



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ALISSON DOUGLAS MOTA DE LIMA

**OSCILAÇÃO LASER VIA GANHO ÓTICO MAGNETICAMENTE ASSISTIDO
EM ÁTOMOS FRIOS**

Recife

2022

ALISSON DOUGLAS MOTA DE LIMA

**OSCILAÇÃO LASER VIA GANHO ÓTICO MAGNETICAMENTE ASSISTIDO
EM ÁTOMOS FRIOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Área de concentração: Óptica.

Orientador: Prof. Dr. José Wellington Rocha Tabosa

Coorientador: Prof. Dr. João Carlos de Aquino Carvalho

Recife

2022

Catálogo na fonte
Bibliotecária Nataly Soares Leite Moro, CRB4-1722

L732o Lima, Alisson Douglas Mota de
Oscilação laser via ganho ótico magneticamente assistido em átomos frios /
Alisson Douglas Mota de Lima. – 2022.
78 f.: il., fig.

Orientador: José Wellington Rocha Tabosa.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
Física, Recife, 2022.
Inclui referências.

1. Óptica. 2. Aumento de ganho por cavidade. 3. Laser sem inversão de
população. 4. Átomos frios. I. Tabosa, José Wellington Rocha (orientador). II.
Título.

535.2 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2022 - 40

ALISSON DOUGLAS MOTA DE LIMA

**OSCILAÇÃO LASER VIA GANHO ÓTICO MAGNETICAMENTE
ASSISTIDO EM ÁTOMOS FRIOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 24/02/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. José Wellington Rocha Tabosa
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. João Carlos de Aquino Carvalho
Co-Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Daniel Felinto Pires Barbosa
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Romain Pierre Marcel Bachelard
Examinador Externo
Universidade Federal de São Carlos

AGRADECIMENTOS

Minha gratidão eterna ao meu Deus que em todos momentos me sustenta pelo Seu amor, num período tão difícil que foram os últimos dois anos, que providenciou todos os milagres que eu precisei para chegar aqui.

Agradeço de forma imensa a toda minha família que sempre lutou para que eu tivesse a base e todo suporte necessários para realização desse sonho.

Aos meus amigos de longa data desde o colégio, e aos que fiz mais recentemente, obrigado pelas suas amizades (Provérbios 18:24).

Aos meus amigos de curso, Arthur, Emanuel, Wellington e Weverton por todo suporte e por me ensinarem muito sobre física.

Agradeço à toda comunidade da Igreja Episcopal Carismática da Paróquia do Redentor em especial ao meus mais chegados do PG Identidade que me acolheram e que me ajudam a seguir na caminhada cristã me fazendo perceber o quanto sou dependente de Deus e ao lembrar disso sinto muita alegria.

Sou grato a todos professores envolvidos nesse trajeto, desde os professores do colégio onde estudei, aos docentes do curso de engenharia civil do CAA-UFPE que tenho tanto orgulho de ter sido aluno e hoje amigo e aos professores da PPGFísica em especial meus orientadores José Wellington Rocha Tabosa e João Carlos de Aquino Carvalho pela paciência e por me ensinarem tanto e nunca medindo esforços para me corrigir a fim que eu me torne um excelente cientista.

À FACEPE pelo auxílio financeiro que tornou possível a realização desta pesquisa.

Esta conquista não é só minha, nunca foi, acredito que todas as circunstâncias que me trouxeram aqui não são coincidência, creio que todos os detalhes houve o cuidado de Deus. Meu muito obrigado a todos por tudo.

“Então Jesus disse: Porque me viu, creu? Felizes os que não viram e creram.”

João 20:29 [\[1\]](#)

RESUMO

Sistemas atômicos coerentemente preparados podem dar origem a fenômenos interessantes e inesperados como, por exemplo, a transparência eletromagneticamente induzida (EIT). Em tal fenômeno, um meio absorvente pode se tornar transparente mediante uma interação coerente com campos de radiação laser. Este efeito pode ser interpretado como a criação de uma superposição coerente dos níveis atômicos fundamentais que não é acoplada ao estado excitado pelos campos incidentes. Em publicação recente, foi investigado o fenômeno de EIT na presença de um campo magnético dc externo e foi demonstrado que este sistema além de cancelar a absorção do feixe de prova pode também amplificar o feixe de prova incidente levando a um novo mecanismo de ganho. No presente trabalho estendemos a investigação deste mecanismo de ganho explorando o efeito de uma cavidade óptica no aumento do ganho e finalmente alcançando a oscilação laser em tal sistema. O experimento é realizado com átomos frios de césio obtidos a partir de uma armadilha magneto-óptica (MOT). Usamos os subníveis Zeeman da transição cíclica do césio $6S_{1/2}, F = 3 \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 2$, que é excitada por dois feixes coerentes, o feixe de controle e o feixe de prova com polarizações circulares e opostas, na presença de um campo magnético dc externo. Este sistema pode produzir ganho óptico de passagem única da ordem de 80-100% para valores moderados do campo magnético e da potência do feixe de controle. Em um primeiro conjunto de medições, foi investigado o aumento do ganho produzido por uma cavidade óptica em anel com diferentes perdas e finesses. Para uma cavidade de baixa finesse com um espelho de refletividade $R = 70\%$ medimos a amplificação do feixe de prova para diferentes parâmetros experimentais, e um aumento da ordem de 14 vezes no ganho óptico foi observado. Além disso, atingimos a oscilação laser quando uma cavidade óptica de alta finesse com espelho de refletividade $R = 99,9\%$ foi usada. Neste caso, mesmo quando o feixe de prova incidente é bloqueado, a auto-oscilação do sistema é observada quando a cavidade é varrida para sua frequência de ressonância. Estas observações constituem uma demonstração de um novo sistema de laser operando em átomos frios e na dissertação, iremos discutir suas possíveis aplicações.

Palavras-chave: aumento de ganho por cavidade; laser sem inversão de população; átomos frios.

ABSTRACT

Coherently prepared atomic systems can give rise to interesting and unexpected phenomena such as, for example, electromagnetically induced transparency (EIT). In such phenomenon, an absorbing medium can be rendered transparent upon coherent interaction with optical laser fields. This effect can be interpreted as the creation of a coherent atomic ground levels superposition which is not coupled to the excited state by the incident fields. In a recent publication, it was investigated the EIT phenomenon in the presence of an external dc magnetic field and demonstrated that this system, beyond canceling the probe beam absorption, can also amplify the incident probe beam leading to a new gain mechanism. In the present work we extend the investigation of this gain mechanism exploring the effect of an optical cavity for the enhancement of the gain and to ultimately achieve laser oscillation in such system. The experiment is performed in cold cesium atoms obtained from a magneto optical trap (MOT). We use the Zeeman sublevels of the cesium closed transition $6S_{1/2}, F = 3 \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 2$, which is excited by two coherent beams, the coupling and the probe beams with opposite circular polarizations, in the presence of an external dc magnetic field. This system can produce single pass optical gain of the order of 80-100% for moderated values of the magnetic field and coupling beam power. In a first set of measurements, we have investigated the enhancement of the gain produced by an optical ring cavity with different coupling losses and finessees. For a low finesse cavity with a coupling mirror of reflectivity $R = 70\%$ we have measured the probe amplification for different experimental parameters, and a 14-fold increase in the optical gain was observed. Moreover, we have attained laser oscillation when a high finesse optical cavity with output coupling mirror of reflectivity $R = 99,9\%$ was used. In this case, even when the incident probe beam is blocked the self-oscillation of the system is observed when the cavity is scanned to its resonance frequency. These observations constitute a demonstration of a new laser system operating in cold atoms and in the presentation, we will discuss on its possible applications.

Keywords: cavity enhanced gain; laser without population inversion; cold atoms.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	13
2.1	LASER.....	13
2.2	ÁTOMOS ALCALINOS – ESTRUTURA HIPERFINA DO CÉSIO.....	15
2.2.1	Efeito Zeeman.....	18
2.3	INTERAÇÃO ÁTOMO-RADIAÇÃO	19
2.3.1	Melaço óptico.....	20
2.3.2	Armadilha de átomos	22
2.3.3	Sistema de 4 níveis – Descrição do sistema	24
2.3.4	Manipulação do estado escuro	34
2.4	CAVIDADES ÓPTICAS.....	36
2.4.1	Parâmetros de feixes gaussianos	38
2.4.2	Estabilidade	40
2.4.3	Astigmatismo em cavidade em anel	44
2.4.4	Modos da cavidade	47
2.4.5	Faixa espectral livre e Finesse.....	49
3	RESULTADOS EXPERIMENTAIS E DISCUSSÕES	52
3.1	GANHO MAGNETICAMENTE ASSISTIDO	53
3.1.1	Sincronização e sintonização dos feixes	53
3.1.2	Preparação do sistema - Ganho de passagem única.....	56
3.1.2.1	<i>Ganho em função da intensidade do campo magnético.....</i>	58
3.1.2.2	<i>Ganho em função da intensidade do feixe P.....</i>	59
3.1.2.3	<i>Ganho em função da intensidade do feixe C.....</i>	60
3.1.2.4	<i>Observação da modificação do estado escuro.....</i>	61
3.2	CARACTERÍSTICAS DA CAVIDADE	62
3.2.1	Verificação da estabilidade da cavidade.....	64
3.2.2	Propriedades do feixe na cavidade.....	64

3.2.3	Finesse da cavidade	65
3.3	AUMENTO DO GANHO COM CAVIDADE	66
3.4	OSCILAÇÃO LASER.....	69
3.4.1	Finesse da nova cavidade	72
4	CONCLUSÃO	74
	REFERÊNCIAS	75

1 INTRODUÇÃO

Sistemas atômicos coerentemente preparados podem dar origem a muitos fenômenos interessantes e inesperados, como, por exemplo, a transparência eletromagneticamente induzida (EIT do inglês *electromagnetically induced transparency*) [2], o aprisionamento coerente de população (CPT) [3], [4] e o laser sem inversão (LWI do inglês *laser without inversion*) [5], [6], que foram extensivamente investigados nas últimas cinco décadas. Esses fenômenos foram demonstrados usando diferentes sistemas atômicos de três níveis nas configurações Λ , V ou Ξ e geralmente podem ser interpretados como a criação de uma superposição coerente dos níveis atômicos fundamentais, ou estados escuros, que não estão acoplados ao estado excitado pelos campos incidentes. Como é bem conhecido, um sistema degenerado de dois níveis (DTLS) pode fornecer diferentes tipos de sistemas de três níveis, dependendo da polarização relativa do laser e dos momentos angulares do estado fundamental e do estado excitado do DTLS [7], [8] e oferece a possibilidade de observar muitos fenômenos associados à interação coerente átomo-luz. Por exemplo, a observação de ganho Raman em DTLS de átomos frios foi observada muito cedo em [9], [10]. Em uma publicação recente, foi investigado o fenômeno de EIT usando um esquema tipo Λ de um DTLS associado à transição hiperfina D_2 do césio na presença de um campo magnético de externo e foi demonstrado que este sistema, além de cancelar a absorção da luz incidente, também pode amplificar o feixe de prova incidente, levando a um novo e eficiente mecanismo de ganho sem inversão de população [11].

No presente trabalho estendemos a investigação deste mecanismo de ganho explorando o efeito de uma cavidade óptica para o aumento do ganho a fim de atingir a oscilação laser neste sistema. Vale ressaltar que diferentes configurações de sistemas de três níveis também permitiram a observação da amplificação da luz sem inversão de população [12]–[16] e o uso de uma cavidade óptica para potencializar processos não lineares também foi demonstrado anteriormente por [17], [18]. Embora o LWI também tenha sido demonstrado em regime *cw* em um sistema atômico de três níveis [19], o mecanismo de ganho empregado foi baseado em bombeamento óptico incoerente, onde o ganho medido estava na faixa de poucos porcentos. Evidência de LWI também foi relatada em vapor atômico quente via EIT assistida por colisões [20]. O uso do DTLS fornece outro parâmetro, o campo magnético externo, permitindo o controle das populações e coerências de subníveis Zeeman que também podem levar à observação do

ganho óptico. Conforme revisado em [5], em vários casos, o LWI em sistemas de dois e três níveis pode de fato ser explicado como originando-se da inversão oculta da população em alguma base diferente, como por exemplo, a CPT ou a base do estado vestido. Porém, em nosso caso não há inversão em nenhuma base e o ganho é proporcionado pela manipulação do estado escuro induzido pelo campo magnético externo. Além disso, diferentemente dos casos anteriores, este mecanismo de ganho pode fornecer ganho óptico superior a 100% e, portanto, pode ser de grande importância para obter LWI em uma faixa de potência superior.

Para um DTLS correspondente a uma transição atômica $F \rightarrow F - 1$ interagindo com um feixe de controle e um feixe de prova, com frequências de Rabi Ω_C e Ω_P , respectivamente, sendo $\Omega_C \gg \Omega_P$, e tendo polarizações circulares e opostas, o sistema, na ausência do campo magnético externo, é bombeado para um estado escuro que é dado por $|DS\rangle = (1/\sqrt{|\Omega_P|^2 + |\Omega_C|^2})(\Omega_P|m_{F-2}\rangle - \Omega_C|m_F\rangle)$, onde os coeficientes de superposição determinam a população efetiva de cada estado Zeeman. Ao notar que o efeito do campo magnético transversal é, em primeira ordem, aumentar a população do estado menos povoado $|m_{F-2}\rangle$ e diminuir a população do estado mais povoado $|m_F\rangle$, o campo magnético transversal dará origem a um novo estado escuro $|DS'\rangle = (1/\sqrt{|\Omega'_P|^2 + |\Omega'_C|^2})(\Omega'_P|m_{F-2}\rangle - \Omega'_C|m_F\rangle)$, associado a uma frequência de Rabi menor Ω'_C do feixe de controle e com uma frequência de Rabi maior Ω'_P do feixe de prova, levando, portanto, à amplificação do feixe de prova e à absorção do feixe de controle. O novo estado escuro $|DS'\rangle$ é alcançado pela absorção seguida pela emissão espontânea via acoplamento com o novo estado absorvente associado $|AS'\rangle$. De fato, um cálculo de matriz de densidade que leva em consideração o efeito do campo magnético na aproximação da equação de taxa corrobora com esta explicação qualitativa, conforme descrito em [11]. Além disso, também mostra que o ganho não está associado ao ganho Raman, uma vez que o nível do estado fundamental acoplado ao feixe de prova tem uma população de ordem zero maior do que aquela acoplada ao feixe de controle. Finalmente, vale a pena mencionar que foi observada experimentalmente esta transferência de potência do feixe de controle para o feixe de prova, onde o aumento da potência no feixe de prova é simultaneamente acompanhado por uma diminuição correspondente da potência no feixe de controle. Portanto, a observação da oscilação laser neste sistema realmente corresponde ao LWI via manipulação da população Zeeman induzida por um campo magnético externo.

No intuito de esclarecer os detalhes deste trabalho, esta dissertação foi separada em capítulos da seguinte forma:

No capítulo 2 – Fundamentos teóricos – Apresentamos as noções básicas de laser e a estrutura hiperfina do césio onde os lasers do experimento são acoplados. Também damos a base teórica para obtenção da armadilha magneto-óptica e apresentamos a descrição do sistema de 4 níveis usado para modelar o espectro de EIT com ganho além de apresentar propriedades importantes das cavidades e do laser circulante.

No capítulo 3 – Resultados experimentais e discussões – Apresentamos os procedimentos experimentais feitos a fim de obter os resultados. Estes procedimentos incluem a sincronia e sintonização dos feixes tanto para a MOT quanto para os feixes de controle e de prova, além de explicar os procedimentos para medidas do ganho de passagem única, ganho com cavidade e a oscilação laser. Apresentamos também os principais resultados obtidos experimentalmente como a influência da intensidade do campo magnético transversal sobre o ganho e a condição de ressonância Raman, o espectro de transmissão do feixe de prova simultaneamente com o feixe de controle, comprovando a interpretação de manipulação do estado escuro via campo magnético transversal, e por fim, a oscilação laser alcançada na cavidade de alta finesse apresentando um mecanismo diferente de LWI operando em átomos frios.

No capítulo 4 – Conclusão – Apresentamos as conclusões deste trabalho e damos novas perspectivas para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo são introduzidos alguns conceitos fundamentais para o entendimento dos fenômenos físicos que serão descritos ao longo desta dissertação.

Revisaremos o princípio de funcionamento do laser abordando os elementos necessários para seu funcionamento e o conceito de ganho. Abordaremos também a estrutura hiperfina do césio onde os lasers do experimento são sintonizados. Também damos a base teórica para compreender a técnica de resfriamento dos átomos com laser abordando dois mecanismos independentes, o efeito Doppler e o efeito Zeeman.

O sistema atômico de 4 níveis sob ação do campo magnético transversal que modela teoricamente o espectro de EIT é abordado pelo formalismo de matriz densidade onde utilizamos as equações ópticas de Bloch para determinar a coerência induzida pelo feixe de prova que é amplificado.

Por fim, abordamos diversos aspectos das cavidades ópticas, como sua condição de estabilidade e parâmetros dos feixes gaussianos. Damos ênfase na cavidade tipo anel e algumas medidas importantes que representam a qualidade da cavidade, como a faixa espectral livre e a finesse.

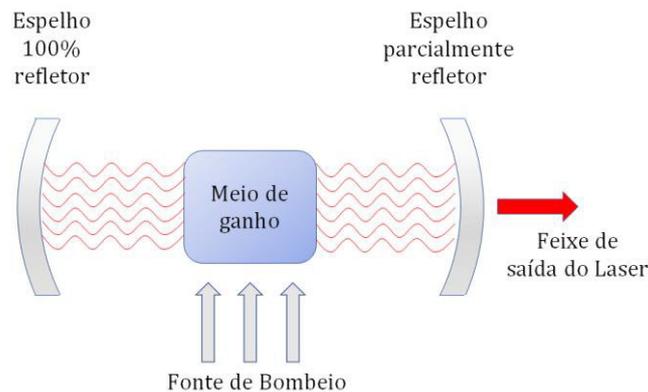
2.1 LASER

O laser é considerado uma das mais importantes invenções desenvolvidas no século XX com diversas aplicações em cirurgias, cortes, leitores de códigos de barras, impressoras, leitores de CD e outras diversas aplicações [21]. A palavra LASER é um acrônimo para *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation* e se baseia na emissão estimulada proposta por Albert Einstein publicada em dois artigos em 1916 [22] e 1917 [23]. Os primeiros experimentos que comprovaram a teoria de Einstein foram realizados na década de 50 por Townes [24], Basov [25] e Prokhorov [26] que lhes renderam o Prêmio Nobel de Física em 1964. A emissão estimulada ocorre quando um átomo num estado excitado interage com um fóton e decai para um estado de menor energia emitindo um fóton idêntico ao fóton incidente amplificando assim a luz.

O laser é uma luz altamente coerente que utiliza a ideia da emissão estimulada para amplificação dos fótons, portanto, para se obter um laser, a princípio é necessário que os átomos (ou a maioria deles) sejam bombeados para o estado excitado criando uma inversão de população.

Para formar um laser, além de uma fonte de bombeio que deve levar os átomos ao estado excitado, é necessária uma cavidade óptica geralmente formada por dois espelhos curvos, sendo um deles totalmente refletor e outro parcialmente refletor, que permitirá a saída de uma parcela dos fótons na cavidade conforme a Figura 1.

Figura 1 – Elementos para funcionamento do laser.



Fonte: O autor (2022)

Uma das propriedades mais interessantes do laser é a coerência, que indica que a radiação emitida pelos átomos possui a mesma fase e modo espacial, o que permite que a luz permaneça como um feixe estreito e confinado por grandes distâncias [27], [28].

Assumindo que um sistema amplifica a luz, podemos definir o ganho. O ganho laser (ou ganho óptico) é a medida do quão bem um meio amplifica fótons por emissão estimulada [28]. O ganho possui uma natureza exponencial e a potência de um feixe que se propaga como uma onda eletromagnética aumenta com e^{gx} , onde x é o comprimento ao longo do meio de ganho e g é o coeficiente de ganho que podemos expressar como

$$g = \frac{\Delta P}{P\Delta x} \quad (2.1)$$

onde ΔP é a diferença entre as potências de saída e de entrada do feixe ao atravessar um meio de ganho de comprimento Δx e P é a potência do feixe de entrada.

Embora os lasers convencionais utilizem o princípio de inversão de população para seu funcionamento, o sistema desenvolvido nesta dissertação é um contraexemplo e está em outra classe de sistemas oscilantes, chamado de laser sem inversão de população.

2.2 ÁTOMOS ALCALINOS – ESTRUTURA HIPERFINA DO CÉSIO

Os átomos alcalinos são os mais parecidos com o átomo de hidrogênio e por isso são chamados de hidrogenóides. Em sua estrutura eletrônica o elétron mais externo (elétron de valência) determina os momentos angulares tanto orbital (L) como de spin (S) do átomo como um todo.

O césio está localizado na família 1A no 6° período da tabela periódica. Possui 55 elétrons distribuídos nas camadas eletrônicas. No estado fundamental possui a seguinte distribuição eletrônica

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^6 6s^1$$

que em notação espectroscópica $s, p, d, f, etc.$, correspondem a $L = 0, 1, 2, 3, etc.$, respectivamente, portanto, o elétron de valência possui o seguinte conjunto de números quânticos

$$n = 6$$

$$L = 0 \text{ (elétron-s)}$$

$$m = 0$$

$$S = 1/2.$$

Este átomo pode ser excitado e então o elétron de valência pode saltar para a subcamada p ($L = 1$) e então precisamos levar em conta algumas interações que quebram a degenerescência das energias dependendo do conjunto de números quânticos.

A interação spin-órbita considera o efeito do campo magnético gerado pelo núcleo sobre o spin do elétron [29]. No referencial do elétron, é o núcleo que gira em torno dele gerando um campo magnético $\vec{B} \propto \vec{L}$, então a modificação do Hamiltoniano referente ao acoplamento spin-órbita será dada por

$$\delta\hat{H}_{SO} = \beta\hat{S} \cdot \hat{L}. \quad (2.2)$$

Definimos o operador do momento angular eletrônico total como $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$, e reescrevemos a interação spin-órbita da Equação 2.2 em termos dos operadores de momento angular \hat{J}^2 , \hat{L}^2 e \hat{S}^2

$$\delta\hat{H}_{SO} = \frac{\beta}{2}(\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2). \quad (2.3)$$

Então, os deslocamentos de energia devido à interação spin-órbita são dados pelos respectivos autovalores dos operadores de momento angular ao quadrado

$$\delta E_{SO} = \frac{\beta \hbar^2}{2} [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)] \quad (2.4)$$

onde J pode assumir valores tais que $|L - S| \leq J \leq |L + S|$. Portanto, a interação spin-órbita quebra a degenerescência dos estados no subnível p . À transição $6S_{1/2} \leftrightarrow 6P_{1/2}$ chamamos de linha D_1 e à transição $6S_{1/2} \leftrightarrow 6P_{3/2}$ chamamos de linha D_2 , onde em notação espectroscópica escrevemos nL_J . Nesta dissertação vamos focar apenas na linha D_2 que corresponde às transições envolvidas no experimento.

O segundo tipo de interação é chamado de interação hiperfina, que como o nome sugere, possui uma energia de interação menor que a energia da estrutura fina, e a modificação do Hamiltoniano nesta interação leva em conta o efeito do momento magnético nuclear e a densidade de fluxo magnético criada pelos elétrons atômicos

$$\delta H_{hf} = -\vec{\mu}_I \cdot \vec{B}_e, \quad (2.5)$$

onde o momento magnético nuclear está relacionado com o spin nuclear por

$$\vec{\mu}_I = g_I \mu_N \vec{I} \quad (2.6)$$

e $\mu_N = \mu_B \frac{m_e}{m_p} \approx \frac{\mu_B}{1836}$ e $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ é o magneton de Bohr onde m_e e m_p são as massas do elétron e do próton respectivamente.

Para calcular as interações magnéticas do elétron em torno do núcleo atômico, o campo magnético gerado por este elétron sobre o núcleo é dado por

$$\vec{B}_e = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{-e\vec{v} \times (-\vec{r})}{r^3} - \frac{\vec{\mu}_e - 3(\vec{\mu}_e \cdot \hat{r})\hat{r}}{r^3} \right\}, \quad (2.7)$$

onde $-\vec{r}$ representa a posição do núcleo em relação ao elétron. O primeiro termo surge devido ao movimento orbital e contém um termo $-e\vec{v} \times (-\vec{r}) = -2\mu_B \vec{l}$. O segundo termo representa o campo magnético produzido pelo momento de dipolo de spin do elétron $\vec{\mu}_e = -2\mu_B \vec{s}$ na posição $-\vec{r}$ em relação ao dipolo. Assim, podemos escrever

$$\vec{B}_e = -2 \frac{\mu_0 \mu_B}{4\pi r^3} \left\{ \vec{l} - \vec{s} + \frac{3(\vec{s} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} \right\}. \quad (2.8)$$

Podemos utilizar o argumento que no modelo vetorial, há uma rápida precessão em torno de \vec{J} , e qualquer componente perpendicular a este eixo de quantização possui média nula, então apenas as componentes ao longo de \vec{J} possui média não nula ao longo do tempo. Podemos assumir o fator de projeção por um valor aproximado [30], assim, temos

$$\vec{B}_e \sim -\frac{\mu_0}{2\pi} \left\langle \frac{\mu_B}{r^3} \right\rangle \vec{J}. \quad (2.9)$$

Combinando as Equações 2.6 e 2.9 na Equação 2.5, o Hamiltoniano de interação hiperfina é dado por

$$\delta H_{hf} \sim g_I \mu_N \frac{\mu_0}{2\pi} \left\langle \frac{\mu_B}{r^3} \right\rangle \vec{I} \cdot \vec{J} \quad (2.10)$$

onde $\mathcal{A} \sim g_I \mu_N \frac{\mu_0}{2\pi} \left\langle \frac{\mu_B}{r^3} \right\rangle$ é a constante de acoplamento da estrutura hiperfina cujo significado físico corresponde à energia de separação entre níveis hiperfinos. Desta forma, o Hamiltoniano da interação hiperfina pode ser escrito como

$$\delta H_{hf} = \mathcal{A} \vec{I} \cdot \vec{J} \quad (2.11)$$

onde a constante de estrutura hiperfina $\mathcal{A}(n, L, J)$ é menor para $L > 0$ do que para $L = 0$ e o mesmo n .

