



UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS e
MATEMÁTICA

REINALDO MANOEL DA SILVA

**A INSERÇÃO DA ÁLGEBRA NOS ANOS INICIAIS COM ÊNFASE NO
PENSAMENTO ALGÉBRICO: uma análise sob a ótica da Teoria Antropológica
do Didático**

Caruaru

2022

REINALDO MANOEL DA SILVA

**A INSERÇÃO DA ÁLGEBRA NOS ANOS INICIAIS COM ÊNFASE NO
PENSAMENTO ALGÉBRICO: uma análise sob a ótica da Teoria Antropológica
do Didático**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Área de concentração: Educação em Ciências e Matemática

Orientador: Prof. Dr. Edelweis José Tavares Barbosa

Caruaru

2022

Catálogo na fonte:
Bibliotecário – Raul César de Melo - CRB/4 - 1735

S586i Silva, Reinaldo Manoel da.
A inserção da álgebra nos anos iniciais com ênfase no pensamento algébrico: uma análise sob a ótica da teoria antropológica do didático / Reinaldo Manoel da Silva. – 2022.
136 f.; il.: 30 cm.

Orientador: Edelweis José Tavares Barbosa.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Mestrado em Educação em Ciências e Matemática, 2022.
Inclui Referências.

1. Álgebra. 2. Livros didáticos. 3. Base Nacional Comum Curricular. I. Barbosa, Edelweis José Tavares (Orientador). II. Título.

CDD 271.12 (23. ed.)

UFPE (CAA 2022-009)

REINALDO MANOEL DA SILVA

**A INSERÇÃO DA ÁLGEBRA NOS ANOS INICIAIS COM ÊNFASE NO
PENSAMENTO ALGÉBRICO: uma análise sob a ótica da Teoria Antropológica
do Didático**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Área de concentração: Educação em Ciências e Matemática

Aprovada em: 22/03/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Edelweis José Tavares Barbosa (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Fernando Emílio de Almeida (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Valdir Bezerra dos Santos Júnior (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

RESUMO

O objetivo geral desta pesquisa é analisar, à luz da Teoria Antropológica do Didático (TAD) a BNCC e as praxeologias matemáticas presentes nas duas coleções mais vendidas no Plano Nacional do Livro Didático- PNLD (2019) buscando indícios de tarefas que possibilitem o trabalho com o pensamento algébrico dos estudantes nos anos iniciais. Analisamos a Base Nacional Comum Curricular, a BNCC (BRASIL, 2017). Em seguida duas coleções dos anos iniciais usando como referencial teórico a noção de praxeologia que faz parte da teoria antropológica do didático (TAD) de Yves Chevallard (1999). A análise foi realizada seguindo as dez subcategorias criadas por Blanton e Kaput (2005) para o pensamento algébrico. Percebemos, na análise, que ambas as coleções apresentam indícios do trabalho com o pensamento algébrico ao longo dos anos. Entre as situações apresentadas estão o trabalho com a equivalência explorando o aspecto relacional do sinal de igual, descoberta de regularidades em sequências recursivas numéricas e geométricas, o cálculo de valores desconhecidos, o trabalho com a proporcionalidade, estruturas das operações e suas propriedades. Há uma interrelação entre as outras unidades temáticas e Álgebra ao tratar situações promissoras do pensamento algébrico. Algumas carências foram notadas como: tarefas que tratassem o número de forma algébrica. Relações Funcionais buscando a determinação de uma lei de formação e a descobertas de termos mais distantes na abordagem das sequências numéricas recursivas.

Palavras-chave: pensamento algébrico; teoria antropológica do didático; BNCC; livro didático.

ABSTRACT

The general objective of this research is to analyze, in the light of the Anthropological Theory of Didactics (TAD), the BNCC and the mathematical praxeologies present in the two best-selling collections in the Plano Nacional do Livro Didático - PNLD (2019) seeking evidence of tasks that make it possible to work with students' algebraic thinking in the early years. We analyzed the National Curricular Common Base, the BNCC (BRASIL, 2017). Then two collections from the early years using as a theoretical framework the notion of praxeology that is part of Yves Chevallard's (1999) anthropological theory of the didactic (ADT). The analysis was carried out following the ten subcategories created by Blanton and Kaput (2005) for algebraic thinking. We noticed, in the analysis, that both collections show evidence of work with algebraic thinking over the years. Among the situations presented are working with equivalence exploring the relational aspect of the equal sign, finding regularities in numerical and geometric recursive sequences, calculating unknown values, working with proportionality, structures of operations and their properties. There is an interrelationship between the other thematic units and Algebra when dealing with promising situations of algebraic thinking. Some shortcomings were noted such as: tasks that treated the number algebraically. Functional Relations seeking the determination of a formation law and the discovery of more distant terms in the approach of recursive numerical sequences.

Keywords: algebraic thinking; anthropological didactic theory; BNCC; textbook.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Zolan's Triangle Puzzle	46
Figura 2 –	Configuração da mesa trapezoidal.....	47
Figura 3 –	Atividade de classificação de números pares e ímpares a partir da observação de sua estrutura.....	62
Figura 4 –	Atividade de conjectura de somas e produtos de números pares e ímpares.....	63
Figura 5 –	Atividade de investigação da comutatividade da adição.....	65
Figura 6 –	Atividade de investigação da comutatividade da multiplicação.....	65
Figura 7 –	Atividade de investigação do elemento neutro da adição.....	66
Figura 8 –	Atividade de investigação do elemento neutro da multiplicação.....	66
Figura 9 –	Atividade de investigação da propriedade associativa da adição.....	67
Figura 10 –	Atividade de investigação da associatividade da multiplicação	67
Figura 11 –	Aplicação da propriedade associativa da adição na resolução de cálculos.....	69
Figura 12 –	Aplicação da propriedade associativa da multiplicação na resolução de cálculos.....	70
Figura 13 –	Exemplos de diferentes adições e subtrações com resultados iguais ..	72
Figura 14 –	Exemplo de diferentes multiplicações que resulte no mesmo valor (item f).....	72
Figura 15 –	Exemplo de proposição de diferentes adições que resultem no mesmo resultado.....	73
Figura 16 –	Exemplo de atividade apresentando diferentes subtrações que resultem em resultados iguais.....	74
Figura 17 –	Diferentes multiplicações que resultam num mesmo produto.....	74
Figura 18 –	Exemplo de estratégia para conservação do resultado de uma soma ou diferença.....	76
Figura 19 –	Exemplo de manutenção da igualdade quando somamos ou adicionamos o mesmo valor.....	78
Figura 20 –	Manutenção da igualdade quando multiplicamos ou dividimos ambos os membros pelo mesmo valor.....	79
Figura 21 –	Atividade de justificação da equivalência em balanças de dois pratos quando adiciona em ambos os lados a mesma quantidade.....	81
Figura 22 –	Atividade de justificação da equivalência em balanças de dois pratos	

	quando se subtrai em ambos os lados a mesma quantidade.....	82
Figura 23 –	Atividade de justificação da equivalência em balanças de dois pratos quando se multiplica ou divide ambos os lados pelo mesmo valor.....	83
Figura 24 –	Exemplo de identificação de sentença que representa uma equivalência.....	84
Figura 25 –	Exemplo de situação de representação de uma equivalência.....	85
Figura 26 –	Exemplo de determinação do valor unitário da massa de objetos numa dada equivalência.....	86
Figura 27 –	Exemplo de determinação da massa unitária de um objeto a partir do conhecimento da massa do outro.....	86
Figura 28 –	Exemplo de determinação de valor desconhecido numa adição ou subtração.....	90
Figura 29 –	Exemplo de determinação de valores desconhecidos numa multiplicação	90
Figura 30 –	Exemplo de determinação do valor desconhecido numa divisão.....	91
Figura 31 –	Situação-problema envolvendo o cálculo de parcelas desconhecidas numa adição e do subtraendo numa subtração.....	93
Figura 32 –	Situação-problema envolvendo o cálculo desconhecido do minuendo numa subtração.....	93
Figura 33 –	Situação-problema envolvendo o cálculo do valor desconhecido numa multiplicação e divisão.....	94
Figura 34 –	Situação-problema envolvendo determinação de valores desconhecidos usando adição e subtração.....	95
Figura 35 –	Situação-problema envolvendo determinação de valores desconhecidos usando multiplicação e divisão.....	95
Figura 36 –	Situação de cálculo de valores desconhecidos em quadrados mágicos.....	98
Figura 37 –	Exemplo de situação-problema que remete a ideia de sistema de equações.....	100
Figura 38 –	Exemplo de cálculo de relação proporcional não unitária usando a multiplicação.....	101
Figura 39 –	Exemplo de cálculo de proporcionalidade usando a divisão.....	102
Figura 40 –	Exemplo de situação de proporcionalidade usando a divisão de quantidades em partes desiguais.....	103
Figura 41 –	Exemplo de proporcionalidade no contexto de receitas culinárias.....	104
Figura 42 –	Exemplo de atividade de representação de elementos ausentes em	

	sequência repetitiva.....	107
Figura 43 –	Atividade de representação de elementos ausentes no meio de sequência repetitiva.....	107
Figura 44 –	Atividade de determinação de elemento ausente em sequência repetitiva a partir de sua posição.....	108
Figura 45 –	Atividade de determinação de elementos ausentes em sequência recursiva aditiva de figuras e objetos.....	108
Figura 46 –	Determinação de elementos ausentes em sequência recursiva multiplicativa de figuras e objetos.....	109
Figura 47 –	Determinação de elementos ausentes em sequência recursiva aditiva e subtrativa.....	110
Figura 48 –	Atividade de determinação de elementos ausentes em sequência recursiva aditiva com elementos no início e final da sequência.....	110
Figura 49 –	Atividade de determinação de elementos ausentes em sequência recursiva multiplicativa com ideia de múltiplos.....	111
Figura 50 –	Exemplo de sequência recursiva com termo posterior sendo o triplo do anterior.....	111
Figura 51 –	Exemplo de construção de sequência recursiva aditiva e subtrativa.....	115
Figura 52 –	Exemplo de sequência recursiva com termo posterior sendo o dobro do anterior.....	115
Figura 53 –	Construção de sequência recursiva aditiva sem conhecimento do primeiro termo.....	116
Figura 54 –	Construção de uma sequência com números e padrão livres.....	117
Figura 55 –	Exemplo de descoberta de regra ou padrão em sequência repetitiva...	118
Figura 56 –	Descoberta de regra ou padrão em sequência recursiva aditiva e subtrativa.....	119
Figura 57 –	Exemplo de descrição de regra ou padrão em sequência recursiva aditiva com ideia de múltiplo.....	120
Figura 58 –	Exemplo de sequência cujo padrão de formação não é fixo.....	120
Figura 59 –	Determinação de quantidades numa sequência recursiva em função de outro elemento da sequência.....	121
Figura 60 –	Exemplo de justificação de padrão em sequência.....	122
Figura 61 –	Justificação da igualdade de sequências a partir da observação dos padrões de cada uma.....	123

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 –	Categorias da Álgebra por Blanton e Kaput (2005)	31
Quadro 2 –	Habilidades ligadas à categoria A.....	51
Quadro 3 –	Habilidades ligadas à categoria B.....	52
Quadro 4 –	Habilidades ligadas à categoria C.....	52
Quadro 5 –	Habilidades ligadas à categoria E	54
Quadro 6 –	Habilidades ligadas à categoria F.....	55
Quadro 7 –	Habilidades ligadas à categoria G.....	55
Quadro 8 –	Habilidades ligadas à categoria H	56
Quadro 9 –	Habilidades ligadas à categoria I	57
Quadro 10 –	Habilidades ligadas à categoria J.....	58
Quadro 11 –	Quantidade de Habilidades da Unidade Temática Álgebra ligadas às categorias de Blanton e Kaput (2005).....	59
Quadro 12 –	Distribuição das tarefas de classificação de números pares e ímpares.....	63
Quadro 13 –	Distribuição das tarefas de investigação das propriedades da adição e multiplicação	68
Quadro 14 –	Distribuição das tarefas de aplicação das propriedades das operações na resolução de cálculos	70
Quadro 15 –	Distribuição das tarefas de determinação de valores que tornam uma igualdade verdadeira.....	75
Quadro 16 –	Distribuição das tarefas de determinação de valores que tornam uma igualdade verdadeira.....	77
Quadro 17 –	Distribuição das tarefas de Reconhecimento da manutenção da relação existente entre dois membros de uma igualdade.....	80
Quadro 18 –	Distribuição das atividades que abordam equivalências usando recurso da balança.....	87
Quadro 19 –	Distribuição das tarefas de cálculo de valores desconhecidos nas operações.....	91
Quadro 20 –	Distribuição das tarefas envolvendo cálculo de valores desconhecidos em contextos de situações-problemas.....	96
Quadro 21 –	Distribuição das tarefas envolvendo cálculo de valores desconhecidos em quadrados mágicos.....	98
Quadro 22 –	Distribuição das tarefas que utilizam a ideia de proporcionalidade.....	105
Quadro 23 –	Distribuição das tarefas de representação de elementos ausentes	

	em sequências.....	112
Quadro 24 –	Distribuição das tarefas de construção de sequências recursivas.....	117
Quadro 25 –	Distribuição das tarefas de descrição de padrões em sequências.....	123
Quadro 26 –	Quantidade de tarefas agrupadas por conteúdo das coleções analisadas.....	125

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO E REVISÃO DE LITERATURA.....	13
1.1	INTRODUÇÃO E PROBLEMÁTICA DA PESQUISA.....	13
1.2	OBJETIVOS.....	17
1.2.1	Objetivo geral.....	17
1.2.2	Objetivos específicos.....	17
1.3	PESQUISAS CORRELATAS.....	18
2	A INTRODUÇÃO DA ÁLGEBRA OU PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS.....	22
2.1	ARITMÉTICA VERSUS ÁLGEBRA NOS ANOS INICIAIS.....	22
2.2	A ABORDAGEM DA ÁLGEBRA NOS ANOS INICIAIS PRESENTES EM ALGUNS DOCUMENTOS.....	25
2.3	O PENSAMENTO ALGÉBRICO A PARTIR DE BLANTON E KAPUT 2005...	28
2.3.1	Aspectos centrais do pensamento algébrico: aritmética generalizada e pensamento funcional.....	30
2.4	A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO E SEUS ELEMENTOS.....	34
2.5	O LIVRO DIDÁTICO VISTO COMO UMA INSTITUIÇÃO E POR QUE ANALISÁ-LO?.....	37
3	PERCURSO METODOLÓGICO.....	39
3.1	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	39
3.2	AS ETAPAS DA PESQUISA.....	39
3.3	AS COLEÇÕES PARA ANÁLISE E OS CRITÉRIOS DE ESCOLHA.....	40
3.4	A NOÇÃO DE PRAXEOLOGIA.....	41
3.5	CONHECENDO MELHOR AS CATEGORIAS DE ANÁLISE.....	43
3.5.1	Categorias do bloco aritmética generalizada.....	43
3.5.2	Categorias do bloco pensamento funcional.....	46
4	ANÁLISE DA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC).....	50
4.1	ANÁLISE DA BNCC A PARTIR DAS CATEGORIAS DE BLANTON E KAPUT (2005).....	50
4.1.1	Categoria A: explorar propriedades e relações de números inteiros.....	50
4.1.2	Categoria B: explorando propriedades de operações com números inteiros.....	52
4.1.3	Categoria C: explorando a igualdade como expressão de uma relação entre quantidades.....	52
4.1.4	Categoria D: tratar o número algebricamente.....	53

4.1.5	Categoria E: encontrar valores desconhecidos.....	54
4.1.6	Categoria F: simbolizar quantidades e operar com as expressões simbólicas.....	54
4.1.7	Categoria G: representar dados graficamente.....	55
4.1.8	Categoria H: descobrir relações funcionais.....	56
4.1.9	Categoria I: prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos.....	57
4.1.10	Categoria J: identificar e descrever padrões numéricos e geométricos..	57
5	ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DAS COLEÇÕES	61
5.1	TIPOS DE TAREFAS QUE FAZEM PARTE DA CATEGORIA A.....	61
5.2	TIPOS DE TAREFAS QUE FAZEM PARTE DA CATEGORIA B.....	64
5.3	TIPOS DE TAREFAS QUE FAZEM PARTE DA CATEGORIA C.....	71
5.4	TIPOS DE TAREFAS QUE FAZEM PARTE DA CATEGORIA D.....	88
5.5	TIPOS DE TAREFAS QUE FAZEM PARTE DA CATEGORIA E (ENCONTRAR VALORES DESCONHECIDOS)	88
5.6	TIPOS DE TAREFAS QUE FAZEM PARTE DA CATEGORIA F (SIMBOLIZAR QUANTIDADES E OPERAR COM AS EXPRESSÕES SIMBÓLICAS)	99
5.7	TIPOS DE TAREFAS QUE FAZEM PARTE DA CATEGORIA G.....	100
5.8	TIPOS DE TAREFAS QUE FAZEM PARTE DA CATEGORIA H (DESCOBRIR RELAÇÕES FUNCIONAIS)	100
5.9	TIPOS DE TAREFAS QUE FAZEM PARTE DA CATEGORIA I E J.....	106
5.10	QUANTIDADE DE ATIVIDADES POR CATEGORIAS OU CONTEÚDO.....	124
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	127
	REFERÊNCIAS.....	133

1 INTRODUÇÃO E REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo fazemos uma introdução acerca da nossa temática e para isto apresentamos algumas pesquisas que serviram de embasamento para a construção da nossa pergunta focal. Não temos a pretensão de expor toda a nossa revisão bibliográfica, mas trazer ao leitor discussões já realizadas acerca dela. São apresentados os objetivos geral e específico da pesquisa e por fim a organização da dissertação por capítulos.

1.1 INTRODUÇÃO E PROBLEMÁTICA DA PESQUISA

Tradicionalmente, no currículo brasileiro, o ensino de Álgebra era iniciado apenas a partir do 8º ano, antiga 7ª série. Ensino este, na maioria das vezes, apresentando práticas de sala de aula centrada no modelo tradicional de explicação pelo professor e treino pelos alunos. Além disso com um foco no simbolismo e muitas regras o chamado transformismo algébrico. Isto, segundo Canavarro (2007) não é um contexto favorável ao desenvolvimento do pensamento algébrico. E nos Anos Iniciais, que Álgebra vem sendo apresentada?

No contexto dos anos iniciais por muito tempo prevalecera a ideia de que nesta fase de ensino o aluno deveria aprender apenas a Aritmética e a Álgebra apenas nos anos finais. Seria suficiente que os alunos dominassem bem as técnicas de resolução das quatro operações e as aplicassem na resolução de problemas. Esta abordagem da matemática configura como separação e hierarquização entre a Aritmética e a Álgebra (Lins e Gimenes, 2001).

Há, no entanto, pesquisadores que vão de encontro a este modelo; E defendem a possibilidade de um trabalho concomitante entre a Álgebra e a Aritmética como Lins e Gimenes (2001), Carreher *et.al* (2006), Blanton e Kaput (2005), Canavarro (2007). Para estes, a Álgebra não precisa ser apresentada apenas quando os alunos já dominassem a Aritmética, mas que a própria Aritmética pode funcionar como porta de entrada para se trabalhar a Álgebra contribuindo para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos desde cedo.

Porém, muitas são as questões que se levantam acerca do ensino da Álgebra nos anos iniciais. Várias são as inquietações de educadores a respeito deste trabalho. Trata-se de uma orientação nova no Brasil que de certa forma carece de uma formação adequada para se trabalhar o aspecto da inserção da álgebra nos anos iniciais e mais ainda sob a perspectiva do desenvolvimento do pensamento algébrico.

Como aponta Kieran (2017) esta discussão no Brasil ocorre de forma embrionária a se comparar com outros países. Se formos olhar, por exemplo, o currículo da província de Quebec, a Álgebra e o trabalho com pensamento algébrico ocorrem desde as primeiras séries do ensino fundamental. São trabalhados desde cedo temas como equivalência, valores desconhecidos, proporção entre outros.

No Brasil, os documentos oficiais mais antigos não deixam clara a pretensão do ensino da Álgebra e o tratamento com o pensamento algébrico nos anos iniciais. Os primeiros indícios desta pretensão vêm acontecer de forma mais acentuada apenas em 2017 com a implantação da Base Nacional Comum Curricular, a BNCC (BRASIL, 2017).

Pela primeira vez, no cenário brasileiro, um documento normativo apresenta as habilidades que os alunos precisam adquirir ao longo dos cinco primeiros anos de sua escolaridade no que se refere à unidade temática da Álgebra. A BNCC orienta que o ensino da Álgebra, nos anos iniciais, deve cumprir a finalidade de [...] “desenvolver nas crianças um tipo especial de pensamento: o pensamento algébrico” (Brasil, 2017).

O professor será, portanto, a peça fundamental para que este objetivo seja alcançado. Pois, é ele que será o responsável pelas escolhas de atividades que serão propostas aos alunos. Como apontam Blanton e Kaput (2005) é necessário que os professores “desenvolvam olhos e ouvidos algébricos como uma nova forma de olhar para a Matemática que ensinam”. (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 440, tradução nossa).

No entanto pesquisa como a Jungbluth (2020) com o objetivo de investigar os conhecimentos de 98 professores dos Anos Iniciais sobre Álgebra e seu ensino

constatou que 74,5% destes não se sentiam preparados para planejar e desenvolver atividades com contexto algébrico para esta fase de escolaridade.

