



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

GABRIEL CARVALHO BORGES

TRANSFORMAÇÃO COLOR-FLAVOR E TRANSPORTE QUÂNTICO

Recife

2021

GABRIEL CARVALHO BORGES

TRANSFORMAÇÃO COLOR-FLAVOR E TRANSPORTE QUÂNTICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física Teórica e Computacional

Orientador: Dr. Antônio Murilo Santos Macêdo

Recife

2021

Catálogo na fonte
Bibliotecária Nataly Soares Leite Moro, CRB4-1722

B732t Borges, Gabriel Carvalho
 Transformação color-flavor e transporte quântico / Gabriel Carvalho Borges.
 – 2021.
 84 f.: il., fig., tab.

 Orientador: Antônio Murilo Santos Macêdo.
 Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
 Física, Recife, 2021.
 Inclui referências e apêndice.

 1. Física teórica e computacional. 2. Matrizes. I. Macêdo, Antônio Murilo
 Santos (orientador). II. Título.

530.1

CDD (23. ed.)

UFPE- CCEN 2021 - 196

GABRIEL CARVALHO BORGES

TRANSFORMAÇÃO COLOR-FLAVOR E TRANSPORTE QUÂNTICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 30/11/2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Antônio Murilo Santos Macêdo
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Renê Rodrigues Montenegro Filho
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Anderson Luiz da Rocha e Barbosa
Examinador Externo
Universidade Federal Rural de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha família que sempre me apoiou e que está a todo momento acompanhando, admirando e incentivando os meus pequenos e difíceis passos, mesmo sabendo da dificuldade que é seguir a carreira acadêmica, infelizmente, no nosso país.

Ao professor Gerson Cortês por toda a contribuição acadêmica durante o período da graduação e por me apresentar o universo do transporte quântico.

Aos professores do departamento de física da UFPE com os quais tive a oportunidade de ser aluno.

Em especial, gostaria de agradecer ao professor Antônio Murilo pela excelente orientação, me ajudando a compreender os assuntos da melhor forma possível. Para além disso, sempre foi paciente e principalmente compreensível.

Por fim, agradeço imensamente ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

O estudo de transporte eletrônico em nanoestruturas tornou-se bastante importante a partir da capacidade de produção de dispositivos pequenos o suficiente para que a coerência de fase dos portadores de cargas seja relevante, possibilitando a observação de uma variedade de novos fenômenos, tais como a localização fraca e as flutuações universais da condutância. Nesta dissertação estudamos propriedades de transporte de pontos quânticos, ou mais especificamente, cavidades balísticas abertas que apresentam dinâmica clássica correspondente caótica. Para isso, introduzimos uma identidade matemática, chamada de transformação color-flavor, para utilizarmos no cálculo da função geratriz da condutância de pontos quânticos caóticos com simetria de reversão temporal quebrada. Assim, tratamos primeiramente o caso de dispositivos mesoscópicos que consistem em um ponto quântico conectado a reservatórios de elétrons via guias de onda ideais, onde definimos a função geratriz em termos de funções de Husimi e da função fidelidade. Posteriormente, tratamos o caso de uma cadeia formada por pontos quânticos conectados em série via guias de onda ideais e obtivemos uma expressão para a média da condutância de um sistema contendo dois pontos.

Palavras-chave: transporte eletrônico em sistemas mesoscópicos; pontos quânticos; matrizes aleatórias; transformação color-flavor.

ABSTRACT

The study of electronic transport in nanostructures has become quite important from the ability to produce devices small enough that the phase coherence of charge carriers is relevant, enabling the observation of a variety of new phenomena, such as weak localization and universal fluctuations of conductance. In this dissertation we study transport properties of quantum dots, or more specifically, open ballistic cavities that exhibit correspondingly chaotic classical dynamics. To this end, we introduce a mathematical identity, called the color-flavor transformation, to use in calculating the conductance generating function of chaotic quantum dots with broken time-reversal symmetry. Thus, we first treat the case of mesoscopic devices consisting of a quantum dot connected to electron reservoirs via ideal waveguides, where we define the generating function in terms of Husimi functions and the fidelity function. Subsequently, we treated the case of a chain consisting of quantum dots connected in series via ideal waveguides and obtained an expression for the average conductance of a system containing two dots.

Keywords: electronic transport in mesoscopic systems; quantum dots; random matrices; color-flavor transformation.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Relação entre comprimentos característicos e regimes de transporte em dispositivos mesoscópicos. L é o comprimento da amostra. 14
- Figura 2 – Junção AlGaAs/GaAs com a representação do perfil das bandas de energia nos dois materiais (E_C é a energia de condução, E_V é a energia de valência e E_F é a energia de Fermi). À esquerda mostra-se o perfil das bandas de energia antes do processo de transferência de cargas, enquanto à direita mostra-se a mudança no perfil das bandas de energia devido à transferência de cargas. 16
- Figura 3 – A figura à esquerda é uma representação esquemática de um ponto quântico construído a partir de um gás bidimensional de elétrons. Na figura à direita podemos visualizar a imagem de um ponto quântico, onde as setas vermelhas indicam as regiões que os elétrons entram e saem do ponto. . . 17
- Figura 4 – Trajetória em uma cavidade regular (a) e a trajetória em uma cavidade na forma de estádio (b). O movimento na cavidade regular é ordenado, enquanto na outra cavidade o movimento é irregular ou caótico. 17
- Figura 5 – Representação esquemática de um gás bidimensional de elétrons (região escura) na interface de uma heterojunção semicondutora. Uma porta metálica delimita o movimento do elétron (região clara), criando uma pequena abertura. Uma corrente é criada se uma voltagem for aplicada nos dois contatos. 18
- Figura 6 – Evidência experimental da quantização da condutância em constrições. O gráfico mostra o comportamento da condutância em forma de degraus vs. a voltagem aplicada na constrição. 19
- Figura 7 – Comportamento da magneto-resistência em função do campo magnético em um fio quântico difusivo de $100\mu m$ para três valores distintos de espessura e temperatura. 21
- Figura 8 – Comportamento da condutância em função do campo magnético em um ponto quântico com forma geométrica do tipo circular. 21

Figura 9 – Flutuação da condutância em função de um campo magnético perpendicular de uma amostra contendo um fio de Au com 310 nm de comprimento e 25 nm de largura.	22
Figura 10 – Representação esquemática de uma cavidade bidimensional acoplada a dois guias de onda. As setas indicam as ondas que entram e saem da cavidade em ambos os guias.	25
Figura 11 – Ilustração da reversão temporal.	30
Figura 12 – Representação do modelo de reservatórios de Landauer. A região de espalhamento (região S) é conectada aos reservatórios via guias ideais. Os reservatórios estão em equilíbrio térmico e possuem potenciais químicos diferentes.	35
Figura 13 – Representação esquemática de uma cavidade caótica com forma geométrica irregular.	44
Figura 14 – Representação de um q-bit na esfera de Bloch.	66
Figura 15 – Representação de uma cadeia de cavidades caóticas conectadas em série via guias ideais com N canais de propagação. Os $z_i (i = 1, 2, \dots, M)$ representam as cavidades caóticas e φ representa um potencial fictício.	74
Figura 16 – Representação de duas cavidades caóticas conectadas em série via guias ideais com N canais de propagação. Os $z_i (i = 1, 2)$ representam as cavidades caóticas e φ representa um potencial fictício.	77
Figura 17 – Comportamento da condutância adimensional de uma cadeia formada por duas cavidades caóticas conectadas em série via guias ideais para o caso simétrico, $N_1 = N_2 = N$	78

LISTA DE TABELAS

- Tabela 1 – Classificação dos ensembles de Wigner-Dyson: ensemble gaussiano ortogonal, unitário e simplético. As matrizes H e U apresentam características diferentes para os três valores do índice β , dependendo da ausência ou presença das simetrias de reversão temporal (SRT) e de rotação de spin (SRS). 38
- Tabela 2 – Tabela de Cartan para as dez classes de simetria na qual apresenta as condições impostas pelas simetrias de reversão temporal, rotação de spin, partícula-buraco e de subrede. 42

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	FÍSICA MESOSCÓPICA	13
1.1.1	Escalas de comprimento característicos em transporte mesoscópico	13
1.2	GÁS DE ELÉTRONS BIDIMENSIONAL	15
1.3	PONTOS QUÂNTICOS	16
1.4	FENÔMENOS EM SISTEMAS MESOSCÓPICOS	17
1.4.1	Quantização da condutância	18
1.4.2	Localização fraca	19
1.4.3	Flutuações universais da condutância	22
1.5	A DISSERTAÇÃO	22
2	FORMALISMO DE ESPALHAMENTO E TEORIA DE MATRIZES	
	ALEATÓRIAS	24
2.1	TEORIA DE ESPALHAMENTO	24
2.1.1	Simetrias da matriz de espalhamento	27
2.1.1.1	<i>Unitariedade</i>	28
2.1.1.2	<i>Simetria de reversão temporal (partícula sem spin)</i>	29
2.1.1.3	<i>Simetria de reversão temporal (partícula de spin 1/2)</i>	31
2.2	FORMALISMO DE LANDAUER	34
2.3	TEORIA DE MATRIZES ALEATÓRIAS	36
2.3.1	Ensembles Gaussianos	37
2.3.2	Ensemble circular	39
2.3.3	Classes de simetria dos ensembles	42
2.4	CONDUTÂNCIA DE CAVIDADES CAÓTICAS	43
3	A TRANSFORMAÇÃO COLOR-FLAVOR E O MÉTODO DA FUN-	
	ÇÃO GERATRIZ	46
3.1	INTRODUÇÃO À TRANSFORMAÇÃO COLOR-FLAVOR	46
3.2	A FUNÇÃO GERATRIZ DA CONDUTÂNCIA	47
3.3	TRANSFORMAÇÃO COLOR-FLAVOR E CAVIDADES CAÓTICAS	48
3.3.1	Um canal de propagação	50
3.3.2	Número arbitrário de canais de propagação	55

4	CONDUTÂNCIA E CADEIA DE CAVIDADES CAÓTICAS	60
4.1	FUNÇÃO GERATRIZ DA CONDUTÂNCIA PARA O ECU	60
4.1.1	Função de Husimi	62
4.1.1.1	<i>Momento da função de Husimi</i>	63
4.1.2	Função fidelidade	64
4.1.2.1	<i>A função geratriz como medida de distinguibilidade</i>	66
4.2	CONDUTÂNCIA	68
4.3	CADEIA DE CAVIDADES CAÓTICAS	73
4.3.1	Função geratriz da condutância	73
4.3.1.1	<i>Duas cavidades</i>	76
5	CONCLUSÃO	79
	REFERÊNCIAS	80
	APÊNDICE A – TRANSFORMAÇÃO COLOR-FLAVOR FERMIÔNICA	83

1 INTRODUÇÃO

O início do século XX marcou uma grande mudança no paradigma científico em razão do desenvolvimento da mecânica quântica e do extraordinário processo de desenvolvimento tecnológico que ela proporcionou, e ainda proporciona, com mudanças significativas na sociedade. Podemos citar como exemplo a invenção dos transistores, os quais passaram a substituir as válvulas na produção industrial, deflagrando o processo de miniaturização de dispositivos eletrônicos. Assim, a constante procura para compreender e controlar sistemas de dimensões diminutas nos conduziu a uma nova área da ciência: a nanociência.

A nanociência consiste essencialmente em estudar propriedades fundamentais de estruturas cujas escalas variam de 1 a 100 nanômetros. A importância de manipular e controlar tais estruturas pode ser notada através da célebre frase de Richard Feynman “Há muito espaço lá embaixo” durante uma conferência realizada em 1959 na Califórnia, onde nos mostra antecipadamente as possíveis consequências relacionadas ao desenvolvimento tecnológico. Nesta dissertação estamos interessados em um ramo da nanociência denominado de transporte quântico, que basicamente estuda as propriedades de transporte coerente de cargas em nanoestruturas (NAZAROV; BLANTER, 2009).

No transporte eletrônico em nanoestruturas a característica ondulatória dos elétrons não pode ser desprezada, de maneira que as observáveis de transporte são afetadas pela coerência de fase dos portadores de cargas. Esses sistemas podem apresentar propriedades que não dependem do tamanho, da composição ou da presença de impurezas na estrutura, sendo denominadas de propriedades universais de transporte. Assim, levando-se em conta observações de efeitos quânticos relacionados ao transporte eletrônico em nanoestruturas, podemos introduzir o conceito de física mesoscópica. O termo mesoscópico surgiu da tentativa de se criar uma descrição para uma escala entre o micro e o macro, onde se pudesse utilizar a teoria quântica e a teoria clássica. No entanto, nunca foi estabelecida uma fronteira nítida entre as duas escalas, pois pode-se observar os mesmos fenômenos tanto em estruturas com dimensões intermediárias quanto em estruturas com dimensões microscópicas. Portanto, a física mesoscópica pode intuitivamente ser definida como sendo a física da transição gradual entre os regimes de transporte quântico e clássico.

Neste primeiro capítulo introduziremos conceitos centrais da física mesoscópica, definiremos pontos quânticos, que são os objetos de estudo desta dissertação, e abordaremos alguns

fenômenos observados em dispositivos mesoscópicos.

1.1 FÍSICA MESOSCÓPICA

O desenvolvimento da nanociência causou um grande impacto na física de transporte eletrônico, fazendo com que a observação de novas propriedades em sistemas miniaturizados se tornasse um campo de pesquisa muito importante e de interesse de muitos pesquisadores. Esse campo de pesquisa é conhecida como física mesoscópica, onde o termo mesoscópico faz referência a estruturas que são muito maiores que objetos microscópicos, como átomos, mas não são grandes o suficiente para que sua descrição física seja clássica (IMRY, 2002).

Dessa forma, o estudo de transporte de elétrons em dispositivos mesoscópicos é viabilizado, em grande parte, pela capacidade de fabricação de sistemas de tamanho diminuto, onde podemos destacar as regiões bidimensionais formadas em heteroestruturas semicondutoras de GaAs/AlGaAs (arseneto de gálio e arseneto de gálio dopado com alumínio) (REZENDE, 2004). Assim, experimentos realizados nessas estruturas semicondutoras a baixas temperaturas garantem a coerência de fase do elétron, tornando-se possível a manifestação de propriedades quânticas de transporte. Abaixo destacaremos os diferentes regimes de transporte em dispositivos mesoscópicos.

1.1.1 Escalas de comprimento característicos em transporte mesoscópico

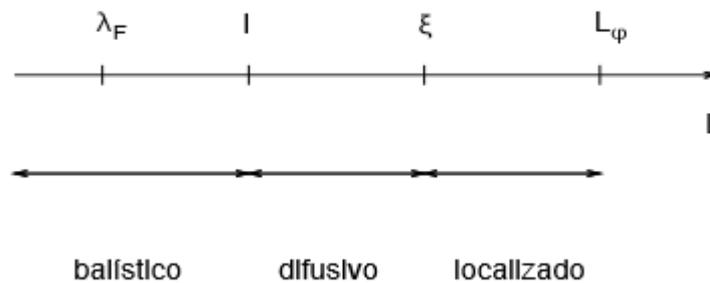
Tratando-se do regime de transporte em dispositivos mesoscópicos, devemos definir determinadas escalas de comprimento a fim de diferenciar as características dos fenômenos de transporte. Portanto, define-se os comprimentos característicos da seguinte forma:

- **Comprimento de onda de Fermi**, λ_F : Escala de comprimento relacionada com a energia de Fermi, definida por $\lambda_F = \hbar/\sqrt{2m\epsilon_F}$. Em condutores a baixas temperaturas, somente os elétrons com energias próximas à energia de Fermi participam da condução.
- **Livre caminho médio elástico**, l : É a distância média percorrida por um elétron até sofrer uma colisão elástica, caracterizando a desordem do sistema. Essa escala de comprimento varia de alguns angstroms em ligas amorfas a uma dezena de microns em heteroestruturas semicondutoras e é definida por $l = v_F\tau$, onde v_F é a velocidade de Fermi e τ é o tempo de relaxação do momento.

- **Comprimento de localização eletrônica, ξ :** Determina a extensão espacial da função de onda eletrônica. Em condutores essas funções se estendem por toda a amostra, em contrapartida nos isolantes elas decaem exponencialmente a partir de um centro de localização.
- **Comprimento de coerência de fase, L_ϕ :** É a distância ao longo da qual a fase da função de onda não relaxa. Portanto, o comprimento de coerência de fase se relaciona com o tempo de relaxação de fase τ_ϕ , sendo a escala de comprimento mais importante em sistemas mesoscópicos.

Em geral, para amostras mesoscópicas a baixas temperaturas, temos $\lambda_F < l < \xi < L_\phi$. Neste caso, existem três tipos de regimes de transporte, descritos abaixo (ver figura 1):

Figura 1 – Relação entre comprimentos característicos e regimes de transporte em dispositivos mesoscópicos. L é o comprimento da amostra.



Fonte: DUARTE-FILHO (2010)

- **Balístico:** Um transporte é dito balístico quando o comprimento da amostra for menor que o livre caminho médio ($L < l$). Nesta situação, os elétrons movimentam-se praticamente sem sofrer colisões.
- **Difusivo:** Um transporte é dito difusivo quando o comprimento da amostra é maior que o livre caminho médio e menor que o comprimento de localização eletrônica ($l < L < \xi$). Neste regime, o elétron sofre diversas colisões elásticas antes de escapar da amostra e o comprimento de relaxação de fase é definido por $L_\phi = \sqrt{D\tau_\phi}$, onde D é a constante de difusão da amostra.
- **Localizado:** Ocorre quando o comprimento da amostra é maior que o comprimento de localização eletrônica e menor que o comprimento de coerência de fase ($\xi < L < L_\phi$).

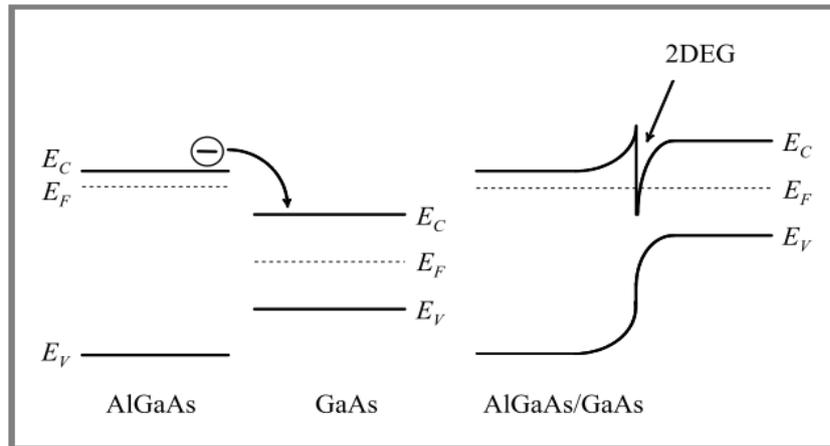
As funções de onda eletrônica neste regime ficam localizadas, dessa forma a amostra comporta-se como isolante.

1.2 GÁS DE ELÉTRONS BIDIMENSIONAL

No final dos anos 80 tornou-se possível construir dispositivos com alta mobilidade que eram suficientemente pequenos e livres de impurezas para garantir que o livre caminho médio, l , excedesse o tamanho do sistema, L . Podemos citar como exemplo as heteroestruturas semicondutoras formadas de AlGaAs/GaAs, que são muito importantes para a indústria eletrônica e para a física de transporte balístico. Além disso, na interface dessas heteroestruturas os elétrons são confinados em uma dimensão, formando-se assim um gás de elétrons bidimensional (2DEG).

Na figura 2 é possível visualizar o comportamento dos níveis de energia no momento em que os dois semicondutores juntam-se para formar a heteroestrutura. Antes de ocorrer a junção, o nível de Fermi em ambos os materiais está localizado no gap de energia. Ao aproximar os dois materiais, os elétrons da banda de condução do material AlGaAs migram para a banda de condução do material GaAs, pois o potencial de banda de condução do GaAs é menor que o do AlGaAs (REZENDE, 2004). Este transporte de elétrons faz com que a região doadora fique carregada positivamente, onde surge um campo elétrico que atrai os elétrons, provocando uma curvatura na banda de condução (ver figura 2). A transferência de elétrons é finalizada no momento em que o nível de Fermi nos dois materiais se iguala. Assim, a criação dessa curvatura na banda de condução provoca o confinamento em apenas uma dimensão dos elétrons na interface da heterojunção, formando o gás de elétrons bidimensional (2DEG).

Figura 2 – Junção AlGaAs/GaAs com a representação do perfil das bandas de energia nos dois materiais (E_C é a energia de condução, E_V é a energia de valência e E_F é a energia de Fermi). À esquerda mostra-se o perfil das bandas de energia antes do processo de transferência de cargas, enquanto à direita mostra-se a mudança no perfil das bandas de energia devido à transferência de cargas.