Podemos definir ainda o momento angular atômico total como a soma do momento angular eletrônico com o spin nuclear $\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$ e, portanto, reescrever a interação hiperfina da Equação 2.11 em termos dos operadores \hat{F}^2, \hat{J}^2 e \hat{I}^2

$$\delta \hat{H}_{hf} = \frac{\mathcal{A}}{2} (\hat{F}^2 - \hat{J}^2 - \hat{I}^2). \quad (2.12)$$

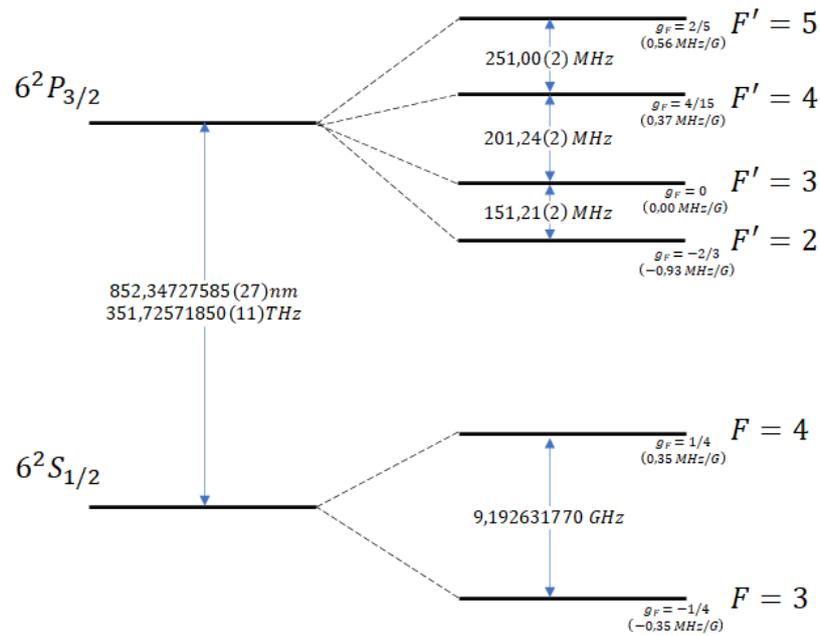
Então, os deslocamentos de energia devidos à interação hiperfina são dados pelos respectivos autovalores dos operadores de momento angular ao quadrado

$$\delta E_{hf} = \frac{\mathcal{A} \hbar^2}{2} [F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)], \quad (2.13)$$

onde F pode assumir valores tais que $|J - I| \leq F \leq |J + I|$ sendo $I = 7/2$ para o cério. Portanto, no caso em que $J = 1/2$, F pode assumir os valores 3 ou 4. Já no caso em que $J = 3/2$, F pode assumir os valores inteiros de 2 a 5.

Os desdobramentos de energia nos níveis $6S_{1/2}$ e $6P_{3/2}$ [31] estão esquematizados na Figura 2.

Figura 2 - Estrutura hiperfina do césio.



Fonte: O autor (2022)

2.2.1 Efeito Zeeman

O tratamento do efeito Zeeman na estrutura hiperfina é muito similar ao descrito na interação spin-órbita. Podemos escrever o momento magnético atômico total como a soma dos momentos eletrônico e nuclear. Uma vez que $\mu_N \ll \mu_B$ podemos desconsiderar a contribuição nuclear.

$$\vec{\mu}_{\text{atomo}} = -g_J \mu_B \vec{J} + g_I \mu_N \vec{I} \approx -g_J \mu_B \vec{J} \quad (2.14)$$

onde g_J é chamado de fator-g de Landé e é definido como $g_J = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$.

Então o Hamiltoniano da interação do momento magnético atômico total com um campo magnético externo \vec{B} depende basicamente do momento magnético eletrônico.

$$\delta H_Z = -\vec{\mu}_{\text{atomo}} \cdot \vec{B} = g_J \mu_B \vec{J} \cdot \vec{B}. \quad (2.15)$$

Esta interação não depende do spin nuclear, entretanto, seu valor esperado depende da estrutura hiperfina. Vamos considerar um regime de campo magnético fraco onde a interação com o campo externo é mais fraca que $\mathcal{A} \vec{I} \cdot \vec{J}$, então podemos tratar o efeito Zeeman como uma perturbação na estrutura hiperfina.

Se a interação da Equação 2.15 é mais fraca que a interação hiperfina $\mathcal{A} \vec{I} \cdot \vec{J}$, então \vec{J} e \vec{I} se movem rapidamente em torno de sua resultante \vec{F} . Tomando a projeção dos momentos magnéticos ao longo de \vec{F} dá o Hamiltoniano efetivo

$$\delta H_Z = g_J \mu_B \frac{\langle \vec{J} \cdot \vec{F} \rangle}{F(F+1)} \vec{F} \cdot \vec{B} = g_F \mu_B \vec{F} \cdot \vec{B} = g_F \mu_B B F_Z \quad (2.16)$$

onde

$$g_F = \frac{F(F+1) + J(J+1) - I(I+1)}{2F(F+1)} g_J. \quad (2.17)$$

O fator g_F cresce com a projeção de \vec{J} sobre \vec{F} , da mesma maneira que g_J é dada pela projeção de \vec{L} e \vec{S} sobre \vec{J} . Portanto, o deslocamento de energia devido ao efeito Zeeman é dado por

$$\delta E_Z = g_F \mu_B B \langle \hat{F}_Z \rangle = g_F \mu_B B m_F. \quad (2.18)$$

2.3 INTERAÇÃO ÁTOMO-RADIAÇÃO

A luz transporta energia e momento e o espalhamento da luz por um átomo produz força sobre ele. Esta propriedade da luz foi primeiramente demonstrada através da observação de um pequeno desvio de um feixe de átomos de sódio exposto à luz ressonante de uma lâmpada [32] e este resultado despertou o interesse em utilizar luz para controlar o movimento de átomos neutros.

Cada fóton absorvido por um átomo transfere um quantum de momento $\hbar \vec{k}_L$ para o átomo de modo que dependendo da direção que o átomo se move no instante da absorção, este pode aumentar ou diminuir de velocidade, ou sofrer desvios da sua trajetória. Após a absorção, ocorre a emissão espontânea e, nesse processo, um fóton com momento $\hbar \vec{k}'$, sendo $|\vec{k}_L| = |\vec{k}'|$, é emitido numa direção aleatória. Após a emissão espontânea o átomo passa a ter momento igual a

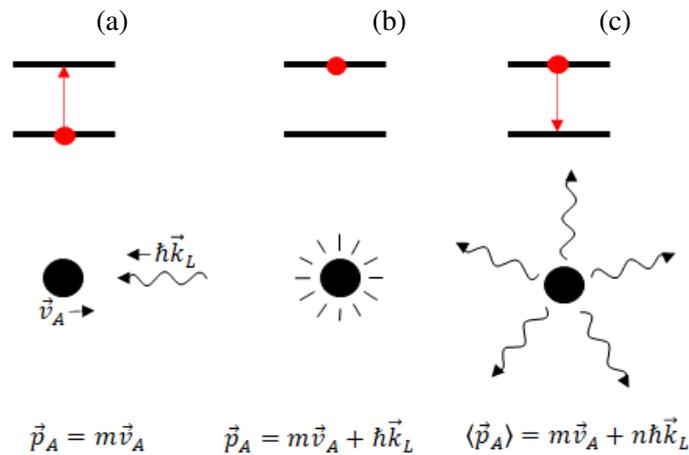
$$\vec{p}_A = m \vec{v}_A + \hbar \vec{k}_L - \hbar \vec{k}'. \quad (2.19)$$

Assim, para um número n grande de ciclos de absorções e emissões, temos

$$\langle \vec{p}_A \rangle = m \vec{v}_A + n \hbar \vec{k}_L - \int_{\Omega} \hbar \vec{k}' \rho_n(\vec{k}'(\Omega)) d\Omega, \quad (2.20)$$

onde $\rho_n(\vec{k}'(\Omega))$ é a densidade de fótons com vetor de onda \vec{k}' apontando numa direção $\Omega(\theta, \phi)$. Como essa densidade é esfericamente simétrica, a integral da Equação 2.20 resulta em zero, de modo que as emissões espontâneas não afetam seu momento, como mostrado esquematicamente na Figura 3.

Figura 3 - (a) Átomo com massa m e velocidade \vec{v}_A absorve um fóton que se propaga com momento $\hbar\vec{k}_L$. (b) O átomo excitado experimenta uma mudança no momento $\vec{p}_A = m\vec{v}_A + \hbar\vec{k}_L$. (c) Emissão espontânea aleatória resultando numa média $\langle\vec{p}_A\rangle = m\vec{v}_A + n\hbar\vec{k}_L$.



Fonte: O autor (2022)

2.3.1 Melaço óptico

No início do século XX, a partir dos conhecimentos sobre a interação da luz com a matéria, surgiram as primeiras ideias a respeito da manipulação de pequenas partículas com massa usando luz. Os mecanismos físicos de esfriamento e aprisionamento de átomos com laser foram tratados na década de 70 com a teoria quântica [33], resultando nas primeiras aplicações em 1985, com a publicação do trabalho de Chu e Hollberg [34], e os primeiros trabalhos de aprisionamento de átomos foram reportados em [35] e [36].

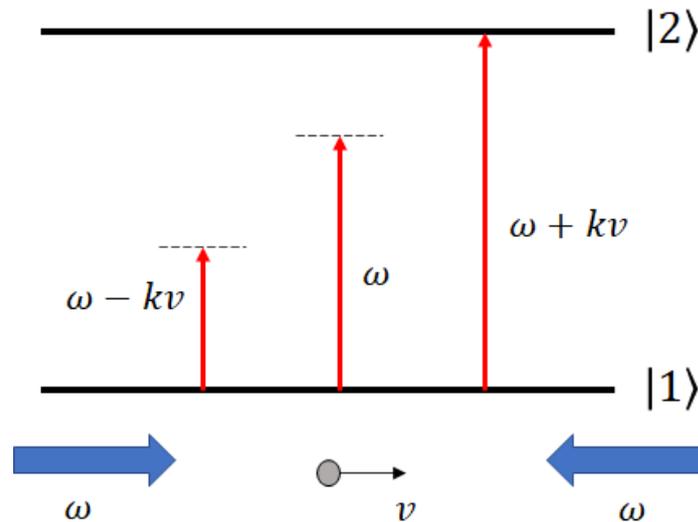
O princípio da armadilha de átomos ou armadilha magneto-óptica (MOT, do inglês *Magneto Optical Trap*) está baseado em 2 processos independentes: O primeiro é a absorção de fótons selecionados por efeito Doppler onde a frequência da radiação é modificada no referencial do átomo a depender da orientação da sua velocidade, e o segundo é o efeito Zeeman que é gerado por um campo magnético não homogêneo externo que desloca os níveis de energia da estrutura hiperfina. A combinação dos dois processos cria uma força sobre os átomos semelhante a um sistema massa-mola clássico sujeito a amortecimento, sendo os lasers de esfriamento responsáveis por diminuir a velocidade dos átomos, fazendo o papel do amortecimento, e o efeito Zeeman responsável por levar o átomo à posição de equilíbrio onde o campo magnético é nulo, fazendo assim o papel da mola.

Em 1975 Hänsch e Schawlow [33] propuseram a técnica do melaço óptico que consiste numa configuração de lasers contrapropagantes sintonizados abaixo da ressonância atômica. Ao contrário do que se pode pensar que ambos feixes exercem forças iguais sobre o átomo, o equilíbrio só deve ocorrer na condição em que os átomos estão estacionários. Ocorre que o efeito Doppler modifica a frequência da radiação no referencial do átomo para

$$\omega' = \omega - \vec{k} \cdot \vec{v}, \quad (2.21)$$

onde ω e \vec{k} são a frequência angular e o vetor de onda da radiação, respectivamente, e \vec{v} é o vetor velocidade do átomo.

Figura 4 - Efeito Doppler percebido por um átomo ao interagir com dois feixes contrapropagantes de igual frequência.



Fonte: O autor (2022)

No esquema da Figura 4, consideramos o caso unidimensional de um átomo de 2 níveis interagindo com dois feixes laser contrapropagantes de frequência angular ω abaixo da frequência de transição atômica $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$. Supomos que um átomo se move com velocidade \vec{v} para a direita na direção dos feixes e “enxerga” as frequências dos feixes modificadas para $\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}$. Como $\omega + kv$ fica mais próxima da frequência de transição $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$, os fótons do feixe da direita têm maior probabilidade de serem absorvidos enquanto os fótons do feixe da esquerda se afastam da transição $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ e têm menor probabilidade de serem absorvidos. Assim, a força resultante sobre os átomos exercida pelo laser possui sentido oposto à velocidade dos átomos. Esta força é do tipo

$\vec{F} = -\alpha\vec{v}$, ou seja, a luz exerce sobre o átomo uma força viscosa, ou de amortecimento, causando uma diminuição de sua velocidade. À medida que a velocidade dos átomos diminui, o efeito Doppler vai ficando menos pronunciado a ponto de que quando os átomos chegam a ficar estacionários, ambos os feixes são “vistos” com frequência ω e, portanto, fótons de ambos os feixes têm igual probabilidade de serem absorvidos, logo, a força resultante é nula.

Entretanto, o que acontece na prática é que os átomos se movem nas três direções espaciais, e para reduzir a velocidade dos átomos são necessários três pares de feixes nas três direções e nas mesmas condições descritas. A técnica do melaço óptico apenas reduz a velocidade dos átomos, mas não garante o seu aprisionamento. Na próxima seção será explicada a técnica usada para aprisionar os átomos, ou seja, deixá-los confinados em torno de uma posição de equilíbrio.

2.3.2 Armadilha de átomos

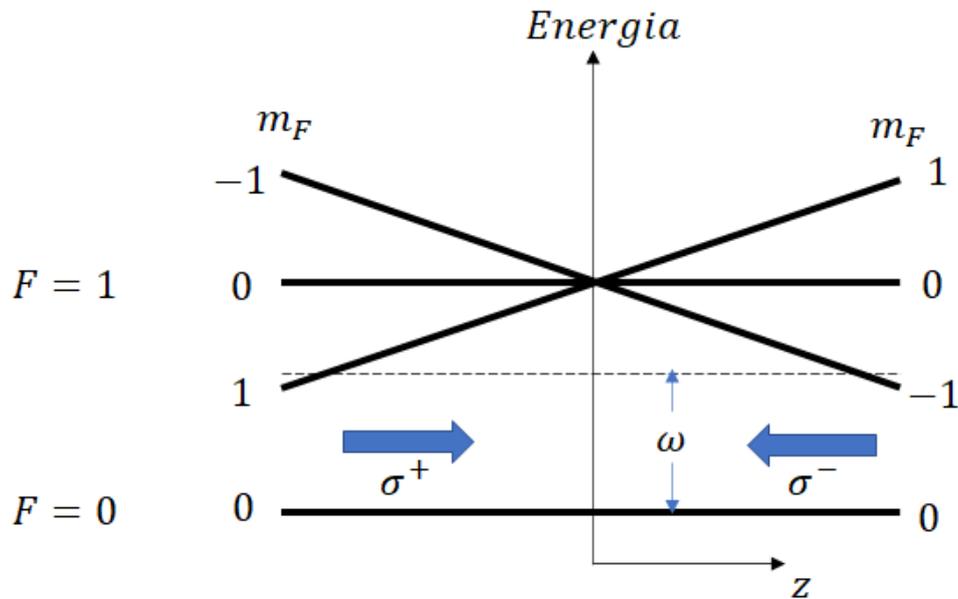
O aprisionamento dos átomos, ou seja, o confinamento numa pequena região do espaço é impossível de ser alcançado apenas com a técnica do melaço óptico como mostrado pelo teorema de Earnshaw [37], que diz que não é possível armadilhar átomos usando apenas força de pressão de radiação uma vez que o divergente do vetor de Poynting é nulo ($\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$). Assim, é impossível criar uma distribuição espacial de campos de luz de modo que o vetor de Poynting aponte sempre no mesmo ponto. Precisamos então de um efeito que faça com que a probabilidade de absorção dos fótons pelos átomos seja dependente da sua posição. É possível, a partir do efeito Zeeman, selecionar fótons para serem absorvidos ainda que o átomo esteja estacionário escolhendo uma forma de campo magnético apropriada que desloque os subníveis Zeeman de maneira proporcional à posição do átomo.

Podemos obter um deslocamento Zeeman dependente da posição z do átomo ao criarmos um campo magnético da forma $B(z) = B_0z$, onde $B_0 > 0$ é o gradiente do campo magnético. A forma deste campo pode ser obtida a partir de um par de bobinas anti-Helmholtz e, de acordo com a Equação 2.18, os deslocamentos de energia ficam da forma

$$\delta E = g_F \mu_B m_F B_0 z. \quad (2.22)$$

Para melhor entender o funcionamento da armadilha vamos considerar um sistema de dois níveis com $F = 0$ correspondendo ao estado fundamental e $F = 1$ correspondendo ao estado excitado, conforme a Figura 5.

Figura 5 - Diagrama dos níveis de energia com quebra da degenerescência Zeeman pelo campo magnético inhomogêneo (fora de escala).

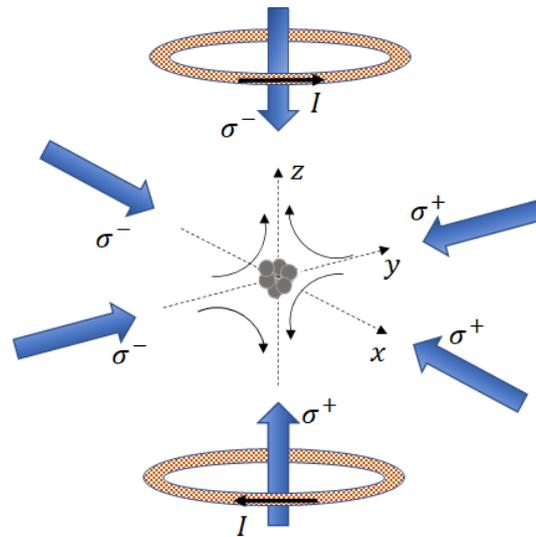


Fonte: O autor (2022)

Em torno da região de campo nulo ($z = 0$) há um campo magnético que perturba os níveis de energia do átomo devido ao efeito Zeeman. Sendo este deslocamento proporcional a m_F , o estado fundamental e o subnível $m_F = 0$ do estado excitado não são afetados, porém, para $m_F = \pm 1$ os níveis de energia devem variar linearmente. Com isso, para $z > 0$, a transição $\Delta m_F = -1$ se aproxima da ressonância para os feixes enquanto a transição $\Delta m_F = +1$ se afasta. De acordo com as regras de seleção, a probabilidade de que os fótons com polarização σ^- sejam absorvidos é maior que dos fótons com polarização σ^+ . Assim, existe uma força resultante que empurra o átomo até a posição $z = 0$. O mesmo processo acontece quando $z < 0$, neste caso a probabilidade dos fótons com polarização σ^+ serem absorvidos é maior [32].

O esquema apresentado na Figura 5 é o caso unidimensional, porém, como os átomos se movem nas 3 direções espaciais, são necessários 3 pares de feixes na situação descrita pela Figura 6.

Figura 6 - Configuração esquemática de uma MOT mostrando os lasers de resfriamento e as bobinas na configuração anti-Helmholtz produzindo um campo magnético quadrupolo.



Fonte: O autor (2022)

2.3.3 Sistema de 4 níveis – Descrição do sistema

Quando um feixe de radiação acopla níveis de energia atômicos, este feixe, a princípio, seria absorvido pelos átomos. O fenômeno da transparência eletromagneticamente induzida (EIT) ocorre quando um segundo feixe (de maior potência) torna o meio transparente, ou seja, os átomos deixam de ser vistos pelos feixes [38].

Para entendermos o fenômeno de EIT podemos considerar o sistema de 4 níveis tipo Λ da Figura 7, com os feixes ligeiramente dessintonizados da ressonância correspondendo ao sistema real do experimento descrito nesta dissertação onde os níveis do estado fundamental correspondem aos subníveis da estrutura Zeeman. A presença do campo magnético transversal externo induz uma coerência entre os subníveis Zeeman adjacentes do nível fundamental.

O Hamiltoniano total do sistema pode ser escrito como a soma do Hamiltoniano do átomo livre com o Hamiltoniano de interação. O Hamiltoniano do átomo livre expresso na base $\{|0'\rangle, |-\rangle, |0\rangle, |+\rangle\}$ fica

$$\hat{H}_0 = \left(\sum_j |j\rangle\langle j| \right) \hat{H}_0 \left(\sum_j |j\rangle\langle j| \right) \quad (2.23)$$

usando a relação de autovalor do Hamiltoniano temos

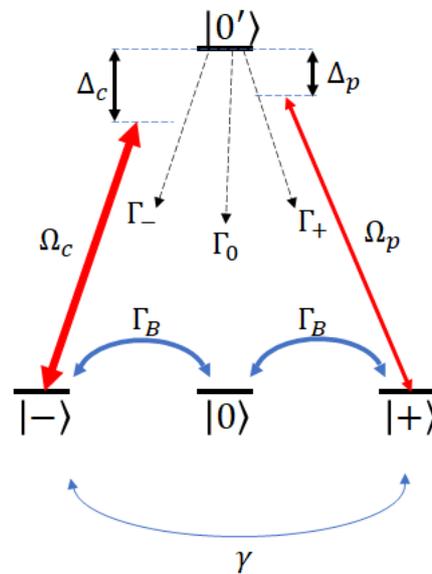
$$\hat{H}_0|j\rangle = \hbar\omega_j|j\rangle \quad (2.24)$$

em que ω_j são as frequências correspondentes aos níveis de energia $|j\rangle$ com $j = 0', -, 0$ e $+$. Com a condição de ortonormalidade dos estados, isto é $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$, teremos

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_{0'}|0'\rangle\langle 0'| + \hbar\omega_-|-\rangle\langle -| + \hbar\omega_0|0\rangle\langle 0| + \hbar\omega_+|+\rangle\langle +| \quad (2.25)$$

portanto, este Hamiltoniano é diagonal e possui autovalores de energia $\hbar\omega_{0'}$, $\hbar\omega_-$, $\hbar\omega_0$ e $\hbar\omega_+$.

Figura 7 - Sistema atômico de quatro níveis utilizado para modelar o efeito de um campo magnético transversal no espectro EIT.



Fonte: O autor (2022)

Para o Hamiltoniano de interação do átomo com os feixes C (feixe de controle) e P (feixe de prova), podemos considerar a aproximação de comprimento de onda longo, isto é, como os comprimentos de onda dos feixes são muito maiores que as dimensões atômicas, o campo elétrico ao longo das dimensões do átomo pode ser considerado uniforme. Como nosso sistema possui dois campos elétricos interagindo com o átomo, devemos considerar duas interações. A primeira delas é a interação do feixe C que acopla os níveis $|-\rangle \leftrightarrow |0'\rangle$ e a segunda é do feixe P que acopla os níveis $|+\rangle \leftrightarrow |0'\rangle$. Deduziremos o Hamiltoniano para a interação do feixe C com o átomo e tomaremos o resultado análogo para o feixe P.

