



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

IGOR EDUARDO SANTOS DE MELO

**MODELAGEM MATEMÁTICA E ALGORITMOS HEURÍSTICOS PARA O  
PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE ÔNIBUS ESCOLARES ENVOLVENDO  
MÚLTIPLOS PERÍODOS**

Recife

2022

IGOR EDUARDO SANTOS DE MELO

**MODELAGEM MATEMÁTICA E ALGORITMOS HEURÍSTICOS PARA O  
PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE ÔNIBUS ESCOLARES ENVOLVENDO  
MÚLTIPLOS PERÍODOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia e Geociências, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Engenharia de Produção. Área de Concentração: Pesquisa Operacional

Orientador: Prof. Dr. Raphael Harry Frederico Ribeiro Kramer

Recife

2022

Catálogo na fonte:  
Sandra Maria Neri Santiago, CRB-4 / 1267

M528m Melo, Igor Eduardo Santos de.  
Modelagem matemática e algoritmos heurísticos para o problema de roteamento de ônibus escolares envolvendo múltiplos períodos / Igor Eduardo Santos de Melo. – 2022.  
115 f.: il., figs., tabs., abrev. e sigl.

Orientador: Prof. Dr. Raphael Harry Frederico Ribeiro Kramer.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, Recife, 2022.  
Inclui referências e apêndices.

1. Engenharia de produção. 2. Multi-Period School Bus Routing Problem. 3. Seleção das paradas de ônibus. 4. Geração das rotas. 5. Algoritmo heurístico. I. Kramer, Raphael Harry Frederico Ribeiro (Orientador). II. Título.

UFPE

658.5 CDD (22. ed.)

BCTG/2022-125

IGOR EDUARDO SANTOS DE MELO

**MODELAGEM MATEMÁTICA E ALGORITMOS HEURÍSTICOS PARA O  
PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE ÔNIBUS ESCOLARES ENVOLVENDO  
MÚLTIPLOS PERÍODOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia e Geociências, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Engenharia de Produção. Área de Concentração: Pesquisa Operacional

Aprovada em: 24/02/2022.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Raphael Harry Frederico Ribeiro Kramer (Orientador)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Profa. Dra. Isis Didier Lins (Examinadora Interna)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Anand Subramanian (Examinador Externo)  
Universidade Federal da Paraíba

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, que sempre esteve ao meu lado em todos os momentos, me proporcionando força para seguir em frente e alcançar meus objetivos.

Aos meus pais, por toda a luta e dedicação para me oferecer todo o suporte necessário para que eu pudesse alcançar as minhas metas. Agradecer também ao meu irmão Kelvin Everton, que mesmo distante fisicamente, sempre me ajudou e me apoiou durante toda a minha jornada.

Ao meu orientador, Raphael Kramer, por todos os conhecimentos transmitidos. A sua paciência, dedicação e todo o auxílio prestado me motivaram em todos os momentos, em especial nos mais difíceis.

A minha namorada Vitória Ricardo, por todo o companheirismo, paciência, estímulo e suporte. Sua presença física e digital foram fundamentais para esse momento.

Aos meus amigos de longa data Lucas Alencar e Lucas Cavalcante, que caminham comigo desde a graduação, por todos os momentos compartilhados e pelas boas e longas conversas.

A todos os colegas de mestrado, por todo o apoio e companheirismo.

Aos professores do PPGEP da UFPE que me transmitiram ensinamentos valiosos, em especial ao professor Sóstenes Lins.

Aos professores da UFAL que me incentivaram de diversas maneiras, em especial Victor Carvalho, Jonhatan Magno e Alline Thamyres.

A Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE) pela bolsa de estudos.

A todos que, de alguma maneira, ajudaram para o desenvolvimento desse trabalho.

## RESUMO

Esta dissertação aborda uma extensão do School Bus Routing Problem (SBRP), que engloba os subproblemas de localização de pontos de paradas de ônibus, alocação de estudantes aos pontos de parada selecionados e roteamento de ônibus envolvendo múltiplos períodos (*e.g.*, dias) e uma única escola, recentemente introduzido na literatura por Melo e Kramer (2021). O objetivo consiste em minimizar a distância total percorrida pela frota no conjunto de períodos analisados, atendendo às restrições de capacidade dos veículos e distância máxima que os alunos podem caminhar até as paradas. No contexto do Multi-Period School Bus Routing Problem (MP-SBRP), os estudantes que têm demandas de transporte para (ou de) uma escola em um subconjunto de períodos devem ser alocados à mesma parada nos períodos em que possuem demandas. Primeiramente, é apresentado um modelo matemático para o problema e, em seguida, é proposto um algoritmo baseado nas meta-heurísticas Iterated Local Search (ILS) e Variable Neighborhood Descent (VND), além de heurísticas de inserção e remoção de paradas considerando os múltiplos períodos, denominado de Iterated Local Search with Randomized Variable Neighborhood Descent and Remove (ILS-RVND-R). O algoritmo proposto foi executado para 95 instâncias do SBRP, propostas por Schittekat *et al.* (2013), e para 192 instâncias do MP-SBRP obtidas através de uma extensão das instâncias de Schittekat *et al.* (2013), mostrando-se capaz de obter um desempenho favorável e com um baixo custo computacional para ambos os problemas.

**Palavras-chave:** multi-period school bus routing problem; seleção das paradas de ônibus; geração das rotas; algoritmo heurístico.

## ABSTRACT

This dissertation addresses an extension to the School Bus Routing Problem (SBRP), which includes the subproblems of locating bus stops, students allocating to selected bus stops and routing of buses involving multiple periods (e.g., days) and a single school, introduced in the literature by Melo e Kramer (2021). The objective is to minimize the total distance traveled by the fleet in the set of periods, taking into account vehicle capacity constraint and the maximum distance which students can walk to the stops. In the context of Multi-Period School Bus Routing Problem (MP-SBRP), students who have transport demands to (or from) a school in a subset of periods must be allocated to the same stop in the periods in which they have demands. First, a mathematical model for the problem is presented, and then an algorithm based on the metaheuristics Iterated Local Search (ILS) and Variable Neighborhood Descent (VND) is proposed, as well as heuristics for insertion and removal of stops considering multiple periods, called Iterated Local Search with Randomized Variable Neighborhood Descent and Remove (ILS-RVND-R). The proposed algorithm was carried out on 95 instances of SBRP, proposed by Schittekat *et al.* (2013), and for 192 instances of MP-SBRP obtained by extending the instances of Schittekat *et al.* (2013), showing capable of obtaining a favorable performance and with a low computational effort for both problems.

**Keywords:** multi-period school bus routing problem; bus stop selection; route generation; heuristic algorithm.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação gráfica de uma heurística de refinamento e a importância de boas soluções iniciais . . . . .	24
Figura 2 – Resumo dos testes de ajuste de parâmetro através de gráficos linha-barras combinados . . . . .	44
Figura 3 – Exemplo da representação de uma rota $r$ . . . . .	50
Figura 4 – Exemplo de uma alocação para uma solução do SBRP . . . . .	50
Figura 5 – Exemplo de uma alocação para uma solução do MP-SBRP . . . . .	50
Figura 6 – Exemplo de Grafo para execução do Ford-Fulkerson . . . . .	56
Figura 7 – Exemplo de Grafo para execução do Ford-Fulkerson Parcial . . . . .	58
Figura 8 – Resumo dos testes de ajuste de parâmetro através de gráficos linha-barras combinados . . . . .	71
Figura 9 – Fluxograma dos procedimentos realizados na heurística proposta . . . . .	91
Figura 10 – Instâncias propostas por Schittekat <i>et al.</i> (2013) . . . . .	92

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Características do SBRP abordados na literatura . . . . .	29
Tabela 2 – Objetivos frequentemente utilizados no SBRP . . . . .	31
Tabela 3 – Descrição das notações utilizadas no modelo matemático . . . . .	42
Tabela 4 – Termos utilizados no detalhamento do algoritmo proposto (Continua) . . . . .	45
Tabela 5 – Parâmetros utilizados nas instâncias e seus respectivos intervalos . . . . .	69
Tabela 6 – Resultados obtidos com o ajuste dos parâmetros . . . . .	70
Tabela 7 – Resultados SBRP (Continua) . . . . .	73
Tabela 8 – Resultados MP-SBRP (Continua) . . . . .	78

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACO	Ant Colony Optimization
BI	Best Improvement
BiRD	Biobjective Routing Decomposition
CCP	Capacitated Clustering Problem
CECATE	Centro Colaborador de Apoio ao Transporte Escolar
CVRP	Capacitated Vehicle Routing Problem
DBSCAN	Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise
EDA	Estimation of Distribution Algorithm
FI	First Improvement
GA	Genetic Algorithm
GRASP	Greedy Randomized Adaptive Search Procedure
HAILS	Hybrid Adaptive Iterated Local Search
HILS	Hybrid Iterated Local Search
HS	Harmony Search
ILS	Iterated Local Search
ILS-RVND-R	Iterated Local Search with Randomized Variable Neighborhood Descent and Remove
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
JuMP	Julia for Mathematical Programming
LAR	Location-Allocation-Routing
LPAR	Location-Partial-Allocation-Routing
LRA	Location-Routing-Allocation
MEC	Ministério da Educação
MIP	Mixed Integer Programming
ML	Machine Learning
MP-SBRP	Multi-Period School Bus Routing Problem
MTZ	Miller-Tucker-Zemlin
NP-Hard	Non-deterministic Polynomial-time Hardness
OC	Otimização Combinatória
PDPTW	Pickup and Delivery Problem With Time Windows

PLI	Programação Linear Inteira
PM	Programação Matemática
PNATE	Programa Nacional de Apoio ao Transporte do Escolar
PS	Particle Swarm
PVRP	Periodic Vehicle Routing Problem
RRT	Record-to-Record Travel
RVND	Variable Neighborhood Descent with Random neighborhood ordering
SA	Simulated Annealing
SBRP	School Bus Routing Problem
SCP	Set Covering Problem
SS	Scatter Search
SPP	Set Partitioning Problem
STSP	School Time Selecting Problem
TS	Tabu Search
TSP	Traveling Salesman Problem
VND	Variable Neighborhood Descent
VNS	Variable Neighborhood Search
VRP	Vehicle Routing Problem

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>13</b>
<b>1.1</b>	<b>Justificativa</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivos</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>1.2.1</b>	<i>Objetivo geral</i> . . . . .	<b>19</b>
<b>1.2.2</b>	<i>Objetivos específicos</i> . . . . .	<b>19</b>
<b>1.3</b>	<b>Organização da dissertação</b> . . . . .	<b>20</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO DA LITERATURA</b> . . .	<b>21</b>
<b>2.1</b>	<b>Heurísticas</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>2.1.1</b>	<i>Definição</i> . . . . .	<b>22</b>
<b>2.1.2</b>	<i>Classificação</i> . . . . .	<b>22</b>
<b>2.1.3</b>	<i>Avanços na área</i> . . . . .	<b>24</b>
<b>2.2</b>	<b>School Bus Routing Problem</b> . . . . .	<b>26</b>
<b>2.2.1</b>	<i>Proposição e evolução do problema</i> . . . . .	<b>27</b>
<b>2.2.2</b>	<i>Revisão da literatura</i> . . . . .	<b>32</b>
<b>3</b>	<b>DESCRIÇÃO DO PROBLEMA</b> . . . . .	<b>41</b>
<b>4</b>	<b>ALGORITMO PROPOSTO</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>4.1</b>	<b>Termos Utilizados</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>4.2</b>	<b>Heurística para o MP-SBRP</b> . . . . .	<b>46</b>
<b>4.3</b>	<b>Representação da Solução</b> . . . . .	<b>49</b>
<b>4.4</b>	<b>Geração da Solução Inicial</b> . . . . .	<b>50</b>
<b>4.4.1</b>	<i>Location-Routing-Allocation</i> . . . . .	<b>51</b>
<b>4.4.2</b>	<i>Particionamento das rotas</i> . . . . .	<b>53</b>
<b>4.4.3</b>	<i>Location-Allocation-Routing</i> . . . . .	<b>54</b>
<b>4.5</b>	<b>Algoritmos para alocação de estudantes</b> . . . . .	<b>56</b>
<b>4.5.1</b>	<i>Algoritmo Ford-Fulkerson</i> . . . . .	<b>56</b>
<b>4.5.2</b>	<i>Algoritmo Ford-Fulkerson Parcial</i> . . . . .	<b>57</b>
<b>4.5.3</b>	<i>Alocação Gulosa</i> . . . . .	<b>58</b>
<b>4.6</b>	<b>Heurística de Busca Local</b> . . . . .	<b>59</b>
<b>4.6.1</b>	<i>Operadores Intra-rota</i> . . . . .	<b>61</b>
<b>4.6.2</b>	<i>Operadores Inter-rotas</i> . . . . .	<b>61</b>

4.7	<i>Iterated Local Search (ILS)</i> . . . . .	62
4.7.1	<i>Operadores de perturbação</i> . . . . .	62
4.7.2	<i>Destroy-and-Repair</i> . . . . .	62
4.7.3	<i>Heurística de inserção de paradas - MP-SBRP</i> . . . . .	64
4.7.4	<i>Limiar de Aceitação</i> . . . . .	64
4.8	<b>Heurística de remoção de paradas - MP-SBRP</b> . . . . .	65
5	<b>RESULTADOS</b> . . . . .	68
5.1	<b>Geração das instâncias para o MP-SBRP</b> . . . . .	68
5.2	<b>Ajuste dos parâmetros do algoritmo</b> . . . . .	69
5.3	<b>Resultados para o SBRP</b> . . . . .	72
5.4	<b>Resultados para o MP-SBRP</b> . . . . .	76
6	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b> . . . . .	85
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	87
	<b>APÊNDICE A – FLUXOGRAMA DA HEURÍSTICA PROPOSTA</b> . . .	91
	<b>APÊNDICE B – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS INSTÂNCIAS</b> . .	92

## 1 INTRODUÇÃO

A educação básica é um direito de todos e está garantida pela Constituição Federal Brasileira de 1988 em seu Capítulo III, que trata da educação, da cultura e do desporto. Entretanto, além da garantia da educação, é preciso fornecer também o apoio necessário para que os estudantes tenham acesso e condições de permanecer usufruindo de tal direito. A Constituição Federal assegura este suporte, conforme disposto ainda no Art. 208, inciso VII, o qual afirma que a Federação deve prover atendimento ao educando em todas as etapas que formam a educação básica nacional, por meio de programas de apoio de material escolar, transporte, alimentação e assistência à saúde do aluno (BRASIL, 1988).

Em conjunto aos direitos presentes na Constituição Federal, a Lei Nº 9.394 estabelece as diretrizes e bases da educação nacional (BRASIL, 1996). Nesta lei, acrescida em 2003 pela Lei Nº 10.709 está disposta a responsabilidade dos estados e municípios de assumir o transporte escolar para os alunos da rede pública estadual e municipal e o dever do estado em planejar junto aos municípios o provimento do transporte, a fim de colocar em prática o que está disposto em lei (BRASIL, 2003).

De acordo com o Censo de Educação Básica de 2020, havia cerca de 47,3 milhões de estudantes devidamente matriculados no sistema brasileiro de educação básica – o que abrange desde o 1º ano do ensino fundamental até o 3º ano do ensino médio, sendo aproximadamente 82% usuários da rede pública de ensino, seja ela municipal, estadual ou federal (INEP, 2021). O quantitativo reflete a grandiosidade do país, evidenciando o desafio que o poder público, em suas três esferas, possui em gerenciar os seus recursos, de tal forma que consiga garantir os direitos dos estudantes.

Vale destacar a educação de nível superior, que possui um quantitativo menor, porém ainda expressivo. Segundo dados expostos no Censo da Educação Superior (INEP, 2020), o Brasil possui aproximadamente 8,6 milhões de estudantes devidamente matriculados em instituições de ensino superior, sendo cerca de 24,2% dos alunos vinculados à rede pública. O município pode fornecer o transporte aos estudantes do ensino superior com os veículos adquiridos pela União, sem que haja prejuízo no fornecimento desse recurso à educação básica. Porém, o Projeto de Lei 4.031 (BRASIL, 2020b), visa ampliar esse direito a mais estudantes, possibilitando a utilização de veículos da própria prefeitura, tornando o gerenciamento do serviço de transporte menos complexo para a administração municipal.

Em busca de atender os direitos supracitados, perante a realidade vigente da nação, há

políticas públicas na esfera federal que auxiliam os estados e municípios. Neste sentido é possível citar o Programa Caminho da Escola e o Programa Nacional de Apoio ao Transporte do Escolar (PNATE), que fornecem subsídios para adquirir e manter a frota escolar funcionando. Vale destacar ainda a criação do Centro Colaborador de Apoio ao Transporte Escolar (CECATE), que foi idealizado como um suporte para as esferas municipais e estaduais, fornecendo capacitações aos gestores públicos para o aperfeiçoamento da aplicação dos programas supracitados em seus respectivos estados e municípios.

Com base nestes programas os estados e municípios possuem os subsídios para realizar o transporte dos estudantes até as suas devidas instituições de ensino. A prestação desse serviço de transporte ocorre frequentemente por meio da disponibilização dos veículos adquiridos pelos recursos da união (ônibus, em sua grande maioria) que partem de um local pré-definido (*e.g.*, garagem ou instituição de ensino) e visitam um conjunto de pontos também previamente determinados (*e.g.*, pontos de ônibus ou casas dos estudantes), realizando o transporte até a(s) instituição(ões) de ensino correspondente(s). Neste contexto, além do número de estudantes e do tamanho da frota, deve-se considerar também questões relacionadas a distância dos alunos até a instituição de ensino ou parada de ônibus, tempo de permanência dos estudantes no veículo, horário de chegada na instituição de ensino, frequência e acessibilidade do estudante, entre outras.

Para além do já exposto, os gestores públicos responsáveis pelas decisões que permeiam o transporte escolar possuem problemáticas que merecem atenção, sendo algumas delas: roteamento dos ônibus escolares, escolha dos pontos de paradas (localização ou seleção), ajuste das janelas de tempo, entre outros. No contexto atual da pandemia do Coronavírus, agregam-se às problemáticas anteriores o planejamento do retorno dos discentes, que precisam ter um ambiente controlado e seguro. Para garantir estes aspectos, o Ministério da Educação (MEC) através da portaria nº 1.096 (BRASIL, 2020a), juntamente com portarias estaduais e municipais, estabelecem os protocolos de biossegurança.

Dentro do conjunto de atividades recomendadas pelos protocolos, estão as recomendações voltadas ao transporte escolar, sendo algumas delas: a diminuição da capacidade dos veículos, a higienização da frota e o distanciamento social entre os estudantes. Importante destacar também a adesão ao ensino híbrido como uma possível estratégia de retorno. Para este caso é necessário que em cada dia letivo apenas um subconjunto de estudantes assistam as aulas presencialmente, reduzindo a ocupação das salas e, também, do transporte escolar. Essa característica se repete no

ensino superior, no qual em cada período considerado apenas um subconjunto de estudantes se deslocam para suas universidades.

Vale frisar, no entanto, que a problemática em questão não está limitada à gestão pública, podendo ser enfrentada também por empresas privadas que possuem, por exemplo, frota de veículos para o transporte de funcionários de suas residências, ou pontos de embarque, para às unidades de trabalho e vice-versa.

Para ambos os contextos, o(s) decisor(es) se depara(m) com uma variação do problema de roteamento de veículos, sendo necessário atender a demanda dos usuários pelo transporte, os quais podem precisar se deslocar diariamente ou somente em determinados períodos. Dado o exposto, o questionamento que motiva a pesquisa é: **como determinar as rotas dos veículos com o objetivo de minimizar os custos associados com à distância total percorrida, de tal forma que os usuários possam utilizar do serviço nos períodos em que há demanda pelo transporte, se deslocando para uma parada acessível e fixa?**

## 1.1 Justificativa

Dada a grande quantidade de variáveis envolvidas na gestão do transporte escolar, a Otimização Combinatória (OC) pode auxiliar na tomada de decisão, modelando e solucionando os problemas reais, favorecendo a utilização eficiente dos recursos disponíveis e garantindo a qualidade do serviço perante critérios/restrições importantes para os usuários ou decisor desse serviço. Neste contexto, surge o Problema do Roteamento de Ônibus Escolares, denominado na literatura como SBRP.

O nome do problema deixa explícito que se trata da problemática de roteamento de veículos, aplicada ao contexto de ônibus escolares. Entretanto, os modelos do SBRP não se limitam ao problema de definição das rotas a serem realizadas, há outros problemas que precisam ser solucionados, seja em sequência ou em conjunto, como apresentado nos trabalhos de Park e Kim (2010) e Ellegood *et al.* (2020). Por exemplo, Schittekat *et al.* (2013) aborda o problema de roteamento e seleção de pontos de parada, sendo esta última problemática responsável por escolher dentre um conjunto de possíveis paradas quais as que deverão ser visitadas, assim como a alocação dos estudantes as mesmas.

Mesmo havendo outros subproblemas correlatos, em sua origem o SBRP foi tratado como uma aplicação do *Vehicle Routing Problem* (VRP) no trabalho de Newton e Thomas (1969). Assim, pode-se afirmar que o problema mais simples do SBRP se trata de uma aplicação prática

do VRP, onde se procura encontrar rotas que contenham os pontos de paradas de ônibus em que estão alocados os estudantes, respeitando restrições como de capacidades dos ônibus ou de tempo máximo de permanência do aluno no veículo designado.

Por outro lado, quando há somente um ônibus para determinação de sua rota, o caso mais simplificado de um VRP, o problema se torna o conhecido *Traveling Salesman Problem (TSP)*, sendo necessário determinar a rota de visita as paradas de ônibus por meio de um único veículo. Portanto, conclui-se que o SBRP em seu modelo mais trivial é semelhante a resolução de um TSP aplicado ao contexto de ônibus escolares, podendo conter objetivos e restrições clássicas desse problema, como a minimização da distância total percorrida pelos veículos.

O SBRP, assim como o TSP e VRP, é um problema de natureza combinatória, ou seja, decisões devem ser tomadas para solucioná-lo, cada uma delas baseada em um conjunto discreto de possibilidades. Portanto, a combinação de várias decisões constitui uma solução final, sendo o conjunto de todas as possíveis soluções denominada de espaço de soluções. Dentro do espaço de soluções, a depender do objetivo do problema, haverá uma solução ótima ou um conjunto de soluções ótimas, isto é, soluções que retornam o melhor valor (máximo ou mínimo) da função objetivo.

Os problemas desta natureza, devido a sua característica combinatória, costumam possuir um espaço de soluções de difícil enumeração exaustiva, tornando inviável a utilização dessa abordagem para encontrar uma solução ótima na grande maioria dos casos, dado que o número de possíveis soluções cresce exponencialmente com o número de decisões a serem tomadas. Dessa forma, resolver problemas combinatórios de maneira eficiente requer o conhecimento e aplicação de técnicas específicas de otimização, como por exemplo, técnicas de Programação Matemática (PM) e/ou heurísticas.

O TSP, em particular, é classificado como um problema NP-Difícil (KARP, 1972). Em outras palavras, não é possível encontrar uma solução garantidamente ótima de maneira determinística para o problema em tempo polinomial, sendo o tempo necessário regido por outro tipo de função, podendo ser exponencial ou fatorial, por exemplo. Essa característica faz com que as instâncias do TSP necessitem de grande esforço computacional para a resolução ótima, exigindo um tempo de execução inviável em diversos exemplos reais.

Sendo o SBRP uma generalização do TSP, pode-se afirmar que todos os problemas que envolvem o SBRP são tão difíceis quanto os problemas relacionados ao TSP, portanto o SBRP é um problema NP-Difícil, sendo de complexa resolução. Sendo assim, cabe ao analista,

responsável por modelar e fornecer uma solução ao problema, decidir qual abordagem melhor se adequa aos recursos disponíveis, seja ela a exata ou a heurística, sendo preferivelmente indicado a utilização da abordagem exata quando possível.

A preferência pela utilização dos métodos exatos se deve à capacidade de encontrar a solução ótima, ou o conjunto de soluções ótimas para o problema. Porém, utilizar a abordagem de enumeração exaustiva se torna inviável até mesmo para pequenas instâncias. Como exemplo, para o TSP, a quantidade de possíveis soluções para o problema simétrico ( $d_{ij} = d_{ji}$ ) é dada pela expressão  $\frac{(n-1)!}{2}$ . Dessa maneira, uma instância do TSP com 20 cidades precisaria de cerca de 19 anos para encontrar a solução ótima por meio da enumeração exaustiva, segundo Souza (2011), considerando um computador capaz de avaliar uma rota a cada  $10^{-8}$  segundos.

Utilizar os denominados métodos de enumeração inteligentes (*e.g.*, *branch-and-bound* e *branch-and-cut*) é mais interessante para problemas maiores, uma vez que são capazes de diminuir o número de soluções a serem analisadas dentro do espaço de soluções viáveis. Entretanto, ainda como afirma Souza (2011), a natureza combinatória dos problemas poderá impor, no pior dos casos, a análise de todo o espaço de soluções. Nesse contexto, pode-se abrir mão da necessidade de encontrar a solução ótima e buscar, dentro do espaço de soluções viáveis, por soluções que sejam próximas ou tão boas quanto as ótimas, aplicando para isso as técnicas heurísticas.

As heurísticas são também abordagem inteligentes, denominadas por Semaan *et al.* (2020) como atalhos mentais para resolução de problemas do dia a dia. O objetivo das heurísticas é fornecer uma solução viável para o problema, apoiado para tanto por algoritmos que utilizarão um esforço computacional considerado aceitável (GOLDBARG *et al.*, 2016). Pode-se optar pela utilização das heurísticas na resolução de problemas combinatórios para os casos em que se deseja economizar os recursos disponíveis, ou quando os recursos não são suficientes (SEMAAN *et al.*, 2020). Entretanto, a utilização dessas abordagens não garante a otimalidade da solução, sendo uma solução heurística denominada como “eventualmente ótima”.

Mesmo diante dessa incerteza, as heurísticas são amplamente aplicadas para resolução de problemas combinatórios, não sendo diferente na resolução de problemas de roteamento abordados na literatura. Nas revisões realizadas por Park e Kim (2010) e Ellegood *et al.* (2020), diversos são os trabalhos que abordam o SBRP através de heurísticas, sejam as clássicas (específicas para o problema) ou as meta-heurísticas (abordagem inteligentes mais flexíveis, sendo de possível aplicação a diversos problemas), caracterizando como a abordagem mais

preferível para percorrer o espaço de soluções, dada a complexidade atrelada ao problema tratado.

Assim, pode-se perceber a importância da aplicação de heurísticas para resolução do SBRP, sejam quais forem as características do problema e o seu objetivo final. Acerca das características, pode-se ter problemas com uma ou múltiplas escolas, frota homogênea ou heterogênea, carregamento misto ou não misto. Já acerca dos objetivos é possível buscar a minimização do número de ônibus necessários, minimização da distância total percorrida, minimização do custo total, maximização da utilização da capacidade disponível, entre outros (PARK; KIM, 2010; ELLEGOOD *et al.*, 2020).