Fonte: LIOU; SCHWIERZ (2004)

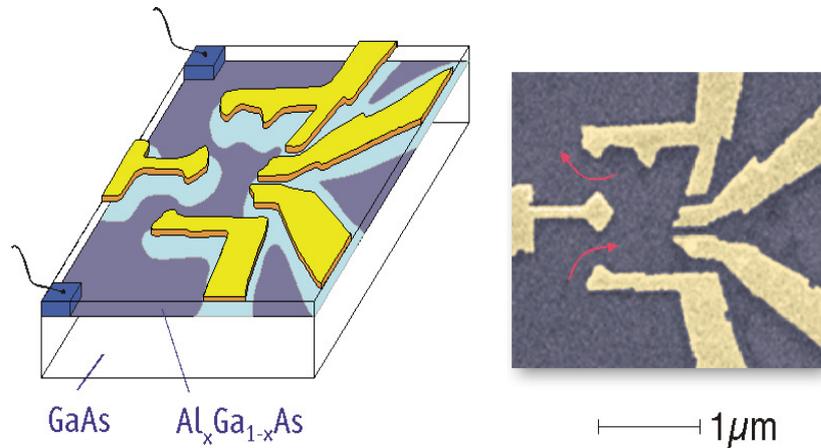
1.3 PONTOS QUÂNTICOS

Os pontos quânticos consistem em cavidades balísticas, tipicamente construídas a partir da interface de uma heteroestrutura semicondutora, que confinam os elétrons em todas as dimensões da microestrutura através de eletrodos introduzidos no topo do 2DEG, onde essa região confinadora do plano da interface é normalmente referida como um sistema zero-dimensional. Na figura 3 podemos visualizar os eletrodos que restringem o movimento do elétron (parte amarela) e a região por onde o elétron pode se deslocar (parte mais escura).

Dessa forma, a introdução de eletrodos no topo da interface semicondutora nos permite produzir uma variedade de cavidades com diferentes formas, de maneira que podemos preparar formas geométricas regulares, como um disco, e formas geométricas nas quais a dinâmica clássica correspondente é caótica (HAAKE, 2001), ocasionando em propriedades de transporte universais, ou seja, a única informação relevante é a presença ou ausência de simetrias no sistema (ver figura 4). Nos pontos quânticos caóticos, o tempo de permanência do elétron na cavidade (τ_{dwell}) é maior que o tempo ergódico (τ_{erg}), que é o tempo que o elétron gasta para explorar todo o espaço de fase.

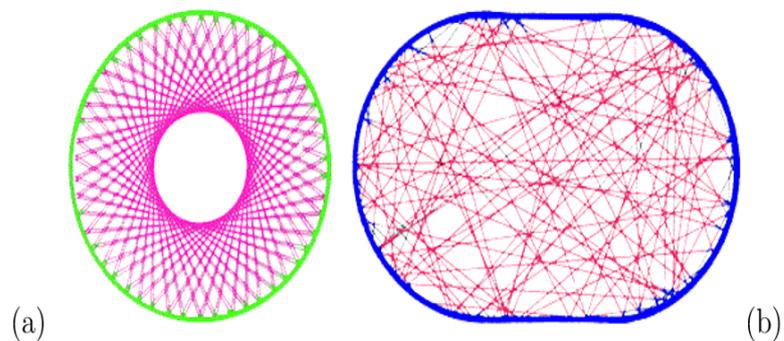
Para que seja possível estudar as propriedades de transporte de um ponto quântico, é necessário acoplar a cavidade a reservatórios de elétrons por meio de guias de onda (cavidade aberta), de modo que uma corrente elétrica seja criada. Dessa forma, como trata-se de dispositivos mesoscópicos, a fase do elétron é preservada em distâncias que são comparáveis com

Figura 3 – A figura à esquerda é uma representação esquemática de um ponto quântico construído a partir de um gás bidimensional de elétrons. Na figura à direita podemos visualizar a imagem de um ponto quântico, onde as setas vermelhas indicam as regiões que os elétrons entram e saem do ponto.



Fonte: KOUWENHOVEN; MARCUS (2008)

Figura 4 – Trajetória em uma cavidade regular (a) e a trajetória em uma cavidade na forma de estádio (b). O movimento na cavidade regular é ordenado, enquanto na outra cavidade o movimento é irregular ou caótico.



Fonte: BEENAKKER (1995)

o tamanho do sistema, fazendo com que a condutância de um ponto quântico, por exemplo, seja afetada diretamente pela coerência de fase.

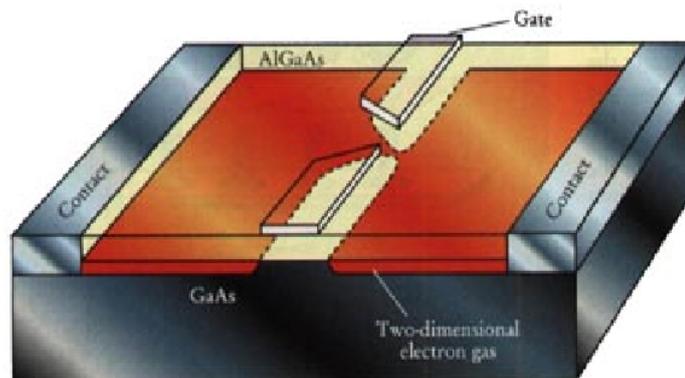
1.4 FENÔMENOS EM SISTEMAS MESOSCÓPICOS

Nesta seção discutiremos brevemente os três principais fenômenos que podem ser observados em dispositivos mesoscópicos: a quantização da condutância, a localização fraca e as flutuações universais da condutância.

1.4.1 Quantização da condutância

A quantização da condutância é um dos principais fenômenos da física de transporte eletrônico em sistemas mesoscópicos e pode ser visualizada a partir de uma constricção que é criada sobre o gás de elétrons bidimensional, onde tal constricção é chamada de ponto de contato quântico (ver figura 5). Além disso, esse fenômeno constata a validade da fórmula de Landauer, a qual trata dispositivos mesoscópicos como sistemas acoplados a reservatórios de elétrons por meio de guias de onda (abordaremos a fórmula de Landauer no próximo capítulo).

Figura 5 – Representação esquemática de um gás bidimensional de elétrons (região escura) na interface de uma heterojunção semicondutora. Uma porta metálica delimita o movimento do elétron (região clara), criando uma pequena abertura. Uma corrente é criada se uma voltagem for aplicada nos dois contatos.



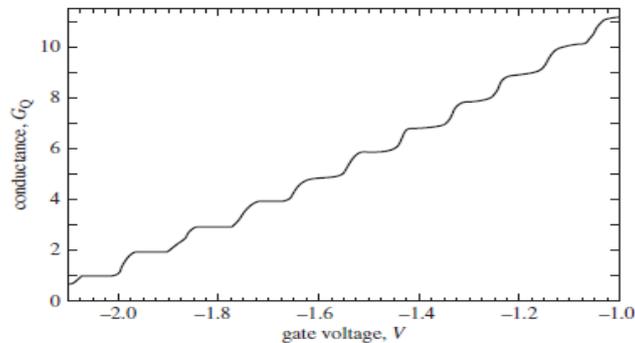
Fonte: BEENAKKER (1995)

O ponto de contato é criado por eletrodos carregados negativamente colocados sobre a heterojunção, sendo que o tamanho da constricção pode ser modificado ao variarmos a voltagem aplicada no condutor (VAN HOUTEN; BEENAKKER, 1996). À medida que a largura do ponto de contato aumenta, a condutância cresce na forma de degraus, onde a altura dos degraus é de $2e^2/h$, dependendo apenas das constantes fundamentais (ver figura 6). Dessa forma, ao induzir uma corrente no sistema, somente um pequeno número de modos transversais, no nível de Fermi, pode passar pela constricção, chamados de canais abertos:

$$N = \text{Int} \left[\frac{k_F W}{\pi} \right] = \text{Int} \left[\frac{2W}{\lambda_F} \right], \quad (1.1)$$

onde W é a largura da constricção e o Int representa um número inteiro menor que $2W/\lambda_F$. É importante notar que se o sistema em questão for um dispositivo metálico, o número de modos transversais será muito grande, $N \gg 1$, pois neste caso o comprimento de onda de Fermi é

Figura 6 – Evidência experimental da quantização da condutância em constrições. O gráfico mostra o comportamento da condutância em forma de degraus vs. a voltagem aplicada na constrição.



Fonte: VAN WEES et al. (1988)

muito maior que W , não sendo possível observar a quantização da condutância. Portanto, a condutância de um ponto de contato depende apenas do número inteiro N e de constantes fundamentais,

$$G = N \frac{2e^2}{h}. \quad (1.2)$$

A comprovação experimental da fórmula de Landauer ocorreu em 1988 através de um grupo de pesquisadores independentes, onde foi reproduzido o comportamento da condutância em forma de degraus (VAN WEES et al., 1988).

1.4.2 Localização fraca

A descrição clássica do transporte eletrônico pode ser modificada se introduzirmos correções quânticas. Dessa forma, quando a fase eletrônica torna-se um fator relevante no estudo de propriedades de transporte em condutores, devemos levar em consideração o efeito de interferência de ondas associadas aos diversos caminhos pelos quais os elétrons se propagam em um meio difusivo.

Como exemplo, considere o caminho, por onde o elétron se propaga, da posição r_1 até r_2 . De acordo com a mecânica quântica, a probabilidade total da partícula chegar no ponto r_2 é obtida somando as amplitudes de probabilidade das funções de onda associadas aos diferentes caminhos que conectam os pontos r_1 e r_2 . Assim, considerando duas funções de onda ψ_1 e ψ_2 , tendo como forma geral $\psi_i = A_i e^{i\phi_i}$, podemos obter a densidade de probabilidade da seguinte

maneira:

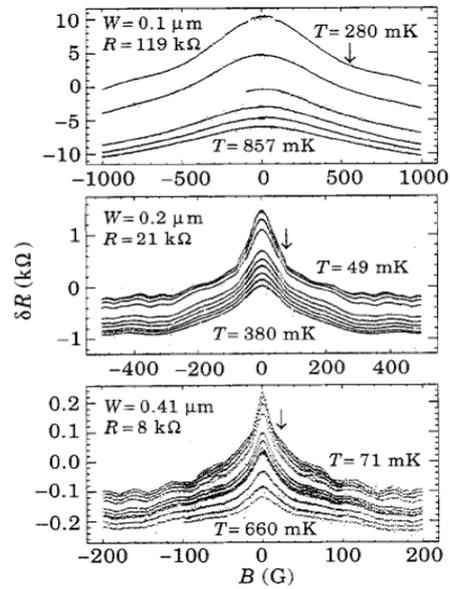
$$P = |\psi_1 + \psi_2|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + 4|A_1^* A_2| \cos(\phi_1 - \phi_2), \quad (1.3)$$

onde o termo final do lado direito da igualdade representa o efeito de interferência entre as ondas que se propagam ao longo das duas trajetórias. Na maioria dos casos o fator que caracteriza a interferência pode ser desprezado pelo fato de a maior parte das fases das funções de onda ser aleatória, então, ao executarmos a média no ensemble, a contribuição da interferência acaba desaparecendo.

Embora grande parte da contribuição da interferência seja desprezada, para algumas trajetórias não podemos excluir a sua contribuição para as grandezas físicas de interesse. Dessa forma, o efeito de localização fraca é caracterizado pela interferência construtiva entre pares de trajetória revertidos no tempo, fazendo com que a probabilidade de retorno do elétron seja maior. O efeito contrário pode ser observado se o sistema tiver interação spin-órbita, ou seja, a diminuição da probabilidade de retorno causada pela interferência destrutiva, sendo que tal efeito é conhecido como anti-localização fraca (BERGMANN, 1982). No entanto, podemos suprimir a influência da interferência se introduzirmos um campo magnético, ocasionando na quebra da simetria de reversão temporal e, conseqüentemente, os pares de trajetórias revertidos no tempo deixem de interferir construtivamente ou destrutivamente (FERRY; GOODNICK, 1997). Na figura 7 podemos ver a contribuição da localização fraca através do comportamento da magneto-resistência em função do campo magnético de um condutor difusivo, onde a assinatura do efeito de interferência quântica é caracterizada pelo excesso de magneto-resistência a campo nulo. Esses fenômenos devido à interferência podem também ser observados em outros dispositivos mesoscópicos, como nos pontos de contatos e nos pontos quânticos (ver figura 8).

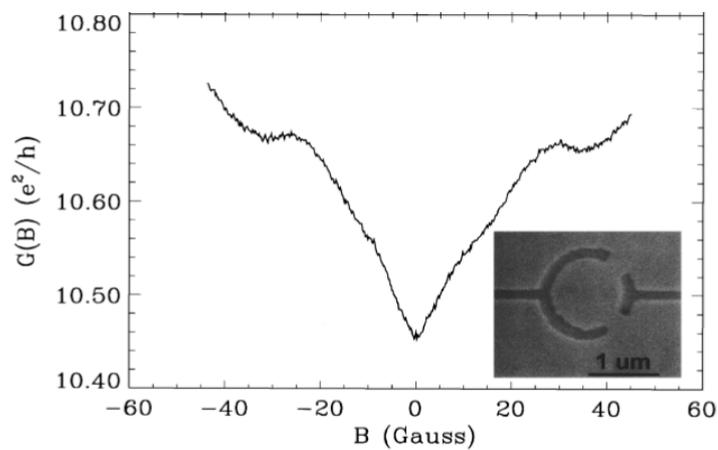
Uma característica de ambos os fenômenos, localização e anti-localização fraca, é a universalidade de tais propriedades de transporte, isto é, a simetria de reversão temporal é a razão pela qual os efeitos se manifestam quando mensuramos as observáveis do sistema e a quebra dessa simetria, causada por um campo magnético externo, resulta na destruição da interferência.

Figura 7 – Comportamento da magneto-resistência em função do campo magnético em um fio quântico difusivo de $100\mu\text{m}$ para três valores distintos de espessura e temperatura.



Fonte: REULET B; BOUCHIAT; MAILLY (1995)

Figura 8 – Comportamento da condutância em função do campo magnético em um ponto quântico com forma geométrica do tipo circular.



Fonte: BEENAKKER (1997)

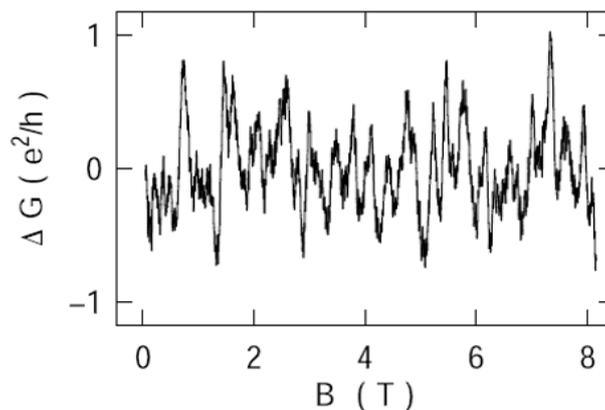
1.4.3 Flutuações universais da condutância

As flutuações da condutância em dispositivos mesoscópicos são fenômenos de transporte que podem ser observados se variarmos a configuração de desordem do sistema (LEE; STONE, 1985). Assim, como exemplo, podemos citar amostras na presença de campos magnéticos, nas quais as flutuações se manifestam devido às mudanças na distribuição das impurezas provocadas pela variação do campo (MOHANTY; WEBB, 2002). A amplitude da flutuação é caracterizada pela variância da condutância:

$$\text{var}(G) \equiv \langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2 \sim \left(\frac{e^2}{h} \right)^2, \quad (1.4)$$

onde o caráter universal da flutuação é devido ao fato de sua amplitude ter o mesmo valor independente do material e da configuração das impurezas. A partir da figura 9 é possível visualizar as flutuações universais da condutância de um fio de ouro de 310 nm de comprimento e 25 nm de espessura a 10 mK.

Figura 9 – Flutuação da condutância em função de um campo magnético perpendicular de uma amostra contendo um fio de Au com 310 nm de comprimento e 25 nm de largura.



Fonte: BEENAKKER (1997)

1.5 A DISSERTAÇÃO

Nesta dissertação estamos interessados em estudar propriedades de transporte de cavidades caóticas, pontos quânticos com formato irregular. Através de uma identidade matemática conhecida como transformação color-flavor, vamos calcular a função geratriz da condutância

para o caso onde a simetria de reversão temporal é quebrada. Assim, a utilização dessa identidade nos permite estabelecer o mapa $U(N_T) \rightarrow S^2$, isto é, a integral sobre matrizes aleatórias é transformada em uma integral realizada no espaço complexo. Para finalizar, vamos analisar um sistema formado por cavidades caóticas conectadas em série. Abaixo, detalhamos os principais pontos abordados nos próximos capítulos.

No capítulo 2 será feita uma introdução ao formalismo de espalhamento, sendo fundamental para conseguirmos estudar sistemas mesoscópicos, que no caso desta dissertação trata-se da condutância em pontos quânticos. Dessa forma, abordaremos o problema de elétrons se propagando através de regiões de espalhamento acopladas a guias de onda, apresentaremos os vínculos das matrizes de espalhamento derivados das simetrias do sistema e discutiremos brevemente o formalismo de Landauer. Para finalizar o capítulo, introduziremos a teoria de matrizes aleatórias, pois trata-se de uma ferramenta teórica muito importante para calcularmos as observáveis de transporte em pontos quânticos caóticos.

No capítulo 3 abordaremos a definição da transformação color-flavor, bem como a possibilidade que nos é oferecida para utilizá-la em diversos sistemas físicos, principalmente em sistemas como as cavidades caóticas. Para isso, destacaremos o método da função geratriz da condutância, onde, devido à transformação color-flavor, consideraremos o mapa $U(N_T) \rightarrow S^2$ para analisarmos o problema de transporte em cavidades com simetria de reversão temporal quebrada. Terminaremos este capítulo mostrando detalhadamente como esta identidade matemática é usada para estabelecer o mapa em questão.

No capítulo 4 utilizaremos o mapa estabelecido através da transformação color-flavor a fim de definir a função geratriz da condutância em termos de um produto de funções de Husimi e interpretá-la como uma medida de distinguibilidade de estados quânticos. Consideraremos também o mesmo mapa para a função geratriz de uma cadeia de cavidades caóticas. Para finalizar, vamos obter expressões para a condutância de um sistema com uma e duas cavidades.

Por fim, no capítulo 5 destacaremos os resultados presentes nesta dissertação e também as perspectivas que a utilização da transformação color-flavor pode nos oferecer.

2 FORMALISMO DE ESPALHAMENTO E TEORIA DE MATRIZES ALEATÓRIAS

Landauer foi o responsável por interpretar pioneiramente a condutância como probabilidade de transmissão, fazendo com que esta interpretação estabelecesse uma descrição essencial para o estudo das propriedades de transporte em sistemas a baixas temperaturas, frequências e voltagens, no qual a interação elétron-elétron pode ser desprezada. De acordo com esta descrição, podemos considerar regiões espalhadoras acopladas a reservatórios de elétrons via guias de onda, de maneira que esses sistemas passam a ser descritos por matrizes de espalhamentos, matrizes S . Portanto, os resultados de interesse em dispositivos mesoscópicos são obtidos através da utilização do formalismo de espalhamento.

No entanto, quando a região de espalhamento, que no caso desta dissertação trata-se do ponto quântico, apresenta dinâmica clássica correspondente caótica, a abordagem com a matriz S torna-se um pouco mais delicada, sendo necessária a utilização da Teoria de Matrizes Aleatórias (TMA), que é uma ferramenta teórica muito importante na física mesoscópica. Por esta razão, neste capítulo vamos abordar os principais conceitos envolvendo a TMA.

2.1 TEORIA DE ESPALHAMENTO

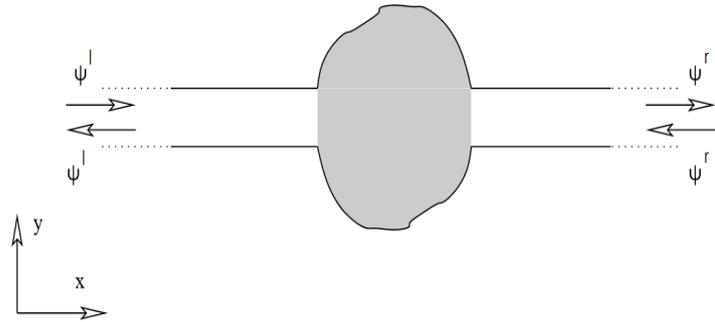
Para introduzir o formalismo de espalhamento, vamos considerar uma cavidade bidimensional conectada a dois reservatórios por dois guias de onda (ver figura 10). Os guias têm largura W e como as paredes dessas estruturas são impenetráveis, o movimento transversal dos elétrons é confinado, resultando na quantização do sistema, dando origem a um conjunto discreto de modos propagantes (MELLO; KUMAR, 2004). Os elétrons que participam do transporte estão no nível de Fermi e não interagem, então a equação de Schrödinger, com campo magnético nulo, que descreve os elétrons é dada por

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \Psi(x, y) = E\Psi(x, y). \quad (2.1)$$

As condições de contorno advêm das paredes impenetráveis dos guias, onde as funções de onda se anulam nos contornos, causando o confinamento transversal:

$$\Psi(x, 0) = \Psi(x, W) = 0. \quad (2.2)$$

Figura 10 – Representação esquemática de uma cavidade bidimensional acoplada a dois guias de onda. As setas indicam as ondas que entram e saem da cavidade em ambos os guias.