Ferreira (2017) na sua pesquisa também constatou pouca familiaridade, por parte dos professores dos anos iniciais, para trabalhar com conteúdo específicos da Álgebra. A autora relaciona essa dificuldade ao fato que os professores dos anos Iniciais possuem um conhecimento mais voltado para o saber fazer em detrimento do conhecimento específico matemático do conteúdo a ser ensinado.

Freire (2011) buscou investigar o desenvolvimento de conceitos algébricos, por 11 professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, utilizando atividades manipulativas e recursos digitais numa oficina explorando conceitos de equações, inequações, relação entre quantidades desconhecidas, equivalência, pensamento relacional e o uso de incógnitas em atividades voltadas para os anos iniciais. As observações feitas foram que os professores apresentaram dificuldades para entender certos conceitos algébricos.

Segundo Magina, Oliveira e Merlini (2018) é preciso que os professores dos anos iniciais sejam preparados para entender e implantar efetivamente o currículo trabalhando com a temática do pensamento algébrico nas suas turmas. E apontam que muitas das vezes estes não se sentem preparados para realizar tal tarefa. Trata-se de uma temática nova que vem ganhando espaço ao longo dos anos no currículo brasileiro.

Para Nóbrega, Ribeiro e Silva (2017) alguns professores ainda insistem em ensinar os conteúdos matemáticos da forma que aprenderam. Logo, acabam perpetuando o ensino focado nas quatro operações de forma mecânica. Aqui percebemos o quanto o contexto da concepção de ensino trazida pelos professores ao longo do tempo influencia na sua metodologia.

Muitas vezes, os professores questionam-se se é possível trabalhar Álgebra com foco no pensamento algébrico com crianças nesta fase sem ainda dominar a linguagem simbólica. Há da parte deles um cenário de inquietação por terem tido cursos de formação que lhe dessem suporte para trabalhar com esta temática: o pensamento algébrico.

As pesquisas a seguir apontam que é possível que as crianças mesmo não dominando a linguagem simbólica já são capazes de manifestarem esta forma especial de pensar (pensamento algébrico) ao serem colocadas em frente às situações que tenham este objetivo.

Silva (2012) ao investigar 35 crianças do 5º ano constatou que ao resolverem determinadas tarefas estas tiveram condições sim de desenvolverem aspectos relacionados ao pensamento algébrico, mesmo não apresentando uma linguagem simbólica algébrica.

Fernandes (2014) ao analisar resoluções dos alunos em questões retiradas da prova Brasil constatou que os alunos apresentavam indícios do pensamento algébrico mesmo antes de ter contato com a linguagem algébrica. Entre as características observadas nos alunos foi o fato de realizarem certas generalizações.

Além da formação continuada outro elemento muito importante que vem auxiliar o professor na sua jornada é o livro didático. Este instrumento, algumas vezes, constitui o principal recurso didático utilizado pelo professor.

Segundo Bittar (2017) no livro didático estão dispostas as organizações matemáticas e orientações didáticas, os tipos de tarefas que se espera que o aluno possa resolver. Neste é possível encontrarmos as intenções e concepções trazidas pelos seus autores que, segundo a pesquisadora, acabam influenciando na forma como o professor ver e aborda os conteúdos na sala de aula.

Nos indagamos a respeito de algumas questões: como estão dispostas as atividades presentes nos livros didáticos destes professores? São estas potencializadoras para a promoção do pensamento algébrico? De qual forma isso pode ocorrer?

Nossa intenção é com a realização da análise praxeológica dos livros didáticos das duas coleções com maior representatividade no Plano Nacional do Livro Didático - PNLD (2019-2022) identificarmos atividades que se apresentem como potencializadoras do trabalho com o pensamento algébrico e de certa forma sirva de norte para os professores. Para a análise tanto das coleções usamos a

noção de praxeologia proposta pela Teoria antropológica do didática (TAD) e as categorias de pensamento algébrico propostas por Blanton e Kaput (2005).

Esperamos com esta pesquisa contribuir para o conhecimento de professores dos anos iniciais, coordenadores pedagógicos e estudantes de licenciatura de matemática e de pedagogia acerca da inserção da Álgebra nos anos iniciais e o trabalho com o pensamento algébrico. Temos a pretensão de levar este público a entender a possibilidade de um trabalho que use a Aritmética como porta de entrada para a Álgebra e o pensamento algébrico e não as coloquem como áreas impossíveis de serem entrelaçadas. A seguir elencaremos os nossos objetivos com esta pesquisa bem como a revisão de literatura.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

Analisar, à luz da Teoria Antropológica do Didático, a BNCC e as praxeologias matemáticas presentes nas duas coleções mais vendidas no PNLD (2019) buscando indícios de tarefas que possibilitem o trabalho com o pensamento algébrico dos estudantes nos anos iniciais.

1.2.2 Objetivos específicos

- Apresentar algumas ideias de pensamento algébrico contidas em alguns documentos oficiais que norteiam a educação brasileira e de Pernambuco;
- Relacionar as habilidades descritas na BNCC às ideias que influenciam na construção do pensamento algébrico;
- Realizar a análise praxeológica das coleções identificando atividades que apresentam indícios do trabalho com pensamento algébrico conforme Blanton e Kaput (2005);
- Comparar as praxeologias apresentadas nas coleções analisadas usando como suporte os referenciais adotados.

A presente dissertação está organizada, portanto em seis capítulos. No capítulo 1 nos centramos em apresentar a nossa revisão de literatura bem como a

introdução e os objetivos da pesquisa. No capítulo 2 trazemos as ideias de pensamento algébrico Blanton e Kaput (2005) e a noção de praxeologia, elemento importante de nossa análise que faz parte da Teoria Antropológica do Didático. No capítulo 3 expomos o percurso metodológico da nossa pesquisa.

Nos capítulos 4 e 5 realizamos as nossas análises. Achamos por bem dividir a análise em dois capítulos: no capítulo 4 fazemos uma breve análise da BNCC relacionando as habilidades com as categorias propostas por Blanton e Kaput (2005) e no capítulo 5 fazemos a análise praxeológica das coleções. Por último encerramos com as nossas considerações acerca da pesquisa realizada.

1.3 PESQUISAS CORRELATAS

Para nossa revisão de literatura adotamos como escolhas artigos publicados em revistas, Anais de Eventos, dissertações e teses no Banco Digital de Teses e Dissertações e em e-books. Buscamos trabalhos que pesquisam acerca do pensamento algébrico, sobretudo aqueles voltados para os Anos Iniciais e que apresentasse como foco análise de materiais didáticos. Usamos como palavra-chave Pensamento Algébrico e como condição de filtro que ela estivesse presente no título.

Foram lidos os resumos de cada trabalho e selecionados aqueles que atendessem aos critérios. Inicialmente constatamos que 61 trabalhos apenas 16, ou seja, 26,2% se referiam aos anos iniciais. Destas 16 pesquisas 10 tinham como foco o aluno, 03 a formação de professores e 03 análises de materiais didáticos. Essa ausência de trabalho justifica a nossa escolha em pesquisar essa etapa de ensino.

Os nossos resultados convergem com aqueles encontrados por Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2018) quando dizem que as pesquisas acerca do Pensamento Algébrico, nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, “têm se voltado mais para o aluno que aprende do que para o professor que ensina”.

Percebemos desta análise que a pesquisa voltada para os materiais didáticos acerca do ensino da álgebra nos anos iniciais, sobretudo o livro didático, ainda é bem restrita. O que configura a importância da nossa Pesquisa para o meio

acadêmico. Entre os trabalhos voltados para análise de materiais didáticos destacamos os trabalhos de Bitencourt (2018), Lima (2018) e Favero (2020).

Bitencourt (2018) pesquisou como duas coleções do PNLD (2016) abordam o pensamento algébrico sob o ponto de vistas de três categorias: i) da sequência; ii) da equivalência; e iii) da relação. Além da utilização das três categorias citadas para análise a autora classifica cada tarefa em numérica ou pictórica. A conclusão do trabalho foi que os livros didáticos analisados apresentaram atividades que contemplam as três categorias analisadas se aproximando das orientações curriculares, inclusive até da BNCC.

Lima (2018) investigou como o pensamento algébrico é abordado no Ciclo de Alfabetização que compreende os alunos do 1º ao 3º ano a partir da análise de dois documentos oficiais: a BNCC e as orientações Curriculares de Matemática para os Anos Iniciais do estado de São Paulo (OCMAI). A análise ocorreu a partir de três categorias: i) em relação à estrutura do documento, ii) em relação à abordagem do Pensamento Algébrico nos demais eixos da Matemática e iii) quais os conceitos abordados apresentam indícios do pensamento algébrico.

O autor identificou certa aproximação entre a BNCC e as categorias da *Early Algebra*. Nas orientações (OCMAI) o trabalho com o Pensamento Algébrico apresenta-se mais acentuado mostrando a importância deste trabalho desde os Anos Iniciais. Neste último documento o trabalho com este tipo de Pensamento se apresenta de forma desarticulada com os outros eixos da matemática.

Outro trabalho que encontramos relevância para o nosso foi a pesquisa de Favero (2020) intitulada “As mudanças geradas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em uma coleção de livros didáticos para o ciclo de alfabetização na abordagem do pensamento algébrico”. O principal objetivo da pesquisa foi comparar as praxeologias, segundo Chevallard, na abordagem do pensamento algébrico de duas edições de uma mesma coleção de livros didáticos para o ciclo da alfabetização sendo uma edição anterior a BNCC e a outra orientada pelo documento.

Foram analisadas a parte da BNCC referente aos anos iniciais tendo como referencial as categorias do pensamento algébrico propostas por Blanton e Kaput; e em seguida as atividades das duas edições da mesma coleção de livros por meio da organização praxeológica de Chevallard (1999) que propiciou condições de comparar as tarefas, as técnicas e os discursos tecnológico-teórico das atividades, à luz das categorias de Blanton e Kaput.

A análise mostrou que houve uma reorganização nas coleções e que diversas tarefas passaram a ser mais bem distribuídas ao longo dos três anos. No entanto, a maioria das categorias sofreu diminuições, abrindo espaço para um trabalho mais intencional, como no caso de sequências, incluindo a descrição de regras de formação e criação de sequências; e com a igualdade, propondo mais atividades em que há explicitamente a utilização do sinal de igualdade, além de abordar, inclusive, verificação e justificativa de igualdade, com um caráter mais estrutural e argumentativo.

A autora pode perceber que as abordagens concernentes ao pensamento algébrico foram ampliadas, no entanto, abrem uma preocupação: o predomínio de sequências e igualdade, com as características do sistema de numeração decimal — três assuntos mais abordados na coleção atual — reduzindo a presença de outros contextos, igualmente importantes.

Vale destacar que esta pesquisa ocorrera quando a BNCC ainda não tinha sido homologada. Portanto, algumas lacunas ou sugestões são deixadas pela autora como a necessidade de estender a análise para as turmas do 4º e 5º anos do Ensino Fundamental e a realização da análise praxeológica utilizando coleções diferentes e não aquela do mesmo autor.

Assim a nossa pesquisa aborda pontos ou lacunas que não foram respondidas na pesquisa anterior. Trabalharemos com a análise praxeológica de duas coleções diferentes e contemplando todos os anos Iniciais (1º ao 5º ano) do Ensino Fundamental. Esperamos alargar o leque de conclusões e descobertas quando se tratando com coleções diferentes e agora no contexto de BNCC já homologada e publicada.

Neste capítulo apresentamos a introdução da nossa pesquisa juntamente com algumas pesquisas correlatas. Apresentamos então os objetivos da pesquisa e justificamos em breves palavras a nossa escolha pela análise do livro didático. Vimos o quanto novo e desafiador é o trabalho com a Álgebra nos anos iniciais sobretudo na perspectiva do pensamento algébrico.

O próximo capítulo será dedicado a falar sobre o contexto de ensino da Álgebra nos anos iniciais sob a perspectiva do desenvolvimento do pensamento algébrico. Para isto falaremos acerca deste tipo de pensamento sob a visão de alguns autores de forma especial Blanton e Kaput (2005). Serão apontados pontos de vista de alguns autores sob a relação existente entre a Aritmética e Álgebra. Como vem sendo debatido este tipo de pensamento no Brasil e outros países.

2 A INTRODUÇÃO DA ÁLGEBRA OU PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS

Neste capítulo apresentamos elementos que evidenciam a importância da inserção da Álgebra desde os anos iniciais e a importância de se usar a Aritmética como a primeira forma de generalização e consequentemente o desenvolvimento do pensamento algébrico. Apresentamos as características deste tipo de Pensamento na concepção de Blanton e Kaput (2005) e quando possível relacionamos com as de outros autores. Focamos nas duas primeiras formas de generalizações: a aritmética generalizada e o Pensamento Funcional por fazerem parte dos anos iniciais. Buscamos mostrar como o pensamento algébrico vem sendo discutido em alguns documentos oficiais.

2.1 ARITMÉTICA VERSUS ÁLGEBRA NOS ANOS INICIAIS

Tradicionalmente o ensino da Álgebra acontecera nos anos finais enquanto que da Aritmética nos anos iniciais. Por muito tempo e até hoje é possível vermos em sala de aula uma certa demarcação entre as duas áreas. Na visão de Carraher *et al.* (2006) esta forma de abordagem está ligada ao próprio contexto histórico, ou seja, “o fato de a Álgebra emergir historicamente após a aritmética e como uma generalização desta, sugere para muitas pessoas que a álgebra deve ser ensinada seguida da aritmética no currículo” (Carraher *et al.*, 2006, p. 89).

Outro ponto levantado desta vez por Freire (2011) seria a própria concepção de ensino ligada aos estudos de Piaget. Segundo Freire (2011) preza-se pela hierarquização dos conteúdos pelo fato de respeitar o nível cognitivo do aluno. Nesta concepção é preciso respeitar as restrições do desenvolvimento cognitivo do aluno. Em outras palavras as crianças dos anos iniciais seriam capazes de operar apenas com situações concretas (Aritmética) e apenas nos anos finais com situações abstratas (Álgebra). No entanto, os autores a seguir enfatizam a importância de um trabalho desde cedo concomitante entre a Aritmética e Álgebra.

Carraher *et al.* (2006) apontam que muitas das dificuldades dos alunos em séries dos anos finais seriam evitadas se não houvesse essa prática enraizada de não se trabalhar a Álgebra desde cedo e não aproveitar a Aritmética na construção

das primeiras generalizações e conseqüentemente construir as primeiras ideias algébricas.

Canavarro (2007) também corrobora da necessidade de trabalhar a Álgebra desde os primeiros anos e aponta algumas razões que justificam a importância do trabalho com o pensamento algébrico nesta fase:

A introdução do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade representa um passo em frente muito significativo pela possibilidade que inspira de uma abordagem à Matemática mais integrada e interessante, na qual os alunos desenvolvam as suas capacidades Matemáticas motivados por uma atividade rica e com sentido, que lhes possibilita a construção de conhecimento relevante, com compreensão, ampliando o seu patrimônio quer ao nível dos processos, quer dos produtos matemáticos (conhecimentos que podem usar posteriormente). Em consequência, os alunos poderão desenvolver uma atitude favorável em relação à Matemática, reconhecendo a sua unidade, o seu valor e o seu poder, e poderão igualmente conseguir melhorar a preparação para as aprendizagens posteriores, nomeadamente no domínio da Álgebra. (CANAVARRO, 2007, p. 113).

A mesma autora evidencia que existe uma relação intrínseca entre a Aritmética e a Álgebra que não pode ser desperdiçada. E que a análise de situações aritméticas propicia a construção dos primeiros aspectos sintáticos da Álgebra.

É a partir da estrutura da Aritmética que se podem construir os aspectos sintáticos da Álgebra, o que implica analisar as expressões aritméticas não em termos do valor numérico obtido através do cálculo, mas em termos da sua forma (por exemplo, concluir que $33 + 8 = 8 + 33$ não porque ambos constituem 41, mas porque na adição a ordem das parcelas é indiferente. Canavarro (2007, p.89)

Blanton e Kaput (2005) apontam a Aritmética como uma ferramenta para o trabalho com o pensamento algébrico. Esta possibilita aos alunos fazerem as suas primeiras generalizações sobre algumas operações e propriedades a estas associadas, prever certos crescimentos e identificar regras em sequências, por exemplo.

Kieran *et al.* (2016) reforçam a importância de se trabalhar o que eles chamaram de “álgebra precoce”, pois este trabalho desde cedo diminuirá as dificuldades em séries futuras ao estudarem a Álgebra mais formal. Um exemplo dado pelo os autores está o simples fato de levar os alunos a desde cedo trabalharem com regularidades e observar as estruturas das operações.

Lins e Gimenez (1997) também defendem o estudo concomitante entre as duas áreas desde os primeiros anos de escolaridade. Os autores destacam que muitas vezes o ensino de Álgebra ocorre com foco maior na aprendizagem de técnicas de resolução de cálculos, ou seja, baseada numa manipulação simbólica e mecânica. E defendem que deveria propor mais situações as quais o aluno fosse instigado a justificar e expressar seu pensamento.

Para Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) o desenvolvimento do pensamento algébrico pode ocorrer desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, antes mesmo da existência de uma linguagem algébrica simbólica. Os autores chegam a elencarem alguns aspectos caracterizadores deste tipo de pensamento que são evidenciados pelos alunos.

[...] estabelece relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos; percebe e tenta expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema; produz mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema; ou, reciprocamente, produz vários significados para uma mesma expressão numérica; interpreta uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas; transforma uma expressão aritmética em outra mais simples; desenvolve algum tipo de processo de generalização; percebe e tenta expressar regularidades ou invariâncias; desenvolve/cria uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente. (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2005, p. 5).

Esta concepção de abordar a Álgebra nos anos iniciais vai muito além de trabalhar com manipulações e simbolismo. Kieran (2004) reforça que a Álgebra não deve ser entendida apenas como um conjunto de procedimentos envolvendo símbolos alfabéticos, que não deve ser encarada apenas como um conjunto de técnicas, mas também como uma forma de pensar e raciocinar em situações matemáticas. É possível, por exemplo, o trabalho como “analisar relações entre quantidades, perceber estruturas, estudar a mudança, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar e prever” (2004, p. 149).

Diante do que exposta enxergamos a importância que se tem em trabalhar a álgebra desde cedo mesmo os alunos não dominando a linguagem simbólica. A Álgebra e Aritmética podem e devem ser trabalhada nesta fase de forma concomitante e não na forma hierarquizada.

Iremos na próxima sessão então aprofundar nossa explanação deste tema (pensamento algébrico) no viés dos autores Blanton e Kaput (2005). Isto não quer dizer que em alguns momentos não iremos abordar os outros autores.

2.2 A ABORDAGEM DA ÁLGEBRA NOS ANOS INICIAIS PRESENTES EM ALGUNS DOCUMENTOS

Nesta sessão buscamos identificar como o pensamento algébrico é abordado em documentos oficiais tanto a nível nacional quanto ao nível de estado de Pernambuco. Traremos orientações importantes nestes documentos que tratam do pensamento algébrico e algumas sugestões de trabalhos com o mesmo.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais dos Anos iniciais (BRASIL, 1997) os conteúdos são agrupados em blocos denominados: **Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação**. (grifo nosso). Neste documento não há uma pretensão do trabalho com a álgebra nesta fase de ensino. O ensino de Álgebra fica, portanto, limitado às séries dos anos finais sobretudo a partir da 7ª série, atualmente 8º ano.

O Plano Nacional pela Alfabetização na Idade Certa- PNAIC (BRASIL, 2012) apresenta alguns direitos de aprendizagem no ciclo de Alfabetização, ou seja, os três primeiros anos da Educação Básica. O documento orienta que o conhecimento matemático, nesta fase, deve ser desenvolvido de forma simultânea nos cinco eixos estruturantes: (1) Números e Operações, (2) Pensamento Algébrico, (3) Espaço e Forma, (4) Grandezas e Medidas e (5) Tratamento da Informação. Ficam evidentes, no documento, a presença e pretensão do trabalho com o pensamento algébrico.

Neste eixo estruturante é esperado que a criança nesta fase adquira “a compreensão e reconhecimento dos padrões – em sequências numéricas, de imagens e de sons ou em sequências numéricas simples, – o estabelecimento de critérios para agrupar, classificar e ordenar objetos, considerando diferentes atributos e a produção de padrões”. (BRASIL, 2012, p.76). Outro aspecto também esperado é a noção de proporcionalidade na multiplicação.

O trabalho com padrões recebe uma atenção especial no eixo estruturante pensamento algébrico como podemos ver na listagem dos objetivos de aprendizagem deste eixo ao longo do ciclo da alfabetização.

- Compreender padrões e relações, a partir de diferentes contextos.
- Estabelecer critérios para agrupar, classificar e ordenar objetos, considerando diferentes atributos.
- Reconhecer padrões de uma sequência para identificação dos próximos elementos, em sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples.
- Produzir padrões em faixas decorativas, em sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples. (BRASIL, 2012, p.77)

O *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), instituição de referência no que se trata de tendências curriculares internacionais apresenta através da publicação dos *Principles and Standards for School Mathematics* no ano de 2000 algumas recomendações sobre o que os estudantes devem aprender em Matemática e algumas orientações pedagógicas que possam contribuir para a prática dos professores.

Neste documento a Álgebra já é apontada como uma das cinco áreas da matemática e que deve ser trabalhada desde a pré-escola.