Ao Hamiltoniano de interação do feixe C com o átomo chamaremos de \hat{V}_C que pode ser escrito como

$$\hat{V}_C = -\hat{p}_C \cdot \vec{E}_C, \quad (2.26)$$

onde \hat{p}_C é o operador dipolo elétrico definido como $\hat{p}_C = e\hat{r}$ e \vec{E}_C é o campo elétrico do feixe C. Podemos escrever o campo elétrico \vec{E}_C em termos da sua frequência ω_C e sua fase φ_C .

$$\vec{E}_C = E_C \cos(\omega_C t + \varphi_C) \hat{e}_C. \quad (2.27)$$

Portanto, o Hamiltoniano de interação do feixe C é

$$\hat{V}_C = \left(\sum_j |j\rangle\langle j| \right) (-e\hat{r} \cdot E_C \cos(\omega_C t + \varphi_C) \hat{e}_C) \left(\sum_j |j\rangle\langle j| \right). \quad (2.28)$$

Como o feixe C acopla apenas os níveis $|-\rangle \leftrightarrow |0'\rangle$, apenas os termos $\langle 0'|e\hat{r} \cdot \hat{e}_C|-\rangle$ e $\langle -|e\hat{r} \cdot \hat{e}_C|0'\rangle$ sobrevivem. A estes dois termos chamaremos por simplicidade de $p_{0'-}$ e $p_{-0'}$, respectivamente, os momentos de dipolo elétricos que acoplam os níveis $|-\rangle \leftrightarrow |0'\rangle$. Assim, a Equação 2.28 se torna

$$\hat{V}_C = -(p_{0'-}|0'\rangle\langle -| + p_{-0'}|-\rangle\langle 0'|)E_C \cos(\omega_C t + \varphi_C). \quad (2.29)$$

Podemos ainda definir as quantidades $\omega_{ij} = \omega_i - \omega_j$ (para $i, j = 0', -, 0$ e $+$) e expressar os campos em notação complexa considerando a evolução livre dos operadores $|0'\rangle\langle -|$ e $|-\rangle\langle 0'|$ definidas pelos fatores $e^{-i\omega_{0'-}t}$ e $e^{-i\omega_{-0'}t}$, respectivamente. Assim, devem surgir termos que oscilam com $|\omega_C \pm \omega_{0'-}|$ e $|\omega_C \pm \omega_{-0'}|$. Como $\omega_{0'} > \omega_-$ e $\omega_{0'-} = -\omega_{-0'}$ e já que o tempo de detecção é muito maior que o período de oscilação dos campos, podemos fazer a aproximação de onda girante desprezando os termos $|\omega_C + \omega_{0'-}|$ e $|\omega_C - \omega_{-0'}|$, uma vez que oscilam muito mais rápido que os outros termos e possuem média temporal nula. Após fazer esta aproximação, definimos a frequência de Rabi $\Omega_C = \frac{p_{0'-}E_C}{\hbar}$, logo, nosso Hamiltoniano de interação do feixe C fica da forma

$$\hat{V}_C = -\frac{\hbar\Omega_C}{2} e^{-i(\omega_C t + \varphi_C)} |0'\rangle\langle -| + c. c. \quad (2.30)$$

Podemos repetir o procedimento para o feixe P, a única diferença é que este feixe acopla os níveis $|+\rangle \leftrightarrow |0'\rangle$. Portanto, o Hamiltoniano total de interação fica da forma

$$\hat{V} = \hat{V}_C + \hat{V}_P = -\frac{\hbar\Omega_C}{2} e^{-i(\omega_C t + \varphi_C)} |0'\rangle\langle -| - \frac{\hbar\Omega_P}{2} e^{-i(\omega_P t + \varphi_P)} |0'\rangle\langle +| + c. c. \quad (2.31)$$

onde $c. c.$ é o complexo conjugado.

Agora temos condições de escrever o Hamiltoniano total do sistema dado pela soma do Hamiltoniano do átomo livre (Equação 2.25) com o Hamiltoniano de interação (Equação 2.31) da forma

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}. \quad (2.32)$$

Podemos ainda escrever a Equação 2.32 na forma matricial, assim o Hamiltoniano total do sistema tem a forma

$$\hat{H} = \hbar \begin{pmatrix} \omega_{0'} & \Omega_-^* & 0 & -\Omega_+^* \\ -\Omega_- & \omega_- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_0 & 0 \\ -\Omega_+ & 0 & 0 & \omega_+ \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

onde definimos $\Omega_- = \frac{1}{2}\Omega_C^* e^{i\omega_C t}$ e $\Omega_+ = \frac{1}{2}\Omega_P^* e^{i\omega_P t}$.

A partir do Hamiltoniano total podemos estudar a evolução temporal deste sistema sem levar em conta os processos de decaimento e efeito do campo magnético. Primeiro vamos considerar que no tempo t o vetor de estado do sistema tem a forma

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{j=0',-,0,+} C_j(t) e^{-i\omega_j t} |j\rangle. \quad (2.34)$$

Ao aplicarmos a equação de Schrödinger dependente do tempo

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle, \quad (2.35)$$

obtemos o seguinte sistema de equações

$$\dot{C}_{0'}(t) = \frac{i}{2} (\Omega_C C_-(t) + \Omega_P C_+(t)), \quad (2.36a)$$

$$\dot{C}_-(t) = \frac{i}{2} \Omega_C C_{0'}(t), \quad (2.36b)$$

$$\dot{C}_0(t) = 0, \quad (2.36c)$$

$$\dot{C}_+(t) = \frac{i}{2} \Omega_P C_{0'}(t), \quad (2.36d)$$

onde consideramos que os campos são ressonantes com as transições atômicas, ou seja $\omega_C = \omega_{0'-}$ e $\omega_P = \omega_{0'+}$. Podemos verificar ainda que um dos autovalores de \hat{V} possui autovalor nulo, ou seja, existe um autoestado $|\psi\rangle$ de \hat{V} cuja probabilidade de excitação é nula. Para encontrar este autoestado, podemos calcular os autovalores ψ tais que $\hat{V}|\psi\rangle = \psi|\psi\rangle$, verificando que um de seus autovalores é 0. Ou podemos simplesmente fazer $C_{0'}(t) = 0$ e, conseqüentemente, das Equações 2.36a-d temos que $\dot{C}_{0'}(t) = \dot{C}_-(t) = \dot{C}_0(t) = \dot{C}_+(t) = C_0(t) = 0$ e $C_-(t) \propto \Omega_P$ e $C_+(t) \propto -\Omega_C$ (onde consideramos $\varphi_C = \varphi_P = 0$). Logo, o vetor de estado normalizado pode ser escrito como

$$|\Psi(t)\rangle = |DS\rangle = \frac{1}{\sqrt{|\Omega_P|^2 + |\Omega_C|^2}} (\Omega_P e^{-i\omega_- t} |-\rangle - \Omega_C e^{-i\omega_+ t} |+\rangle). \quad (2.37)$$

O estado descrito acima é chamado de estado escuro (DS, do inglês *Dark State*), por não acoplar com o estado excitado através do Hamiltoniano de interação. Portanto, neste estado, o Hamiltoniano é dado apenas pela evolução livre dos estados fundamentais.

Este resultado é uma superposição coerente dos estados $|-\rangle$ e $|+\rangle$ cuja probabilidade de excitação é nula e pode ser interpretada como uma interferência quântica destrutiva das duas formas possíveis de excitar o sistema, $|-\rangle \rightarrow |0'\rangle$ e $|+\rangle \rightarrow |0'\rangle$.

Este fenômeno é uma consequência do Aprisionamento coerente de população (CPT, do inglês *Coherent Population Trap*), pois na ressonância de dois fótons, ocorre um bombeamento coerente dos átomos para um estado que coincide com o estado escuro onde a probabilidade de excitação do átomo é nula [39].

O estado escuro recebe este nome devido à interferência quântica destrutiva causada pelos dois feixes interagindo com o sistema atômico, ou seja, na presença do segundo feixe, o átomo deixa de interagir com o primeiro. Quando o sistema é capturado neste estado ocorre o efeito de CPT. Para ocorrer o CPT não é preciso preparar o sistema neste estado, o sistema pode ser levado a este estado por bombeamento através da ação combinada dos campos de radiação, assim como através de processos de decaimento espontâneo de população [38].

O formalismo de função de onda leva em conta apenas processos coerentes e não considera processos dissipativos, como decaimento. Portanto, o formalismo de matriz densidade se torna útil para descrever a dinâmica das populações usando a equação óptica de Bloch (Equação 2.38) que é a equação de Liouville adicionada de um termo de relaxação, onde estão inclusas as taxas de decaimento e o efeito do campo magnético.

$$\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] + \left(\frac{d\hat{\rho}}{dt} \right)_{rel}. \quad (2.38)$$

Usando o formalismo matemático da matriz densidade [32], podemos escrever o operador densidade da forma

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{0'0'} & \rho_{0'-} & \rho_{0'0} & \rho_{0'+} \\ \rho_{-0'} & \rho_{--} & \rho_{-0} & \rho_{-+} \\ \rho_{00'} & \rho_{0-} & \rho_{00} & \rho_{0+} \\ \rho_{+0'} & \rho_{+-} & \rho_{+0} & \rho_{++} \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Na Figura 7 dois feixes interagem com o sistema atômico sendo um deles bem mais intenso que o outro. O feixe mais intenso (feixe C) com frequência de Rabi Ω_C está quase ressonante com a transição $|-\rangle \leftrightarrow |0'\rangle$ (dessintonizado de Δ_C) e o feixe menos intenso (feixe P) com frequência de Rabi Ω_P está quase ressonante com a transição $|+\rangle \leftrightarrow |0'\rangle$ (dessintonizado de Δ_P). O nível excitado possui taxas de decaimento Γ_- , Γ_+ e Γ_0 para os estados fundamentais $|-\rangle$, $|+\rangle$ e $|0\rangle$, respectivamente, γ representa a perda de coerência entre os estados $|-\rangle$ e $|+\rangle$ e Γ_B representa uma taxa de bombeamento induzida para modelar o efeito do campo magnético transversal, ou seja, consideramos que o

principal efeito do campo magnético transversal é transferir população entre os subníveis Zeeman adjacentes do nível fundamental correspondendo ao limite de campo magnético fraco e incoerente.

Antes de resolver as equações ópticas de Bloch, precisamos representar o termo de relaxação que é adicionada fenomenologicamente à equação de Liouville. Este termo é dado por

$$\left(\frac{d\hat{\rho}}{dt}\right)_{rel} = -\frac{1}{2}\{\hat{\Lambda}, \hat{\rho}\} + \hat{B}, \quad (2.40)$$

onde o operador $\hat{\Lambda}$ está associado às perdas de populações dos estados e às perdas de coerência. Assim, podemos representar o operador $\hat{\Lambda}$ como

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Gamma_- + \Gamma_0 + \Gamma_+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma + \Gamma_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\Gamma_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma + \Gamma_B \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

O operador \hat{B} , ao contrário do operador $\hat{\Lambda}$, está associado ao ganho de população de cada estado. Considerando que o sistema atômico é fechado, a população total do sistema é conservada. Assim, no operador \hat{B} estão inclusos apenas o aumento de população devido aos processos de decaimento dos outros níveis:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{--} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{00} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{++} \end{pmatrix}, \quad (2.42a)$$

onde

$$B_{--} = \Gamma_- \rho_{0'0'} + \Gamma_B \rho_{00} + \gamma \rho_{++}, \quad (2.42b)$$

$$B_{00} = \Gamma_0 \rho_{0'0'} + \Gamma_B (\rho_{--} + \rho_{++}), \quad (2.42c)$$

$$B_{++} = \Gamma_+ \rho_{0'0'} + \Gamma_B \rho_{00} + \gamma \rho_{--}. \quad (2.42d)$$

Ao escrevermos as equações de Bloch com o uso das definições $\Delta_C = \omega_C - \omega_{0'-}$, $\Delta_P = \omega_P - \omega_{0'+}$ e $\delta = \Delta_C - \Delta_P$, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{0'0'} &= -i[-\Omega_-^* \rho_{0'-}^* - \Omega_+^* \rho_{0'+}^* + \Omega_- \rho_{0'-} + \Omega_+ \rho_{0'+}] \\ &\quad - (\Gamma_- + \Gamma_0 + \Gamma_+) \rho_{0'0'}, \end{aligned} \quad (2.43a)$$

$$\dot{\rho}_{--} = -i[-\Omega_- \rho_{0'-} + \Omega_-^* \rho_{0'-}^*] - (\gamma + \Gamma_B) \rho_{--} + \Gamma_- \rho_{0'0'} + \Gamma_B \rho_{00} + \gamma \rho_{++}, \quad (2.43b)$$

$$\dot{\rho}_{00} = -2\Gamma_B \rho_{00} + \Gamma_0 \rho_{0'0'} + \Gamma_B (\rho_{--} + \rho_{++}), \quad (2.43c)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{++} &= -i[(-\Omega_+ \rho_{0'+} + \Omega_+^* \rho_{0'+}^*)] - (\gamma + \Gamma_B) \rho_{++} + \Gamma_+ \rho_{0'0'} + \gamma \rho_{--} \\ &\quad + \Gamma_B \rho_{00}, \end{aligned} \quad (2.43d)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{0'-} &= -i[(\omega_{0'} - \omega_-)\rho_{0'-} - \Omega_-^*\rho_{--} - \Omega_+^*\rho_{-+}^* + \Omega_-^*\rho_{0'0'}] \\ &\quad - \frac{1}{2}(\Gamma_- + \Gamma_0 + \Gamma_+ + \gamma + \Gamma_B)\rho_{0'-}, \end{aligned} \quad (2.43e)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{0'0} &= -i[(\omega_{0'} - \omega_0)\rho_{0'0} - \Omega_-^*\rho_{-0} - \Omega_+^*\rho_{0+}^*] \\ &\quad - \frac{1}{2}[(\Gamma_- + \Gamma_0 + \Gamma_+ + 2\Gamma_B)\rho_{0'0}], \end{aligned} \quad (2.43f)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{0'+} &= -i[(\omega_{0'} - \omega_+)\rho_{0'+} - \Omega_-^*\rho_{-+} - \Omega_+^*\rho_{++}^* + \Omega_+^*\rho_{0'0'}] \\ &\quad - \frac{1}{2}[(\Gamma_- + \Gamma_0 + \Gamma_+ + \gamma + \Gamma_B)\rho_{0'+}], \end{aligned} \quad (2.43g)$$

$$\dot{\rho}_{-0} = -i[-\Omega_- \rho_{0'0} + (\omega_- - \omega_0)\rho_{-0}] - \frac{1}{2}(\gamma + 3\Gamma_B)\rho_{-0}, \quad (2.43h)$$

$$\dot{\rho}_{-+} = -i[-\Omega_- \rho_{0'+} + \Omega_+^* \rho_{0'-}^*] - (\gamma + \Gamma_B)\rho_{-+}, \quad (2.43i)$$

$$\dot{\rho}_{0+} = -i[(\omega_0 - \omega_+)\rho_{0+} + \Omega_+^* \rho_{0'0}^*] - \frac{1}{2}(\gamma + 3\Gamma_B)\rho_{0+}, \quad (2.43j)$$

onde usamos a hermiticidade do operador densidade $\dot{\rho}_{ij} = \dot{\rho}_{ji}^*$.

As Equações 2.43a-j descrevem a dinâmica temporal das populações e das coerências induzidas pelos campos. Geralmente os termos oscilantes são substituídos por variáveis complexas que variam lentamente no tempo, o que chamamos de aproximação de variáveis lentas [39], [40]. Esta aproximação é justificada pelo fato de que, no regime estacionário, o campo induz no átomo um momento de dipolo elétrico que oscila na frequência deste campo. Assim, ao fazermos

$$\rho_{ii} = \sigma_{ii} \rightarrow \dot{\rho}_{ii} = \dot{\sigma}_{ii} \quad (2.44)$$

para as populações e

$$\rho_{0'-} = \sigma_{0'-} e^{-i(\omega_C t + \phi_C)} \rightarrow \dot{\rho}_{0'-} = \dot{\sigma}_{0'-} e^{-i(\omega_C t + \phi_C)} - i\omega_C \sigma_{0'-} e^{-i(\omega_C t + \phi_C)}, \quad (2.45)$$

$$\rho_{0'+} = \sigma_{0'+} e^{-i(\omega_P t + \phi_P)} \rightarrow \dot{\rho}_{0'+} = \dot{\sigma}_{0'+} e^{-i(\omega_P t + \phi_P)} - i\omega_P \sigma_{0'+} e^{-i(\omega_P t + \phi_P)}, \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \rho_{-+} &= \sigma_{-+} e^{-i[(\omega_P - \omega_C)t - (\phi_P - \phi_C)]} \rightarrow \\ \dot{\rho}_{-+} &= \dot{\sigma}_{-+} e^{-i[(\omega_P - \omega_C)t - (\phi_P - \phi_C)]} - i(\omega_P - \omega_C)\sigma_{-+} e^{-i[(\omega_P - \omega_C)t - (\phi_P - \phi_C)]}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

para as coerências, podemos reescrever as Equações 2.43a-j em função das novas variáveis σ_{ij}

$$\dot{\sigma}_{0'0'} = i[\Omega_c(\sigma_{-0'} - \sigma_{+0'}^*) + \Omega_p(\sigma_{+0'} - \sigma_{-0'}^*)] - \Gamma\sigma_{0'0'}, \quad (2.48a)$$

$$\dot{\sigma}_{--} = i\Omega_c(\sigma_{-0'}^* - \sigma_{-0'}) + \frac{\Gamma}{3}\sigma_{0'0'} + \Gamma_B(\sigma_{00} - \sigma_{--}), \quad (2.48b)$$

$$\dot{\sigma}_{++} = i\Omega_p(\sigma_{+0'}^* - \sigma_{+0'}) + \frac{\Gamma}{3}\sigma_{0'0'} + \Gamma_B(\sigma_{00} - \sigma_{++}), \quad (2.48c)$$

$$\dot{\sigma}_{00} = \frac{\Gamma}{3} \sigma_{0'0'} + \Gamma_B (\sigma_{--} + \sigma_{++} - 2\sigma_{00}), \quad (2.48d)$$

$$\dot{\sigma}_{-0'} = i[\Omega_c(\sigma_{0'0'} - \sigma_{--}) - \Omega_p \sigma_{-+}] - \left(i\Delta_c + \frac{\Gamma}{2}\right) \sigma_{-0'}, \quad (2.48e)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{0'0} = & -i[(\omega_{0'} - \omega_0)\sigma_{0'0} - \Omega_-^* \sigma_{-0} - \Omega_+^* \sigma_{0+}^*] \\ & - \frac{1}{2}[(\Gamma_- + \Gamma_0 + \Gamma_+ + 2\Gamma_B)\sigma_{0'0}], \end{aligned} \quad (2.48f)$$

$$\dot{\sigma}_{0'+} = i[\Omega_c \sigma_{-+} - \Omega_p(\sigma_{0'0'} - \sigma_{++})] + \left(i\Delta_p - \frac{\Gamma}{2}\right) \sigma_{0'+}, \quad (2.48g)$$

$$\dot{\sigma}_{-0} = -i[-\Omega_- \sigma_{0'0} + (\omega_- - \omega_0)\sigma_{-0}] - \frac{1}{2}(\gamma + 3\Gamma_B)\sigma_{-0}, \quad (2.48h)$$

$$\dot{\sigma}_{-+} = i[\Omega_c \sigma_{+0'}^* - \Omega_p \sigma_{-0'}] - (\gamma + i\delta)\sigma_{-+}, \quad (2.48i)$$

$$\dot{\sigma}_{0+} = -i[(\omega_0 - \omega_+)\sigma_{0+} + \Omega_+^* \sigma_{0'0}^*] - \frac{1}{2}(\gamma + 3\Gamma_B)\sigma_{0+}. \quad (2.48j)$$

Como $|\Omega_c|^2 \gg |\Omega_p|^2$, as soluções para σ_{ij} podem ser obtidas pelo método perturbativo até 1ª ordem em Ω_p . Considerando $\sigma_{ij} = \sum_n \sigma_{ij}^{(n)}$, no regime estacionário temos que σ_{ij} é constante ($\dot{\sigma}_{ij} = 0$). Assim, para ordem 0 de perturbação, onde $\Omega_p = 0$, e criando as seguintes variáveis para simplificar os cálculos:

$$\Gamma = \Gamma_- + \Gamma_+ + \Gamma_0, \quad (2.49)$$

$$\Gamma_{0'-} = \frac{1}{2}(\Gamma + \gamma) - i\Delta_c, \quad (2.50)$$

$$\Gamma_{0'+} = \frac{1}{2}(\Gamma + \gamma) - i\Delta_p, \quad (2.51)$$

$$\Gamma_{-+} = \gamma + i\delta, \quad (2.52)$$

temos o seguinte conjunto de equações para ordem 0 de perturbação

$$0 = i\Omega_c (\sigma_{-0'}^{(0)} - \sigma_{-0'}^{*(0)}) - \Gamma \sigma_{0'0'}^{(0)}, \quad (2.53a)$$

$$0 = i\Omega_c (\sigma_{-0'}^{*(0)} - \sigma_{-0'}^{(0)}) + \frac{\Gamma}{3} \sigma_{0'0'}^{(0)} + \Gamma_B (\sigma_{00}^{(0)} - \sigma_{--}^{(0)}), \quad (2.53b)$$

$$0 = \frac{\Gamma}{3} \sigma_{0'0'}^{(0)} + \Gamma_B (\sigma_{00}^{(0)} - \sigma_{++}^{(0)}), \quad (2.53c)$$

$$0 = \frac{\Gamma}{3} \sigma_{0'0'}^{(0)} + \Gamma_B (\sigma_{--}^{(0)} + \sigma_{++}^{(0)} - 2\sigma_{00}^{(0)}), \quad (2.53d)$$

$$0 = i\Omega_c (\sigma_{0'0'}^{(0)} - \sigma_{--}^{(0)}) - \left(i\Delta_c + \frac{\Gamma}{2}\right) \sigma_{-0'}^{(0)}, \quad (2.53e)$$

$$0 = -i[(\omega_{0'} - \omega_0)\sigma_{0'0}^{(0)} - \Omega_-^* \sigma_{-0}^{(0)} - \Omega_+^* \sigma_{0+}^{*(0)}] - \frac{1}{2}[(\Gamma + 2\Gamma_B)\sigma_{0'0}^{(0)}], \quad (2.53f)$$

$$0 = i\Omega_c \sigma_{-+}^{(0)} + \left(i\Delta_p - \frac{\Gamma}{2}\right) \sigma_{0'+}^{(0)}, \quad (2.53g)$$

$$0 = -i \left[-\Omega_- \sigma_{0'0}^{(0)} + (\omega_- - \omega_0) \sigma_{-0}^{(0)} \right] - \frac{1}{2} (\gamma + 3\Gamma_B) \sigma_{-0}^{(0)}, \quad (2.53h)$$

$$0 = i\Omega_c \sigma_{+0'}^{*(0)} - (\gamma + i\delta) \sigma_{-+}^{(0)}, \quad (2.53i)$$

$$0 = -i \left[(\omega_0 - \omega_+) \sigma_{0+}^{(0)} + \Omega_+^* \sigma_{0'0}^{*(0)} \right] - \frac{1}{2} (\gamma + 3\Gamma_B) \sigma_{0+}^{(0)}. \quad (2.53j)$$

Visto que as Equações 2.53a-j formam um sistema de equações linearmente dependentes, precisamos de mais uma equação para tornar o sistema solucionável. Portanto, usamos a condição de que o traço da matriz densidade deve ser igual a 1,

$$\sigma_{0'0'}^{(0)} + \sigma_{--}^{(0)} + \sigma_{00}^{(0)} + \sigma_{++}^{(0)} = 1. \quad (2.54)$$

A solução deste sistema nos dá para as populações de ordem 0,

$$\sigma_{0'0'}^{(0)} = \frac{3\Gamma_B \Omega_c^2}{\Omega_c^2 (12\Gamma_B + 5\Gamma) + 9\Gamma_B \left(\Delta_c^2 + \frac{\Gamma^2}{4} \right)}, \quad (2.55)$$

$$\sigma_{--}^{(0)} = \sigma_{0'0'}^{(0)} \left(1 + \frac{\Delta_c^2 + \Gamma^2/4}{\Omega_c^2} \right), \quad (2.56)$$

$$\sigma_{++}^{(0)} = \sigma_{0'0'}^{(0)} \left(1 + \frac{\Gamma}{\Gamma_B} + \frac{\Delta_c^2 + \Gamma^2/4}{\Omega_c^2} \right), \quad (2.57)$$

$$\sigma_{00}^{(0)} = \sigma_{0'0'}^{(0)} \left(1 + \frac{2\Gamma}{3\Gamma_B} + \frac{\Delta_c^2 + \Gamma^2/4}{\Omega_c^2} \right), \quad (2.58)$$

onde foi considerado que as taxas Γ_- , Γ_0 e Γ_+ são iguais e muito maiores que a taxa de perda de coerência γ entre os estados fundamentais e que Γ_B .