Fonte: BARBOSA (2005)

Se nos guias o potencial $V(\vec{r})$ devido às impurezas for nulo, então a solução da equação de Schrödinger pode ser obtida fazendo a seguinte separação de variáveis:

$$\Psi(x, y) = \psi(x)\chi(y), \quad (2.3)$$

sendo que $\psi(x)$ é a função de onda longitudinal e $\chi(y)$ é a função de onda transversal.

A função longitudinal pode ter a forma de uma onda plana,

$$\psi(x) \propto e^{\pm ik_x x}, \quad (2.4)$$

onde $k_x = 2mE_x/\hbar^2$ e o sinal positivo (negativo) representa as ondas planas saindo (entrando) na cavidade.

A partir das condições de contorno, a parte transversal de $\Psi(x, y)$ é definida da seguinte maneira:

$$\chi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{W}} \sin(k_{y,n}y), \quad k_{y,n} = \frac{n\pi}{W} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2.5)$$

onde o número inteiro n caracteriza os modos ou canais de propagação. Então, conhecendo $k_{y,n}$, temos que a energia transversal, $E_{y,n}$:

$$E_{y,n} = \frac{\hbar^2}{2m} [k_{y,n}]^2. \quad (2.6)$$

O número de onda longitudinal e transversal combinados resultam no número de onda de Fermi:

$$[k_x]^2 + [k_{y,n}]^2 = k_F^2. \quad (2.7)$$

então, a energia de Fermi é dada por

$$\epsilon_F = E_x + E_{y,n}. \quad (2.8)$$

A partir da equação (2.8), devemos analisar diferentes casos onde a energia transversal é maior ou menor que a energia de Fermi. Para o caso de $E_{y,n}$ ser menor que ϵ_F , a energia longitudinal assume valores positivos, isto é, k_x é real e a exponencial é interpretada como ondas que se propagam nos guias, sendo portanto relacionadas a canais abertos de propagação. Na situação em que a energia transversal é maior que a energia de Fermi, E_x assume valores negativos, dessa forma k_x é imaginário e as exponenciais caracterizam funções de onda que decaem exponencialmente nos guias, e portanto definem canais fechados de propagação.

No limite $x \rightarrow \infty$, ou seja, para grandes distâncias, apenas os canais abertos de propagação contribuem para a função de onda nos guias. Assim, a solução geral da equação de Schrödinger nos dois guias tem a seguinte forma:

$$\Psi^l(x, y) = \sum_{n=1}^{N_l} \left[a_n^l \sqrt{\frac{m}{k_x^{(n)} \hbar}} e^{-ik_x^{(n)} x} + b_n^l \sqrt{\frac{m}{k_x^{(n)} \hbar}} e^{+ik_x^{(n)} x} \right] \chi_n(y), \quad (2.9)$$

$$\Psi^r(x, y) = \sum_{n=1}^{N_r} \left[a_n^r \sqrt{\frac{m}{k_x^{(n)} \hbar}} e^{-ik_x^{(n)} x} + b_n^r \sqrt{\frac{m}{k_x^{(n)} \hbar}} e^{+ik_x^{(n)} x} \right] \chi_n(y), \quad (2.10)$$

onde o índice l refere-se ao guia esquerdo e o índice r refere-se ao guia direito. As constantes $a_n^{l,r}$ e $b_n^{l,r}$ são as amplitudes das ondas que entram e saem da cavidade, respectivamente, em ambos os guias (ver figura 10).

No guia esquerdo, as amplitudes das ondas de entrada e saída, equação (2.9), podem ser representadas pelas matrizes

$$a^l = \begin{bmatrix} a_1^l \\ a_2^l \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{N_l}^l \end{bmatrix}, \quad b^l = \begin{bmatrix} b_1^l \\ b_2^l \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{N_l}^l \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

e no guia direito, as amplitudes das ondas de entrada e saída, equação (2.10), são definidas por

$$a^r = \begin{bmatrix} a_1^r \\ a_2^r \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{N_r}^r \end{bmatrix}, \quad b^r = \begin{bmatrix} b_1^r \\ b_2^r \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{N_r}^r \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Para incluir as amplitudes das ondas de entrada e saída em ambos os guias, devemos definir as matrizes

$$a = \begin{bmatrix} a^l \\ a^r \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b^l \\ b^r \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Assim, a relação linear entre as amplitudes das ondas de entrada e saída é obtida através da matriz de espalhamento:

$$b = Sa, \quad S = \begin{pmatrix} S_{ll} & S_{lr} \\ S_{rl} & S_{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

onde a matriz S tem dimensão $(N_l + N_r) \times (N_l + N_r)$. O bloco r descreve a reflexão das ondas provenientes do reservatório esquerdo, tendo dimensão $N_l \times N_l$. O bloco de reflexão r' tem dimensão $N_r \times N_r$ e está relacionado com as ondas provenientes do reservatório direito. Por fim, o bloco de transmissão t (t') de dimensão $N_r \times N_l$ representa as ondas transmitidas no guia direito (esquerdo).

2.1.1 Simetrias da matriz de espalhamento

A matriz de espalhamento pode apresentar vínculos devido às simetrias, como por exemplo a simetria de reversão temporal, e à conservação da densidade de corrente na qual implica na unitariedade da matriz S . Abaixo, entraremos em mais detalhes.

2.1.1.1 Unitariedade

A unitariedade da matriz de espalhamento pode ser demonstrada através da conservação de corrente (SAKURAI, 1994). Dessa forma, a densidade de corrente no guia esquerdo é obtida da seguinte maneira:

$$j_l = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \int_0^W \left[\Psi^l(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \Psi^l(x, y) \right] dy. \quad (2.15)$$

e no guia direito

$$j_r = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \int_0^W \left[\Psi^r(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \Psi^r(x, y) \right] dy. \quad (2.16)$$

Utilizando as expressões para as funções de onda nos guias esquerdo e direito, teremos as seguintes igualdades:

$$j_l = \sum_{n=1}^{N_l} (|b_n^l|^2 - |a_n^l|^2), \quad (2.17)$$

$$j_r = \sum_{n=1}^{N_r} (|b_n^r|^2 - |a_n^r|^2), \quad (2.18)$$

onde as densidades de corrente dependem dos módulos quadrados das amplitudes de ondas de entrada e saída, resultando na conservação do fluxo de corrente,

$$j_l + j_r = 0. \quad (2.19)$$

A partir da conservação do fluxo de corrente, temos

$$\sum_{n=1}^{N_l} |a_n^l|^2 + \sum_{n=1}^{N_r} |a_n^r|^2 = \sum_{n=1}^{N_l} |b_n^l|^2 + \sum_{n=1}^{N_r} |b_n^r|^2. \quad (2.20)$$

Ao utilizar a igualdade acima, podemos obter uma expressão na qual o produto da matriz a , matriz das amplitudes das ondas de entrada, com a sua própria adjunta é igual ao produto da matriz b , matriz das amplitudes das ondas de saída, com a sua própria adjunta. Então,

$$a^\dagger a = b^\dagger b. \quad (2.21)$$

A definição de matriz de espalhamento, dada pela equação (2.14), introduzida na igualdade acima, resulta em

$$S^\dagger S = 1, \quad (2.22)$$

ou seja, a equação (2.22) consiste na unitariedade da matriz de espalhamento.

2.1.1.2 Simetria de reversão temporal (partícula sem spin)

A simetria de reversão temporal é representada pela transformação $t \rightarrow -t$, onde o sentido temporal da partícula é invertido. Para um sistema clássico, podemos considerar uma força agindo sobre uma partícula, sendo que a melhor forma de interpretar a operação em questão é vê-la como uma inversão da direção da trajetória do sistema. Como exemplo, vejamos as modificações causadas em duas observáveis clássicas:

$$\vec{r}_{rev}(t) = \vec{r}(-t), \quad (2.23)$$

e

$$\vec{P}_{rev}(t) = -\vec{P}(t), \quad (2.24)$$

onde \vec{r} é o vetor posição da partícula e \vec{P} é o momento linear.

Na mecânica quântica, diferentemente de um sistema clássico, o sistema físico é descrito pela equação de Schrödinger, de tal maneira que todas as informações importantes podem ser obtidas ao resolvê-la:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.25)$$

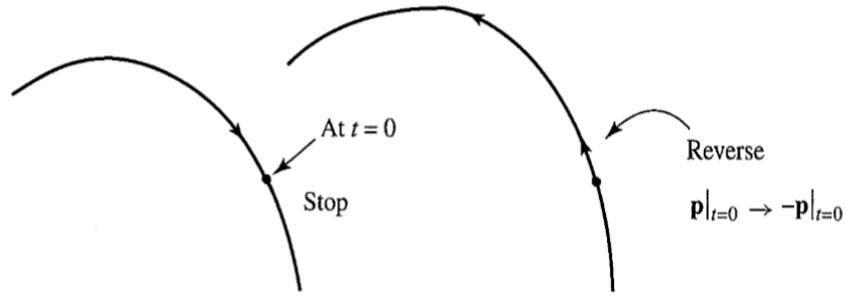
onde a solução da equação de Schrödinger revertida no tempo não consiste apenas em utilizar a transformação $t \rightarrow -t$ na função de onda, precisamos também acrescentar o conjugado para assim obter a solução correta, ou seja, $\Psi^*(\vec{r}, -t)$. Dessa forma, a operação de reversão temporal está relacionada com a operação de conjugação, onde podemos defini-la através de um operador antiunitário Θ (SAKURAI, 1994):

$$|\Psi(-t)\rangle = \Theta |\Psi(t)\rangle, \quad (2.26)$$

e os operadores de posição, \vec{X} , e de momento, \vec{P} , sob ação de Θ :

$$\Theta \vec{X} \Theta^{-1} = \vec{X}, \quad \Theta \vec{P} \Theta^{-1} = -\vec{P}. \quad (2.27)$$

Figura 11 – Ilustração da reversão temporal.



Fonte: SAKURAI (1994)

Para sistemas sem spin, o operador de reversão temporal é definido por

$$\Theta = C, \quad (2.28)$$

onde C é o operador de conjugação complexa. Como a solução da equação de Schrödinger revertida no tempo é $\Psi^*(\vec{r}, -t)$, então, através das expressões para as funções de onda em ambos os guias, temos que a relação entre as amplitudes é dada por

$$a^* = Sb^*. \quad (2.29)$$

e

$$b = (S^*)^{-1}a. \quad (2.30)$$

Portanto, a partir da definição de matriz S , equação (2.14), podemos validar a seguinte relação (MOSKALETS, 2012):

$$S = (S^*)^{-1} \Rightarrow SS^* = 1, \quad (2.31)$$

e ao combinar com a unitariedade da matriz de espalhamento, temos

$$S = S^\top. \quad (2.32)$$

Isto é, o vínculo devido à simetria de reversão temporal, para o caso sem spin, nos permite afirmar que S é real e simétrica.

2.1.1.3 Simetria de reversão temporal (partícula de spin 1/2)

Para sistemas onde o spin é incluído, podemos definir o operador de reversão temporal como

$$\Theta = UC, \quad (2.33)$$

onde U é um operador unitário e C é o operador de conjugação complexa. Para sistemas com spin inteiro, $\Theta^2 = 1$, e para spin semi-inteiro, $\Theta^2 = -1$. Assim, podemos destacar, como exemplo, a ação do operador de reversão temporal sobre o operador de spin:

$$\Theta \vec{S} \Theta^{-1} = -\vec{S}, \quad \vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}. \quad (2.34)$$

onde $\vec{\sigma}$ é o conjunto de matrizes de Pauli.

Conhecida a forma do operador Θ em sistemas com spin e a sua atuação sobre o operador \vec{S} , podemos reescrevê-lo da seguinte maneira:

$$\Theta = -i\sigma_y C, \quad (2.35)$$

onde σ_y é a segunda matriz de Pauli

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Dessa forma, a função de onda para sistemas com spin 1/2 pode ser representada na forma de um spinor:

$$\Psi(x, y) = \begin{pmatrix} \psi_+(x, y) \\ \psi_-(x, y) \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

e ao utilizar a operação de reversão temporal na função $\Psi(x, y)$, temos que

$$\Psi_{rev} = \Theta \Psi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+^* \\ \psi_-^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_-^* \\ \psi_+^* \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Portanto, a partir da equação (2.37), podemos expressar a função de onda no guia esquerdo como

$$\Psi^l(x, y) = \sum_{n=1}^{N_l} \left[A_{n,\sigma}^l \sqrt{\frac{m}{k_x^{(n)} \hbar}} e^{-ik_x^{(n)} x} + B_{n,\sigma}^l \sqrt{\frac{m}{+k_x^{(n)} \hbar}} e^{-ik_x^{(n)} x} \right] \chi_n(y), \quad (2.39)$$

onde as amplitudes $A_{n,\sigma}^l$ e $B_{n,\sigma}^l$ são dadas por

$$A_{n,\sigma}^l = \begin{pmatrix} a_{n,+}^l \\ a_{n,-}^l \end{pmatrix}, \quad B_{n,\sigma}^l = \begin{pmatrix} b_{n,+}^l \\ b_{n,-}^l \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Já para a função de onda no guia direito,

$$\Psi^r(x, y) = \sum_{n=1}^{N_r} \left[A_{n,\sigma}^r \sqrt{\frac{m}{k_x^{(n)} \hbar}} e^{-ik_x^{(n)} x} + B_{n,\sigma}^r \sqrt{\frac{m}{k_x^{(n)} \hbar}} e^{+ik_x^{(n)} x} \right] \chi_n(y), \quad (2.41)$$

onde as amplitudes $A_{n,\sigma}^r$ e $B_{n,\sigma}^r$ são

$$A_{n,\sigma}^r = \begin{pmatrix} a_{n,+}^r \\ a_{n,-}^r \end{pmatrix}, \quad B_{n,\sigma}^r = \begin{pmatrix} b_{n,+}^r \\ b_{n,-}^r \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Definindo duas matrizes a fim de incluir todas as amplitudes das ondas de entrada e saída em ambos os guias, então

$$a = \begin{pmatrix} a_{1,+}^l \\ a_{1,-}^l \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{N_l,+}^l \\ a_{N_l,-}^l \\ a_{1,+}^r \\ a_{1,-}^r \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{N_r,+}^r \\ a_{N_r,-}^r \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_{1,+}^l \\ b_{1,-}^l \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{N_l,+}^l \\ b_{N_l,-}^l \\ b_{1,+}^r \\ b_{1,-}^r \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{N_r,+}^r \\ b_{N_r,-}^r \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Através das funções de onda revertidas no tempo em ambos os guias, podemos obter relações entre as amplitudes das ondas de entrada e saída revertidas no tempo e as amplitudes a e b , de maneira que essas relações são definidas da seguinte maneira (MACEDO-JUNIOR, 2002):

$$a_{rev} = Ua^*, \quad (2.44)$$

$$b_{rev} = Ub^*, \quad (2.45)$$

onde U é uma matriz dada por

$$U = 1_{N_T} \otimes i\sigma_y. \quad (2.46)$$

A relação linear entre as amplitudes das ondas de entrada e saída, para o caso revertido no tempo, é definida por

$$a_{rev} = Sb_{rev}. \quad (2.47)$$

e através das relações (2.44) e (2.45), temos que a matriz de espalhamento satisfaz a seguinte relação:

$$SUS^* = U, \quad (2.48)$$

A relação acima combinada com a condição de unitariedade, portanto, nos diz que a matriz S é unitária auto-dual com dimensão $2N_T$, onde N_T consiste no número total de canais de propagação e o fator 2 advém da degenerescência do spin.

2.2 FORMALISMO DE LANDAUER

O trabalho de Landauer teve um papel fundamental na descrição teórica do transporte eletrônico em estruturas mesoscópicas, relacionando a condutância com a probabilidade de transmissão do elétron (DATTA, 1997). Na física do transporte eletrônico em condutores macroscópicos, as propriedades de transporte são descritas pela lei de Ohm. Assim, para tais condutores, a condutância é diretamente proporcional a sua largura, W , e inversamente proporcional ao seu comprimento, L :

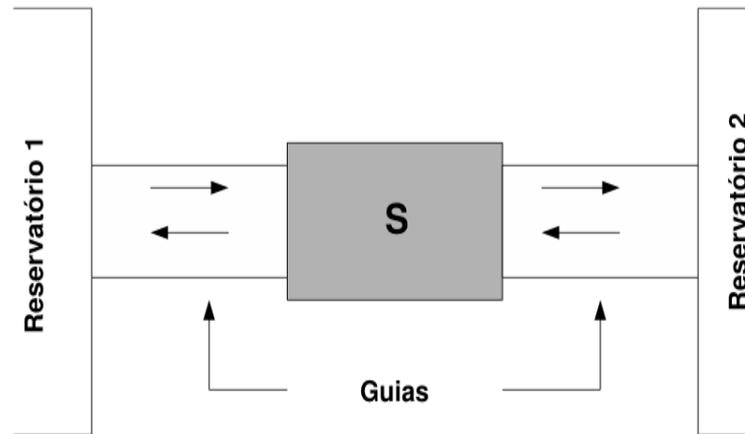
$$G = \frac{\sigma W}{L}, \quad (2.49)$$

onde σ é a condutividade da amostra. No entanto, quando a amostra é mesoscópica, torna-se necessário introduzir duas correções nessa lei. A primeira correção consiste na existência de uma condutância de contato na qual não tem dependência com o comprimento do condutor, $G_0 = 2e^2/h$. A segunda correção consiste na dependência discreta com W , manifestando-se através do número de canais de propagação (MACÊDO,):

$$N = \text{Int} \left[\frac{2W}{\lambda} \right]. \quad (2.50)$$

Para deduzir a fórmula de Landauer para a condutância, devemos considerar uma amostra mesoscópica conectada a dois reservatórios de elétrons em equilíbrio térmico, com potenciais químicos μ_1 e μ_2 , por meio de um guia ideal, ou seja, um guia sem barreira de potencial, com N canais de propagação (ver figura 12). Ao incluir uma região espalhadora, os elétrons vão se propagar pelo condutor com probabilidade T e com probabilidade de reflexão $R = 1 - T$. Introduzidos os reservatórios, temos que a função que representa o preenchimento dos estados dos elétrons é

Figura 12 – Representação do modelo de reservatórios de Landauer. A região de espalhamento (região S) é conectada aos reservatórios via guias ideais. Os reservatórios estão em equilíbrio térmico e possuem potenciais químicos diferentes.



Fonte: DUARTE-FILHO (2010)

$$f(E - \mu_i) = \frac{1}{1 + e^{(E - \mu_i)/k_B T}}, \quad (2.51)$$

conhecida como distribuição de Fermi, de maneira que para o reservatório 1, o potencial químico é μ_1 , enquanto para o reservatório 2 é μ_2 .

O fluxo de elétrons na amostra é nulo quando os potenciais químicos dos reservatórios μ_1 e μ_2 são iguais. Se $\mu_1 > \mu_2$, haverá uma corrente I_1^+ vindo do reservatório 1:

$$I_1^+ = -\frac{2e}{h} N(\mu_1 - \mu_2). \quad (2.52)$$

A corrente que passa pelo guia 2 depende da probabilidade T do elétron de ser transmitido através da região de espalhamento:

$$I_2^+ = -\frac{2e}{h} NT(\mu_1 - \mu_2). \quad (2.53)$$

e a corrente que advém da reflexão, $R = 1 - T$, é definida por

$$I_1^- = -\frac{2e}{h} N(1 - T)(\mu_1 - \mu_2). \quad (2.54)$$

Dessa forma, a corrente líquida que passa pela amostra é

$$I = I_1^+ - I_1^-. \quad (2.55)$$

Da definição de condutância e sabendo que a diferença dos potenciais químicos μ_1 e μ_2 é igual a $-eV$, temos que

$$G = \frac{2e^2}{h} NT = G_0 \text{Tr}(tt^\dagger), \quad (2.56)$$

onde G_0 é o quantum de condutância e t é o bloco de transmissão da matriz de espalhamento. A equação acima é conhecida como a fórmula de Landauer, a qual relaciona a condutância com a matriz S e consegue incluir as duas correções necessárias, abordadas no início desta seção, na lei de Ohm.

2.3 TEORIA DE MATRIZES ALEATÓRIAS

A teoria de matrizes aleatórias consiste em uma ferramenta matemática que utiliza matrizes com propriedades estatísticas e seus elementos distribuídos aleatoriamente. Foi introduzida inicialmente na física nuclear por Wigner em meados da década de 50 com o objetivo de estudar as propriedades estatísticas dos níveis de energia dos núcleos pesados bombardeados por nêutrons lentos, de modo que a complexidade do processo de espalhamento resultou na necessidade de modelar o hamiltoniano do sistema por meio de uma matriz aleatória (BEE-NAKKER, 1997). Os ensembles de matrizes aleatórias podem ser classificados, de acordo com Dyson, através das simetrias de reversão temporal e de rotação de spin, tornando o sistema dependente apenas destas simetrias, ou seja, a TMA fornece a universalidade dessas propriedades. O comportamento universal da teoria de matrizes aleatórias depende da validade de uma hipótese ergódica, onde médias sobre certos intervalos contendo um número estatisticamente significativo é equivalente a uma média sobre ensembles.

