beta} - \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial \eta_{t-j}}{\partial \phi_i} \right)}_{\partial \eta_t / \partial \phi_i}$$

e

$$\frac{\partial \ell_t(\boldsymbol{\pi}; x_t)}{\partial \theta_l} = \frac{\partial \ell_t(\boldsymbol{\pi}; x_t)}{\partial q_t} \frac{1}{g'(q_t)} \underbrace{\left(r_{t-l} - \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial \eta_{t-j}}{\partial \theta_l} \right)}_{\partial \eta_t / \partial \theta_l}.$$

APÊNDICE B – DERIVAÇÃO DA MATRIZ DE INFORMAÇÃO OBSERVADA

Após o cálculo do vetor escore, podemos definir a matriz informação observada:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\pi}) = - \left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\pi} \partial \boldsymbol{\pi}^\top} \right) = \begin{bmatrix} J_{\alpha, \alpha} & J_{\alpha, \beta^\top} & J_{\alpha, \delta} & J_{\alpha, \phi^\top} & J_{\alpha, \theta^\top} \\ J_{\beta, \alpha} & J_{\beta, \beta^\top} & J_{\beta, \delta} & J_{\beta, \phi} & J_{\beta, \theta^\top} \\ J_{\delta, \alpha} & J_{\delta, \beta^\top} & J_{\delta, \delta} & J_{\delta, \phi^\top} & J_{\delta, \theta^\top} \\ J_{\phi, \alpha} & J_{\phi, \beta^\top} & J_{\phi, \delta} & J_{\phi, \phi} & J_{\phi, \theta^\top} \\ J_{\theta, \alpha} & J_{\theta, \beta^\top} & J_{\theta, \delta} & J_{\theta, \phi} & J_{\theta, \theta^\top} \end{bmatrix},$$

em que, (i) para $i \geq 2$

$$J_{\alpha, \pi_i} = \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\pi})}{\partial \alpha \partial \pi_i} = \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{g'(q_t)} \frac{\partial \eta_t}{\partial \pi_i} \frac{\partial^2 \ell_t(\boldsymbol{\pi}; x_t)}{\partial q_t \partial \alpha}$$

tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell_t(\boldsymbol{\pi}; x_t)}{\partial q_t \partial \alpha} &= \frac{x_t}{q_t^2} \left\{ - \frac{\log(\tau) \tau^{1/\alpha}}{\alpha^2 (1 - \tau^{1/\alpha})} - B(x_t, q_t; \alpha, \tau) \frac{\exp \left[\frac{\log(1 - \tau^{1/\alpha}) x_t}{q_t} \right]}{1 - \exp \left[\frac{\log(1 - \tau^{1/\alpha}) x_t}{q_t} \right]} \right. \\ &\quad \left. + A(x_t, q_t; \alpha, \tau) \left\{ \frac{\exp \left[\frac{\log(1 - \tau^{1/\alpha}) x_t}{q_t} \right]}{1 - \exp \left[\frac{\log(1 - \tau^{1/\alpha}) x_t}{q_t} \right]} \right\}^2 \right\}, \end{aligned}$$

$$A(x_t, q_t; \alpha, \tau) = - \log(1 - \tau^{1/\alpha}) + \frac{(1 - \alpha) \log(\tau) \tau^{1/\alpha}}{\alpha^2 (1 - \tau^{1/\alpha})} - B(x_t, q_t; \alpha, \tau),$$

e

$$B(x_t, q_t; \alpha, \tau) = - \frac{(1 - \alpha) \log(1 - \tau^{1/\alpha}) \log(\tau) \tau^{1/\alpha}}{\alpha^2 (1 - \tau^{1/\alpha})} \frac{x_t}{q_t},$$