Para a primeira ordem de perturbação, as Equações 2.48a-j ficam da forma

$$0 = i \left[\Omega_c \left(\sigma_{-0'}^{(1)} - \sigma_{-0'}^{*(1)} \right) + \Omega_p \left(\sigma_{+0'}^{(0)} - \sigma_{+0'}^{*(0)} \right) \right] - \Gamma \sigma_{0'0'}^{(1)}, \quad (2.59a)$$

$$0 = i\Omega_c \left(\sigma_{-0'}^{*(1)} - \sigma_{-0'}^{(1)} \right) + \frac{\Gamma}{3} \sigma_{0'0'}^{(1)} + \Gamma_B \left(\sigma_{00}^{(1)} - \sigma_{--}^{(1)} \right), \quad (2.59b)$$

$$0 = i\Omega_p \left(\sigma_{+0'}^{*(0)} - \sigma_{+0'}^{(0)} \right) + \frac{\Gamma}{3} \sigma_{0'0'}^{(1)} + \Gamma_B \left(\sigma_{00}^{(1)} - \sigma_{++}^{(1)} \right), \quad (2.59c)$$

$$0 = \frac{\Gamma}{3} \sigma_{0'0'}^{(1)} + \Gamma_B \left(\sigma_{--}^{(1)} + \sigma_{++}^{(1)} - 2\sigma_{00}^{(1)} \right), \quad (2.59d)$$

$$0 = i \left[\Omega_c \left(\sigma_{0'0}^{(1)} - \sigma_{--}^{(1)} \right) - \Omega_p \sigma_{-+}^{(0)} \right] - \left(i\Delta_c + \frac{\Gamma}{2} \right) \sigma_{-0'}^{(1)}, \quad (2.59e)$$

$$0 = -i \left[(\omega_{0'} - \omega_0) \sigma_{0'0}^{(1)} - \Omega_-^* \sigma_{-0}^{(1)} - \Omega_+^* \sigma_{0+}^{*(1)} \right] - \frac{1}{2} \left[(\Gamma + 2\Gamma_B) \sigma_{0'0}^{(1)} \right], \quad (2.59a)$$

$$0 = i \left[\Omega_c \sigma_{-+}^{(1)} - \Omega_p \left(\sigma_{0'0'}^{(0)} - \sigma_{++}^{(0)} \right) \right] + \left(i\Delta_p - \frac{\Gamma}{2} \right) \sigma_{0'+}^{(1)}, \quad (2.59g)$$

$$0 = -i \left[-\Omega_- \sigma_{0'0}^{(1)} + (\omega_- - \omega_0) \sigma_{-0}^{(1)} \right] - \frac{1}{2} (\gamma + 3\Gamma_B) \sigma_{-0}^{(1)}, \quad (2.59h)$$

$$0 = i \left[\Omega_c \sigma_{+0'}^{*(1)} - \Omega_p \sigma_{-0'}^{(0)} \right] - (\gamma + i\delta) \sigma_{-+}^{(1)}, \quad (2.59i)$$

$$0 = -i \left[(\omega_0 - \omega_+) \sigma_{0+}^{(1)} + \Omega_+^* \sigma_{0'0}^{*(1)} \right] - \frac{1}{2} (\gamma + 3\Gamma_B) \sigma_{0+}^{(1)}. \quad (2.59j)$$

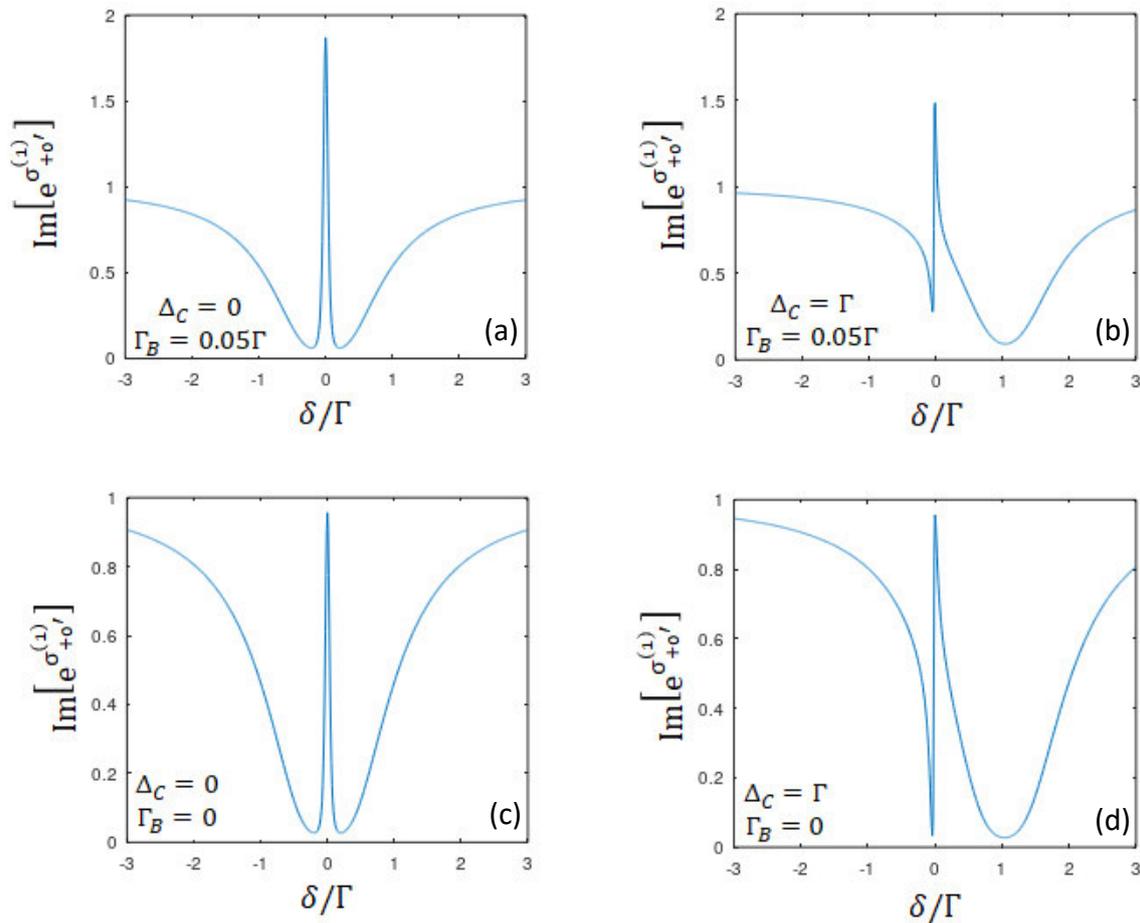
Resolvendo o sistema de equações acima, obtemos então a coerência induzida pelo feixe P em função das populações de ordem zero de perturbação

$$\sigma_{+0'}^{(1)} = \frac{i\Omega_p}{(\gamma - i\delta) \left(\frac{\Gamma}{2} + i\Delta_p \right) + |\Omega_c|^2} \left[(\gamma - i\delta) \left(\sigma_{0'0'}^{(0)} - \sigma_{++}^{(0)} \right) + \frac{|\Omega_c|^2}{\frac{\Gamma}{2} - i\Delta_c} \left(\sigma_{--}^{(0)} - \sigma_{0'0'}^{(0)} \right) \right], \quad (2.60)$$

sendo que a parte real de $\sigma_{+0'}^{(1)}$, fornece informação sobre a dispersão do meio, enquanto sua parte imaginária fornece informação sobre a absorção do feixe de prova [\[11\]](#), [\[39\]](#).

Frometa *et al.* [\[11\]](#), [\[40\]](#) estudaram este mesmo sistema investigando o espectro de EIT e, como exemplo qualitativo, foram plotados gráficos da parte imaginária de $\sigma_{+0'}^{(1)}$, em função de δ/Γ , onde δ representa a diferença entre as frequências do feixe C e do feixe P, ou seja, $\delta = \omega_c - \omega_p$ e Γ é a taxa de decaimento total definida pela Equação 2.49. Na Figura 8 mostramos o espectro de transmissão normalizada do feixe P pelo meio atômico em função da dessintonia controle-prova δ para valores de $\Gamma_B = 0$ (ausência de campo magnético) e $\Gamma_B = 0,05\Gamma$ (presença de campo magnético) em que todos os parâmetros foram normalizados em relação a Γ e também para os casos em que $\Delta_c = 0$ (na ressonância com a transição $|+\rangle \leftrightarrow |0'\rangle$) e $\Delta_c = \Gamma$. Nas Figuras 8 (a) e (b) podemos observar que próximo de $\delta = 0$ a transmissão normalizada possui valores maiores que 1. Isto significa que há ganho para o feixe P nas situações em que o campo magnético transversal é ligado. Já nas Figuras 8 (c) e (d) podemos observar que, na ausência do campo magnético o valor máximo da transmissão normalizada do feixe P não ultrapassa a unidade. Portanto, gerando um espectro de EIT comum como obtido por [\[11\]](#), [\[40\]](#).

Figura 8 - Espectros calculados de transmissão do feixe P para $\Gamma_B = 0,05\Gamma$ com o feixe C (a) ressonante com a transição e (b) dessintonizado de $\Delta_C = \Gamma$. E para $\Gamma_B = 0$ com o feixe C (c) ressonante com a transição e (d) dessintonizado de $\Delta_C = \Gamma$.



Fonte: O autor (2022)

Portanto, o feixe C leva a uma diminuição abrupta na absorção do feixe P. Esta diminuição de absorção pode levar a uma completa transparência do meio para os dois campos de radiação. Esta é a razão do fenômeno de EIT, onde o meio se torna transparente e a radiação não interage com o meio.

2.3.4 Manipulação do estado escuro

O ganho observado no espectro de EIT da Figura 8 pode ser explicado fisicamente observando a coerência $\sigma_{+0}^{(1)}$ da Equação 2.60. Como o feixe C é muito mais intenso que o feixe P, as populações de ordem 0 dos estados, na ausência do campo magnético

($\Gamma_B = 0$) para transferir população entre os estados fundamentais, seriam $\sigma_{--}^{(0)} = \sigma_{0'0'}^{(0)} = 0$, $\sigma_{00}^{(0)} = 2/5$ e $\sigma_{++}^{(0)} = 3/5$ e, portanto, a coerência $\sigma_{+0'}^{(1)}$ seria dada por

$$\sigma_{+0'}^{(1)} = \frac{-i\Omega_p(\gamma - i\delta)\sigma_{++}^{(0)}}{(\gamma - i\delta)\left(\frac{\Gamma}{2} + i\Delta_p\right) + |\Omega_c|^2}. \quad (2.61)$$

Neste caso não é possível mudar o sinal da curva de absorção, logo, é impossível haver ganho nessa condição. Quando levamos em conta o efeito do campo magnético transversal, ou seja, $\Gamma_B \neq 0$, as populações de ordem 0 dos estados não são nulas (Equações 2.55-58). Portanto, é possível mudar o sinal da curva de absorção, logo, é possível obter ganho. As Equações 2.55-58 nos dizem que para qualquer que seja Γ_B temos a condição $\sigma_{++}^{(0)} > \sigma_{--}^{(0)} > \sigma_{0'0'}^{(0)}$, correspondendo a ganho sem inversão de população e também demonstrando que o ganho não está associado à amplificação Raman que poderia ocorrer caso $\sigma_{--}^{(0)} > \sigma_{++}^{(0)}$.

Outra forma de interpretar o ganho deste modelo é a partir da manipulação do estado escuro. Uma vez o sistema capturado no estado escuro, o efeito do campo magnético é essencialmente transferir população entre os estados $|-\rangle$ e $|+\rangle$ mas nunca chegando a inverter população. Uma vez que $\sigma_{++}^{(0)} > \sigma_{--}^{(0)}$ e a taxa de bombeamento Γ_B foi considerada igual para $|-\rangle \leftrightarrow |+\rangle$, o que acontece é que a população do estado $|+\rangle$ deve diminuir ao passo que a população do estado $|-\rangle$ deve aumentar. O estado escuro descrito pela Equação 2.37 nos traz informação de que os coeficientes de expansão $\frac{\Omega_p}{\sqrt{|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2}}$ e $\frac{-\Omega_c}{\sqrt{|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2}}$ são proporcionais às populações dos estados $|-\rangle$ e $|+\rangle$ respectivamente, isto é

$$\sigma_{++}^{(0)} = \frac{|\Omega_c|^2}{|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2}, \quad (2.62)$$

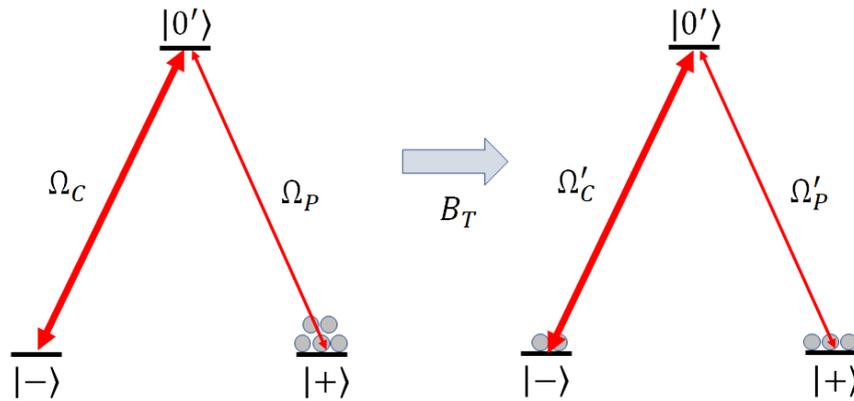
$$\sigma_{--}^{(0)} = \frac{|\Omega_p|^2}{|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2}. \quad (6.63)$$

Portanto, na transferência de população do estado $|+\rangle$ para o estado $|-\rangle$ o estado escuro é modificado de $|DS\rangle \rightarrow |DS'\rangle$ de modo que $\Omega'_p > \Omega_p$ e $\Omega'_c < \Omega_c$. Este resultado sugere que o feixe P é então amplificado enquanto que o feixe C é absorvido na mesma quantidade.

$$|DS'\rangle = \frac{1}{\sqrt{|\Omega'_p|^2 + |\Omega'_c|^2}} (\Omega'_p e^{-i\omega_- t} |-\rangle - \Omega'_c e^{-i\omega_+ t} |+\rangle). \quad (2.64)$$

O efeito do campo magnético sobre o sistema atômico na transferência de população e consequentemente a modificação do estado escuro é esquematizado na Figura 9.

Figura 9 - Efeito do campo magnético na manipulação do estado escuro transferindo população entre os estados fundamentais e amplificando o feixe P.



Fonte: O autor (2022)

2.4 CAVIDADES ÓPTICAS

Na seção 2.1 falamos do ganho, que representa o quão bem um meio amplifica fótons por emissão estimulada. No entanto, da mesma forma que temos ganho, temos também perdas. As perdas são quaisquer mecanismos que reduzam a potência de um feixe, ou se pensarmos em termos de fótons, mecanismos que reduzem o número de fótons. Mecanismos como absorção, reflexão e transmissão podem contribuir para estas perdas. Por exemplo, se imaginarmos um dos espelhos da Figura 10 como sendo parcialmente refletor, embora esta característica seja necessária para permitir a saída do feixe laser, o número de fótons na cavidade diminui no instante que fótons são transmitidos através dele. Entre perdas e ganhos na cavidade, se os ganhos forem maiores ou iguais às perdas a cada ciclo na cavidade, temos laser [41]. Esta condição impõe que a refletividade do espelho parcialmente refletor seja relativamente alta. Embora esta definição seja qualitativa, podemos entender que sua refletividade deve ser tal que suas perdas não sejam maiores que o ganho. Conhecidas todas as perdas, podemos calcular o mínimo ganho que permite a ação laser, chamado de ganho de limiar do meio laser [27], [42].

Quando o laser opera de forma estável, ou seja, com potência de saída constante, o ganho laser líquido é igual a 1. Se este ganho for superior a 1, a potência do laser (na

saída) deve aumentar. Caso o ganho líquido seja menor que 1, o laser não opera. Considere na Figura 10 uma cavidade formada por dois espelhos, sendo o da direita parcialmente refletor. Podemos obter o ganho durante uma volta como

$$G = e^{2gd}, \quad (2.65)$$

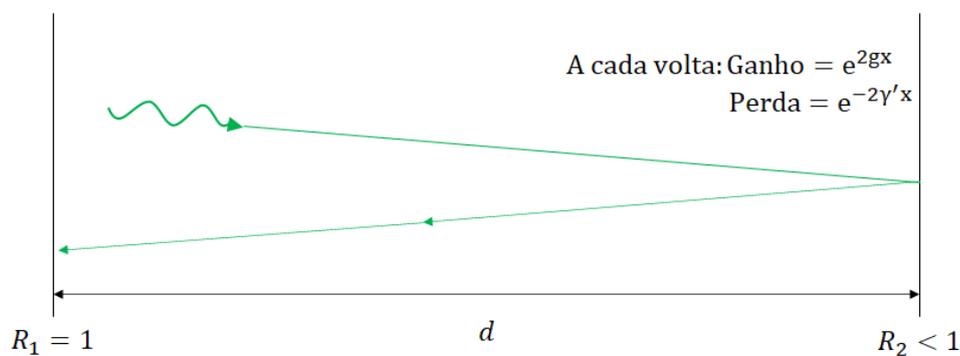
onde d representa a distância entre os espelhos. A perda é dada por

$$L = e^{-2\gamma'd} \quad (2.66)$$

onde γ' é um termo que descreve as perdas na cavidade com exceção do espelho parcialmente refletor com refletividade R_2 . O ganho líquido a cada volta será dado por

$$G_{lq} = e^{2gd} e^{-2\gamma'd} R_2. \quad (2.67)$$

Figura 10 - Ganho e perda em uma viagem de ida e volta por meio de um laser.



Fonte: O autor (2022)

Para o ganho mínimo que permite a ação laser (igual a 1), podemos calcular g para esta condição como

$$g_t = \gamma' - \frac{\ln(R_2)}{2d}, \quad (2.68)$$

onde g_t é chamado de ganho de limiar (g_t do inglês *threshold gain*), ou seja, é o ganho mínimo necessário para a operação laser. Em vários lasers, o ganho é proporcional à energia de bombeio (até o limite de saturação). Portanto, existe um mínimo de energia de bombeio para gerar ganho.

Existem dois tipos básicos de cavidade. São eles: (a) cavidade de onda estacionária, formada por dois espelhos curvos, essencialmente um interferômetro clássico de Fabry-Perot; e (b) a cavidade em anel (ou cavidade de onda viajante) que consiste de dois espelhos curvos e um ou mais espelhos planos. Nesta configuração o feixe dentro da cavidade segue um caminho cíclico e é inevitável a ocorrência de astigmatismo. Nas seções seguintes iremos abordar alguns aspectos da cavidade em anel

como sua condição de estabilidade, que é fundamental para confinar fótons e assim amplificar o número de fótons por emissão estimulada diversas vezes, além de extrair resultados a partir destas condições. Portanto, vamos primeiro conhecer alguns parâmetros importantes que descrevem as características dos feixes gaussianos e sua propagação através de elementos presentes na cavidade que servem como guias de onda.

2.4.1 Parâmetros de feixes gaussianos

Um feixe ao se propagar no espaço possui alguns parâmetros que o caracterizam, como a cintura, ou seja, o raio da seção transversal do feixe. Por mais colimado que seja o feixe, esta cintura pode variar com a posição, especialmente ao ser refletido ou refratado. Então vamos supor que uma onda eletromagnética se propaga numa região livre de cargas e correntes, e que as frentes de onda possuem normais formando pequenos ângulos $\ll 1 \text{ rad}$ entre si, satisfazendo a suposição paraxial se propagando ao longo do eixo z . O parâmetro complexo $q(z)$ que descreve as propriedades dos feixes gaussianos [34] é dado por

$$q(z) = i \frac{\pi \omega_0^2 n}{\lambda} + z, \quad (2.69)$$

onde ω_0 é a cintura mínima do feixe, λ é o comprimento de onda da radiação circulante da cavidade e n é o índice de refração do meio onde a radiação se propaga.

A partir do parâmetro complexo podemos obter outros resultados bastante úteis como a distância z à cintura mínima do feixe:

$$z = -\text{Re}(q), \quad (2.70)$$

e a cintura mínima do feixe ω_0

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{n\pi} \text{Im}(q)}. \quad (2.71)$$

Além disso, a cintura do feixe em qualquer posição z é dada pela função

$$\omega(z) = \omega_0 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{n\pi \omega_0^2} \right)^2 \right]^{1/2} = i \sqrt{\frac{\lambda}{n\pi \text{Im}\left(\frac{1}{q}\right)}}. \quad (2.72)$$

Outro parâmetro importante é o comprimento de Rayleigh z_R que é definido como a distância desde a cintura mínima do feixe até a posição em que a cintura $\omega(z)$ é igual à cintura mínima multiplicado por um fator $\sqrt{2}$, ou seja,

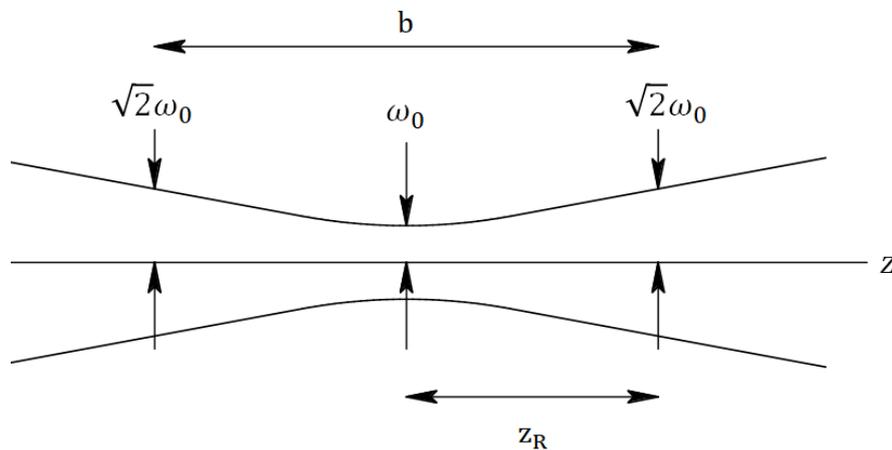
$$z_R = \frac{n\pi\omega_0^2}{\lambda} = -\frac{\text{Im}\left(\frac{1}{q}\right)}{\left|\frac{1}{q}\right|^2}. \quad (2.73)$$

Portanto, $\omega(z)$ pode ser escrito em termos do comprimento de Rayleigh da forma

$$\omega(z) = \omega_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.74)$$

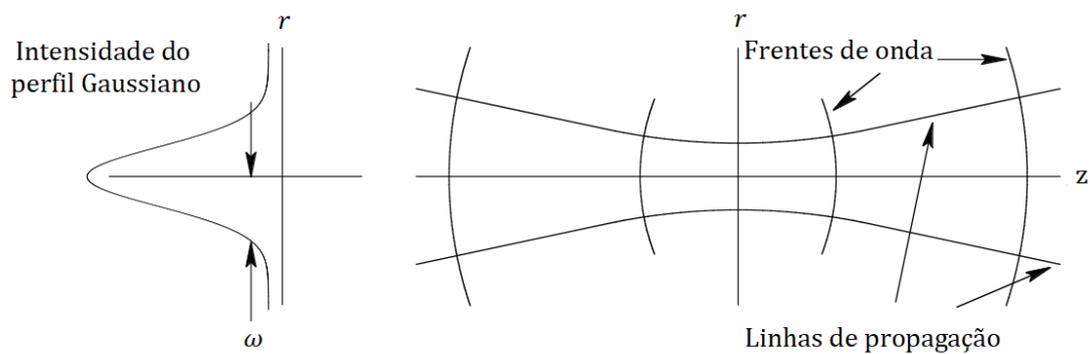
O último parâmetro importante é o parâmetro confocal b que corresponde a duas vezes o comprimento de Rayleigh, $b = 2z_R$. As Figuras 11 e 12 ilustram esses parâmetros do feixe.

Figura 11 - Uma ilustração das definições do comprimento de Rayleigh z_R e do parâmetro confocal b .



Fonte: O autor (2022)

Figura 12 - Um feixe gaussiano próximo ao foco mostrando o perfil e^{-2r^2/ω^2} da intensidade radial e as frentes de onda esféricas.



Fonte: O autor (2022)

2.4.2 Estabilidade

Se pensarmos num feixe paraxial como descrito na sessão 2.4.1 passando através de um elemento numa cavidade, podemos denotar de r e $r' = dr/dz$ a distância e a inclinação, respectivamente, do feixe em relação ao eixo de simetria z [43]. Supondo que numa posição z_1 ao longo do eixo z o feixe esteja a uma distância r_1 e com inclinação r'_1 em relação ao eixo z , então numa posição z_2 o feixe deve estar a uma distância r_2 com uma inclinação r'_2 em relação do eixo z . Podemos escrever uma equação que relacione os parâmetros do feixe nas posições z_1 e z_2 através de uma matriz 2×2 denominada matriz ABCD [42], [43], tal que

$$\begin{bmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{bmatrix}. \quad (2.75)$$

Quando um raio passa por diversos elementos da cavidade em série podemos então estender o mesmo conceito da matriz ABCD para vários elementos da forma

$$\begin{bmatrix} r_{1+n} \\ r'_{1+n} \end{bmatrix} = \prod_{k, \text{ordenado}}^n [M]_k \begin{bmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{bmatrix}. \quad (2.76)$$

Como o produto de matrizes é, em geral, não-comutativo, é necessário que a ordem do produtório obedeça a ordem por onde o feixe passa. Por exemplo, ao passar pelos meios, α , β e γ nesta ordem, a Equação 2.76 toma a forma

$$\begin{bmatrix} r_4 \\ r'_4 \end{bmatrix} = [M]_\gamma [M]_\beta [M]_\alpha \begin{bmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

e o produto das matrizes $[M]_\gamma [M]_\beta [M]_\alpha$ forma uma nova matriz que pode ser interpretada como a matriz ABCD do conjunto desses elementos.

Dizemos que uma cavidade é estável quando o modo do feixe permanece confinado dentro da cavidade. A aproximação de auto-consistência determina que a cada volta na cavidade, o feixe se reproduza de maneira idêntica. Evidentemente, esta aproximação é estável (embora não seja a única) e iremos tratar esta aproximação a fim de construir uma condição para obter uma cavidade estável.

A regra ABCD [42], [43] diz que qualquer transformação em q para um sistema complexo composto por lentes, espelhos, espaços livres, etc. pode ser obtida determinando as matrizes ABCD dos componentes, multiplicando as matrizes e aplicando a Equação 2.75

$$q_1 = \frac{Aq_0 + B}{Cq_0 + D}, \quad (2.78)$$

onde q_1 é o parâmetro complexo do feixe após o elemento de matriz ABCD e q_0 é o parâmetro complexo do feixe antes do elemento.