A utilidade da teoria de matrizes aleatórias não se resume apenas na área de física nuclear. Atualmente ela é fundamental para diversos campos de pesquisa, como por exemplo no transporte eletrônico em dispositivos mesoscópicos, onde as propriedades de transporte de cavidades caóticas e fios quânticos, dentre as quais podemos citar a condutância, são obtidas devido à ferramenta teórica fornecida pela TMA. Nesta dissertação, o tema principal é a condutância de cavidades caóticas e mais adiante mostraremos como a transformação color-flavor tem um importante papel no cálculo dessa propriedade de transporte.

2.3.1 Ensembles Gaussianos

Um sistema fechado, como por exemplo uma cavidade caótica, descrito por uma matriz hamiltoniana cujos elementos são distribuídos aleatoriamente, pode ser tratado por um tipo de ensemble de matrizes aleatórias, conhecido como ensemble gaussiano, introduzido por Wigner e Dyson (BROUWER, 1997).

O ensemble gaussiano é definido como um conjunto de matrizes quadradas $N \times N$, tendo densidade de probabilidade dada por

$$P(H) = C \exp[-\beta \text{Tr} V(H)], \quad (2.57)$$

onde C é uma constante de normalização e β é um parâmetro relacionado às simetrias que vão especificar o ensemble, podendo assumir três valores ($\beta = 1, 2, 4$). Para $\beta = 1$, os elementos de H são reais, no caso de $\beta = 2$, os elementos são complexos e por fim, para $\beta = 4$, os elementos de H são quatérnions reais, ou seja, os elementos de H podem ser representados por matrizes 2×2 formadas por combinações da matriz identidade e das matrizes de Pauli, e para assegurar que um quatérnion é real, é necessário que os coeficientes que multiplicam a matriz identidade e as matrizes de Pauli sejam reais. Assim, a probabilidade de encontrar o ensemble no intervalo H e $H + dH$ é invariante sob H' , $P(H)dH = P(H')dH'$, em que a diferencial dH é a medida de integração no espaço das matrizes aleatórias e H' é uma transformação representada por

$$H \rightarrow H' = UHU^{-1}, \quad (2.58)$$

onde U é uma matriz que pode ser ortogonal, unitária ou simplética, dependendo da presença ou ausência de simetrias. A matriz U é ortogonal quando $\beta = 1$, unitária quando $\beta = 2$ e simplética quando $\beta = 4$.

Assumir que um conjunto de matrizes aleatórias com densidade de probabilidade dada pela equação (2.57) é um ensemble gaussiano significa que $\text{Tr}V(H) \propto \text{Tr}H^2$, onde os elementos do hamiltoniano são variáveis aleatórias independentes, de tal maneira que $\text{Tr}H^2 = \text{Tr}H^\dagger H = \sum_{i,j} H_{i,j}^2$. Esses ensembles podem ser classificados de três formas, dependendo dos valores assumidos pelo índice de simetria:

- **Ensemble Gaussiano Ortogonal (EGO)** \Rightarrow Caracterizado pelo índice $\beta = 1$, onde os elementos da matriz aleatória são reais.
- **Ensemble Gaussiano Unitário (EGU)** \Rightarrow Caracterizado pelo índice $\beta = 2$, onde os elementos da matriz aleatória são complexos.
- **Ensemble Gaussiano Simplético (EGS)** \Rightarrow Caracterizado pelo índice $\beta = 4$, onde os elementos da matriz aleatória são quatérnions reais.

onde esses três ensembles gaussianos são conhecidos na literatura como ensembles de Wigner-Dyson. A tabela 1 mostra a classificação dos três ensembles e suas características.

Tabela 1 – Classificação dos ensembles de Wigner-Dyson: ensemble gaussiano ortogonal, unitário e simplético. As matrizes H e U apresentam características diferentes para os três valores do índice β , dependendo da ausência ou presença das simetrias de reversão temporal (SRT) e de rotação de spin (SRS).

Ensemble	β	SRT	SRS	$(H)_{i,j}$	U
EGO	1	sim	sim	real	ortogonal
EGU	2	não	irrelevante	complexo	unitária
EGS	4	sim	não	quatérnion real	simplética

Fonte: O autor (2021)

Portanto, ao utilizar a teoria de matrizes aleatórias, as propriedades físicas são calculadas por meio de médias. Para o caso de cavidades caóticas com hamiltoniano H , executar a média de qualquer observável $A(H)$ no ensemble de matriz aleatória H , corresponde a

$$\langle A(H) \rangle = \frac{1}{\eta} \int d\mu(H) A(H) \exp \left[\frac{-\beta N}{4\lambda^2} \text{Tr} H^2 \right], \quad (2.59)$$

onde η é uma constante de normalização e $\lambda = N\Delta/\pi$ é um parâmetro que depende do espaçamento médio entre os níveis de energia (Δ). Para trabalhar com observáveis $A(H)$ que dependem apenas dos níveis de energia, ou seja, dos autovalores de H , devemos introduzir a transformação

$$H \rightarrow U \text{diag}(E_1, E_2, \dots, E_N) U^{-1}, \quad (2.60)$$

com U sendo a matriz dos autovetores. Sabendo que $\text{Tr} V(H) = \sum_i V(E_i)$ depende apenas dos autovalores, então a distribuição de probabilidade dada pela equação (2.57) não depende dos autovetores, isto é, U é uniformemente distribuída no grupo ortogonal ($\beta = 1$), no grupo

unitário ($\beta = 2$), ou no grupo simplético ($\beta = 4$). Dessa forma, introduzindo a transformação acima no cálculo de médias de observáveis, equação (2.59), podemos obter uma relação entre o elemento de volume $d\mu(H)$ e a medida invariante de Haar $d\mu(U)$:

$$d\mu(H) = J(E)d\mu(U) \prod_{j=1}^N dE_j, \quad (2.61)$$

onde o jacobiano $J(E)$ é dado por

$$J(E) = \prod_{i<j}^N |E_i - E_j|^\beta. \quad (2.62)$$

Assim, tendo a densidade de probabilidade invariante sob a transformação representada pela equação (2.60), a média de qualquer observável no ensemble de matrizes aleatórias pode ser definida pela seguinte relação:

$$\langle A(H) \rangle = \frac{1}{\eta} \int d\mu(U) \int \prod_{i=1}^N dE_i J(E_1, E_2, \dots, E_N) A(E_1, E_2, \dots, E_N) \exp \left[\frac{-\beta N}{4\lambda^2} \sum_i E_i^2 \right], \quad (2.63)$$

ou

$$\langle A(H) \rangle = \int \prod_{i=1}^N dE_i A(E_1, E_2, \dots, E_N) P_\beta(E). \quad (2.64)$$

tendo $d\mu(U)$ como a medida de Haar do grupo unitário ($\beta = 2$), do grupo ortogonal ($\beta = 1$) e do grupo simplético ($\beta = 4$). A função $P_\beta(E)$ é a distribuição de probabilidade dos autovalores de energia, sendo que pode-se fazer uma analogia com a distribuição de Gibbs da mecânica estatística.

2.3.2 Ensemble circular

As cavidades caóticas podem ser descritas matematicamente pelo ensemble gaussiano, pois precisamos lidar com as propriedades estatísticas dos níveis de energia desses sistemas. No entanto, quando trata-se de sistemas quânticos abertos, as cavidades são acopladas a reservatórios de elétrons, de maneira que os autovalores de transmissão tornam-se essenciais para a obtenção das propriedades de transporte, e para descrever tais sistemas, é necessário utilizar as matrizes de espalhamento. Existem duas maneiras de introduzir a teoria de matrizes aleatórias em problemas de transporte. A primeira se resume em modelar o hamiltoniano da

estrutura como uma matriz aleatória $M \times M$, pertencente ao ensemble gaussiano, e introduzi-la na matriz de espalhamento $N \times N$ através da fórmula de Mahaux - Weidenmüller (MAHAUX; WEIDENMÜLLER, 1969):

$$S(E) = 1 - 2\pi i W^\dagger \frac{1}{E - H + i\pi W W^\dagger} W, \quad (2.65)$$

onde W é uma matriz retangular $M \times N$ não aleatória que descreve o acoplamento da cavidade e no limite $M \rightarrow \infty$ o sistema apresenta propriedades universais. Uma outra possibilidade consiste em introduzir a teoria de matrizes aleatórias diretamente na matriz de espalhamento, podendo escrevê-la em termos dos autovalores de transmissão através da representação polar (BARANGER; MELLO, 1994):

$$S = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\tau} & \sqrt{\tau} \\ \sqrt{\tau} & \sqrt{1-\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_3 & 0 \\ 0 & v_4 \end{pmatrix}, \quad (2.66)$$

sendo que τ é uma matriz diagonal $N \times N$ que contém os autovalores de transmissão τ_a ($a = 1, \dots, N$) do bloco tt^\dagger da matriz de espalhamento. Os v_i ($i = 1, 2, 3, 4$) são matrizes $N \times N$ que podem ser unitárias, ortogonais ou simpléticas, dependendo dos valores de β . Para $\beta = 2$ as matrizes são unitárias. No caso ortogonal, $\beta = 1$, as matrizes têm como restrições $v_3 = v_1^\top$ e $v_4 = v_2^\top$. Enquanto para o caso simplético, $\beta = 4$, os v_i são quatérnions auto-duais $2N \times 2N$ com autovalores duplamente degenerados, tendo como restrições $v_3 = \bar{v}_1$ e $v_4 = \bar{v}_2$.

Assim como no caso de matrizes hamiltonianas aleatórias no qual define-se o ensemble Gaussiano, precisamos introduzir um novo tipo de ensemble de matrizes, chamado de ensemble circular, relacionado diretamente a matriz S . Dessa forma, para descrever as propriedades de transporte, consideramos um conjunto de matrizes S , uniformemente distribuída sobre um grupo unitário, com distribuição de probabilidade dada por

$$P(S) = \text{constante}, \quad (2.67)$$

ou seja, a probabilidade de todas as matrizes S pertencentes ao ensemble é a mesma. A definição de ensemble circular, caracterizada pela equação (2.67), implica que a média da matriz S é nula, isto é, $\bar{S} = 0$.

Através do índice de simetria (β) torna-se possível classificar o ensemble circular de três formas:

- **Ensemble Circular Ortogonal (ECO)** \Rightarrow Ensemble de matrizes unitárias simétricas, caracterizado pelo índice $\beta = 1$.
- **Ensemble Circular Unitário (ECU)** \Rightarrow Ensemble de matrizes unitárias, caracterizado pelo índice $\beta = 2$.
- **Ensemble Circular Simplético (ECS)** \Rightarrow Ensemble de matrizes unitárias auto-duais, caracterizado pelo índice $\beta = 4$.

Portanto, as propriedades de transporte de pontos quânticos caóticos são calculadas através de médias sobre o ensemble de matrizes aleatórias. Nesse caso, temos interesse na distribuição estatística dos autovalores de transmissão, onde ao utilizarmos a representação polar da matriz de espalhamento, a medida de Haar $d\mu(S)$ transforma-se na seguinte expressão:

$$d\mu(S) \propto P_\beta(\{\tau\}) \prod_a d\tau_a \prod_i d\mu(v_i), \quad (2.68)$$

onde $P_\beta(\{\tau\})$ é a distribuição conjunta dos autovalores de transmissão

$$P_\beta(\{\tau\}) = \prod_{i < j} |\tau_i - \tau_j|^\beta \prod_c \tau_c^{-1+\beta/2}. \quad (2.69)$$

A média de qualquer observável de transporte no ensemble circular pode ser calculada através da expressão abaixo:

$$\langle A(\tau) \rangle = C_\beta \prod_a d\tau_a \prod_i d\mu(v_i) A(\{\tau\}) P_\beta(\{\tau\}) P(S), \quad (2.70)$$

sendo que a partir da definição do ensemble circular, a distribuição de probabilidade da matriz S , $P(S)$, é constante para cavidades caóticas acopladas a guias de onda por contatos ideais. Para uma distribuição de probabilidade definida pela relação

$$P(S) \propto |\det(1 - \bar{S}^\dagger S)|^{-\beta(2N-1+2/\beta)}, \quad (2.71)$$

então, diferentemente da distribuição $P(S)$ utilizada em sistemas com guias ideais, a definição de $P(S)$ da relação acima é introduzida no cálculo de observáveis de transporte de cavidades caóticas acopladas a guias por meio de junções de tunelamento.

2.3.3 Classes de simetria dos ensembles

Os vínculos das matrizes de espalhamento são derivados das simetrias do sistema, tendo profunda importância no cálculo de observáveis que apresentam universalidade. Vimos anteriormente que a teoria de matrizes aleatórias pode ser utilizada para descrever as propriedades de transporte de cavidades caóticas através da introdução de um ensemble circular, de maneira que o índice de simetria nos permite classificar o ensemble de três diferentes formas, chamados de ensembles de Wigner-Dyson: ensemble circular unitário, ensemble circular ortogonal e ensemble circular simplético. Além disso, podemos classificar mais sete tipos de classe de ensembles através de outras simetrias fundamentais (ver tabela 2). Portanto, a partir das condições impostas pelas simetrias, podemos decompor as matrizes S em termos de uma matriz aleatória, denotada por U , que pode ser ortogonal, unitária ou simplética. Na tabela 2 podemos visualizar a relação entre os índices de simetria e os dez tipos de classe dos ensembles e as suas respectivas decomposições.

Tabela 2 – Tabela de Cartan para as dez classes de simetria na qual apresenta as condições impostas pelas simetrias de reversão temporal, rotação de spin, partícula-buraco e de subrede.

Ensemble	β	Classe de simetria	U	S
Wigner-Dyson	2	A(ECU)	$U(N_T)$	$S = U$
Wigner-Dyson	1	AI(ECO)	$U(N_T)$	$S = U^T U$
Wigner-Dyson	4	AII(ECS)	$U(2N_T)$	$S = J U^T J^{-1} U$
Quiral	2	AIII(chECU)	$U(2N_T)$	$S = \Sigma_z U^\dagger \Sigma_z U$
Quiral	1	BDI(chECO)	$SO(2N_T)$	$S = \Sigma_z U^T \Sigma_z U$
Quiral	4	CII(chECS)	$S_p(4N_T)$	$S = \Sigma_z J U^T J^{-1} \Sigma_z U$
Altland-Zirnbauer	2	D	$SO(2N_T)$	$S = U$
Altland-Zirnbauer	2	C	$S_p(2N_T)$	$S = U$
Altland-Zirnbauer	4	DIII	$SO(4N_T)$	$S = J U^T J^{-1} U$
Altland-Zirnbauer	1	CI	$S_p(4N_T)$	$S = \Sigma_z U^\dagger \Sigma_z U$

Fonte: NISHIGAKI S M; GANGARDT; KAMENEV (2003)

As matrizes J e Σ_z da tabela 2 são definidas por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1_{N_T} \\ 1_{N_T} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_z = \begin{pmatrix} 1_{N_T} & 0 \\ 0 & -1_{N_T} \end{pmatrix}. \quad (2.72)$$

Até o momento, abordamos com mais detalhes apenas os vínculos da matriz S devido às simetrias de reversão temporal e de rotação de spin, pois nesta dissertação estamos interessados apenas na classe Wigner-Dyson, mais especificamente no ensemble circular unitário, A(ECU).

2.4 CONDUTÂNCIA DE CAVIDADES CAÓTICAS

Um ponto quântico conectado a reservatórios de elétrons por guias de onda pode ser tratado como um problema de espalhamento, onde a partir da matriz de espalhamento torna-se possível obter as propriedades de transporte. Assim, conhecida a matriz S , a condutância é calculada através da fórmula de Landauer:

$$G = \frac{2e^2}{h} \text{Tr}(tt^\dagger), \quad (2.73)$$

e a condutância adimensional, $g \equiv G/G_0$:

$$g = \text{Tr}(tt^\dagger). \quad (2.74)$$

Se no ponto quântico a dinâmica clássica correspondente for caótica, então precisamos utilizar a teoria de matrizes aleatórias para executar as médias das observáveis de transporte. Dessa forma, a média da condutância é obtida através do ensemble de matrizes S , sendo que se considerarmos guias de onda ideais, a distribuição de S é uniformemente distribuída sobre o grupo unitário:

$$\int d\mu(S) = 1. \quad (2.75)$$

Assim, a média da condutância adimensional é dada por

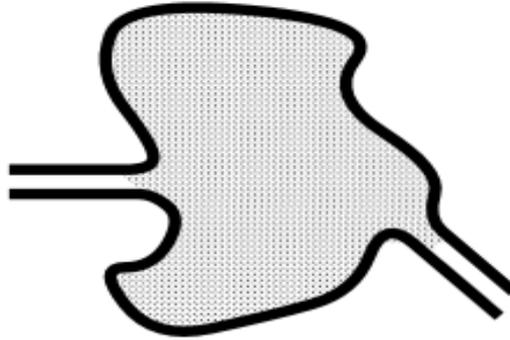
$$\langle g \rangle = \int d\mu(S) \text{Tr}(tt^\dagger), \quad (2.76)$$

Para fazer a condutância adimensional depender explicitamente da matriz S , precisamos introduzir os projetores Λ_1 e Λ_2 :

$$g = \text{Tr}(\Lambda_2 S \Lambda_1 S^\dagger), \quad (2.77)$$

onde os projetores Λ_1 e Λ_2 são definidos da seguinte maneira:

Figura 13 – Representação esquemática de uma cavidade caótica com forma geométrica irregular.



Fonte: BROUWER (1997)

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1_{N_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{N_2} \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

então, através da equação (2.77), a média da condutância passa a ser definida por

$$\langle g \rangle = \int d\mu(S) \text{Tr}(\Lambda_2 S \Lambda_1 S^\dagger). \quad (2.79)$$

O cálculo da média da condutância para as três classes de simetria Wigner-Dyson de uma cavidade caótica acoplada a guias de onda ideais resulta em (BEENAKKER, 1997)

$$\langle g \rangle = \frac{N_1 N_2}{N_T - 1 + 2/\beta}, \quad (2.80)$$

onde N_1 é o número de canais de propagação no guia esquerdo, N_2 é o número de canais de propagação no guia direito e N_T corresponde ao número total de canais, $N_T = N_1 + N_2$.

Expandindo a equação (2.80) no limite semiclássico, $N_1, N_2 \gg 1$, obtemos

$$\langle g \rangle = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} \left[1 + \left(1 - \frac{2}{\beta} \right) \frac{1}{N_1 + N_2} + \dots \right]. \quad (2.81)$$

onde o segundo termo da expansão consiste na correção da localização fraca para $\beta = 1$, enquanto para $\beta = 4$, o segundo termo consiste na correção da anti-localização. No entanto, para $\beta = 2$, o segundo termo da expansão desaparece, isto é, a quebra da simetria de reversão temporal resulta na destruição do efeito de interferência.

A condutância de um ponto quântico caótico, portanto, pode ser obtida através da introdução dos ensembles de matrizes aleatórias, resultando na universalidade do sistema caracte-

rizada pela dependência do índice β , equação (2.80). O cálculo da média da condutância no ensemble de Wigner-Dyson pode ser realizado por meio da técnica diagramática (BROUWER; BEENAKKER, 1996), mas nesta dissertação vamos mostrar como uma identidade matemática, denominada transformação color-flavor, pode ser utilizada para obter a média de g no ensemble circular unitário, dispensando os cálculos mais convencionais. No próximo capítulo vamos abordar o conceito dessa transformação e detalharemos todos os procedimentos matemáticos envolvidos.

3 A TRANSFORMAÇÃO COLOR-FLAVOR E O MÉTODO DA FUNÇÃO GERATRIZ

Neste capítulo mostraremos como calcular a condutância de microestruturas acopladas a guias de onda ideais, onde a dinâmica clássica correspondente é caótica, abdicando da técnica diagramática. Assim, a integração sobre o grupo de matrizes unitárias, a qual aparece quando executamos a média da condutância sobre o ensemble circular, é substituída através de uma identidade matemática, conhecida como transformação color-flavor, que nos possibilita lidar com integrais sobre matrizes que parametrizam o espaço coset.

3.1 INTRODUÇÃO À TRANSFORMAÇÃO COLOR-FLAVOR

Motivado pelo estudo de sistemas desordenados em física da matéria condensada, a transformação color-flavor foi inicialmente derivada por Zirnbauer em 1996 para integrais sobre matrizes $U(N)$ (ZIRNBAUER, 1996). Além disso, podemos utilizar essa identidade matemática em diversos problemas, como por exemplo em cavidades caóticas balísticas.