Devido ao tamanho do problema, diversas podem ser as características vinculadas, além das supracitadas, inclusive características semelhantes às do VRP e TSP. Esses dois já são problemas bem explorados na literatura, ao contrário do SBRP que possui problemáticas ainda a serem abordadas, como apresentado nos trabalhos de Park e Kim (2010) e Ellegood *et al.* (2020).

Uma das abordagens, já conhecidas no VRP e TSP, é a abordagem periódica, sendo esta abordagem chamada de *Periodic Vehicle Routing Problem* (PVRP). O PVRP se distingue do caso básico por considerar múltiplos períodos de tempo, como dias, semanas ou meses. Essa variante do VRP vem sendo estudada desde meados da década de 1970, tendo sua primeira publicação realizada por Beltrami e Bodin (1974) no contexto de coleta de resíduos.

Desde de que foi proposto, o PVRP tem sido explorado em diversas aplicações. Porém, para o contexto do SBRP, a abordagem é caracterizada como um *gap* na literatura, a qual pode ter grande utilidade em explorar possíveis economias na utilização de rotas periódicas heterogêneas. Um exemplo de aplicação se dá na utilização de ônibus escolares para o transporte de estudantes do nível superior, os quais possuem autonomia na escolha da grade curricular cursada, flexibilizando os dias necessários de presença na instituição de ensino.

Outro exemplo se dá no contexto de pandemia, mais especificamente na utilização do ensino híbrido. Este tipo de ensino permite também a flexibilização da frequência dos estudantes nas suas respectivas instituições de ensino, alternando entre atividades presenciais e atividades online. A não utilização do transporte escolar por um grupo de alunos em um conjunto de períodos tem o potencial de diminuir a quantidade de paradas visitadas e, como consequência, diminuir a distância total percorrida, diminuindo assim os custos de transporte.

A redução dos custos de deslocamento implica na redução de custos com combustível e, conseqüentemente, na redução da emissão de gases poluentes na atmosfera, como o CO<sub>2</sub>. Do

ponto de vista social, a abordagem pode aumentar a qualidade de vida dos cidadãos e estudantes (e.g., beneficia a acessibilidade de estudantes às escolas e, para os períodos em que os ônibus não precisam visitar determinadas regiões, pode haver uma potencial diminuição do tráfego de veículos na via e diminuição da poluição sonora).

Dessa forma, o presente trabalho irá focar no estudo do problema de roteamento de ônibus escolares, considerando múltiplos períodos (dias), com o objetivo de minimizar a distância total percorrida pelos ônibus. Será proposto um modelo matemático para resolução do problema, assim como algoritmos heurísticos para sua resolução, sendo tais algoritmos uma alternativa para resolução de problemas reais de grande escala.

## **1.2 Objetivos**

A seguir são apresentados o objetivo geral e os objetivos específicos desta dissertação.

### **1.2.1 *Objetivo geral***

O objetivo principal deste trabalho consiste em modelar o MP-SBRP, englobando os subproblemas de seleção das paradas de ônibus, alocação de estudantes e geração das rotas, como um problema de Programação Linear Inteira (PLI) e propor algoritmos heurísticos para a resolução do mesmo.

### **1.2.2 *Objetivos específicos***

Os objetivos específicos são os seguintes:

- Apresentar um modelo matemático para o MP-SBRP;
- Definir e apresentar uma heurística construtiva para obtenção da solução inicial do problema;
- Definir e apresentar uma heurística para refinar a solução inicial, em busca de uma solução melhor;
- Examinar diferentes operadores de vizinhança, buscando melhorar a performance do algoritmo em encontrar boas soluções;
- Implementar e testar o algoritmo em uma base de dados real ou sintética;
- Analisar a eficiência do algoritmo.

### 1.3 Organização da dissertação

Além desta seção introdutória, a dissertação possui mais 5 seções, cujos conteúdos são descritos abaixo:

- **Seção 2** dispõe a fundamentação teórica e a revisão da literatura, incluindo: definição, classificação e avanços na área de heurísticas; definição, evolução e características do SBRP; revisão de trabalhos sobre o tema.
- **Seção 3** define o MP-SBRP através de um grafo orientado, apresentando o modelo matemático para o problema tratado.
- **Seção 4** apresenta o algoritmo heurístico proposto para a resolução do problema.
- **Seção 5** reporta os experimentos computacionais realizados e os resultados obtidos, comparando-os com os já publicados na literatura.
- **Seção 6** apresenta a conclusão do trabalho, comentando sobre as contribuições e limitações encontrada. Ainda nesse capítulo é apresentado também direcionamentos para trabalhos futuros.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO DA LITERATURA

Nesta seção inicialmente será apresentado um breve referencial teórico acerca dos conceitos relacionados a heurísticas, desde sua definição até os termos comumente utilizados. Sucessivamente, serão apresentados o referencial teórico e a revisão da literatura acerca do SBRP, apresentando as problemáticas abordadas, os objetivos propostos e os resultados obtidos em pesquisas anteriores.

### 2.1 Heurísticas

A solução ótima para problemas de otimização é desejada pelos analistas/gestores responsáveis por gerir uma operação, na tentativa de utilizar da melhor forma possível os recursos disponíveis pela organização e alcançar o melhor resultado com os mesmos. Entretanto, alguns dos problemas reais são um desafio na área de otimização devido à dificuldade em se encontrar a solução ótima, sendo um conjunto desses problemas classificados como *Non-deterministic Polynomial-time Hardness* (NP-Hard).

Nos problemas NP-Difíceis o tempo requerido para encontrar a solução exata cresce de maneira não-linear à medida que o número de variáveis consideradas aumenta. Segundo Goldberg *et al.* (2016), a depender da quantidade de variáveis e dados envolvidos em um problema de otimização NP-Difícil, será exigida uma grande quantidade de tempo e memória computacional para sua resolução, tornando proibitiva a busca pela solução ótima em algumas instâncias (*e.g.*, casos reais de médio ou grande porte), devido às limitações computacionais.

Portanto, a utilização de métodos exatos (*i.e.*, aqueles que garantem a otimalidade das soluções) é restrita a um conjunto de instâncias que possuam poucas variáveis e dados envolvidos (*e.g.*, casos reais de pequeno porte), o que permite a aplicação de uma abordagem exaustiva, enumerando-se todas as soluções viáveis, avaliando-as e encontrando o ótimo global em um tempo computacional aceitável (BURKE; KENDALL, 2014).

Outra maneira de se explorar o espaço de soluções é através dos métodos de enumeração inteligentes (*e.g.*, *branch-and-bound* e *branch-and-cut*) que conseguem identificar e descartar conjuntos de soluções não promissoras, explorando apenas uma fração do espaço total de soluções. Entretanto, até mesmo essas abordagens estão sujeitas, no pior cenário, à necessidade de avaliar todo o espaço de soluções em busca da solução ótima do problema (SOUZA, 2011).

Diante das limitações encontradas, esforços foram empregados nas últimas décadas para

o desenvolvimento e aperfeiçoamento de algoritmos heurísticos que pudessem encontrar boas soluções para grandes instâncias de problemas NP-Difíceis de maneira eficiente (GOLDBARG *et al.*, 2016). Essas soluções podem ser eventualmente as ótimas, mas não há garantia da otimalidade. Por outro lado, o tempo de busca é muito mais eficiente, pois apenas uma parcela promissora do espaço de soluções é explorada.

### 2.1.1 Definição

Formalmente, heurísticas são definidas como *frameworks* capazes de retornar boas soluções em tempo computacional aceitável, sem garantir a otimalidade da solução (SEMAAN *et al.*, 2020). Informalmente, Semaan *et al.* (2020), também descrevem heurísticas como atalhos mentais utilizados diariamente pelo cérebro humano na resolução de problemas comuns que precisam de uma solução satisfatória e não necessariamente um ótimo global.

Vale ressaltar que as heurísticas também não garantem o quão próximo da solução ótima está a solução retornada, diferente dos algoritmos aproximativos que conseguem delimitar uma região de proximidade da solução encontrada para solução ótima do problema (GOMES; WILLIAMS, 2014). Sendo assim, é comum avaliar a qualidade ou eficiência de um algoritmo heurístico através da comparação das soluções obtidas com soluções encontradas por algoritmos anteriores (exatos ou heurísticos). Para problemas resolvidos pela primeira vez, tal comparação pode ser feita com a solução obtida pela resolução do modelo matemático impondo um tempo limite de execução, ou pela solução relaxada do modelo matemático.

### 2.1.2 Classificação

As heurísticas podem ser classificadas em dois grupos: heurísticas construtivas e de refinamento. Ambas frequentemente são utilizadas de maneira sequencial, aplicando-se inicialmente a heurística construtiva e, por fim, a heurística de refinamento.

As heurísticas construtivas são responsáveis por fornecer uma solução inicial (*i.e.*, viável) para o problema abordado, construindo a mesma de elemento por elemento (BURKE; KENDALL, 2014), ou seja, tomando uma decisão a cada iteração e adicionando o elemento selecionado à solução. A maneira na qual os elementos serão selecionados para formar uma solução dependerá do procedimento utilizado, podendo ser feito de maneira gulosa – determinando o melhor dos elementos sem se preocupar com as consequências nas decisões futuras – ou aleatória, por exemplo (SOUZA, 2011).

Já as heurísticas de refinamento são responsáveis por explorar a vizinhança da solução inicial ou corrente do problema, na tentativa de substituí-la por outra solução – baseado em uma função de avaliação (BURKE; KENDALL, 2014). De uma maneira informal, uma heurística de refinamento se trata de um método capaz de alterar componentes de uma dada solução com a finalidade de se obter um conjunto de soluções de características similares. Essas alterações (também chamadas de movimentos) são responsáveis por explorar o espaço de soluções nas proximidades da solução atual, o qual é denominado de vizinhança.

Seja  $S$  o conjunto que representa o espaço de soluções de um problema de otimização e  $f(\cdot)$  sua função de avaliação. Depois de executar o algoritmo construtivo, obtém-se uma solução  $s \in S$ . A solução  $s$  é vinculada a uma vizinhança denominada  $N(s)$ , que pode ser definida como um conjunto de soluções pertencentes a  $S$  que podem ser obtidas por meio da realização de um ou mais movimentos/modificações na solução corrente  $s$ , podendo-se representar uma solução vizinha  $s'$  pela operação  $s' \leftarrow s \oplus m$ , sendo  $m$  a modificação/movimento realizada na solução  $s$  (SOUZA, 2011).

Em outras palavras, vizinhança é todo o conjunto de soluções que pode ser obtido a partir da solução corrente aplicando algum operador de vizinhança, responsável por modificar a solução atual através da modificação/alteração dos elementos que a compõe. As heurísticas de refinamento irão tentar, a partir da utilização dos operadores de vizinhança, melhorar a solução atual explorando a vizinhança da mesma. Segundo Burke e Kendall (2014), é comum que as heurísticas de refinamento utilizem como ponto de partida a solução retornada por alguma heurística construtiva.

A escolha da solução vizinha para substituir a solução corrente pode ocorrer por meio de diferentes técnicas, sendo exemplos o *Best Improvement* (BI) e o *First Improvement* (FI). No BI todo o conjunto  $N(s)$  é analisado e a melhor solução vizinha é escolhida caso represente uma melhora na função de avaliação. Por outro lado, no FI não é necessário realizar a análise exaustiva do conjunto  $N(s)$ , pois a análise é interrompida assim que uma solução vizinha com melhora na função de avaliação é encontrada. Outras técnicas de busca local podem ser encontradas no trabalho de Souza (2011).

O funcionamento de uma heurística pode ser visualizado na Figura 1. Nela, para cada solução do problema há um custo associado, traçando-se dessa forma um gráfico com todas as soluções possíveis. Após a aplicação de uma heurística construtiva, uma solução  $s$  (primeira à esquerda) é obtida, a partir dessa solução  $s$  uma heurística de busca local explora a vizinhança

(*i.e.*, soluções na proximidade) e encontrada um ótimo local  $s'$  (primeira à esquerda). Caso a vizinhança não consiga encontrar soluções melhores (*e.g.*, devido a uma limitação de vizinhança), a heurística retorna o ótimo local como uma solução ao problema. Esse procedimento pode ser novamente repetido, e outros ótimos locais podem ser encontrados (eventualmente a solução ótima  $s^*$ ).

Figura 1 – Representação gráfica de uma heurística de refinamento e a importância de boas soluções iniciais



Fonte: O autor (2022)

### 2.1.3 Avanços na área

O campo de estudo envolvendo heurísticas é vasto, e com o passar dos anos vem demonstrando avanços e conseguindo superar as limitações das heurísticas tradicionais. Um dos avanços obtidos foi o surgimento das meta-heurísticas, métodos heurísticos gerais com a capacidade de adaptação para diferentes problemas. Souza (2011) as definem como procedimentos inteligentes de busca de soluções (semelhantes às heurísticas convencionais) que conseguem ser adaptados de maneira fácil a diversos problemas, sendo mais eficientes no procedimento de busca por terem mecanismos capazes de evitar a estagnação em ótimos locais.

Pode-se entender uma meta-heurística também como uma grande estratégia, composta por estratégias menores (*i.e.*, heurísticas). Suas duas principais características (intensificação e diversificação) conseguem obter uma flexibilidade no método de busca, e são frequentemente baseadas em fenômenos naturais. Exemplos deles são fenômenos: físicos, químicos, biológicos, sociais, entre outros (GOLDBARG *et al.*, 2016).

É possível classificar as meta-heurísticas de diferentes maneiras, como por exemplo pela

arquitetura ou pela vizinhança empregada. Uma forma de se classificar as meta-heurísticas é apresentada por Goldberg *et al.* (2016) em função das estruturas de vizinhança utilizadas:

- Métodos de estrutura de vizinhança fixa são os algoritmos nos quais a estrutura de vizinhança não sofre alterações ao longo da execução da busca. Exemplos são: *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure* (GRASP) e *Simulated Annealing* (SA).
- Métodos com estrutura de vizinhança flexível são algoritmos nos quais a estrutura de vizinhança pode ser alterada, de forma pouco sistemática ou de maneira aleatória. Exemplos são: *Tabu Search* (TS) e *Scatter Search* (SS).
- Métodos com estrutura de vizinhança variável são algoritmos capazes de explorar diferentes estruturas de vizinhança de maneira sistemática, como por exemplo a *Variable Neighborhood Search* (VNS).

As heurísticas também podem ser divididas em duas outras categorias, baseado no princípio utilizado para explorar o espaço de soluções, sendo elas: busca local e populacional (SOUZA, 2011). Nas heurísticas de busca local a exploração do espaço de soluções é realizada através de movimentos aplicados na solução corrente (*e.g.*, *Tabu Search*, *Simulated Annealing*, *Variable Neighborhood Search*). Por outro lado, nas heurísticas de busca populacional o espaço é explorado através da combinação de um conjunto de soluções mantido pelos algoritmos (*e.g.*, *Genetic Algorithm*, *Ant Colony Optimization*).

As meta-heurísticas mais utilizadas para resolução dos problemas de SBRP, segundo o levantamento realizado por Ellegood *et al.* (2020), são: *Genetic Algorithm* (GA), *Ant Colony Optimization* (ACO), TS, GRASP, SA, ILS, *Harmony Search* (HS), VNS, VND, SS, *Particle Swarm* (PS) e *Estimation of Distribution Algorithm* (EDA).

Recentemente surgiram estudos que integram as meta-heurísticas com técnicas de programação matemática, essas metodologias são denominadas de *matheuristics* (BURKE; KENDALL, 2014). Um exemplo é realizado no trabalho de Calvete *et al.* (2020) que propõe uma heurística para resolução do SBRP considerando as problemáticas de seleção de paradas de ônibus e roteirização, na qual o modelo exato é executado para selecionar as paradas que serão visitadas, alocando os estudantes as paradas e depois aos respectivos ônibus escolares.

Outra integração abordada na literatura é a utilização das técnicas de *Machine Learning* (ML) em conjunto com meta-heurísticas, que tem por objetivo de melhorar a qualidade das soluções obtidas, a taxa de convergência do algoritmo e sua robustez, sendo utilizada para, *e.g.*, seleção de algoritmos heurísticos, ajuste dos parâmetros de entrada, avaliação de aptidão

dos resultados, entre outros (KARIMI-MAMAGHAN *et al.*, 2022). Um exemplo da aplicação de MLs no problema de SBRP é abordado por Ren *et al.* (2019), onde os autores integram a heurística proposta uma etapa de *clustering* baseado no *k-means* e no *Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise* (DBSCAN) para determinar a quantidade mínima e a localização dos pontos de ônibus para atender os estudantes, incorporando à heurística um conhecimento útil e já pertencente aos dados de entrada.

Além das integrações mencionadas, estratégias de adaptação também podem ser aplicadas em algoritmos heurísticos, atualizando-se os parâmetros de *input* de maneira dinâmica com a finalidade de adaptar o algoritmo a diferentes instâncias, melhorando a taxa de convergência e a capacidade de retornar soluções de boa qualidade. O trabalho de Máximo e Nascimento (2021) propõe um algoritmo denominado *Hybrid Adaptive Iterated Local Search* (HAILS) para o CVRP, o qual controla o grau de perturbação da solução através do custo obtido após a aplicação do operador de perturbação e busca local, utilizando-se a distância entre a solução atual e a solução de referência para determinar este grau.

Para mais detalhes sobre heurísticas, meta-heurísticas e outros termos associados a área de estudo é possível consultar os trabalhos de Burke e Kendall (2014); Goldberg *et al.* (2016) e Gendreau e Potvin (2018).

## 2.2 School Bus Routing Problem

O problema de roteamento de ônibus escolares (do inglês, *School Bus Routing Problem*, SBRP) é um problema combinatório classificado como NP-Difícil. Trata-se de uma problemática com um viés prático muito forte, presente na rotina dos estudantes espalhados pelo mundo (MIRANDA *et al.*, 2021). A disponibilização desse serviço é um dever que o poder público tem com os seus cidadãos, sendo este um desafio enfrentado em conjunto pelos governantes e pelas escolas (HOU *et al.*, 2020).

A flutuação anual da demanda por este serviço, devido ao fluxo natural de entrada e saída dos estudantes de suas respectivas escolas, faz com que o planejamento e operacionalização seja um problema recorrente para os gestores e analistas responsáveis (MOHANDAS *et al.*, 2021). Essa variação torna necessário um planejamento de rotas, no mínimo, com uma frequencial anual. Porém, uma decisão eficiente não é encontrada de maneira tão simples, pois as dificuldades se encontram na natureza combinatória do problema e no *trade-off* que se busca entre custo e qualidade do serviço prestado. Por esses e outros motivos, tentar resolvê-lo de forma intuitiva

pode frequentemente resultar em soluções ruins (KOMIJAN *et al.*, 2021).

### 2.2.1 *Proposição e evolução do problema*

Ao visualizar a necessidade de otimização do uso desses recursos, começam a surgir os primeiros trabalhos voltados para esta temática. O trabalho pioneiro foi desenvolvido por Newton e Thomas (1969) que construíram um algoritmo capaz de realizar uma roteirização de ônibus escolares, por meio da abordagem “*route-first split-second*”. No primeiro momento dessa heurística, as restrições de capacidade são ignoradas e uma única rota, passando por todos os pontos de ônibus, é gerada (*i.e.*, equivalente a uma solução característica do TSP). Posteriormente, a rota é particionada em rotas menores, respeitando a restrição de capacidade imposta pelos veículos, conseguindo assim criar rotas para cada ônibus, respeitando as capacidades disponíveis e atendendo à demanda dos estudantes.

A abordagem utilizada por Newton e Thomas (1969) é considerada na literatura como o primeiro trabalho que trata a problemática do SBRP, porém nesta época o problema se tratava de uma aplicação prática do VRP onde os veículos possuem limitações de capacidade, *i.e.*, *Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP)*. Além disso, com o passar dos anos, demonstrou-se que a abordagem utilizada pelos autores pode gerar rotas excessivas, utilizando os recursos de maneira menos eficiente do que seria possível.

Posteriormente, abordando o mesmo problema, o trabalho de Angel *et al.* (1972) apresentou a problemática de agendamento de rotas ao SBRP, denominada na literatura como “*route scheduling*”. Essa problemática possibilita a união das rotas geradas, levando-se em consideração: o tamanho da rota (*i.e.*, quantidade de alunos na rota) e a capacidade dos ônibus. Caso as rotas possam ser unidas, respeitando-se as restrições fornecidas, os autores aplicavam um algoritmo para resolução do TSP, obtendo somente uma rota que percorresse a menor distância possível.

Em seguida, no final da década de 70, Bodin e Berman (1979) atualizam os problemas relacionados ao SBRP, adicionando ao mesmo a problemática de seleção de pontos de paradas de ônibus, denominado na literatura como “*bus stop selection*”. Neste subproblema, a frota de ônibus não precisa visitar todos os pontos de ônibus presentes na região, somente aqueles em que há, pelo menos, um estudante alocado. Com a possibilidade de visitar menos pontos de ônibus por rota e/ou solução, a problemática tem um grande potencial na diminuição da distância total percorrida pela frota escolar.

Poucos anos depois, Desrosiers *et al.* (1981) apresentam a problemática de ajuste nos

horários de entrada e saída dos estudantes nas escolas, denominado na literatura como “*school bell time adjustment*”. Nesta problemática se busca encontrar um horário ótimo de entrada e saída dos estudantes, que somada a problemática de agendamento de rotas, possibilita o aumento na quantidade de rotas que podem ser atendidas por um único ônibus e, conseqüentemente, uma maior eficiência na utilização dos recursos disponíveis.

Todos os subproblemas mencionados acima são descritos nos *surveys* de Park e Kim (2010) e Ellegood *et al.* (2020). Entretanto, devido ao aumento considerável de publicações na área no intervalo de tempo entre as duas publicações, Ellegood *et al.* (2020) apresentaram um novo subproblema, desta vez relacionado à escolha da melhor política a ser adotada no SBRP, denominado pelos autores de “*strategic transportation policy*”. Essa problemática tem como objetivo encontrar uma melhor política estratégica para o transporte dos estudantes, viabilizando impactos positivos nos objetivos pretendidos.

Um exemplo da aplicação da problemática anterior está presente no trabalho de Miranda *et al.* (2018). Os autores propõem uma nova política de carregamento, denominada de carregamento múltiplo, permitindo que os estudantes subam e desçam dos ônibus em uma mesma parada. Em comparação à política de carregamento misto, a política de carregamento múltiplo encontra soluções de melhor qualidade, evidenciando a vantagem de utilização desta política em relação à de carregamento misto para o modelo abordado.

Com as definições anteriormente apresentadas, pode-se definir o SBRP como uma grande problemática da área de otimização, composta por subproblemas menores e correlatos entre si, que busca prover um serviço de transporte eficiente para os estudantes utilizarem frequentemente para se deslocarem para suas respectivas instituições de ensino (ELLEGOOD *et al.*, 2020). Assim, fica evidente que o SBRP é uma problemática com maior grau de complexidade em comparação ao tradicional VRP, pois possui diversas decisões difíceis a serem tomadas que vão além da roteirização da frota de ônibus escolares.

Além dos já mencionados subproblemas, é possível classificar os trabalhos que abordam o SBRP segundo as características que os mesmos consideram. Há diversas características já consideradas na literatura, as quais são apresentadas na Tabela 1.

Uma das classificações possíveis considera o número total de escolas consideradas nas instâncias: somente uma escola ou múltiplas escolas. Esta se trata da característica mais básica de qualquer problema, sendo uma das informações mais relevantes a ser considerada quando se propõe um modelo matemático para o SBRP e/ou quando se propõe um algoritmo heurístico.

Tabela 1 – Características do SBRP abordados na literatura

Categorias	Características
Tipo de subproblema	Seleção das paradas de ônibus
	Geração das rotas
	Agendamento dos ônibus
	Ajuste no horário do toque escolar
Número de escolas	Política estratégica de transporte
	Uma escola
Ambiente do serviço	Múltiplas escolas
	Ambiente urbano
	Ambiente rural
Período considerado	Ambiente urbano e rural
	Matutino
	Vespertino
Tipo de carregamento	Ambos
	Carregamento homogêneo
Tipo de frota	Carregamento misto
	Frota homogênea
	Frota heterogênea

Fonte: Adaptado de Park e Kim (2010) e Ellegood *et al.* (2020)

Segundo Park e Kim (2010), a literatura do SBRP tinha um foco maior para problemas com uma escola, sendo a estrutura semelhante à do VRP. Porém, com o passar dos anos, como apresentado por Ellegood *et al.* (2020), o SBRP foi ganhando maior importância, o que levou a proposição de modelos mais próximos da realidade, alguns dos quais envolvendo múltiplas escolas, uma vez que esta é a realidade vivenciada na maioria dos municípios.

Outra importante característica está ligada ao ambiente no qual o problema está inserido: rural, urbano ou ambos. Essa característica muda a abordagem do SBRP, isto porque o subproblema de escolha dos pontos de ônibus é frequentemente utilizado no ambiente urbano – devido à densidade maior de estudantes por área e pela maior segurança que se há em se deslocar de suas casas até um local pré-determinado (ELLEGOOD *et al.*, 2020). Uma realidade diferente da vivenciada pelos estudantes que residem em ambientes rurais, isto porque a densidade de pessoas é menor, tornando menos seguro o deslocamento dos mesmos até pontos de ônibus distante das suas residências. Desta forma, é comum que os estudantes esperem pelo ônibus em suas respectivas casas (PARK; KIM, 2010).

A característica de ambiente no qual o problema está considerando também impacta na qualidade do serviço oferecido. Isto porque, como discutido nos trabalhos de Park e Kim (2010) e Ellegood *et al.* (2020), o transporte escolar realizado no ambiente rural tende a abranger uma área maior – em comparação ao ambiente urbano – e com mais pontos de paradas, o que

potencialmente aumenta o tempo de permanência dos estudantes nos ônibus – uma métrica de qualidade comumente utilizada na literatura.

A próxima característica que pode ser utilizada para definição dos estudos do SBRP se trata do período considerado no problema: matutino, vespertino ou ambos. No caso matutino, *e.g.*, explorado no trabalho de Ren *et al.* (2019), o ônibus parte de um depósito ou da própria escola e visita os pontos de ônibus determinados pela rota, coletando os estudantes da(s) respectiva(s) parada(s) e os transportando para a(s) escola(s). No caso vespertino, os estudantes são coletados nas escolas e entregues em seus respectivos pontos de parada de ônibus (PARK; KIM, 2010). Considerando o horário de estudantes que frequentam a instituição de ensino no período da tarde, pode-se modelar o problema como de período matutino, com pequenos ajustes, por exemplo na janela de tempo.

Caso sejam considerados ambos, o problema ganha uma complexidade maior. Park e Kim (2010) comentam sobre a realização de um roteamento reverso (já aplicado na literatura), em que a(s) rotas(s) realizadas pela manhã seriam as mesmas realizadas a tarde, porém de maneira reversa. Essa abordagem pode ser bastante intuitiva e viável para alguns casos, entretanto é importante destacar que ela pode aumentar o tempo de permanência dos estudantes nos ônibus, tornando-se desfavorável para problemas que consideram um limite de “*riding time*” ou com objetivo a minimização desse tempo. Uma alteração nesta abordagem seria realizar as mesmas rotas para ambos os períodos, realizando inicialmente a entrega de todos os estudantes da manhã e começando as coletas dos estudantes da tarde posteriormente. Dessa forma o tempo de permanência dos estudantes no(s) ônibus(s) seria potencialmente menor, porém a distância a ser percorrida pelo veículo seria possivelmente maior.