Considerando a cavidade da Figura 13 com dois espelhos esféricos de raios de curvatura R_{c1} e R_{c2} , a aproximação de auto-consistência requer que o parâmetro complexo do feixe q se replique a cada volta, ou seja,

$$q = \frac{Aq + B}{Cq + D}, \quad (2.79)$$

cuja solução é dada por

$$\frac{1}{q} = \frac{(D - A) \pm \sqrt{(A - D)^2 + 4BC}}{2B}. \quad (2.80)$$

Como a matriz ABCD é unitária, seu determinante é $AD - BC = 1$ então podemos reescrever a Equação 2.80 como

$$\frac{1}{q} = \frac{(D - A) \pm i\sqrt{4 - (A + D)^2}}{2B}. \quad (2.81)$$

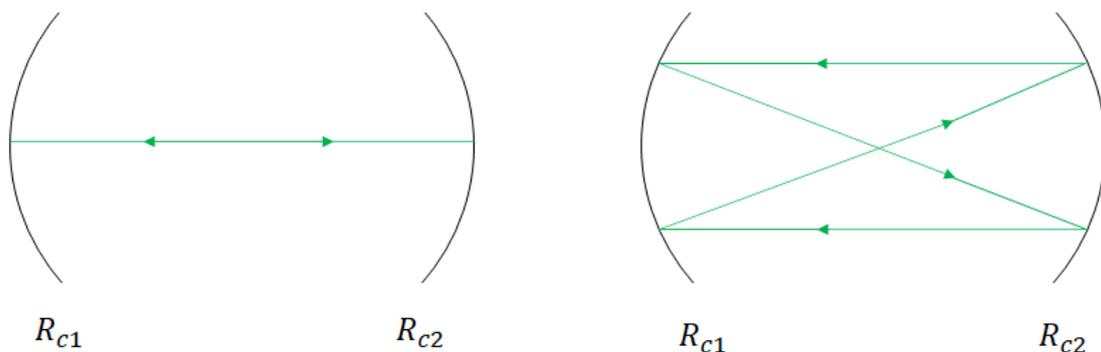
A condição para um feixe gaussiano confinado é que ω^2 seja real e positivo. Então, da solução da equação de onda paraxial [34], temos

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i \frac{\lambda}{\pi n \omega^2} \quad (2.82)$$

que implica que o termo dentro da raiz quadrada deve ser maior que zero, ou seja, a condição de estabilidade é dada por

$$\left| \frac{A + D}{2} \right| \leq 1. \quad (2.83)$$

Figura 13 - Condição de auto-consistência numa cavidade de onda estacionária.



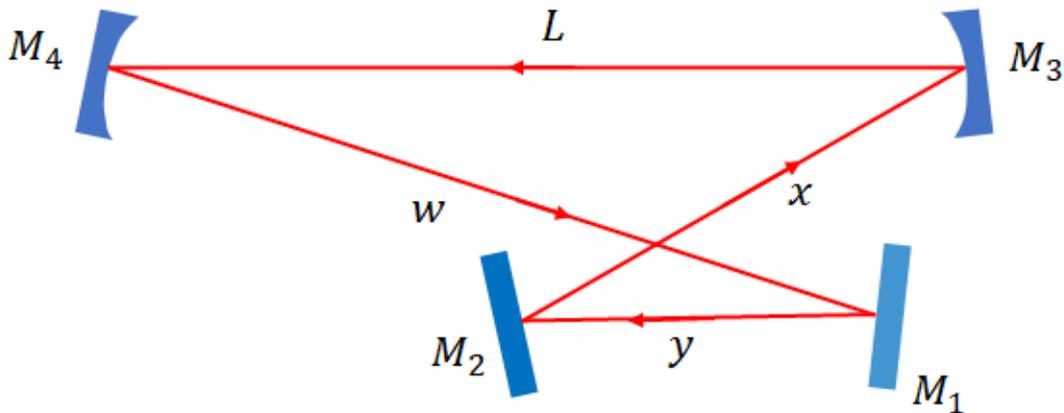
Fonte: O autor (2022)

As matrizes ABCD para os espelhos curvos e espaços livres podem ser encontradas em [43]. Para os espelhos planos basta fazer o raio de curvatura tender ao infinito. Assim, a matriz ABCD do espelho plano se torna a matriz identidade e não interfere nos cálculos.

Se pensarmos na cavidade em anel formada por 4 espelhos, sendo 2 curvos com raios de curvatura iguais a R (espelhos M_3 e M_4) e 2 planos (espelhos M_1 e M_2) e sendo os espelhos separados por L, w, y e x conforme a Figura 14, escolhendo a ordem de propagação do feixe P sendo $L \rightarrow M_4 \rightarrow w \rightarrow M_1 \rightarrow y \rightarrow M_2 \rightarrow x \rightarrow M_3$, a matriz ABCD da cavidade completa se torna, de acordo com Equação 2.76:

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}_{M_3} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{M_2} \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_y \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{M_1} \begin{bmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_w \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}_{M_4} \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_L, \quad (2.84)$$

Figura 14 – Cavidade em anel conforme o experimento.



Fonte: O autor (2022)

fazendo

$$d = w + x + y, \quad (2.85)$$

$$g_1 = 1 - \frac{d}{R}, \quad (2.86)$$

$$g_2 = 1 - \frac{L}{R}, \quad (2.87)$$

podemos simplificar a matriz da cavidade para

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}_{M_3} \begin{bmatrix} 1 & R(1 - g_1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}_{M_4} \begin{bmatrix} 1 & R(1 - g_2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_L, \quad (2.88)$$

resultando na matriz

$$[M] = \begin{bmatrix} 2g_1 - 1 & R(-2g_1g_2 + g_1 + g_2) \\ -\frac{4g_1}{R} & 4g_1g_2 - 2g_1 - 1 \end{bmatrix}. \quad (2.89)$$

Portanto, com o uso da Equação 2.83, temos

$$0 \leq g_1g_2 \leq 1, \quad (2.90)$$

que implica que a separação L entre os espelhos curvos deve obedecer à desigualdade

$$R \leq L \leq \frac{dR}{d-R}. \quad (2.91)$$

A separação L entre os espelhos curvos depende da configuração da cavidade. Como os espelhos estão dispostos, portanto, para cada distância d existe um intervalo ΔL que satisfaz à condição de estabilidade

$$\Delta L = \frac{dR}{d-R} - R = \frac{R^2}{d-R}. \quad (2.92)$$

Outra configuração de cavidade é a cavidade de onda estacionária, como da Figura 13, onde são utilizados apenas dois espelhos curvos. Nesta situação, a matriz ABCD que representa esta cavidade é dada por

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}_M \begin{bmatrix} 1 & R(1-g) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_L \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}_M \begin{bmatrix} 1 & R(1-g) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_L, \quad (2.93)$$

onde fizemos $g = 1 - \frac{L}{R}$, sendo R o raio de curvatura dos espelhos (que vamos supor iguais) e L a separação entre eles. Então, a matriz $[M]$ se torna

$$[M] = \begin{bmatrix} 2g - 1 & -2Rg(g-1) \\ -\frac{4g}{R} & 4g^2 - 2g - 1 \end{bmatrix}. \quad (2.94)$$

Aplicando a Equação 2.83, vemos que a condição de estabilidade neste tipo de cavidade é dada por

$$0 \leq g^2 \leq 1, \quad (2.95)$$

que implica que a distância L entre os espelhos deve estar compreendida no intervalo

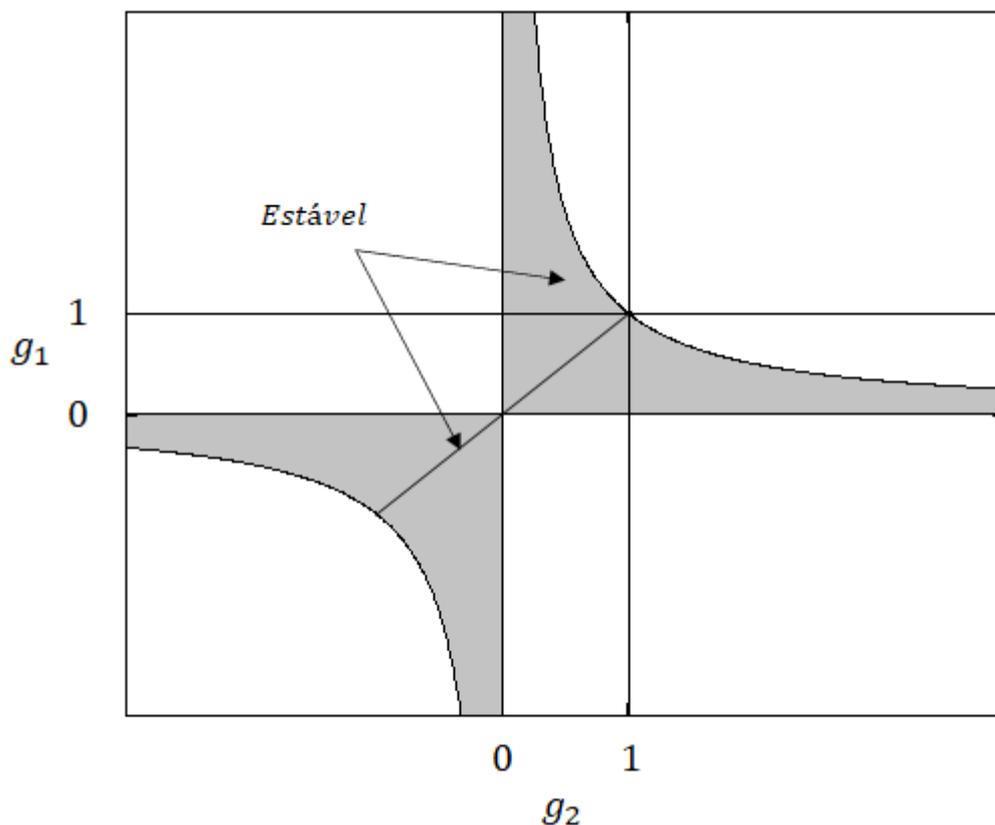
$$R \leq L \leq 2R. \quad (2.96)$$

Deste modo, o intervalo ΔL entre os possíveis valores de L que satisfazem a estabilidade é dada por

$$\Delta L = 2R - R = R. \quad (2.97)$$

A Figura 15 mostra as curvas que representam os limites onde as cavidades em anel e a cavidade de onda estacionária são estáveis.

Figura 15 – Diagrama de estabilidade mostrando regiões de estabilidade em termos dos parâmetros g_1 e g_2 numa cavidade em anel. A reta $g_1 = g_2$ representa a estabilidade numa cavidade de onda estacionária.

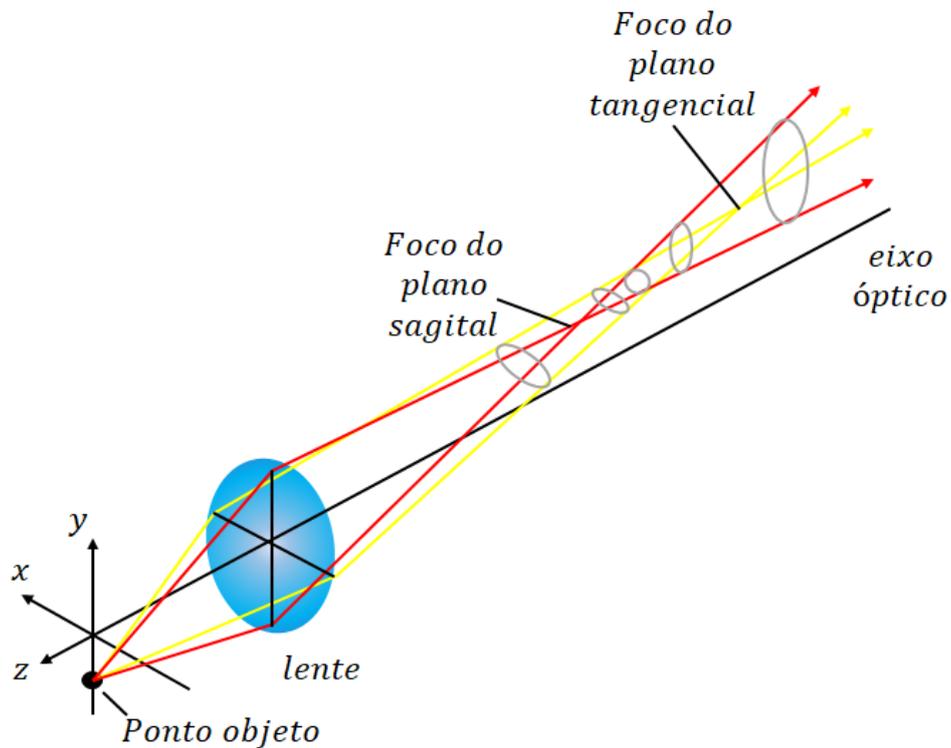


Fonte: O autor (2022)

2.4.3 Astigmatismo em cavidade em anel

Quando um feixe é refletido por um espelho plano, independente do ângulo de incidência, a geometria do feixe não é modificada, diferentemente de uma reflexão sobre um espelho curvo. A reflexão de um feixe incidente num espelho curvo em um ponto que não coincide com o eixo de simetria inevitavelmente promove um efeito chamado astigmatismo. Podemos definir então dois planos: O plano tangencial, que é paralelo ao plano de incidência (que contém o eixo do sistema e o raio fora do eixo) e o plano sagital (que também contém o raio fora do eixo), que é perpendicular ao plano tangencial. O astigmatismo se deve ao fato de que, para um feixe de raios fora do eixo, os raios tangenciais encontrarão uma geometria diferente dos raios sagitais [42].

Figura 16 – Uma ilustração da aberração do astigmatismo em que os raios tangencial e sagital precisam ser tratados de forma diferente.



Fonte: O autor (2022)

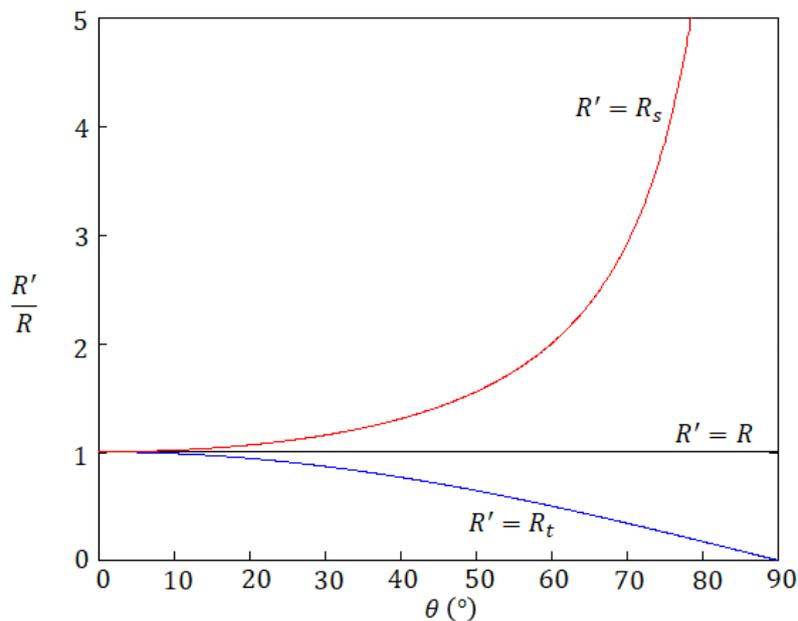
Para um espelho de raio de curvatura R , um feixe incidente com ângulo θ possui raios de curvatura efetivos modificados dependendo do plano (tangencial ou sagital).

$$R_{\text{tangencial}} = R \cos \theta, \quad (2.98)$$

$$R_{\text{sagital}} = \frac{R}{\cos \theta}. \quad (2.99)$$

A Figura 17 mostra como se comportam os raios dos espelhos modificados em função do ângulo de incidência no espelho curvo para os planos tangencial e sagital.

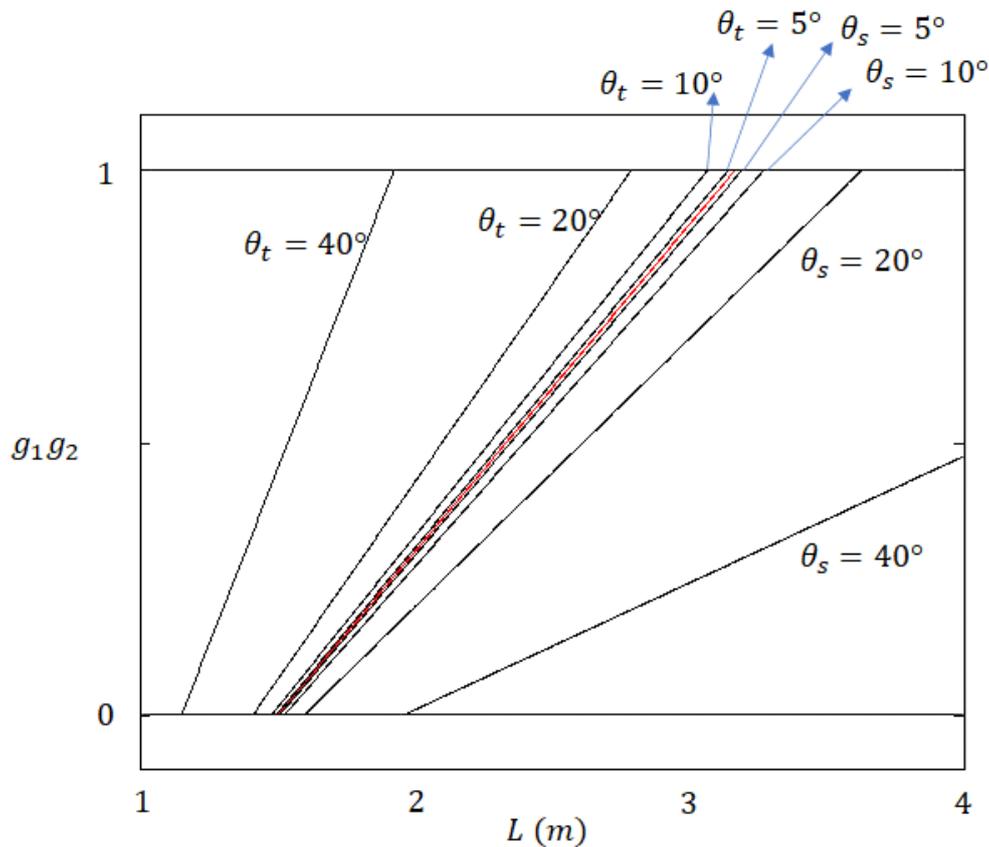
Figura 17 – Raios de curvatura modificados em função do ângulo do raio incidente em relação aos planos tangencial e sagital.



Fonte: O autor (2022)

A mudança no raio efetivo dos espelhos gera consequências que podem ser minimizadas a depender do ângulo θ de incidência. Essas consequências vão desde a cintura do feixe na cavidade até a condição de estabilidade da cavidade, uma vez que os elementos A e D da matriz ABCD são alterados. Apesar da aberração inevitável do astigmatismo, o seu efeito para pequenos ângulos pode ser desprezado como aparece na Figura 18, que mostra que a região de estabilidade da cavidade varia muito pouco para $\theta < 5^\circ$.

Figura 18 – Separação dos espelhos L em função dos ângulos de incidência nos planos sagital e tangencial. A cavidade é estável para valores de L que satisfaçam a condição $0 \leq g_1 g_2 \leq 1$.



Fonte: O autor (2022)

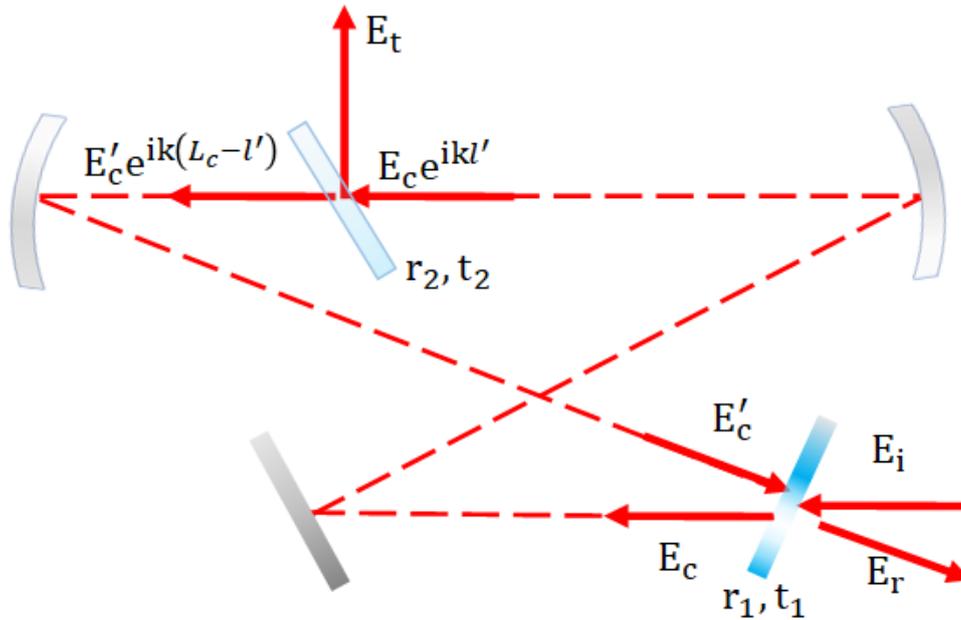
2.4.4 Modos da cavidade

Ao circular na cavidade, um feixe incidente sofre diversas reflexões e transmissões. Os campos dessas reflexões e transmissões podem interferir construtivamente gerando picos de intensidade. Essas interferências construtivas ocorrem para condições específicas que dependem do comprimento de onda da radiação, assim como do comprimento da cavidade. Os modos da cavidade correspondem a valores discretos de frequências tais que a interferência dos campos gere o máximo de intensidade.

Podemos entender esta interferência a partir da soma direta dos campos refletidos e transmitidos abordado em [44] ou usar condições de contorno, mais simples. Vamos supor o esquema da Figura 19 formado por 5 espelhos. O espelho 1 tem coeficientes de reflexão r_1 e de transmissão t_1 e o espelho 2 tem r_2 e t_2 onde $r^2 = R$ e $t^2 = T$ são a

refletividade e transmissividade, respectivamente. Os demais espelhos são totalmente refletivos. Na Figura 19, L_c representa o comprimento completo da cavidade e l' representa a distância percorrida pelo feixe desde o espelho 1 até o espelho 2.

Figura 19 - Modelo para relacionar os campos elétricos refletido e transmitido em relação ao campo elétrico incidente aplicado ao sistema real.



Fonte: O autor (2022)

O feixe de campo elétrico E_i incide sobre o espelho 1. Parte deste feixe é transmitida, e parte é refletida. A parte transmitida incide sobre o espelho 2 e novamente uma parte é transmitida e uma parte é refletida, e este ciclo se repete. Considerando que a taxa de energia incidente na cavidade devido ao campo E_i é a mesma taxa de energia que sai da cavidade (tanto por reflexão pelo campo E_r como por transmissão pelo campo E_t), então podemos obter as seguintes relações: O campo E_r será dado pela soma da reflexão de E_i pelo espelho 1 com a transmissão de E'_c pelo espelho 1. Estendendo a mesma ideia para os demais feixes, obtemos o seguinte conjunto de equações

$$E_r = -r_1 E_i + t_1 E'_c, \quad (2.100a)$$

$$E_c = t_1 E_i + r_1 E'_c, \quad (2.100b)$$

$$E_t = r_2 E_c e^{ikl'}, \quad (2.100c)$$

$$E'_c = t_2 E_c e^{ikL_c}. \quad (2.100d)$$

Resolvendo o sistema, encontramos que a razão entre o campo elétrico transmitido e o campo elétrico incidente é dada por

$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{t_1 r_2 e^{ikl'}}{1 - r_1 t_2 e^{ikL_c}}. \quad (2.101)$$

Portanto, a razão entre as intensidades dos feixes transmitido e incidente é dada por

$$\frac{I_t}{I_i} = \left(\frac{t_1 r_2 e^{ikl'}}{1 - r_1 t_2 e^{ikL_c}} \right) \left(\frac{t_1 r_2 e^{-ikl'}}{1 - r_1 t_2 e^{-ikL_c}} \right) = \frac{T_1 R_2}{(1 - r_1 t_2)^2 + 4r_1 t_2 \text{sen}^2 \left(\frac{kL_c}{2} \right)}. \quad (2.102)$$

2.4.5 Faixa espectral livre e Finesse

A partir da Equação 2.102 podemos ver que a razão I_t/I_i é máxima para valores de kL_c tais que

$$k_m L_c = 2m\pi, \quad (2.103)$$

onde m são números inteiros. Podemos interpretar os números m como os modos do interferômetro e k_m corresponde ao número de onda no vácuo para o modo m . Substituindo k_m por $2\pi\nu_m/c$ onde ν_m é a frequência da onda correspondente ao modo m e c é a velocidade da luz no vácuo, temos

$$\nu_m = m \frac{c}{L_c}, \quad (2.104)$$

correspondendo às frequências de máxima transmissão, que chamaremos de frequências modais. Podemos ainda determinar a separação em frequência entre duas frequências modais consecutivas, ou seja

$$\Delta\nu = \nu_{m+1} - \nu_m = (m+1) \frac{c}{L_c} - m \frac{c}{L_c} = \frac{c}{L_c}. \quad (2.105)$$

A esta distância chamamos de faixa espectral livre (FSR do inglês *Free Spectral Range*), sendo um valor constante. Vemos também da Equação 2.102 que a mínima transmissão ocorre para valores médios entre dois picos consecutivos. Portanto, a fração da intensidade transmitida fica restrita ao intervalo

$$\frac{T_1 R_2}{(1 - r_1 t_2)^2 + 4r_1 t_2} \leq \frac{I_t}{I_i} \leq \frac{T_1 R_2}{(1 - r_1 t_2)^2} \quad (2.106)$$

Este modelo supõe uma cavidade de comprimento L_c fixo e prevê as frequências possíveis da radiação ressonantes com os modos da cavidade. Podemos ainda buscar o processo contrário, ou seja, queremos manter fixa a frequência da radiação e fazer variar

o comprimento da cavidade a fim de obter os comprimentos da cavidade que geram os picos de interferência.