Ao ver a Álgebra como uma vertente do currículo a partir do pré-escolar, os professores podem ajudar os alunos a construir uma base sólida de compreensão e experiência como preparação para um trabalho mais sofisticado em Álgebra nas séries intermediárias e secundárias. (NCTM, 2000, p. 37, tradução nossa).

O mesmo documento chega a citar algumas habilidades que os alunos devem desenvolver neste período. Nelas já estão explícitas o trabalho com algumas ideias de padrão, relação e funções e contextos do uso de símbolos algébricos. Para o documento o trabalho com a ideia de padrão contribui para a construção da ideia de função e a exploração de propriedades de números para o trabalho com símbolos expressões algébricas no futuro.

- Compreender padrões, relações e funções;
- Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
- Analisar a variação em diversos contextos. (NCTM, 2000, p. 37, tradução nossa).

Neste mesmo período surgem os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) que apresenta certo “salto” no que diz respeito ao tratamento da Álgebra nos anos iniciais. Neste documento a Álgebra já ganha seu lugar quando observamos a organização dos conteúdos nos seguintes blocos: **Geometria, Estatística, Álgebra e Funções, Grandezas e Medidas e Números e suas operações.** (grifo nosso).

Para Pernambuco (2012) a Álgebra passa a ser vista “não como um bloco de conteúdo, mas como uma forma de pensar matematicamente”, caracterizada, entre outros aspectos, pela busca de generalizações e de regularidades. Propõe que a Álgebra, não apenas nos anos iniciais, mas em todos os anos não deve ser reduzida à simples manipulação simbólica, mas como uma forma de pensar significativamente.

Sugere-se, nesta etapa, o trabalho com identificação de regularidades em sequências sejam elas numéricas, de figuras ou de outro tipo. A identificação de números desconhecidos trabalhados nas operações inversas que para eles [...] “constitui uma das bases para o progressivo emprego da simbologia convencional da álgebra.” Já o trabalho com o Pensamento Funcional pode ser feito com o estudo da proporcionalidade usando situações do cotidiano do aluno. (PERNAMBUCO, 2012, p.63).

Percebemos, portanto, neste documento orientações para o trabalho com sequências desde o 1º ano, resolução de problemas algébricos no 2º e 3º ano e situações de equivalência de igualdades já exploradas no 4º ano contribuindo assim para o desenvolvimento de um dos aspectos do pensamento algébrico que são as relações funcionais.

Mais recentemente com a criação da Base Nacional Comum Curricular, a BNCC (BRASIL, 2017) a Álgebra passa de fato a constituir-se como uma Unidade Temática com seus respectivos objetos de conhecimentos a serem trabalhado nos Anos Iniciais. O documento aponta que a finalidade da Álgebra nesta etapa é desenvolver o pensamento algébrico das crianças.

O desenvolvimento deste tipo de pensamento possibilita ao aluno utilizar modelos matemáticos a fim de compreender, representar e analisar situações matemáticas fazendo uso de letras em etapas futuras de Ensino.

A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. (BRASIL, 2017, p.270)

Para isto, sugere-se desde cedo o trabalho com regularidades, descobertas de padrões, equivalências, proporcionalidades, variação entre outros. Não está incluso aqui a necessidade do trabalho com variáveis. É possível relacionar as unidades Temáticas. Por exemplo, o estudo de sequencias recursivas e repetitivas (Álgebra e Números).

Noções de equivalência podem ser trabalhadas com atividades simples do tipo $4+2 = 3 + 3$ levando o aluno a perceber que o sinal de igualdade não é apenas a indicação de uma operação a ser feita. Noções de funções podem ser exploradas com situações do tipo: se 4 picolés custam R\$ 6,00 quanto custará 8 picolés? E 2 picolés? Atividades como estas contribuem para o aluno fazer suas generalizações. O uso de tabelas pode ser uma aliada na representação deste seu pensamento.

Notamos, portanto, que o trabalho com a Álgebra com foco no pensamento algébrico apresenta certo destaque nos documentos oficiais mais recentes como a BNCC; E aqueles que a antecedem apresentam o foco mais voltado para uma Álgebra mais simbólica.

2.3 O PENSAMENTO ALGÉBRICO A PARTIR DE BLANTON E KAPUT 2005

Nesta sessão abordamos o conceito de pensamento algébrico na perspectiva dos autores Blanton e Kaput (2005) e quando possível fazemos um paralelo com outros autores de forma a identificarmos certas semelhanças. Antes de apresentarmos uma definição e algumas características do pensamento algébrico achamos interessante fazer uma breve diferenciação entre o pensamento aritmético do pensamento algébrico a partir de Kieran (1992).

“O pensamento aritmético está intimamente ligado ao cálculo e à realização de operações na procura de um resultado, enquanto que o pensamento algébrico está relacionado com as estruturas e ao uso de uma variedade de representações que permitem lidar com situações quantitativas de uma forma relacional”. (Kieran 1992, p.4 apud Almeida2017, p.58)

Assim pensar algebricamente vai muito além do fato de fazer operações e se chegar a um determinado resultado. É preciso que o aluno consiga dar um “salto” a mais. Espera-se que este seja capaz de lidar com as situações fazendo certas relações e entendendo de fato o papel das operações e suas implicações.

Para Blanton e Kaput, o pensamento algébrico pode ser visto como

[...] “processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas a sua idade”. (BLANTON e KAPUT, 2005, p.413).

Como vimos os estudantes precisam ser levados às situações que possam generalizarem e argumentarem. Estes tipos de situações são adversas às formas de ensino nas quais a aprendizagem da Álgebra é baseada na mera exposição de conteúdos algébricos, compreensão de símbolos, manipulação de expressões.

Sendo a generalização um dos aspectos centrais do pensamento algébrico segundo os autores este pode assumir várias formas e em cada uma delas se faz presente a generalização. São elas:

- a) o uso da aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações (aritmética generalizada);
- b) a generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais (pensamento funcional);
- c) a modelação como um domínio para expressar e formalizar generalizações;
- d) a generalização sobre sistemas matemáticos a partir de cálculos e relações. (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413, tradução nossa).

Entre as quatro formas de manifestações de generalizações apresentadas por Blanton e Kaput descrevemos com mais ênfase as duas primeiras: a aritmética generalizada e o pensamento funcional, pois como os próprios autores afirmam, são elas que comumente aparecem nos Anos Iniciais. As duas últimas requerem do aluno generalizações com objetos e sistemas abstratos comumente explorados nos anos finais em diante.

Miguel, Fiorentini e Miorin (1993) também veem a generalização como elementos caracterizadores deste tipo de Pensamento. Além da generalização as ideias de “percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização.” (MIGUEL, FIORENTINI e MIORIN, 1993, p.88).

Para os autores, uma primeira implicação pedagógica refere-se ao fato de repensarmos o momento de iniciação deste tipo de Pensamento no currículo escolar. Defendem que “como este tipo de pensamento não prescinde de uma linguagem estritamente simbólico- formal para sua manifestação” é um grande erro deixar para inseri-lo de forma tardia no processo de ensino-aprendizagem da Álgebra.

Almeida e Santos (2017, p. 53) em busca de uma definição para o pensamento algébrico diz que este pode ser caracterizado por cinco características: “estabelecer relações”, “generalizar”, “modelar”, “operar com o desconhecido” e “construir significado”. Para estas tais características se inter-relacionam. O aspecto estabelecer relações ocupa a posição central do seu modelo não por ser mais importante que as demais. Para estes “um sujeito só está pensando algebricamente se conseguir estabelecer relações” (ALMEIDA; SANTOS, 2017, p. 58).

Lins e Gimenes (1996) abre um parêntese quando diz que o conceito de Pensamento Algébrico nem sempre é compreendido da mesma forma por aqueles que trabalham com a Álgebra. Consequência desta compreensão é que muitos deles acabam priorizando o trabalho mais voltado para manipulações e resoluções de equações, por exemplo, do que valorizar o pensar da criança.

2.3.1 Aspectos centrais do pensamento algébrico: aritmética generalizada e pensamento funcional

Como dissemos anteriormente há quatro formas de manifestações de generalizações e abordaremos na visão dos autores em quais circunstância estas podem ocorrer na aritmética generalizada e no pensamento funcional.

Para Blanton e Kaput (2005) a aritmética generalizada se refere ao raciocínio ligado às propriedades e relações entre números inteiros, as propriedades das próprias operações, o uso da igualdade como uma relação entre quantidades, a estrutura dos números e a resolução de expressões numéricas com termos desconhecidos. Já no pensamento funcional envolve a generalização de padrões numéricos, de crescimento ou sobre soma de números consecutivos.

De uma observação feita a uma classe de 3ª série os autores conseguiram identificar alguns episódios vividos pela professora e seus alunos ao trabalharem com situações que envolviam o desejo de se trabalhar o pensamento algébrico dos alunos. Destes episódios os autores conseguiram agrupá-los em três categorias cada uma com suas subcategorias que estarão expostas no quadro abaixo. Optamos por dar mais detalhes sobre cada categoria no capítulo dedicado à metodologia no qual explicitaremos as categorias de nossa análise que são as identificadas por Blanton e Kaput.

Quadro 1- Categorias da Álgebra por Blanton e Kaput (2005)

Blocos	Categorias
Aritmética generalizada	A- Explorar propriedades e relações de números inteiros; B- Explorar propriedades das operações com os números inteiros; C- Explorar a igualdade como relação entre quantidades; D- Tratar o número algebricamente; E- Encontrar valores desconhecidos;
Pensamento funcional	F- Simbolizar quantidades e operar com expressões simbolizadas; G- Representar dados graficamente; H- Encontrar relações Funcionais; I- Prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos; J- Identificar e descrever padrões numéricos e geométricos.
“Hábitos avançados”	K- Usar generalizações para resolver tarefas algébricas; L- Justificar, provar e testar conjecturas; M- Generalizar um processo matemático.

Fonte: Favero (2020)

Além das 13 categorias identificadas Blanton *et al* (2015) apresentam cinco ideias as quais o pensamento algébrico pode ser desenvolvido nos Anos Iniciais: a) equivalência, expressões, equações e desigualdades; b) aritmética generalizada; c) pensamento funcional; d) a ideia de variável; e e) raciocínio proporcional. Elencaremos de forma sucinta cada uma dessas ideias na concepção dos autores.

A ideia de equivalência, expressões, equações e desigualdades pode ser vista no contexto de desenvolvimento de compreensão do aspecto relacional do sinal de igualdade (Por exemplo, $8 + 5 = ____ + 4$), resolução de problemas com valores desconhecidos atentando para as relações estruturais das sentenças, analisar uma equação para determinar o valor de uma variável e modelar situações problemas para produzir equações. Exemplo de situação proposta para avaliar a compreensão dos alunos sobre a noção de equivalência.

“Preencha os espaços em branco com o valor que torna a sentença verdadeira. Como você conseguiu sua resposta? a) $7 + 3 = ____ + 4$. Por quê? b) $5 + 3 = ____ + 3$. Por quê?” (Blanton et al. 2015, p. 83, tradução nossa)

A segunda ideia de generalização, Aritmética generalizada, envolve a generalização de propriedades das operações, raciocinar acerca das estruturas das operações chegando a argumentar e desenvolver certa conjectura sobre elas. Exemplo de situação proposta pelos autores para analisar este contexto de generalização. Trata-se de uma situação a qual o aluno generaliza a propriedade comutativa da Adição.

A professora de Marcy pede a ela para descobrir $23 + 15$. Ela soma os dois números e obtém 38. A professora, em seguida, pede-lhe para descobrir quanto dá $15 + 23$. Marcy já sabe a resposta. a) Como ela sabe? b) Você acha que isso vai funcionar para todos os números? Se sim, como você sabe? (BLANTON et al., 2015, p. 83, tradução nossa).

O pensamento funcional, “envolve a generalização de relações entre quantidades de covariância e representação e raciocínio com essas relações através da linguagem natural, notação algébrica (simbólica), tabelas, e gráficos” (2015, p. 43, tradução nossa). O aluno é capaz de identificar um padrão recursivo e descrevê-lo com suas palavras. Para isto pode utilizar do recurso de tabelas em que o aluno representa e organiza os dados para chegar a um padrão que pode ser expresso por uma função. É a capacidade do aluno prever dados desconhecidos a partir de dados conhecidos. Todas estas formas de generalização são úteis para o trabalho com funções abordado em séries posteriores.

Blanton e Kaput (2005) apresentam alguns exemplos de situações que podem auxiliar no desenvolvimento deste tipo de pensamento: a simbolização das quantidades, operações com expressões simbólicas, representação gráfica de

dados, a descoberta de relações funcionais e a previsão de dados desconhecidos partindo de dados conhecidos. Há uma ênfase no trabalho com a descoberta de padrões em sequências.

A seguir apresentamos uma situação proposta pelos autores em que os alunos seriam solicitados a partir da observação da disposição das mesas preencher uma tabela com a quantidade de pessoas que poderiam sentar em 1 mesa, 2 mesas, 3 mesas, para se chegar a uma generalização de quantas pessoas poderiam sentar em n mesas.

Brady convidou seus amigos para uma festa de aniversário. Ele quer verificar se tem um assento para todos. Ele tem mesas quadradas. Ele pode acomodar 4 pessoas em uma mesa quadrada conforme a figura. Se ele juntar a outra mesa quadrada com a primeira, ele pode acomodar 6 pessoas. a) Se Brady continuar juntando mesas desta maneira, quantas pessoas podem se sentar em: 3 mesas? 4 mesas? 5 mesas? Registre suas respostas na tabela e preencha todas as informações (figura 6). b) Você vê algum padrão na tabela? Descreva-o. c) Encontre uma regra que descreva a relação entre o número de mesas e o número de pessoas que podem sentar nas mesas. Descreva sua regra em palavras. d) Descreva sua regra usando variáveis. O que suas variáveis representam? e) Se Brady tiver 10 mesas, quantas pessoas podem se sentar? Mostre como você chegou na resposta.

A noção de variável apresenta-se em contextos de generalizações aritméticas ou quantidades desconhecidas para descrever uma regra de função. A seguir há uma situação proposta na qual o aluno utiliza-se de uma variável para representar a generalização da subtração de um número qualquer por ele mesmo.

Evelyn calcula o seguinte: $8 - 8 = \underline{\quad}$; $12 - 12 = \underline{\quad}$. Ela calcula uma resposta 0 de cada vez. Ela começa a pensar que sempre que você subtrair um número por si só, a resposta é 0. Qual das seguintes alternativas descreve melhor seu pensamento? Circule sua resposta. a) $a + 0 = 0$; b) $a = b + a + b$; c) $a - a = 0$; d) $a \times 0 = 0$. (BLANTON et al., 2015, p. 84, tradução nossa)

Outra ideia de pensamento algébrico proposta pelos autores é o raciocínio proporcional. Este está ligado às ideias de relações multiplicativas e proporção. Para se trabalhar esta ideia os autores propuseram a seguinte situação: “Uma turma de quarto ano precisa de 5 folhas por dia para alimentar suas 2 lagartas. Quantas folhas eles precisam a cada dia para 12 lagartas? Explique como você conseguiu sua resposta” (BLANTON et al., 2015, p. 86, tradução nossa).

Para os autores estas cinco grandes ideias de generalização apresentam grande importância uma vez que são contextos ricos para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Ainda salientam que um ensino centrado na Aritmética não preparará os alunos para se darem bem nos anos posteriores; enquanto um ensino que se trabalha a Álgebra nos Anos Iniciais diminuem significativamente as dificuldades dos alunos.

Todos estes contextos de pensamento algébrico estão contemplados em algumas das 13 categorias presentes no quadro 1. São elas que utilizaremos como referência na análise praxeológica. No capítulo dedicado à Metodologia fazemos uma breve explicação de cada uma das categorias relacionando-as com as cinco ideias aqui mencionadas.

Para Blanton e Kaput (2005) as generalizações realizadas por alunos passam por certos estágios ou etapas que não ocorrem no mesmo ritmo para todos. Entre os estágios ou etapas apresentam que são: 1) primeiro o aluno deve ter contato com a exploração de relações aritméticas; 2) Em seguida a exploração da noção de quase variável; e por fim 3) a exploração de relações Funcionais que constitui o terceiro estágio da generalização.

Kaput (2008) coloca que o pensamento algébrico, por sua vez, é composto por processos complexos de simbolização. A simbolização e a generalização estão estritamente relacionadas. Portanto, se faz necessário que ao propor o trabalho aos alunos siga-se um percurso: primeiro o encorajamento a trabalhar com número como quase variáveis em seguida generalização em linguagem natural e por fim utilização de símbolos algébricos.

2.4. A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO E SEUS ELEMENTOS

Utilizamos a Teoria Antropológica do Didático daqui para frente chamada de TAD de Yves Chevallard (1999) para servir de suporte para realização da análise praxeológica. Nossa intenção não é situar todos os seus elementos, mas dar um maior enfoque ao conceito de praxeologia que usamos para identificação e análise dos tipos de tarefas presentes nas coleções.

A TAD “estuda o homem frente ao saber matemático, colocando a atividade e o estudo da matemática dentro do conjunto das ações humanas desenvolvidas em instituições”. (BATISTA e BARBOSA, 2020, p.151). Ela se ocupa “da investigação das condições que permitem, facilitam ou favorecem a construção e desdobramentos de determinadas atividades didático-matemáticas numa dada instituição, bem como das restrições que dificultam, entorpecem ou, mesmo bloqueiam essas atividades.” (ALMOULOU, 2020, p.106)

No nosso caso estamos interessados em ver se as praxeologias apresentadas nas coleções apresentam tipos de tarefas que possibilitem o trabalho, por parte do professor, que contribuam para desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos nos anos iniciais.

Chevallard (1999) caracteriza a TAD de forma axiomática constituída de três elementos primitivos: Os objetos (O), as pessoas (X) e as Instituições (I). O objeto (O) é qualquer entidade quer seja material quer seja imaterial. Para ele, todas as coisas podem ser objetos: as pessoas, as instituições, o livro didático.

Para que este objeto exista é preciso que ele seja reconhecido por pelo menos uma pessoa (X) ou uma instituição (I). Este pode fazer parte ou não de uma dada instituição. Exemplo: Equação polinomial do 2º grau faz parte da instituição (turma 9º ano), mas não da instituição (turma de 5º ano). Todo objeto dentro da Instituição sofre adaptações, evoluções ou até mesmo desaparecerem com o passar do tempo.

Barbosa (2017) aponta duas relações existentes destacadas por Chevallard (1999) ao enunciar a TAD. Trata-se das Relações Pessoais existentes entre o Objeto (O) e a pessoa (X) designada por $R((X, O))$ e as Relações Institucionais existentes entre o Objeto (O) e a Instituição (I) representada por $(RI(O))$. Resumindo o objeto só existe se pelo menos uma Pessoa (X) ou Instituição (I) manter um tipo de relação com este objeto. (BARBOSA, 2017, p.44).

O segundo elemento primitivo é a Pessoa (X). Diferentemente da noção de objeto que “todas as coisas são objetos” isto não pode se estendido ao elemento Pessoa (X). A Pessoa (X) passa pelos seguintes estágios: Indivíduo-sujeito-Pessoa. Primeiro a Pessoa é indivíduo, seu estágio mais primitivo quando este não tem se

sujeitado a nenhuma Instituição e as diferentes interações que este terá ao passar por diversas Instituições (I) é que o tornará Pessoa (X).

E por fim o elemento Instituição (I). Trata-se de um “dispositivo social” que impõe às pessoas que ocupam uma posição em I, modos de fazer e de pensar próprios (Chevallard, 1992, apud Bittar, 2017, p.366). São exemplos de Instituições: a Escola, a Sala de aula, a família, a igreja, etc. Estas sujeitam as pessoas e chegam-nas a modificar ao ditar, por exemplo, “regras” de Ensino que muitas vezes são particulares desta Instituição, o que caracteriza a sujeição do objeto de Ensino e da Pessoa à Instituição.

Um aluno, por exemplo, é sujeito à Escola e a sala de aula. Mas, antes ele já foi sujeito às instituições família, igreja e outras escolas, por exemplo. Portanto, para Rodrigues, Menezes e Santos (2017) “Pessoa surge das várias relações que o indivíduo tem com as diferentes instituições pelas quais tem passado, ou seja, é o conjunto de sujeitos do indivíduo é que forma a pessoa.” Para os autores “dependendo da mudança e da evolução de suas relações pessoais com os objetos, o indivíduo permanece invariante”.

Barbosa (2017) destaca que há uma intenção, por parte das instituições, em alterar ou transformar a relação existente entre a Pessoa (X) e o Objeto (O). Dentro deste contexto Chevallard (ibidem) introduz a noção de “sujeito adequado” a uma instituição (I) como aquela pessoa que se sujeita. Em outras palavras seguem as regras, está em conformidade com aquilo que lhe é proposto, atende as expectativas da instituição.

Do contrário será um sujeito não adequado para a Instituição. Este sujeito é definido por Chevallard “como incapaz de fazer parte do contrato institucional, podendo, inclusive, ser expulso da instituição I. Desse modo, entra em cena a função da instituição como um sistema avaliador de tal conformidade.” (BARBOSA, 2017, p.45).

É comum enxergar esta situação ao final do ano letivo quando os alunos são avaliados e classificados como aprovados ou reprovados. Os alunos reprovados seriam aqueles não adequados à instituição (nova turma do ano seguinte), portanto, deveria ser “expulso”, repetir de ano.