O tipo de carregamento considerado no problema também é uma característica relevante para os algoritmos e modelos que abordam o SBRP, podendo ser: carregamento homogêneo ou misto, do inglês “*no mixed load*” e “*mixed load*”, respectivamente. No carregamento homogêneo os ônibus só podem transportar estudantes de uma mesma escola, enquanto que no carregamento misto é permitido que estudantes de diferentes instituições de ensino estejam no mesmo ônibus (PARK; KIM, 2010; ELLEGOOD *et al.*, 2020). A vantagem de utilizar a política de carregamento homogêneo é a boa utilização dos assentos dos veículos, uma vez que os estudantes ocupam seus lugares desde o momento em que sobem no ônibus até o destino final (ELLEGOOD *et al.*, 2020). Porém a desvantagem se encontra no uso ineficiente dos outros recursos disponíveis, o que pode levar a um aumento na quantidade de ônibus necessários e/ou outros custos operacionais que

poderiam ser evitados (HOU *et al.*, 2020).

Diferentemente do carregamento homogêneo, o carregamento misto permite que as rotas visitem uma parada somente uma vez, possibilitando que estudantes de diferentes escolas compartilhem o mesmo veículo. Inicialmente esta política foi pensada para o ambiente rural, mas com o passar dos anos foi ganhando importância também em ambientes urbanos e mistos. As desvantagens estão na baixa utilização da capacidade quando se viaja entre as escolas e o potencial aumento no tempo que o estudante passa no ônibus, além do grau de complexidade envolvido em coordenar as rotas. Miranda *et al.* (2018) propõem uma nova política denominada de carregamento múltiplo (do inglês, *multi-loading*) que permite que os estudantes subam e desçam dos ônibus em uma mesma parada, o que não é permitido nas políticas já apresentadas.

Por fim, os problemas de SBRP também podem ser classificados de acordo com os objetivos e restrições consideradas. Os objetivos abordados nos modelos do SBRP, em sua grande maioria, buscam a minimização dos custos operacionais envolvidos ou a maximização da qualidade do serviço prestado, mesmo que a qualidade/acessibilidade do serviço seja frequentemente colocada como restrições dos modelos. Estes, por sua vez, podem trabalhar somente com um objetivo ou com múltiplos objetivos (*i.e.*, aproximando-se mais da realidade), onde se tenta minimizar os custos e maximizar a qualidade do transporte escolar. Os objetivos já abordados na literatura e apresentados nos trabalhos de Park e Kim (2010) e Ellegood *et al.* (2020) estão dispostos na Tabela 2.

Tabela 2 – Objetivos frequentemente utilizados no SBRP

Função Objetivo	Objetivo
Número de ônibus utilizados	Minimizar
Distância/Tempo total percorrido pelos ônibus	
Distância/Tempo total de percurso dos estudantes	
Distância de caminhada dos estudantes	
Tamanho máximo da rota	
Tempo perdido pelos estudantes	
Custo total	
Utilização da capacidade	Maximizar
Balanceamento de ocupação dos ônibus/tempo de percurso	
Compatibilidade de rotas	
Fator de segurança	

Fonte: Adaptado de Park e Kim (2010) e Ellegood *et al.* (2020)

As restrições utilizadas nos modelos do SBRP geralmente estão relacionadas com a capacidade de ocupação dos ônibus escolares, a variável tempo utilizando-se janelas de tempo (ELLEGOOD *et al.*, 2020) ou a distância máxima que um estudante precisa caminhar para

alcançar sua parada de ônibus (PARK; KIM, 2010). Porém, as restrições não se limitam somente as supracitadas, segundo as revisões de Park e Kim (2010) e Ellegood *et al.* (2020) outras restrições utilizadas são: tempo máximo de passeio, horário mais cedo para começar a coleta dos estudantes, número mínimo de estudantes para se criar uma rota, número máximo de paradas por rota, possibilidade de lotação e possibilidade de atraso.

Além das características citadas anteriormente, há também a possibilidade de realizar o transporte de alunos com alguma necessidade especial, denominada de “*special students*”. Essa propriedade do problema não é diretamente citada nas duas principais revisões da literatura do SBRP como uma característica, porém ao se considerar o transporte de estudantes com necessidades especiais, como realizado no trabalho de Komijan *et al.* (2021), é necessário que o(s) ônibus capaz(es) de atender a estes estudantes seja(m) atribuído(s) à(s) rota(s) em que eles estão alocados, além da necessidade de visitar um conjunto desses estudantes em suas próprias residências. Essa característica acrescenta mais restrições ao problema original do SBRP, porém reduz o tempo computacional necessário para sua resolução, uma vez que as casas dos alunos com necessidades especiais são pontos fixos de visita.

### 2.2.2 Revisão da literatura

O SBRP tem sido estudado por diversos pesquisadores ao redor do mundo desde a primeira publicação, por Newton e Thomas (1969). Porém, nos últimos anos o problema vem ganhando maior destaque e tendo um maior número de publicações, propondo-se gradativamente problemas mais complexos e que se aproximam do cenário real vivenciado pelos municípios e escolas (ELLEGOOD *et al.*, 2020). Uma das formas de tornar o SBRP mais complexo e realista é considerar vários dos subproblemas mencionados na seção 2.2.1 em conjunto, resolvendo-os em sequência ou de maneira integrada.

Seguindo este raciocínio, Schittekat *et al.* (2013) integraram os problemas de seleção de paradas (alocação dos estudantes às paradas) com o problema de roteamento dos ônibus escolares, propondo um modelo de programação matemática inteira mista - do inglês, *Mixed Integer Programming* (MIP) - capaz de resolver simultaneamente ambos os subproblemas, com o objetivo de minimizar a distância total percorrida pelos veículos. Devido a limitação computacional, para resolução de instâncias de grande porte os autores desenvolveram uma meta-heurística GRASP, utilizando como heurística de refinamento o VND (GRASP+VND) e resolvendo o problema de alocação dos estudantes de maneira exata através do algoritmo guloso

de fluxo em rede, denominado Ford-Fulkerson.

Para além do exposto, os autores apresentaram uma nova abordagem heurística para resolver os subproblemas de seleção de paradas e roteirização, denominada posteriormente na literatura como *Location-Routing-Allocation* (LRA), onde inicialmente são definidas as paradas de ônibus a serem visitadas e, posteriormente, as rotas (i.e., sequência de paradas a serem visitadas por cada ônibus), verificando a viabilidade da solução por meio da alocação dos estudantes as paradas de maneira exata. Esses passos são repetidos durante toda a meta-heurística até que o critério de parada do VND seja atendido.

Baseados no trabalho de Schittekat *et al.* (2013), foi proposto por Kinable *et al.* (2014) um algoritmo *branch-and-price* (i.e., exato) baseado no conceito de cobertura de conjuntos para o mesmo modelo de problema. Apesar de ser um algoritmo exato, os resultados obtidos por Kinable *et al.* (2014) foram satisfatórios, conseguindo obter tempos computacionais abaixo dos relatados no trabalho anterior, aumentando também a qualidade das soluções encontradas para um conjunto de instâncias executadas pelo algoritmo.

Mais recentemente, Calvete *et al.* (2020) explorou as mesmas problemáticas de seleção de paradas de ônibus e roteirização por meio de uma abordagem inovadora, denominada pelos autores de *Location-Partial-Allocation-Routing* (LPA). Nesta abordagem o problema de seleção de paradas de ônibus é solucionado parcialmente, em seguida é realizada a construção das rotas e designação dos veículos e, por fim, a alocação dos demais estudantes às paradas visitadas pelas rotas obtidas. Essa estratégia foi utilizada em uma *matheuristic*, sendo o modelo exato responsável pela seleção de paradas de ônibus.

Para realização de *benchmark*, os autores utilizaram as instâncias apresentadas no trabalho de Schittekat *et al.* (2013), comparando o desempenho do algoritmo com os resultados reportados nos trabalhos de Schittekat *et al.* (2013) e Kinable *et al.* (2014). Por fim, o algoritmo proposto conseguiu obter um desempenho razoável, melhorando o tempo de execução requerido e a qualidade das soluções encontradas na literatura.

Por fim, o trabalho de Silva Neto *et al.* (2020) estuda a mesma problemática exposta anteriormente, utilizando-se de uma *matheuristic* composta pela meta-heurística *Hybrid Iterated Local Search* (HILS) que realiza uma série de buscas locais por meio da *Variable Neighborhood Descent with Random neighborhood ordering* (RVND), através de um conjunto de operadores intra-rota e inter-rotas executados em ordem aleatória, buscando uma solução de maior qualidade. Quando a busca local converge para um valor, a solução encontrada é salva e uma perturbação é

realizada a fim de explorar outro espaço de soluções do problema, variando-se a solução que passará pela perturbação quando necessário.

As melhores soluções encontradas são salvas em um *pool* de soluções. Ao final, as soluções salvas são dados de *input* para o modelo matemático que busca escolher o conjunto de rotas através da resolução de um *Set Partitioning Problem* (SPP), de tal forma que o custo total da solução seja minimizado. Para *benchmark*, o algoritmo foi executado em 95 instâncias utilizadas por Schittekat et al. (2013), conseguindo melhorar os resultados anteriormente publicados e obtendo um *gap* médio inferior a 0.5%.

Outro estudo que abordou em conjunto as problemáticas do SBRP foi o realizado por Miranda *et al.* (2018), o qual considerou o problema de agendamento de rotas junto aos problemas anteriormente citados. O modelo proposto tem como objetivo a minimização dos custos envolvidos com o transporte escolar (*i.e.*, minimização dos custos fixos e variáveis), utilizando-se de uma frota heterogênea de ônibus escolares para atender alunos com e sem necessidades especiais. Como inovação, o estudo apresentou uma nova política de carregamento, denominada pelos autores de *multi-loading* (consultar a Seção 2.2.1 para mais detalhes).

Para resolução de instâncias de médio e grande porte, Miranda *et al.* (2018) propuseram a meta-heurística ILS, na qual utilizou como heurística de busca local o VND (ILS + VND). A busca local realizada com o VND conta com um conjunto de operadores de vizinhança, capazes de realizar a busca por soluções de melhor qualidade (intensificação) e o ILS complementa a busca através de perturbações realizadas na solução (diversificação), conseguindo assim escapar de ótimos locais. Por fim, o algoritmo utiliza também um conjunto de soluções de alta qualidade, chamado de “grupo de elite”, as soluções que pertencem ao conjunto são utilizadas quando o algoritmo não consegue mais identificar soluções de maior qualidade, na tentativa de procurar na vizinhança de outra solução de elite uma solução melhor do que as já encontradas.

Os autores propõem 4 algoritmos heurísticos diferentes: *i*) ILS + VND, *ii*) ILS + VND (incluindo o operador proposto pelos autores e denominado *Small VRPTW*), *iii*) ILS + VND + SVRPTW + Grupo de Elite (GE) e *iv*) ILS + VND + SVRPTW + GE com uma estratégia mais refinada para escolha dos componentes. Os testes computacionais realizados demonstraram o impacto positivo das heurísticas à medida que os elementos propostos são considerados, assim como os benefícios de se adotar a política de carregamento *multi-loading*. Por fim, os autores aplicaram o algoritmo para 76 cidades do estado do Espírito Santo, estimando uma economia anual de US\$ 2,5 milhões de dólares para o estado com a aplicação das novas rotas obtidas.

Posteriormente, como resultado da continuação da pesquisa, um novo modelo é proposto por Miranda *et al.* (2021). Neste modelo os autores adicionam a capacidade de solucionar o problema de ajuste nos horários de chegada e saída das escolas, tornando o modelo matemático e a meta-heurística (ILS + VND) hábeis para lidar com os problemas de: *i*) seleção de paradas, *ii*) roteirização dos ônibus, *iii*) agendamento das rotas e *iv*) ajuste nos horários de chegada e saída das escolas.

Os ajustes nas janelas de tempo das escolas são realizados em três momentos na meta-heurística (dois na etapa de construção e um na etapa de busca local). No primeiro momento de construção das rotas, é realizada a tentativa de adicionar paradas ainda não visitadas na rota atual, verificando-se os limites de capacidade e tempo. Caso necessário, um ajuste na janela de tempo é realizado para inserção da parada, respeitando um máximo e mínimo de horários.

No segundo momento da construção das rotas (*i.e.*, na etapa de agendamento) é calculado um *score* de união considerando o *saving* obtido com o movimento e a necessidade ou não de ajustes na janela de tempo da escola. Através do *score* os movimentos são ordenados em uma lista  $\mathcal{L}$ , sendo os  $n$  melhores escolhidos para a realização. Por fim, na etapa de busca local, a vizinhança da solução é explorada. Caso um movimento de melhoria não seja viável devido às janelas de tempo, um operador de ajuste de janelas de tempo é utilizado na tentativa de viabilizar o movimento.

Como resultado, o algoritmo conseguiu reduzir em torno de 2% o custo total requerido anteriormente, mostrando o impacto positivo da utilização do ajuste nas janelas de tempo das escolas. Os testes destacaram também que o potencial de diminuição no custo é maior em instâncias que possuam escolas próximas, permitindo que os ônibus percorram diferentes rotas dentro das janelas de tempo determinadas.

Outro trabalho que aborda o problema do ajuste nos horários escolares é o de Bertsimas *et al.* (2019), que desenvolveram um algoritmo denominado *Biobjective Routing Decomposition* (BiRD), que em conjunto com um modelo matemático para o *School Time Selecting Problem* (STSP) consegue gerar as rotas e ajustar os horários escolares com o objetivo de minimizar a quantidade de ônibus necessários para atender à demanda pelo transporte escolar (*i.e.*, reduzindo o custo requerido pelo serviço).

O BiRD inicialmente aloca os estudantes à menor quantidade de pontos de ônibus possíveis através de uma formulação matemática (*i.e.*, simplificando o tamanho das futuras rotas e diminuindo o tempo necessário para embarque). Em seguida, um algoritmo de inserção

conecta as paradas, formando pequenas rotas viáveis para os ônibus. Por fim, uma formulação do *Set Covering Problem* (SCP) é utilizada para combinar as rotas, com o objetivo de diminuir a quantidade de ônibus necessários.

O processo descrito é realizado uma única vez caso o problema envolva uma escola. No caso de múltiplas escolas, o processo é executado diversas vezes, gerando cenários diferentes para a construção da fronteira de Pareto com o objetivo de minimizar a quantidade total de ônibus utilizados e o tempo médio de viagem. O melhor cenário, aquele que favorece a ligação entre diferentes rotas, é escolhido através de um modelo matemático para o problema de fluxo em rede.

A solução retornada pelo BiRD é *input* para o algoritmo do STSP, o qual minimiza o tempo ocioso dos ônibus (utilizando um parâmetro de compatibilidade de rotas) através da seleção de pequenos e diferentes conjuntos de escolas, solucionando-os de maneira exata até a convergência da solução. Com aplicação nas escolas públicas de Boston, o algoritmo conseguiu retirar 50 ônibus de circulação e economizar em torno de \$ 5 milhões do recurso empregado no serviço, apenas aplicando-o no outono de 2017.

Um modelo para o SBRP também é apresentado por Komijan *et al.* (2021), em que os autores tem por objetivo a minimização dos custos envolvidos com o serviço de transporte escolar, trabalhando com os mesmos subproblemas do modelo de Miranda *et al.* (2018). As características presentes são: a política de carregamento *mixed load*, o atendimento a alunos com necessidades especiais e a separação de gênero (*i.e.*, metade da capacidade dos ônibus é destinada aos meninos e a outra metade, às meninas).

Para resolução de instâncias de médio e grande porte, foi apresentado uma meta-heurística (GA), utilizando o conceito de elitismo, *i.e.*, o melhor indivíduo da população não sofre alterações (mutação ou *crossover*). A população é composta por 80 indivíduos, sendo o algoritmo capaz de executar a busca no espaço de soluções por, no máximo, 200 iterações. Quando comparado com os resultados obtidos através do modelo exato, a meta-heurística conseguiu encontrar valores muito próximos dos ótimos, assim como os próprios valores ótimos, possuindo uma taxa de erro média abaixo de 0,7%.

Em relação ao tempo computacional, a abordagem exata tende a exigir um tempo de processamento bastante elevado à medida que o tamanho das instâncias aumenta – como esperado de um problema NP-Difícil – e o GA consegue ter um bom desempenho em termos de custo computacional, tendo um incremento pequeno no tempo de processamento à medida que a

instância aumenta. Entretanto, mesmo aplicando em um contexto real e obtendo resultados promissores, o algoritmo foi submetido a um conjunto pequeno de instâncias, sendo necessário testar em um conjunto maior para garantir a robustez e eficiência do mesmo.

O artigo publicado por Ansari *et al.* (2021) segue a mesma característica do trabalho de Komijan *et al.* (2021), modelando um problema de SBRP no contexto de estudantes com necessidades especiais. Os subproblemas abordados são: *i*) o problema de seleção de paradas de ônibus e *ii*) o problema de roteirização da frota escolar. Vale destacar duas características importantes do modelo proposto: *i*) cada escola tem uma capacidade limitada de atendimento aos alunos e *ii*) o problema de seleção das paradas de ônibus é reduzido para o problema de alocação dos estudantes as suas respectivas escolas, pois os alunos são coletados em suas próprias residências.

Um modelo matemático (não-linear) é apresentado para o problema, assim como a forma linearizada, com o objetivo de diminuir a distância total percorrida pela frota heterogênea de ônibus (com diferentes capacidades e capazes de atender a diferentes necessidades do corpo discente). Para instâncias que consideram mais de 42 nós (*upper bound* encontrado para um tempo limite de 2 horas de execução), os autores propõem uma *matheuristic* de duas fases.

Na primeira etapa da *matheuristic*, um modelo matemático para o *Capacitated Clustering Problem* (CCP) é proposto, tomando como centróide estudantes escolhidos aleatoriamente baseado na quantidade de ônibus disponíveis. O modelo matemático tem por objetivo minimizar a distância dos alunos para um centróide, retornando então grupos de estudantes. Então, o modelo matemático do SBRP é executado para cada grupo (*i.e.*, um conjunto pequeno de nós e arestas).

Uma *matheuristic* também foi utilizada por Shafahi *et al.* (2018), que propuseram um algoritmo de duas etapas para resolução do SBRP considerando os subproblemas: *i*) roteamento de veículos e *ii*) agendamento de rotas. O algoritmo tem por objetivo diminuir a distância total percorrida pela frota escolar, assim como diminuir o número de veículos necessários para realização do transporte, respeitando as restrições de capacidade dos veículos e as janelas de tempo do problema, considerando-se o carregamento como homogêneo (*i.e.*, um ônibus só pode ser ocupado por estudantes de uma mesma escola).

Na primeira etapa, uma solução é construída considerando a minimização da distância total percorrida, criando-se rotas iniciais de acordo com a razão entre a quantidade de alunos e a capacidade dos veículos, sendo as rotas formadas pela escola e a parada mais distante da mesma.

As demais rotas são inseridas através de um algoritmo exato, denominado de “*Minimum Cost Matching Problem*”, que escolhe a melhor parada de ônibus a ser adicionada, com o objetivo de minimizar os custos de inserção e respeitando restrições de que cada parada pode ser alocada somente a uma rota.

Na segunda etapa é aplicada uma heurística de refinamento, a qual combina aspectos do TS e SA na tentativa de melhorar as rotas existentes e uni-las, de acordo com a compatibilidade existente entre elas. O algoritmo foi comparado com outros já publicados na literatura, conseguindo diminuir em até 25% o *ride time* e economizando de 10% a 15% a quantidade total de ônibus necessários. Comparado com a abordagem *mixed-load* o algoritmo consegue encontrar boas soluções, utilizando em média 11% de ônibus a mais que a melhores soluções conhecidas para as instâncias utilizadas.

Uma heurística de duas etapas também foi utilizada por Ren *et al.* (2019) para trabalhar com problemas de SBRP que consideram os subproblemas de localização das paradas de ônibus e de roteamento de veículos, respeitando a acessibilidade dos estudantes aos pontos determinados e adotando uma política de *mixed-load*. No problema tratado, os locais de paradas de ônibus não são fornecidos *a priori*, sendo necessário determinar as suas localizações, de tal forma que seja viável para os estudantes realizar o deslocamento até o seu respectivo ponto de parada.

Um modelo exato é proposto pelos autores, com o objetivo de minimizar o tempo total dos trajetos realizados, considerando diferentes acessibilidades para o público-alvo. Essa característica substitui o *maximum walking* (parâmetro frequentemente utilizado para determinar quais paradas são acessíveis aos alunos), propondo valores de distância baseados na velocidade média de deslocamento dos estudantes (de acordo com suas respectivas idades) e em um tempo limite de deslocamento, tornando os valores distintos para cada faixa etária.

Para instâncias com maior grau de complexidade, os autores propõem um meta-heurística. Em um primeiro momento se aplica um método de clusterização, com o objetivo de determinar a localização dos pontos de ônibus, utilizando a mínima quantidade possível disponível. Na segunda etapa uma ACO é implementada, sendo responsável por construir uma solução inicial e refiná-la. O algoritmo foi comparado com outras duas meta-heurísticas aplicadas aos problemas de SBRP (GA e TS), mostrando um desempenho satisfatório. Porém, a abordagem requer um tempo de processamento maior em comparação às demais, além de precisar passar por uma etapa de calibragem, devido aos parâmetros utilizados.

A política de carregamento *mixed-load* também foi considerada no trabalho de Hou *et al.*

(2020), onde os autores propuseram um modelo matemático para a minimização da quantidade de veículos utilizados na prestação do transporte escolar, trabalhando exclusivamente com o problema de roteamento dos ônibus escolares. Explorando a característica do problema, os autores adaptaram os conceitos do *Pickup and Delivery Problem With Time Windows* (PDPTW) — variante do VRP onde há pontos de entrega e coleta, semelhante ao caso do SBRP somente com roteamento, para desenvolver uma meta-heurística baseada no *Record-to-Record Travel* (RRT), proposta por Dueck (1993).

O RRT é uma variante da meta-heurística SA, que utiliza o conceito de desvio para determinar se uma solução de pior qualidade é aceita ou não no processo de busca local, tornando-a ponto de partida para uma nova intensificação da busca. Os autores, através de comparações realizadas, demonstraram que a meta-heurística proposta consegue desempenhar bem o seu objetivo, alcançando reduções consideráveis no número de ônibus requeridos. Entretanto, o número de instâncias consideradas no trabalho é pequeno para confirmar a robustez do algoritmo.

Outra abordagem sequencial foi proposta por Mohandas *et al.* (2021), porém para solucionar o problema de realocar os estudantes aos pontos de ônibus disponíveis e realizar a roteirização, considerando a variação da demanda anual que naturalmente ocorre nas instituições de ensino. Os autores utilizaram o arcGIS como ferramenta de apoio a tomada de decisão, a fim de localizar geograficamente os alunos, os pontos de paradas e a instituição. Por se tratar de uma aplicação real, os dados precisaram ser coletados e tratados, sendo nesta etapa aplicado o algoritmo de Dijkstra para encontrar as melhores conexões entre os pontos considerados.

Através da localização dos estudantes e da demarcação de uma zona de *buffer* – delimitando a área total na qual o estudante pode se deslocar a pé – as paradas de ônibus são selecionadas, de tal maneira que seja feita a alocação de todos os estudantes. Em seguida, a posição dos pontos de ônibus selecionados e outras informações são inseridas no arcGIS, que utilizará a ferramenta “*Network Analyst Vehicle Routing Problem*” para identificar as rotas ótimas. Por fim uma interface *online* foi desenvolvida, possibilitando que os alunos acompanhem em tempo real a localização do ônibus que irá passar pelo seu ponto, possibilitando a diminuição do tempo de espera do estudante pela chegada do veículo.

A estratégia utilizada no trabalho de Mohandas *et al.* (2021) se trata da *Location-Allocation-Routing* (LAR), que acaba por ser menos flexível que outras abordagens e limitando a busca de rotas dentro do conjunto pré-definido de paradas de ônibus, o que pode dificultar a busca pela solução ótima do problema. Entretanto, mesmo tendo as suas limitações, a LAR

consegue fornecer soluções de melhor qualidade quando comparada com abordagens empíricas, como o roteamento realizado de maneira manual. Isto fica claro com os resultados obtidos por Mohandas *et al.* (2021), que conseguiram encontrar um *gap* na quantidade de ônibus necessária e a quantidade disponível, construindo rotas mais eficientes.

O presente trabalho propõe um modelo que se assemelha aos apresentados por Schittekat *et al.* (2013), Kinable *et al.* (2014), Calvete *et al.* (2020) e Silva Neto *et al.* (2020), que tem por objetivo minimizar a distância total percorrida pelos ônibus escolares abordando os subproblemas de seleção de paradas de ônibus, alocação de estudantes e geração das rotas, possuindo as seguintes características: uma escola, ambiente urbano, período indefinido, carregamento homogêneo e frota homogênea. Diferente dos trabalhos citados anteriormente, este estudo aborda a característica de demanda variável (*i.e.*, os estudantes não precisam de transporte escolar para todos os períodos considerados), ainda não apresentado na literatura do SBRP. Esta característica possibilita ao problema obter rotas menos custosas que atendam a demanda dos estudantes nos períodos considerados, impactando diretamente no custo total.

O algoritmo proposto na Seção 4 é capaz de solucionar de maneira satisfatória o MP-SBRP e o SBRP, quando comparado aos melhores resultados já reportados na literatura. Em contrapartida, a limitação do algoritmo guloso na verificação de alocação dos estudantes para o *multi-period* e a não consideração de mais subproblemas de decisão, como abordado nos trabalhos de Miranda *et al.* (2018) e Miranda *et al.* (2021), influenciam na qualidade das soluções encontradas pelo modelo, o qual poderia retornar soluções com distâncias percorridas ainda menores.

### 3 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

O MP-SBRP abordado nesse trabalho foi apresentado inicialmente em Melo e Kramer (2021), sendo definido de maneira semelhante aos problemas de roteamento de veículos.

Seja  $G = (V, A)$  um grafo orientado composto por um conjunto  $V$  de vértices e um conjunto  $A$  de arcos. O conjunto de vértices é definido como  $V = V_p \cup V_s \cup 0$ , sendo  $V_p = \{1, \dots, n\}$  a representação dos  $n$  possíveis locais de paradas de ônibus escolares,  $V_s = \{1, \dots, m\}$  a representação das  $m$  residências dos estudantes e  $0$  o vértice que representa a instituição de ensino ao qual estes se deslocarão (escolas, faculdades, entre outras). O conjunto de arcos é definido como  $A = A_p \cup A_s$ , sendo  $A_p = \{(i, j) : i, j \in V_p \cup 0, i \neq j\}$  os arcos que estão associados à distância necessária para se deslocar entre os potenciais pontos de parada de ônibus e/ou a instituição de ensino e serão segmentos de rotas considerados para construção das soluções, e  $A_s = \{(s, j) : s \in V_s, j \in V_p \cup 0, d_{sj} < D\}$  os arcos que conectam a residência dos estudantes ( $s$ ) aos potenciais pontos de ônibus ou instituição de ensino ( $j$ ), de tal forma que a distância associada não ultrapasse um limite  $D$ , definido *a priori*. Os vértices de  $V_p$  que são alcançados por um estudante  $s$  são representados pelo conjunto  $P_s$ .