(ii) para $i, j \geq 2$

$$J_{\pi_i, \pi_j} = \sum_{k=m+1}^n \left\{ \frac{\partial^2 \ell_t}{\partial q_t^2} \left(\frac{dq_t}{d\eta_t} \right)^2 \frac{\partial \eta_t}{\partial \pi_i} \frac{\partial \eta_t}{\partial \pi_j} + \frac{\partial \ell_t}{\partial q_t} \left(\frac{dq_t}{d\eta_t} \right) \frac{\partial \eta_t}{\partial \pi_i} \frac{\partial \eta_t}{\partial \pi_j} + \frac{\partial \ell_t}{\partial q_t} \left(\frac{dq_t}{d\eta_t} \right) \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \pi_i \partial \pi_j} \right\}$$

tal que $dq_t/d\eta_t = [g'(q_t)]^{-1}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell_t}{\partial q_t^2} &= \frac{1}{q_t^2} + \frac{2 x_t \log(1 - \tau^{1/\alpha})}{q_t^3} - (\alpha - 1) x_t \log(1 - \tau^{1/\alpha}) \left\{ - \frac{2 \exp \left[\frac{\log(1 - \tau^{1/\alpha}) x_t}{q_t} \right]}{q_t^3 \left\{ 1 - \exp \left[\frac{\log(1 - \tau^{1/\alpha}) x_t}{q_t} \right] \right\}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{[- \log(1 - \tau^{1/\alpha}) x_t] \exp \left[\frac{\log(1 - \tau^{1/\alpha}) x_t}{q_t} \right]}{q_t^4 \left\{ 1 - \exp \left[\frac{\log(1 - \tau^{1/\alpha}) x_t}{q_t} \right] \right\}} - \frac{\log(1 - \tau^{1/\alpha}) x_t}{q_t^4} \left\{ \frac{\exp \left[\frac{\log(1 - \tau^{1/\alpha}) x_t}{q_t} \right]}{1 - \exp \left[\frac{\log(1 - \tau^{1/\alpha}) x_t}{q_t} \right]} \right\}^2 \right\}, \end{aligned}$$

e os termos $\frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \pi_i \partial \pi_j}$ são definidos como segue:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \delta \partial \beta^\top}, \frac{\partial^2}{\partial \delta^2}, \frac{\partial^2}{\partial \delta \partial \phi^\top}, \frac{\partial^2}{\partial \delta \partial \theta^\top} \right] \eta_t = - \sum_{j=1}^q \theta_j \left[\frac{\partial^2}{\partial \delta \partial \beta^\top}, \frac{\partial^2}{\partial \delta^2}, \frac{\partial^2}{\partial \delta \partial \phi^\top}, \frac{\partial^2}{\partial \delta \partial \theta^\top} \right] \eta_{t-j} \\ - \frac{\partial}{\partial \delta} [\mathbf{0}_k^\top, 0, \mathbf{0}_p^\top, \eta_{t-1}, \dots, \eta_{t-q}],$$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \beta^\top}, \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \phi_i}, \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \theta_l} \right\} \eta_t = \\ \left\{ - \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial^2 \eta_{t-j}}{\partial \beta \partial \beta^\top}, -z_{t-i} - \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial^2 \eta_{t-j}}{\partial \beta \partial \phi_i}, \frac{\partial \eta_{t-l}}{\partial \beta} - \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial^2 \eta_{t-j}}{\partial \beta \partial \theta_l} \right\}$$

e

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \phi_i \partial \phi_l}, \frac{\partial^2}{\partial \theta_l \partial \phi_i}, \frac{\partial^2}{\partial \theta_l \partial \theta_i} \right\} \eta_t = \\ \left\{ - \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial^2 \eta_{t-j}}{\partial \phi_i \partial \phi_l}, -\frac{\partial \eta_{t-i}}{\partial \phi_i} - \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial^2 \eta_{t-j}}{\partial \phi_i \partial \theta_l}, -\frac{\partial \eta_{t-l}}{\partial \theta_i} - \frac{\partial \eta_{t-i}}{\partial \theta_l} - \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial^2 \eta_{t-j}}{\partial \theta_i \partial \theta_l} \right\}.$$