Dessa forma, a transformação color-flavor consiste na substituição de integrais sobre matrizes unitárias pertencentes ao ensemble de matrizes aleatórias em integrais sobre matrizes que parametrizam o espaço coset. Como uma maneira de apresentar a generalização da transformação, vamos iniciar com um cálculo mais simples. Se ψ_1 e ψ_2 forem variáveis fermiônicas, então a igualdade abaixo é válida (ZIRNBAUER, 1998):

$$\int_0^{2\pi} da \exp(\bar{\psi}_1 e^{ia} \psi_0 + \bar{\psi}_0 e^{-ia} \psi_1) = 2\pi(1 + \bar{\psi}_1 \psi_0 \bar{\psi}_0 \psi_1) = k \int_C \frac{dz dz^*}{(1 + z^* z)^3} \exp(z \bar{\psi}_1 \psi_1 - z^* \bar{\psi}_0 \psi_0). \quad (3.1)$$

A generalização da transformação color-flavor é caracterizada pela relação entre as integrais:

$$\int_{U(N)} dU \exp(\bar{\chi}_j^a U^{ab} \psi_j^b + \bar{\psi}_j^a (U^{ab})^\dagger \chi_j^b) = \int_{C^{M \times M}} d\mu(Z, Z^\dagger) \exp(Z_{jk} \bar{\chi}_k \cdot \chi_j - Z_{jk}^\dagger \bar{\psi}_k \cdot \psi_j), \quad (3.2)$$

onde

$$\bar{\chi}_k \cdot \chi_j = \sum_{a=1}^N \bar{\chi}_k^a \chi_j^a, \quad \bar{\psi}_k \cdot \psi_j = \sum_{a=1}^N \bar{\psi}_k^a \psi_j^a. \quad (3.3)$$

Na equação (3.2), ψ e χ são variáveis fermiônicas, com a barra denotando a conjugação complexa, $a, b = 1, \dots, N$ são índices de “color” e $j, k = 1, \dots, M$ são índices de “flavor”. U^{ab} são os elementos da matriz unitária $N \times N$ e $Z_{j,k}$ são os elementos da matriz que parametriza o espaço coset (SCHLITGEN; WETTIG, 2002). A medida de integração dU é a medida de Haar da matriz unitária U e a medida de integração $d\mu(Z, \bar{Z})$ é dada por

$$d\mu(Z, Z^\dagger) = \text{const} \times \det^{-(N+2M)}(1_M + Z^\dagger Z) \prod_{j,k=1}^M d\text{Re } Z_{j,k} d\text{Im } Z_{j,k}, \quad (3.4)$$

onde

$$\int d\mu(Z, Z^\dagger) = \int dU = 1. \quad (3.5)$$

Note que antes da transformação os índices de “color” das variáveis fermiônicas são acoplados pela matriz U , enquanto os índices de “flavor” são diagonais. Na integral transformada, os índices de “flavor” são acoplados pela matriz Z , e os índices de “color” são diagonais. Por essa razão, a relação entre integrais da equação (3.2) é chamada de transformação color-flavor.

Tratando-se de um problema de transporte, a transformação color-flavor pode ser utilizada para calcular a condutância de uma cavidade caótica, onde a matriz unitária U da equação (3.2) passa a ser uma matriz de espalhamento pertencente à classe de Wigner-Dyson. Portanto, para aplicarmos essa identidade matemática no sistema de transporte eletrônico, vamos introduzir na próxima seção a função geratriz da condutância.

3.2 A FUNÇÃO GERATRIZ DA CONDUTÂNCIA

De acordo com a fórmula de Landauer, podemos relacionar a condutância de uma amostra mesoscópica com a probabilidade de transmissão do elétron passar pela região de espalhamento:

$$g = \text{Tr}(tt^\dagger). \quad (3.6)$$

Quando a região de espalhamento consiste em uma cavidade caótica, a condutância é calculada por meio de um ensemble circular de matrizes aleatórias:

$$\langle g \rangle = \int d\mu(S) \text{Tr}(tt^\dagger). \quad (3.7)$$

Definindo agora uma função geratriz,

$$\Psi(x) = \int d\mu(S) \det(1 + xtt^\dagger) = \langle \exp(\text{Tr} \ln(1 + xtt^\dagger)) \rangle, \quad x = -\sin^2(\phi/2), \quad (3.8)$$

onde ao calcularmos a derivada dessa função, temos que

$$\left[\frac{d\Psi(x)}{dx} \right]_{x=0} = \langle \text{Tr}(tt^\dagger) \rangle. \quad (3.9)$$

Dessa forma, podemos concluir que a condutância de uma cavidade caótica pode ser obtida através da derivada da função geratriz:

$$\langle g \rangle = \left[\frac{d\Psi(x)}{dx} \right]_{x=0}. \quad (3.10)$$

A seguir, vamos mostrar como a transformação color-flavor é utilizada no cálculo da função geratriz da condutância, oferecendo uma alternativa ao cálculo da média de uma observável de transporte sobre o ensemble de matrizes S , mais especificamente sobre o ensemble circular unitário.

3.3 TRANSFORMAÇÃO COLOR-FLAVOR E CAVIDADES CAÓTICAS

No capítulo anterior vimos que a condutância está relacionada com a probabilidade de transmissão do elétron, então se definirmos uma função geratriz, equação (3.8), podemos obter $\langle g \rangle$ através da relação (3.10). Portanto, a introdução da transformação color-flavor na integral sobre o ensemble de matrizes S resulta no cálculo para $\Psi(x)$ em que a integração é realizada no espaço complexo (MACEDO-JUNIOR; MACÊDO, 2014).

Para uma cavidade caótica com simetria de reversão quebrada, a função geratriz da condutância é obtida através de uma integral sobre o ensemble circular unitário (ECU). Assim, considerando uma amostra com número de canais de propagação arbitrário ($N_1 = N_2 = N$), então a função geratriz pode ser definida como

$$\Psi(x) = \frac{1}{4^N} \int d\mu(S) \det(1_{N_T} + \Lambda^\dagger S \Lambda S^\dagger) = \int d\mu(S) \det(1 + xtt^\dagger), \quad (3.11)$$

onde a matriz Λ é definida por

$$\Lambda = e^{i\phi} \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad (3.12)$$

e as matrizes Λ_1 e Λ_2 ,

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1_N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_N \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Através da utilização da transformação color-flavor na função geratriz da condutância de uma amostra com N canais de propagação ($N_T = 2N$), podemos obter a seguinte relação entre integrais:

$$\frac{1}{2^{N_T}} \int d\mu(S) \det(1_{N_T} + \Lambda^\dagger S \Lambda S^\dagger) = \int d\mu(Q) \det^N(1_2 + Q_\phi Q) \det^N(1_2 + Q Q_0). \quad (3.14)$$

A matriz Q da relação acima parametriza o espaço coset:

$$Q = \Gamma \sigma_3 \Gamma^{-1}, \quad Q \in SU(2)/U(1) = S^2 \quad (3.15)$$

onde σ_3 é a matriz de Pauli

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

e as matrizes Γ e Γ^{-1} são dadas por

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & z \\ -z^* & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{-1} = \frac{1}{1 + |z|^2} \begin{pmatrix} 1 & -z \\ z^* & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Assim, a matriz Q definida pela equação (3.15) tem a seguinte forma:

$$Q = \frac{1}{1 + |z|^2} \begin{pmatrix} 1 - |z|^2 & -2z \\ -2z^* & |z|^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

onde podemos definir as matrizes Q_ϕ e Q_0 se considerarmos $z = -e^{-i\phi}$ e $z = -1$, respectivamente,

$$Q_\phi = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} \\ e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

e a medida de integração $d\mu(Q)$

$$d\mu(Q) = \frac{K}{\pi} \frac{d^2 z}{(1 + |z|^2)^2}. \quad (3.20)$$

Portanto, a relação entre as integrais da equação (3.14) caracteriza o mapa $U(N_T) \rightarrow S^2$ realizado pela transformação color-flavor. A integral sobre o grupo unitário $U(N_T)$ transforma-se em uma integral onde os elementos da matriz Q representam pontos de uma superfície esférica. A seguir, será detalhado todo o procedimento para a realização do mapa em questão.

3.3.1 Um canal de propagação

Para um sistema com um canal de propagação ($N = 1$), vamos detalhar todos os cálculos utilizados que nos permitem obter a equação (3.14). Dessa forma, podemos iniciar considerando a seguinte função geratriz:

$$F(\phi) = \int d\mu(Q) \det(1_2 + Q_\phi Q) \det(1_2 + QQ_0), \quad (3.21)$$

onde a medida de integração é definida como

$$d\mu(Q) = \frac{1}{\pi} \frac{d^2 z}{(1 + |z|^2)^2}. \quad (3.22)$$

Através da definição da matriz Q , equação (3.15), podemos reescrever o determinante de $1_2 + Q_\phi Q$ como

$$\det(1_2 + Q_\phi Q) = \frac{\det(\Gamma + Q_\phi \Gamma \sigma_3)}{\det(\Gamma)}, \quad (3.23)$$

onde a matriz $\Gamma + Q_\phi \Gamma \sigma_3$ é

$$\Gamma + Q_\phi \Gamma \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 - z^* e^{-i\phi} & z - e^{-i\phi} \\ -z^* + e^{i\phi} & 1 - z e^{i\phi} \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Introduzindo χ_i como sendo variáveis de Grassmann, então, por definição, χ_i satisfazem as relações de anticomutação:

$$\{\chi_i, \chi_j\} = \chi_i \chi_j + \chi_j \chi_i = 0. \quad (3.25)$$

onde as integrais dessas variáveis são definidas para satisfazer as seguintes igualdades (SHACKEL, 2008):

$$\int d\chi_i = \int d\bar{\chi}_i = 0, \quad \int \chi_i d\chi_i = \int \bar{\chi}_i d\bar{\chi}_i = 1. \quad (3.26)$$

Assim, considerando uma integral Gaussiana de variáveis que satisfazem as relações de anticomutação, temos que o resultado dessa integral resulta em

$$I = \left(\int \prod_{i=1}^n d\bar{\chi}_i d\chi_i \right) \exp(-\chi^\dagger A \chi) = \det(A), \quad (3.27)$$

onde

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_n \end{pmatrix}, \quad \chi^\dagger = (\bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2, \dots, \bar{\chi}_n). \quad (3.28)$$

Introduzida a integral Gaussiana, podemos, então, definir os determinantes da função geratriz, equação (3.21), como integrais de variáveis de Grassmann. Portanto, o determinante de $\Gamma + Q_\phi \Gamma \sigma_4$ pode ser representado da seguinte maneira:

$$\det(\Gamma + Q_\phi \Gamma \sigma_3) = \int d\psi_1 d\bar{\psi}_1 d\chi_1 d\bar{\chi}_1 \exp[\Phi_1^\dagger (\Gamma + Q_\phi \Gamma \sigma_3) \Phi_1], \quad (3.29)$$

onde Φ_1 é uma matriz dada por

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \chi_1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_1^\dagger = (\bar{\psi}_1, \bar{\chi}_1). \quad (3.30)$$

Calculando o determinante da equação (3.29), temos que

$$\det(\Gamma + Q_\phi \Gamma \sigma_3) \Phi_1 = 2|1 - ze^{i\phi}|^2. \quad (3.31)$$

e definindo uma matriz A_1 ,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & z - e^{-i\phi} \\ -z^* + e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

onde o seu determinante é

$$\det(A_1) = |1 - ze^{i\phi}|^2, \quad (3.33)$$

então, podemos definir o determinante da equação (3.31) em termos do determinante da matriz A_1 :

$$\det(\Gamma + Q_\phi \Gamma \sigma_3) = 2 \det(A_1). \quad (3.34)$$

Através da igualdade acima, podemos reescrever a equação (3.29) da seguinte maneira:

$$\det(\Gamma + Q_\phi \Gamma \sigma_3) = 2 \int d\psi_1 d\bar{\psi}_1 d\chi_1 d\bar{\chi}_1 \exp[\Phi_1^\dagger A_1 \Phi_1], \quad (3.35)$$

onde o produto de matrizes $\Phi_1^\dagger A_1 \Phi_1$ é dado por

$$\Phi_1^\dagger A_1 \Phi_1 = (z - e^{-i\phi}) \bar{\psi}_1 \chi_1 + (-z^* + e^{i\phi}) \bar{\chi}_1 \psi_1. \quad (3.36)$$

Para o outro determinante da função geratriz, equação (3.21), temos que

$$\det(1_2 + QQ_0) = \det(1_2 + Q_0 Q) = \frac{\det(\Gamma + Q_0 \Gamma \sigma_3)}{\det(\Gamma)}. \quad (3.37)$$

O determinante de $\Gamma + Q_0 \Gamma \sigma_3$ em termos de uma integral Gaussiana:

$$\det(\Gamma + Q_0 \Gamma \sigma_3) = \int d\psi_2 d\bar{\psi}_2 d\chi_2 d\bar{\chi}_2 \exp[\Phi_2^\dagger (\Gamma + Q_0 \Gamma \sigma_3) \Phi_2], \quad (3.38)$$

onde a matriz Φ_2 é dada por

$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \chi_2 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2^\dagger = (\bar{\psi}_2, \bar{\chi}_2). \quad (3.39)$$

Definindo uma matriz A_2 ,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & z - 1 \\ -z^* + 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

em que o seu determinante é

$$\det(\Gamma + Q_0 \Gamma \sigma_3) = 2 \det(A_2), \quad (3.41)$$

então, reescrevendo a equação (3.38), temos que

$$\det(\Gamma + Q_0 \Gamma \sigma_3) = 2 \int d\psi_2 d\bar{\psi}_2 d\chi_2 d\bar{\chi}_2 \exp[\Phi_2^\dagger A_2 \Phi_2], \quad (3.42)$$

onde

$$\Phi_2^\dagger A_2 \Phi_2 = (z - 1)\bar{\psi}_2\chi_2 + (-z^* + 1)\bar{\chi}_2\psi_2. \quad (3.43)$$

Os determinantes, portanto, sendo definidos em termos de integrais Gaussianas de variáveis de Grassmann nos possibilita escrever uma nova forma para a função geratriz:

$$F(\phi) = 4 \int d(\Phi, \Phi^\dagger) \exp(e^{i\phi}\bar{\chi}_1\psi_1 - e^{-i\phi}\bar{\psi}_1\chi_1 + \bar{\chi}_2\psi_2 - \bar{\psi}_2\chi_2) W(\psi, \chi), \quad (3.44)$$

onde $W(\psi, \chi)$ é uma integral definida por

$$W(\psi, \chi) = \int \frac{d\mu(Q)}{(1 + |z|^2)^2} \exp \left[z(\bar{\psi}_1\chi_1 + \bar{\psi}_2\chi_2) - z^*(\bar{\chi}_1\psi_1 + \bar{\chi}_2\psi_2) \right], \quad (3.45)$$

e a medida de integração $d(\Phi, \Phi^\dagger)$:

$$d(\Phi, \Phi^\dagger) = \prod_{i=1}^2 d\psi_i d\bar{\psi}_i d\chi_i d\bar{\chi}_i. \quad (3.46)$$

Assim, tendo uma função geratriz na forma da equação (3.44), a aplicação da transformação color-flavor na integral representada por $W(\psi, \chi)$ resulta na seguinte igualdade:

$$\frac{k}{\pi} \int \frac{dz dz^*}{(1 + |z|^2)^4} \exp \left[\sum_{a=1}^2 (z\bar{\psi}_a\chi_a - z^*\bar{\chi}_a\psi_a) \right] = W_{CF}(\psi, \chi), \quad (3.47)$$

onde W_{CF} é uma integral sobre matrizes aleatórias:

$$W_{CF}(\psi, \chi) = \int d\mu(S) \exp \left[\sum_{a,b=1}^2 (\bar{\psi}_a S_{ab} \psi_b + \bar{\psi}_b + \bar{\chi}_a S_{ab}^\dagger \chi_b) \right], \quad (3.48)$$

então, através da relação (3.47), temos que a integral da equação (3.45) definida em função de $W_{CF}(\psi, \chi)$ é dada por

$$W(\psi, \chi) = \frac{1}{k} W_{CF}(\psi, \chi). \quad (3.49)$$

Obtida a relação entre integrais através da transformação color-flavor, então a função geratriz pode ser reescrita como

$$F(\phi) = \frac{4}{k} \int d(\Phi, \Phi^\dagger) \exp(e^{i\phi}\bar{\chi}_1\psi_1 - e^{-i\phi}\bar{\psi}_1\chi_1 + \bar{\chi}_2\psi_2 - \bar{\psi}_2\chi_2) W_{CF}(\psi, \chi). \quad (3.50)$$

Definindo uma matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} S & -\Lambda^\dagger \\ \Lambda & S^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t' & -e^{-i\phi} & 0 \\ t & r' & 0 & -1 \\ e^{i\phi} & 0 & r^* & t^* \\ 0 & 1 & t'^* & r'^* \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

então, a função geratriz pode ser definida da seguinte forma:

$$F(\phi) = \frac{4}{k} \int d(\Phi, \Phi^\dagger) \exp(\Phi^\dagger A \Phi), \quad (3.52)$$

com Φ sendo uma matriz cujo os elementos são variáveis de Grassmann:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}, \quad \Phi^\dagger = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2). \quad (3.53)$$

Conhecendo o resultado de uma integral Gaussiana, temos que a função geratriz, equação (3.52),

$$F(\phi) = \frac{4}{k} \int d\mu(S) \det(A). \quad (3.54)$$

e calculando o determinante de A , temos que

$$\det(A) = \det(1_2 + \Lambda^\dagger S \Lambda S^\dagger), \quad (3.55)$$

então, a expressão para a função geratriz, equação (3.54), resulta em

$$F(\phi) = \frac{4}{k} \int d\mu(S) \det(1_2 + \Lambda^\dagger S \Lambda S^\dagger). \quad (3.56)$$

Através da relação acima, podemos determinar a função geratriz da condutância da seguinte maneira:

$$\Psi(\phi) = \frac{k}{16} F(\phi), \quad (3.57)$$

então

$$\Psi(\phi) = \frac{1}{4} \int d\mu(S) \det(1_2 + \Lambda^\dagger S \Lambda S^\dagger). \quad (3.58)$$

Portanto, a relação entre integrais abaixo é válida:

$$\frac{1}{4} \int d\mu(S) \det(1_2 + \Lambda^\dagger S \Lambda S^\dagger) = \int d\mu(Q) \det(1_2 + Q_\phi Q) \det(1_2 + Q Q_0), \quad (3.59)$$

onde a medida de integração $d\mu(Q)$ é dada por

$$d\mu(Q) = \frac{K}{\pi} \frac{d^2 z}{(1 + |z|^2)^2}, \quad K = \frac{k}{16}. \quad (3.60)$$

Até o momento mostramos como é feita a aplicação da transformação color-flavor na função geratriz da condutância de um sistema com um canal de propagação. A seguir, mostraremos para o caso de um número arbitrário de canais de propagação.

3.3.2 Número arbitrário de canais de propagação

Tratando-se de um número arbitrário de canais de propagação (N), vamos seguir o mesmo procedimento utilizado para o caso de um canal de propagação. Dessa forma, para calcularmos a transformação, devemos considerar a função geratriz abaixo:

$$F(\phi) = \int d\mu(Q) \det^N(1_2 + Q_\phi Q) \det^N(1_2 + Q Q_0), \quad (3.61)$$

diferenciando-se apenas da equação (3.21) pelo acréscimo do número arbitrário de canais de propagação como expoente dos determinantes.