Seja  $T$  o conjunto de dias em que haja demanda de estudantes por transporte escolar. O MP-SBRP consiste em alocar cada estudante do conjunto  $V_s$  a uma mesma parada de ônibus do conjunto  $P_s$  nos períodos (dias) em que há demanda do estudante pelo transporte escolar, de tal forma que o serviço seja de fácil acesso aos usuários que o utilizam. Além disso, o MP-SBRP determina um conjunto de rotas para cada período de  $T$  que minimize a distância total percorrida pela frota de ônibus e que satisfaça as seguintes restrições: (i) as paradas com estudantes alocados no período  $d \in T$  devem ser visitadas uma única vez (no período  $d$ ), (ii) cada estudante  $s \in V_s$  deve ser alocado a uma mesma parada nos dias em que tiver demanda, e (iii) a quantidade de estudantes alocados por rota não deve exceder a capacidade homogênea  $C$  dos veículos.

Dado o exposto anteriormente, e tomando como base as variáveis e os dados apresentados e descritos na Tabela 3, o MP-SBRP pode então ser modelado como um problema de programação linear inteira mista, com uma função objetivo (3.1) de minimização e restrições (3.2)-(3.15) que garantem desde a não formação de subrotas até a não violação da capacidade dos veículos.

Tabela 3 – Descrição das notações utilizadas no modelo matemático

Notação	Tipo	Descrição
$a_{sd}$	dado	1 se o estudante $s$ possui demanda no dia $d$ , 0 caso contrário
$d_{is}$	dado	1 se o estudante $s$ alcança a parada $i$ , 0 caso contrário
$C$	dado	Capacidade dos ônibus
$D$	dado	Distância máxima aceitável para um estudante caminhar até a parada
$K$	dado	Conjunto de veículos disponíveis
$T$	dado	Conjunto de dias considerados
$P_s$	dado	Conjunto de paradas alcançadas pelo estudante $s$
$x_{ijkd}$	variável	1 se o ônibus $k$ percorre o arco $(i, j) \in A_p$ no dia $d$ , 0 caso contrário
$y_{ikd}$	variável	1 se a parada $i$ é visitada pelo ônibus $k$ no dia $d$ , 0 caso contrário
$z_{iskd}$	variável	1 se o estudante $s$ é alocado a parada $i$ , ônibus $k$ e dia $d$ , 0 caso contrário
$w_{is}$	variável	1 se o estudante $s$ é alocado à parada $i$ , 0 caso contrário

Fonte: O autor (2022)

$$\text{Min} \sum_{i \in V_p \cup \{0\}} \sum_{j \in V_p \cup \{0\}: j \neq i} \sum_{k \in K} \sum_{d \in T} d_{ij} x_{ijkd} \quad (3.1)$$

$$\text{sujeito a} \sum_{j \in V_p \cup \{0\}: j \neq i} x_{ijkd} = \sum_{j \in V_p \cup \{0\}: j \neq i} x_{jikd} \quad i \in V_p, k \in K, d \in T, \quad (3.2)$$

$$\sum_{j \in V_p \cup \{0\}: j \neq i} x_{ijkd} = y_{ikd} \quad i \in V_p, k \in K, d \in T, \quad (3.3)$$

$$u_{id} - u_{jd} + n \sum_{k \in K} x_{ijkd} \leq n - 1 \quad i, j \in V_p, i \neq j, d \in T, \quad (3.4)$$

$$\sum_{k \in K} y_{ikd} \leq 1 \quad i \in V_p, d \in T, \quad (3.5)$$

$$z_{iskd} \leq y_{ikd} \quad i \in V_p, k \in K, s \in V_s, d \in T, \quad (3.6)$$

$$\sum_{i \in V_p} \sum_{s \in V_s} z_{iskd} \leq C \quad k \in K, d \in T, \quad (3.7)$$

$$\sum_{i \in P_s} \sum_{k \in K} z_{iskd} = a_{sd} \quad s \in V_s, d \in T, \quad (3.8)$$

$$\sum_{i \in P_s} w_{is} = 1 \quad s \in V_s, \quad (3.9)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{d \in T} d_{is} z_{iskd} - w_{is} \sum_{d \in T} a_{sd} = 0 \quad s \in V_s, i \in P_s, \quad (3.10)$$

$$x_{ijkd} \in \{0, 1\} \quad i, j \in V_p, i \neq j, k \in K, d \in T, \quad (3.11)$$

$$y_{ikd} \in \{0, 1\} \quad i \in V_p, k \in K, d \in T, \quad (3.12)$$

$$z_{iskd} \in \{0, 1\} \quad s \in V_s, i \in P_s, k \in K, d \in T, \quad (3.13)$$

$$w_{is} \in \{0, 1\} \quad s \in V_s, i \in P_s, \quad (3.14)$$

$$u_{id} \geq 0 \quad i \in V_p, d \in T. \quad (3.15)$$

A função objetivo (3.1) minimiza a distância total percorrida pelos veículos em todos os dias de  $T$ . O conjunto de restrições (3.2) e (3.3) são responsáveis pela conservação de fluxo, enquanto que os conjuntos (3.4) e (3.15) não permitem a formação de subrotas, baseando-se na formulação de *Miller-Tucker-Zemlin* (MTZ). As restrições obtidas com (3.5) garantem que os potenciais pontos de paradas  $i$  sejam visitados no máximo por um ônibus  $k$  no dia  $d$ . Já o conjunto de restrições (3.6) assegura que o ônibus  $k$  visite a parada  $i$  no dia  $d$  caso o estudante  $s$  seja alocado a mesma e (3.7) garantem que a quantidade de estudantes  $s$  alocados a um mesmo ônibus  $k$  não exceda a capacidade  $C$ .

O conjunto de restrições (3.8) garante que apenas um ônibus  $k$  visite a parada  $i$  em que está alocado o estudante  $s$  caso haja demanda no dia  $d$ . Enquanto que as equações (3.9) garantem que cada estudante seja alocado a um ponto de parada do conjunto de paradas alcançáveis pelo mesmo e (3.10) garantem que o ônibus  $k$  visite a parada  $i$ , na qual o estudante  $s$  está alocado, somente nos dias  $d$  em que houver a demanda do estudante  $s$ . Por fim, as restrições (3.11), (3.12), (3.13) e (3.14) garantem que as variáveis de decisões do problema são binárias.

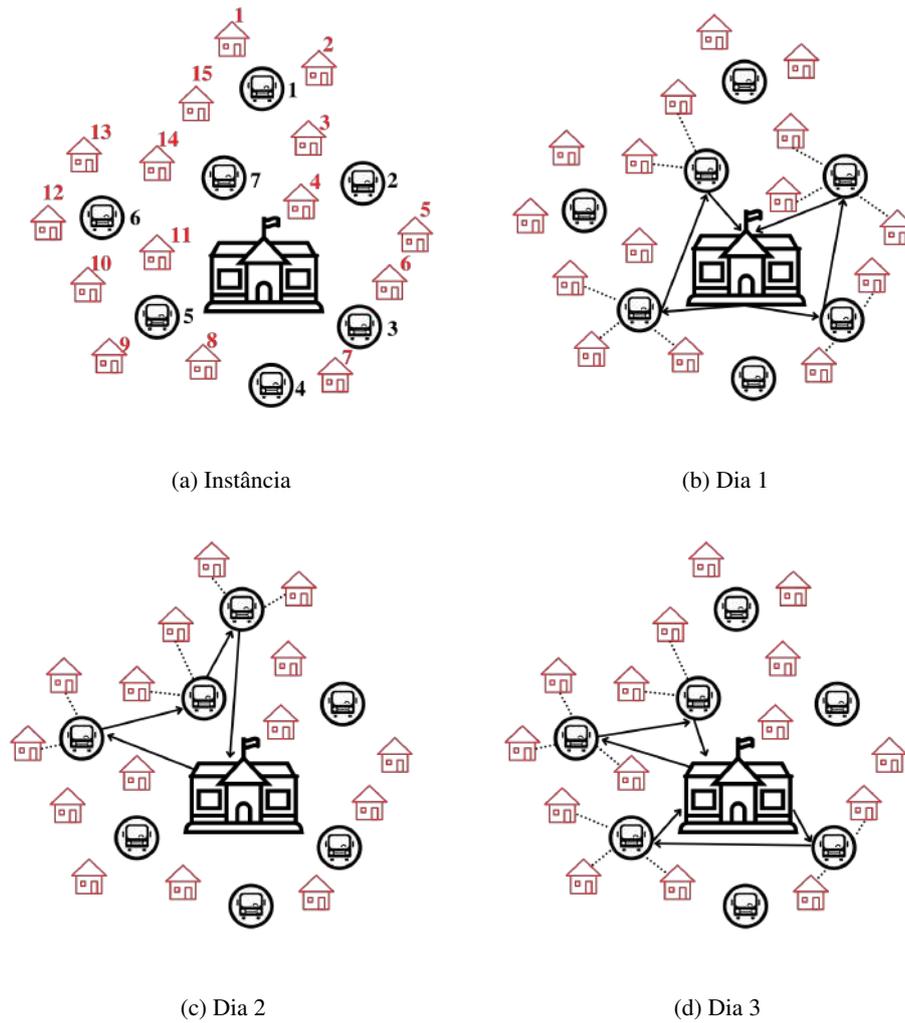
A representação de uma instância para o MP-SBRP e sua possível solução podem ser visualizadas na Figura 2, onde o conjunto de possíveis paradas ( $V_p$ ) é representado pelas figuras de ônibus escolares, o conjunto de estudantes ( $V_s$ ) é representado pelas ilustrações de casas e a escola (0) é representada pela construção ao centro.

A instância apresentada considera 15 estudantes, 7 locais candidatos a paradas de ônibus, um período de 3 dias e a capacidade dos ônibus como 6 estudantes. As rotas percorridas pelos ônibus são representadas por vetores direcionados, os quais indicam o sentido do deslocamento, iniciando e finalizando o percurso na escola. A alocação dos estudantes às paradas de ônibus é representada pelas linhas tracejadas, sendo visitadas as paradas que possuem ao menos um estudante alocado no período considerado.

Para o dia 1 os ônibus precisam transportar 10 estudantes para a escola, no dia 2 é necessário atender a demanda de 6 estudantes, sendo percorrida apenas uma rota para realizar o transporte. Por fim, no dia 3 outros 10 estudantes possuem demanda, sendo um conjunto distinto

do dia 1, gerando-se rotas distintas dos demais dias considerados.

Figura 2 –Resumo dos testes de ajuste de parâmetro através de gráficos linha-barra combinados



Fonte: O autor (2022)

## 4 ALGORITMO PROPOSTO

Devido à complexidade envolvida na resolução dos problemas de roteamento de ônibus escolares (SBRP), que exigem tempos computacionais elevados à medida que o tamanho do problema tratado aumenta, a utilização de métodos heurísticos se enquadra como uma abordagem eficiente para lidar com este problema. Com isso, o presente trabalho propõe uma meta-heurística para resolução do *Multi Period-School Bus Routing Problem*.

### 4.1 Termos Utilizados

As subseções que seguem detalham o funcionamento da meta-heurística proposta, composta por diversos procedimentos e termos que são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4 – Termos utilizados no detalhamento do algoritmo proposto (Continua)

Termos	Definição
$ILS_1$	ILS aplicado a primeira etapa do algoritmo, retornando uma solução para o SBRP
$ILS_2$	ILS aplicado a segunda etapa do algoritmo, retornando uma solução para o MP-SBRP
$\zeta$	Percentual de tolerância de violação da restrição de capacidade
$\xi$	Intensidade da perturbação aplicada a solução
$S$	Conjunto de estudantes ainda não alocados a solução
$V'_p$	Conjunto de paradas que possuem algum estudante alocado
$P_e$	Conjunto de paradas dentro do raio de alcance do estudante $e$
$\mathcal{P}$	Lista com todas as paradas não inseridas na solução
$\mathcal{L}$	Lista ordenada dos custos de inserção $c_{ij}^p$ calculados
$\mathcal{E}$	Lista de estudantes não atendidos pela solução
$\mathcal{M}$	Matriz que contém as paradas não visitadas em cada período $d$
$s^{**}$	Melhor solução encontrada pelo algoritmo para o MP-SBRP
$f^{**}$	Melhor função objetivo encontrada pelo algoritmo para o MP-SBRP
$s^*$	Melhor solução encontrada pelo algoritmo para o SBRP
$s'$	Solução obtida para o SBRP após a perturbação e busca local
$s''$	Solução corrente para o MP-SBRP que passará por inserção, remoção e busca local
$s$	Solução corrente do algoritmo
$r$	Rota analisada
$e$	Estudante analisado

Tabela 4 – Termos utilizados no detalhamento do algoritmo proposto (Conclusão)

Termos	Definição
$p$	Parada analisada
$C_r$	Quantidade de alunos alocados à rota $r$
$\bar{b}_1$	Limiar de aceitação para uma solução do SBRP
$\bar{b}_2$	Limiar de aceitação para uma solução do MP-SBRP
$c_{ij}^p$	Custo de inserção de $p$ entre os pares $(i, j)$ de nós adjacentes
$tot_e$	Quantidade de alunos alocados a solução
$p_r$	Quantidade de paradas que serão reinseridas na solução
$q_p$	O tamanho do menor conjunto de paradas não visitadas em cada período $d$
$S_{pd}$	Conjunto de estudantes alocados à parada $p$ no dia $d$
$s_d$	Conjunto de rotas associadas ao dia $d$ na solução $s$
$\bar{f}$	Custo médio das soluções após a busca local
$\underline{f}$	Melhor solução encontrada até a iteração $\gamma$
$\eta$	Parâmetro de ponderação que controla o critério de aceitação
$\kappa$	Percentual de soluções que são aceitas
$\kappa'$	Percentual de soluções aceitas desde a última atualização
$\varepsilon$	Parâmetro que evita que $\eta$ seja zero
$\bar{p}$	Parada candidata para realocação dos estudantes na heurística de remoção (MP-SBRP)
$\underline{p}$	Lista com as novas paradas em que os estudantes $e$ serão alocados
$custo_e$	Custo de compensação pela realocação do estudante $e$

Fonte: O autor (2022)

## 4.2 Heurística para o MP-SBRP

A meta-heurística proposta é composta de duas etapas: *i*) definição das rotas sem considerar a demanda por períodos (*i.e.*, obtendo-se uma solução para o SBRP) e *ii*) remoção de paradas e reorganização das rotas considerando a demanda por períodos (*i.e.*, obtendo-se uma solução para o MP-SBRP). Tornando, assim, o algoritmo capaz de solucionar ambos os problemas de roteamento.

Na primeira etapa o algoritmo obtém uma solução através da meta-heurística *Iterated Local Search* (ILS), baseada em Lourenço *et al.* (2003), utilizando-se do *Randomized Variable*

*Neighborhood Descent* (RVND), proposto por Subramanian *et al.* (2010), para realização da busca local. Na segunda etapa um operador de remoção é aplicado à solução, o qual removerá as paradas em excesso para cada período (*i.e.*, sem estudantes alocados), sendo aplicado novamente um RVND posteriormente, com um conjunto menor de operadores de vizinhança, na tentativa de encontrar soluções melhores após a remoção. Essas etapas são então repetidas através do ILS, utilizando-se uma heurística de inserção de paradas removidas como mecanismo de perturbação da solução.

O pseudocódigo apresentado no Algoritmo 1 sintetiza o algoritmo proposto neste trabalho, denominado de *Iterated Local Search with Randomized Variable Neighborhood Descent and Remove* (ILS-RVND-R). Inicialmente é necessário fornecer os parâmetros:  $ILS_1$  e  $ILS_2$  (linha 1), que representam o número de iterações sem melhora que a solução será perturbada. Em seguida, uma solução vazia para o MP-SBRP e o seu respectivo valor de função objetivo ( $s^{**}$  e  $f^{**}$ ) são inicializados (linha 3).

O algoritmo inicia com a construção de uma solução inicial  $s$  à partir dos dados fornecidos na instância tratada, sendo executado o algoritmo de Ford-Fulkerson para verificação da alocação dos estudantes na solução obtida. Sendo viável a alocação, a mesma é refinada com a execução da busca local pelo método do RVND, permitindo a modificação da solução através da realocação dos alunos por meio dos algoritmos de alocação dos estudantes. Dada a solução corrente  $s$ , a melhor solução  $s^*$  encontrada até o momento para o SBRP é atualizada (linha 4).

Em seguida, inicia-se o *loop* do  $ILS_1$  (linha 5), perturbando-se à solução  $s$  (que pode ser a melhor solução encontrada  $s^*$  ou uma solução atualizada pelo limiar de aceitação), obtendo-se uma nova solução  $s'$ , sendo realizada nessa solução uma busca local (linha 6). Aplica-se, na sequência, um critério de aceitação da solução (linha 7), sendo  $s^*$  e  $s$  atualizados (linhas 8 e 9) caso a solução possua maior qualidade do que a melhor solução encontrada até o momento ou somente  $s$  atualizado (linha 11) caso a solução esteja dentro de um limiar ( $\bar{b}_1$ ) de aceitação, parâmetro esse apresentado por Máximo e Nascimento (2021).

Após a finalização do  $ILS_1$ , a solução  $s^*$  é replicada para os períodos considerados, obtendo-se a solução  $s''$ , viável para o MP-SBRP. Em seguida, uma heurística de remoção de paradas é aplicada, realocando os estudantes para outras paradas compatíveis, na tentativa de esvaziar uma parada e removê-la da solução nos períodos possíveis (linha 17). Após a etapa anterior, uma busca local através do RVND é realizada nas rotas de cada período, de forma semelhante ao CVRP, e a melhor solução  $s^{**}$  é então salva em  $s$  (linha 18). Em seguida, inicia-se

---

**Algoritmo 1: ILS com RVND e Remoção (ILS-RVND-R)**


---

```

1 Procedimento ILS ( $ILS_1, ILS_2$ )
2 início
3    $s^{**} \leftarrow \emptyset; f^{**} \leftarrow \infty$ 
4    $s \leftarrow$  GeraçãoSoluçãoInical();  $s^* \leftarrow s \leftarrow$  RVND( $s$ )
5   for  $iter \leftarrow 1, \dots, ILS_1$  do
6      $s' \leftarrow$  Perturbação( $s$ );  $s' \leftarrow$  RVND( $s'$ )
7     if  $f(s') < f(s^*)$  then
8        $s^* \leftarrow s'; f^* \leftarrow f(s')$ 
9        $s \leftarrow s^*; iter \leftarrow 0$ 
10    else
11       $\bar{b}_1 \leftarrow$  AtualizarLimiar()
12      if  $f(s') < \bar{b}_1$  then
13         $s \leftarrow s'$ 
14      end
15    end
16  end
17   $s'' \leftarrow$  EspelharSolução( $s^*, |T|$ );  $s'' \leftarrow$  RemoçãoParadas( $s''$ )
18   $s^{**} \leftarrow$  RVND( $s''$ );  $f^{**} \leftarrow f(s'')$ ;  $s \leftarrow s^{**}$ 
19  for  $iter \leftarrow 1, \dots, ILS_2$  do
20     $s'' \leftarrow$  InserçãoParadas( $s$ );  $s'' \leftarrow$  RemoçãoParadas( $s''$ );  $s'' \leftarrow$  RVND( $s''$ )
21    if  $f(s'') < f(s^{**})$  then
22       $s^{**} \leftarrow s''; f^{**} \leftarrow f(s'')$ 
23       $s \leftarrow s^{**}; iter \leftarrow 0$ 
24    else
25       $\bar{b}_2 \leftarrow$  AtualizarLimiar()
26      if  $f(s'') < \bar{b}_2$  then
27         $s \leftarrow s''$ 
28      end
29    end
30  end
31  retorne  $s^{**}$ 
32 fim

```

---

o *loop* do  $ILS_2$  (linha 19), o qual utiliza como perturbação a heurística de inserção de paradas removidas da solução, obtendo-se uma nova solução  $s''$ , a qual será submetida à heurística de remoção de paradas e ao RVND (linha 20). Após esses processos, pode-se atualizar  $s^{**}$  e/ou  $s$  caso o critério de aceitação seja verificado (linhas 21 - 29). Ao final do  $ILS_2$ , a melhor solução para o MP-SBRP ( $s^{**}$ ) é retornada (linha 31). O algoritmo descrito anteriormente é resumido no fluxograma da Figura 9 do Apêndice A.

Os procedimentos de geração da solução inicial (LRA e LAR), particionamento das rotas, busca local através do RVND para o  $ILS_1$  e  $ILS_2$ , perturbação para as soluções do SBRP e MP-SBRP, o limiar de aceitação ( $\bar{b}_1$  e  $\bar{b}_2$ ), heurística de remoção de paradas e heurística de inserção de paradas são melhores detalhados nas próximas subseções como segue: inicialmente, na Subseção 4.3 é apresentado como as soluções são representadas. Nas subseções 4.4 e 4.5 são expostas as heurísticas para obtenção da solução inicial para o SBRP e os algoritmos de alocação utilizados para validar as soluções. Em seguida a Subseção 4.6 apresenta os operadores utilizados na busca local. Na Subseção 4.7, detalha-se o procedimento de perturbação da solução no  $ILS_1$  e  $ILS_2$  e, por fim, na Subseção 4.8 é exposta a heurística de remoção de paradas para o *multi-period*.

### 4.3 Representação da Solução

Uma solução para o SBRP consiste em rotas compostas por pontos de parada, as quais devem ser percorridas por um ônibus partindo da escola inicialmente vazio, o qual será responsável por coletar os estudantes nas paradas determinadas, finalizando a rota com a chegada dos estudantes na escola. Portanto, uma rota pode ser representada por uma sequência de paradas de ônibus que devem ser visitadas em mesma ordem, sendo cada ponto de parada de ônibus representado por um número natural (não repetido).

As rotas podem ser representadas por  $r$ , sendo  $k$  o número de veículos utilizados que variam no intervalo  $[1, n]$ , sendo possível um único veículo ser alocado às paradas visitadas ou um veículo ser alocado por parada da instância. O tamanho de uma rota ( $|r|$ ) varia no intervalo  $[3, (n + 2)]$ , o qual representa a quantidade de pontos de ônibus (*i.e.*,  $[1, n]$ ) mais a escola (ponto de parada representado por 0, no qual será sempre o ponto inicial e final de qualquer percurso realizado). A Figura 3 ilustra a rota apresentada na Figura 2 para o período 2, a qual começa e termina na escola, visitando as paradas 1, 6 e 7.

Além da sequência dos pontos de ônibus a serem visitados, é importante representar em

Figura 3 – Exemplo da representação de uma rota  $r$ 

1	2	3	4	5
0	1	7	6	0

Fonte: O autor (2022)

quais paradas cada aluno está alocado. Para isso, utiliza-se um vetor de tamanho  $|V_s|$ , sendo cada elemento preenchido pela parada na qual o estudante  $e \in V_s$  está alocado. Dados ambos os vetores, é possível obter uma representação da solução do SBRP, além de informações adicionais úteis (*e.g.*, distância total percorrida, quantidade de estudantes por parada e quantidade de estudantes por rota). A Figura 4 apresenta a alocação dos estudantes as paradas de ônibus para o exemplo da Figura 2.

Figura 4 – Exemplo de uma alocação para uma solução do SBRP

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	2	2	3	3	5	5	5	6	6	6	7	7

Fonte: O autor (2022)

Para representar uma solução para o MP-SBRP, um vetor adicional de tamanho  $|T|$  é utilizado, onde cada elemento contém um conjunto de vetores para as rotas de cada período, como pode ser visualizado na Figura 5, que representa a instância apresentada na Figura 2. Dessa forma, é possível obter as rotas para cada período  $d \in T$ , e a alocação dos estudantes às paradas (vetor que independe do período), representando a solução do MP-SBRP através de uma matriz.

Figura 5 – Exemplo de uma alocação para uma solução do MP-SBRP

1	2	3
0-2-3-0	0-1-7-6-0	0-3-5-0
0-5-7-0		0-7-6-0

Fonte: O autor (2022)

#### 4.4 Geração da Solução Inicial

O procedimento de construção das rotas é a etapa inicial do algoritmo, a qual irá inserir os pontos de ônibus ainda não visitados em rotas de maneira iterativa. Como uma maneira de diversificar as soluções iniciais geradas, dois procedimentos distintos são apresentados. O primeiro procedimento se baseia na abordagem *Location-Routing-Allocation* (LRA) e o segundo se baseia na abordagem *Location-Allocation-Routing* (LAR).

#### 4.4.1 Location-Routing-Allocation

Dada uma lista  $S$  de estudantes ainda não alocados à solução (linha 3) e uma lista de paradas ( $\mathcal{P}$ ) que contém todas as paradas ainda não inseridas na rota, o Algoritmo 2 se inicia com a escolha aleatória de uma parada  $p \in \mathcal{P}$ , a qual será inserida em uma rota  $r$ , que contém apenas as paradas  $p$  e 0 (*i.e.*, escola). Na sequência, a alocação dos alunos é realizada a  $r$  de maneira sequencial, ou seja, a prioridade de alocação segue a ordem de identificação dos estudantes, dada pela instância (linha 5).

Em seguida, a parada  $p$  é removida da lista  $\mathcal{P}$ , a capacidade de  $r$  ( $C_r$ ) e a lista de estudantes não alocados ( $S$ ) são atualizados (linha 6). Caso haja capacidade, outra parada aleatória é selecionada e adicionada à  $r$ , após a primeira parada inserida, e mais estudantes são alocados a rota, atualizando-se  $C_r$  e as listas  $\mathcal{P}$  e  $S$  (linhas 8 - 9). Sendo ainda possível alocar estudantes à rota  $r$ , uma heurística de inserção mais barata é executada (linhas 11 - 21), calculando-se o custo de inserção  $c_{ij}^p$  de cada parada  $p \in \mathcal{P}$  entre os pares  $(i, j)$  dos nós adjacentes (escola e paradas) em  $r$  através da Equação (4.1).

$$c_{ij}^p = d_{ik} + d_{kj} - d_{ij}. \quad (4.1)$$

Os custos e os movimentos de inserção correspondentes são adicionados a uma lista  $\mathcal{L}$ , ordenada de maneira não-decrescente a partir do critério custo (linha 11). Então, os movimentos presentes em  $\mathcal{L}$  são analisados, sendo inseridas à solução as paradas que permitam um aumento na quantidade de alunos atendidos pela rota. No processo, a lista é atualizada (linha 18) após ser totalmente verificada, a capacidade ainda permitir inserções de paradas e os conjuntos  $\mathcal{P}$  ou  $S$  ainda possuir elementos. Dessa forma, a iteração em  $i$  ocorre verificando-se a inserção da parada em  $\mathcal{L}(i)$  na rota, permitindo uma diversificação à solução.

O procedimento de inserção mais barata (linhas 12 - 21) finaliza quando: *i*) a capacidade do veículo for atendida, *ii*) todos os alunos tenham sido alocados à solução ou *iii*) todas as paradas tenham sido verificadas. Sendo um dos critérios anteriores atendido, a rota é adicionada à solução inicial do SBRP (linha 24). Por sua vez, o procedimento de formação das rotas (linhas 4 - 25) é executado até que: *i*) todas as paradas tenham sido verificadas ou *ii*) todos os estudantes tenham sido alocados à solução.