As instituições, segundo Chevallard (1999) possuem restrições e condições nas suas próprias organizações para que um determinado saber possa fazer parte dela e seja ensinado. Ao abordar um determinado assunto, estas organizam a maneira como ocorrerá tal abordagem que pode sofrer mudanças ou não ao longo do tempo. Podemos ver como exemplos as orientações curriculares, as diretrizes curriculares, o projeto Político Pedagógico da Escola. Estes orientam e restringem atividades realizadas pelos professores que fazem parte da organização da Escola enquanto Instituição de Ensino.

Uma noção da TAD que será mais utilizada na nossa pesquisa são as praxeologias. Estas são constituídas pelos elementos: tarefas, técnicas, tecnologias e teoria. A praxeologia e seus elementos serão mais destacados no capítulo da Metodologia, pois usamos como referencial teórico-metodológico da nossa análise.

2.5 O LIVRO DIDÁTICO VISTO COMO UMA INSTITUIÇÃO E POR QUE ANALISÁ-LO?

Na maioria das vezes, os educadores, têm o livro didático como seu principal aliado na preparação de suas aulas. Brasil (2017) enfatiza que por consequências de déficits de conhecimentos dos professores na sua formação inicial e continuada estes acabam vendo os livros como um suporte para uma formação complementar.

Bittar (2017, p.365) enfatiza que antes se investigar o que o aluno aprende ou como vem sendo desenvolvida a prática pedagógica do professor devemos ter um olhar especial para o livro didático que este utiliza. Pois, para a autora “olhar para os documentos oficiais e para o livro didático, buscando compreender o ensino proposto e suas possíveis consequências para a aprendizagem tornou-se incontornável”. Para a autora, o livro traz de forma implícita a concepção de ensino que o autor propõe e que geralmente acarreta numa repetição desta pelo professor que faz uso deste material didático.

A análise do livro didático possibilita ao pesquisador conhecer mais de perto o público com o qual está lidando, fazer inferências sobre suas dificuldades de aprendizagem e utiliza-lo como suporte para elaboração das suas sequencias

didáticas quer seja de intervenção ou apenas de investigação. Permite conhecermos as concepções dos autores e seus reflexos nas praxeologias dos professores.

Almould (2015, p.13) evidencia que a análise do livro didático se constitui como suporte para se compreender [...] “as relações institucionais de um objeto em uma determinada organização matemática”. Este propõe como elementos caracterizadores dos livros didáticos: “o momento de edição, a representatividade da obra, a estrutura do livro, análise ecológica e por último, mas não menos ou mais importante, a análise praxeológica”.

Portanto, entendemos que é importante conhecermos as propostas dos livros didáticos, as orientações apresentadas pelos seus autores, pois estas fornecem pistas de como vem sendo desenvolvidas as aulas deste professor. Além disso, o livro didático apresenta o saber a ser ensinado, ou seja, a transposição didática. Portanto, olhar para o livro didático como uma instituição nos possibilita entendermos um pouco das restrições e condições que são observadas ao longo da sua organização e distribuição dos conteúdos.

3 PERCURSO METODOLÓGICO

Neste capítulo apresentamos o Percurso Metodológico da nossa pesquisa: os procedimentos e como ocorrerá a nossa análise. Apresentamos o conceito de praxeologia segundo Chevallard (1999) que norteou a nossa seleção de tipos de tarefas presentes nas coleções e detalhamos as categorias que fizeram parte da nossa análise. Por fim, descreveremos as coleções escolhidas que fizeram parte de nossa análise.

3.1 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nossa pesquisa visa responder a seguinte questão: as praxeologias matemáticas presentes nas três coleções mais vendidas no PNLD 2019 contribuem para o trabalho com o pensamento algébrico nos anos Iniciais?

Adotamos como referencial metodológico a noção de praxeologia proposta por Chevallard (1999) que detalhamos mais adiante e para análise os referenciais que tratam do pensamento algébrico nos anos iniciais. Embora usando outros teóricos na pesquisa destacamos Blanton e Kaput (2005).

Nossa pesquisa configura-se como tipo Documental. Conforme Lorenzato e Fiorentini (2012) os documentos constituem-se fontes ricas de informações que estão paradas no tempo. Os autores listam como sendo documentos: livros, propostas curriculares, dissertações, teses, artigos, entre outros. Já Gil (2010) abre certo destaque para a fonte de pesquisa o livro. Para ele este constitui uma fonte bibliográfica por excelência. Em seguida detalharemos as etapas de nossa pesquisa de forma a responder à questão norteadora.

3.2 AS ETAPAS DA PESQUISA

No primeiro momento realizamos uma revisão bibliográfica identificando artigos publicados em periódicos, teses e dissertações no Banco Digital de Teses e dissertações, livros e e-books que abordem o tema desta pesquisa. Para isto usamos como palavra-chave “pensamento algébrico”. Como filtro, usamos o fato de possuir a palavra no seu título. Elencamos aqueles trabalhos que discutiam o tema nos anos iniciais.

Em seguida realizamos a análise da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Nesta etapa buscamos identificar quais habilidades apontam indícios de trabalho com o pensamento algébrico a partir das categorias propostas por Blanton e Kaput (2005). Consideramos nesta análise não apenas habilidades que fizessem parte da Álgebra, mas de outras unidades temáticas que apresentassem como favoráveis para o trabalho com o pensamento algébrico.

Em seguida realizamos a análise praxeológica das duas coleções mais vendidas no PNLD (2017). A análise foi realizada com base nas categorias propostas por Blanton e Kaput (2005). Damos ênfase para os tipos de tarefas que estão presentes no bloco da Álgebra. Isto não significa que descartamos atividades presentes em outras unidades temáticas.

Realizamos o levantamento dos tipos de tarefas com potencial para desenvolver o pensamento algébrico seguindo uma ordem cronológica dos anos (1º ao 5º ano). Usamos os códigos das habilidades que são apresentadas nos boxes do livro do professor de forma a localizarmos estes tipos de tarefas.

Apresentamos, a partir das categorias selecionadas, os tipos de tarefas e técnicas (bloco prático), as tecnologias que justificam a técnica e a Teoria que dão suporte à tecnologia. Vale destacar que nem sempre fazemos a apresentação do segundo bloco, uma vez que alguns tipos de tarefas nos anos Iniciais não trazem isto de forma tão evidente.

Organizamos os tipos de tarefas das coleções que fazem parte de cada categoria. De posse desses tipos de tarefas fizemos uma comparação da quantidade de cada uma delas presentes nas coleções e organizamos os dados em tabelas. Por fim tecemos nossos comentários à luz do referencial teórico levantado.

3.3 AS COLEÇÕES PARA ANÁLISE E OS CRITÉRIOS DE ESCOLHA

Para a escolha das coleções seguimos como critérios:

- 1) aprovação no PNLD (2019) e tenha feito parte da escolha das Escolas.

2) A sua representatividade, ou seja, as duas primeiras coleções mais adquiridas, pois acreditamos atender a um número maior de alunos.

3) Presença da Unidade Temática Álgebra uma vez que nosso interesse é buscar atividades que tratem do Pensamento Algébrico.

Consultamos o guia digital do livro didático e lemos a resenha de cada coleção para identificarmos os critérios que as mesmas passaram para serem aprovadas. Vale destacar que o PNLD (2019) contou com a aprovação de 16 coleções de Matemática para os Anos Iniciais. Destas, 12 foram adotadas por escolas públicas o que representa um percentual de 75%. Não é nossa intenção emitir nenhum juízo acerca das coleções não escolhidas.

As duas coleções que apresentaram as maiores representatividades em ordem decrescente e que farão parte da nossa análise são:

- Ápis matemática (3ª edição) do autor Luiz Roberto Dante, editora Ática com um percentual de 24,89%;
- Buriiti: Mais Matemática da autora Carolina Maria Toledo com percentual de 24,60%;

Vale destacar que as duas coleções somam um percentual de 49,49% dado bem representativo se consideramos que os valores restantes se distribuem entre 10 coleções.

3.4 A NOÇÃO DE PRAXEOLOGIA

Segundo Chevallard (1999) as noções de tarefa (t) e de tipos de tarefas (T) apresentam-se como coração da praxeologia. Para ele, quando uma tarefa t faz parte de um tipo de tarefa T dizemos que $t \in T$. As tarefas t associadas a tipos de tarefa T geralmente são seguidas de verbos: limpar a sala, resolver equações, encontrar termos desconhecidos, identificar o padrão de uma sequência.

Cabe aqui diferenciar o termo (t) tarefa e tipos de tarefas (T). Segundo Chevallard (1999) tipo de tarefa (T) supõe um objeto relativamente preciso: “subir uma escada é um tipo de tarefa, mas escalá-la não é.” Ele exemplifica com uma

situação. “Calcular... é um gênero de tarefas; mas calcule o valor (exato) de uma expressão numérica contendo um radical é um tipo de tarefa”. (CHEVALLARD, 1999, p.222).

Para se resolver um determinado tipo de tarefa $t \in T$ o aluno utiliza pelo menos uma técnica (τ). Esta palavra vem do grego tekhnê (saber fazer), ou seja, uma maneira de realizar $t \in T$. Assim, uma praxeologia em relação a T requer uma maneira de realizar as tarefas $t \in T$. Portanto o bloco formado pelo tipo de tarefa e pela técnica $[t, \tau]$ é denominado de bloco prático- técnico.

Algumas considerações são feitas sobre as técnicas: uma técnica pode resolver um tipo de tarefa, mas pode apresentar falha para outra. Dizemos que esta técnica dar conta de resolver parte de T. Assim, pode apresentar certa superioridade sobre a outra; não é obrigatoriamente algorítmica; fazem parte de uma instituição quando são institucionalizadas. É comum algumas técnicas serem aceitas por uma instituição como natural e ser ignoradas por outras, inaceitáveis. Chevallard (ibid.) coloca que algumas técnicas são vistas como “verdadeiras paixões” por algumas instituições.

A tecnologia (θ) é entendida como o discurso racional sobre a técnica (τ), ou seja, sua finalidade é justificar racionalmente a técnica usada na resolução de determinado tipo de tarefa. Algumas considerações são feitas sobre a tecnologia: “Em uma instituição I seja qual for o tipo de tarefas T, a técnica τ relativa a T é sempre acompanhada por um vestígio de uma tecnologia θ .” (CHEVALLARD, 1999, p. 225);

O fato de existir em I uma técnica reconhecida como única e utilizável esta passa a receber o status de “auto tecnológica”, ou seja, dispensada da necessidade de ser justificada. Portanto, uma segunda função da tecnologia seria explicar para tornar a técnica inteligível, para esclarecer a técnica. Se a primeira função é explicar consiste em garantir que a técnica dar o que se pretende, a segunda consiste em explicar porque é correta. A terceira função da tecnologia seria a produção de técnicas.

E por fim a teoria (Θ) cuja finalidade é “tornar inteligível o discurso tecnológico”. Assim como a tecnologia sustenta a técnica esta é sustentada pela teoria, pois nenhum conhecimento ou teoria é suficiente para fortalecer uma ideia. “A teoria é marcada por um nível mais avançado de justificação-explicação-produção.”. E que geralmente, “a justificação e o esclarecimento oferecidos por uma teoria Θ , apresentam-se obscurecidos pela maneira abstrata como os enunciados são colocados repetidamente.” (LIMA e BARBOSA, 2020, p.12)

Assim, em torno de um tipo de tarefa T , existe uma tripla formada pelo menos por uma técnica (τ), por uma tecnologia (θ) e por uma teoria (Θ). A junção dos quatro elementos $[T, \tau, \theta, \Theta]$ forma a representação da praxeologia pontual que é formada pela junção dos dois blocos: $[T, \tau]$ chamado de bloco técnico prático e $[\theta, \Theta]$ o bloco do saber.

3.5 CONHECENDO MELHOR AS CATEGORIAS DE ANÁLISE.

Blanton e Kaput (2005) acompanharam pelo período de um ano uma professora e sua turma de terceira série. Entre os objetivos deste estudo estavam: identificar até que ponto a professora integrou o raciocínio algébrico na sala de aula, a frequência e diversidade com que ela o fez; examinar se essa instrução afetava a capacidade de raciocínio algébrico dos alunos. E identificar técnicas de práticas que apoiavam o desenvolvimento das habilidades de Pensamento algébrico dos alunos.

Deste acompanhamento, os autores conseguiram categorizar 13 situações mostradas pelos alunos ao resolverem determinadas tarefas que apresentavam indícios de desenvolvimento do Pensamento Algébrico. As categorias foram então agrupadas em três blocos denominados: aritmética generalizada, Pensamento funcional e Hábitos Avançados ou Modelagem. A seguir detalhamos cada uma das categorias.

3.5.1 Categorias do bloco aritmética generalizada

Neste bloco encontram-se as subcategorias em que a aritmética foi usada como domínio para expressar e formalizar generalizações. São incluídos, portanto,

processos aritméticos que envolvem quantidades generalizadas, não necessariamente aqueles processos que tiveram generalização como resultado final.

Entre algumas situações estão casos em que os alunos estavam envolvidos em operações com números inteiros em formulários abstratos (por exemplo, sentenças numéricas ausentes) ou usavam o número de maneira generalizada. (BLANTON e KAPUT, 2005, p.419). Farão parte deste grupo as categorias denominadas de A até E.

Categoria A: explorar propriedades e relações de números inteiros

Esta categoria descreve episódios de Pensamento nos quais os alunos são levados a explorarem propriedades e relações entre números inteiros. Entre algumas situações citadas pelos autores estão: generalizar sobre adição e multiplicação de números pares e ímpares a partir de sua estrutura, sobre propriedade da subtração como o caso da subtração de um número por ele ($a - a = 0$), decomposição de números inteiros em adições atentando para sua estrutura.

Categoria B: explorando propriedades de operações em números inteiros

Esta categoria descreve os episódios de raciocínio algébrico nos quais os alunos exploram a estrutura das operações matemáticas buscando generalizações nas suas propriedades: comutatividade da adição e multiplicação, elemento neutro, associativa ou a distributiva da multiplicação sobre adição.

Categoria C: explorando a igualdade como expressão de uma relação entre quantidades.

Esta categoria explora o papel algébrico do sinal de igualdade “=” usando o aspecto da equivalência entre expressões do tipo $8 + 4 = \square + 5$. Neste caso, o sinal de igual é visto não como o indutor de um resultado, mas apresentando uma relação entre duas quantidades. Outro aspecto destacado nesta categoria é o fato de tratar as equações como objetos que expressam relação entre quantidades.

Um exemplo de situação proposta pela professora: solicitar aos alunos resolver a tarefa $(3 \times n) + 2 = 14$. Um aluno da turma logo sugeriu retirar a

quantidade 2 de cada lado ficando com 12 após o sinal de igual. Em seguida agrupar os 12 blocos em grupos de 3 chegando na solução 4. É perceptível que este aluno percebe o sinal de = como representação de uma equivalência e não indutor de um resultado.

Um recurso muito usado para desenvolver este conhecimento nos alunos é a utilização do recurso balança. É comum, nos livros didáticos encontrarmos atividades que exploram este tipo de situação fazendo uso deste recurso para trabalhar com a relação de equivalência entre dois membros da equação separados pelo sinal de “=”.

Categoria D: tratar o número algebricamente

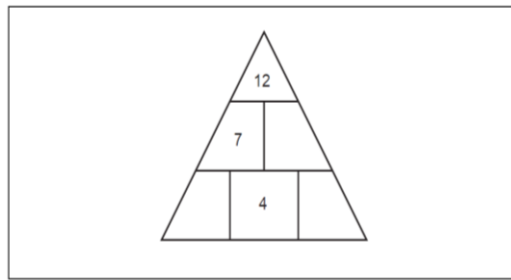
Descreve episódios nos quais os alunos precisam tratar os números de maneira algébrica, ou seja, atentando para sua estrutura em vez de valores específicos. Um exemplo bem prático dessa situação seria solicitar ao aluno que explique se a soma ou produto de dois numerais com 6 ordens ou mais representa um resultado par ou ímpar. Neste caso ele precisaria justificar olhando para a estrutura dos números envolvidos e não efetuar o resultado.

Situação proposta pela professora: “ $45678 + 85631$? Ímpar ou par? Por quê?” O aluno responde que é ímpar, pois 8 é par e 1 é ímpar, logo a soma de par + ímpar = ímpar. Neste caso o aluno está tratando o número de forma algébrica. Situação como a proposta auxilia o aluno a generalizar, por exemplo, que a soma de pares com pares sempre será número par.

Categoria E: encontrar valores desconhecidos

Esta categoria envolve situações semelhantes à da figura 1 na qual um triângulo está dividido em várias com algumas delas faltando valores a serem completados. O objetivo é completar os espaços seguindo uma regra: a soma dos valores de duas casas vizinhas está representada na casa superior adjacente as duas. As situações vão desde encontrar valores desconhecidos em quadrados ou triângulos preenchendo com números ausentes a partir da identificação da regra sugerida como problemas com valores desconhecidos.

Figura 1- Zolan's Triangle Puzzle



Fonte: Blanton e kaput (2005, p.423)

3.5.2 Categorias do bloco do pensamento funcional

Neste grupo configura-se atividades nas quais os estudantes são submetidos à situações de generalizações de padrões numéricos e geométricos para descrever relações funcionais. Entre algumas dessas situações incluem processos nos quais os alunos são levados a simbolizar quantidades ou fazer previsões sobre dados. Foram elencadas 5 categorias denominadas de F a J.

Categoria F: simbolizar quantidades e operar com as expressões simbólicas.

Como o próprio nome diz consiste na simbolização de quantidades e operar com essas expressões simbolizadas. O foco aqui será o uso de símbolos pela criança para modelar problemas ou operar com expressões algébricas, não no sentido de resolver equações para uma quantidade desconhecida ou simbolizar propriedades gerais da Aritmética, mas no sentido de contexto de mensagens secretas fazendo uso de códigos simbólicos para realizar uma conversão.

Como exemplo podemos citar a atividade observada pelos autores. Os alunos criaram um código a expressão simbólica $F(12) + I$ em que F representava o número de pés (feet) a ser multiplicado por 12 e I o número de polegadas (inches) a fim de converter uma medida que estava em pés e polegadas para apenas polegadas. Neste contexto, F é uma variável que poderia assumir qualquer valor (número de pés) e I o número de polegadas. A função do código então foi a criação de uma função que convertia as unidades mistas em polegadas.

Categoria G: representar dados graficamente

Esta categoria refere-se fazer um gráfico de pares ordenados para expressar uma relação funcional e apoiar nele a análise da variação da função. Para os autores, embora a representação gráfica não seja um raciocínio inerentemente algébrico ela foi incluída por representar uma maneira de “codificar informações” (graficamente) que permitem analisar relações funcionais, desempenhando desta forma um apoio no raciocínio algébrico. Dentre as categorias esta é a que menos apareceu nos estudos de Blanton e Kaput (2005).

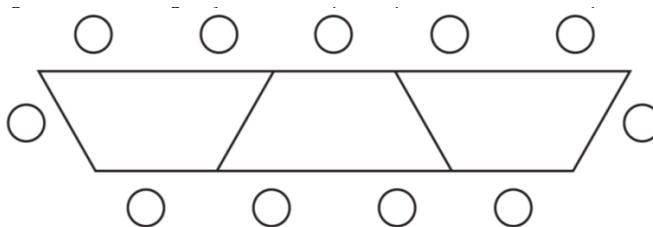
Categoria H: descobrir relações funcionais

Descreve casos em que os alunos são solicitados a explorar a correspondência entre quantidades ou relacionamentos recursivos e desenvolver uma regra que descreva esta relação e quando possível simbolizá-la. A descoberta desta relação vai desde situações simples como “descobrir” a regra em transformações observando a situação inicial e final até situações mais complexas como a proposta pela professora observada.

Exemplo de atividade proposta pela professora:

Solicitou aos alunos determinar quantas pessoas seria possível sentar nas mesas em forma de trapézios em diferentes arranjos. O objetivo dos alunos era relacionar o número de pessoas que poderiam sentar em função da quantidade de mesas em forma de trapézio.

Figura 2- Configuração da mesa trapezoidal



Fonte: Blanton e kaput (2005, p.425)

Os alunos chegaram a generalizar que o número de pessoas era dado pela multiplicação do número de mesas por 3 mais os dois lugares das pontas. Por exemplo, uma mesa o número de pessoas seria dado por $(1 \times 3) + 2$, duas mesas

$(2 \times 3) + 2$ e assim sucessivamente. Para este tipo de atividade é comum o uso de tabelas, que servem como suporte para o aluno analisar os valores para se chegar a um padrão.

Categoria I: prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos

Envolve situações de formulação de conjecturas sobre dados ainda não conhecidos a partir de dados conhecidos sem precisar necessariamente fazer todo o processo. Em geral, envolve situações com quantidades grandes usando como recurso o que se enxergou de resultados pequenos.

Para ilustrar podemos citar a atividade sugerida pela professora. Ela pediu que os alunos determinassem o número de apertos de mãos dados por um grupo de 12 pessoas. Inicialmente eles calculam para um grupo menor de 2, 3, 4 e 5 pessoas e partir dos dados coletados serão capazes de identificar uma regra ou generalização para um grupo de 12 pessoas ou outro qualquer.

Categoria J: identificar e descrever padrões numéricos e Geométricos.