Sabendo que

$$\det^N(1_2 + Q_\phi Q) = \frac{\det^N(\Gamma + Q_\phi \Gamma \sigma_3)}{\det^N(\Gamma)}, \quad (3.62)$$

então, a partir do resultado da integral Gaussiana, a seguinte igualdade é válida:

$$\det^N(\Gamma + Q_\phi \Gamma \sigma_3) = \int \prod_{j=1}^N d\psi_{1j} d\bar{\psi}_{1j} d\chi_{1j} d\bar{\chi}_{1j} \exp \left[\sum_{j=1}^N \Phi_{1j}^\dagger (\Gamma + Q_\phi \Gamma \sigma_3) \Phi_{1j} \right]. \quad (3.63)$$

Da equação (3.34), temos que

$$\det^N(\Gamma + Q_\phi \Gamma \sigma_3) = 2^N \int \prod_{j=1}^N d\psi_{1j} d\bar{\psi}_{1j} d\chi_{1j} d\bar{\chi}_{1j} \exp \left[\sum_{j=1}^N \Phi_{1j}^\dagger A_1 \Phi_{1j} \right], \quad (3.64)$$

onde

$$\Phi_{1j} = \begin{pmatrix} \psi_{1j} \\ \chi_{1j} \end{pmatrix}, \quad \Phi_{1j}^\dagger = (\bar{\psi}_{1j}, \bar{\chi}_{1j}), \quad (3.65)$$

e o produto de matrizes $\Phi_{1j}^\dagger A_1 \Phi_{1j}$ é dado por

$$\Phi_{1j}^\dagger A_1 \Phi_{1j} = (z - e^{-i\phi}) \bar{\psi}_{1j} \chi_{1j} + (-z^* + e^{i\phi}) \bar{\chi}_{1j} \psi_{1j}. \quad (3.66)$$

Para o outro determinante da função geratriz, temos que

$$\det^N(1_2 + Q_0 Q) = \frac{\det^N(\Gamma + Q_0 \Gamma \sigma_3)}{\det^N(\Gamma)}. \quad (3.67)$$

Na representação do determinante em termos de uma integral Gaussiana:

$$\det^N(\Gamma + Q_0 \Gamma \sigma_3) = \int \prod_{j=1}^N d\psi_{2j} d\bar{\psi}_{2j} d\chi_{2j} d\bar{\chi}_{2j} \exp \left[\sum_{j=1}^N \Phi_{2j}^\dagger (\Gamma + Q_0 \Gamma \sigma_3) \Phi_{2j} \right], \quad (3.68)$$

e a partir da equação (3.41),

$$\det^N(\Gamma + Q_0 \Gamma \sigma_3) = 2^N \int \prod_{j=1}^N d\psi_{2j} d\bar{\psi}_{2j} d\chi_{2j} d\bar{\chi}_{2j} \exp \left[\sum_{j=1}^N \Phi_{2j}^\dagger A_2 \Phi_{2j} \right], \quad (3.69)$$

onde

$$\Phi_{2j} = \begin{pmatrix} \psi_{2j} \\ \chi_{2j} \end{pmatrix}, \quad \Phi_{2j}^\dagger = (\bar{\psi}_{2j}, \bar{\chi}_{2j}), \quad (3.70)$$

e

$$\Phi_{2j}^\dagger A_2 \Phi_{2j} = (z - 1) \bar{\psi}_{2j} \chi_{2j} + (-z^* + 1) \bar{\chi}_{2j} \psi_{2j}. \quad (3.71)$$

Adicionando na função geratriz as igualdades que definem os determinantes em termos de integrais Gaussianas, equação (3.64) e equação (3.69), temos que

$$F(\phi) = 4^N \int d(\Phi, \Phi^\dagger) \exp \left[\sum_{j=1}^N \left(e^{i\phi} \bar{\chi}_{1j} \psi_{1j} - e^{-i\phi} \bar{\psi}_{1j} \chi_{1j} + \bar{\chi}_{2j} \psi_{2j} - \bar{\psi}_{2j} \chi_{2j} \right) \right] W(\psi, \chi), \quad (3.72)$$

onde $W(\psi, \chi)$ é definida como

$$W(\psi, \chi) = \int \frac{d\mu(Q)}{\det^{2N}(\Gamma)} \exp \left\{ \sum_{j=1}^N \left[z(\bar{\psi}_{1j}\chi_{1j} + \bar{\psi}_{2j}\chi_{2j}) - z^*(\bar{\chi}_{1j}\psi_{1j} + \bar{\chi}_{2j}\psi_{2j}) \right] \right\}, \quad (3.73)$$

ou

$$W(\psi, \chi) = \int \frac{d\mu(Q)}{\det^{2N}(\Gamma)} \exp \left[\sum_{j=1}^N \sum_{\sigma=1}^2 \left(z\bar{\psi}_{\sigma j}\chi_{\sigma j} - z^*\bar{\chi}_{\sigma j}\psi_{\sigma j} \right) \right], \quad (3.74)$$

e a medida de integração $d(\Phi, \Phi^\dagger)$,

$$d(\Phi, \Phi^\dagger) = \prod_{i=1}^N \prod_{a=2}^2 d\psi_{ai} d\bar{\psi}_{ai} d\chi_{ai} d\bar{\chi}_{ai} \quad (3.75)$$

De acordo com a transformação color-flavor e tratando-se de uma amostra com número de canais de propagação arbitrário, podemos definir a seguinte relação:

$$k \int \frac{d\mu(Q)}{\det^{2N}(\Gamma)} \exp \left[\sum_{j=1}^N \sum_{\sigma=1}^2 \left(z\bar{\psi}_{\sigma j}\chi_{\sigma j} - z^*\bar{\chi}_{\sigma j}\psi_{\sigma j} \right) \right] = W_{CF}(\psi, \chi), \quad (3.76)$$

onde a forma de $W_{CF}(\psi, \chi)$ é dada por

$$W_{CF}(\psi, \chi) = \int d\mu(S) \exp \left\{ \sum_{i,j=1}^N \sum_{\sigma,\sigma'=1}^2 \left[\bar{\psi}_{\sigma i} \left(S_{ij}^{\sigma\sigma'} \right) \psi_{\sigma' j} + \bar{\chi}_{\sigma i} \left(S_{ij}^{\sigma\sigma'} \right)^\dagger \chi_{\sigma' j} \right] \right\}, \quad (3.77)$$

então, $W(\psi, \chi)$ definida em função de $W_{CF}(\psi, \chi)$,

$$W(\psi, \chi) = \frac{1}{k} W_{CF}(\psi, \chi). \quad (3.78)$$

Dessa forma, após a utilização da transformação color-flavor, podemos escrever a função geratriz de uma nova forma:

$$F(\phi) = \frac{4^N}{k} \int d(\Phi, \Phi^\dagger) \exp \left[\sum_{j=1}^N \left(e^{i\phi} \bar{\chi}_{1j}\psi_{1j} - e^{-i\phi} \bar{\psi}_{1j}\chi_{1j} + \bar{\chi}_{2j}\psi_{2j} - \bar{\psi}_{2j}\chi_{2j} \right) \right] W_{CF}(\psi, \chi), \quad (3.79)$$

ou

$$F(\phi) = \frac{4^N}{k} \int d(\Phi, \Phi^\dagger) \exp(\Phi^\dagger A \Phi), \quad (3.80)$$

onde A tem a mesma estrutura da equação (3.51), porém com a dimensão dos blocos da matriz de espalhamento sendo $N \times N$:

$$A = \begin{pmatrix} S & -\Lambda^\dagger \\ \Lambda & S^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t' & -e^{-i\phi}1_N & 0 \\ t & r' & 0 & -1_N \\ e^{i\phi}1_N & 0 & r^\dagger & t^\dagger \\ 0 & 1_N & t'^\dagger & r'^\dagger \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

e a matriz Φ com seus elementos sendo variáveis de Grassman é definida como

$$\Phi = \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_{1N} \\ \psi_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_{2N} \\ \chi_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_{1N} \\ \chi_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_{2N} \end{pmatrix}. \quad (3.82)$$

Assim, podemos reescrever a função geratriz definida pela equação (3.80) da seguinte

maneira:

$$F(\phi) = \frac{4^N}{k} \int d\mu(S) \det(A). \quad (3.83)$$

Do determinante de A , equação (3.55), temos que

$$F(\phi) = \frac{4^N}{k} \int d\mu(S) \det(1_{2N} + \Lambda^\dagger S \Lambda S^\dagger). \quad (3.84)$$

e a função geratriz da condutância é obtida da seguinte maneira:

$$\Psi(\phi) = \frac{k}{16^N} F(\phi), \quad (3.85)$$

então

$$\Psi(\phi) = \frac{1}{4^N} \int d\mu(S) \det(1_{2N} + \Lambda^\dagger S \Lambda S^\dagger). \quad (3.86)$$

Portanto, para um número arbitrário de canais, podemos validar a relação entre integrais abaixo:

$$\frac{1}{4^N} \int d\mu(S) \det(1_{2N} + \Lambda^\dagger S \Lambda S^\dagger) = \int d\mu(Q) \det^N(1_2 + Q_\phi Q) \det^N(1_2 + Q Q_0), \quad (3.87)$$

onde a medida de integração $d\mu(Q)$,

$$d\mu(Q) = \frac{K}{\pi} \frac{d^2 z}{(1 + |z|^2)^2}, \quad K = \frac{k}{16}. \quad (3.88)$$

No próximo capítulo utilizaremos o mapa caracterizado pela equação (3.87) para expressar a função geratriz da condutância de diversas formas e também consideraremos o mesmo mapa para uma cadeia formada por cavidades caóticas conectadas em série.

4 CONDUTÂNCIA E CADEIA DE CAVIDADES CAÓTICAS

No capítulo anterior, mostramos a relação entre duas integrais através da transformação color-flavor, onde primeiramente a transformação foi feita para um sistema com um canal de propagação e posteriormente para um número arbitrário de canais. Neste capítulo, utilizaremos a integral transformada para fazer diferentes interpretações da função geratriz, calcular analiticamente a condutância do sistema e analisar o problema de uma cadeia formada por cavidades caóticas.

4.1 FUNÇÃO GERATRIZ DA CONDUTÂNCIA PARA O ECU

A condutância de uma cavidade caótica com simetria de reversão temporal quebrada pode ser obtida através do método da função geratriz, onde a integral é sobre o ensemble circular unitário (ECU). No entanto, a utilização do mapa $U(N_T) \rightarrow S^2$, realizado pela transformação color-flavor, nos permite definir a função geratriz como uma integral sobre matrizes que contém elementos que parametrizam uma superfície esférica:

$$\Psi(\phi) = \int d\mu(Q) \det^N(1_2 + Q_\phi Q) \det^N(1_2 + QQ_0), \quad (4.1)$$

onde a medida de integração é definida como

$$d\mu(Q) = \frac{K}{\pi} \frac{d^2z}{(1 + |z|^2)^2}, \quad (4.2)$$

e as matrizes Q_ϕ e Q_0 são obtidas quando o ponto z da matriz Q é substituído pelos pontos especiais z_ϕ e z_0 ,

$$Q_\phi = Q = \frac{1}{1 + |z|^2} \begin{pmatrix} 1 - |z|^2 & -2z \\ -2z^* & |z|^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad z = z_\phi = -e^{-i\phi}, \quad (4.3)$$

$$Q_0 = Q = \frac{1}{1 + |z|^2} \begin{pmatrix} 1 - |z|^2 & -2z \\ -2z^* & |z|^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad z = z_0 = -1. \quad (4.4)$$

Dessa forma, conhecendo as matrizes Q, Q_ϕ e Q_0 , podemos obter os determinantes da função geratriz:

$$\det^N(1_2 + Q_\phi Q) = \frac{4^N |1 + z_\phi^* z|^{2N}}{(1 + |z_\phi|^2)^N (1 + |z|^2)^N}, \quad (4.5)$$

$$\det^N(1_2 + Q_0 Q) = \frac{4^N |1 + z_0^* z|^{2N}}{(1 + |z_0|^2)^N (1 + |z|^2)^N}. \quad (4.6)$$

Introduzindo agora os estados coerentes, que por definição (ZHANG W M; FENG; GILMORE, 1990):

$$|z\rangle = \frac{e^{zJ_+}}{(1 + |z|^2)^j} |j, -j\rangle = \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m}}{(1 + |z|^2)^j} |j, m\rangle, \quad (4.7)$$

onde podemos destacar algumas propriedades, como a não-ortogonalidade:

$$\langle z_1 | z_2 \rangle = \frac{(1 + z_1^* z_2)^{2j}}{(1 + |z_1|^2)^j (1 + |z_2|^2)^j}, \quad (4.8)$$

e a supercompleteza:

$$\int d\mu_j(z, z^*) |z\rangle \langle z| = 1, \quad d\mu_j(z, z^*) = \frac{2j+1}{\pi} \frac{dz dz^*}{(1 + |z|^2)^2}. \quad (4.9)$$

Uma forma alternativa de definir esses estados pode ser feita se utilizarmos uma projeção estereográfica sobre a superfície da esfera, $z = e^{-i\beta} \tan(\alpha/2)$, de modo que os estados coerentes transformam-se em

$$|\alpha, \beta\rangle = \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} (\cos \alpha)^{j-m} (\sin \alpha)^{j+m} e^{i(j+m)\beta} |j, m\rangle. \quad (4.10)$$

Portanto, a partir da propriedade de não-ortogonalidade, equação (4.8), podemos definir os determinantes em termos de estados coerentes. Para isso, considerando estados coerentes com spin $j = 1/2$, temos que

$$\det^N(1_2 + Q_\phi Q) = 4^N |\langle z_\phi | z \rangle|^{2N}, \quad (4.11)$$

e

$$\det^N(1_2 + Q_0 Q) = 4^N |\langle z_0 | z \rangle|^{2N}. \quad (4.12)$$

Nas subseções abaixo introduziremos a função de Husimi e a função fidelidade, a fim de definir a função geratriz de duas formas diferentes através das relações (4.5) e (4.6).

4.1.1 Função de Husimi

Considerando um estado quântico arbitrário $|\psi\rangle$, o produto interno $\langle z|\psi\rangle = \psi(z)$ consiste em uma representação do espaço de fase, ou representação de Bargmann, do estado $|\psi\rangle$, onde $|z\rangle$ é um estado coerente. A norma quadrada $Q_\psi = |\psi(z)|^2$ é definida como sendo uma distribuição de quase-probabilidade, também chamada de função Husimi, de maneira que tais distribuições são utilizadas para descrever propriedades de diversos sistemas quânticos, especialmente em óptica quântica (CARLIXTO; PEON-NIETO, 2017).

A função de Husimi também pode ser definida através de operadores densidade (BENGTSSON; ZYCKOWSKI, 2006). Para $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, a norma quadrada da representação de Bargmann tem uma nova forma, $Q_\rho = \langle z|\rho|z\rangle$. Assim, do determinante da equação (4.11), temos que $|\langle z_\phi|z\rangle|^2$ pode ser definindo como

$$Q_{\rho_\phi}(z) = \langle z|\rho_\phi|z\rangle, \quad (4.13)$$

onde ρ_ϕ é um estado puro definido por

$$\rho_\phi = |z_\phi\rangle\langle z_\phi|, \quad (4.14)$$

e, do determinante da equação (4.12), temos que $|\langle z_0|z\rangle|^2$ pode ser definido de forma semelhante a equação (4.13), porém com o estado puro sendo ρ_0 :

$$Q_{\rho_0}(z) = \langle z|\rho_0|z\rangle, \quad \rho_0 = |z_0\rangle\langle z_0|. \quad (4.15)$$

Dessa maneira, podemos representar a função geratriz como uma integral de produtos de funções de Husimi:

$$\Psi(\phi) = C \int \frac{1}{\pi} \frac{d^2z}{(1+|z|^2)^2} Q_{\rho_\phi}^N(z) Q_{\rho_0}^N(z), \quad C = 16^N K \quad (4.16)$$

onde pelo fato de z ser uma coordenada estereográfica ($z = \tan(\alpha/2)e^{-i\beta}$), a medida de integração pode ser definida em termos dos ângulos α e β :

$$\frac{1}{\pi} \frac{d^2z}{(1+|z|^2)^2} = \frac{1}{4\pi} \sin\alpha d\alpha d\beta = \frac{1}{4\pi} d\Omega, \quad (4.17)$$

então

$$\Psi(\phi) = C \int \frac{d\Omega}{4\pi} Q_{\rho_\phi}^N(z) Q_{\rho_0}^N(z). \quad (4.18)$$

Portanto, por meio das propriedades dos estados coerentes, a função geratriz pode ser definida em termos de distribuições de quase-probabilidade, também chamadas de funções de Husimi. Abaixo, abordaremos o momento da função de Husimi com o objetivo de calcular a constante da equação (4.18).

4.1.1.1 Momento da função de Husimi

Para um espaço de Hilbert H_D de dimensão $D = n + 1$, temos que o produto tensorial deste espaço com ele mesmo é representado por

$$H_D \otimes H_D = H_{2D-1} \otimes H_{2D-2} \otimes \dots \otimes H_1. \quad (4.19)$$

Dado dois estados arbitrários $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$, podemos definir um estado $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ através da seguinte relação:

$$Q_{|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle} = Q_{|\psi_1\rangle} Q_{|\psi_2\rangle}. \quad (4.20)$$

onde tal estado pertence ao subespaço H_{2D-1} . Assim, tratando-se do espaço de spin, ou seja, a dimensão do espaço de Hilbert é $D = 2j + 1$, podemos obter relações muito interessantes por meio de operações envolvendo estados coerentes (BENGTSSON; ZYCKOWSKI, 2006):

$$\frac{4j+1}{4\pi} \int d\Omega |z\rangle |z\rangle \langle z| \langle z| = I_{4j+1}, \quad (4.21)$$

onde I_{4j+1} é o projetor em H_{4j+1} . Similarmente

$$\frac{6j+1}{4\pi} \int d\Omega |z\rangle |z\rangle |z\rangle \langle z| \langle z| \langle z| = I_{6j+1}. \quad (4.22)$$

Definida essas operações, pode-se calcular o segundo momento da função de Husimi:

$$M_Q = \frac{2j+1}{4\pi} \int d\Omega Q^2 = \frac{2j+1}{4j+1} \langle \psi | \langle \psi | \frac{4j+1}{4\pi} \int d\Omega |z\rangle |z\rangle \langle z| \langle z| |\psi\rangle |\psi\rangle, \quad (4.23)$$

então

$$M_Q = \frac{2j+1}{4\pi} \int d\Omega Q^2 = \frac{2j+1}{4j+1}, \quad (4.24)$$

sendo que para momentos de ordem arbitrária mostra-se de forma semelhante a seguinte relação:

$$M_Q = \frac{2j+1}{4\pi} \int d\Omega Q^p = \frac{2j+1}{2pj+1}. \quad (4.25)$$

O momento da função de Husimi nos possibilita calcular a constante da função geratriz, equação (4.18), então através da condição de normalização, temos que

$$\Psi(0) = 1 \Rightarrow \frac{C}{4\pi} \int d\Omega Q_{\rho_0}^{2N} = 1, \quad (4.26)$$

Reescrevendo a equação acima a fim de introduzir a medida de integração $d\mu_{1/2}(z, z^*)$:

$$\frac{16^N K}{2} \int d\mu_{1/2}(z, z^*) Q_{\rho_0}^{2N} = 1, \quad d\mu_{1/2}(z, z^*) = \frac{2}{\pi} \frac{d^2 z}{(1+|z|^2)^2}. \quad (4.27)$$

então, a ordem do momento de Husimi sendo $p = 2N$, temos que

$$\frac{16^N K}{2} \frac{2}{2N+1} = 1 \Rightarrow C = 2N+1, \quad (4.28)$$

Para cavidades caóticas pertencentes ao ensemble circular unitário, portanto, o momento da função de Husimi pode nos auxiliar no cálculo da constante da função geratriz da condutância, equação (4.18).

4.1.2 Função fidelidade

A métrica de um espaço projetivo complexo CP^n é conhecida na literatura como a métrica Fubini-study. Tal métrica pode ser introduzida no espaço de Hilbert, de modo que podemos considerar um estado arbitrário da seguinte maneira:

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha=0}^n Z_\alpha |e_\alpha\rangle = [Z_0 : Z_1 : \dots : Z_n], \quad (4.29)$$

onde $\{|e_\alpha\rangle\}$ é um conjunto de base ortonormal do espaço de Hilbert, Z_α são números complexos e $[Z_0 : Z_1 : \dots : Z_n]$ representa um ponto arbitrário no espaço projetivo complexo, CP^n . Por exemplo, para o espaço projetivo complexo CP^1 , o estado $|\psi\rangle$ pode ser representado na superfície de uma esfera, também chamada de esfera de Bloch, $CP^1 = S^2$ (ver figura 14).

Dessa forma, podemos definir a distância geodésica entre dois estados arbitrários, $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$, através da relação

$$\cos D_{FS} = |\langle \psi | \phi \rangle|, \quad (4.30)$$

e

$$\cos^2 D_{FS} = \kappa = |\langle \psi | \phi \rangle|^2, \quad (4.31)$$

sendo que κ é mais frequentemente referido como a probabilidade de transição. Na métrica do espaço de matrizes de densidade, conhecida como métrica de Bures, podemos definir uma forma similar a equação (4.30):

$$\cos D_A = \sqrt{F(\rho_1, \rho_2)}, \quad (4.32)$$

onde D_A é o ângulo de Bures e a função $F(\rho_1, \rho_2)$ é chamada de função fidelidade, na qual consiste em uma medida de distinguibilidade de dois estados quânticos (BENGTSSON; ZYCZKOWSKI, 2006). Assim, considerando que um dos estados é puro, $\rho_1 = |\psi\rangle\langle\psi|$, podemos definir a função fidelidade da seguinte forma:

$$F(\rho_1, \rho_2) = \langle \psi | \rho_2 | \psi \rangle. \quad (4.33)$$

A expressão acima para a função fidelidade tem interpretação direta com a probabilidade que o estado ρ_2 vai passar no teste sim/não associado ao estado ρ_1 (BENGTSSON; ZYCZKOWSKI, 2006). Tratando-se agora de um par de estados puros, $\rho_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ e $\rho_2 = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$, então calculando a equação (4.33), temos que

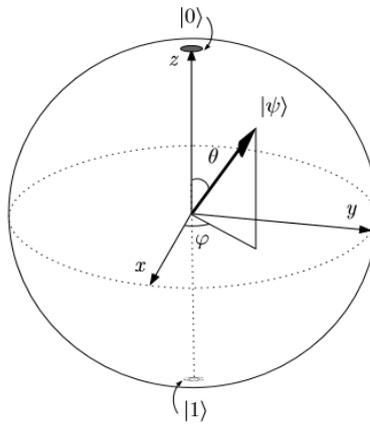
$$F(|\psi_1\rangle\langle\psi_1|, |\psi_2\rangle\langle\psi_2|) = |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2 = \kappa, \quad (4.34)$$

ou seja, a função fidelidade de dois estados puros corresponde à probabilidade de transição (κ) e o ângulo de Bures entre dois estados puros é igual a distância geodésica D_{FS} .

Portanto, definida a função fidelidade, podemos destacar algumas propriedades interessantes (BENGTSSON; ZYCZKOWSKI, 2006):

1. $0 \leq F(\rho_1, \rho_2) \leq 1$.
2. $F(\rho_1, \rho_2) = 1$ se e somente se $\rho_1 = \rho_2$ e $F(\rho_1, \rho_2) = 0$ se e somente se ρ_1 e ρ_2 tiverem bases ortogonais.
3. Simetria: $F(\rho_1, \rho_2) = F(\rho_2, \rho_1)$.