---

**Algoritmo 2: Location-Routing-Allocation**


---

```

1  Procedimento de Construção das Rotas - LRA ( $\mathcal{P}$ )
2  início
3       $S \leftarrow \text{inicializaConjuntoEstudantesNaoAlocados}(V_s)$ 
4      while  $\mathcal{P} \neq \emptyset$  and  $S \neq \emptyset$  do
5           $p' \leftarrow \text{selecionarParadaAleatoria}(\mathcal{P}); r \leftarrow \text{criarRota}(p'); \text{alocarEstudantes}(r, S)$ 
6           $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \setminus p'; \text{atualizarCapacidade}(r); \text{atualizarEstudantesNaoAlocados}(S)$ 
7          if  $(C_r < C)$  then
8               $p' \leftarrow \text{selecionaParadaAleatoria}(\mathcal{P}); r \leftarrow (r \cup p'); \text{alocarEstudantes}(r, S)$ 
9               $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \setminus p'; \text{atualizarCapacidade}(r); \text{atualizarEstudantesNaoAlocados}(S)$ 
10             if  $(C_r < C)$  then
11                 Criar lista  $\mathcal{L}$ , ordenando-a de maneira crescente através de  $c_{ij}^p; i \leftarrow 1$ 
12                 while  $((C_r < C)$  and  $(i < |\mathcal{L}|)$  and  $(S \neq \emptyset)$  and  $(\mathcal{P} \neq \emptyset))$  do
13                      $r \leftarrow \text{InsercaoMaisBarata}(\mathcal{L}_i, r); \text{alocarEstudantes}(r, S)$ 
14                      $\text{atualizarCapacidade}(r); \text{atualizarEstudantesNaoAlocados}(S)$ 
15                     while  $\mathcal{L}(i)$  for uma parada já visitada do
16                          $i \leftarrow i + 1$ 
17                         if  $i = |\mathcal{L}|$  then
18                              $\text{atualizarLista}(\mathcal{L}); i \leftarrow 1$ 
19                         end
20                     end
21                 end
22             end
23         end
24          $s' \leftarrow s' \cup r; r \leftarrow \emptyset$ 
25     end
26     if  $\text{verificarAlocação}(s') = \text{true}$  then
27         retorne  $s'$ 
28     else
29         while  $\text{verificarAlocação}(s') = \text{false}$  do
30              $s' \leftarrow \text{particaoRotas}(s'); a \leftarrow \text{verificarAlocação}(s')$ 
31         end
32         retorne  $s'$ 
33     end
34 fim

```

---

Por fim, uma etapa de verificação da alocação dos estudantes é realizada (linhas 26 - 33) através do algoritmo de Ford-Fulkerson (ver Seção 4.5). Caso todos os estudantes estejam alocados, a solução inicial para o SBRP é retornada (linha 27). Caso contrário, o conjunto de rotas obtidos é armazenado em  $s'$ , sendo submetido a uma função de particionamento de rotas (ver Seção 4.4.2), com o objetivo de redistribuir os estudantes entre as rotas, viabilizando  $s'$  como uma solução inicial (linha 30).

#### 4.4.2 Particionamento das rotas

O procedimento de particionamento das rotas (Algoritmo 3) ocorre caso o procedimento inicial de construção (Algoritmo 2) obtenha uma solução inviável em termos de alocação dos estudantes. Inicialmente, uma lista com os estudantes não atendidos pela solução ( $\mathcal{E}$ ) é obtida (linha 2). Para cada estudante  $e \in \mathcal{E}$  (linha 4) são verificados todos os arcos pertencentes a  $A_s$  (*i.e.*, todas as paradas  $p \in V_p$  dentro de uma área de raio  $D$ , a partir do estudante  $e$ ), criando-se uma lista ( $P_e$ ) de paradas vizinhas (linha 5).

---

#### Algoritmo 3: Particionamento de Rotas

---

```

1 Procedimento de Particionamento de Rotas ( $s$ )
2 Seja  $\mathcal{E}$  o conjunto de estudantes não alocados a nenhuma parada
3 início
4   for  $e \leftarrow 1, \dots, |\mathcal{E}|$  do
5     Cria uma lista  $P_e$ 
6     for  $p \leftarrow 1, \dots, |P_e|$  do
7       if  $i, ii$  e  $iii = verdadeiro$  then
8         Seja  $r$  a rota que visita  $p$ 
9          $s \leftarrow s \setminus r$ 
10         $(r_1, r_2) \leftarrow \text{particionaRota}(r, p)$ 
11         $s \leftarrow s \cup (r_1, r_2)$ 
12      end
13    end
14  end
15  retorne  $s$ 
16 fim

```

---

Para cada parada  $p \in P_e$  (linha 6) três condições são verificadas: *i*) se  $p$  está presente na solução corrente, *ii*) se a rota que contém  $p$  tem mais de uma parada além de  $p$  (desconsiderando a escola) e *iii*) se a rota analisada ainda não foi particionada. Caso as condições sejam satisfeitas (linha 7), a rota  $r$  é removida da solução  $s$  (linha 9) e particionada em duas rotas menores, denominadas de  $r_1$  e  $r_2$ , exatamente na posição de  $p$  (linha 10), sendo adicionadas em seguida na solução  $s$  (linha 11). O procedimento é então repetido até se encontrar uma solução viável.

#### 4.4.3 Location-Allocation-Routing

Dado o conjunto de estudantes que utilizarão o serviço de transporte escolar ( $V_s$ ), estudantes ainda não alocados a nenhuma parada são escolhidos aleatoriamente (linha 5), atribuindo a estes estudantes uma parada  $p \in P_e$  que ainda não esteja cheia (linhas 6 - 12), seguindo a regra de *First Fit* (MARTELLO; TOTH, 1990).

Após alocar todos os estudantes  $e \in S$  e obter a quantidade deles alocados por parada ( $C_p \forall p \in V_p$ ), o algoritmo inicia a etapa de inserção das paradas nas rotas (linhas 15 - 32). Nesse processo, as paradas que possuem algum estudante alocado são adicionadas à solução de maneira sequencial e na posição de menor custo existente, calculado também pelo critério de inserção mais barata, apresentado na Equação (4.1). Ou seja, a inserção da parada  $p \in V'_p$  na solução pode ocorrer das seguintes maneiras: *i*) a parada é inserida em uma rota já existente ou *ii*) a parada é inserida em uma nova rota (composta por ela e pela escola).

Inicialmente uma solução vazia é inicializada (linha 15) e um conjunto de paradas que possuem algum estudante alocado ( $V'_p$ ) é definido (linha 16). Para toda parada  $p \in V'_p$  (linha 17) um verificador é definido como *false* (linha 18), o qual indicará se é possível adicionar a parada  $p$  em uma rota já existente ou será necessário a criação de uma nova rota. Por fim, adiciona-se a parada à solução e se atualiza a capacidade da rota correspondente (linhas 19 - 31).

---

**Algoritmo 4: Location-Allocation-Routing**


---

```

1  Procedimento de Construção das Rotas - LAR ( )
2  início
3  |  $S \leftarrow V_s, C'_p \leftarrow 0 \forall p \in V_p$ 
4  | while  $S \neq \emptyset$  do
5  | |  $e \leftarrow \text{escolherEstudanteAleatoriamente}(S)$ 
6  | | for  $(p \in |P_e|)$  do
7  | | | if  $C'_p < C$  then
8  | | | |  $p \leftarrow \text{alocarEstudante}(e)$ 
9  | | | |  $C'_p \leftarrow C'_p + 1$ 
10 | | | | break
11 | | | end
12 | | end
13 | |  $S \leftarrow S \setminus e$ 
14 | end
15 |  $s \leftarrow \emptyset$ 
16 | Seja  $V'_p$  o conjunto de paradas que possuem algum estudante alocado
17 | for  $p \leftarrow 1, \dots, |V'_p|$  do
18 | |  $\text{verificador} \leftarrow \text{false}$ 
19 | | for  $(r \in s)$  do
20 | | | if  $C_r + C'_p \leq C$  then
21 | | | |  $r \leftarrow \text{insercaoMaisBarata}(p)$ 
22 | | | |  $C_r = C_r + C'_p$ 
23 | | | |  $\text{verificador} \leftarrow \text{true}$ 
24 | | | | break
25 | | | end
26 | | end
27 | | if  $\text{verificador} = \text{false}$  then
28 | | |  $r' \leftarrow \text{inicializarRota}(p)$ 
29 | | |  $C_{r'} = C'_p$ 
30 | | |  $s \leftarrow s \cup r'$ 
31 | | end
32 | end
33 | retorne  $s$ 
34 fim

```

---

## 4.5 Algoritmos para alocação de estudantes

Para solucionar o problema de alocação dos estudantes às paradas de ônibus, viabilizando as soluções obtidas, três abordagens são utilizadas: *i*) algoritmo exato de Ford-Fulkerson, *ii*) algoritmo parcial de Ford-Fulkerson e *iii*) algoritmo guloso proposto por Silva Neto *et al.* (2020).

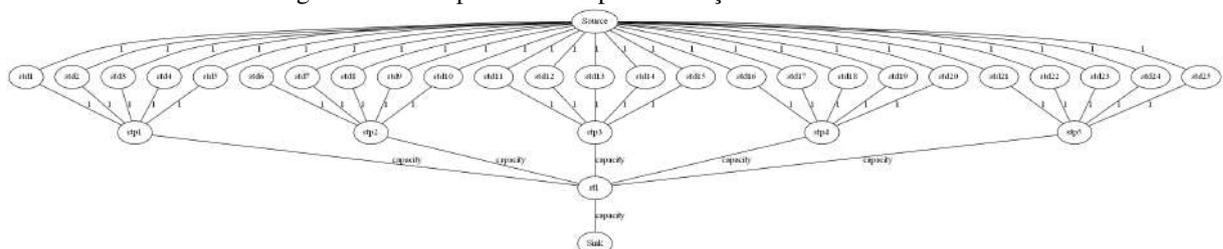
### 4.5.1 Algoritmo Ford-Fulkerson

O algoritmo de fluxo em rede Ford-Fulkerson (FORD; FULKERSON, 1956), capaz de retornar uma alocação dos estudantes as paradas de ônibus, é um algoritmo iterativo exato que procura a cada iteração percorrer um caminho que aumente a quantidade de fluxo nas arestas do grafo, proporcionando um aumento no fluxo transportado por toda a rede. Para tanto, um grafo  $G'$  é construído através das informações da instância do problema e da solução atual  $s$ , possuindo os conjuntos de nós: *source*, estudantes, paradas, rotas e *sink*. Os arcos que conectam os nós são ponderados, representando a capacidade máxima de fluxo no arco.

Inicialmente, o nó *source* é conectado a cada um dos nós de estudantes com peso 1. Em seguida, os nós de estudantes são conectados com os nós de paradas, onde cada estudante é conectado às paradas as quais alcança com um arco de peso 1. A próxima conexão se dá entre os nós de paradas e os nós de rotas, conectando cada parada a sua rota correspondente na solução através de um arco de peso igual à capacidade dos ônibus. Por fim, arcos com peso igual a capacidade dos ônibus conectam os nós de rotas com o nó *sink*.

O algoritmo precisa retornar um fluxo do *source* ao *sink* igual a quantidade de estudantes envolvidos (dado a instância) para que a solução seja viável para o problema. Como exemplo, tomemos a menor instância apresentada por Schittekat *et al.* (2013), a qual contém: 25 estudantes (std) e 5 paradas de ônibus (stp) - desconsiderando a escola. O grafo  $G'$  resultante para o problema de alocação de estudantes, tomando a solução ótima para o problema (formada por uma rota apenas - rt1), é apresentado na Figura 6.

Figura 6 – Exemplo de Grafo para execução do Ford-Fulkerson



Fonte: O autor (2022)

Em cada busca iterativa do algoritmo, no pior dos casos, terá que percorrer todo o conjunto de arestas ( $E$ ) do grafo, obtendo uma complexidade de tempo computacional equivalente a  $\Theta(f|E|)$ , sendo  $f$  o fluxo máximo que percorre o grafo. Para diminuir o impacto computacional da execução do Ford-Fulkerson, o conjunto de nós de paradas de ônibus é omitido, diminuindo a quantidade de vértices e arcos envolvidos. Dessa forma, os estudantes que alcançam uma parada  $p \in V_p$  são conectados por arcos de peso 1 a rota  $r$ , tal que  $p \in r$ . Mesmo para um exemplo trivial, a complexidade passa de  $\Theta(25 \cdot 56)$  para  $\Theta(25 \cdot 51)$ , como o apresentado na Figura 6, ou seja diminui de  $\Theta(1400)$  para  $\Theta(1275)$ , resultando em um tempo computacional menor.

#### 4.5.2 Algoritmo Ford-Fulkerson Parcial

O algoritmo de Ford-Fulkerson realiza buscas iterativas em um grafo  $G'$ . Para o problema apresentado na Figura 6, o tempo computacional exigido é relativamente pequeno, pois envolve poucos estudantes e arestas, tornando a solução trivial. Entretanto, para instâncias maiores (*e.g.*, 800 estudantes e 400 pontos de paradas de ônibus) o tempo exigido é considerável; tornando o algoritmo custoso, ainda mais quando utilizado na etapa de busca local, onde é requisitado uma verificação de alocação para cada movimento de melhoria na solução.

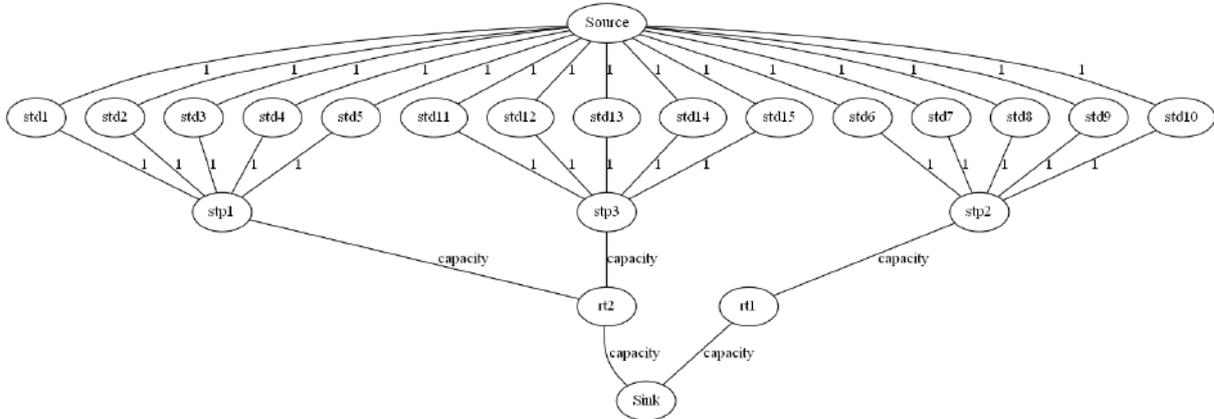
Diante dessa problemática, é proposta uma abordagem de resolução parcial para o problema de alocação. Essa abordagem é utilizada nos operadores inter-rotas da busca local e tem por objetivo diminuir o tempo computacional exigido para verificar a viabilidade de um movimento de melhoria. A ideia está em utilizar uma parcela do grafo  $G'$ , diminuindo a quantidade de fluxo na rede e a quantidade de arestas envolvidas, impactando positivamente na complexidade e tempo computacional.

Tomemos como exemplo a instância apresentada na Figura 6, assumindo uma capacidade de valor 10 e uma solução com 3 rotas ( $rt_1 = 10$  estudantes,  $rt_2 = 5$  estudantes e  $rt_3 = 10$  estudantes). Em uma busca local é verificado que o movimento de mudança de  $stp_1$  para  $rt_2$  impactará positivamente no custo da solução. Dessa forma, o grafo parcial  $G''$  apresentado na Figura 7 pode ser obtido. Note que para a verificação do movimento é necessário apenas  $\Theta(230)$ , ao invés de  $\Theta(1275)$ , e obtendo uma complexidade de  $\Theta(210)$  aplicando a conexão direta entre os nós de estudantes e os nós de rotas (*i.e.*, descartando os nós de paradas).

Vale ressaltar que ao não considerar todas as arestas e vértices do grafo  $G'$ , o método de alocação através do grafo parcial  $G''$  pode não garantir a viabilidade da solução, mesmo sendo viável. Por outro lado, o método pode garantir a viabilidade de uma quantidade considerável

de movimentos, economizando tempo computacional do algoritmo. Dessa forma, os usos dos grafos  $G''$  e  $G'$  podem ser combinados para obter bons resultados em um menor tempo.

Figura 7 – Exemplo de Grafo para execução do Ford-Fulkerson Parcial



Fonte: O autor (2022)

### 4.5.3 Alocação Gulosa

Uma outra maneira de testar a alocação dos alunos é através do algoritmo guloso apresentado em Silva Neto *et al.* (2020), descrito no Algoritmo 5. Nesse algoritmo, os estudantes que possuem menos paradas  $p \in s$  dentro do seu raio de alcance são alocados primeiro, designando o estudante  $e$  para parada  $p$  mais próxima. Dessa maneira, um conjunto  $S \leftarrow V_s$  de estudantes é ordenado (linha 5), sendo percorrido de maneira sequencial (linha 6). Para cada estudante  $e$ , verificam-se as paradas alcançáveis (linha 8), alocando-o para aquela mais próxima que possua capacidade para o receber (linhas 9 - 14). Ao final, a alocação é bem sucedida caso o total de alunos alocados seja igual ao total de alunos da instância (linha 18). Não sendo bem sucedida (linha 20), os demais algoritmos citados podem ser executados na tentativa de encontrar uma alocação viável.

---

**Algoritmo 5: Alocação Gulosa**


---

```

1 Procedimento de Alocação Gulosa ( $s$ )
2 início
3    $C_r \leftarrow 0, \forall r \in s$ 
4    $tot_e \leftarrow 0$ 
5    $S \leftarrow V_s$  ordenado de maneira crescente, de acordo com o número de paradas
      alcançadas pelo estudante
6   for ( $e \in S$ ) do
7      $P_e \leftarrow$  conjunto com as paradas dentro do raio de alcance do estudante  $e$  ordenado
      de maneira crescente em relação a distância
8     for ( $p \in P_e$ ) do
9        $r \leftarrow$  Rota a que  $p$  pertence
10      if ( $C_r < C$ ) then
11         $C_r \leftarrow C_r + 1$ 
12         $tot_e \leftarrow tot_e + 1$ 
13        break
14      end
15    end
16  end
17  if ( $tot_e = |V_s|$ ) then
18    retorne true
19  else
20    retorne false
21  end
22 fim

```

---

Fonte: Silva Neto *et al.* (2020)

#### 4.6 Heurística de Busca Local

A busca local para o SBRP é feita através da heurística RVND. O VND é uma variação do *Variable Neighborhood Search* (VNS), no qual um conjunto de operadores de vizinhanças são utilizados para intensificar a busca por soluções de maior qualidade em diferentes regiões do espaço de soluções do problema, sem a utilização de uma etapa de perturbação. O RVND, proposto inicialmente por Subramanian *et al.* (2010), consiste na intensificação de maneira diversificada, escolhendo os operadores de vizinhança de maneira aleatória, sem seguir a lista

sequencialmente como realizado no VND.

A busca local é realizada por meio de operadores de vizinhança que alteram a ordem de visita de uma ou mais paradas de ônibus, podendo movê-las de uma rota para outra. Operadores cujas alterações envolvem uma única rota são chamados de operadores intra-rota, enquanto que aqueles que envolvem duas rotas (ou mais) são chamados de inter-rotas. Para checar a viabilidade das soluções obtidas (quanto à capacidade dos veículos) com os operadores inter-rotas torna-se necessário resolver o problema de alocação de estudantes às paradas.

No algoritmo aplicado, inicialmente são executados os operadores intra-rota, até que não seja possível encontrar soluções vizinhas melhores que a atual. Em seguida, os operadores inter-rotas são aplicados, utilizando os algoritmos de alocação descritos na Seção 4.5 para checar à viabilidade dos movimentos. A viabilidade é verificada devido à remoção ou alteração da posição das paradas nas rotas, podendo tornar a atual alocação de estudantes inviável para a nova solução encontrada. Dessa forma, permite-se que a capacidade dos veículos possa ser violada por um movimento inter-rotas, pois a nova solução pode ser viável para o problema através de uma nova alocação dos estudantes às paradas, de tal maneira que não viole as restrições de capacidade.

Com a finalidade de limitar a quantidade de movimentos verificados pelos algoritmos de alocação, um parâmetro  $\zeta$  é determinado, indicando o percentual de tolerância de violação da capacidade. Dessa forma, caso um dos operadores inter-rotas encontre uma solução melhor que a solução corrente, dentro do percentual de tolerância  $\zeta$ , a verificação de viabilidade do movimento é executada. Ao final, caso o movimento seja viável, aplica-se novamente os operadores intra-rota (apenas nas rotas modificadas). O processo de busca local pelos operadores inter-rotas finaliza quando todos os movimentos forem verificados de maneira exaustiva e não tragam nenhum benefício para a solução atual.

Quando aplicado ao contexto do MP-SBRP, o RVND é executado de maneira semelhante ao CVRP, *i.e.*, realizando somente movimentos inter-rotas que não violem a capacidade das rotas envolvidas no processo. Além disso, não são aplicados os operadores de *remove* e *replace*, pois suas eficiências estão diretamente relacionadas com a realocação dos alunos entre as paradas da solução, tarefa de maior complexidade para a solução do *multi-period*. Dessa forma, estes operadores são aplicados através de estratégias específicas para o problema.

#### 4.6.1 Operadores Intra-rota

O conjunto de vizinhanças intra rotas é composto pelos operadores de *Reinsertion*, *Or-opt* (OR, 1976), *Swap* (NAGY; SALHI, 2005) e *2-opt* (CROES, 1958), os quais são descritos abaixo.

- ***Reinsertion*** - Consiste na transferência de uma parada da sua posição atual para uma nova posição.
- ***Or-Opt2*** - Consiste na transferência de duas paradas adjacentes da sua posição atual para uma nova posição.
- ***Or-Opt3*** - Consiste na transferência de três paradas adjacentes da sua posição atual para uma nova posição.
- ***Swap*** - Consiste na troca de posição entre duas paradas não adjacentes.
- ***2-opt*** - Consiste na remoção de dois arcos na rota, inserindo dois novos arcos à mesma rota.

#### 4.6.2 Operadores Inter-rotas

Uma parcela do conjunto de vizinhanças inter-rotas se baseia no  $\lambda$ -*interchanges* (OSMAN; LAPORTE, 1996), na qual os operadores de *Reinsertion*, *Or-Opt2*, *Swap* (1,1), (2,1) e (2,2) são capazes de trocar  $\lambda$  paradas entre duas rotas. Enquanto o restante do conjunto é composto pelos operadores *remove* e *replace*, que se baseiam em trocas de paradas entre dois subconjuntos de paradas: visitadas e não visitadas (SCHITTEKAT *et al.*, 2013). Uma descrição detalhada de cada operador é apresentada abaixo.

- ***Reinsertion*** - Consiste na transferência de uma parada da sua posição atual para uma nova rota.
- ***Or-Opt2*** - Consiste na transferência de duas paradas adjacentes da sua posição atual para uma nova rota.
- ***Swap (1,1)*** - Consiste na troca de posição entre duas paradas de rotas diferentes.
- ***Swap (2,1)*** - Consiste na troca de posição entre duas paradas adjacentes com uma parada de rota diferente.
- ***Swap (2,2)*** - Consiste na troca de posição entre dois conjuntos de paradas adjacentes, pertencentes a rotas diferentes.
- ***Remove*** - Consiste na remoção de uma parada da sua rota.
- ***Replace*** - Consiste na troca de uma parada pertencente a solução com uma parada não

pertencente.

#### 4.7 *Iterated Local Search (ILS)*

Como uma estratégia de diversificação da solução, auxiliando na exploração do espaço de soluções do problema, a meta-heurística ILS, baseada em Lourenço *et al.* (2003), é empregada no algoritmo. Esta meta-heurística é responsável por aplicar procedimentos de perturbação na solução corrente, obtendo uma nova solução inicial. Para o algoritmo proposto, além dos operadores de perturbação, um conjunto de operadores de *Destroy-and-Repair* são utilizados, proporcionando uma perturbação de maior intensidade na primeira etapa. Na segunda etapa, a perturbação é realizada através de uma heurística de inserção de paradas removidas.

##### 4.7.1 *Operadores de perturbação*

A estratégia de perturbação é empregada para que o algoritmo consiga explorar novas áreas no espaço de soluções e tenha maior habilidade em escapar de ótimos locais do problema. Na primeira etapa, uma perturbação é escolhida aleatoriamente e aplicada com intensidade  $\xi$  a cada iteração  $j$ , tal que  $\xi$  é limitado por limiares de perturbação que aumentam a cada iteração que não seja possível encontrar uma solução de melhor qualidade, e retorna aos valores iniciais caso contrário (*i.e.*,  $\xi \in [LB, UB]$ ). Dessa maneira, a cada iteração não bem sucedida do ILS<sub>1</sub> a quantidade de movimentos de perturbação aumenta.

Os operadores de perturbação são baseados, de maneira semelhante à Seção 4.6, no  $\lambda$ -*interchanges* (OSMAN; LAPORTE, 1996), permitindo a troca de paradas entre duas rotas, ou até mesmo na mesma rota. Uma descrição detalhada dos operadores é apresentada abaixo.

- **Multiple-Swap** (1,1): múltiplos movimentos de *Swap* são realizados intra e inter-rota (caso seja possível).
- **Multiple-Shift** (1,0): múltiplos movimentos de *Shift* são realizados intra e inter-rota (caso seja possível).

##### 4.7.2 *Destroy-and-Repair*

Os operadores de *Destroy-and-Repair* são baseados no conceito de indução de folga (*i.e.*, folga de capacidade e folga espacial), através da remoção e inserção de paradas (CHRISTIAENS; BERGHE, 2020). Diferentemente dos operadores da classe *multiple*, que são

operadores independentes, para que a perturbação seja realizada na solução através dos operadores de *Destroy-and-Repair*, é necessária a execução de um operador de destruição, seguido pela execução de um operador de reparação. Dessa maneira, os operadores são capazes de modificar a solução com a remoção das paradas da sua posição inicial e inserção em outras posições. Os operadores de destruição e reparação utilizados neste trabalho são baseados nos utilizados por Christiaens e Berghe (2020) e Máximo e Nascimento (2021), e estão descritos abaixo.

- **Concentric Removal:** uma parada  $p \in s$  é escolhida e removida da solução, assim como são removidas, em ordem aleatória, as paradas  $p'$  que estão contidas em uma área de raio  $2D$  e com centro em  $p$ .
- **Sequential Removal:** uma quantidade aleatória  $n'$  e uma posição qualquer  $i$  é escolhida para cada rota  $r \in s$ , tal que as paradas que pertencem ao intervalo  $[i, (i + n')]$  são removidas da solução, podendo-se remover paradas pertencentes ao início da rota caso  $(i + n') > (|r| - 1)$ .
- **Best Repair:** as paradas removidas da solução, e que possuem algum estudante alocado, são reinseridas na solução na melhor posição possível. Caso não seja possível alocar a parada a nenhuma rota, devido à capacidade, uma nova rota é criada adicionando-se a parada atualmente analisada.
- **Rand Repair:** as paradas removidas da solução, e que possuem algum aluno alocado, são reinseridas na solução em uma rota  $r \in s$  escolhida de maneira aleatória, na melhor posição possível. Caso não seja possível alocar a parada em nenhuma rota, devido à capacidade, uma nova rota é criada adicionando-se a parada atualmente analisada.