Refere-se às situações nas quais os alunos são levados a identificação de regularidades numéricas, às vezes, geradas geometricamente; padrões em sequências de figuras geométricas ou em conjuntos de expressões numéricas. Os alunos precisarão perceber então a regularidade e descrever o padrão das sequências. Esta identificação de padrão não se restringe apenas às sequências, mas às situações como aquela do aperto de mão. Depois de realizar a atividade para várias quantidades se descobrir então um padrão.

Por fim o grupo das categorias denominadas de Hábitos avançados que vão de K a M constitui, segundo os autores, hábitos de generalizações e conjecturas bem mais complexos. Exige dos alunos um grau de pensamento algébrico bem superior. É comum estes tipos de situações em turmas dos anos finais. Decidimos por não detalhar cada uma delas uma vez que nossa pesquisa se volta para os anos Iniciais.

Segundo os autores algumas posturas apresentadas pela professora contribuíram para o sucesso do desenvolvimento do pensamento algébrico dos seus alunos:

1)propiciar com frequência situações de discussões (“conversas algébricas”) levando os alunos a fazerem suas generalizações, ou seja, transformar uma atividade meramente aritmética no nível de generalizações.

2- Trabalho com temas algébricos na forma espiral por um tempo significativo;

3- Integração de processos algébricos múltiplos e independentemente válidos;

4-Engenharia de Atividades, ou seja, a professora estava desenvolvendo sua própria álgebra desenvolvendo “olhos e ouvidos” para o pensamento algébrico aprendendo a planejar instruções independentemente dos recursos fornecidos nos seminários.

5- A frequência com que as tarefas algébricas são integradas na instrução também é um fator de robustez;

Neste capítulo expomos a nossa metodologia da pesquisa explicitando as etapas da pesquisa, os procedimentos e detalhamos as categorias que irão subsidiar a nossa análise tanto da BNCC quanto das coleções escolhidas. Como já dissemos na introdução nossa análise acontecerá em dois momentos. A primeira análise estará voltada para a BNCC de forma a identificar habilidades que se enquadram ou não em cada categoria e logo em seguida faremos a análise praxeológica das coleções desta vez com foco nos tipos de tarefas presentes em cada coleção.

4 ANÁLISE DA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC)

A BNCC é um documento de caráter normativo que define aquilo que os alunos da Educação básica devem aprender ao longo dos Anos. Ela serve como referência para construção dos currículos da rede municipal, estadual e o Distrito Federal. (Brasil, 2017).

A BNCC propõe cinco unidades temáticas que devem ser trabalhadas preferencialmente correlacionadas: **Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Estatística e Probabilidade**. (grifo nosso). Antes conforme os parâmetros curriculares nacionais (1997) os conteúdos eram agrupados em quatro blocos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação.

Neste capítulo faremos uma análise das habilidades presentes na BNCC do 1º ao 5º ano. Identificaremos quais destas habilidades apresentam indícios de trabalho com o Pensamento Algébrico a partir das categorias de Blanton e Kaput (2005). Apresentaremos quadros sintetizando estas análises seguidos de nossos comentários.

4.1 ANÁLISE DA BNCC A PARTIR DAS CATEGORIAS DE BLANTON E KAPUT (2005)

Para a análise da BNCC tomamos com referência as categorias propostas por Blanton e Kaput (2005). Nesta etapa consideramos as habilidades de todas as Unidades Temáticas e não somente aquelas da Álgebra, pois como aponta Lima (2018) há conceitos algébricos em outras unidades temáticas fazendo uma articulação a Álgebra e estas. O critério adotado foi se tal habilidade propunha algum tipo de tarefa que fizesse menção ao desenvolvimento do pensamento algébrico a partir do referencial adotado para análise das categorias.

4.1.1 Categoria A: explorar propriedades e relações de números inteiros.

Nesta categoria são exploradas as propriedades e relações de números inteiros atentando as estruturas numéricas bem como a exploração das características do sistema de numeração decimal.

Quadro 2- Habilidades ligadas à categoria A

Unidade Temática	Habilidades
Números	(EF01MA07) Compor e decompor número de até duas ordens, por meio de diferentes adições, com o suporte de material manipulável, contribuindo para a compreensão de características do sistema de numeração decimal e o desenvolvimento de estratégias de cálculo. (EF02MA01) Comparar e ordenar números naturais (até a ordem de centenas) pela compreensão de características do sistema de numeração decimal (valor posicional e função do zero). (EF02MA04) Compor e decompor números naturais de até três ordens, com suporte de material manipulável, por meio de diferentes adições. (EF03MA02) Identificar características do sistema de numeração decimal, utilizando a composição e a decomposição de número natural de até quatro ordens. (EF04MA02) Mostrar, por decomposição e composição, que todo número natural pode ser escrito por meio de adições e multiplicações por potências de dez, para compreender o sistema de numeração decimal e desenvolver estratégias de cálculo. (EF05MA02) Ler, escrever e ordenar números racionais na forma decimal com compreensão das principais características do sistema de numeração decimal, utilizando, como recursos, a composição e decomposição e a reta numérica.
Álgebra	(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.

Fonte: O Autor (2022)

No que se refere a olhar para características do sistema de numeração decimal encontramos seis habilidades compreendendo a Unidade Temática Número concentrando o conteúdo sistema de numeração decimal como composição e decomposição de números.

Não encontramos habilidades que tratam diretamente da generalização sobre somas e produtos de números pares e ímpares. Se tratando de propriedades de números encontramos apenas uma habilidade no 4º ano. Logo fica claro que a BNCC apresenta um foco maior no trabalho com as características do sistema de numeração decimal do que explorar mais as propriedades dos números.

4.1.2 Categoria B: explorando propriedades de operações com números inteiros.

Estão contidas nesta categoria as habilidades que levam os alunos explorarem as propriedades das operações dos números inteiros como a comutatividade de adição e multiplicação e a distributiva da multiplicação sobre a adição bem como aquelas que focam na estrutura das operações.

Quadro 3- Habilidades ligadas à categoria B

Unidade Temática	Habilidades
Números	(EF04MA04) Utilizar as relações entre adição e subtração, bem como entre multiplicação e divisão, para ampliar as estratégias de cálculo. (EF04MA05) Utilizar as propriedades das operações para desenvolver estratégias de cálculo.
Álgebra	(EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas.

Fonte: O Autor (2022)

A categoria B configura-se apenas uma habilidade da BNCC mesmo assim na Unidade Temática Números. Esta categoria foi encontrada apenas no 4º ano. O foco é a aplicação das propriedades na resolução de problemas.

4.1.3 Categoria C: explorando a igualdade como expressão de uma relação entre quantidades.

Esta categoria explora o papel algébrico do sinal de igualdade “=” usando o aspecto da equivalência entre expressões do tipo $8 + 4 = ___ + 5$. Consideramos habilidades que destaque o papel da equivalência ao tratar do sinal de igual.

Quadro 4- Habilidades ligadas à categoria C

Unidade Temática	Habilidades
Números	(EF05MA04) Identificar frações equivalentes
Grandezas e Medidas	(EF02MA20) Estabelecer a equivalência de valores entre moedas e cédulas do sistema monetário brasileiro para resolver situações cotidianas. (EF03MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam a comparação e a

	equivalência de valores monetários do sistema brasileiro em situações de compra, venda e troca.
Álgebra	(EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença. (EF04MA14) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos. (EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.

Fonte: O Autor (2022)

A categoria C se faz presente em três habilidades da Unidade temática da Álgebra do 3º ao 5º ano. Não há presença deste tipo de situações nos primeiros anos do Ensino Fundamental. Destacamos algumas habilidades das unidades temáticas Grandezas e Medidas e Números por entendermos que estas apresentam o sinal de igual como representação de equivalência. É o caso da habilidade (EF05MA04) Identificar frações equivalentes. Nesta situação a igualdade não representa a necessidade de um valor, mas de quantidades equivalentes.

4.1.4 Categoria D: tratar o número algebricamente.

Esta categoria considera as habilidades que convida o aluno olhar para a estrutura do número levando-o a fazer certas generalizações sobre o mesmo. Por exemplo: o aluno olhar para dois números com mais de cinco ordens e ser capaz de identificar se sua soma será par ou ímpar sem necessariamente realizar a soma. O aluno deve chegar à conclusão olhando para as características dos números que formam a parcela (par + par, par + ímpar, ímpar + ímpar). Exemplo: 45678 é par ou ímpar? E 85631? E a soma dos dois números? Por quê?

Não encontramos nenhuma habilidade que se relacione diretamente à categoria. É importante destacar que a BNCC propõe o mínimo de habilidades que cada aluno deve desenvolver ao longo dos anos. Ficando, portanto, a cargo do professor trabalhar situações que não estão contemplada na BNCC. Para isto, o professor precisa estar preparado para fazê-lo.

4.1.5 Categoria E: encontrar valores desconhecidos.

Esta categoria envolve episódios nos quais os alunos são levados a completarem valores desconhecidos. As situações vão desde identificar números desconhecidos em operações simples até o trabalho com quadrados ou triângulos mágicos partindo da percepção de uma regra identificada. Exemplo de situação: completar um quadrado mágico cujo resultado de uma casa seja a soma dos dois vizinhos das casas anteriores.

Quadro 5- Habilidades ligadas à categoria E

Unidade Temática	Habilidades
Álgebra	(EF04MA15) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.

Fonte: O Autor (2022)

A categoria E configurou-se em apenas uma habilidade da Álgebra na turma do 4º ano. Embora bem próxima da categoria C acreditamos que a categoria em análise se diferencia da categoria C por não levar em conta o aspecto algébrico do sinal da igualdade, ou seja, o aspecto relacional do sinal e a equivalência entre as operações.

4.1.6 Categoria F: simbolizar quantidades e operar com as expressões simbólicas.

O foco aqui será o uso de símbolos pela criança para modelar problemas ou operar com expressões algébricas. Não no sentido de expressar e resolver equações usando letras (variável) até pelo fato de que nesta etapa não se exige isto da criança. Apenas simbolizar no sentido de contexto de mensagens secretas ou substituições de valores desconhecidos por figuras como quadradinhos ou até mesmo expressão de forma oral. Outro possível contexto é o de códigos simbólicos para fazer a conversão.

Quadro 6- Habilidades ligadas à categoria F

Unidade Temática	Habilidades
Álgebra	(EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.

Fonte: O Autor (2022)

O quadro 6 indica a presença desta categoria apenas no 5º ano do Ensino Fundamental na Unidade Álgebra. A presença mínima desta categoria é justificável pelo fato da própria BNCC indicar que nos Anos Iniciais os alunos não precisam utilizar linguagem simbólica para desenvolver o pensamento algébrico. Este poderá expressá-lo na linguagem natural.

4.1.7 Categoria G: representar dados graficamente.

Refere-se à construção de gráficos, a partir da utilização de pares ordenados para representar uma relação funcional e uso do gráfico para análise de variação de uma dada função. Os autores incluem esta categoria por representar uma maneira de “codificar informações” (graficamente) que permitem analisar relações funcionais, desempenhando desta forma um apoio no raciocínio algébrico. Aqui as representações gráficas estatísticas não fazem parte. Na BNCC a única habilidade próxima da categoria está mostrada no quadro abaixo.

Quadro 7- Habilidades ligadas à categoria G

Unidade Temática	Habilidades
Geometria	(EF05MA15) Interpretar, descrever e representar a localização ou movimentação de objetos no plano cartesiano (1º quadrante), utilizando coordenadas cartesianas, indicando mudanças de direção e de sentido e giros.

Fonte: O Autor (2022)

A única habilidade que remete a plotagem de gráfico usando coordenadas encontra-se no 5º ano na unidade temática Geometria, porém sem fazer certa relação entre uma quantidade e outra. Entendemos o simples fato de localizar elementos no plano cartesiano sem fazer relações entre uma quantidade e outra não caracteriza indício de trabalho com pensamento algébrico.

4.1.8 Categoria H: descobrir relações funcionais

Nesta categoria fazem parte as habilidades as quais os alunos são levados a explorar relações entre quantidades sendo capaz de identificar uma regra existente nesta relação. A descoberta desta relação vai desde situações simples como “descobrir” a regra em transformações observando a situação inicial e final até situações mais complexas. É comum o uso de tabelas, na qual o aluno analisa os valores para se chegar a um padrão.

Quadro 8- Habilidades ligadas à categoria H

Unidade Temática	Habilidades
Grandezas e Medidas	(EF03MA23) Ler horas em relógios digitais e em relógios analógicos e reconhecer a relação entre hora e minutos e entre minuto e segundos. (EF05MA19) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais.
Álgebra	(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros. (EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.

Fonte: O Autor (2022)

A categoria H apresenta quatro habilidades sendo duas delas na Unidade temática Álgebra e duas na de Grandezas e Medidas. Situações as quais os alunos possam perceber o cálculo de uma grandeza em função da outra. Por exemplo, a quantidade de materiais gastos numa receita pode ser calculada em função da quantidade de pessoas.

Embora percebermos relações funcionais em contextos de grandezas e medidas como, por exemplo, o perímetro de um quadrado em função do seu lado não será abordado este tipo de situação na nossa análise. Centraremos nas habilidades que se encontram no Eixo da Álgebra devido espaço de tempo.

4.1.9 Categoria I: prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos.

Envolve situações de formulação de conjecturas sobre dados ainda não conhecidos a partir de dados que já se tem conhecimento sem precisar que o aluno refaça todo processo. Em geral, envolve situações com quantidades grandes usando como recurso o que se enxergou de resultados pequenos. Por exemplo, calcular o número de apertos de mãos em grupo de 12 pessoas usando o fato da quantidade de apertos de mãos dados por um grupo formado por 6, 7 e 8 pessoas.

Quadro 9- Habilidades ligadas à categoria I

Unidade Temática	Habilidades
Álgebra	(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras. (EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida. (EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras. (EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.

Fonte: O Autor (2022)

O quadro 9 evidencia que a Unidade Temática da Álgebra se destaca neste tipo de categoria e está presente nos três primeiros anos do Ensino Fundamental. O foco para este tipo de categoria está o estudo de sequências (descrever e identificar regularidades e construção).

4.1.10 Categoria J: identificar e descrever padrões numéricos e geométricos.

Refere-se às situações nas quais os alunos são levados a identificar regularidades não apenas em sequências numéricas com suporte de figuras ou não e sequências geométricas, mas em situações como a dos apertos de mão citada anteriormente. Além de preverem as quantidades de apertos (Categoria I) eles serão capazes de descreverem uma regra geral.

Quadro 10- Habilidades ligadas à categoria J

Unidade Temática	Habilidades
Álgebra	(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras. (EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida. (EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos. (EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes. (EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural. (EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.

Fonte: O Autor (2022)

De acordo com o quadro 10 a categoria J é aquela que mais apresenta habilidades concentradas na Unidade Temática da Álgebra. A categoria apenas não se apresenta no 5º ano do Ensino Fundamental.

Do quadro 9 e quadro 10 percebemos que a BNCC sugere um trabalho mais persistente com o caso das sequências e identificação de padrão. No documento a identificação de regularidades é apresentada como uma situação de trabalho com o desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

Vale destacar que algumas habilidades da BNCC foram contempladas tanto na categoria I quanto na categoria J por entendermos que a mesma apresenta as duas características que fazem parte de ambas as categorias propostas por Blanton e Kaput (2005).

A seguir temos um quadro relacionando a quantidade de Habilidades ligadas à Álgebra que se relacionam com as categorias identificadas por Blanton e Kaput (2005).

Quadro 11- Quantidade de Habilidades da Unidade Temática Álgebra ligadas às categorias de Blanton e Kaput (2005)

Categorias propostas por Blanton e Kaput (2005)	Habilidades do Eixo da Álgebra	Total de Habilidades
A-Explorar propriedades e relações de números inteiros.	-----	-----
B-Explorar propriedades das operações com números inteiros.	EF04MA13	01
C-Explorando a igualdade como expressão de uma relação entre quantidades.	(EF03MA11) (EF04MA14) (EF05MA10)	03
D- Tratar o número algebricamente.	-----	-----
E- Encontrar valores desconhecidos.	(EF04MA15)	01
F- Simbolizar quantidades e operar com as expressões simbólicas.	(EF05MA11)	01
G- Representar dados graficamente.	-----	-----
H- Descobrir Relações Funcionais.	(EF05MA12) (EF05MA13)	02
I- Prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos.	(EF01MA10) (EF02MA09) (EF02MA11) (EF03MA10)	04
J- Identificar e descrever padrões numéricos e Geométricos.	(EF01MA09) (EF01MA10) (EF02MA09) (EF02MA10) (EF03MA10) (EF04MA11) (EF04MA12)	07

Fonte: O Autor (2022)

De acordo com o quadro acima percebemos que as categorias: Explorar propriedades e relações de números inteiros, tratar o número algebricamente e representar dados graficamente não se configuram em nenhuma habilidade da Unidade temática Álgebra.

As categorias: Explorar propriedades das operações com números inteiros, encontrar valores desconhecidos e simbolizar quantidades e operar com as

expressões simbólicas são contempladas cada uma delas em uma habilidade do Eixo da Álgebra apenas nas turmas do 4º ano e 5º ano. A categoria Descobrir Relações Funcionais configura-se apenas numa habilidade na turma do 5º ano.

Em termos de quantidades de habilidades contempladas destacou-se as categorias prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos e identificar e descrever padrões numéricos e Geométricos com 4 e 7 habilidades respectivamente. Algumas habilidades fizeram parte das duas categorias por entendermos que se enquadram nas duas características.

Vimos, portanto, que as habilidades propostas no documento da BNCC ao longo do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental contemplam praticamente todas as ideias de pensamento algébrico propostas por Blanton e Kaput (2005) como promissoras de um trabalho voltado para o foco mais no pensamento do que na linguagem simbólica.

Queremos deixar claro que o documento por si só não garante a efetividade do trabalho com o pensamento algébrico nem tão pouco a ausência ou um pequeno número de habilidades em algumas categorias analisadas configura-se como prioridades para algum tipo de conteúdo. O documento serve para nortear o trabalho pedagógico do professor, mas será este que irá na prática realizar este trabalho.

Agora que temos uma noção de quais habilidades presentes na BNCC se enquadram em cada uma das categorias propostas por Blanton e Kaput (2005) para o tratamento com o pensamento algébrico é hora de partirmos para a segunda parte de nossa análise. Desta vez o foco serão as coleções escolhidas e a identificação de tipos de tarefas que podem ser potencializadoras com o trabalho voltado para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

5 ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DAS COLEÇÕES

Este capítulo traz a análise praxeológica das coleções. Apresenta então o bloco prático técnico, ou seja, as tarefas e técnicas encontradas e em alguns casos apresenta a tecnologia e teoria. A análise foi realizada por etapa. Primeiro de forma individual com cada coleção tomando como referência as categorias de Blanton e Kaput relacionando-as às habilidades da BNCC.

Nesta etapa, devido ao tempo e espaço, centramos nossa análise nas atividades que fazem parte da Unidade Temática da Álgebra. Porém, em algum momento será possível que expusemos algumas atividades que fazem parte de outros eixos, mas que se relacionam com alguma ideia da unidade temática Álgebra. Outra questão é o fato desta atividade explorar umas das ideias apresentadas pelo nosso referencial teórico.

Relacionamos as atividades às habilidades da BNCC que estão explícitas em cada página do livro didático na forma de códigos disponibilizados pelos autores. Seguimos a ordem das categorias propostas por Blanton e Kaput (2005) que usamos como principal referencial para realizar as análises. Quando necessário realizamos agrupamentos de alguns conteúdos numa mesma categoria por ter certa semelhança na hora da análise. Encerramos com as considerações e conclusões acerca da análise realizada.

5.1 TIPOS DE TAREFAS QUE FAZEM PARTE DA CATEGORIA A

Como mencionamos na análise da BNCC não encontramos habilidades da BNCC que tratassem diretamente das propriedades dos números como generalizações de soma de números pares + pares, ímpar + ímpar e par + ímpar. Contudo, encontramos duas atividades pontuais presentes nas Unidades temáticas Números e Estatística e Probabilidade que exploram propriedades de números do ponto de vista de sua estrutura nas coleções analisadas.

TN1 são tipos de tarefas que abordam as propriedades e relações de números pares e ímpares com foco na observação da estrutura dos números. Na figura 3 o aluno precisa classificar números em pares ou ímpares com até 5 casas

decimais, por exemplo, o numeral 35 000. Enxergamos esta atividade com potencial para desenvolvimento do pensamento algébrico, pois é trabalhada a ideia de generalização da soma de pares e ímpares evidenciadas pelos autores. Independente da quantidade de algarismos os numerais pares sempre terão a terminação: 0,2,4,6 e 8 e os ímpares: 1, 3, 5, 7 e 9.

Os tipos de tarefas a seguir tem respaldo na tecnologia expressões algébricas e na teoria Álgebra.

TN1- Classificar números em pares ou ímpares.

tn1.1 – Classificar números em pares ou ímpares a partir da observação de sua estrutura.

tn1.1. Observar o numeral que ocupa a ordem das unidades: se este for 0,2,4,6 ou 8 o numeral será par; caso termine em 1,3,5,7 ou 9 será ímpar.

Figura 3- Atividade de classificação de números pares e ímpares a partir da observação de sua estrutura.