Para entender como as frequências ν_m se relacionam com a variação do comprimento L_C , da Equação 2.105 temos

$$\frac{d\nu}{dL_C} = \frac{\Delta\nu}{\lambda}. \quad (2.107)$$

De acordo com a Equação 2.107 podemos sintonizar as frequências de transmissão de pico por $\Delta\nu$ mudando o comprimento do interferômetro em um comprimento de onda. Assim, podemos fazer a varredura do interferômetro se pudermos alterar o comprimento da cavidade.

Podemos ainda medir a resolução deste interferômetro fazendo uma relação entre a largura em frequência $\Delta\nu_{1/2}$ (correspondendo à metade da altura dos picos) e a *FSR*. Assim, a partir da Equação 2.100, temos

$$\left(\frac{I_t}{I_i}\right)_{kL=\delta_{1/2}-2m\pi} = \frac{1}{2} \left(\frac{I_t}{I_i}\right)_{m\acute{a}x}, \quad (2.108)$$

$$\frac{T_1 R_2}{(1 - r_1 t_2)^2 + 4r_1 t_2 \text{sen}^2\left(\frac{\delta_{1/2} - 2m\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2} \left(\frac{T_1 R_2}{1 - 2r_1 t_2 + R_1 T_2}\right), \quad (2.109)$$

Implicando que $\delta_{1/2}$ pode assumir dois valores

$$\delta_{1/2}^{\pm} = \pm 2 \arcsen \left(\sqrt{\frac{2 - 4r_1 t_2 + 2R_1 T_2 - (1 - r_1 t_2)^2}{4r_1 t_2}} \right) + 2m\pi, \quad (2.110)$$

onde $\delta_{1/2}^+$ e $\delta_{1/2}^-$ representam os valores de $\delta_{1/2}$ à direita e à esquerda do pico, respectivamente, que correspondem à $\frac{1}{2} \left(\frac{I_t}{I_i}\right)_{m\acute{a}x}$. Portanto $\Delta\nu_{1/2}$ é dado por

$$\Delta\nu_{1/2} = \nu(\delta_{1/2}^+) - \nu(\delta_{1/2}^-). \quad (2.111)$$

Sendo $\nu(\delta_{1/2}) = \frac{c}{2\pi L} (\delta_{1/2} - 2m\pi)$, temos que

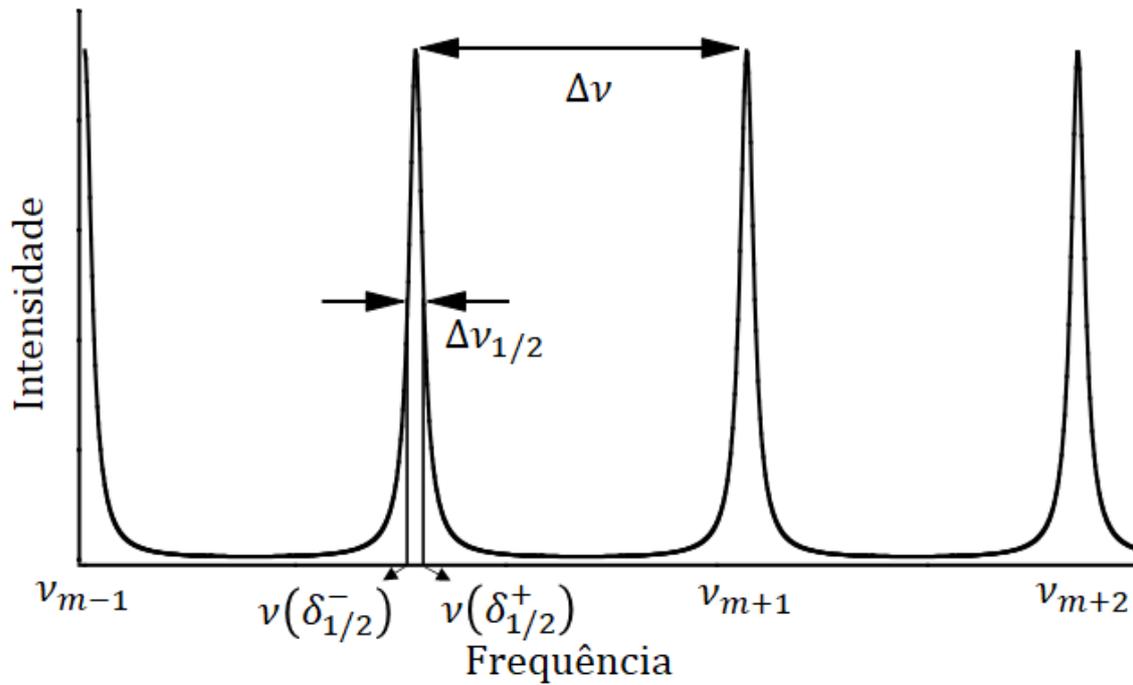
$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{2c}{\pi L_c} \left(\arcsen \left(\sqrt{\frac{2 - 4r_1 t_2 + 2R_1 T_2 - (1 - r_1 t_2)^2}{4r_1 t_2}} \right) \right). \quad (2.112)$$

Deste modo, podemos definir a finesse

$$F = \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_{1/2}} = \frac{\pi/2}{\arcsen \left(\sqrt{\frac{2 - 4r_1 t_2 + 2R_1 T_2 - (1 - r_1 t_2)^2}{4r_1 t_2}} \right)}. \quad (2.113)$$

A finesse fornece informação sobre a qualidade da cavidade, ou seja, quanto maior a finesse, maior a resolução da cavidade. A Figura 20 mostra a representação das medidas $\Delta\nu$ e $\Delta\nu_{1/2}$.

Figura 20 - Ilustração da representação da FSR ($\Delta\nu$) e da largura a meia altura ($\Delta\nu_{1/2}$).



Fonte: O autor (2022)

3 RESULTADOS EXPERIMENTAIS E DISCUSSÕES

Este capítulo é dedicado a descrever os procedimentos experimentais desenvolvidos para obter a MOT assim como obtenção teórica e experimental de características da cavidade utilizada no experimento.

O experimento é realizado em átomos frios de césio, obtidos de uma armadilha magneto óptica (MOT) localizada dentro de uma cavidade óptica em anel. A nuvem atômica tem um diâmetro de 2 mm e uma densidade óptica estimada é 3.

Apresentamos como sintonizar os lasers nas transições desejadas assim como preparar os átomos no estado $F = 3$ para o experimento. Também mostramos o método para obtenção do espectro de transmissão nas situações sem e com a cavidade bem como o procedimento para minimização das perdas a fim de observar a oscilação laser.

Também são apresentados os resultados da pesquisa desenvolvida nesta dissertação. Apresentamos os parâmetros dos feixes e da cavidade medidos experimentalmente, que podem servir de comparação para o modelo teórico apresentado. Neste sentido, a medição da FSR da cavidade é feita com base nos deslocamentos do PZT quando varremos a frequência de ressonância, assim como a finesse.

Finalmente apresentamos os principais resultados que são o aumento do ganho no feixe P devido à cavidade, apresentando inicialmente a comparação com o espectro de transmissão na situação sem cavidade (passagem única) e então obtendo uma relação de ganho com e sem cavidade em função da intensidade do feixe P. Os resultados mostram um comportamento bem diferente comparado à observação de ganho para passagem única.

Mostramos também o resultado da interpretação de modificação do estado escuro, onde medimos experimentalmente a absorção do feixe C na condição de ganho do feixe P. Apresentamos juntamente o resultado teórico do modelo de 4 níveis introduzido no capítulo 2.

Por fim, os resultados sobre a oscilação laser alcançada quando minimizamos as perdas na cavidade ao substituir o espelho M_1 (Figura 14) e ao fazer a varredura da cavidade para sua frequência de ressonância.

3.1 GANHO MAGNETICAMENTE ASSISTIDO

No capítulo anterior estudamos um sistema atômico de 4 níveis tipo Λ com dois feixes de radiação dessintonizados da ressonância e com taxas de decaimento do estado excitado para os estados fundamentais. Usando o formalismo de matriz densidade e as equações ópticas de Bloch encontramos uma solução para a coerência $\sigma_{+0}^{(1)}$ em primeira ordem de perturbação em Ω_p conforme a Equação 2.56.

Em 1996, Scully *et. al.* publicaram um artigo [19] onde eles utilizaram um terceiro feixe incoerente que induzia um bombeamento óptico entre os níveis fundamentais num sistema de 3 níveis na estrutura hiperfina do sódio que permitia transferir população entre estes níveis. Com isso eles alcançaram ganho e também oscilação laser sem inversão de população. Em 2016, Borba *et. al.* também publicaram um artigo [45] com um sistema de ganho semelhante sendo que em átomos frios de césio usando um sistema de 2 níveis com degenerescência Zeeman, formando um sistema efetivo de 4 níveis. Pouco depois, em 2018, Frometa *et. al.* publicaram outro artigo [11] e uma dissertação [40] onde também alcançaram ganho sem inversão de população nos subníveis Zeeman da linha D_2 da estrutura fina do césio. Diferentemente dos experimentos em [19] e [45], este experimento utilizava um campo magnético transversal para induzir uma transferência de população entre os estados fundamentais, possibilitando o ganho sem inversão de população.

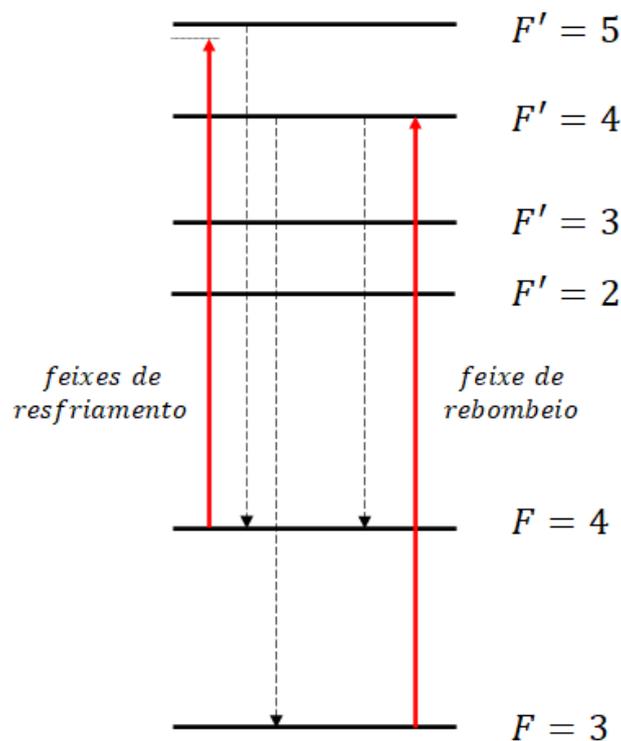
Nesta dissertação damos continuidade ao trabalho desenvolvido por Frometa e investigamos este mecanismo de ganho operando em uma cavidade. Buscamos então investigar o espectro de transmissão quando o feixe P circula diversas vezes pela cavidade e ver qual a contribuição da cavidade no aumento do ganho [46].

3.1.1 Sincronização e sintonização dos feixes

O esfriamento dos átomos de césio é alcançado por 3 feixes com polarizações circulares sintonizados 12 MHz abaixo da ressonância da transição $F = 4 \rightarrow F' = 5$ da linha D_2 do césio. Após passar pela célula contendo os átomos, os feixes são refletidos por espelhos formando um conjunto de 3 pares de feixes com polarizações circulares e opostas. Os átomos excitados para o estado $F' = 5$ só podem decair para o estado $F = 4$ e esta transição é escolhida por ser cíclica. Porém, como os feixes de resfriamento não

estão sintonizados na ressonância, existe a possibilidade de os átomos serem excitados do estado $F = 4$ para $F' = 4$ e então decair para $F = 3$. Neste caso, estes átomos deixam de ser vistos pelos feixes da MOT. Para contornar este problema, um outro feixe chamado de feixe de rebombeio é necessário para reciclar os átomos que decaíram para $F = 3$. Portanto, o feixe de rebombeio deve operar na transição $F = 3 \rightarrow F' = 4$, alcançando assim o sistema atômico desejado. A Figura 21 mostra as sintonizações dos feixes de resfriamento (feixes da MOT) e do feixe de rebombeio.

Figura 21 - Sintonia dos feixes de resfriamento 12 MHz abaixo da transição $F = 4 \rightarrow F' = 5$ e do feixe de rebombeio na transição $F = 3 \rightarrow F' = 4$ e as possíveis transições de decaimento (em linha tracejada).

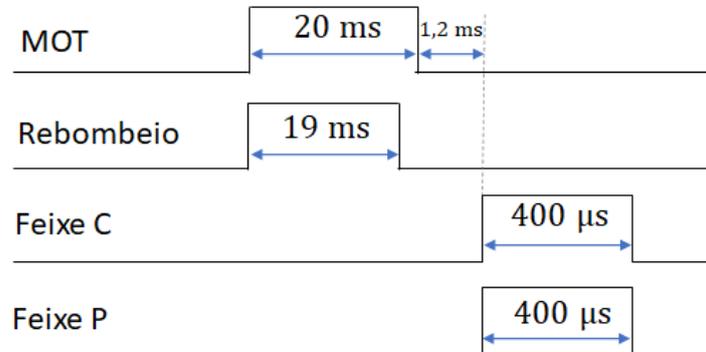


Fonte: O autor (2022)

Os feixes do experimento (feixes C e P) estão dessintonizados da transição $F = 3 \rightarrow F' = 2$ e, portanto, os átomos devem ser preparados no estado $F = 3$. Para isso, o feixe de rebombeio deve ser desligado um pouco antes dos feixes de resfriamento. A Figura 22 mostra a sequência dos pulsos usados no experimento. Os feixes da MOT e de rebombeio são ligados simultaneamente, sendo que o feixe de rebombeio fica ligado por 19 ms enquanto que os feixes da MOT ficam ligados por 20 ms. Os feixes do experimento só são ligados 1,2 ms após o desligamento dos feixes da MOT e

permanecem ligados por um intervalo de $400 \mu\text{s}$, tempo suficiente para alcançar o regime estacionário.

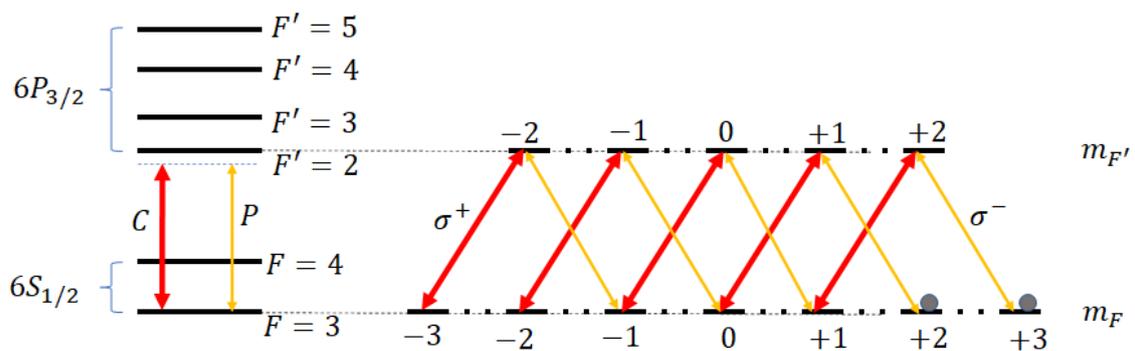
Figura 22 - Sincronização dos pulsos dos feixes.



Fonte: O autor (2022)

No experimento o feixe C, de polarização σ^+ , é muito mais intenso que o feixe P, de polarização σ^- . Isso faz com que as populações que seriam distribuídas entre os $2F + 1$ subníveis Zeeman do estado fundamental sejam bombeadas para os 2 subníveis de maior valor de m_F , como mostrado na Figura 23.

Figura 23 - Feixes C e P com polarizações circulares opostas interagindo com os subníveis Zeeman correspondentes à transição $F = 3 \leftrightarrow F' = 2$.



Fonte: O autor (2022)

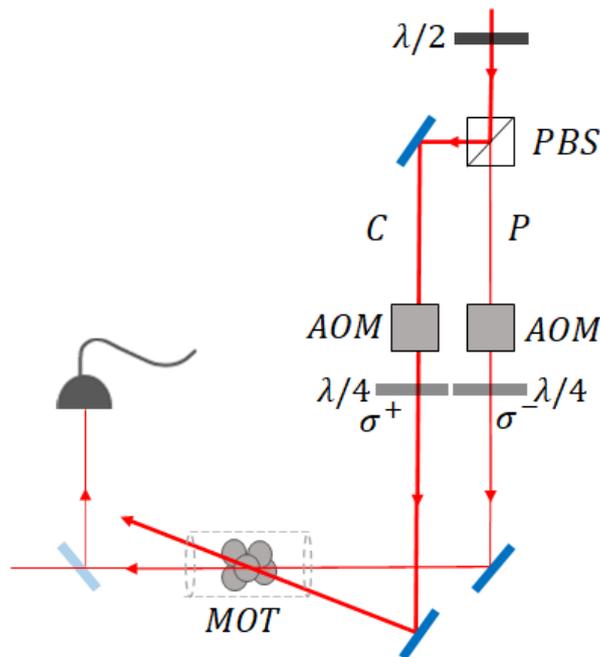
Assim, o sistema de 12 níveis pode ser simplificado para um sistema de 4 níveis formado pelos estados fundamentais $|m_F = +1\rangle$, $|m_F = +2\rangle$ e $|m_F = +3\rangle$ e o estado excitado $|m_{F'} = +2\rangle$. Para simplificar a notação, aos estados fundamentais chamaremos de $|-\rangle$, $|0\rangle$ e $|+\rangle$ e o estado excitado $|0'\rangle$ obtendo assim o sistema de 4 níveis que foi discutido na seção 2.3.3.

3.1.2 Preparação do sistema - Ganho de passagem única

Para a obtenção do espectro de EIT, precisamos dos dois feixes (C e P). Estes feixes são oriundos de um mesmo laser de diodo e passam por um divisor de feixe polarizador (PBS do inglês *Polarizing Beam Splitter*), gerando os feixes C e P que são acoplados a fibras ópticas monomodo.

As intensidades dos feixes são controladas girando uma placa de $\lambda/2$ que é colocada antes do PBS, e suas frequências são controladas por moduladores acusto-ópticos (AOM do inglês *Acousto-Optic Modulator*). Ambos moduladores possuem uma frequência central de 110 MHz e são usados para modificar a frequência dos feixes escolhendo a ordem -1 de difração. Após ser refletido pelos espelhos e pela lâmina de vidro, o feixe P é detetado.

Figura 24 – Esquema experimental simplificado para obtenção do espectro de transmissão.

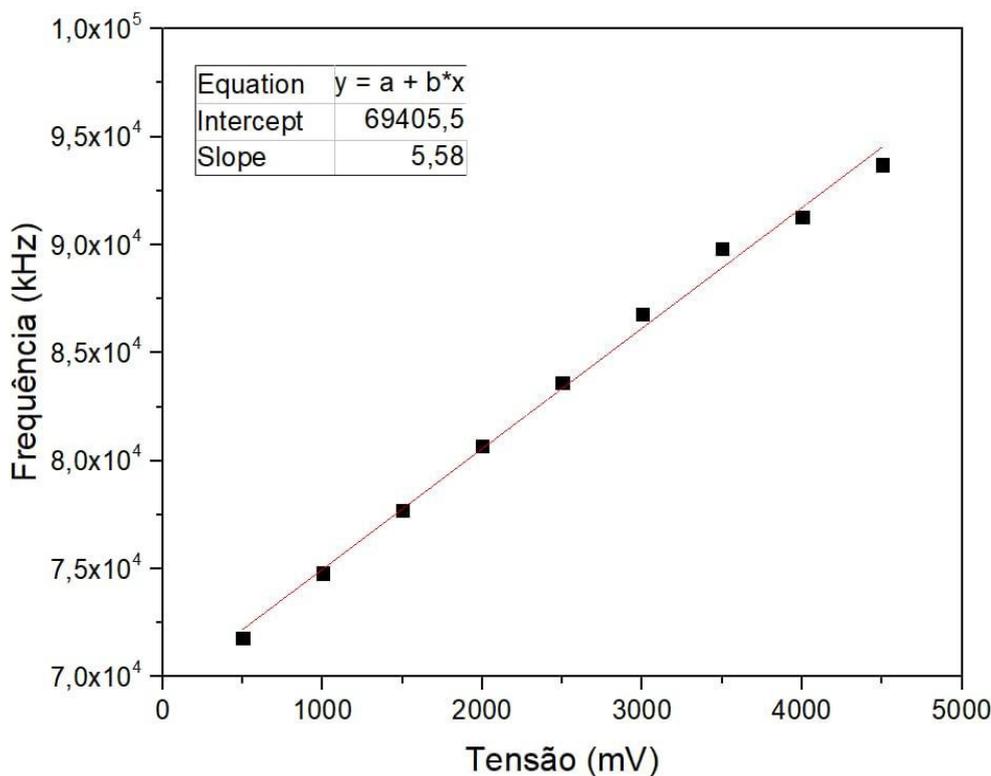


Fonte: O autor (2022)

Para adquirir polarizações circulares e opostas, os feixes C e P passam por uma placa $\lambda/4$. Assim, os feixes C e P adquirem polarizações σ^+ e σ^- , respectivamente. O espectro de EIT é obtido variando a frequência do feixe P em torno da frequência do feixe C. Portanto, o feixe C é mantido 10 MHz abaixo da ressonância da transição $F = 3 \leftrightarrow F' = 2$ (Figura 23), enquanto que o feixe P tem sua frequência variada pelo AOM

aplicando uma tensão que varia linearmente no tempo controlada por um gerador de função. Para identificar a relação entre a tensão aplicada ao AOM e a frequência, foi plotado o gráfico da Figura 25 mostrando uma relação linear que mostra que para cada 1 mV de tensão, a modificação de frequência do feixe P é de aproximadamente $5,5\text{ kHz}$.

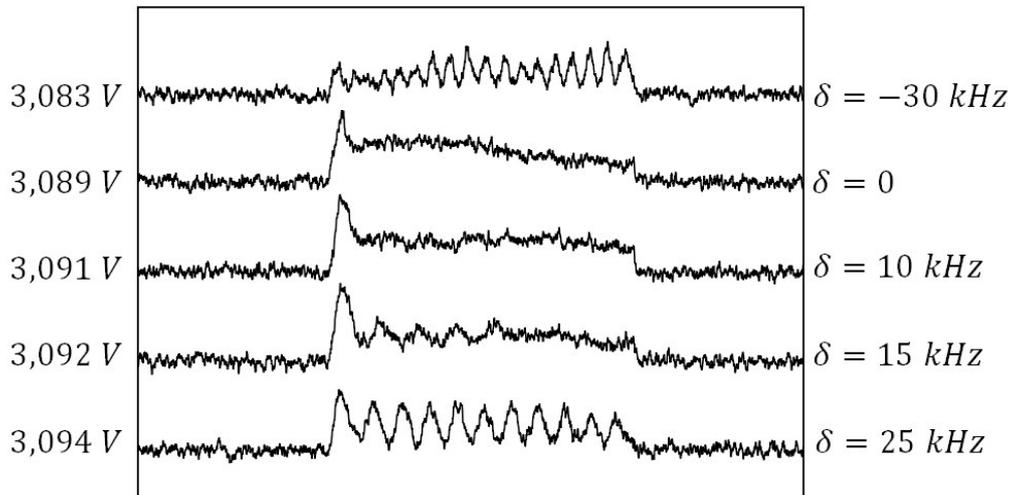
Figura 25 - Curva de calibração correspondente ao modulador do feixe de prova AOM, o qual permite conhecer o valor da frequência em kHz para cada valor de tensão aplicada.



Fonte: O autor (2022).

Representamos o espectro de EIT em termos da dessintonia de dois fótons, ou dessintonia Raman, representada pela diferença das frequências dos feixes C e P, $\delta = \nu_C - \nu_P$. A determinação da frequência correspondente a $\delta = 0$ é obtida detetando a interferência dos dois feixes. A frequência de batimento é registrada no osciloscópio. Então variamos a frequência de P até encontrar a frequência de batimento correspondente a 0. Através do gerador de função, podemos variar a frequência do feixe P alterando a tensão aplicada no driver do AOM com passos de 1 mV até obter uma frequência de batimento nula ($\delta = 0$) para uma tensão de $3,089\text{ V}$. A Figura 26 mostra, para alguns valores de tensão, os respectivos sinais de batimento detetados.