Para elevar um pouco mais o grau de perturbação, na tentativa de tornar o algoritmo mais hábil de escapar de ótimos locais, eventualmente uma etapa de realocação dos estudantes é realizada nos operadores de reparação. Para isso, verifica-se a possibilidade de realocar os estudantes de uma parada removida da solução pelos operadores de remoção para uma parada também removida da solução e que esteja em sua vizinhança (*i.e.*, dentro do raio  $D$  de cobertura). Caso possível realocar todos os alunos, o processo é realizado e a parada vazia não será considerada no processo de inserção, possibilitando a inserção de paradas que inicialmente não seriam consideradas na solução por não serem removidas pelos operadores de perturbação.

### 4.7.3 Heurística de inserção de paradas - MP-SBRP

A reinserção de paradas é utilizada como uma estratégia de perturbação da solução atual para o MP-SBRP, a qual não utiliza parâmetros de controle de intensidade da perturbação. Inicialmente, para sua execução, é necessário definir a quantidade de paradas a serem reinseridas ( $p_r$ ) para cada período  $d \in T$ . Para isso, uma matriz que armazena quais as paradas não são visitadas para cada período  $d$  ( $\mathcal{M}$ ) é utilizada para determinar o tamanho do menor conjunto, não vazio, de paradas ( $q_p$ ). Em seguida, atribui-se a  $p_r$  um número inteiro escolhido aleatoriamente no intervalo  $[1, q_p]$ , ou seja, a cada perturbação de reinserção, ao menos uma parada removida anteriormente será reinserida. A exceção dessa etapa está nos períodos em que nenhuma parada foi removida, neste caso o período não é perturbado.

Na sequência, são escolhidas quais serão as paradas reinseridas na solução. Assim, para cada período  $d$ , enquanto a quantidade de paradas reinseridas para o período for menor que  $p_r$ , escolhe-se aleatoriamente uma parada  $p \in \mathcal{M}$ , tal que  $p$  não pertence a solução corrente no período  $d$ , adicionando-se  $p$  na melhor posição no período correspondente (*i.e.*, na posição em que o custo de inserção é o menor possível). Além do exposto, a parada  $p$  também é reinserida nos demais períodos em que não está presente na solução atual, na tentativa de proporcionar ao algoritmo uma maior capacidade de realocação dos alunos e remoção de paradas da solução.

### 4.7.4 Limiar de Aceitação

O limiar de aceitação de uma solução ( $\bar{b}_1$  e  $\bar{b}_2$ ) utilizado foi o mesmo adotado por Máximo e Nascimento (2021). O parâmetro determina o custo mínimo que uma solução deve ter para atualizar a solução a ser perturbada, sendo calculado através da soma entre a melhor solução encontrada até a iteração  $\underline{f}$  e a diferença ponderada entre  $\underline{f}$  e o custo médio das soluções obtidas após a busca local ( $\bar{f}$ ). A ponderação é realizada utilizando o parâmetro  $\eta$ , conforme apresentado na Equação 4.2, o qual controla a quantidade de soluções aceitas pelo limiar ( $\bar{b}$ ).

$$\bar{b} = \underline{f} + \eta(\bar{f} - \underline{f}). \quad (4.2)$$

O parâmetro  $\bar{f}$  é calculado através da média dos custos encontrados na solução, atualizando-se  $\bar{f}$  a cada iteração através do acréscimo do novo custo encontrado  $f$ . A atualização é realizada de formas diferentes, o que está condicionado ao número atual de iterações sem melhora ( $it$ ) e ao parâmetro  $\gamma$ . Dessa forma, dois casos são abrangidos: *i) it*  $\leq \gamma$  e *ii) it*  $> \gamma$ . Ambos os casos e

suas respectivas fórmulas são apresentadas na Equação 4.3.

$$\bar{f} = \begin{cases} \bar{f}(1 - \frac{1}{\gamma}) + \frac{f(s)}{\gamma}, & \text{se } it > \gamma \\ \frac{\bar{f}(it-1) + f(s)}{it}, & \text{se } it \leq \gamma \end{cases} \quad (4.3)$$

O parâmetro  $\eta$  é atualizado dinamicamente a cada  $\gamma$  soluções aceitas, através da equação  $\eta = \max(\varepsilon, \kappa\eta / \kappa^r)$ . O parâmetro  $\kappa \in [0, 1]$  representa o percentual de soluções que são aceitas,  $\kappa^r$  o percentual de soluções aceitas desde a última atualização. E, o parâmetro  $\varepsilon$  é um valor muito pequeno, para evitar que  $\eta$  seja igual a zero.

#### 4.8 Heurística de remoção de paradas - MP-SBRP

A remoção de paradas é realizada após a solução do SBRP ser obtida e replicada para os períodos analisados. Sendo  $s_d$  o conjunto de rotas associadas ao dia  $d$  na solução  $s$  (linha 3), para cada período  $d \in T$  (linha 4), o Algoritmo 6 tenta remover da solução  $s$  as paradas  $p \in s_d$ . Uma maior prioridade de remoção é dada às paradas já presentes na solução e uma menor para as paradas que foram reinseridas na solução pela heurística de inserção da Seção 4.7.3.

Os estudantes alocados a  $p$  são salvos em um conjunto (linha 8) e ordenados de maneira crescente pelo número de paradas que alcançam na solução, dando prioridade de realocação para os estudantes com possuem acesso a menos paradas (linha 9). Seja  $S_{(p,d)}$  o conjunto ordenado de estudantes alocados à parada  $p$  no período  $d$ . Tenta-se então realocar cada estudante  $e \in S_{(p,d)}$  para outras paradas. Seja  $\bar{p} \in s$  uma possível parada para a realocação do estudante  $e$ , sendo a parada  $\bar{p}$  diferente de  $p$  e estando dentro do raio de alcance do estudante (linha 13), uma função de compatibilidade é executada para verificar se  $\bar{p}$  é visitada em todos os períodos em que o estudante  $e$  possui demanda (linha 14).

Caso haja compatibilidade, verifica-se se o veículo que percorre a rota que visita a parada  $\bar{p}$  possui capacidade para atender o estudante  $e$ , assim como, é verificado se o custo de compensação é menor encontrado até o momento, atualizando-se o menor custo de compensação (custo <sub>$e$</sub> ) e a parada na qual o estudante poderá ser realocado (linhas 16 - 18). O custo de compensação é um custo equivalente à remoção da parada  $\bar{p}$  da solução, esse custo garante que o estudante  $e$  seja alocado à parada que possui menor impacto econômico com a sua possível remoção, na tentativa de aumentar as chances de remover paradas com maior impacto no tamanho das rotas.

Ao final, sendo possível realocar todos os estudantes alocados em  $p$ , uma etapa de realocação é feita, distribuindo os estudantes da parada  $p$  para as suas novas paradas (salvas

---

**Algoritmo 6: Remoção de Paradas - MP-SBRP**


---

```

1  Procedimento de Remoção de Paradas ( $s$ )
2  início
3  Seja  $s_d$  o conjunto de rotas associadas ao dia  $d$  na solução  $s$ 
4  for  $d \in T$  do
5      for  $p \in s_d$  do
6           $total_{estudantes} \leftarrow 0$ 
7          Seja  $\underline{p}$  o vetor com as possíveis paradas de realocação dos estudantes
8           $S_{(p,d)} \leftarrow$  conjunto de estudantes alocados à parada  $p$  no dia  $d$ 
9          Ordenar  $S_{(p,d)}$  de maneira crescente, de acordo com a quantidade de paradas
              alcançadas pelo estudante  $e$  em  $s_d$ 
10         for  $e \in S_{(p,d)}$  do
11              $custo_e \leftarrow \infty$ ,  $\bar{p}_e \leftarrow -1$ 
12             for  $\bar{p} \in s_d$  do
13                 if ( $\bar{p} \neq p$ ) and  $\bar{p}$  for alcançável por  $e$  then
14                     if  $checarCompatibilidade(\bar{p}, e)$  then
15                         Sendo  $r$  a rota que contém  $\bar{p}$ 
16                         if ( $C_r < C$ ) and ( $custoDeCompensação(\bar{p}, e) < custo_e$ ) then
17                              $custo_e \leftarrow custoDeCompensação(\bar{p}, e)$ ;  $\bar{p}_e \leftarrow \bar{p}$ 
18                         end
19                     end
20                 end
21             end
22             if  $custo_e \neq \infty$  then
23                  $total_{estudantes} \leftarrow total_{estudantes} + 1$ ;  $\underline{p} \leftarrow \underline{p} \cup \bar{p}_e$ 
24             end
25         end
26         if  $total_{estudantes} = |S_{(p,d)}|$  then
27              $realocarEstudantes(S_{(p,d)}, \underline{p})$ ;  $s \leftarrow remoçãoParadasVazias(s, p)$ 
28         end
29     end
30 end
31 retorne  $s$ 
32 fim

```

---

em um vetor  $\underline{p}$  que contém as novas alocações para cada estudante  $e$  analisado) em todos os períodos. Após a realocação, a função de remoção de paradas vazias é executada, percorrendo a solução em todos os períodos considerados e removendo em cada um deles a parada  $p$ , caso a mesma não tenha nenhum estudante sendo atendido por ela (linhas 26 - 28).

O algoritmo finaliza após verificar todas as paradas  $p$  de cada conjunto de rotas  $s_d$ , retornando uma possível nova solução  $s$  para o problema (linha 31).

## 5 RESULTADOS

Experimentos computacionais foram realizados em um computador Intel®Core™i5 de 1.60GHz e com memória RAM de 12 GB, utilizando-se um sistema operacional Windows 10. O algoritmo heurístico proposto neste trabalho foi implementado em C++ e executado para um conjunto de instâncias do SBRP e MP-SBRP, utilizando como parâmetro de comparação para o SBRP os resultados mais recentes reportados na literatura, e para o MP-SBRP os mesmos resultados (replicados para os períodos considerados) e o resultado retornado pelo modelo matemático proposto na Seção 3. Para isso, o modelo matemático foi implementado na linguagem de programação Julia através do *Julia for Mathematical Programming* (JuMP) e resolvido com o solver Gurobi (*academic license*) com tempo limite (T.L.) de execução de 3600 segundos.

### 5.1 Geração das instâncias para o MP-SBRP

As instâncias foram geradas para o MP-SBRP a partir das instâncias apresentadas por Schittekat et al. (2013) para o SBRP. As instâncias do SBRP apresentam 4 características principais: quantidade de locais para possíveis paradas de ônibus ( $n$ ), quantidade de estudantes que utilizam o serviço ( $m$ ), capacidade dos ônibus ( $C$ ) e a distância máxima permitida de caminhada para os estudantes ( $D$ ). Para geração das instâncias do MP-SBRP mais 2 características foram adicionadas: quantidade de períodos considerados ( $p$ ) e a demanda por transporte escolar nestes períodos.

As instâncias foram geradas considerando 5 dias e dois tipos de demandas: *i*) demanda diária fixa, onde o estudante precisa do transporte todos os dias considerados, e *ii*) demanda variável, onde o estudante não precisa do transporte todos os dias considerados. Baseado nos tipos de demandas apresentadas e escolhendo aleatoriamente o conjunto de dias em que o estudante precisa do transporte escolar no cenário de demanda variável, quatro grupos de instâncias foram gerados:

- Grupo 1: 100% dos estudantes têm demandas do tipo variável;
- Grupo 2: 75% têm demanda do tipo variável e 25% dos estudantes têm demanda diária;
- Grupo 3: 50% têm demanda do tipo variável e 50% dos estudantes têm demanda diária;
- Grupo 4: 25% têm demanda do tipo variável e 75% dos estudantes têm demanda diária;

Dessa forma, um total de 192 instâncias foram obtidas, adaptando cada instância de Schittekat et al. (2013) para 4 instâncias do MP-SBR. Para um melhor detalhamento das

características das instâncias obtidas é possível consultar a Tabela 5, onde está disposto o conjunto de valores assumidos por cada parâmetro mencionado anteriormente.

Tabela 5 – Parâmetros utilizados nas instâncias e seus respectivos intervalos

Parâmetro	Conjunto dos valores utilizados para cada parâmetro
Paradas de ônibus ( $n$ )	$n = \{5, 10, 20, 40, 80\}$
Estudantes envolvidos ( $m$ )	$m = \{25, 50, 100, 200, 400, 800\}$
Capacidade dos ônibus ( $C$ )	$C = \{25, 50\}$
Distância máxima de caminhada ( $D$ )	$D = \{5, 10, 20, 40\}$
Períodos considerados ( $p$ )	$p = \{5\}$
Percentual de estudantes com demanda variável ( $q$ )	$q = \{100\%, 75\%, 50\%, 25\%\}$

Fonte: O autor (2022)

## 5.2 Ajuste dos parâmetros do algoritmo

O algoritmo proposto possui alguns parâmetros a serem ajustados, sendo eles:

- $ILS_1$ : parâmetro que define o número de perturbações sem melhoria necessárias para que o algoritmo retorne uma solução final para o SBRP.
- $ILS_2$ : parâmetro que define o número de perturbações sem melhoria necessárias para que o algoritmo retorne uma solução final para o MP-SBRP.
- $\zeta$ : parâmetro que define o percentual de tolerância de superlotação de alunos nas rotas em movimentos de vizinhança.
- $\gamma_1$ : parâmetro utilizado no cálculo da média ponderada das soluções ( $\bar{f}$ ) no  $ILS_1$ .
- $\gamma_2$ : parâmetro utilizado no cálculo da média ponderada das soluções ( $\bar{f}$ ) no  $ILS_2$ .
- $\kappa_1$ : parâmetro que define o percentual de soluções aceitas através do limiar de aceitação para o  $ILS_1$ .
- $\kappa_2$ : parâmetro que define o percentual de soluções aceitas através do limiar de aceitação para o  $ILS_2$ .
- $\xi$ : parâmetro que define o crescimento da intensidade de perturbação a cada iteração.

Devido à quantidade de parâmetros requeridos e os valores admitidos, variar os parâmetros em conjunto torna a etapa de ajuste dos parâmetros uma tarefa difícil, uma vez que o número resultante da combinação de valores é elevado. Dessa forma, para definir o valor a ser utilizado para obtenção dos resultados, foi executada uma avaliação individual de cada parâmetro. Em outras palavras, cada parâmetro será variado individualmente e analisado perante o desempenho em relação ao tempo e valor retornado. Para isso, os parâmetros são inicializados com os valores mínimos apresentados na Tabela 6, atualizando-se o valor do parâmetro analisado.

No procedimento foram utilizadas um conjunto com 20 instâncias do MP-SBRP, que contêm: de 25 à 400 estudantes envolvidos, de 5 à 20 paradas de ônibus, de 25 à 50 assentos disponíveis para os estudante por ônibus, de 5 à 40 unidades de distância de caminhada máxima e de 0.00 a 0.75 de probabilidade dos estudantes se deslocarem a escola todos os dias. Para cada instância do problema o algoritmo foi executado 15 vezes, tomando-se como referência para o cálculo do *gap* os valores mínimos retornados por cada configuração do algoritmo e o menor resultado encontrado em todos os testes. Já para o cálculo do tempo, foi considerado o tempo médio para solucionar as instâncias para cada configuração de parâmetros analisada.

Um resumo detalhado do tipo numérico de cada parâmetro, assim como os conjuntos de intervalos considerados nos testes, a variação nos valores dentro do conjunto e os resultados selecionados (baseado no *trade-off* de desempenho em relação ao tempo) são apresentados na Tabela 6.

Tabela 6 – Resultados obtidos com o ajuste dos parâmetros

Parâmetro	Tipo	Intervalo	Variação	Resultado
$ILS_1$	Inteiro	[5; 10]	1	5
$ILS_2$	Inteiro	[5; 30]	5	30
$\gamma_1$	Inteiro	[1; 5]	1	4
$\gamma_2$	Inteiro	[10; 15]	1	15
$\kappa_1$	Real	[0,10; 0,50]	0,05	0,10
$\kappa_2$	Real	[0,10; 0,50]	0,05	0,10
$\zeta$	Real	[0,10; 0,35]	0,05	0,10
$\xi$	Real	[0,01; 0,05]	0,005	0,05

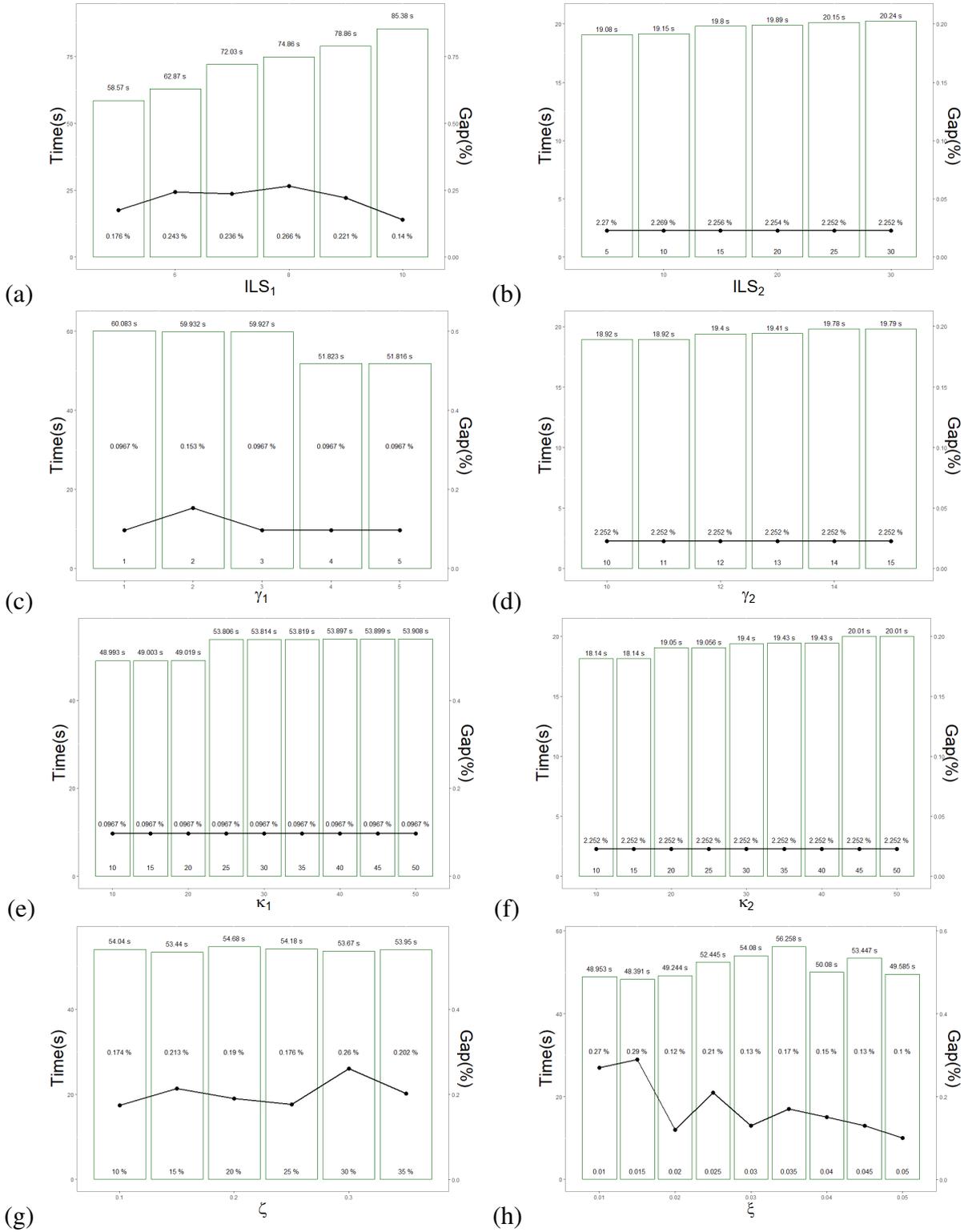
Fonte: O autor (2022)

Outro resumo, desta vez disposto em gráficos combinados (linha-barras) que apresentam os valores de tempo e *gap* médio obtido para cada valor dos parâmetros analisados, pode ser consultado na Figura 8.

Na Figura 8-a é possível visualizar o resultado dos testes realizados com o parâmetro  $ILS_1$ . Observa-se que o crescimento desse parâmetro aumenta progressivamente o tempo requerido pelo algoritmo para retornar uma solução, porém o *gap* em relação às melhores soluções encontradas oscila de maneira não-linear. Os menores *gaps* retornados foram obtidos para o  $ILS_1$  assumindo 5 e 10 repetições sem melhoria, obtendo-se uma diferença de *gap* de 0,036%. Por outro lado, a diferença de tempo é maior que 30%, levando a escolha de 5 repetições sem melhoria.

De maneira semelhante, os valores dos demais parâmetros foram determinados. Na Figura 8-b os testes realizados com o parâmetro  $ILS_2$  levaram a escolha do valor 30. As Figuras 8-c e 8-d dos testes realizados com os parâmetros  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  demonstraram que o valor dos

Figura 8 – Resumo dos testes de ajuste de parâmetro através de gráficos linha-barras combinados



Fonte: O autor (2022)

parâmetros podem ser fixados em 4 e 10, respectivamente. Para os testes com os parâmetros  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$ , representados nas Figuras 8-e e 8-f, o valor definido foi 10 para ambos os parâmetros. Por fim, na Figura 8-g é apresentado os resultados para o parâmetro  $\zeta$ , definido com o valor 0,10, e na Figura 8-h para o parâmetro  $\xi$ , determinado com o valor de 0,05.

### 5.3 Resultados para o SBRP

Com a finalidade de comparar o desempenho do algoritmo ILS-RVND-R, instâncias apresentadas em Schittekat *et al.* (2013) foram consideradas. Cada instância foi resolvida 40 vezes, e os resultados obtidos reportados detalhadamente na Tabela 7. A Tabela 7 é composta por 12 colunas, sendo elas: identificação da instância (ID), número de paradas ( $n$ ), número de estudantes ( $m$ ), capacidade dos ônibus ( $C$ ), distância máxima que um estudante pode caminhar até uma parada ( $D$ ), resultados reportados no trabalho de Schittekat *et al.* (2013) ( $MH_1$ ) e os resultados reportados no trabalho de Silva Neto *et al.* (2020) ( $MH_2$ ). Nas demais colunas estão dispostas as médias e as melhores soluções obtidas para cada instância, assim como o tempo médio para obter uma solução e os *gaps*. O *gap* é calculado através da diferença percentual entre a melhor solução obtida ( $f$ ) e a melhor solução reportada no trabalho analisado ( $f_{MH}$ ), como apresentado na Equação 5.1.

$$Gap_{MH}(\%) = 100 \frac{(f - f_{MH})}{f_{MH}} \quad (5.1)$$

Quando comparado ao algoritmo GRASP-RVND de Schittekat *et al.* (2013) o ILS-RVND-R conseguiu encontrar soluções melhores em 14 instâncias, igualando os resultados em outras 64 instâncias, obtendo um *gap* médio de -0,05%. Se comparado ao algoritmo HILS de Silva Neto *et al.* (2020) o ILS-RVND-R conseguiu encontrar 2 soluções melhores e se igualar a outras 73 instâncias, obtendo um *gap* médio de 0,36%.

Os *gaps* acima de 2,5% podem estar relacionados à capacidade de verificação de movimentos de melhoria na busca local, uma vez que o ILS-RVND-R não utiliza em todos os movimentos de melhoria o Ford-Fulkerson completo para a verificação de viabilidade, realizando um *tradeoff* entre a qualidade da solução e o tempo computacional necessário. Isso fica evidente quando analisado o parâmetro  $D$  das instâncias. Quanto maior for  $D$ , maior será o grafo  $G''$  da abordagem parcial, aumentando a possibilidade de viabilizar o movimento, porém com um custo computacional maior.

Portanto, o ILS-RVND-R mesmo sendo desenvolvido para solucionar outra variante do problema de roteamento de ônibus escolares, mostra-se capaz de solucionar as instâncias do SBRP de maneira satisfatória, mesmo apresentando uma pequena desvantagem quando comparado ao algoritmo HILS.