1 NÚMERO NATURAL PAR E NÚMERO NATURAL ÍMPAR

a) ATIVIDADE ORAL EM GRUPO Você se lembra de como reconhecer se um número natural é par ou ímpar? Converse com os colegas sobre isso e, depois, complete.

- Um número é par quando o algarismo das unidades é 0, 2, 4, 6 ou 8.
- Um número é ímpar quando o algarismo das unidades é 1, 3, 5, 7 ou 9.

b) Agora, escreva se cada número é par ou ímpar.

471 <u>Ímpar.</u>	15972 <u>Par.</u>
388 <u>Par.</u>	153 <u>Ímpar.</u>
1705 <u>Ímpar.</u>	35000 <u>Par.</u>
16 <u>Par.</u>	849 <u>Ímpar.</u>

Dante, 4º ano (2017,p.31)

A atividade da figura 4 trabalha com a conjectura de somas e produtos de números pares e ímpares. Este tipo de atividade apareceu de forma pontual numa coleção analisada. E leva o aluno a realizar uma generalização para somas e produtos de números pares e ímpares.

TN2- Conjecturar sobre somas e produtos de números de acordo com sua paridade.

tn2.1- Analisar somas e produtos de números (pares e pares, ímpar e ímpar, par e ímpar).

tn.2.1.1- A partir de casos particulares conjecturar as somas e produtos de números par com par, ímpar com ímpar e par com ímpar.

Figura 4- Atividade de conjectura de somas e produtos de números pares e ímpares.

- 8 Complete com **sempre, nunca** ou **às vezes**.
- a) Número ímpar + número ímpar. → Nunca dá um número ímpar.
 - b) Número ímpar × número ímpar. → Sempre dá um número ímpar.
 - c) Número ímpar + número par. → Sempre dá um número ímpar.
 - d) Número ímpar × número par. → Nunca dá um número ímpar.
 - e) Resultados da tabuada do 3. → Às vezes são números ímpares.
 - f) Resultados da tabuada do 4. → Nunca são números ímpares.

Dante, 3º ano (2017, p.162)

O quadro 12 apresenta uma síntese da distribuição dos tipos de tarefa TN1 e TN2 nas coleções analisadas.

Quadro 12- Distribuição das tarefas de classificação de números pares e ímpares

Tipo de Tarefa (T)		Tarefa (t)		Frequência das tarefas por coleções e ano de Escolaridade (1º ao 5º ano)									
				Buriti Mais Matemática					Ápis				
				1º	2º	3º	4º	5º	1º	2º	3º	4º	5º
TN1	Classificar números em pares ou ímpares	tn.1.1	Classificar números em pares ou ímpares a partir da observação de sua estrutura.	0	0	4	0	0	0	1	4	1	0
TN2	Conjecturar sobre somas e produtos de números de acordo com sua paridade.	tn2.1	Analisar somas e produtos de números (pares e pares, ímpar e ímpar, par e ímpar).	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

Fonte: O Autor

O tipo de tarefa classificar números em pares ou ímpares na coleção Ápis foi contemplada do 2º ao 4º ano, enquanto que na coleção Buriti Mais Matemática não

foi identificada apenas no 3º ano. Dentre estas poucas exploravam a classificação dos números a partir de sua estrutura, ou seja, partindo de valores menores para generalizarem com valores quaisquer.

Já o tipo de tarefa que envolve conjecturas de somas e produtos de números pares ou ímpares ocorreu apenas de forma pontual no 3º ano do Ensino Fundamental e mesmo assim na Unidade temática Estatística e Probabilidade. Para Blanton e Kaput (2005) conjecturar é um dos aspectos do trabalho com o pensamento algébrico.

Percebemos que há uma certa ausência nas coleções analisadas e até na própria BNCC no tratamento das propriedades dos números. Segundo Blanton e Kaput (2005) atividades que abordem as propriedades de números constitui indícios do tratamento do Pensamento Algébrico.

5.2 TIPOS DE TAREFAS QUE FAZEM PARTE DA CATEGORIA B

Aqui agrupamos os tipos de tarefas pertencentes à categoria B- explorar propriedades das operações com os números inteiros. Por serem turmas dos anos iniciais restringiremos nossa análise ao conjunto dos números naturais. Em geral, o discurso tecnológico- teórico se dar no próprio campo da Aritmética, sobretudo, nas estruturas e propriedades das operações.

O tipo de tarefa TO1 aborda as propriedades das operações de maneira investigativa. São tipos de tarefas que levam os alunos a generalizar as propriedades da adição e multiplicação de forma, ou seja, partindo de casos particulares para se chegar no caso geral (generalização). Nas figuras 5 e 6 são abordadas a Comutatividade da Adição e da Multiplicação respectivamente; as figuras 7 e 8 o elemento neutro da Adição e da multiplicação; e as figuras 9 e 10 a propriedade Associativa da Adição e da Multiplicação.

TO1 – Identificar as propriedades das operações

to1.1- Identificar a propriedade comutativa da adição.

τ01.1.1 – Realizar cada soma e perceber que ao trocar-se as parcelas os resultados são sempre iguais, ou seja, a soma não se altera.

Figura 5- Atividade de investigação da comutatividade da adição

2 Efetue agora estas adições e veja se elas confirmam o que aconteceu nas adições da atividade anterior.

a) $3 + 4 = \underline{7}$
 $4 + 3 = \underline{7}$

b) $800 + 67 = \underline{867}$
 $67 + 800 = \underline{867}$

c) $60 + 10 + 20 = \underline{90}$
 $20 + 10 + 60 = \underline{90}$
 $10 + 60 + 20 = \underline{90}$

3 De acordo com o que você observou nas adições, responda: O que acontece na adição quando trocamos a ordem das parcelas?

O resultado, ou a soma, permanece o mesmo.

Dante, 4º ano (2017, p.106)

to 1.2.- Identificar a propriedade comutativa da multiplicação.

τ0 1.2.1 – Realizar as multiplicações propostas no item a e perceber que invertendo a ordem dos fatores não se altera o produto. (No item c da 1a atividade, a calculadora é utilizada para agilizar os cálculos e perceber a regularidade: a ordem dos fatores não altera o resultado).

Figura 6- Atividade de Investigação da comutatividade da multiplicação

Explorar e Descobrir

Vamos explorar 3 regularidades da multiplicação.

1ª atividade

a) Registre os resultados e, depois, confira nas tabuadas da página 126.

$3 \times 4 = \underline{12}$ $7 \times 8 = \underline{56}$ $5 \times 9 = \underline{45}$
 $4 \times 3 = \underline{12}$ $8 \times 7 = \underline{56}$ $9 \times 5 = \underline{45}$

b) **ATIVIDADE ORAL EM GRUPO** Converse com os colegas sobre o que você observou nessas multiplicações e responda: O que acontece com o resultado da multiplicação quando trocamos a ordem dos fatores?
O resultado não muda.

c) **CALCULADORA**
 Agora, use uma calculadora e verifique mais estes casos.

$3 \times 89 = \underline{267}$ $65 \times 44 = \underline{2860}$ $206 \times 21 = \underline{4326}$
 $89 \times 3 = \underline{267}$ $44 \times 65 = \underline{2860}$ $21 \times 206 = \underline{4326}$

Dante, 4º ano (2017,p.131)

to 1.3.- Identificar a propriedade elemento neutro da adição.

to 1.3.1 – Realizar as somas propostas e a partir das suas regularidades perceber que a soma de qualquer número por zero resulta no próprio número.

Figura 7- Atividade de investigação do elemento neutro da adição

4 Efetue as adições. Depois, responda à questão proposta.

a) $6 + 0 = \underline{6}$ c) $45 + 0 = \underline{45}$ e) $0 + 1394 = \underline{1394}$
 b) $0 + 37 = \underline{37}$ d) $875 + 0 = \underline{875}$ f) $7400 + 0 = \underline{7400}$

O que acontece na adição quando uma das parcelas é 0 (zero)?

O resultado é sempre igual à outra parcela.

106 cento e seis

Dante, 4º ano (2017, p.106)

to 1.4.- Identificar a propriedade elemento neutro da multiplicação.

to 1.4.1 – Realizar as multiplicações propostas e perceber as regularidades perceber que o produto de qualquer número por 1 resulta no próprio número e o seu produto por zero é sempre zero.

Figura 8- Atividade de investigação do elemento neutro da multiplicação

2ª atividade

a) Registre os resultados e confira nas tabuadas.

$3 \times 1 = \underline{3}$ $1 \times 5 = \underline{5}$ $1 \times 9 = \underline{9}$ $7 \times 1 = \underline{7}$

b) ATIVIDADE ORAL EM GRUPO Converse com os colegas e responda: O que acontece com o resultado da multiplicação quando um dos fatores é 1? O resultado é igual ao outro fator.

3ª atividade

a) Complete.

$3 \times 0 = \underline{0} + \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$
 $0 \times 2 = 2 \times 0 = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$
 $4 \times 0 = \underline{0 + 0 + 0 + 0 = 0}$
 $0 \times 6 = \underline{6 \times 0 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0}$

b) ATIVIDADE ORAL EM GRUPO O que acontece com o resultado da multiplicação quando um dos fatores é 0 (zero)? O resultado é sempre 0.

Dante, 4º ano (2017, p.131)

to 1.5- Identificar a propriedade associativa da adição em somas de 3 parcelas.

to 1.5.1 – Realizar as somas na ordem indicada pelos parênteses ou setas e perceber que a soma independe da ordem estabelecida.

Figura 9- Atividade de investigação da propriedade associativa da adição

6 Vamos verificar se o que aconteceu na atividade anterior também acontecerá nos casos abaixo.

a) Faça inicialmente as adições indicadas com ou sem parênteses e registre.

• $12 + 5 + 3 = \underline{20}$
 $12 + 5 + 3 = \underline{17 + 3}$
 $12 + 5 + 3 = \underline{12 + 8}$
 $12 + 5 + 3 = \underline{20}$
 $12 + 5 + 3 = \underline{15 + 5}$

• $300 + (20 + 40) = \underline{360}$
 $(300 + 20) + 40 = \underline{360}$
 $(300 + 20) + 40 = \underline{320 + 40}$

b) Agora, responda: Ao agrupar as parcelas de modos diferentes, o resultado foi sempre o mesmo? Sim.

Na adição com mais de 2 parcelas, posso agrupar as parcelas do modo que achar melhor, pois o resultado será sempre o mesmo. Veja como fiz nos exemplos abaixo.

$45 + 3 + 17 = 65$ $550 + 50 + 1237 = 1837$ $995 + 734 + 5 = 1734$

20 600 1000

Dante, 4º ano (2017, p.131)

to 1.6- Identificar a propriedade associativa da multiplicação.

to 1.6.1 – Realizar as multiplicações na ordem indicada pelos parênteses ou setas e perceber que o produto independe da ordem estabelecida.

Figura 10- Atividade de investigação da associatividade da multiplicação.

1 Veja na lousa a multiplicação que a professora pediu aos alunos que efetuassem. Neusa e Ivo seguiram caminhos diferentes.

$4 \times 3 \times 10 = ?$

Neusa: $4 \times 3 \times 10 = 12 \times 10 = \underline{120}$

Ivo: $4 \times 3 \times 10 = 4 \times 30 = \underline{120}$

a) Observe os 2 caminhos e complete os cálculos.

b) Quais foram os resultados obtidos? 120 e 120.

c) Agora, calcule assim: $4 \times 3 \times 10 = \underline{40 \times 3 = 120}$

Dante, 4º ano (2017, p.132)

O quadro a seguir sintetiza o tipo de tarefa TO1 que tratam da investigação das propriedades das operações adição e multiplicação.

Quadro 13- Distribuição das tarefas de investigação das propriedades da adição e multiplicação.

Tipo de Tarefa (T)		Tarefa (t)		Frequência das tarefas por coleções e ano de Escolaridade (1º ao 5º ano)									
				Buriti Mais Matemática					Ápis				
				1º	2º	3º	4º	5º	1º	2º	3º	4º	5º
TO1	Identificar as propriedades das operações	to.1.1	Identificar propriedade comutativa da adição. a	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0
		to.1.2	Identificar propriedade comutativa da multiplicação. a	0	0	4	2	0	0	0	1	3	0
		to.1.3	Identificar propriedade elemento neutro da adição. a	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0
		to.1.4	Identificar propriedade elemento neutro da multiplicação. a	0	0	1	2	0	0	0	1	1	0
		to.1.5	Identificar propriedade associativa da adição na soma de três parcelas. a	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0
		to.1.6	Identificar propriedade associativa da multiplicação. a	0	0	0	2	0	0	0	0	2	0

Fonte: O Autor (2022)

A partir do quadro acima percebemos que o único ano no qual são tratadas todas as propriedades das operações são no 4º ano do Ensino Fundamental, embora algumas delas apareçam também no 3º ano. Para os autores o fato de os alunos generalizarem certas propriedades de números inteiros como $nx1 = n$ para quaisquer valores de n ou $a - 0 = a$ para todo valor de a constituem indícios do pensamento algébrico nos alunos.

TO2 representam atividades que mostram a aplicação das propriedades como facilitadoras na resolução de alguns cálculos. Por exemplo, na figura 11 se usa a associatividade da Adição e na figura 12 a associatividade da multiplicação. Em ambos os casos estas são usadas pelos alunos para facilitarem os seus cálculos. Uma estratégia usada por eles é trabalharem com dezenas, centenas exatas.

TO2 – Aplicar propriedades das operações como facilitadoras das resoluções de cálculos.

to 2.1 – Aplicar a propriedade da associatividade da adição na resolução de cálculos.

to 2.1.1 – Realizar a associação adequada das parcelas de forma a encontrar somas exatas para facilitar o cálculo. (Por exemplo, no item b o aluno soma primeiro $3996 + 4$ para resultar na unidade de milhar exata 4000 e em seguida somar com 580.

Figura 11- Aplicação da propriedade associativa da adição na resolução de cálculos.

7 Agrupe de forma conveniente e calcule a soma mentalmente. Registre os agrupamentos como nos exemplos acima.

a) $24 + 58 + 6 = \underline{88}$ 	d) $5 + 37 + 25 + 3 = \underline{70}$
b) $3996 + 580 + 4 = \underline{4580}$ 	e) $2500 + 2500 + 2500 + 2500 = \underline{10000}$
c) $95 + 5 + 38 = \underline{138}$ 	f) $1837 + 600 + 400 = \underline{2837}$

cento e sete **107**

Dante, 4º ano (2017, p.107)

to2.2 – Aplicar a propriedade da associatividade da multiplicação na resolução de cálculos.

to 2.1.1 – Realizar a associação adequada dos fatores de forma a encontrar produtos exatos para facilitar o cálculo. (Por exemplo, no item (d) o aluno multiplica primeiro 2×50 para obter o valor 100 e em seguida multiplica por 16 resultando em 1600.

Figura 12- Aplicação da propriedade associativa da multiplicação na resolução de cálculos.

► CÁLCULO MENTAL

Escolha a melhor maneira de agrupar os fatores e calcule mentalmente.

$$a) 9 \times 6 \times 5 = \underline{270}$$

$$9 \times 30$$

$$b) 4 \times 5 \times 9 = \underline{180}$$

$$20 \times 9$$

$$c) 7 \times 100 \times 4 = \underline{2800}$$

$$28 \times 100$$

$$d) 2 \times 16 \times 50 = \underline{1600}$$

$$100 \times 16$$

$$e) 3 \times 4 \times 2 \times 3 = \underline{72}$$

$$8 \times 9$$

$$f) 5 \times 4 \times 6 \times 5 = \underline{600}$$

$$20 \times 30$$

$$g) 5 \times 2 \times 6 = \underline{60}$$

$$10 \times 6$$

$$h) 2 \times 3 \times 5 \times 20 = \underline{600}$$

$$6 \times 100$$

Dante, 4º ano (2017, p.132)

O quadro a seguir apresenta a distribuição dos tipos de tarefas analisadas nas coleções.

Quadro 14- Distribuição das tarefas de aplicação das propriedades das operações na resolução de cálculos

Tipo de Tarefa (T)		Tarefa (t)		Frequência das tarefas por coleções e ano de Escolaridade (1º ao 5º ano)									
				Buriti Mais Matemática					Ápis				
				1º	2º	3º	4º	5º	1º	2º	3º	4º	5º
TO2	Aplicar propriedades das operações como facilitadoras das resoluções de cálculos.	to.2.1	Aplicar a propriedade da associatividade da Adição na resolução de cálculos.	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0
		to.2.2	Aplicar a propriedade da associatividade da multiplicação na resolução de cálculos.	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0

Fonte: Os autores (2022)

De acordo com o quadro 14 tipos de tarefas voltadas para aplicação da propriedade associativa da adição e da multiplicação na resolução de problemas ocorrem apenas no 4º ano da coleção Ápis não sendo contemplada na outra coleção analisada. Acreditamos que esta iniciativa poderia ser mais bem explorada em outros anos do Ensino Fundamental.

5.3 TIPOS DE TAREFAS QUE FAZEM PARTE DA CATEGORIA C

Nesta categoria buscamos apresentar tarefas que exploram o papel algébrico do sinal de igualdade “=”. São consideradas atividades que não exigem obrigatoriamente um resultado, mas que seja enfatizado o papel relacional da igualdade. Prezamos tratar o aspecto da equivalência entre quantidades e ou expressões do tipo $8 + 4 = ___ + 5$. Outros pontos explorados são as propriedades da igualdade e situações em que há o mesmo sentido de equivalência sem necessariamente apresentar o símbolo da igualdade, como o caso das balanças de dois pratos.

TI1 representam tipos de tarefas as quais é trabalhado o aspecto relacional do sinal da igualdade. Embora seja trabalhada a determinação de valores desconhecidos há um contexto diferente daquele apresentado pelas atividades da categoria E. Aqui trataremos do cálculo de valores desconhecidos não em sentenças do tipo $5 + ___ = 10$, mas do tipo $5 + ___ = 4 + 2$. A proposta é trabalhar o aspecto da equivalência proposto nas igualdades. Na figura 13 a equivalência é apresentada através de duas adições (item a), duas subtrações (item b), adição e subtração (item c) e na figura 14 entre duas multiplicações (item f).

TI1 – Determinar valores que tornam uma igualdade verdadeira.

ti1.1 Determinar valores que tornam uma igualdade formada por duas adições verdadeira. (item a; d);

τ_i 1.1.1 – Somar o primeiro membro e diminuir do valor dado no segundo membro (item a; d);

τ_i 1.1.2 – Somar o primeiro membro e contar do valor dado no segundo membro até o valor obtido na primeira soma.

ti1.2 Determinar valores que tornam igualdade formada por duas subtrações verdadeira (item b; e);

τ_i 1.2.1 – Calcular o resultado do primeiro membro e subtrair este valor da quantidade dada no segundo membro.

τ_i 1.2.2 – Calcular o resultado do primeiro membro e contar do valor dado no segundo membro até completar o valor obtido na primeira operação.

ti1.3 - Determinar valores que tornam igualdade formada por uma adição e uma subtração verdadeira (item c);

τ_i 1.3.1 – Calcular a soma do primeiro membro e diminuir este resultado do minuendo do segundo membro.

τ_i 1.3.1 – Calcular a soma do primeiro membro e contar até chegar ao valor do minuendo do segundo membro.

Figura 13- Exemplos de diferentes adições e subtrações com resultados iguais.

2 Complete a igualdade de cada item para que os resultados sejam iguais.

a) $3 + 7 = \underline{9} + 1$	d) $48 + 33 = 70 + \underline{11}$	$\begin{array}{r} 48 \\ + 33 \\ \hline 81 \end{array}$
b) $4 - 1 = 12 - \underline{9}$	e) $50 - 12 = 40 - \underline{2}$	
c) $8 + 11 = 20 - \underline{1}$	f) $\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad} - \underline{\quad}$	

Resposta pessoal.

Dante, 3º ano (2017, p.116)

ti1.4 - Determinar valores que tornam igualdade formada por duas multiplicações verdadeira (item f);

τ_i 1.3.1 – Calcular o produto do primeiro membro e usar a operação inversa do segundo membro para encontrar o valor que multiplicado por 2 resulta em 40 ($40:2 = 20$).

Figura 14- Exemplo de diferentes multiplicações que resulte no mesmo valor (item f)

3 Escreva, em cada quadrinho, o número que falta para tornar cada igualdade verdadeira.

a) $\underline{11} + 25 = 36$	d) $\underline{63} \div 7 = 9$
b) $\underline{38} - 12 = 26$	e) $5 + 10 = 9 + \underline{6}$
c) $2 \times \underline{50} = 100$	f) $4 \times 10 = \underline{20} \times 2$

• Explique aos colegas e ao professor como você pensou para descobrir o número correspondente a cada caso. Resposta pessoal.

Buriti mais Matemática, 5º ano (2017, p.128)

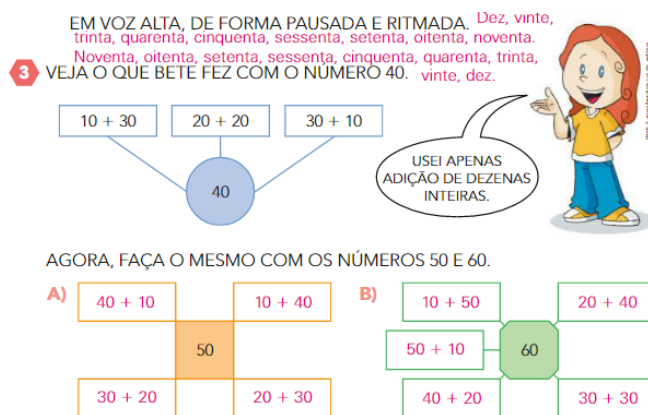
TI2 tratam de tipos de tarefas que levam o aluno a propor ou criar diferentes operações que resultem no mesmo resultado. Estas atividades contextualizam a ideia da equivalência entre duas operações como veremos nas figuras 15 que $40 = 10 + 30 = 20 + 20 = 30 + 10$.