Figura 26 – Batimento dos feixes C e P para diferentes valores de tensão aplicada no AOM.



Fonte: O autor (2022)

Com o sistema preparado para obtenção do espectro de EIT, podemos observar o ganho variando as intensidades dos feixes e do campo magnético externo. O ganho depende diretamente das intensidades dos feixes e do campo magnético, podendo até ser nulo em algumas condições. Este sistema pode produzir ganho de passagem única acima de 100% para valores moderados do campo magnético transversal e dos feixes.

3.1.2.1 Ganho em função da intensidade do campo magnético

Vimos no capítulo 2 que o campo magnético transversal tem o papel de transferir população do estado $|+\rangle$ para o estado $|-\rangle$. Nesta seção, o objetivo é verificar o comportamento do ganho e do espectro de EIT em função da intensidade do campo magnético.

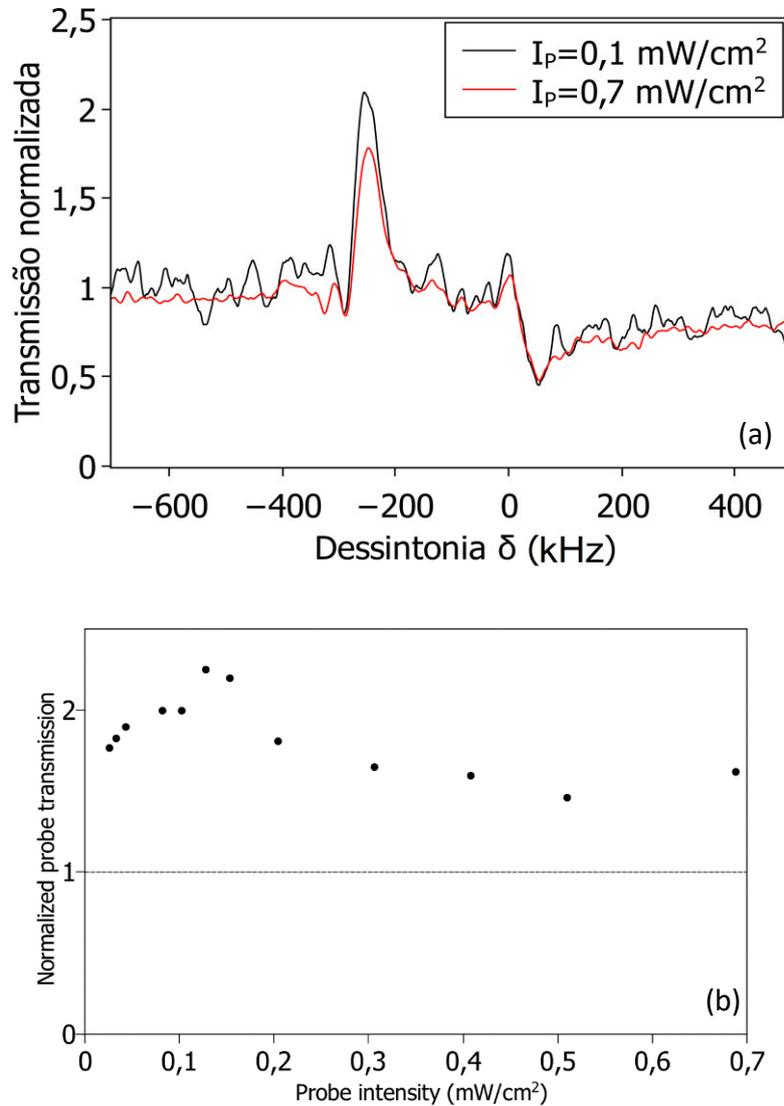
O campo magnético remove a degenerescência Zeeman dos estados fundamentais e os deslocamentos de energia são proporcionais a este campo, ou seja, quanto maior a intensidade do campo magnético, maior será a dessintonia Raman na ressonância de dois fótons. Em outras palavras, os níveis $|-\rangle$ e $|+\rangle$ estarão mais afastados. Esse afastamento entre os níveis é dado pela Equação 2.18. De acordo com a Figura 2, esta proporção para o nível hiperfino $F = 3$ é de $-0,35$ MHz/G. Portanto, a posição do pico de ganho depende diretamente da intensidade do campo magnético B_T como obtido em experimento realizado em [40], ocorrendo para valores menores de δ quanto mais intenso for o campo magnético.

3.1.2.2 Ganho em função da intensidade do feixe P

Para observar o comportamento do ganho em função da intensidade do feixe P foram feitas diversas medidas mantendo fixas a intensidade do feixe C e do campo magnético, variando a intensidade do feixe P e registrando o ganho para cada situação. Mantendo fixa a intensidade do feixe C em aproximadamente $3,5 \text{ mW/cm}^2$ medimos o ganho para diversas potências do feixe P. A Figura 27 (a) mostra o espectro de transmissão para duas intensidades do feixe P e campo magnético transversal de 450 mG , obtendo um ganho acima de 100% em relação ao feixe P incidente para $I_p = 0,1 \text{ mW/cm}^2$, e de aproximadamente 70% para $I_p = 0,7 \text{ mW/cm}^2$. Após diversas medições de ganho para diferentes intensidades do feixe P obtém-se a Figura 27 (b) que mostra o máximo de ganho em função da intensidade do feixe P. Conforme mostrado na Figura 27 (b), para o caso de ganho de passagem única, o ganho inicialmente aumenta com a intensidade do feixe P e, após atingir um máximo, satura em um pequeno valor de aproximadamente 60%.

A característica central em torno de $\delta = 0$ na Figura 27 (a) existe mesmo quando o campo magnético transversal é zero e está provavelmente associado à absorção Raman residual associada ao feixe C dessintonizado, que apresentam a forma dispersiva usual.

Figura 27 – (a) Espectro de transmissão do feixe P como função da dessintonia δ correspondendo à passagem única. (b) O ganho óptico medido em função da intensidade do feixe P incidente.



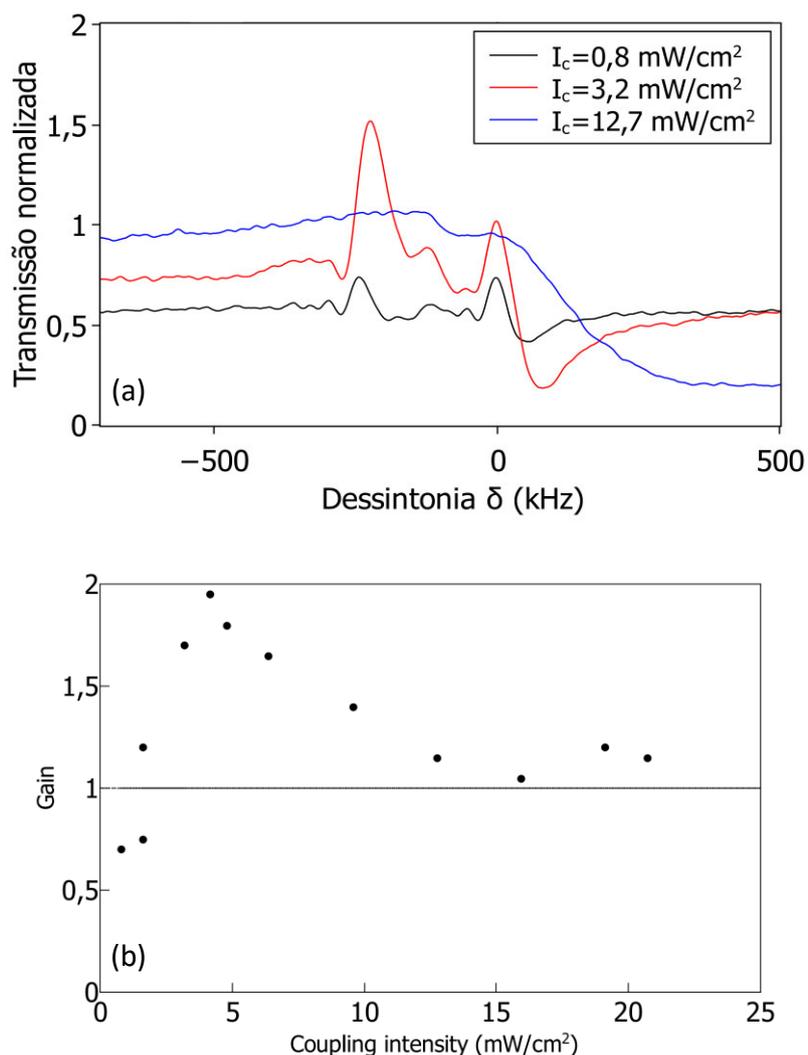
Fonte: O autor (2022)

3.1.2.3 Ganho em função da intensidade do feixe C

Além do estudo do ganho em função do campo magnético e do feixe P, também foi feito o estudo do comportamento do ganho variando a intensidade do feixe C. O procedimento para obter o espectro de ganho em função do feixe C é o mesmo da seção anterior. O resultado é mostrado na Figura 28, onde foi observado um ganho máximo para a intensidade do feixe C próxima de $3,5 \text{ mW/cm}^2$ quando mantemos fixa a intensidade do feixe P em $0,1 \text{ mW/cm}^2$. Podemos ver que para intensidades maiores, o ganho cai até

não se observar mais ganho, e para baixas intensidades em vez de ganho, temos absorção do feixe P. Assim, para investigar comparativamente o aumento de ganho causado pela cavidade óptica fixamos a intensidade do feixe C em torno do valor correspondente ao ganho máximo, que corresponde a um valor de aproximadamente $3,5 \text{ cm}^{-1}$ na Figura 28 (b).

Figura 28 - Ganho medido em função da intensidade do feixe C.



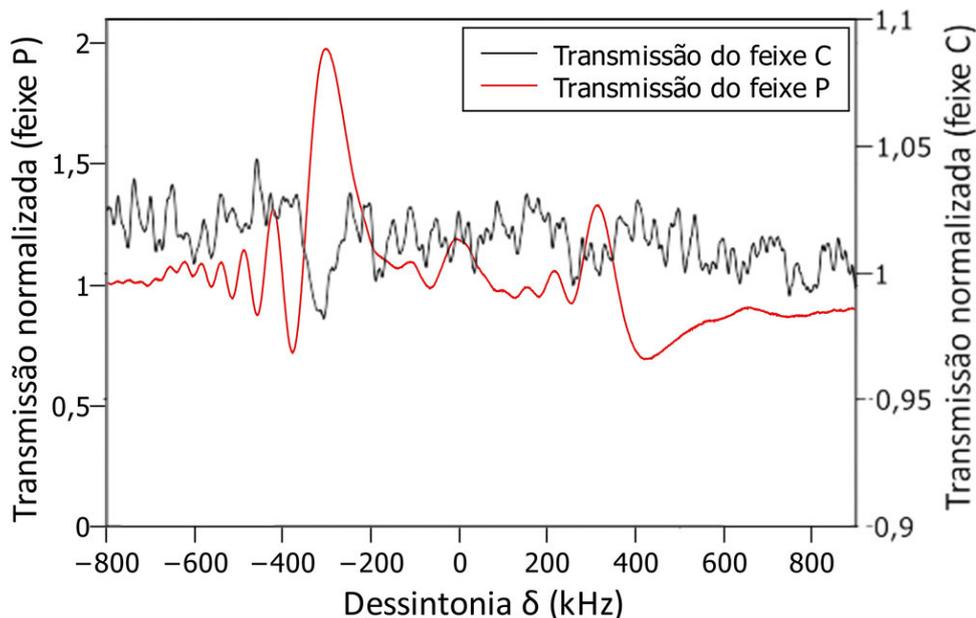
Fonte: O autor (2022)

3.1.2.4 Observação da modificação do estado escuro

Na seção 2.4.1 discutimos a interpretação do ganho no espectro de EIT a partir da transferência de população entre os estados fundamentais devido ao campo magnético. Na interpretação do estado escuro, as populações dos estados $|-\rangle$ e $|+\rangle$ são proporcionais

às frequências de Rabi Ω_P e Ω_C , respectivamente. Como consequência do ganho do feixe P, deve haver uma absorção do feixe C na mesma quantidade. Para verificar experimentalmente esta interpretação detetamos simultaneamente os feixes C e P. Como exemplo, foi feito o feixe P incidente na MOT com potência de 380 nW e foi observado ganho de 100% ao passo que foi observada uma absorção do feixe C em torno de 1,9% com potência de $20 \mu\text{W}$. Portanto, o aumento de 380 nW no feixe P foi devido ao feixe C. A Figura 29 mostra o espectro de transmissão e podemos notar que na condição em que o feixe P tem ganho, o feixe C tem absorção. Como a absorção percentual do feixe C é pequena, os espectros foram plotados em escalas diferentes.

Figura 29 – Detecção simultânea dos feixes C e P comprovando a interpretação da manipulação do estado escuro.

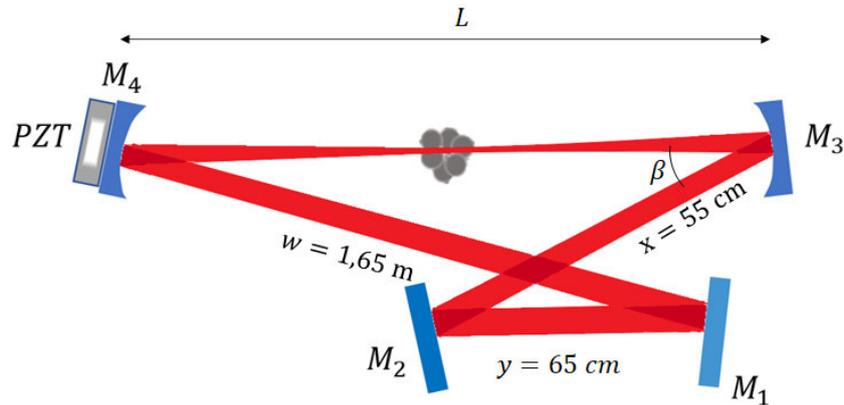


Fonte: O autor (2022)

3.2 CARACTERÍSTICAS DA CAVIDADE

A cavidade do experimento é composta por dois espelhos curvos totalmente refletores (M_3 e M_4) e dois espelhos planos, sendo um totalmente refletor (M_2) e outro parcialmente refletor (M_1) na configuração em anel como mostrado na Figura 30. Os espelhos foram posicionados de modo a evitar efeitos de astigmatismo. O ângulo β vale aproximadamente 4° , pequeno suficiente para desprezar os efeitos de astigmatismo, conforme visto no capítulo anterior. Uma lâmina de vidro de refletividade igual a 8% é

Figura 31 – Dimensões da cavidade e configuração do formato do feixe circulante na cavidade.



Fonte: O autor (2022)

3.2.1 Verificação da estabilidade da cavidade

Como estudado no capítulo anterior, a condição de estabilidade da cavidade em anel é dada pela Equação 2.91. Portanto, vemos que a distância entre os espelhos curvos L deve estar compreendida no intervalo

$$1,5 \text{ m} \leq L \leq 3,16 \text{ m}, \quad (3.1)$$

como $L = 1,65 \text{ m}$ a estabilidade da cavidade está verificada.

3.2.2 Propriedades do feixe na cavidade

Ao substituir os elementos da matriz da Equação 2.89 na Equação 2.81 podemos obter o parâmetro complexo q do feixe na cavidade e então determinar os parâmetros do feixe

$$\frac{1}{q} = \frac{2g_1(g_2 - 1) \pm i2\sqrt{g_1g_2(1 - g_1g_2)}}{R(g_1 + g_2 - 2g_1g_2)}. \quad (3.2)$$

Portanto, com o uso da Equação 2.70, podemos localizar a cintura mínima do feixe na região entre os espelhos curvos

$$z = -\text{Re}(q) = 82 \text{ cm}, \quad (3.3)$$

a cintura mínima do feixe dada pela equação 2.71

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{n\pi} \text{Im}(q)} = 0,25 \text{ mm}, \quad (3.4)$$

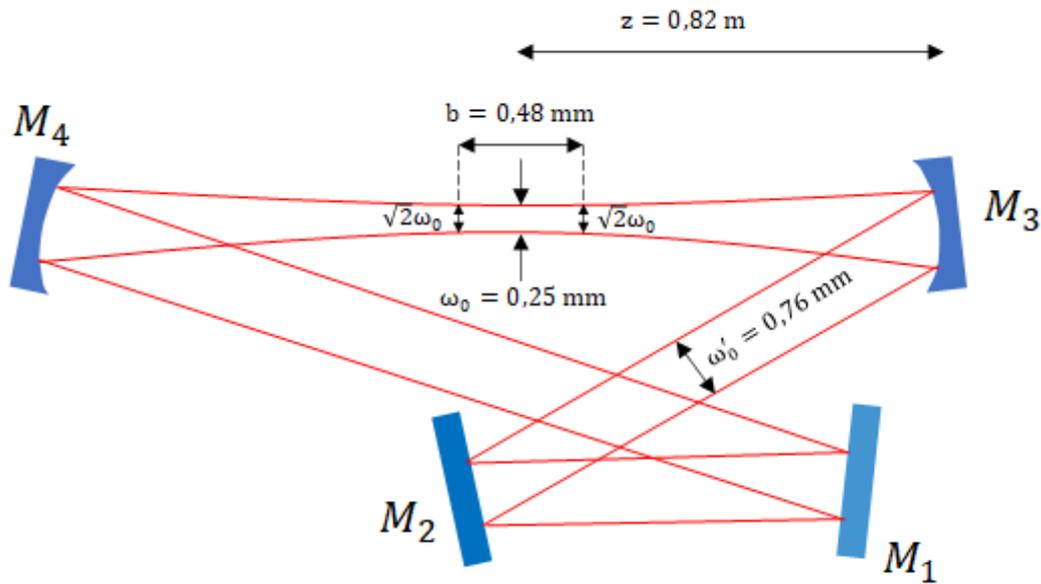
e o comprimento de Rayleigh dado pela Equação 2.73

$$z_R = -\frac{\text{Im}\left(\frac{1}{q}\right)}{\left|\frac{1}{q}\right|^2} = 24 \text{ cm.} \quad (3.5)$$

Já a cintura do feixe colimado (fora da região entre os espelhos curvos) é

$$\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} = 0,76 \text{ mm.} \quad (3.6)$$

Figura 32 – Parâmetros calculados do feixe no sistema real.



Fonte: O autor (2022)

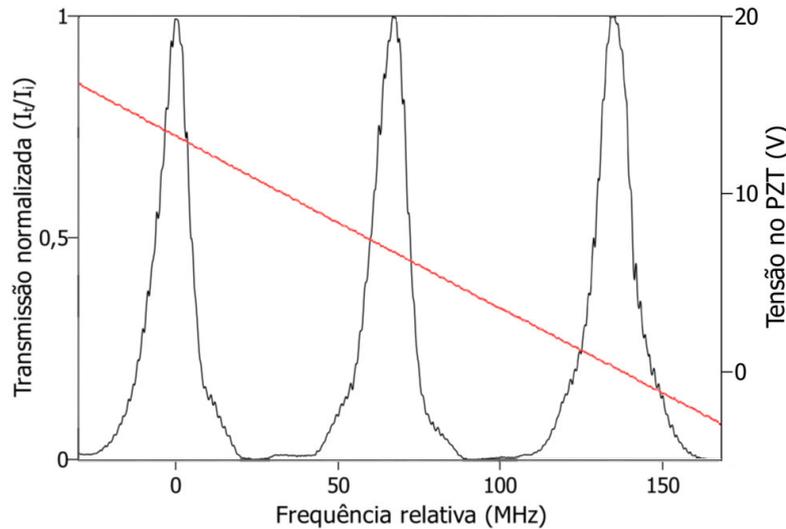
3.2.3 Finesse da cavidade

No capítulo 2 foi desenvolvido o cálculo teórico da finesse apresentado na Equação 2.112. Neste modelo foram consideradas perdas apenas nos espelhos 1 e 2, porém ocorrem perdas também em outras partes da cavidade. As janelas da célula que contém os átomos e demais espelhos também provocam perdas. As medições mostraram que há uma perda adicional estimada em 20% por ciclo. Ao adicionar esta perda, a finesse (com o uso da Equação 2.112) da cavidade ao usar o espelho M_1 com refletividade 70% foi de 9,1.

Também verificamos experimentalmente a finesse da cavidade, e para isso, na obtenção dos modos da cavidade aplicamos uma tensão no piezo acoplado no espelho

M_4 , que produzia deslocamentos proporcionais à tensão. A Figura 33 mostra como foi obtido a FSR experimentalmente.

Figura 33 – Espectro de transmissão do feixe P em função da frequência do feixe (ou comprimento da cavidade) para o espelho M_1 com 70% de refletividade (em preto) e tensão aplicada ao PZT (em vermelho).



Fonte: O autor (2022)

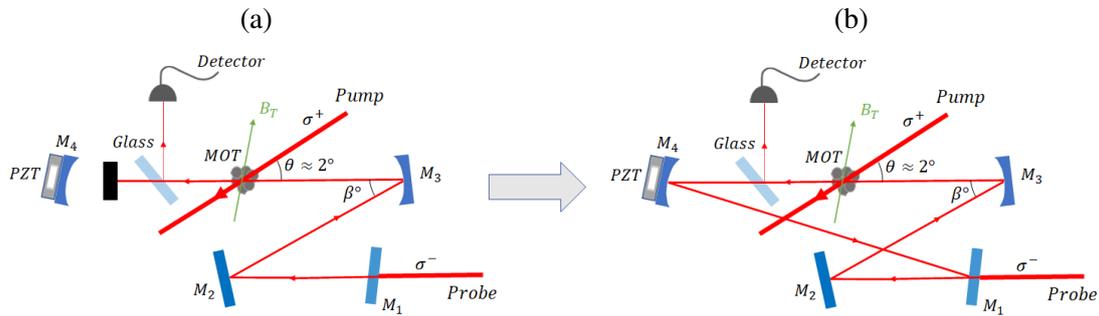
A FSR medida nesta cavidade foi de 67 MHz , que está de acordo com a Equação 2.105, pois o comprimento total da cavidade é de $4,5 \text{ m}$. A largura em frequência a meia altura $\Delta\nu_{1/2}$ medida foi de $13,4 \text{ MHz}$. Assim, podemos obter a finesse desta cavidade aplicando a Equação 2.113:

$$F = \frac{67 \text{ MHz}}{13,4 \text{ MHz}} = 5. \quad (3.7)$$

3.3 AUMENTO DO GANHO COM CAVIDADE

Verificado o ganho com passagem única e a cavidade montada podemos ver o efeito da cavidade sobre o ganho. O esquema experimental para obtenção do espectro de transmissão é mostrado na Figura 34. O procedimento para obtenção do espectro de transmissão para o sistema com a cavidade é o mesmo que para o caso sem cavidade, sendo que para a cavidade apenas retiramos o bloqueio que foi posicionado logo após a lâmina de vidro. Este procedimento tornava prática a obtenção dos espectros de transmissão nas condições de passagem única e com cavidade.

Figura 34 – Situação experimental para obtenção do espectro de EIT nas condições (a) sem cavidade e (b) com cavidade.



Fonte: O autor (2022)

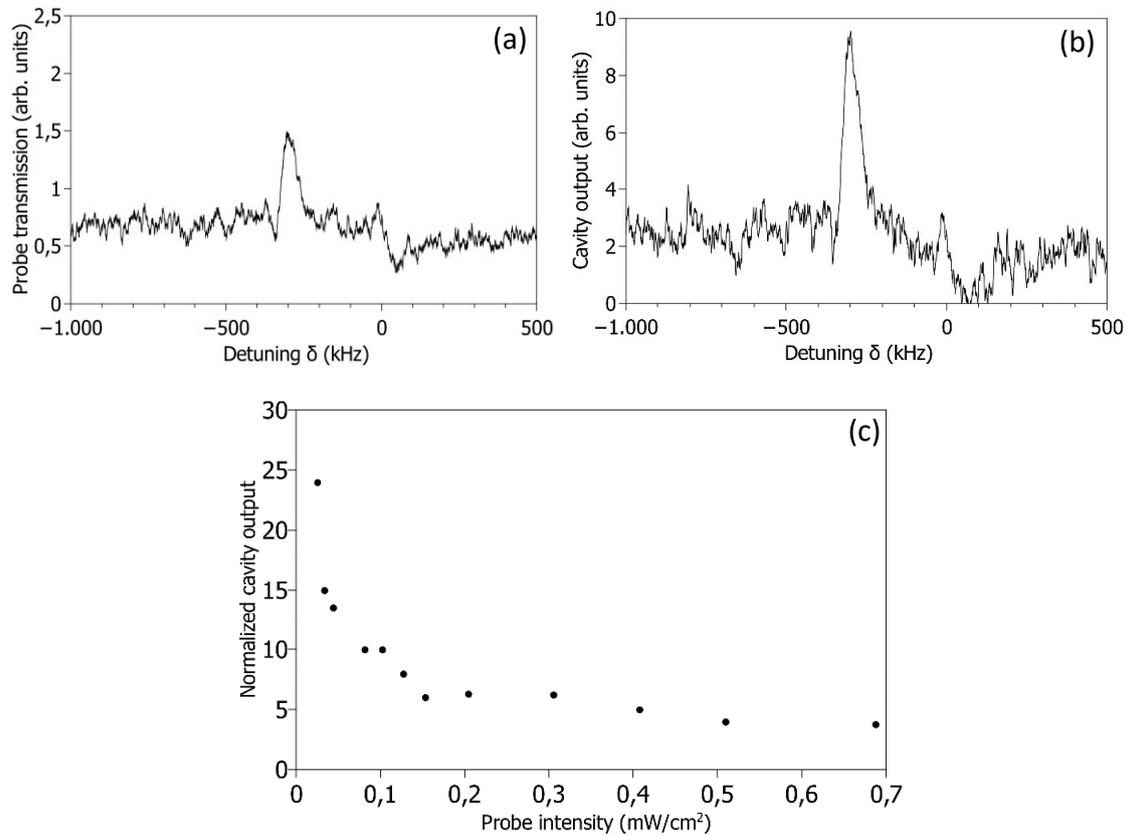
Após a verificação do ganho de passagem única no feixe P ao passar pela MOT, uma pequena parcela é refletida pelo vidro e chega ao detector, enquanto a maior parte, aproximadamente 92% retornava à cavidade, ocorrendo perdas como no próprio espelho M_1 que possui refletividade inferior a 100% nas janelas da célula de átomos, e então retorna à MOT obtendo ganho novamente e o ciclo se repete até atingir a saturação.