Tabela 7 – Resultados SBRP (Continua)

Instâncias					<i>School Bus Routing Problem - SBRP</i>						
					Outros Algoritmos		Algoritmo Proposto (ILS-RVND-R)				
ID	$n$	$m$	$C$	$D$	MH <sub>1</sub>	MH <sub>2</sub>	Média	Melhor	Tempo(s)	Gap <sub>MH<sub>1</sub></sub> (%)	Gap <sub>MH<sub>2</sub></sub> (%)
1	5	25	25	5	141.01	141.01	141.01	141.01	0.03	0.00	0.00
2	5	25	50	5	161.62	161.62	161.62	161.62	0.02	0.00	0.00
3	5	25	25	10	182.14	182.14	182.14	182.14	0.05	0.00	0.00
4	5	25	50	10	195.80	195.80	195.80	195.80	0.05	0.00	0.00
5	5	25	25	20	111.65	111.65	111.65	111.65	0.04	0.00	0.00
6	5	25	50	20	103.18	103.18	103.18	103.18	0.04	0.00	0.00
7	5	25	25	40	7.63	7.63	7.63	7.63	0.01	0.00	0.00
8	5	25	50	40	25.64	25.64	25.64	25.64	0.05	0.00	0.00
9	5	50	25	5	286.68	286.68	286.68	286.68	0.04	0.00	0.00
10	5	50	50	5	197.20	197.20	197.20	197.20	0.06	0.00	0.00
11	5	50	25	10	193.55	193.55	217.38	193.55	0.09	0.00	0.00
12	5	50	50	10	215.86	215.86	215.86	215.86	0.08	0.00	0.00
13	5	50	25	20	130.53	130.53	130.53	130.53	0.13	0.00	0.00
14	5	50	50	20	96.26	96.26	96.26	96.26	0.12	0.00	0.00
15	5	50	25	40	12.89	12.89	12.89	12.89	0.06	0.00	0.00
16	5	50	50	40	30.24	30.24	30.24	30.24	0.16	0.00	0.00
17	5	100	25	5	360.35	360.35	360.35	360.35	0.12	0.00	0.00
18	5	100	50	5	304.23	304.23	304.23	304.23	0.13	0.00	0.00
19	5	100	25	10	294.21	294.21	294.21	294.21	0.21	0.00	0.00
20	5	100	50	10	229.41	229.41	244.63	229.41	0.17	0.00	0.00
21	5	100	25	20	134.95	134.95	134.95	134.95	0.40	0.00	0.00
22	5	100	50	20	144.42	144.41	152.33	144.42	0.37	0.00	0.00
23	5	100	25	40	58.95	58.95	58.95	58.95	0.27	0.00	0.00
24	5	100	50	40	39.44	39.44	44.76	39.44	0.44	0.00	0.00

Tabela 7 – Resultados SBRP (Continua)

Instâncias					<i>School Bus Routing Problem - SBRP</i>						
					Outros Algoritmos		Algoritmo Proposto (ILS-RVND-R)				
ID	$n$	$m$	$C$	$D$	MH <sub>1</sub>	MH <sub>2</sub>	Média	Melhor	Tempo(s)	Gap <sub>MH<sub>1</sub></sub> (%)	Gap <sub>MH<sub>2</sub></sub> (%)
25	10	50	25	5	242.85	242.85	246.30	242.85	0.15	0.00	0.00
26	10	50	50	5	282.12	282.12	286.35	282.12	0.21	0.00	0.00
27	10	50	25	10	244.54	244.54	258.18	244.54	0.22	0.00	0.00
28	10	50	50	10	288.33	288.33	288.33	288.33	0.18	0.00	0.00
29	10	50	25	20	108.98	108.98	118.86	108.98	0.40	0.00	0.00
30	10	50	50	20	157.48	157.48	157.48	157.48	0.30	0.00	0.00
31	10	50	25	40	32.25	32.25	32.32	32.25	0.22	0.00	0.00
32	10	50	50	40	36.66	36.66	36.66	36.66	0.25	0.00	0.00
33	10	100	25	5	403.18	403.18	407.18	403.18	0.59	0.00	0.00
34	10	100	50	5	296.53	296.53	298.40	296.53	0.54	0.00	0.00
35	10	100	25	10	388.87	388.87	405.98	388.87	0.54	0.00	0.00
36	10	100	50	10	294.80	294.80	308.10	294.80	0.50	0.00	0.00
37	10	100	25	20	178.28	178.28	199.46	178.28	1.48	0.00	0.00
38	10	100	50	20	175.96	175.96	184.99	175.96	1.38	0.00	0.00
39	10	100	25	40	57.50	57.50	58.26	57.50	0.77	0.00	0.00
40	10	100	50	40	31.89	31.89	32.79	31.89	0.76	0.00	0.00
41	10	200	25	5	735.27	735.27	735.27	735.27	1.26	0.00	0.00
42	10	200	50	5	512.16	506.06	506.06	506.06	2.34	-1.19	0.00
43	10	200	25	10	513.00	513.00	515.93	513.00	1.79	0.00	0.00
44	10	200	50	10	475.21	475.21	497.41	475.21	3.47	0.00	0.00
45	10	200	25	20	347.29	347.29	360.02	347.29	4.00	0.00	0.00
46	10	200	50	20	217.46	217.46	252.43	217.46	18.05	0.00	0.00
47	10	200	25	40	102.93	102.93	102.95	102.93	3.55	0.00	0.00
48	10	200	50	40	55.05	55.05	57.65	55.05	4.79	0.00	0.00
49	20	100	25	5	520.24	507.81	511.63	507.81	1.37	-2.39	0.00
50	20	100	50	5	420.64	406.65	424.39	406.65	5.50	-3.33	0.00
51	20	100	25	10	422.21	419.17	448.57	419.17	1.90	-0.72	0.00
52	20	100	50	10	360.86	360.86	379.92	360.86	2.14	0.00	0.00
53	20	100	25	20	245.17	245.17	270.60	245.17	15.53	0.00	0.00

Tabela 7 – Resultados SBRP (Continua)

Instâncias					<i>School Bus Routing Problem - SBRP</i>						
					Outros Algoritmos		Algoritmo Proposto (ILS-RVND-R)				
ID	$n$	$m$	$C$	$D$	MH <sub>1</sub>	MH <sub>2</sub>	Média	Melhor	Tempo(s)	Gap <sub>MH<sub>1</sub></sub> (%)	Gap <sub>MH<sub>2</sub></sub> (%)
54	20	100	50	20	185.06	185.06	194.42	184.38	4.29	-0.37	-0.37
55	20	100	25	40	52.52	52.52	54.63	52.52	2.49	0.00	0.00
56	20	100	50	40	19.05	19.05	19.71	19.05	1.28	0.00	0.00
57	20	200	25	5	903.84	875.46	887.51	875.46	15.53	-3.14	0.00
58	20	200	50	5	485.65	476.05	486.26	476.05	6.57	-1.98	0.00
59	20	200	25	10	616.93	606.80	659.98	620.97	11.25	0.66	2.34
60	20	200	50	10	462.31	462.31	481.12	462.32	7.88	0.00	0.00
61	20	200	25	20	373.21	373.21	400.39	373.22	21.54	0.00	0.00
62	20	200	50	20	250.75	250.75	273.67	254.65	25.53	1.55	1.55
63	20	200	25	40	93.01	93.01	95.85	93.01	14.28	0.00	0.00
64	20	200	50	40	45.40	45.40	47.65	45.40	7.71	0.00	0.00
65	20	400	25	5	1323.35	1323.35	1326.49	1323.35	15.60	0.00	0.00
66	20	400	50	5	733.54	720.83	737.27	720.83	31.23	-1.73	0.00
67	20	400	25	10	975.12	975.12	988.81	982.94	46.57	0.8	0.8
68	20	400	50	10	614.67	614.67	631.26	619.46	66.96	0.78	0.78
69	20	400	25	20	763.76	763.76	776.21	763.76	64.69	0.00	0.00
70	20	400	50	20	298.47	298.47	329.16	301.68	117.00	1.08	1.08
71	20	400	25	40	239.58	239.58	239.58	239.58	50.92	0.00	0.00
72	20	400	50	40	84.49	84.49	86.67	84.49	69.00	0.00	0.00
73	40	200	25	5	831.94	808.69	821.19	808.69	15.93	-2.79	0.00
74	40	200	50	5	593.35	555.98	584.95	555.98	22.11	-6.30	0.00
75	40	200	25	10	728.44	715.77	767.55	735.57	35.92	0.98	2.77
76	40	200	50	10	481.05	475.64	498.74	479.92	43.84	-0.23	0.90
77	40	200	25	20	339.75	339.75	375.85	344.99	56.62	1.54	1.54
78	40	200	50	20	273.88	273.88	294.04	275.45	58.1	0.57	0.57
79	40	200	25	40	76.77	76.77	78.73	76.77	15.74	0.00	0.00
80	40	200	50	40	58.46	58.46	64.27	58.46	33.04	0.00	0.00
81	40	400	25	5	1407.05	1339.33	1403.54	1369.70	130.82	-2.65	2.27
82	40	400	50	5	858.80	834.44	848.11	834.44	78.97	-2.84	0.00

Tabela 7 – Resultados SBRP (Conclusão)

Instâncias					School Bus Routing Problem - SBRP						
					Outros Algoritmos		Algoritmo Proposto (ILS-RVND-R)				
ID	$n$	$m$	$C$	$D$	MH <sub>1</sub>	MH <sub>2</sub>	Média	Melhor	Tempo(s)	Gap <sub>MH<sub>1</sub></sub> (%)	Gap <sub>MH<sub>2</sub></sub> (%)
83	40	400	25	10	891.02	890.92	984.28	922.71	347.86	3.56	3.57
84	40	400	50	10	757.42	740.48	789.68	760.82	422.99	0.45	2.75
85	40	400	25	20	586.29	586.29	643.10	613.23	360.13	4.59	4.59
86	40	400	50	20	395.95	401.22	422.64	398,79	434.06	0.72	-2.85
87	40	400	25	40	195.33	195.33	196.15	195.33	99.56	0.00	0.00
88	40	400	50	40	70.77	70.77	72.49	70.77	131.71	0.00	0.00
89	40	800	25	5	2900.14	2900.14	2961.79	2904.20	342.68	0.14	0.14
90	40	800	50	5	1345.70	1309.76	1351.45	1329.76	684.96	-1.18	1.53
91	40	800	25	10	2200.57	2200.57	2294.76	2254.96	1038.62	2.47	2.47
92	40	800	50	10	1025.16	1024.71	1095.80	1056.84	1517.91	3.09	3.14
93	40	800	25	20	1404.16	1404.16	1413.32	1405.47	1037.73	0.09	0.09
94	40	800	50	20	616.58	622.32	658.06	634.22	2296.90	2.86	1.91
95	40	800	25	40	396.92	396.92	398.64	396.92	755.42	0.00	0.00

Fonte: O autor (2022)

#### 5.4 Resultados para o MP-SBRP

O algoritmo ILS-RVND-R proposto foi executado também para as instâncias do MP-SBRP, descritas na Seção 5.1. Para cada instância o algoritmo foi executado por 40 vezes. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 8, estes são comparados *i*) com os resultados retornados pelo método exato (com a finalidade de analisar a qualidade do algoritmo) e *ii*) os resultados retornados pela resolução do SBRP de período único (replicando para todos os períodos; com a finalidade de avaliar os ganhos obtidos com a aplicação da abordagem multi-período).

A Tabela 8 é composta por 13 colunas, sendo elas: identificação da instância referente ao problema SBRP (ID), identificação da instância estendida para o problema MP-SBRP (ID\*), quantidade de períodos considerados ( $p$ ), percentual de estudantes com demanda variável ( $q$ ), melhor solução encontrada nos trabalhos de Schittekat *et al.* (2013) e Silva Neto *et al.*

(2020) considerando a replicação para os períodos considerados (MH), solução retornada pelo método exato (MIP), *lower bound* encontrado pelo método exato ( $LB_{MIP}$ ), tempo computacional necessário para o modelo retornar a solução em segundos ( $t_1$ ), média das soluções encontradas pelo algoritmo proposto (Média), melhor solução retornada pelo algoritmo proposto (Melhor), tempo computacional médio necessário para o algoritmo proposto retornar uma solução em segundos ( $t_2$ ) e os *gaps* dos resultados encontrados pelo algoritmo em comparação aos do MH ( $Gap_{MH}$ ) e aos do MIP ( $Gap_{MIP}$ ).

Quando comparado aos resultados do SBRP replicados para os períodos considerados, o ILS-RVND-R conseguiu encontrar 142 soluções de melhor qualidade (*i.e.*, aproximadamente 74% do total de soluções), igualando os resultados para as demais instâncias. Tomando como base estes resultados, e com o apoio das instâncias do SBRP plotadas no Apêndice B, é possível afirmar que há indícios de que o MP-SBRP tende a ser mais efetivo em instâncias com poucos agrupamentos, ou seja, instâncias em que os estudantes estão mais dispersos e possuem acesso a mais de uma parada de ônibus como opção para seu deslocamento para a escola. As instâncias que possuem muitos agrupamentos, a efetividade é menor ou nula, pois para que uma parada não seja visitada em um período é necessário que um conjunto específico de estudantes não precisem do serviço nesse mesmo período.

Comparando os resultados do algoritmo proposto com os obtidos pelo modelo matemático, é possível observar que o ILS-RVND-R conseguiu obter soluções iguais ou melhores em 163 instâncias (*i.e.*, 85% das instâncias executadas), obtendo um *gap* médio de -1,90%. Porém, mesmo com estes resultados satisfatórios, o algoritmo encontrou 6 soluções com *gap* de 5% acima do resultado do modelo matemático, demonstrando possibilidades de melhoria na heurística.

Analisando essas instâncias com *gaps* elevados, percebe-se que as rotas obtidas pelo ILS-RVND-R, quando comparadas com as obtidas pelo modelo matemático, não possuem um alto grau de diferenciação. Uma exemplificação pode ser feita com a instância 73, na qual a solução do modelo matemático se diferencia da solução do algoritmo heurístico pela ausência de uma parada de ônibus na solução em um período considerado e pela não realização do movimento *swap* em outros dois períodos. Dessa forma, para encontrar a solução ótima da instância seria inicialmente necessário a remoção desta parada através do procedimento descrito na Seção 4.8, entretanto a realocação dos estudantes realizada neste operador é limitada, não permitindo que essa remoção seja viável para esta instância.

Essa limitação na realocação dos estudantes é um desafio também na etapa de busca local, realizada através do RVND. O algoritmo considera essa etapa de maneira semelhante ao CVRP, não permitindo que movimentos de melhoria (potencialmente viáveis através da realocação dos alunos nos períodos considerados) sejam realizados caso estes violem a restrição de capacidade das rotas envolvidas, restringindo o processo de busca na vizinhança da solução e limitando o algoritmo em encontrar soluções de maior qualidade, *e.g.*, instância 73. Por outro lado, a realocação dos estudantes em todos os períodos considerados não é uma tarefa simples e pode exigir um esforço computacional semelhante ou maior ao algoritmo de Ford-Fulkerson para o SBRP.

Tabela 8 – Resultados MP-SBRP (Continua)

Instâncias		Multi-Period School Bus Routing Problem - MP-SBRP										
		Resultados Comparativos				Algoritmo Proposto (ILS-RVND-R)						
ID	ID*	$p$	$q$	MH	MIP	$LB_{MIP}$	$t_1$ (s)	Média	Melhor	$t_2$ (s)	Gap <sub>MH</sub> (%)	Gap <sub>MIP</sub> (%)
1	1	5	100%	705.05	705.03	705.03	0.62	705.03	705.03	0.08	0.00	0.00
	2	5	75%		705.03	705.03	0.60	705.03	705.03	0.08	0.00	0.00
	3	5	50%		705.03	705.03	0.33	705.03	705.03	0.08	0.00	0.00
	4	5	25%		705.03	705.03	0.34	705.03	705.03	0.08	0.00	0.00
2	5	5	100%	808.10	808.11	808.11	0.34	808.11	808.11	0.10	0.00	0.00
	6	5	75%		808.11	808.11	0.50	808.11	808.11	0.10	0.00	0.00
	7	5	50%		808.11	808.11	0.35	808.11	808.11	0.11	0.00	0.00
	8	5	25%		808.11	808.11	0.55	808.11	808.11	0.10	0.00	0.00
3	9	5	100%	910.70	904.46	904.46	2.90	904.46	904.46	0.36	-0.69	0.00
	10	5	75%		904.46	904.46	2.16	904.46	904.46	0.26	-0.69	0.00
	11	5	50%		910.70	910.70	2.06	910.70	910.70	0.19	0.00	0.00
	12	5	25%		904.46	904.46	1.99	904.46	904.46	0.30	-0.69	0.00
4	13	5	100%	979.00	979.02	979.02	0.29	979.02	979.02	0.10	0.00	0.00
	14	5	75%		979.02	979.02	0.35	979.02	979.02	0.13	0.00	0.00
	15	5	50%		979.02	979.02	0.29	979.02	979.02	0.09	0.00	0.00
	16	5	25%		979.02	979.02	0.34	979.02	979.02	0.08	0.00	0.00
5	17	5	100%	558.25	514.24	514.24	1.12	551.63	514.24	0.25	-7.88	0.00
	18	5	75%		514.24	514.24	1.37	549.43	514.24	0.24	-7.88	0.00
	19	5	50%		558.23	558.23	1.33	558.23	558.23	0.19	0.00	0.00
	20	5	25%		558.23	558.23	1.07	558.23	558.23	0.16	0.00	0.00

Tabela 8 – Resultados MP-SBRP (Continua)

Instâncias		Multi-Period School Bus Routing Problem - MP-SBRP										
		Resultados Comparativos					Algoritmo Proposto (ILS-RVND-R)					
ID	ID*	$p$	$q$	MH	MIP	LB <sub>MIP</sub>	$t_1$ (s)	Média	Melhor	$t_2$ (s)	Gap <sub>MH</sub> (%)	Gap <sub>MIP</sub> (%)
6	21	5	100%	515.90	515.92	515.92	9.36	515.92	515.92	0.36	0.00	0.00
	22	5	75%		515.92	515.92	1.02	515.92	515.92	0.31	0.00	0.00
	23	5	50%		515.92	515.92	1.81	515.92	515.92	0.32	0.00	0.00
	24	5	25%		515.92	515.92	1.09	515.92	515.92	0.27	0.00	0.00
7	25	5	100%	38.15	38.15	38.15	0.86	38.15	38.15	0.42	0.00	0.00
	26	5	75%		38.15	38.15	1.29	38.15	38.15	0.43	0.00	0.00
	27	5	50%		38.15	38.15	1.46	38.15	38.15	0.42	0.00	0.00
	28	5	25%		38.15	38.15	3.55	38.15	38.15	0.42	0.00	0.00
8	29	5	100%	128.19	113.33	113.33	12.25	113.61	113.33	0.54	-11.59	0.00
	30	5	75%		128.19	128.19	6.23	128.19	128.19	0.40	0.00	0.00
	31	5	50%		128.19	128.19	2.06	128.19	128.19	0.38	0.00	0.00
	32	5	25%		128.19	128.19	3.43	128.19	128.19	0.39	0.00	0.00
9	33	5	100%	1433.40	1193.45	1193.45	0.64	1193.45	1193.45	0.14	-16.74	0.00
	34	5	75%		1193.45	1193.45	0.69	1193.45	1193.45	0.14	-16.74	0.00
	35	5	50%		1193.45	1193.45	0.72	1193.45	1193.45	0.13	-16.74	0.00
	36	5	25%		1422.75	1422.75	0.72	1433.40	1433.40	0.16	0.00	0.75
10	37	5	100%	986.00	986.00	986.00	8.60	986.00	986.00	0.33	0.00	0.00
	38	5	75%		986.00	986.00	4.51	986.00	986.00	0.32	0.00	0.00
	39	5	50%		986.00	986.00	3.76	986.00	986.00	0.31	0.00	0.00
	40	5	25%		986.00	986.00	3.53	986.00	986.00	0.33	0.00	0.00
11	41	5	100%	967.75	874.21	874.21	7.82	879.91	874.21	0.22	-9.67	0.00
	42	5	75%		879.56	879.56	6.90	886.01	879.56	0.29	-9.11	0.00
	43	5	50%		879.56	879.56	2.58	904.97	879.56	0.21	-9.11	0.00
	44	5	25%		879.56	879.56	3.17	1141.30	879.56	0.23	-9.11	0.00
12	45	5	100%	1079.30	1079.28	1079.28	3.43	1079.28	1079.28	0.35	0.00	0.00
	46	5	75%		1079.28	1079.28	5.68	1079.28	1079.28	0.35	0.00	0.00
	47	5	50%		1079.28	1079.28	5.73	1079.28	1079.28	0.33	0.00	0.00
	48	5	25%		1079.28	1079.28	2.99	1079.28	1079.28	0.34	0.00	0.00
13	49	5	100%	652.65	641.05	641.05	35.68	642.11	641.05	0.38	-1.78	0.00
	50	5	75%		644.57	644.57	24.55	645.76	644.57	0.42	-1.24	0.00
	51	5	50%		651.38	651.38	53.84	651.38	651.38	0.42	-0.19	0.00
	52	5	25%		652.67	652.67	59.20	652.67	652.67	0.37	0.00	0.00

Tabela 8 – Resultados MP-SBRP (Continua)

Instâncias		Multi-Period School Bus Routing Problem - MP-SBRP										
		Resultados Comparativos						Algoritmo Proposto (ILS-RVND-R)				
ID	ID*	$p$	$q$	MH	MIP	LB <sub>MIP</sub>	$t_1$ (s)	Média	Melhor	$t_2$ (s)	Gap <sub>MH</sub> (%)	Gap <sub>MIP</sub> (%)
14	53	5	100%	481.32	481.21	481.21	18.70	481.21	481.21	0.35	-0.02	0.00
	54	5	75%		481.32	481.32	65.01	481.32	481.32	0.36	0.00	0.00
	55	5	50%		481.21	481.21	17.89	481.21	481.21	0.36	-0.02	0.00
	56	5	25%		481.32	481.32	14.45	481.32	481.32	0.38	0.00	0.00
15	57	5	100%	64.45	62.44	62.44	648.83	62.74	62.44	0.45	-3.12	0.00
	58	5	75%		64.45	64.45	770.39	64.45	64.45	0.40	0.00	0.00
	59	5	50%		64.45	64.45	860.15	64.45	64.45	0.41	0.00	0.00
	60	5	25%		64.45	64.45	1038.82	64.45	64.45	0.37	0.00	0.00
16	61	5	100%	151.19	112.62	112.62	858.15	112.63	112.62	0.47	-25.51	0.00
	62	5	75%		124.39	124.39	1484.14	130.40	124.39	0.49	-17.73	0.00
	63	5	50%		151.19	137.17	TL	151.19	151.19	0.39	0.00	0.00
	64	5	25%		145.15	124.85	TL	145.15	145.15	0.53	-4.00	0.00
17	65	5	100%	1801.75	1443.86	1443.86	2.96	1444.91	1444.91	0.23	-19.81	0.07
	66	5	75%		1567.06	1567.06	1.36	1567.06	1567.06	0.29	-13.03	0.00
	67	5	50%		1765.45	1765.45	1.13	1765.45	1765.45	0.29	-2.01	0.00
	68	5	25%		1801.73	1801.73	0.99	1801.73	1801.73	0.32	0.00	0.00
18	69	5	100%	1521.15	1295.12	1295.12	1.75	1295.12	1295.12	0.40	-14.86	0.00
	70	5	75%		1295.12	1295.12	1.52	1295.12	1295.12	0.41	-14.86	0.00
	71	5	50%		1295.12	1295.12	1.89	1295.12	1295.12	0.36	-14.86	0.00
	72	5	25%		1521.15	1521.15	3.51	1521.15	1521.15	0.37	0.00	0.00
19	73	5	100%	1471.05	1008.61	1008.61	369.32	1042.23	1041.51	0.43	-29.20	3.26
	74	5	75%		1085.68	1085.68	377.25	1185.68	1185.68	0.42	-19.40	9.21
	75	5	50%		1209.81	1209.81	76.03	1415.57	1415.57	0.33	-3.77	17.01
	76	5	25%		1227.25	1227.25	85.71	1471.04	1471.04	0.35	0.00	19.86
20	77	5	100%	1147.05	1020.91	1020.91	56.37	1020.91	1020.91	0.57	-11.00	0.00
	78	5	75%		1020.91	1020.91	62.22	1029.29	1020.91	0.57	-11.00	0.00
	79	5	50%		1036.64	1036.64	93.81	1046.92	1036.64	0.48	-9.63	0.00
	80	5	25%		1137.55	1137.55	133.35	1199.90	1137.55	0.54	-0.83	0.00
21	81	5	100%	674.75	532.88	485.40	TL	552.81	545.41	0.76	-19.17	2.35
	82	5	75%		571.15	474.22	TL	621.25	581.21	0.72	-13.86	1.76
	83	5	50%		649.71	492.20	TL	674.77	674.77	0.81	0.00	3.86
	84	5	25%		674.77	435.86	TL	676.10	674.77	0.83	0.00	0.00

Tabela 8 – Resultados MP-SBRP (Continua)

Instâncias		Multi-Period School Bus Routing Problem - MP-SBRP										
		Resultados Comparativos					Algoritmo Proposto (ILS-RVND-R)					
ID	ID*	$p$	$q$	MH	MIP	LB <sub>MIP</sub>	$t_1$ (s)	Média	Melhor	$t_2$ (s)	Gap <sub>MH</sub> (%)	Gap <sub>MIP</sub> (%)
22	85	5	100%	722.05	621.72	621.72	98.68	621.73	621.76	0.88	-13.89	0.00
	86	5	75%		637.05	637.05	92.22	637.05	637.05	0.94	-11.77	0.00
	87	5	50%		640.44	640.44	184.94	644.60	640.44	0.85	-11.30	0.00
	88	5	25%		722.07	722.07	142.64	770.29	722.07	0.71	0.00	0.00
23	89	5	100%	294.75	192.12	101.12	TL	206.26	192.12	0.66	-34.82	0.00
	90	5	75%		228.58	81.61	TL	210.88	207.93	0.64	-29.45	-9.03
	91	5	50%		294.74	99.27	TL	294.74	294.74	0.63	0.00	0.00
	92	5	25%		297.97	90.20	TL	294.74	294.74	0.61	0.00	-1.08
24	93	5	100%	197.20	166.42	166.42	2635.15	181.25	166.42	1.01	-15.61	0.00
	94	5	75%		167.05	150.33	TL	179.60	166.42	1.02	-15.61	-0.37
	95	5	50%		197.21	185.07	TL	204.90	197.21	1.10	0.00	0.00
	96	5	25%		197.21	183.87	TL	206.99	197.21	1.10	0.00	0.00
25	97	5	100%	1214.25	1147.88	1090.92	TL	1191.74	1172.91	0.67	-3.40	2.18
	98	5	75%		1182.95	1109.08	TL	1197.19	1195.47	0.63	-1.55	1.06
	99	5	50%		1199.62	1137.32	TL	1200.43	1199.62	0.64	-1.20	0.00
	100	5	25%		1210.58	1156.27	TL	1225.47	1210.58	0.50	-0.30	0.00
26	101	5	100%	1410.60	1410.60	1410.60	180.86	1416.65	1410.60	0.49	0.00	0.00
	102	5	75%		1410.60	1410.60	147.25	1428.73	1410.60	0.45	0.00	0.00
	103	5	50%		1410.60	1410.60	286.49	1437.80	1410.60	0.50	0.00	0.00
	104	5	25%		1410.60	1410.60	265.71	1416.64	1410.60	0.45	0.00	0.00
27	105	5	100%	1222.70	1139.33	1100.94	TL	1165.53	1155.36	0.61	-5.51	1.41
	106	5	75%		1187.20	1120.61	TL	1195.36	1187.20	0.55	-2.90	0.00
	107	5	50%		1200.72	1112.89	TL	1206.56	1200.72	0.52	-1.80	0.00
	108	5	25%		1222.71	1111.20	TL	1256.06	1222.71	0.54	0.00	0.00
28	109	5	100%	1441.65	1358.50	1282.19	TL	1417.46	1408.06	0.53	-2.33	3.65
	110	5	75%		1432.69	1347.15	TL	1437.43	1432.69	0.47	-0.62	0.00
	111	5	50%		1441.66	1357.02	TL	1445.76	1441.66	0.38	0.00	0.00
	112	5	25%		1441.66	1357.86	TL	1445.76	1441.66	0.35	0.00	0.00
29	113	5	100%	544.90	443.03	340.72	TL	536.36	477.59	1.14	-12.35	7.80
	114	5	75%		492.71	396.68	TL	530.13	492.71	1.17	-9.58	0.00
	115	5	50%		513.35	376.22	TL	530.37	512.78	1.35	-5.89	-0.11
	116	5	25%		544.97	404.05	TL	569.47	544.92	1.19	0.00	-0.01

Tabela 8 – Resultados MP-SBRP (Continua)