Figura 14 – Representação de um q-bit na esfera de Bloch.



Fonte: COSTA; CARVALHO (2005)

4. Multiplicatividade: $F(\rho_1 \otimes \rho_2, \rho_3 \otimes \rho_4) = F(\rho_1, \rho_3)F(\rho_2, \rho_4)$.

A seguir, vamos introduzir a função fidelidade no problema de transporte de cargas em cavidades caóticas, onde definiremos a função geratriz da condutância como medida de distinguibilidade de estados quânticos.

4.1.2.1 A função geratriz como medida de distinguibilidade

Para $j = N$, os determinantes da função geratriz, equação (4.1), podem ser definidos como

$$\det^N(1_2 + Q_\phi Q) = 4^N \langle z_\phi | z \rangle, \quad (4.35)$$

e

$$\det^N(1_2 + Q_0 Q) = 4^N \langle z_0 | z \rangle. \quad (4.36)$$

Dessa forma, a função geratriz passa a ser uma integral de produtos internos de estados coerentes,

$$\Psi(\phi) = \frac{16^N K}{\pi} \int \frac{d^2 z}{(1 + |z|^2)^2} \langle z_\phi | z \rangle \langle z_0 | z \rangle, \quad (4.37)$$

onde a constante K é obtida através da expressão

$$\Psi(0) = \frac{16^N K}{\pi} \int \frac{d^2 z}{(1 + |z|^2)^2} |\langle z|z_0\rangle|^2 = 1. \quad (4.38)$$

Uma das propriedades dos estados coerentes é a supercompletudeza, então para $j = N$:

$$\int d\mu_N(z, z^*) |z\rangle \langle z| = 1, \quad d\mu_N(z, z^*) = \frac{2N + 1}{\pi} \frac{dz dz^*}{(1 + |z|^2)^2}, \quad (4.39)$$

e por meio da normalização do estado coerente $|z_0\rangle$, é possível obter a constante K utilizando a supercompletudeza:

$$\langle z_0|z_0\rangle = \int d\mu_N(z, z^*) |\langle z|z_0\rangle|^2 = 1, \quad (4.40)$$

então

$$\int \frac{dz dz^*}{(1 + |z|^2)^2} |\langle z|z_0\rangle|^2 = \frac{\pi}{2N + 1}. \quad (4.41)$$

Assim, conhecendo o valor da integral da equação acima, temos que

$$\Psi(0) = 1 \Rightarrow K = \frac{2N + 1}{16^N}. \quad (4.42)$$

onde definida a constante K , então

$$\Psi(\phi) = \int d\mu_N(z, z^*) \langle z_\phi|z\rangle \langle z_0|z\rangle, \quad (4.43)$$

ou

$$\Psi(\phi) = \int d\mu_N(z, z^*) \sqrt{|\langle z_\phi|z\rangle|^2 |\langle z_0|z\rangle|^2}. \quad (4.44)$$

Considerando os estados puros ρ_ϕ e ρ_0 ,

$$\rho_\phi = |z_\phi\rangle \langle z_\phi|, \quad \rho_0 = |z_0\rangle \langle z_0|, \quad (4.45)$$

então a equação(4.44) transforma-se em

$$\Psi(\phi) = \int d\mu_N(z, z^*) \sqrt{\langle z|\rho_\phi|z\rangle \langle z|\rho_0|z\rangle}. \quad (4.46)$$

Da definição de função fidelidade, a função geratriz representada pela equação acima pode ser definida da seguinte forma:

$$\Psi(\phi) = \int d\mu_N(z, z^*) \sqrt{F(\rho_\phi, \rho_z) F(\rho_0, \rho_z)}. \quad (4.47)$$

onde através da propriedade de multiplicatividade da função fidelidade podemos escrever a seguinte igualdade:

$$F(\rho_\phi, \rho_z) F(\rho_0, \rho_z) = F(\rho_\phi \otimes \rho_0, \rho_z \otimes \rho_z), \quad (4.48)$$

então, através dessa propriedade, temos que

$$\Psi(\phi) = \int d\mu_N(z, z^*) \sqrt{F(\rho_\phi \otimes \rho_0, \rho_z \otimes \rho_z)}. \quad (4.49)$$

Portanto, a utilização da transformação color-flavor em problemas de transporte envolvendo cavidades caóticas com simetria de reversão temporal quebrada, resultando no mapa $U(N_T) \rightarrow S^2$, nos permite definir a função geratriz da condutância como uma integral da raiz da função fidelidade, equação (4.49). Isto é, a função $\Psi(\phi)$ está relacionada com a medida de distinguibilidade de estados quânticos.

4.2 CONDUTÂNCIA

O método da função geratriz nos fornece uma forma alternativa para calcular a condutância de um ponto quântico. No caso de cavidades caóticas, a função geratriz consiste em uma integral sobre matrizes aleatórias, onde no capítulo anterior mostramos que para sistemas com simetria de reversão temporal quebrada causada pela aplicação de um campo magnético externo, podemos utilizar o mapa $U(N_T) \rightarrow S^2$. Dessa maneira, a integral da função geratriz pode ser definida como

$$\Psi(\phi) = C \int \frac{d\Omega}{4\pi} Q_{\rho_\phi}^N(z) Q_{\rho_0}^N(z). \quad (4.50)$$

A função geratriz, equação (4.50), é uma integral de um produto de funções de Husimi, que, por definição, dependem de estados coerentes. Então, considerando o estado coerente

$$|z\rangle = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha/2)e^{-i\beta} \\ \cos(\alpha/2) \end{pmatrix}, \quad (4.51)$$

e os estados especiais

$$|z_\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |z_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.52)$$

podemos obter as seguintes expressões para as funções de Husimi:

$$Q_{\rho_\phi}(z) = |\langle z|z_\phi\rangle|^2 = \frac{1}{2} [1 + \sin \alpha \cos(\phi - \beta)], \quad (4.53)$$

$$Q_{\rho_0}(z) = |\langle z|z_0\rangle|^2 = \frac{1}{2} [1 + \sin \alpha \cos \beta]. \quad (4.54)$$

Introduzindo agora os vetores unitários:

$$\hat{n} = \cos \alpha \sin \beta \hat{e}_1 + \sin \alpha \sin \beta \hat{e}_2 + \cos \beta \hat{e}_3, \quad (4.55)$$

onde \hat{n} é um vetor unitário variável, e

$$\hat{n}_\phi = \sin \phi \hat{e}_2 + \cos \phi \hat{e}_3, \quad \hat{n}_0 = \hat{e}_3. \quad (4.56)$$

são vetores unitários fixos, então, a partir das expressões para as funções de Husimi, relações (4.53) e (4.54), podemos escrever a função geratriz da seguinte forma:

$$\Psi(\phi) = \frac{C}{4^N} \int \frac{d\Omega}{4\pi} (1 + \hat{n}_\phi \cdot \hat{n})^N (1 + \hat{n} \cdot \hat{n}_0)^N. \quad (4.57)$$

Para calcular a função geratriz acima, devemos expandir os termos vetoriais em termos dos polinômios de Legendre. Para isso, vamos começar de forma mais geral, isto é, para qualquer função $f(x)$ integrável no intervalo $[-1, +1]$, temos que

$$f(x) = \sum_{l=0}^N C_l^{(N)} P_l(x), \quad (4.58)$$

onde os polinômios de Legendre obedecem a seguinte relação de ortogonalidade:

$$\int_{-1}^1 dx P_l(x) P_{l'}(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}. \quad (4.59)$$

Seja uma função $f(x) = (1+x)^N$, então os coeficientes $C_l^{(N)}$ podem ser calculados se multiplicarmos os dois lados da expansão, equação (4.58), por $P_l(x)$:

$$C_l^{(N)} \int_{-1}^1 dx P_l(x) P_l(x) = \int_{-1}^1 dx (1+x)^N P_l(x). \quad (4.60)$$

onde a integral do lado direito da equação acima é

$$\int_{-1}^1 dx (1+x)^N P_l(x) = \frac{2^{N+1}(N!)^2}{(N-l)!(N+l+1)!}, \quad (4.61)$$

então, através da relação de ortogonalidade dos polinômios de Legendre, os coeficientes $C_l^{(N)}$ são dados por

$$C_l^{(N)} = \frac{2^N(2l+1)(N!)^2}{(N-l)!(N+l+1)!}. \quad (4.62)$$

Voltando agora para o caso da função geratriz, temos que a partir das expansões de funções em termos dos polinômios de Legendre, podemos considerar as seguintes expansões:

$$(1 + \hat{n}_\phi \cdot \hat{n})^N = \sum_{l=0}^N C_l^{(N)} P_l(\hat{n}_\phi \cdot \hat{n}), \quad (4.63)$$

e

$$(1 + \hat{n} \cdot \hat{n}_0)^N = \sum_{l=0}^N C_l^{(N)} P_l(\hat{n} \cdot \hat{n}_0). \quad (4.64)$$

O teorema da adição para os harmônicos esféricos nos permite definir os polinômios de Legendre da seguinte maneira:

$$P_l(\hat{n}_\phi \cdot \hat{n}) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\alpha, \beta), \quad (4.65)$$

e

$$P_{l'}(\hat{n} \cdot \hat{n}_0) = \frac{4\pi}{2l'+1} \sum_{m'=-l'}^{l'} Y_{l'm'}(\alpha, \beta) Y_{l'm'}^*(\theta_0, \phi_0). \quad (4.66)$$

então através das relações (4.63) e (4.64), podemos reescrever a função geratriz em termos de uma expansão de harmônicos esféricos:

$$\Psi(\phi) = 4\pi C_N \sum_{l,l'=0}^N \sum_{m,m'=-l}^l \frac{Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{l'm'}^*(\theta_0, \phi_0) \int d\Omega Y_{l'm'}(\alpha, \beta) Y_{lm}^*(\alpha, \beta)}{(N-l)!(N+l+1)! (N-l')!(N+l'+1)!}. \quad (4.67)$$

Tratando-se de harmônicos esféricos, temos que essas funções satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade:

$$\int d\Omega Y_{l'm'}(\alpha, \beta) Y_{lm}^*(\alpha, \beta) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (4.68)$$

de maneira que ao utilizá-la, a equação (4.67) resulta em

$$\Psi(\phi) = 4\pi C_N \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta_0, \phi_0)}{[(N-l)!(N+l+1)!]^2}. \quad (4.69)$$

Do teorema da adição,

$$P_l(\cos \phi) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta_0, \phi_0). \quad (4.70)$$

dessa forma, temos que a equação (4.69),

$$\Psi(\phi) = C_N \sum_{l=0}^N \frac{(2l+1)}{[(N-l)!(N+l+1)!]^2} P_l(\cos \phi). \quad (4.71)$$

onde a constante C_N pode ser obtida através da seguinte relação:

$$\Psi(0) = C_N \sum_{l=0}^N \frac{(2l+1)}{[(N-l)!(N+l+1)!]^2} = 1. \quad (4.72)$$

Considerando o polinômio de Legendre da equação (4.71) na forma de uma série, então

$$P_l(\cos \phi) = \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^{l+k} (l+k)!}{(l-k)!(k!)^2} y^k, \quad (4.73)$$

onde $y = \cos^2(\phi/2)$. Assim, ao utilizar essa expansão do polinômio de Legendre, podemos reescrever a equação (4.71) como

$$\Psi(\phi) = C_N \sum_{l=0}^N \sum_{k=0}^l a_l \frac{(-1)^{l+k} (2l+1)(l+k)!}{(l-k)!(k!)^2} y^k, \quad (4.74)$$

onde $a_l = [(N-l)!(N+l+1)!]^{-2}$.

Definindo um coeficiente a_k , podemos deixar a função geratriz ainda mais simplificada:

$$\Psi(\phi) = C_N \sum_{k=0}^N a_k y^k, \quad (4.75)$$

onde o coeficiente a_k é uma série dada por

$$a_k = \frac{1}{(k!)^2} \sum_{l=k}^N \frac{(-1)^{l+k} (l+k)!}{(l-k)!} \frac{(2l+1)}{[(N-l)!(N+l+1)!]^2}. \quad (4.76)$$

e ao calcular os coeficientes, nota-se que podemos obter uma relação envolvendo os coeficientes com índice $k > 0$ e o coeficiente a_0 :

$$a_k = [N(N-1)(N-2)(N-3)\dots(N-k+1)]^2 \frac{a_0}{(k!)^2}. \quad (4.77)$$

Da definição do símbolo de Pochhammer,

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\dots(a+n-1), \quad n > 0, \quad (4.78)$$

sendo que para $n = 0$, temos que $(a)_0 = 1$. Dessa forma, os coeficientes a_k podem ser definidos como

$$a_k = \frac{[(-N)_k]^2}{(1)_k} \frac{a_0}{(k!)}, \quad (4.79)$$

então

$$\Psi(\phi) = C_N a_0 \sum_{k=0}^N \frac{[(-N)_k]^2}{(1)_k} \frac{y^k}{(k!)}. \quad (4.80)$$

Uma função especial representada pela série hipergeométrica, sendo solução de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, é conhecida como função hipergeométrica (IWASAKI K; KIMURA; YASHIDA, 1991):

$${}_2F_1([a, b], [c], y) = \sum_k \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{y^k}{k!}. \quad (4.81)$$

Assim, através da relação (4.80), podemos definir a função geratriz como sendo uma função hipergeométrica:

$$\Psi(\phi) = A {}_2F_1([-N, -N], [1], y), \quad (4.82)$$

onde a constante A é

$$\Psi(0) = 1 \Rightarrow A^{-1} = {}_2F_1([-N, -N], [1], 1). \quad (4.83)$$

Da relação (4.82) e determinada a constante, temos que $\Psi(\phi)$ consiste em um quociente de funções hipergeométricas:

$$\Psi(\phi) = \frac{{}_2F_1([-N, -N], [1], y)}{{}_2F_1([-N, -N], [1], 1)}. \quad (4.84)$$

de maneira que para $x = -\sin^2(\phi/2)$, podemos fazer a mudança de variável $y = 1 + x$, então

$$\Psi(\phi) = \frac{{}_2F_1([-N, -N], [1], 1+x)}{{}_2F_1([-N, -N], [1], 1)}. \quad (4.85)$$

Usando a relação geral para derivadas de ordem n de funções hipergeométricas:

$$\frac{d^n}{dx^n} {}_2F_1([a, b], [c], x) = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} {}_2F_1([a+1, b+1], [c+1], x), \quad (4.86)$$

então, a derivada de primeira ordem da função hipergeométrica presente na função geratriz, equação (4.85), é dada por

$$\frac{d}{dx} {}_2F_1([-N, -N], [1], 1+x) = N^2 {}_2F_1([-N+1, -N+1], [2], 1+x). \quad (4.87)$$

A partir da relação acima, temos que a derivada da função geratriz:

$$\frac{d}{dx} \Psi(\phi) = N^2 \frac{{}_2F_1([-N+1, -N+1], [2], 1+x)}{{}_2F_1([-N, -N], [1], 1)}, \quad (4.88)$$

onde a condutância adimensional,

$$\langle g \rangle = N^2 \frac{{}_2F_1([-N+1, -N+1], [2], 1)}{{}_2F_1([-N, -N], [1], 1)} = \frac{N}{2}. \quad (4.89)$$

O resultado acima é o mesmo da equação (2.80) para $N_1 = N_2 = N$ e $\beta = 2$. Portanto, para uma cavidade caótica pertencente ao ensemble circular unitário, a utilização da transformação color-flavor resulta no mapa $U(N_T) \rightarrow S^2$, de maneira que ao resolver a função geratriz da condutância, definida como um produto de funções de Husimi, podemos determinar a condutância em termos de funções hipergeométricas.

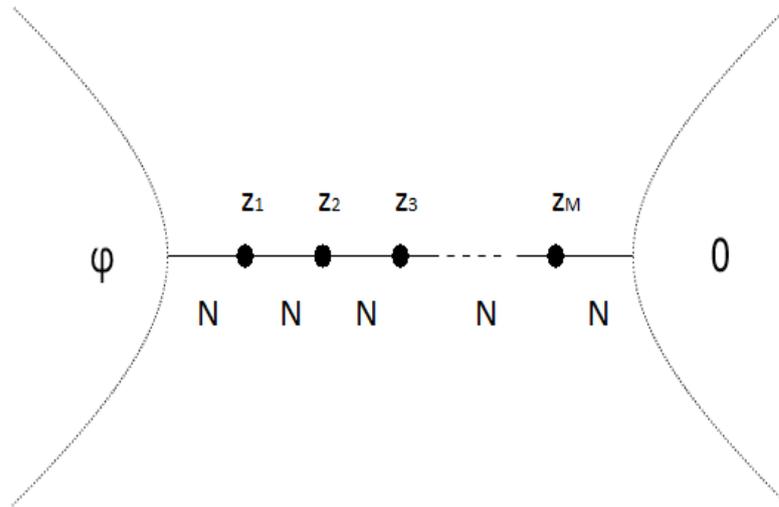
4.3 CADEIA DE CAVIDADES CAÓTICAS

Nesta seção vamos considerar o mapa $U(N_T) \rightarrow S^2$ para abordar a função geratriz da condutância de uma cadeia formada por M cavidades caóticas arbitrárias acopladas a dois reservatórios de elétrons. Além disso, para obtermos a condutância analiticamente, consideraremos o caso $M = 2$, ou seja, a condutância de uma amostra contendo duas cavidades caóticas conectadas em série.

4.3.1 Função geratriz da condutância

Considerando uma amostra contendo uma série de M cavidades caóticas, com simetria de reversão temporal quebrada, acopladas a reservatórios de elétrons via guias ideais, onde a série

Figura 15 – Representação de uma cadeia de cavidades caóticas conectadas em série via guias ideais com N canais de propagação. Os $z_i (i = 1, 2, \dots, M)$ representam as cavidades caóticas e ϕ representa um potencial fictício.



Fonte: O autor (2021)

consiste em duas ou mais cavidades ($M > 1$), temos que a função geratriz da condutância (ver figura 15):

$$\Psi(\phi) = \prod_{i=1}^{M-1} \int d\mu(Q_i) d\mu(Q_M) \det^N(1_2 + Q_\phi Q_1) \det^N(1_2 + Q_i Q_{i+1}) \det^N(1_2 + Q_M Q_0), \quad (4.90)$$

onde a i -ésima matriz tem a seguinte forma:

$$Q_i = \frac{1}{1 + |z_i|^2} \begin{pmatrix} 1 - |z_i|^2 & -2z_i \\ -2z_i^* & |z_i|^2 - 1 \end{pmatrix}. \quad (4.91)$$

Para estados coerentes de spin $j = 1/2$, os determinantes da equação (4.90) podem ser definidos como

$$\det^N(1_2 + Q_\phi Q_1) = 4^N |\langle z_\phi | z_1 \rangle|^{2N}, \quad \det^N(1_2 + Q_M Q_0) = 4^N |\langle z_M | z_0 \rangle|^{2N}, \quad (4.92)$$

e para o i -ésimo determinante,

$$\det^N(1_2 + Q_i Q_{i+1}) = 4^N |\langle z_i | z_{i+1} \rangle|^{2N}. \quad (4.93)$$

Definindo a i -ésima função de Husimi, temos que

$$Q_{\rho_i}(z_i, z_{i+1}) = \langle z_{i+1} | \rho_i | z_{i+1} \rangle, \quad (4.94)$$

onde a i -ésima matriz densidade é dada por

$$\rho_i = |z_i\rangle \langle z_i|. \quad (4.95)$$

A função geratriz da condutância de uma cadeia arbitrária de cavidades caóticas pode, portanto, pode ser definida em termos de um produto de $M + 1$ funções de Husimi:

$$\Psi(\phi) = C \prod_{i=1}^{M-1} \int \frac{d\Omega_i d\Omega_M}{(4\pi)^M} Q_{\rho_\phi}^N(z_1) Q_{\rho_i}^N(z_i, z_{i+1}) Q_{\rho_0}^N(z_M). \quad (4.96)$$

Introduzindo o i -ésimo vetor unitário,

$$\hat{n}_i = \cos \alpha_i \sin \beta_i \hat{e}_1 + \sin \alpha_i \sin \beta_i \hat{e}_2 + \cos \beta_i \hat{e}_3, \quad (4.97)$$

então, podemos definir a função geratriz como

$$\Psi(\phi) = \frac{C}{(2^{M+1})^N} \prod_{i=1}^{M-1} \int \frac{d\Omega_i d\Omega_M}{(4\pi)^M} (1 + \hat{n}_\phi \cdot \hat{n}_1)^N (1 + \hat{n}_i \cdot \hat{n}_{i+1})^N (1 + \hat{n}_M \cdot \hat{n}_0)^N. \quad (4.98)$$

A partir da propriedade dos polinômios de Legendre, equação (4.58), pode-se validar a expansão

$$(1 + \hat{n}_i \cdot \hat{n}_{i+1})^N = \sum_{l=0}^N C_l^{(N)} P_l(\hat{n}_i \cdot \hat{n}_{i+1}), \quad (4.99)$$

Do teorema da adição para os harmônicos esféricos, temos que o polinômio de Legendre da equação acima,

$$P_{l_i}(\hat{n}_i \cdot \hat{n}_{i+1}) = \frac{4\pi}{2l_i + 1} \sum_{m_i=-l_i}^{l_i} Y_{l_i m_i}(\alpha_i, \beta_i) Y_{l_i m_i}^*(\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}). \quad (4.100)$$

Após expandir os termos contendo as operações vetoriais, podemos aplicar as relações de ortogonalidade dos harmônicos esféricos, de maneira que a expressão para a função geratriz se reduz a

$$\Psi(\phi) = 4\pi C_N \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta_0, \phi_0)}{[(N-l)!(N+l+1)!]^{M+1}}. \quad (4.101)$$

então, através da equação (4.70),

$$\Psi(\phi) = C_N \sum_{l=0}^N \frac{(2l+1)}{[(N-l)!(N+l+1)!]^{M+1}} P_l(\cos \phi). \quad (4.102)$$

Assim como no problema de uma cavidade caótica, utilizando a expansão em série do polinômio de Legendre, temos que

$$\Psi(\phi) = C_N \sum_{l=0}^N \sum_{k=0}^l a_l \frac{(-1)^{l+k} (2l+1)(l+k)!}{(l-k)!(k!)^2} y^k, \quad (4.103)$$

onde o coeficiente $a_l = [(N-l)!(N+l+1)!]^{-(M+1)}$.