A fim de obter o espectro mostrado na Figura 35 (b) sintonizamos a cavidade para um dos seus modos longitudinais usando o PZT montado no espelho M_4 . Portanto, para investigar comparativamente o aumento do ganho causado pela cavidade, fixamos a intensidade do feixe C na mesma condição de obtenção do espectro da Figura 35 (a). Na Figura 35 (c) plotamos o aumento do ganho pela cavidade em função da intensidade do feixe P, mostrando um comportamento completamente diferente da Figura 28 (b) iniciando com valores acima de 14 em comparação à passagem única para baixas intensidades do feixe P, e então decaindo monotonicamente com o aumento da intensidade até atingir um valor assintótico próximo de 4. O eixo vertical da Figura 35 (c) representa o ganho óptico medido como função da intensidade do feixe P para o caso do aumento do ganho pela cavidade.

$$\text{ganho efetivo} = \frac{\text{ganho com cavidade}}{\text{ganho sem cavidade}}. \quad (3.8)$$

Isto mostra claramente o efeito da cavidade no aumento do ganho magneticamente assistido em uma faixa mais ampla de intensidade do feixe P incidente.

Figura 35 – (a) Espectro de transmissão do feixe P como função da dessintonia δ correspondendo a passagem única e (b) ao aumento do ganho pela cavidade. (c) O ganho óptico medido como função da intensidade do feixe P para o caso do aumento do ganho pela cavidade. O ganho é definido como a diferença entre o pico de intensidade transmitida com e sem a MOT dividido pela intensidade do feixe P incidente logo antes da MOT.



Fonte: O autor (2022)

O comportamento do ganho no feixe P na presença da cavidade óptica pode ser qualitativamente entendido da seguinte forma: para o mesmo valor da intensidade do feixe P incidente usada para medir o ganho de passagem única, notamos que o feixe P é amplificado cada vez que passa pelo meio de ganho e, portanto, o ganho geral deve aumentar devido à cavidade. No entanto, devido às perdas de cavidade, este aumento na intensidade do feixe P atingirá um valor estacionário quando o ganho de ida e volta equilibra as perdas de cavidade. Portanto, considerando que quando a intensidade do feixe P incidente é inicialmente aumentada, a intensidade do feixe no interior da cavidade permanece estacionária no mesmo valor que é determinado pelas perdas da cavidade e isso sempre corresponde a um menor ganho líquido, uma vez que a intensidade do feixe P incidente aumentou. Isso mostra claramente o efeito da cavidade no aumento do ganho

magneticamente assistido em uma faixa mais ampla de intensidade do feixe de prova incidente.

3.4 OSCILAÇÃO LASER

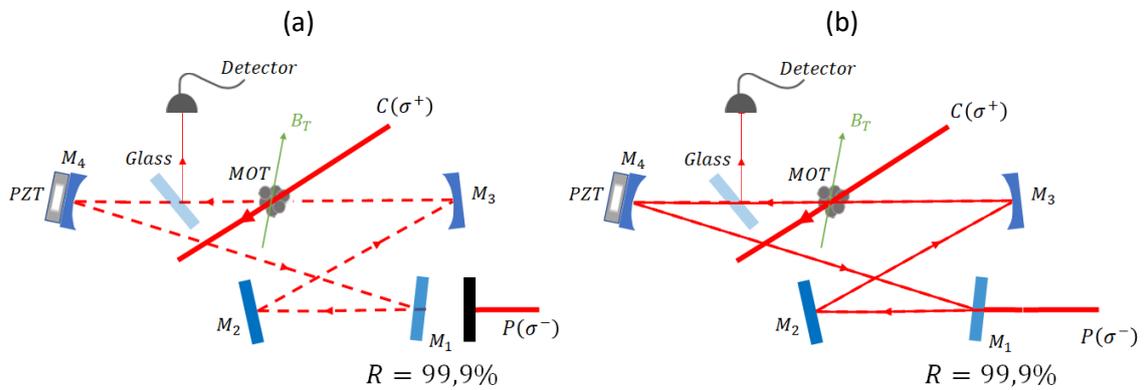
O principal objetivo deste trabalho é a observação de oscilação laser no sistema de átomos frios. A condição de oscilação laser foi discutida na seção 2.4 quando discutimos o ganho de limiar, ou seja, os átomos devem promover ganho ao feixe laser superior às perdas do sistema. Nesse procedimento é necessário certificar que as perdas devem ser minimizadas e isso implica escolher um espelho M_1 adequado, com o máximo de refletividade possível.

No preparo da cavidade para observação da oscilação laser colocamos um espelho M_1 com refletividade de aproximadamente 99,9%. Na substituição do espelho a cavidade precisava ser novamente alinhada, portanto, foi feito com que a intensidade do feixe P incidente em M_1 fosse o máximo possível pois como apenas 0,1% do feixe era transmitido, era preciso enxergar o caminho feito pelo feixe para então garantir que a cavidade está bem alinhada.

Após alinhar bem a cavidade, o sistema está pronto para oscilar, então bloqueamos o feixe P antes de incidir no espelho M_1 (Figura 36 (a)). Na ausência do feixe P e apenas o feixe C agindo sobre a MOT, esperamos que um fóton emitido pelo decaimento dos átomos no modo da cavidade se amplifique ao passar diversas vezes na MOT até que seja detectado. Outro experimento feito foi a respeito de observar o batimento entre o laser da cavidade (que chamaremos de LO do inglês *Laser Oscillation*) e o feixe P (Figura 36 (b)), assim, permitimos que ambos os feixes circulem na cavidade e possam interferir e o sinal de interferência ser detectado.

Diferente do caso em que observamos o aumento do ganho do feixe P, mas sob as mesmas condições, mesmo quando o feixe P é bloqueado, podemos observar o sistema começar a oscilar quando varremos a cavidade para sua frequência de ressonância pelo PZT montado no espelho M_4 . Na Figura 37 é mostrada a emissão laser observada quando apenas o feixe C está ligado durante o intervalo de 400 μ s.

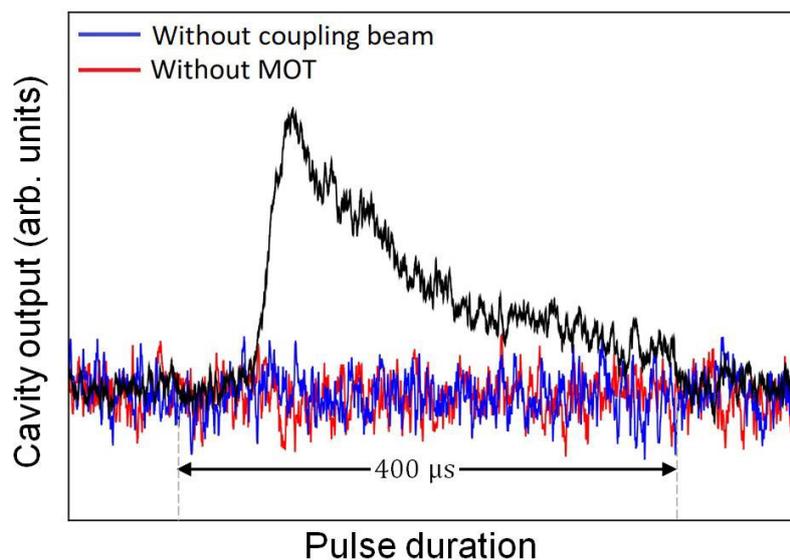
Figura 36 – (a) Feixe P bloqueado e apenas o feixe LO circula na cavidade e (b) Feixe P desbloqueado e ambos feixes circulam na cavidade.



Fonte: O autor (2022)

Para diferentes sintonias da cavidade pelo PZT durante este intervalo de tempo, a oscilação laser começa em tempos diferentes. A curva mostrada na Figura 37 corresponde à média de 3 curvas onde a oscilação laser inicia aproximadamente em torno do mesmo tempo após ligar o feixe C.

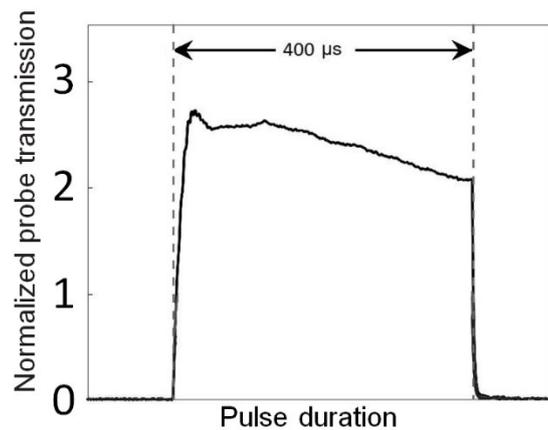
Figura 37 - Observação da oscilação laser. Durante o intervalo de tempo que o feixe C fica ligado, mas com o feixe P, o sistema apresenta auto-oscilação quando o PZT faz a varredura da cavidade na ressonância. A potência estimada emitida do laser é 30 nW.



Fonte: O autor (2022)

Claramente isto corresponde a oscilação laser *cw* apesar da radiação laser emitida apresentar uma ligeira diminuição ao logo do intervalo de observação. Esta diminuição é atribuída ao efeito de bombeio óptico que leva a uma diminuição do ganho magneticamente assistido como foi medido num experimento independente mostrado na Figura 38.

Figura 38 - Evolução temporal do ganho de passagem única durante o mesmo intervalo de tempo medido em um experimento independente.

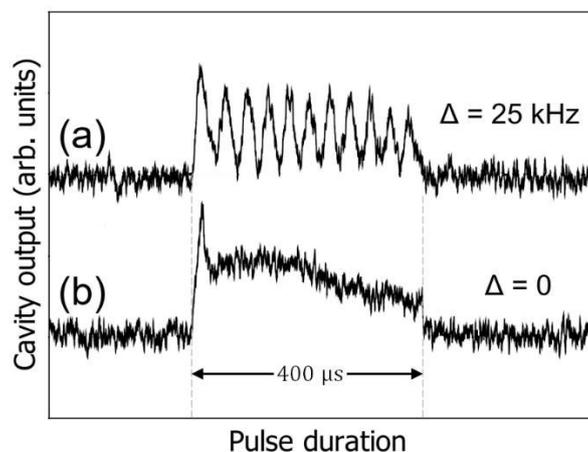


Fonte: O autor (2022)

Calibrando o detetor com uma potência do feixe P conhecida, a potência do feixe LO foi estimada da ordem de 30 *nW*. Também verificamos que nenhuma oscilação do laser ocorre ao varrer a cavidade quando a MOT ou o feixe C estão desligados.

Além disso, para demonstrar a natureza coerente da emissão do laser, registramos simultaneamente a saída da cavidade na presença do feixe de sonda incidente com uma frequência dessintonizada daquela correspondente à ressonância Raman de dois fótons. Na Figura 39 (a) e (b), mostramos o batimento entre a saída da cavidade associada ao feixe P incidente e o feixe LO emitido quando a frequência do feixe P é dessintonizada da condição de dois fótons por $\Delta = 25 \text{ kHz}$ e $\Delta = 0$, respectivamente. Claramente, o batimento observado nessas frequências demonstra o alto grau de coerência da radiação laser emitida. Portanto, essas observações constituem uma demonstração clara de um novo tipo de sistema de laser operando em átomos frios sem inversão de população.

Figura 39 - Saída de cavidade quando o feixe P, dessintonizado em 25kHz da ressonância Raman de dois fótons, está simultaneamente presente com a oscilação do laser. (b) o mesmo que em (a), mas para uma frequência de feixe P em ressonância de dois fótons.



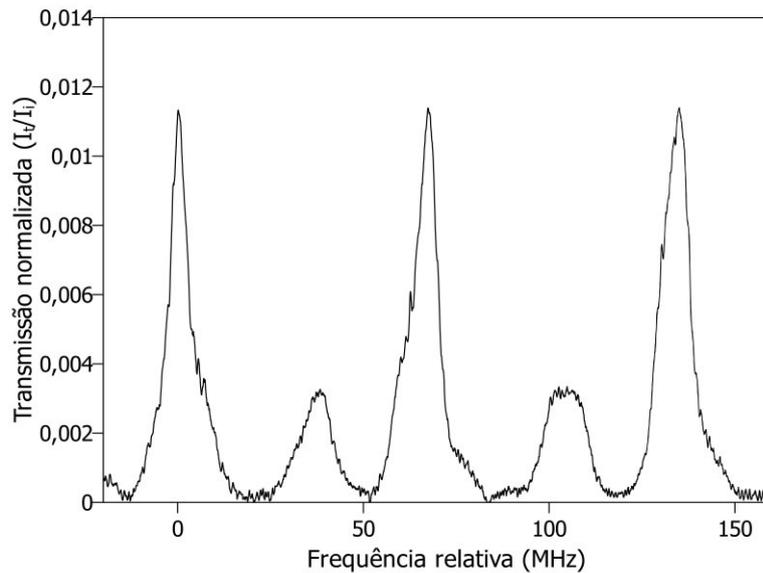
Fonte: O autor (2022)

Atribuímos o pico inicial observado em ambos os valores como sendo devidos à absorção transitória associada à ativação do feixe de prova.

3.4.1 Finesse da nova cavidade

Ao trocar o espelho M_1 de $R = 70\%$ usado no experimento do aumento de ganho do feixe P para um espelho de $R = 99,9\%$ diminuimos as perdas do feixe a cada volta da cavidade e isso foi fundamental para alcançar a oscilação laser. Nesta seção apresentamos uma comparação das finesses das duas configurações da cavidade. Como calculado na seção 3.2.3, a finesse teórica da cavidade 1 (com espelho M_1 de $R = 70\%$) é de 9,1 e experimentalmente verificamos uma finesse de 5. A Figura 40 apresenta os modos da cavidade 2 (com espelho M_1 de $R = 99,9\%$).

Figura 40 - Espectro de transmissão do feixe P em função da frequência do feixe (ou comprimento da cavidade) para o espelho M_1 com 99,9% de refletividade.



Fonte: O autor (2022)

Aplicando a Equação 2.113 obtemos a finesse teórica de 19 e de acordo com a Figura 40 a finesse experimental é de 9. Uma razão para essa diferença de finesses pode ser a incerteza experimental do alinhamento da cavidade, especialmente na largura do modo ($\Delta\nu_{1/2}$), uma vez que a Finesse depende fortemente dessa largura. Se o feixe tiver vários modos transversais, ou seja, se a cavidade não estiver selecionando exatamente um determinado modo, a consequência é que essa largura aumenta. Apesar dos resultados teórico e experimental estarem relativamente diferentes, o aumento da finesse da cavidade 1 para a cavidade 2 são próximos

- Resultado teórico

$$\frac{19}{9,1} = 2,1 \quad (3.9)$$

- Resultado experimental

$$\frac{9}{5} = 1,8 \quad (3.10)$$

Portanto, os resultados mostram que a finesse dobra ao substituir o espelho M_1 .

Os picos menores correspondem a outros modos transversais que também podem oscilar e a cavidade suporta. Geralmente, suas amplitudes são menores que do modo Gaussiano. Quanto maior a finesse, maior a dificuldade para o alinhamento da cavidade para os modos principais da cavidade.

4 CONCLUSÃO

Em resumo, investigamos o aumento do ganho óptico magneticamente assistido, demonstrado recentemente em um ensemble de átomos frios, devido a uma cavidade óptica em anel ressonante operando abaixo da condição de limiar. Um aumento da ordem de 14 vezes no ganho foi demonstrado para intensidade muito pequena do feixe P. Além disso, acima da condição de limiar, o sistema apresenta auto-oscilação levando à emissão de radiação laser com potência da ordem de dezenas de nW . Como já descrito em [11], o ganho magneticamente assistido corresponde à amplificação sem inversão de população. Portanto, esta demonstração constitui um novo tipo de LWI *cw*. Além disso, também foi demonstrada a natureza coerente da radiação emitida. Este novo mecanismo para LWI é baseado na simples manipulação, via campo magnético transversal externo, do estado escuro induzido e abre novas perspectivas para estudos futuros na amplificação de feixes portadores de momento angular orbital [45] ou mesmo para obtenção de oscilação laser nesses modos de luz.

Os resultados obtidos abrem caminho para investigar o uso desse ganho magneticamente assistido para realizar o armazenamento de luz ou para operar uma memória óptica com a possibilidade de amplificar a informação recuperada, como demonstrado recentemente usando a mistura paramétrica de quatro ondas acopladas [47]. Acreditamos que isso pode ser particularmente importante e de interesse para muitas outras áreas, tendo em vista a recente demonstração de protocolos de comunicação usando feixes de luz estruturados [48].

REFERÊNCIAS

- [1] *BÍBLIA SAGRADA*.
- [2] M. Fleischhauer, A. Imamoglu, and J. P. Marangos, “Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media,” 2005.
- [3] C. Cohen-Tannoudju, Duport-Roc Jacques, and G. Grynberg, *Atom-photon interactions*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 1998.
- [4] E. Arimondo, “Coherent Population Trapping in Laser Spectroscopy,” *Progress in Optics*, vol. 35, no. C, pp. 257–354, 1996, doi: 10.1016/S0079-6638(08)70531-6.
- [5] J. Mompart and R. Corbalán, “Lasing without inversion,” *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, vol. 2, no. 3, Jun. 2000, doi: 10.1088/1464-4266/2/3/201.
- [6] O. Kocharovskaya, “Amplification and lasing without inversion,” 1992.
- [7] A. Lezama, S. Barreiro, A. Lipsich, and A. M. Akulshin, “Coherent two-field spectroscopy of degenerate two-level systems,” 1999.
- [8] A. Lipsich, S. Barreiro, A. M. Akulshin, and A. Lezama, “Absorption spectra of driven degenerate two-level atomic systems,” 2000.
- [9] J. W. R. Tabosa, G. Chen, Z. Hu, R. B. Lee, and H. J. Kimble, “Nonlinear Spectroscopy of Cold Atoms in a Spontaneous-Force Optical Trap,” 1991.
- [10] D. Grison, B. Lounis, C. Salomon, J. Y. Courtois, and G. Grynberg, “Raman Spectroscopy of Cesium Atoms in a Laser Trap,” 1991.
- [11] M. Frometa, J. P. Lopez, and J. W. R. Tabosa, “Magnetically assisted optical gain in Zeeman degenerate two-level systems of cold atoms,” *Optics Communications*, vol. 433, pp. 111–114, Feb. 2019, doi: 10.1016/j.optcom.2018.10.006.
- [12] O. Kocharovskaya, Y. v Rostovtsev, and A. Imamoglu, “Inversionless amplification in the three-level atoms with and without a hidden inversion in reservoir,” 1998.
- [13] P. S. Bhatia, G. R. Welch, and M. O. Scully, “Laser amplification without population inversion on the D1 line of the Cs atom with semiconductor diode lasers,” 2001.
- [14] Y. Zhu and J. Lin, “Sub-Doppler light amplification in a coherently pumped atomic system,” 1996.

- [15] N. Mukherjee and C. K. N. Patel, “Electromagnetically induced gain in molecular systems,” *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, vol. 80, no. 6, Dec. 2009, doi: 10.1103/PhysRevA.80.063830.
- [16] H. Sun, H. Guo, S. Fan, Y. Bai, and D. Han, “Amplification without population inversion in a three-level Λ -type system with an external coherent magnetic field,” *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, vol. 335, no. 1, pp. 76–82, Jan. 2005, doi: 10.1016/j.physleta.2004.12.009.
- [17] E. E. Mikhailov, J. Evans, D. Budker, S. M. Rochester, and I. Novikova, “Four-wave mixing in a ring cavity,” 2014. [Online]. Available: <http://spiedl.org/terms>
- [18] R. F. Offer, J. W. C. Conway, E. Riis, S. Franke-Arnold, and A. S. Arnold, “Cavity-enhanced frequency up-conversion in rubidium vapour,” in *Optics InfoBase Conference Papers*, 2017, vol. Part F81-EQEC 2017. doi: 10.1364/ol.41.002177.
- [19] G. G. Padmabandu *et al.*, “Laser Oscillation without Population Inversion in a Sodium Atomic Beam,” 1996.
- [20] H. Wu, M. Xiao, and J. Gea-Banacloche, “Evidence of lasing without inversion in a hot rubidium vapor under electromagnetically-induced-transparency conditions,” *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, vol. 78, no. 4, Oct. 2008, doi: 10.1103/PhysRevA.78.041802.
- [21] “<https://www.infoescola.com/optica/laser/>.”
- [22] A. Einstein, “Strahlungs-emission und -absorption nach der Quantentheorie,” *Verhandlungender Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, 1916.
- [23] A. Einstein, “Zur Quantentheorie der Strahlung,” *Physikalische Zeitschrift*, 1917.
- [24] “<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1964/townes/biographical/>”.
- [25] “<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1964/basov/facts/>”.
- [26] “<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1964/prokhorov/facts/>”.
- [27] W. T. Silfvast, *Laser fundamentals*. Cambridge University Press, 2004.
- [28] M. Csele, *Fundamentals of light sources and lasers*. John Wiley & Sons, 2004. [Online]. Available: www.copyright.com.
- [29] D. A. Steck and D. Steck, “Cesium D Line Data,” 1998. [Online]. Available: <http://steck.us/alkalidata>,
- [30] C. J. Foot, *Atomic Physics*. Oxford University Press, 2005.
- [31] D. A. Steck, “Classical and Modern Optics,” 2021.

- [32] J. Weiner and P.-T. Ho, *Light-Matter Interaction*, vol. 1. John Wiley & sons publication, 2003.
- [33] T. W. Hänsch and A. L. Schawlow, “Cooling of gases by laser radiation,” 1975.
- [34] S. Chu, L. Hollberg, J. E. Bjorkholm, A. Cable, and A. Ashkin, “Three-dimensional viscous confinement and cooling of atoms of resonance radiation pressure,” 1985.
- [35] E. L. Raab, M. P. Prentiss, A. Cable, and S. Chu, “Trapping of Neutral Sodium Atoms with Radiation Pressure,” 1987.
- [36] A. L. Migdall, J. v Prodan, W. D. Phillips, T. H. Bergeman, and H. J. Metcalf, “First Observation of Magnetically Trapped Neutral Atoms,” 1985.
- [37] A. Ashkin and J. P. Gordon, “Stability of radiation-pressure particle traps: an optical Earnshaw theorem,” 1983.
- [38] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum optics*. Cambridge University Press, 1997.
- [39] R. Loudon, *The quantum theory of light*. Oxford University press, 2000.
- [40] M. F. FERNÁNDEZ, “Ganho ótico magneticamente assistido em um sistema de dois níveis com degenerescência Zeeman,” 2019.
- [41] F. C. D. de Moraes, “Construção e caracterização de um laser contínuo de titânio-safira,” São Paulo, 2013.
- [42] W. Nagourney, *Quantum electronics for atomic physics*. Oxford University Press, 2010.
- [43] A. Yariv, *Quantum electronics*. John Wiley & Sons, 1989.
- [44] A. Yariv, *Optical electronics*. Saunders College Pub, 1991.
- [45] G. C. Borba, S. Barreiro, L. Pruvost, D. Felinto, and J. W. R. Tabosa, “Narrow band amplification of light carrying orbital angular momentum,” *Optics Express*, vol. 24, no. 9, p. 10078, May 2016, doi: 10.1364/oe.24.010078.
- [46] J. C. De, A. Carvalho, A. D. M. de Lima, and J. W. R. Tabosa, “Lasing without inversion based on magnetically assisted gain in coherently prepared cold atoms,” 2022. [Online]. Available: <http://journals.aps.org/authors/new-novel-policy-physical-review>
- [47] J. P. Lopez, A. M. G. de Melo, and J. W. R. Tabosa, “Self-amplifying memory based on multiple cascading four-wave mixing via recoil-induced resonance,” *Opt. Lett*, 2020.

- [48] Y. Yan *et al.*, “High-capacity millimetre-wave communications with orbital angular momentum multiplexing,” *Nature Communications*, vol. 5, 2014, doi: 10.1038/ncomms5876.