TI2 – Propor diferentes operações que resultem no mesmo resultado.

ti2.1 – Propor diferentes adições que resultem no mesmo resultado.

τi 2.1.1- pensar num valor e completar com o valor que falta para atingir a soma desejada. (uma estratégia usada pelo aluno seria o uso de dezenas exatas).

Figura 15- Exemplo de proposição de diferentes adições que resultem no mesmo resultado

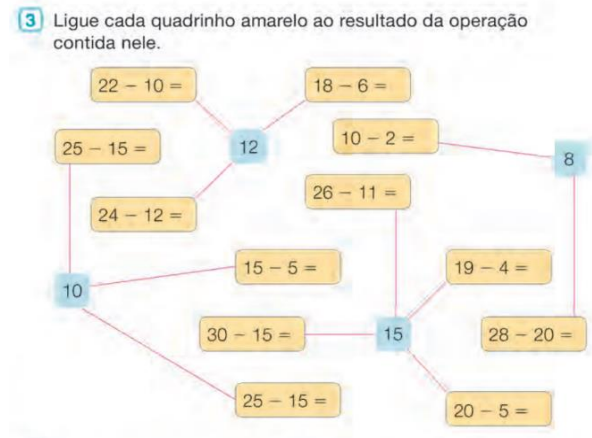


Dante, 2º ano (2017, p.22)

ti2.2 – Propor diferentes subtrações que resultem no mesmo resultado.

τi 2.2.1- calcular cada subtração e associar cada uma aos seu resultado concluindo que diferentes subtrações resultam em valores iguais.

Figura 16- Exemplo de atividade apresentando diferentes subtrações que resultem em resultados iguais.



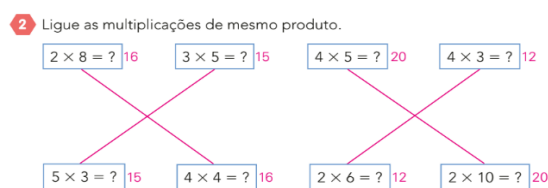
Buriti mais matemática, 2º ano (2017, p.145)

ti2.3 – Propor diferentes multiplicações que resultem no mesmo resultado.

ti 2.1.3- calcular cada multiplicação e associar ao resultado do seu produto.

Neste tipo de atividade o aluno poderá perceber as seguintes equivalências $2 \times 8 = 4 \times 4$, $4 \times 5 = 2 \times 10$ e $2 \times 6 = 4 \times 3$.

Figura 17- Diferentes multiplicações que resultam num mesmo produto



Dante, 2º ano (2017, p.158)

O quadro 15 apresenta uma síntese da distribuição dos tipos de tarefas que foram observadas em ambas as coleções.

Quadro 15- Distribuição das tarefas de determinação de valores que tornam uma igualdade verdadeira.

Tipo de Tarefa (T)		Tarefa (t)		Frequência das tarefas por coleções e ano de Escolaridade (1º ao 5º ano)									
				Buriti Mais Matemática					Ápis				
				1º	2º	3º	4º	5º	1º	2º	3º	4º	5º
TI1	Determinar valores que tornam uma igualdade verdadeira.	ti.1.1	Determinar valores que tornam uma igualdade formada por duas adições verdadeira.	0	0	0	3	2	0	0	2	0	0
		ti.1.2	Determinar valores que tornam igualdade formada por duas subtrações verdadeira.	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0
		ti.1.3	Determinar valores que tornam igualdade formada por uma adição e uma subtração verdadeira.	0	0	0	3	2	0	0	1	0	0
		ti.1.4	Determinar valores que tornam igualdade formada por duas multiplicações verdadeira.	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
TI2	Propor diferentes operações que resulte no mesmo resultado.	ti2.1	Propor diferentes adições que resultem no mesmo resultado.	2	0	1	0	0	2	2	0	0	0
		ti2.2	Propor diferentes subtrações que resultem no mesmo resultado.	2	4	0	0	0	0	0	0	0	0
		ti2.3	Propor diferentes multiplicações que resultem no mesmo resultado	0	0	2	0	0	0	1	1	0	0

Fonte: O Autor (2022)

O tipo de atividade TI1 Determinar valores que tornam uma igualdade verdadeira ocorrem na coleção 1 apenas no 4º e 5º ano enquanto que na coleção 2 apenas no 3º ano. O aspecto da equivalência apresenta uma ênfase para o caso do envolvimento de duas adições, raramente entre duas subtrações ou duas multiplicações. Pensamos que o conteúdo equivalência poderia ser mais bem distribuído ao longo dos anos.

TI2 trabalha o aspecto da equivalência quando são propostas diferentes operações que resultem em valores iguais. A distribuição também apresentou uma descontinuidade e focando com turmas do 1º ao 3º ano. Não houve presença deste tipo de atividade nas turmas de 4º ou 5º anos.

TI3 são atividades que trabalham intuitivamente propriedades relativas à conservação da soma e da diferença, o que contribui para a construção da relação de igualdade. O sinal de igual cumpre o seu papel de relacionar as quantidades e não simplesmente chegar-se a um resultado. A figura 18 traz a conservação não apenas da soma, mas também da diferença.

TI3 – Identificar a conservação do resultado de uma operação.

ti3.1- Identificar conservação do resultado de uma adição.

τi 3.1.1 – perceber que uma soma não se altera se o que for somado a um dos termos deve ser subtraído do outro ou vice-versa.

ti3.2 - Identificar conservação do resultado de uma subtração.

τi 3.2.1 – Somar ou subtrair dos dois termos o mesmo valor.

Figura 18- Exemplo de estratégia para conservação do resultado de uma soma ou diferença.

7 DESAFIO: CONSERVAR A SOMA OU A DIFERENÇA
ATIVIDADE ORAL EM GRUPO Observe os exemplos, troque ideias com os colegas e faça os demais.

$\begin{array}{r} 50 + 20 = 70 \\ -10 \quad +10 \\ \hline 40 + 30 = 70 \end{array}$	a) $\begin{array}{r} 20 + 6 = 26 \\ +4 \quad -4 \\ \hline 24 + 2 = 26 \end{array}$	c) $\begin{array}{r} 15 - 4 = 11 \\ -1 \quad -1 \\ \hline 14 - 3 = 11 \end{array}$
$\begin{array}{r} 12 - 3 = 9 \\ -2 \quad -2 \\ \hline 10 - 1 = 9 \end{array}$	b) $\begin{array}{r} 60 - 40 = 20 \\ +10 \quad +10 \\ \hline 70 - 50 = 20 \end{array}$	d) $\begin{array}{r} 5 + 3 = 8 \\ +2 \quad -2 \\ \hline 7 + 1 = 8 \end{array}$

88 olanta e oio

Dante, 3º ano (2017, p.104)

As atividades propostas exploram o aspecto relacional quando leva o aluno a perceber que para se manter a equivalência no caso da adição deve-se diminuir

um valor de uma parcela e para compensar deve acrescentar o mesmo valor a outra parcela. No caso da subtração deve-se somar ou diminuir o mesmo valor tanto do minuendo quanto do subtraendo. Este contexto de atividade aborda o aspecto relacional quando o aluno percebe a seguinte equivalência $50 + 20 = 40 + 30$.

A seguir apresentamos um quadro com a distribuição deste tipo de tarefa com ocorrência nas coleções analisadas.

Quadro 16- Distribuição das tarefas de determinação de valores que tornam uma igualdade verdadeira.

Tipo de Tarefa (T)		Tarefa (t)		Frequência das tarefas por coleções e ano de Escolaridade (1º ao 5º ano)									
				Buriti Mais Matemática					Ápis				
				1º	2º	3º	4º	5º	1º	2º	3º	4º	5º
TI3	Identificar a conservação do resultado de uma operação.	ti3.1	Identificar conservação do resultado de uma adição.	0	0	0	0	0	0	0	3	5	0
		ti3.2	Identificar conservação do resultado de uma subtração.	0	0	0	0	0	0	0	2	5	0

Fonte: O Autor (2022)

Do quadro 15 é possível vermos que o trabalho de identificação da conservação do resultado de uma operação ocorre apenas na coleção 2 especificamente com turmas do 3º e 4º ano apenas.

Os tipos de tarefas TI4 exploram a manutenção da relação existente entre dois membros de uma igualdade ao ser realizado com um ambos os membros uma certa operação. Na figura 17 exemplifica a manutenção da relação existente entre dois membros de uma igualdade quando se adiciona ou subtrai um mesmo número a ambos os membros. As situações podem ser estendidas para o contexto de uso de balanças de dois pratos. Tal abordagem é de suma importância para que o aluno possa trabalhar com equações no futuro de forma significativa.

TI4- Reconhecer a manutenção da relação existente entre dois membros de uma igualdade.

ti 4.1 Reconhecer a manutenção da relação existente entre os dois membros de uma igualdade ao adicionar o mesmo número. (item b).

τi 4.1.1- Somar ao segundo membro o mesmo valor somado ao primeiro e em seguida realizar as operações de ambos os lados.

ti 4.2 Reconhecer a manutenção da relação existente entre os dois membros de uma igualdade ao subtrair o mesmo valor. (item a).

τi 4.1.1- Diminuir do segundo membro o mesmo valor subtraído do primeiro e em seguida realizar as operações de ambos os lados.

Figura 19- Exemplo de manutenção da igualdade quando somamos ou adicionamos o mesmo valor.

1 Leia com atenção e procure entender esta propriedade da igualdade. Depois, complete as operações para constatar a propriedade.

Quando somamos ou subtraímos um número a um dos membros ("lados") de uma igualdade, para continuar a ter uma igualdade, devemos efetuar a mesma operação no outro membro.

a) $150 + 21 = 171$
 $(150 + 21) - 10 = 171 - 10$
 $161 = 161$

b) $17 + 11 = 20 + 8$
 $(17 + 11) + 2 = (20 + 8) + 2$
 $30 = 30$

Dante, 4º ano (2017, p.113)

A figura 20 estende esta relação também para o fato da multiplicação (item b) e para a divisão (item d).

ti 4.3 Reconhecer a manutenção da relação existente entre os dois membros de uma igualdade ao serem multiplicados pelo mesmo valor. (item b).

τi 4.3.1- Multiplicar ambos os membros pelo mesmo valor e calcular o valor dos dois membros.

ti 4.4 Reconhecer a manutenção da relação existente entre os dois membros de uma igualdade ao serem divididos pelo mesmo valor. (item d).

τi 4.4.1- Dividir ambos os membros pelo mesmo valor e calcular o valor dos dois membros.

Figura 20- Manutenção da igualdade quando multiplicamos ou dividimos ambos os membros pelo mesmo valor.

8 Complete com números nos traços e com os sinais = ou ≠ nos quadrinhos.

a)	$\boxed{3 + 4}$	$\boxed{=}$	$\boxed{5 + 2}$	c)	$\boxed{30 \div 5}$	$\boxed{=}$	$\boxed{4 + 2}$
	<u>7</u>		<u>7</u>		<u>6</u>		<u>6</u>
	$\boxed{3 + 4 + 6}$	$\boxed{=}$	$\boxed{5 + 2 + 6}$		$\boxed{(30 \div 5) - 1}$	$\boxed{=}$	$\boxed{(4 + 2) - 1}$
	<u>13</u>		<u>13</u>		<u>5</u>		<u>5</u>
b)	$\boxed{63 - 13}$	$\boxed{=}$	$\boxed{5 \times 10}$	d)	$\boxed{10 - 6}$	$\boxed{=}$	$\boxed{9 - 5}$
	<u>50</u>		<u>50</u>		<u>4</u>		<u>4</u>
	$\boxed{2 \times (63 - 13)}$	$\boxed{=}$	$\boxed{2 \times (5 \times 10)}$		$\boxed{(10 - 6) \div 2}$	$\boxed{=}$	$\boxed{(9 - 5) \div 2}$
	<u>100</u>		<u>100</u>		<u>2</u>		<u>2</u>

Vertical numbers on the left margin (pink):
 120000 5
 -10 24000 13
 20
 -20
 00000
 -0
 00
 -0
 00
 -0
 0

Dante, 5º ano (2017, p.230)

O quadro abaixo apresenta uma síntese da distribuição dos tipos de tarefas de reconhecimento da manutenção da relação existente entre dois membros de uma igualdade.

Quadro 17- Distribuição das tarefas de reconhecimento da manutenção da relação existente entre dois membros de uma igualdade.

Tipo de Tarefa (T)		Tarefa (t)		Frequência das tarefas por coleções e ano de Escolaridade (1º ao 5º ano)									
				Buriti Mais Matemática					Ápis				
				1º	2º	3º	4º	5º	1º	2º	3º	4º	5º
TI4	Reconhecer a manutenção da relação existente entre dois membros de uma igualdade.	ti4.1	Reconhecer a manutenção da relação existente entre os dois membros de uma igualdade ao adicionar o mesmo número.	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1
		ti4.2	Reconhecer a manutenção da relação existente entre os dois membros de uma igualdade ao subtrair o mesmo valor.	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0
		ti4.3	Reconhecer a manutenção da relação existente entre os dois membros de uma igualdade ao serem multiplicados pelo mesmo valor.	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
		ti4.4	Reconhecer a manutenção da relação existente entre os dois membros de uma igualdade ao serem divididos pelo mesmo valor.	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Fonte: O Autor (2022)

O quadro 17 mostra que o trabalho com a manutenção da relação existente entre dois membros de uma equação ao ser somado, diminuído, multiplicado ou dividido pelo mesmo número se apresenta apenas de forma pontual na turma do 5º ano. A seguir vamos analisar esta mesma situação em outro contexto: o da balança de dois pratos.

TI5 e TI6 são atividades que apresentam a balança de pratos como recurso com objetivo de explorar as propriedades de uma igualdade, para construir a noção de equivalência. TI5 trata do reconhecimento de uma equivalência e das

propriedades da igualdade levando o aluno a justificar a ocorrência ou não da manutenção da equivalência.

A figura 21 tem por objetivo levar o aluno a reconhecer que uma igualdade não se altera quando se adiciona um mesmo número a seus dois termos.

T15 – Justificar equivalência em balança de dois pratos.

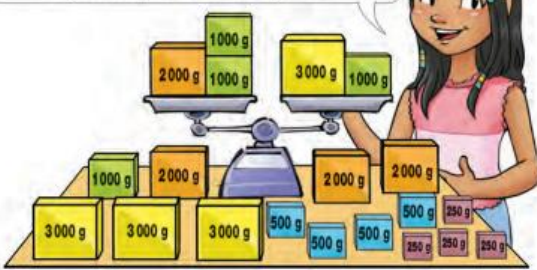
ti5.1 – Justificar equivalência em balança de dois pratos a partir da adição da mesma quantidade em ambos os membros.(item a e c)

ti 5.1.1- Perceber que a balança está em equilíbrio porque apresenta a mesma massa em ambos os membros e ao adicionar 2000 g em ambos os lados continuará em equilíbrio (item a); enquanto se adicionar 250 g em um lado e 500 g no outro a balança não ficará em equilíbrio (item c).

Figura 21- Atividade de justificação da equivalência em balanças de dois pratos quando adiciona em ambos os lados a mesma quantidade.

1 Veja o experimento realizado por Camila.

Quando eu coloquei estes objetos nos dois pratos, a balança ficou em equilíbrio. Isso significa que as somas das massas dos objetos colocados nos pratos são iguais. Veja como representamos essa igualdade.



$$2000 + 1000 + 1000 = 3000 + 1000$$

• Agora, responda:

a) Se Camila colocar um objeto de 2000 g em cada um dos pratos da balança, ela continuará em equilíbrio? Justifique sua resposta.

b) Escreva uma igualdade representando essa situação.
 $2000 + 1000 + 1000 + 2000 = 3000 + 1000 + 2000$

c) E se Camila colocar um objeto de 250 g em um prato e um de 500 g no outro prato? O que irá ocorrer?

d) Indique um modo de Camila acrescentar dois objetos em cada prato e a balança continuar em equilíbrio.

Exemplos de resposta: Em cada prato, ela poderia acrescentar:
 2 objetos de 500 g ou 2 objetos de 250 g.

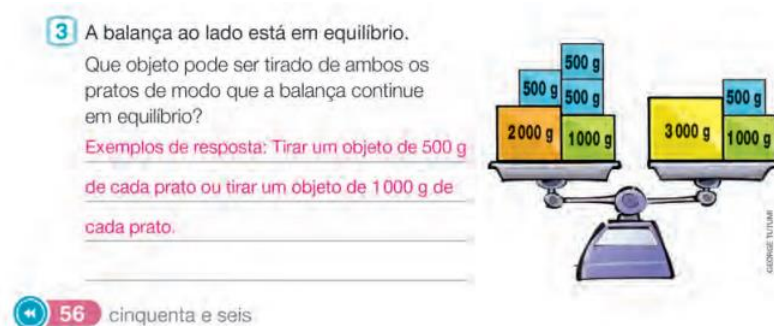
c) Espera-se que os alunos percebam que ocorrerá um desequilíbrio, pois as somas das massas serão diferentes.

A atividade da figura 22 trabalha a noção de conservação da igualdade ao ser retirada de ambos os membros o mesmo valor. A propriedade da igualdade continua mantendo a equivalência. No exemplo da atividade 3 o aluno precisa indicar qual (is) objeto (s) deve (m) ser retirado (s) para manter a equivalência.

ti5.2 – Justificar equivalência em balança de dois pratos a partir da subtração da mesma quantidade em ambos os membros.

ti 5.2.1- A partir do pressuposto da equivalência retirar mesmo valor de ambos os membros da igualdade. Exemplo: retirar um objeto de 500g ou 1000 g de ambos os lados. Esse tipo de tarefa leva o aluno a apresentar várias respostas e consequentemente a pensar em várias estratégias para resolução. É importante a exploração de contextos de massas genéricas, ou seja, para quaisquer valores que são retirados ou acrescentados em ambos os lados.

Figura 22- Atividade de justificação da equivalência em balanças de dois pratos quando se subtrai em ambos os lados a mesma quantidade.



Fonte: Buriti mais matemática, 4º ano (2017, p.57)

A figura 23 estende a mesma ideia para o caso da divisão e multiplicação de ambos os membros.

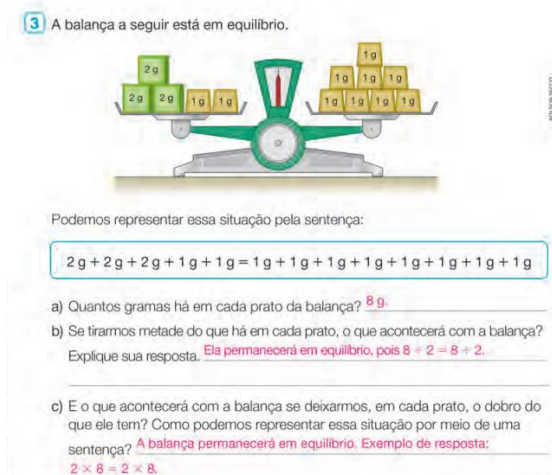
ti5.3 – Justificar equivalência em balança de dois pratos a partir da multiplicação dos dois membros por uma mesma quantidade (item c).

ti 5.3.1- Multiplicar ambos os membros por um valor qualquer e perceber resultados iguais.

ti5.4 – Justificar equivalência em balança de dois pratos a partir da divisão dos dois membros por uma mesma quantidade (item b).

τi 5.4.1- Dividir ambos os valores por 2 e perceber o mesmo valor em ambos os resultados.

Figura 23- Atividade de justificação da equivalência em balanças de dois pratos quando se multiplica ou divide ambos os lados pelo mesmo valor.



Fonte: Buriti Mais Matemática 5º ano (2017, p.125)

TI6 representa tipo de tarefa à qual o aluno é convidado a identificar qual a sentença numérica que representa uma equivalência quer seja no contexto da balança de dois pratos quer seja numa situação problema.

A figura 24 (item a) representa uma atividade a qual o aluno deve identificar qual sentença matemática representa uma equivalência dada;

TI6 – Identificar sentença que representa uma equivalência.

ti 6.1 – Identificar a sentença que representa a equivalência entre várias sentenças (item a).

τi 6.1.1- Partindo da ideia de equilíbrio da balança perceber que a sentença que o sinal que deve separar ambos os membros é o sinal de igualdade, pois ambos os membros tem mesmo valor.

Figura 24- Exemplo de identificação de sentença que representa uma equivalência.

2 Observe a balança de dois pratos que está em equilíbrio.



a) Entre as sentenças a seguir, marque com um X, qual representa a relação entre as massas dos pratos da balança acima.