Instâncias		Multi-Period School Bus Routing Problem - MP-SBRP										
		Resultados Comparativos					Algoritmo Proposto (ILS-RVND-R)					
ID	ID*	$p$	$q$	MH	MIP	LB <sub>MIP</sub>	$t_1$ (s)	Média	Melhor	$t_2$ (s)	Gap <sub>MH</sub> (%)	Gap <sub>MIP</sub> (%)
30	117	5	100%	787.40	725.03	725.03	412.73	739.61	725.03	0.90	-7.92	0.00
	118	5	75%		757.16	745.55	TL	766.99	756.44	0.85	-3.93	-0.10
	119	5	50%		771.26	771.26	146.39	774.58	771.26	0.69	-2.05	0.00
	120	5	25%		787.41	787.41	93.29	787.41	787.41	0.72	0.00	0.00
31	121	5	100%	161.25	143.39	81.55	TL	132.00	125.40	1.44	-22.24	-12.55
	122	5	75%		140.31	88.58	TL	146.21	140.31	1.35	-12.99	0.00
	123	5	50%		151.90	66.28	TL	134.11	129.03	1.33	-19.98	-15.05
	124	5	25%		153.08	98.18	TL	149.83	136.54	1.27	-15.32	-10.81
32	125	5	100%	183.32	162.76	99.13	TL	166.91	162.76	1.26	-11.22	0.00
	126	5	75%		183.32	126.85	TL	181.87	176.69	1.21	-3.62	-3.62
	127	5	50%		183.32	130.90	TL	175.95	169.31	1.28	-7.64	-7.65
	128	5	25%		183.32	126.91	TL	183.32	183.32	1.10	0.00	0.00
33	129	5	100%	2015.90	1490.95	1216.50	TL	1490.95	1490.95	1.15	-26.04	0.00
	130	5	75%		1672.82	1242.67	TL	1680.43	1672.82	1.18	-17.02	0.00
	131	5	50%		1748.54	1250.59	TL	1757.51	1754.41	1.20	-12.97	0.34
	132	5	25%		1926.66	1313.34	TL	1945.40	1940.82	1.29	-3.72	0.73
34	133	5	100%	1482.65	1329.55	1192.57	TL	1333.90	1326.71	1.02	-10.52	-0.21
	134	5	75%		1329.55	1190.60	TL	1336.65	1329.55	1.12	-10.33	0.00
	135	5	50%		1457.16	1195.29	TL	1438.90	1430.30	1.10	-3.53	-1.84
	136	5	25%		1477.11	1191.52	TL	1476.66	1469.01	1.09	-0.92	-0.55
35	137	5	100%	1944.35	1479.39	1138.18	TL	1499.40	1494.74	1.26	-23.12	1.04
	138	5	75%		1608.39	1178.45	TL	1612.04	1603.58	1.31	-17.53	-0.30
	139	5	50%		1660.08	1193.08	TL	1698.84	1644.89	1.28	-15.40	-0.92
	140	5	25%		1885.69	1246.00	TL	1936.59	1899.33	1.29	-2.32	0.72
36	141	5	100%	1474.00	1393.02	1219.68	TL	1428.44	1407.53	1.24	-4.51	1.04
	142	5	75%		1429.84	1220.55	TL	1429.84	1429.84	1.22	-3.00	0.00
	143	5	50%		1429.84	1221.87	TL	1429.84	1429.84	1.11	-3.00	0.00
	144	5	25%		1473.98	1226.23	TL	1500.76	1473.98	1.03	0.00	0.00
37	145	5	100%	891.40	734.92	449.51	TL	841.80	723.95	2.06	-18.78	-1.49
	146	5	75%		778.00	461.51	TL	831.56	779.99	2.29	-12.50	0.26
	147	5	50%		954.54	493.81	TL	940.39	891.36	2.23	0.00	-6.62
	148	5	25%		998.27	431.96	TL	994.03	891.36	2.08	0.00	-10.71

Tabela 8 – Resultados MP-SBRP (Continua)

Instâncias		Multi-Period School Bus Routing Problem - MP-SBRP										
		Resultados Comparativos						Algoritmo Proposto (ILS-RVND-R)				
ID	ID*	$p$	$q$	MH	MIP	LB <sub>MIP</sub>	$t_1$ (s)	Média	Melhor	$t_2$ (s)	Gap <sub>MH</sub> (%)	Gap <sub>MIP</sub> (%)
38	149	5	100%	879.80	844.69	667.72	TL	827.19	796.63	2.53	-9.45	-5.69
	150	5	75%		888.92	655.82	TL	827.14	803.15	2.37	-8.71	-9.65
	151	5	50%		890.07	622.78	TL	874.29	823.46	2.28	-6.40	-7.48
	152	5	25%		877.51	606.48	TL	885.63	859.50	1.96	-2.31	-2.05
39	153	5	100%	287.50	367.05	99.97	TL	245.14	245.14	1.44	-14.73	-33.21
	154	5	75%		330.47	97.60	TL	248.40	245.14	1.35	-14.73	-25.82
	155	5	50%		429.14	87.14	TL	288.29	285.62	1.30	-0.65	-33.44
	156	5	25%		393.17	90.41	TL	287.49	287.49	1.30	0.00	-26.88
40	157	5	100%	159.46	172.53	106.16	TL	157.00	152.10	1.53	-4.62	-11.84
	158	5	75%		185.96	108.87	TL	146.54	144.57	1.52	-9.34	-22.26
	159	5	50%		199.40	112.66	TL	161.34	159.46	1.50	0.00	-20.03
	160	5	25%		159.46	120.70	TL	162.51	159.46	1.60	0.00	0.00
41	161	5	100%	3676.35	2598.69	2598.69	20.14	2637.86	2637.86	1.65	-28.25	1.51
	162	5	75%		3063.57	3063.57	3.94	3123.38	3123.38	1.98	-15.04	1.95
	163	5	50%		3473.63	3473.63	3.00	3473.63	3473.63	1.76	-5.51	0.00
	164	5	25%		3676.37	3676.37	2.92	3676.37	3676.37	1.76	0.00	0.00
42	165	5	100%	2530.30	1838.27	1838.27	19.60	1838.27	1838.27	3.23	-27.35	0.00
	166	5	75%		1950.66	1950.66	35.08	1955.49	1950.66	3.07	-22.91	0.00
	167	5	50%		2142.95	2142.95	32.09	2148.48	2145.16	3.15	-15.22	0.10
	168	5	25%		2521.95	2521.95	52.01	2521.95	2521.95	3.16	-0.33	0.00
43	169	5	100%	2565.00	1694.60	984.31	TL	1851.80	1756.29	3.57	-31.53	3.64
	170	5	75%		2002.75	1181.53	TL	2177.41	2116.95	3.99	-17.47	5.70
	171	5	50%		2178.17	1127.90	TL	2211.77	2122.85	2.93	-17.24	-2.54
	172	5	25%		2238.08	1187.05	TL	2428.17	2394.86	3.37	-6.63	7.00
44	173	5	100%	2376.05	1786.31	1370.44	TL	1801.23	1790.93	6.49	-24.63	0.26
	174	5	75%		2049.94	1404.37	TL	2108.34	2087.43	5.68	-12.15	1.83
	175	5	50%		2162.20	1395.77	TL	2158.23	2147.43	6.25	-9.62	-0.68
	176	5	25%		2296.61	1424.12	TL	2364.18	2331.52	8.73	-1.87	1.52
45	177	5	100%	1736.45	1502.19	806.61	TL	1400.94	1366.68	4.32	-21.29	-9.02
	178	5	75%		850.41	TL	1503.47	1452.19	4.28	-16.37		
	179	5	50%		876.93	TL	1628.27	1567.76	4.16	-9.71		
	180	5	25%		789.00	TL	1713.20	1616.42	4.28	-6.91		

Tabela 8 – Resultados MP-SBRP (Conclusão)

Instâncias		Multi-Period School Bus Routing Problem - MP-SBRP										
		Resultados Comparativos					Algoritmo Proposto (ILS-RVND-R)					
ID	ID*	$p$	$q$	MH	MIP	$LB_{MIP}$	$t_1$ (s)	Média	Melhor	$t_2$ (s)	$Gap_{MH}(\%)$	$Gap_{MIP}(\%)$
46	181	5	100%	1087.30	1060.07	526.26	TL	902.84	868.11	7.11	-20.16	-18.11
	182	5	75%		1161.76	497.33	TL	1049.42	923.14	7.66	-15.10	-20.54
	183	5	50%		1176.66	501.15	TL	1157.94	963.61	8.40	-11.38	-18.11
	184	5	25%		1358.54	490.65	TL	1225.57	1051.16	8.06	-3.32	-22.63
47	185	5	100%	514.65	386.44	63.69	TL	335.41	292.31	3.24	-43.20	-24.36
	186	5	75%		TL	378.09	353.98	3.12	-31.22			
	187	5	50%		TL	425.79	425.21	3.13	-17.38			
	188	5	25%		TL	514.67	514.67	3.03	0.00			
48	189	5	100%	275.25	279.28	107.94	TL	247.75	224.50	5.31	-18.44	-19.62
	190	5	75%		289.73	84.04	TL	251.30	223.41	4.85	-18.83	-22.89
	191	5	50%		319.65	1375.52	TL	279.54	275.25	5.15	0.00	-13.89
	192	5	25%		133.16	TL	279.54	275.25	5.20	0.00		

Fonte: O autor (2022)

## 6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O foco desta dissertação foi a apresentação e resolução do *Multi-Period School Bus Routing Problem* (MP-SBRP), um problema de roteamento de veículos derivado do *School Bus Routing Problem* (SBRP) que possui como diferencial a consideração de diferentes períodos nos quais os estudantes possuem uma demanda variável pelo transporte escolar, podendo-se obter rotas diferentes por períodos considerados.

Ao possibilitar a diminuição das rotas em cada período, é possível obter impactos positivos no âmbito econômico, social e ambiental. No âmbito econômico, menores rotas permitem deslocamentos mais curtos, diminuindo o custo total necessário para a operação do transporte. No âmbito social, a qualidade de vida dos cidadãos e estudantes são melhoradas (*e.g.*, beneficia a acessibilidade de estudantes às escolas, pode haver diminuição do tráfego de veículos nas regiões em que os estudantes não possuem demanda no período, entre outras). E, por fim, no âmbito ambiental através da redução da emissão de gases poluentes na atmosfera, como o CO<sub>2</sub>.

Foi apresentado, inicialmente, um modelo matemático para o problema. Para instâncias intratáveis de maneira exata, foi proposta uma meta-heurística denominada de ILS-RVND-R. Esse algoritmo combina as meta-heurísticas ILS e RVND com uma heurística de remoção de paradas, utilizando-se de algoritmos heurísticos e exato para realizar a alocação dos estudantes às paradas selecionadas.

Na etapa de testes, o algoritmo proposto foi executado para 95 instâncias apresentadas por Schittekat *et al.* (2013), utilizando-se para comparação os resultados reportados pelos próprios autores e por Silva Neto *et al.* (2020). Um total de 48 dessas instâncias foram estendidas para o problema do MP-SBRP, resultando em um conjunto de 192 instâncias para o problema proposto, utilizando-se como comparação os resultados do modelo matemático e das heurísticas do SBRP replicada em cada período considerado. Como resultado, o algoritmo obteve resultados satisfatórios para ambos os problemas, destacando a relevância do MP-SBRP quando comparado com os resultados obtidos pelas meta-heurísticas de Schittekat *et al.* (2013) e Silva Neto *et al.* (2020).

Entretanto, é importante ressaltar que o algoritmo possui *gaps* consideráveis para um conjunto pequeno de instâncias do MP-SBRP, quando comparado com a solução retornada pelo método exato. Estes *gaps* podem estar relacionados à capacidade do algoritmo de realocar os estudantes entre as paradas visitadas, de tal maneira que seja possível diminuir a distância total percorrida pela frota de ônibus pela eliminação das paradas que não possuem estudantes

alocados. Esta dificuldade também é percebida na busca local, onde o RVND pode aumentar a sua eficiência com a utilização de uma estratégia de realocação dos estudantes entre as paradas nos períodos considerados.

Dessa maneira, trabalhos futuros podem empregar esforços em desenvolver estratégias para verificação da viabilidade dos movimentos de melhoria da solução, semelhante aos apresentados na Seção 4.5 para o SBRP, permitindo um potencial aumento na efetividade da heurística de remoção e da busca local (após a etapa de remoção) em encontrar soluções de melhor qualidade.

## REFERÊNCIAS

- ANGEL, R.; CAUDLE, W.; NOONAN, R.; WHINSTON, A. Computer-assisted school bus scheduling. **Management Science**, INFORMS, v. 18, n. 6, p. B-279, 1972.
- ANSARI, A.; FARROKHVAR, L.; KAMALI, B. Integrated student to school assignment and school bus routing problem for special needs students. **Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review**, Elsevier, v. 152, p. 102416, 2021.
- BELTRAMI, E. J.; BODIN, L. D. Networks and vehicle routing for municipal waste collection. **Networks**, Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company New York, v. 4, n. 1, p. 65-94, 1974.
- BERTSIMAS, D.; DELARUE, A.; MARTIN, S. Optimizing schools' start time and bus routes. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Acad Sciences, v. 116, n. 13, p. 5943-5948, 2019.
- BODIN, L. D.; BERMAN, L. Routing and scheduling of school buses by computer. **Transportation Science**, INFORMS, v. 13, n. 2, p. 113-129, 1979.
- BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil**. 1988. [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/constituicao/constituicao.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm). Acessado: 2021-01-08.
- BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. 1996. [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/leis/l9394.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm). Acessado: 2021-01-10.
- BRASIL. **Lei nº 10.709, de 31 de julho de 2003**. 2003. [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/leis/2003/L10.709.htm#art1](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/2003/L10.709.htm#art1). Acessado: 2021-01-10.
- BRASIL. **Portaria nº 1.096, de 30 de dezembro de 2020**. 2020. <https://www.in.gov.br/web/dou/-/portaria-n-1.096-de-30-de-dezembro-de-2020-297416148>. Acessado: 2021-01-15.
- BRASIL. **Projeto de Lei nº 4.031, de agosto de 2020**. 2020. [https://www.camara.leg.br/proposicoesWeb/prop\\_mostrarintegra;jsessionid=node02ppjqbpin1ndmb1lvkfm5mx72553270.node0?codteor=1951570&filename=Avulso+-PL+4031/2020](https://www.camara.leg.br/proposicoesWeb/prop_mostrarintegra;jsessionid=node02ppjqbpin1ndmb1lvkfm5mx72553270.node0?codteor=1951570&filename=Avulso+-PL+4031/2020). Acessado: 2021-01-10.
- BURKE, E. K.; KENDALL, G. **Search methodologies: introductory tutorials in optimization and decision support techniques**. [S. l.]: Springer, 2014.
- CALVETE, H. I.; GALÉ, C.; IRANZO, J. A.; TOTH, P. A partial allocation local search matheuristic for solving the school bus routing problem with bus stop selection. **Mathematics**, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 8, n. 8, p. 1214, 2020.
- CHRISTIAENS, J.; BERGHE, G. V. Slack induction by string removals for vehicle routing problems. **Transportation Science**, INFORMS, v. 54, n. 2, p. 417-433, 2020.
- CROES, G. A. A method for solving traveling-salesman problems. **Operations research**, INFORMS, v. 6, n. 6, p. 791-812, 1958.
- DESROSIERS, J.; FERLAND, J.; ROUSSEAU, J.; LAPALME, G.; CHAPLEAU, L. **An overview of a school busing system**. NK Jaiswal, ed., **Scientific Management of Transport Systems**. [S. l.]: North-Holland, Amsterdam, 1981.

DUECK, G. New optimization heuristics: The great deluge algorithm and the record-to-record travel. **Journal of Computational physics**, Elsevier, v. 104, n. 1, p. 86–92, 1993.

ELLEGOOD, W. A.; SOLOMON, S.; NORTH, J.; CAMPBELL, J. F. School bus routing problem: Contemporary trends and research directions. **Omega**, Elsevier, v. 95, p. 102056, 2020.

FORD, L. R.; FULKERSON, D. R. Maximal flow through a network. **Canadian journal of Mathematics**, Cambridge University Press, v. 8, p. 399–404, 1956.

GENDREAU, M.; POTVIN, J.-Y. **Handbook of metaheuristics**. [S. l.]: Springer, 2018. v. 3.

GOLDBARG, E.; GOLDBARG, M.; LUNA, H. **Otimização combinatória e metaheurísticas: algoritmos e aplicações**. [S. l.]: Elsevier Brasil, 2016.

HOU, Y.-E.; DANG, L.; DONG, W.; KONG, Y. A metaheuristic algorithm for routing school buses with mixed load. **IEEE Access**, IEEE, v. 8, p. 158293–158305, 2020.

INEP, I. N. d. E. e. P. E. A. T. **Censo da Educação Superior 2019**. 2020. [https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/estatisticas\\_e\\_indicadores/resumo\\_tecnico\\_censo\\_da\\_educacao\\_superior\\_2019.pdf](https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/estatisticas_e_indicadores/resumo_tecnico_censo_da_educacao_superior_2019.pdf). Acessado: 2021-01-10.

INEP, I. N. d. E. e. P. E. A. T. **Censo da Educação Básica 2020**. 2021. [https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/estatisticas\\_e\\_indicadores/resumo\\_tecnico\\_censo\\_escolar\\_2020.pdf](https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/estatisticas_e_indicadores/resumo_tecnico_censo_escolar_2020.pdf). Acessado: 2021-01-10.

KARIMI-MAMAGHAN, M.; MOHAMMADI, M.; MEYER, P.; KARIMI-MAMAGHAN, A. M.; TALBI, E.-G. Machine learning at the service of meta-heuristics for solving combinatorial optimization problems: A state-of-the-art. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 296, n. 2, p. 393–422, 2022.

KARP, R. M. Reducibility among combinatorial problems. In: \_\_\_\_\_. **Complexity of Computer Computations: Proceedings of a symposium on the Complexity of Computer Computations, held March 20–22, 1972, at the IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York, and sponsored by the Office of Naval Research, Mathematics Program, IBM World Trade Corporation, and the IBM Research Mathematical Sciences Department**. Boston, MA: Springer US, 1972. p. 85–103. ISBN 978-1-4684-2001-2. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/978-1-4684-2001-2\\_9](https://doi.org/10.1007/978-1-4684-2001-2_9).

KINABLE, J.; SPIEKSMAN, F. C.; BERGHE, G. V. School bus routing—a column generation approach. **International Transactions in Operational Research**, Wiley Online Library, v. 21, n. 3, p. 453–478, 2014.

KOMIJAN, A. R.; GHASEMI, P.; KHALILI-DAMGHANI, K.; HASHEMIYAZDI, F. A new school bus routing problem considering gender separation, special students and mix loading: A genetic algorithm approach. **Journal of Optimization in Industrial Engineering**, QIAU, v. 14, n. 2, p. 39–55, 2021.

LOURENÇO, H. R.; MARTIN, O. C.; STÜTZLE, T. Iterated local search. In: \_\_\_\_\_. **Handbook of Metaheuristics**. Boston, MA: Springer US, 2003. p. 320–353. ISBN 978-0-306-48056-0. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/0-306-48056-5\\_11](https://doi.org/10.1007/0-306-48056-5_11).

MARTELLO, S.; TOTH, P. **Knapsack problems: algorithms and computer implementations**. [S. l.]: John Wiley & Sons, 1990. ISBN 0-471-92420-2.

- MÁXIMO, V. R.; NASCIMENTO, M. C. A hybrid adaptive iterated local search with diversification control to the capacitated vehicle routing problem. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, 2021.
- MELO, I. E. S.; KRAMER, R. Uma abordagem heurística para o multi-period school bus routing problem. In: **Anais do LII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**. João Pessoa - PB: SOBRAPO, 2021.
- MIRANDA, D. M.; CAMARGO, R. S. de; CONCEIÇÃO, S. V.; PORTO, M. F.; NUNES, N. T. A multi-loading school bus routing problem. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, v. 101, p. 228–242, 2018.
- MIRANDA, D. M.; CAMARGO, R. S. de; CONCEIÇÃO, S. V.; PORTO, M. F.; NUNES, N. T. A metaheuristic for the rural school bus routing problem with bell adjustment. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, v. 180, p. 115086, 2021.
- MOHANDAS, P.; SARASWATHY, M. V.; ALEX, A. P. Development of an algorithm for bus routing and tracking for an educational institution: A case study. **Journal of The Institution of Engineers (India): Series A**, Springer, v. 102, n. 1, p. 279–292, 2021.
- NAGY, G.; SALHI, S. Heuristic algorithms for single and multiple depot vehicle routing problems with pickups and deliveries. **European journal of operational research**, Elsevier, v. 162, n. 1, p. 126–141, 2005.
- NEWTON, R. M.; THOMAS, W. H. Design of school bus routes by computer. **Socio-Economic Planning Sciences**, Elsevier, v. 3, n. 1, p. 75–85, 1969.
- OR, I. **Traveling salesman-type combinatorial problems and their relation to the logistics of regional blood banking**. Tese (Doutorado) – Northwestern University, USA, 1976.
- OSMAN, I. H.; LAPORTE, G. **Metaheuristics: A bibliography**. [S. l.]: Springer, 1996.
- PARK, J.; KIM, B.-I. The school bus routing problem: A review. **European Journal of operational research**, Elsevier, v. 202, n. 2, p. 311–319, 2010.
- REN, J.; JIN, W.; WU, W. A two-stage algorithm for school bus stop location and routing problem with walking accessibility and mixed load. **IEEE Access**, IEEE, v. 7, p. 119519–119540, 2019.
- SCHITTEKAT, P.; KINABLE, J.; SÖRENSEN, K.; SEVAUX, M.; SPIEKSMAN, F.; SPRINGAEL, J. A metaheuristic for the school bus routing problem with bus stop selection. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 229, n. 2, p. 518–528, 2013.
- SEMAAN, G. S.; BRITO, J. A. de M.; COELHO, I. M.; SILVA, E. F.; FADEL, A. C.; OCHI, L. S.; MACULAN, N. A brief history of heuristics: from bounded rationality to intractability. **IEEE Latin America Transactions**, IEEE, v. 18, n. 11, p. 1975–1986, 2020.
- SHAFABI, A.; WANG, Z.; HAGHANI, A. Speedroute: Fast, efficient solutions for school bus routing problems. **Transportation research part B: methodological**, Elsevier, v. 117, p. 473–493, 2018.
- SILVA NETO, I. C.; BULHÕES, T.; SUBRAMANIAN, A.; TEIXEIRA, E.; KRAMER, R. Um algoritmo heurístico para o problema de roteamento de ônibus escolares. In: **Anais do LII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**. João Pessoa - PB: SOBRAPO, 2020.

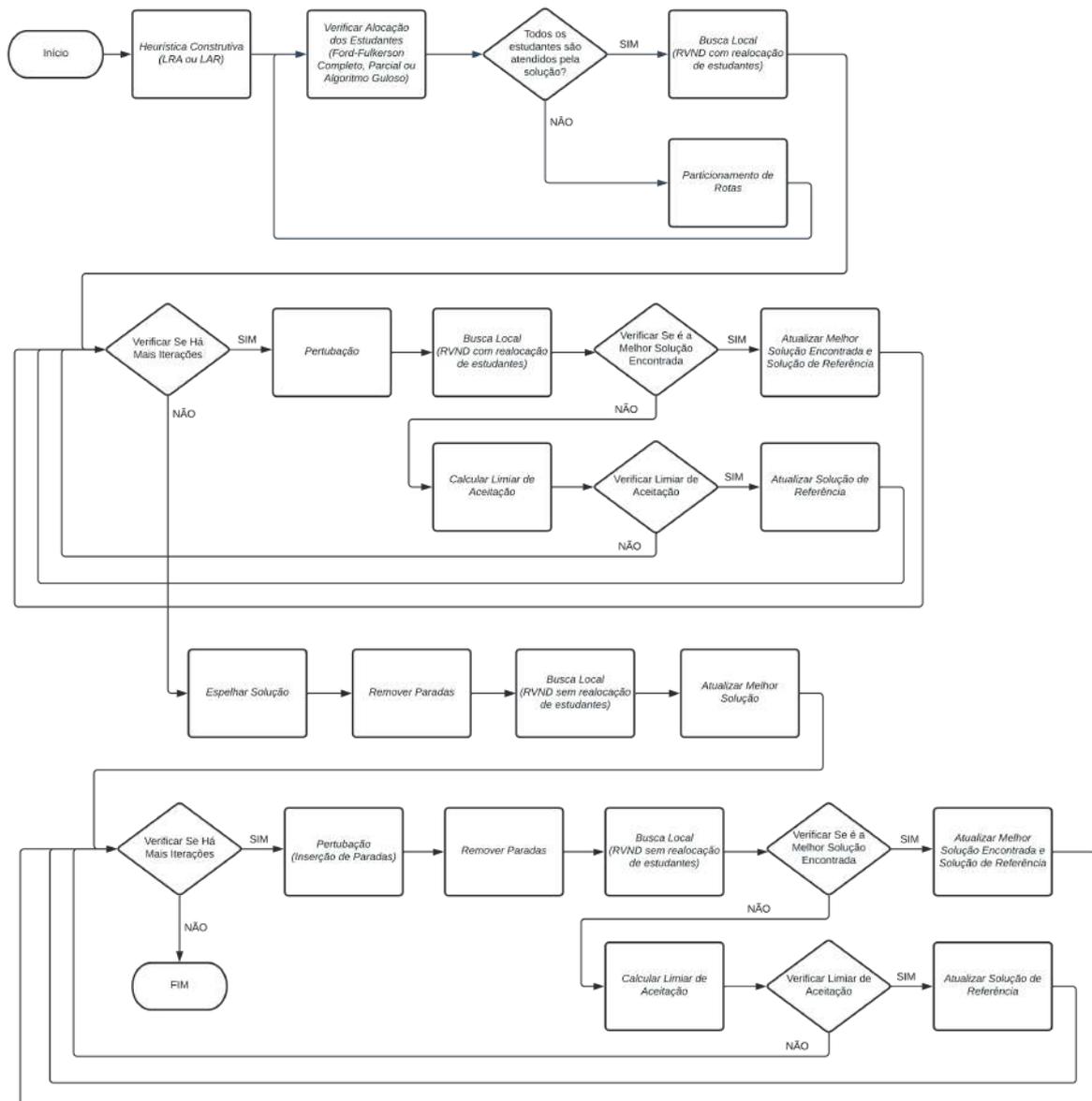
SOUZA, M. J. F. Inteligência computacional para otimização. **Notas de aula, Departamento de Computação, Universidade Federal de Ouro Preto, disponível em <http://www.decom.ufop.br/prof/marcone/InteligenciaComputacional/InteligenciaComputacional.pdf>, 2011.**

SUBRAMANIAN, A.; DRUMMOND, L. M. d. A.; BENTES, C.; OCHI, L. S.; FARIAS, R. A parallel heuristic for the vehicle routing problem with simultaneous pickup and delivery. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 37, n. 11, p. 1899–1911, 2010.

## APÊNDICE A – FLUXOGRAMA DA HEURÍSTICA PROPOSTA

No presente apêndice é apresentado o fluxograma que resume os procedimentos envolvidos no algoritmo heurístico proposto neste trabalho, denominado de *Iterated Local Search with Randomized Variable Neighborhood Descent and Remove* (ILS-RVND-R) e apresentado em Algoritmo 1.

Figura 9 – Fluxograma dos procedimentos realizados na heurística proposta



Fonte: O autor (2022)

## APÊNDICE B – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS INSTÂNCIAS

No presente apêndice serão apresentadas, através de gráficos de dispersão, as 95 instâncias propostas por Schittekat *et al.* (2013) e utilizadas neste trabalho. Nos gráficos a escola é representada em vermelho, os estudantes são representados em verde, as paradas por pontos azuis e a região alcançável de paradas para um aluno se deslocar é representada por círculos. Para cada instância são apresentados os gráficos com e sem região alcançável dos estudantes, uma vez que a presença destas regiões pode dificultar a visualização dos demais elementos.

Figura 10 – Instâncias propostas por Schittekat *et al.* (2013)