Através da introdução de um coeficiente a_k , podemos reescrever a função geratriz como

$$\Psi(\phi) = C_N \sum_{k=0}^N a_k y^k, \quad (4.104)$$

onde o coeficiente a_k é definido pela série

$$a_k = \frac{1}{(k!)^2} \sum_{l=k}^N \frac{(-1)^{l+k} (l+k)!}{(l-k)!} \frac{(2l+1)}{[(N-l)!(N+l+1)!]^{(M+1)}}. \quad (4.105)$$

Portanto, a função geratriz da condutância de um sistema com um número arbitrário (M) de cavidades caóticas acopladas em série por guias ideais pode ser expandida na forma da equação (4.104). Abaixo vamos considerar o caso $M = 2$.

4.3.1.1 Duas cavidades

Conhecendo a função geratriz de uma cadeia de cavidades caóticas, então para uma amostra com duas cavidades conectadas em série, temos que (ver figura 16)

$$\Psi(\phi) = C \int \frac{d\Omega_1 d\Omega_2}{(4\pi)^2} Q_{\rho_\phi}^N(z_1) Q_{\rho_1}^N(z_1, z_2) Q_{\rho_0}^N(z_2). \quad (4.106)$$

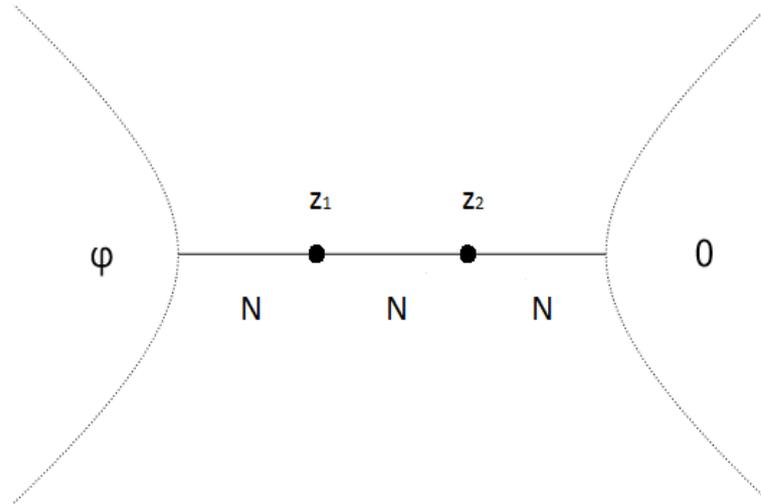
Da expansão em série representada pela equação (4.104), o coeficiente a_k , com índice k maior que zero, em termos do coeficiente a_0 :

$$a_k = \frac{[N(N-1)(N-2)(N-3)\dots(N-k+1)]^3}{(3N+1)(3N)(3N-1)\dots(3N-k+2)} \frac{a_0}{(k!)^2}. \quad (4.107)$$

A forma do coeficiente a_k em função de a_0 , representada pela relação acima, nos permite introduzir o símbolo de Pochhammer para definir a_k :

$$a_k = \frac{[(-N)_k]^3}{(-3N-1)_k (1)_k} \frac{a_0}{k!}. \quad (4.108)$$

Figura 16 – Representação de duas cavidades caóticas conectadas em série via guias ideais com N canais de propagação. Os $z_i (i = 1, 2)$ representam as cavidades caóticas e φ representa um potencial fictício.



Fonte: O autor (2021)

Uma função hipergeométrica definida em termos de um conjunto arbitrário de parâmetros, também conhecida como função hipergeométrica generalizada, é definida por (OLVER et al., 2010)

$${}_pF_{q-1}([\vec{a}], [\vec{b}], y) = \sum_k \frac{(a_1)_k (a_2)_k \dots (a_p)_k}{(b_1)_k (b_2)_k \dots (b_{q-1})_k} \frac{y^k}{k!}, \quad (4.109)$$

onde os parâmetros são representados por $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_{q-1})$. Então, através da definição representada pela equação (4.109), a função geratriz pode ser definida como

$$\Psi(\phi) = A {}_3F_2([-N, -N, -N], [-3N - 1, 1], y). \quad (4.110)$$

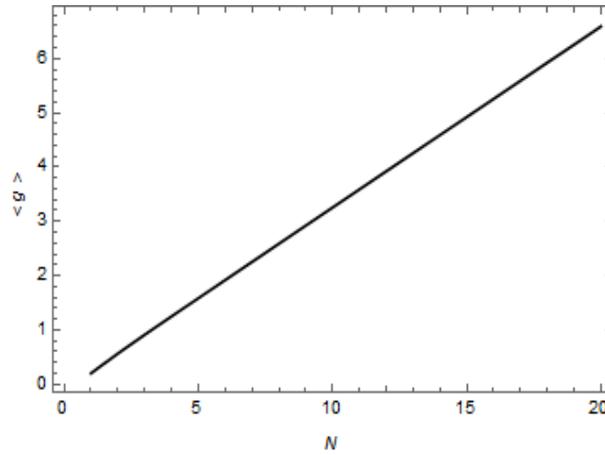
Fazendo a mudança de variáveis, $y = 1 + x$, temos

$$\Psi(\phi) = \frac{{}_3F_2([-N, -N, -N], [-3N - 1, 1], 1 + x)}{{}_3F_2([-N, -N, -N], [-3N - 1, 1], 1)}, \quad (4.111)$$

onde a constante A foi obtida usando o mesmo procedimento representado pela equação (4.83).

A relação geral para a derivada de ordem arbitrária de uma função hipergeométrica generalizada é dada por (OLVER et al., 2010)

Figura 17 – Comportamento da condutância adimensional de uma cadeia formada por duas cavidades caóticas conectadas em série via guias ideais para o caso simétrico, $N_1 = N_2 = N$.



Fonte: O autor (2021)

$$\frac{d^n}{dx^n} {}_pF_{q-1}([\vec{a}], [\vec{b}], 1+x) = \frac{\prod_{i=1}^p (a_i)_n}{\prod_{j=1}^{q-1} (b_j)_n} {}_pF_{q-1}([\vec{a} + \vec{n}], [\vec{b} + \vec{n}], 1+x), \quad (4.112)$$

onde as somas vetoriais do lado direito são definidas como

$$\vec{a} + \vec{n} = (a_1 + n, \dots, a_p + n), \quad \vec{b} + \vec{n} = (b_1 + n, \dots, b_{q-1} + n). \quad (4.113)$$

A partir da definição de derivada de funções hipergeométricas generalizadas, temos que a derivada de primeira ordem da função geratriz,

$$\frac{d}{dx} \Psi(\phi) = \frac{N^3}{3N+1} \frac{{}_3F_2([-N+1, -N+1, -N+1], [-3N, 2], 1+x)}{{}_3F_2([-N, -N, -N], [-3N-1, 1], 1)}, \quad (4.114)$$

então, conhecendo a derivada acima, podemos definir a condutância como

$$\langle g \rangle = \frac{N^3}{3N+1} \frac{{}_3F_2([-N+1, -N+1, -N+1], [-3N, 2], 1)}{{}_3F_2([-N, -N, -N], [-3N-1, 1], 1)}. \quad (4.115)$$

De acordo com a figura 17, observamos que a condutância da amostra é dada por $\langle g \rangle = N/3 + \mathcal{O}(N^0)$, onde tal expressão encontra-se em concordância com os resultados conhecidos na literatura (ALMEIDA, 2010). Portanto, a partir da função geratriz da condutância de um sistema contendo M cavidades caóticas conectadas em série, equação (4.104), podemos expressar a condutância em termos de funções hipergeométricas para o caso $M = 2$.

5 CONCLUSÃO

Nesta dissertação, abordamos a utilidade da transformação color-flavor no estudo de pontos quânticos caóticos, principalmente no cálculo da função geratriz da condutância, onde a integral sobre o ensemble de matrizes aleatórias transforma-se em integrais sobre matrizes que parametrizam o espaço coset. Para isso, consideramos apenas cavidades com simetria de reversão temporal quebrada conectadas a dois reservatórios via guias de onda ideais, ou seja, cavidades pertencentes ao ensemble circular unitário.

Dessa forma, mostramos como a transformação color-flavor é utilizada para estabelecer o mapa $U(N_T) \rightarrow S^2$ em dispositivos mesoscópicos contendo apenas uma cavidade caótica. Primeiramente, foi considerado o mapa para um sistema com um canal de propagação. Posteriormente, foi feito para o caso de números arbitrários de canais de propagação, de maneira que durante a dissertação recorreremos a forma da integral derivada pelo mapa.

Estabelecido o mapa através da transformação color-flavor, introduzimos estados coerentes a fim de reescrever a função geratriz da condutância em termos de integrais de produtos de funções de Husimi e interpretá-la como uma medida de distinguibilidade de estados quânticos, isto é, foi apresentada uma integral envolvendo a função fidelidade. Além disso, expressamos a média da condutância em termos de funções hipergeométricas e por fim, apresentamos a função geratriz da condutância de um sistema formado por um número arbitrário de cavidades caóticas conectadas em série via guias de onda ideais, onde foi considerado o caso de duas cavidades com o objetivo de obter uma expressão para a condutância.

A continuidade deste trabalho implica na possibilidade de fazer extensões do formalismo para uma rede arbitrária de pontos e na inclusão de barreiras. Além disso, é possível estudar todas as 10 classes de simetria: Wigner-Dyson, Quiral e Altland-Zirnbauer.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, F. A. G. Algoritmos numéricos de matrizes aleatórias aplicados a sistemas mesoscópicos. Universidade Federal de Pernambuco, 2010.
- BARANGER, H. U.; MELLO, P. A. Mesoscopic transport through chaotic cavities: A random s-matrix theory approach. *Phys. Rev. Lett.*, v. 73, n. 1, p. 142–145, 1994.
- BARBOSA, A. L. R. Análise diagramática para cavidades caóticas de barreira dupla: equivalência com a teoria quântica de circuitos. Universidade Federal de Pernambuco, 2005.
- BEENAKKER, C. Chaos in quantum billiards. *Synopsis for the seventh annual symposium on frontiers of Science*, 1995.
- BEENAKKER, C. W. J. Random-matrix theory of quantum transport. *Reviews of modern physics*, v. 69, n. 3, p. 731, 1997.
- BENGTSSON, I.; ZYCZKOWSKI, K. *Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006.
- BERGMANN, G. Weak anti-localization - an experimental proof for the destructive interference of rotated spin 1/2. *Solid State Communications*, v. 42, p. 815–817, 1982.
- BROUWER, P. W. *On the random-matrix theory of quantum transport*. [S.l.]: Leiden, Universit at, Diss, 1997.
- BROUWER, P. W.; BEENAKKER, C. W. J. Diagrammatic method of integration over the unitary group, with applications to quantum transport in mesoscopic systems. *Journal of Mathematical Physics*, v. 37, 1996.
- CARLIXTO, M.; PEON-NIETO, C. Husimi function and phase-space analysis of bilayer quantum hall systems at $\nu = 2/\lambda$. *arXiv:1706.04793*, 2017.
- COSTA, V.; CARVALHO, L. Representa o de um bit quântico na esfera de bloch - visualiza o em maple. *Cadernos do Ime - Série matemática*, 2005.
- DATTA, S. *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997.
- DUARTE-FILHO, G. C. Estatística de contagem de carga e teoria quântica de circuitos em sistemas híbridos metal normal-supercondutor e em cadeia de pontos quânticos. Universidade Federal de Pernambuco, 2010.
- FERRY, D. K.; GOODNICK, S. M. *Transport in Nanostructures*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997.
- HAAKE, F. *Quantum signatures of chaos*. [S.l.]: Springer, 2001.
- IMRY, Y. *Introduction to Mesoscopic Physics*. [S.l.]: Oxford University press, 2002.
- IWASAKI K; KIMURA, H. S. S.; YASHIDA, M. *From Gauss to Painlev : a modern theory of special functions*. [S.l.]: Vieweg, 1991.
- KOUWENHOVEN, L.; MARCUS, C. Quantum dots. *Physics World*, p. 35–39, 2008.

- LEE, P. A.; STONE, A. D. Universal conductance fluctuations in metals. *Phys. Rev. Lett.*, v. 55, p. 1622–1625, 1985.
- LIOU, J. J.; SCHWIERZ, F. Evolution and recent advances in rf/microwave transistors. *Journal of Telecommunications and Information Technology*, p. 99–105, 2004.
- MACEDO-JUNIOR, A. F. Propriedades universais de transporte em pontos quânticos com simetria quiral. Universidade Federal de Pernambuco, 2002.
- MACEDO-JUNIOR, A. F.; MACÊDO, A. M. S. A unified approach via a multivariate hypergeometric generating function. *International Journal of Modern Physics B*, v. 28, n. 26, p. 1450178, 2014.
- MACÊDO, A. M. S. Notas de aula: física mesoscópica.
- MAHAUX, C.; WEIDENMÜLLER, A. H. Shell-model approach to nuclear reactions. *North-Holland, Amsterdam*, 1969.
- MELLO, P. A.; KUMAR, N. *Quantum Transport in Mesoscopic Systems: Complexity and Statistical Fluctuations*. [S.I.]: Oxford University press, 2004.
- MOHANTY, P.; WEBB, R. A. Anomalous conductance distribution in quasideimensional gold wires: Possible violation of the one-parameter scaling hypothesis. *Phys. Rev. Lett.*, v. 88, p. 146601, 2002.
- MOSKALETS, M. V. *Scattering matrix approach to non-stationary quantum transport*. [S.I.]: Imperial College Press, 2012.
- NAZAROV, Y. V.; BLANTER, Y. *Quantum Transport - Introduction to Nanoscience*. [S.I.]: Cambridge University Press, 2009.
- NISHIGAKI S M; GANGARDT, D. M.; KAMENEV, A. Correlation functions of the bc calogero-sutherland model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 36, p. 3137, 2003.
- OLVER, F. W. J.; LOZIER, D. W.; BOISVERT, R. F.; CLARK, C. W. *NIST handbook of mathematical functions*. [S.I.]: Cambridge University Press, 2010.
- REULET B; BOUCHIAT, H.; MAILLY, D. "magnetoconductance, weak localization and electron-electron interactions in semi-ballistic quantum wires". *Europhys.Lett*, p. 305, 1995.
- REZENDE, S. M. *Materiais e Dispositivos Eletrônicos*. [S.I.]: Ed. Livraria da Física, 2004.
- SAKURAI, J. J. *Modern Quantum Mechanics*. [S.I.]: Addison Wesley, 1994.
- SCHLITTGEN, B.; WETTIG, T. The color-flavor transformation and lattice qcd. *arXiv:hep-lat/0208044*, 2002.
- SHACKEL, A. M. J. *Boulevard of broken symmetries: effective field theories of condensed matter*. [S.I.]: World Scientific, 2008.
- VAN HOUTEN, H.; BEENAKKER, C. Quantum point contacts: The quantization of ballistic electron transport through a constriction demonstrates that conduction is transmission. *Physics Today*, p. 22, 1996.

VAN WEES, B. J.; VAN HOUTEN, H.; BEENAKKER, C. W. J.; WILLIAMSON, J. G.; KOUWENHOVEN, L. P.; VAN DER MAREL, D.; FOXON, C. T. Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas. *Phys. Rev. Lett.*, v. 60, n. 9, p. 848, 1988.

ZHANG W M; FENG, D. H.; GILMORE, R. Coherent states: theory and some applications. *Rev. Mod. Phys.*, v. 62, p. 867, 1990.

ZIRNBAUER, M. R. Supersymmetry for systems with unitary disorder: circular ensembles. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 29, p. 7113, 1996.

ZIRNBAUER, M. R. The color-flavor transformation and a new approach to chaotic maps. *arXiv:chao-dyn/9810016*, 1998.

APÊNDICE A – TRANSFORMAÇÃO COLOR-FLAVOR FERMIÔNICA

Considerando o caso mais simples de uma integral sobre matrizes unitárias, temos que

$$I_1 = \int_0^{2\pi} da \exp(\bar{\psi}_1 e^{ia} \psi_0 + \bar{\psi}_0 e^{-ia} \psi_1), \quad (\text{A.1})$$

onde ψ_1 e ψ_0 são variáveis de Grassmann e a barra denota o conjugado complexo. Através das propriedades dessas variáveis, podemos fazer a seguinte expansão:

$$\exp(\bar{\psi}_1 e^{ia} \psi_0 + \bar{\psi}_0 e^{-ia} \psi_1) = 1 + \bar{\psi}_1 e^{ia} \psi_0 + \bar{\psi}_0 e^{-ia} \psi_1 + \frac{1}{2} (\bar{\psi}_1 e^{ia} \psi_0 + \bar{\psi}_0 e^{-ia} \psi_1)^2, \quad (\text{A.2})$$

e ao calcular o termo quadrado, temos que

$$(\bar{\psi}_1 e^{ia} \psi_0 + \bar{\psi}_0 e^{-ia} \psi_1)^2 = \bar{\psi}_1 \psi_0 \bar{\psi}_0 \psi_1 + \bar{\psi}_0 \psi_1 \bar{\psi}_1 \psi_0 = 2\bar{\psi}_1 \psi_0 \bar{\psi}_0 \psi_1. \quad (\text{A.3})$$

Dessa forma, o resultado da integral é definido por

$$I_1 = \int_0^{2\pi} da + \int_0^{2\pi} da \bar{\psi}_1 \psi_0 \bar{\psi}_0 \psi_1 = 2\pi(1 + \bar{\psi}_1 \psi_0 \bar{\psi}_0 \psi_1). \quad (\text{A.4})$$

Considerando agora uma integral sobre variáveis complexas:

$$I_2 = k \int \frac{dz dz^*}{(1 + z^* z)^3} \exp(z \bar{\psi}_1 \psi_1 - z^* \bar{\psi}_0 \psi_0), \quad (\text{A.5})$$

e fazendo a expansão da exponencial

$$\exp(z \bar{\psi}_1 \psi_1 - z^* \bar{\psi}_0 \psi_0) = 1 + z \bar{\psi}_1 \psi_1 - z^* \bar{\psi}_0 \psi_0 + \frac{1}{2} (z \bar{\psi}_1 \psi_1 - z^* \bar{\psi}_0 \psi_0)^2, \quad (\text{A.6})$$

onde o termo quadrado é dado por

$$(z \bar{\psi}_1 \psi_1 - z^* \bar{\psi}_0 \psi_0)^2 = -z z^* (\bar{\psi}_1 \psi_1 \bar{\psi}_0 \psi_0 + \bar{\psi}_0 \psi_0 \bar{\psi}_1 \psi_1) = 2z z^* \bar{\psi}_1 \psi_0 \bar{\psi}_0 \psi_1, \quad (\text{A.7})$$

então, a integral transforma-se em

$$I_2 = k \int \frac{dz dz^*}{(1 + z^* z)^3} + 2k \int \frac{dz dz^* z z^*}{(1 + z^* z)^3} \bar{\psi}_1 \psi_0 \bar{\psi}_0 \psi_1. \quad (\text{A.8})$$

A variável complexa sendo $z = r e^{i\theta}$, então

$$I_2 = 2ik \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{r dr}{(1 + r^2)^3} + 2ik \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{r^3 dr}{(1 + r^2)^3} \bar{\psi}_1 \psi_0 \bar{\psi}_0 \psi_1, \quad (\text{A.9})$$

onde ao escolher $k = 2/i$, temos que

$$I_2 = 2\pi(1 + \bar{\psi}_1\psi_0\bar{\psi}_0\psi_1). \quad (\text{A.10})$$

Portanto, por meio dos resultados das integrais I_1 e I_2 , podemos definir a seguinte relação:

$$\int_0^{2\pi} da \exp(\bar{\psi}_1 e^{ia}\psi_0 + \bar{\psi}_0 e^{-ia}\psi_1) = k \int \frac{dzdz^*}{(1+z^*z)^3} \exp(z\bar{\psi}_1\psi_1 - z^*\bar{\psi}_0\psi_0). \quad (\text{A.11})$$