☒ $1\ 000\ g = 100\ g + 200\ g + 500\ g + 200\ g$

☐ $1\ 000\ g > 100\ g + 200\ g + 500\ g + 200\ g$

☐ $1\ 000\ g < 100\ g + 200\ g + 500\ g + 200\ g$

b) O que acontecerá com a balança se colocarmos um peso de 500 g em cada um dos pratos? *Continuará em equilíbrio.*

c) Represente essa nova situação por meio em uma sentença.
 $500\ g + 1\ 000\ g = 100\ g + 200\ g + 500\ g + 200\ g + 500\ g$

Fonte: Mais Buriti Matemática, 5º ano (2017, p.124)

Na mesma figura anterior no item c a tarefa é representar uma igualdade através de uma sentença;

TI7 – Representar uma equivalência através de sentenças.

ti7- representar através de uma sentença uma equivalência qualquer.

A atividade da figura 25 explora a conservação da igualdade, ao adicionar um mesmo número aos dois membros (lados). Neste caso, a igualdade é mantida. Isso contribui na aprendizagem das equações, por exemplo, onde o sinal de igualdade apresenta sentido de equivalência.

T8- Criar uma situação de equivalência.

ti8- Criar uma equivalência a partir de pesos determinados.

τi 8.1.1- Partindo da ideia que duas quantidades são equivalentes quando representa mesmo valor fazer a escolha adequada dos pesos. (aqui o aluno tem mais de uma opção).

Figura 25- Exemplo de situação de representação de uma equivalência.

5 DESAFIO
Observe os pesinhos que Gilberto tem.

As imagens não estão representadas em proporção.



Dê 2 soluções para o seguinte problema: equilibrar os 2 pratos colocando 3 pesinhos em cada prato.

1ª solução: $1\text{ kg} + 2\text{ kg} + 500\text{ g}$ nos 2 pratos.

2ª solução: $3\text{ kg} + 500\text{ g} + 500\text{ g}$ em um prato e $2\text{ kg} + 1\text{ kg} + 1\text{ kg}$ no outro prato.
Outra solução: $3\text{ kg} + 1\text{ kg} + 500\text{ g}$ em um prato e $2\text{ kg} + 2\text{ kg} + 500\text{ g}$ no outro prato.

226 duzentos e vinte e seis

Fonte: Dante, 5º ano (2017,p. 226)

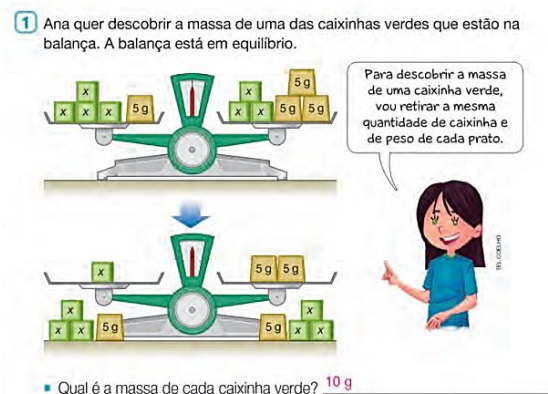
T19 refere-se ao tipo de tarefa que visa à determinação de valores desconhecidos numa igualdade com o suporte da balança de dois pratos. Este tipo de tarefa contextualiza através de situações problemas a noção de equivalência orientada pela BNCC e que se constitui como potencialmente algébrica, pois trata o sinal de igualdade com relacional e não como um indutor de resultados. As figuras 26 e 27 representam este tipo de situação.

T19 – Determinar a massa desconhecida de um objeto em situações de balanças de dois pratos.

ti 9.1 – Determinar o valor unitário da massa de um objeto numa dada equivalência.

π 9.1.1- Retirar a mesma quantidade de ambos os lados da balança para manter para chegar na equivalência pretendida.

Figura 26- Exemplo de determinação do valor unitário da massa de objetos numa dada equivalência.



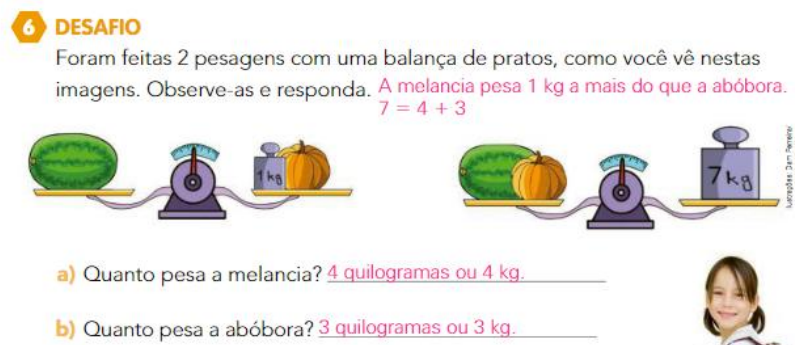
Fonte: Mais Buriti Matemática, 5º ano (2017, p.130)

A figura 27 exemplifica uma situação bem semelhante à anterior. Porém, trata-se de um problema o qual o aluno é levado a calcular a massa de um determinado objeto (melancia) em função de outro objeto, no nosso caso a abóbora.

ti 9.2 – Determinar o valor unitário da massa de dois objetos tomando a massa de um deles como referência para descobrir do outro.

ti 9.2.1- perceber que a massa da melancia equivale a uma abóbora mais um kg e usar este fato para chegar à conclusão que duas abóboras mais um kg é equivalente a 7kg. Retirando-se 1kg de cada lado a equivalência observada é que duas abóboras equivalem a 6kg, logo uma abóbora equivale a 2kg e melancia a 3kg.

Figura 27- Exemplo de determinação da massa unitária de um objeto a partir do conhecimento da massa do outro.



Fonte: Mais Buriti Matemática, 5º ano (2017, p.181)

O quadro abaixo apresenta a distribuição dos tipos de tarefas nas coleções analisadas.

Quadro 18- Distribuição das atividades que abordam equivalências usando recurso da balança.

Tipo de Tarefa (T)		Tarefa (t)		Frequência das tarefas por coleções e ano de Escolaridade (1º ao 5º ano)									
				Buriti Mais Matemática					Ápis				
				1º	2º	3º	4º	5º	1º	2º	3º	4º	5º
TI5	Justificar equivalência em balança de dois pratos.	ti 5.1	Justificar equivalência em balança de dois pratos a partir da adição da mesma quantidade em ambos os membros	0	0	0	1	2	0	0	0	0	0
		ti 5.2	Justificar equivalência em balança de dois pratos a partir da subtração da mesma quantidade em ambos os membros.	0	0	0	1	2	0	0	0	0	0
		ti 5.3	Justificar equivalência em balança de dois pratos a partir da multiplicação dos dois membros por uma mesma quantidade.	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
		ti 5.4	Justificar equivalência em balança de dois pratos a partir da divisão dos dois membros por uma mesma quantidade.	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
TI6	Identificar sentença que representa uma equivalência.	ti6.1	Identificar a sentença que apresenta uma dada equivalência.	0	0	0	2	2	0	0	0	0	0
TI7	Representar uma equivalência através de sentenças.	ti7.1	representar através de uma sentença uma equivalência qualquer.	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0
TI8	Criar uma situação de equivalência.	ti8.1	Criar uma equivalência a partir de pesos já determinados.	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
TI9	Determinar a massa desconhecida de um objeto	ti9.1	Determinar o valor unitário da massa de um objeto numa dada equivalência.	0	2	3	0	5	0	1	0	0	1

em situações de balanças de dois pratos.	ti9.2	Determinar o valor unitário da massa de dois objetos tomando a massa de um deles como referência para descobrir do outro.	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
--	-------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Fonte: O Autor (2022)

O quadro 18 expõe que os tipos de tarefas TI5 Justificar equivalência em balança de dois pratos, TI6 Identificar sentença que representa uma equivalência e TI7 Representar uma equivalência através de sentenças configuram-se apenas na coleção 1 especificamente nas turmas do 4º ou 5º ano.

TI9 determinar a massa desconhecida de um objeto em situações de balanças de dois pratos apresenta uma maior incidência na coleção 1 e também em relação à quantidade de tarefas que abordam o aspecto da equivalência.

No geral podemos dizer que nas duas coleções foram trabalhadas as ideias da equivalência orientadas na BNCC como importantes na construção do pensamento algébrico, pois trata o sinal de igualdade de forma relacional e não como um indutor de uma resposta. Situações como estas podem minimizar o impacto sofrido pelos alunos ao estudarem equações nos anos finais. Estudo este na maioria das vezes imbricados por manipulações e utilização de regras tornando-se assim desmotivador para o aluno.

5.4 TIPOS DE TAREFAS QUE FAZEM PARTE DA CATEGORIA D

A categoria D: tratar o número algebricamente não foi contemplada por nenhuma habilidade da BNCC tanto na Unidade temática da Álgebra como as demais Unidades temáticas. Não encontramos nas coleções analisadas nenhuma atividade pontual desta categoria.

5.5 TIPOS DE TAREFAS QUE FAZEM PARTE DA CATEGORIA E (ENCONTRAR VALORES DESCONHECIDOS).

Nesta categoria agrupamos as atividades que abordam a determinação de valores desconhecidos. Os episódios vão desde encontrar números desconhecidos

em operações simples até o trabalho com quadrados ou triângulos mágicos partindo da percepção de uma regra identificada.

TVD1 agrupa tarefas que exploram a determinação de valores desconhecidos em operações cujo valor não representa o resultado da operação. Atividades deste tipo introduz informalmente as ideias da Álgebra como $\square + 15 = 20$ ou $? + 15 = 20$ ou $x + 15 = 20$ que serão abordadas nos Anos Finais. Na figura 28 é calculada uma parcela desconhecida conhecendo-se uma delas e a soma (itens c - e), determinar o minuendo conhecendo a diferença (item d) e determinar o subtraendo conhecendo a diferença (item f).

TVD1- Determinar valor desconhecido nas operações.

tvd 1.1 – Determinar valores desconhecidos numa adição conhecendo sua soma e uma das parcelas. (item c; e).

τ vd 1.1.1 – Subtrair a parcela conhecida do valor da soma para encontrar a outra parcela. O respaldo desta técnica está na operação inversa (adição/subtração).

τ vd 1.1.2 – Contar da parcela conhecida até chegar ao resultado da soma.

tvd 1.2 – Determinar minuendo de uma subtração conhecendo o valor da diferença. (item d).

τ vd 1.2.1 – Calcular a soma entre a diferença e o subtraendo.

tvd 1.3 – Determinar o subtraendo de uma subtração conhecendo o valor da diferença. (item f).

τ vd 1.3.1 – subtrair a diferença do minuendo para encontrar o subtraendo.

τ vd 1.3.2 – Contar da diferença até o minuendo para encontrar o subtraendo.

Figura 28- Exemplo de determinação de valor desconhecido numa adição ou subtração

4 Complete com o número que falta em cada item.

a) $11 + 4 = \boxed{15}$ c) $\boxed{5} + 2 = 7$ e) $14 + \boxed{5} = 19$
 b) $12 - 5 = \boxed{7}$ d) $\boxed{9} - 1 = 8$ f) $7 - \boxed{3} = 4$

Dante, 2º ano (2017, p.118)

A figura 29 aborda o cálculo de um dos fatores desconhecidos numa multiplicação a partir do conhecimento do valor do produto.

tvd 1.4 – Determinar valores desconhecidos numa multiplicação.

τvd 1.4.1 – utilizando a operação inversa: dividir o produto pelo fator conhecido.

Figura 29- Exemplo de determinação de valores desconhecidos numa multiplicação.

4 Observe o exemplo e determine o fator que falta em cada caso.

Exemplo: $16 \times \boxed{15} = 240$

$$\begin{array}{r} 240 \overline{) 16} \\ 80 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

 $\boxed{15}$

1. $45 \times \boxed{18} = 810$

$$\begin{array}{r} 810 \overline{) 45} \\ 360 \\ 0 \end{array}$$

 $\boxed{18}$

2. $31 \times \boxed{211} = 6541$

$$\begin{array}{r} 6541 \overline{) 31} \\ 34 \\ 31 \\ 0 \end{array}$$

 $\boxed{211}$

3. $93 \times \boxed{69} = 6417$

$$\begin{array}{r} 6417 \overline{) 93} \\ 837 \\ 0 \end{array}$$

 $\boxed{69}$

Buriti Mais Matemática, 4º ano (2017, p.113)

A figura 30 traz uma atividade que o aluno precisa encontrar o divisor conhecendo o dividendo e quociente (a e d), o dividendo conhecendo o divisor e o quociente (b e c).

tvd 1.5 – Determinar o divisor numa divisão conhecendo o quociente e dividendo. (a e d).

			dividendo.										
		tv.d.6	Determinar o dividendo numa divisão conhecendo o divisor e quociente.	0	0	0	0	1	0	0	1	0	2

Fonte: O Autor (2022)

Da análise da BNCC verificamos que apenas uma habilidade presente no 4º configura-se como presente o trabalho com valores desconhecidos. No entanto, a análise das coleções nos mostra que este trabalho vem ocorrendo em quase todos os anos do Ensino Fundamental. Na coleção 1 ocorre uma certa ausência de atividades que envolvam o cálculo de valores desconhecidos no contexto da divisão.

As tarefas TVD2 exploram resoluções de problemas cuja conversão em sentença matemática é uma igualdade com uma operação na qual um dos termos é desconhecido. Estes termos não representam o resultado da operação. Segundo Blanton e Kaput este contexto também representa o aspecto da equivalência e introduz informalmente ideias trabalhadas na Álgebra nos Anos finais como por exemplo, descobrir o valor da incógnita em $42 + x = 70$, ou seja, $x = 28$.

Na figura 31 o aluno deve determinar valores desconhecidos de uma das parcelas da adição e do subtraendo de uma subtração.

TVD2 – Determinar valores desconhecidos em situações problemas.

tv.d.2.1- Determinar valores desconhecidos em situações problemas de uma das parcelas da adição. (item a).

τvd 2.1.1- Contar do numeral 42 até completar o numeral 70.

τvd 2.1.2- Usar a operação inversa (retirar 42 do valor 70).

tv.d.2.2- Determinar o valor desconhecido em situações problemas do subtraendo de uma subtração. (item b).

τvd 2.2.1- Contar do numeral 17 até chegar ao numeral 35.

τvd 2.2.2- Retirar 17 do valor total 35. ($35 - 17$).

Figura 31- Situação-problema envolvendo o cálculo de parcelas desconhecidas numa adição e do subtraendo numa subtração

11 Calcule e responda.

a) Pedro tinha R\$ 42,00, ganhou uma quantia do pai dele e ficou com R\$ 70,00. Quanto ele ganhou do pai? 28 reais ou R\$ 28,00.

b) Ana tinha R\$ 35,00, gastou uma quantia e ficou com R\$ 17,00. Quanto ela gastou? 18 reais ou R\$ 18,00.

$42 + ? = 70$

$35 - ? = 17$

oitenta e nove **89**

Dante, 3º ano (2017, p.89)

Na figura 32 é apresentada uma situação-problema a qual o aluno é levado a calcular o valor desconhecido numa subtração desta vez o minuendo.

tvd2.3- Determinar o valor desconhecido em situações-problemas do minuendo de uma subtração.

τvd 2.3.1- usar a operação inversa ($5 + 3 = 8$) para determinar o total anterior.

Figura 32- Situação-problema envolvendo o cálculo desconhecido do minuendo numa subtração

7 PROBLEMAS

Leia, pense e resolva. Você pode usar adição ou subtração.

a) André comprou este carrinho e ainda ficou com R\$ 3,00. Quanto ele tinha antes da compra?

André tinha 8 reais ou R\$ 8,00 antes da compra.

$? - 5 = 3$ $3 + 5 = 8$ ou $8 - 5 = 3$

As imagens não estão representadas em proporção.

R\$ 5,00

Carrinho.

Dante, 2º ano (2017, p.119)

Já na figura 33 a situação-problema envolve a determinação de um dos fatores desconhecidos numa multiplicação no caso do aluno Leandro e numa divisão no caso da aluna Lúcia.

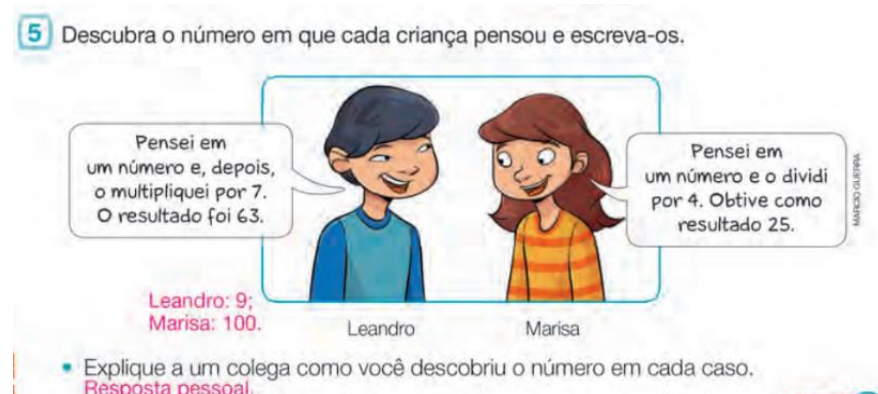
tv2.4- Determinar o valor desconhecido em situações-problemas de um dos fatores da multiplicação.

tv 2.4.1- usar a operação inversa da multiplicação ($63:7= 9$) para descoberta do valor desconhecido.

tv2.5- Determinar o valor desconhecido em situações-problemas do dividendo de uma divisão.

tv 2.4.1- usar a operação inversa da divisão ($25 \times 4 = 100$) para descoberta do valor desconhecido.

Figura 33- Situação-problema envolvendo o cálculo do valor desconhecido numa multiplicação e divisão.



Buruti Mais matemática, 4º ano (2017, p.117)

Por fim as figuras 34 e 35 exploram situações-problemas nas quais os alunos precisam calcular valores desconhecidos usando mais de uma operação. No caso da figura 32 há a presença da adição e subtração e na figura 33 da multiplicação e divisão.

tv2.6- Determinar valores desconhecidos numa situação-problema envolvendo as operações de adição e subtração.

tv 2.6.1- Realizar a operação inversa da adição ($555 - 56$) para encontrar o 499 em seguida fazer a operação inversa ($499 + 28$) para encontrar o valor 527.

Figura 34- Situação-problema envolvendo determinação de valores desconhecidos usando adição e subtração.

3 ATIVIDADE EM DUPLA Complete o esquema, descubram o número e respondam cada um em seu livro.
Pensei em um número, tirei 28, adicionei 56 e obtive 555. Em que número pensei? 527

$$\begin{array}{r} 499 \\ + 56 \\ \hline 555 \end{array}$$

Dante, 5º ano (2017, p.66)

tvD 2.7- Determinar valores desconhecidos em situações-problemas envolvendo multiplicação e divisão.

rvD 2.7.1- Realizar a operação inversa da multiplicação ($96:8$) para encontrar o 12 em seguida fazer a operação inversa da divisão (12×7) para encontrar o valor 84.

Figura 35- Situação-problema envolvendo determinação de valores desconhecidos usando multiplicação e divisão.

5 DESAFIO

a) Pensei em um número, dividi por 7, multipliquei o resultado por 8 e obtive 96. Complete o esquema e responda: Em que número pensei? 84

b) Pensei em um número. Multipliquei esse número por 20. Dividi o resultado por 3. Depois, subtraí 9 e obtive 31. Em que número pensei? 6

86 oitenta e seis

Dante, 5º ano (2017, p. 86)

O quadro abaixo apresenta a distribuição do tipo de tarefa TVD2 - Determinar valores desconhecidos em situações-problemas contempladas nas coleções analisadas do 1º ao 5º ano.

Quadro 20- Distribuição das tarefas envolvendo cálculo de valores desconhecidos em contextos de situações-problemas.

Tipo de Tarefa (T)		Tarefa (t)		Frequência das tarefas por coleções e ano de Escolaridade (1º ao 5º ano)									
				Buriti Mais Matemática					Ápis				
				1º	2º	3º	4º	5º	1º	2º	3º	4º	5º
TVD2	Determinar valores desconhecidos em situações-problemas.	tv2.1	Determinar valores desconhecidos em situações-problemas de uma das parcelas da adição.	0	0	1	1	0	0	2	3	1	0
		tv2.2	Determinar o valor desconhecido em situações-problemas do subtraendo de uma subtração.	0	0	0	1	0	0	1	2	0	0
		tv2.3	Determinar o valor desconhecido em situações-problemas do minuendo de uma subtração.	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
		tv2.4	Determinar o valor desconhecido em situações-problemas de um dos fatores da multiplicação.	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0
		tv2.5	Determinar o valor desconhecido em situações-problemas do dividendo de uma divisão.	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
		tv2.6	Determinar valores desconhecidos numa situação-problema envolvendo as operações de adição e subtração.	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
		tv2.7	Determinar valores desconhecidos em situações-problemas envolvendo multiplicação e divisão.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2

Fonte: O Autor (2022)

Em se tratando do cálculo de valores desconhecidos em situações-problemas podemos perceber que na coleção 1 este tipo de atividade configurou-se apenas no 3º ou 4º ano. Já na coleção 2 há incidência deste tipo de tarefas no 2º ao 4º ano. A maioria das tarefas se encontram na unidade temática Números que se interligam com a unidade temática da Álgebra. Achamos que não tratar de valores desconhecidos nas primeira séries configura-se uma descontinuidade.

TVD3 representam o tipo de tarefa que aborda a determinação de valores desconhecidos no contexto de quadrados mágicos as quais os alunos precisam identificar e seguir uma determinada regra para a composição destes valores. A figura 36 ilustra um exemplo: preencher o quadrado mágico de forma que a soma dos elementos de qualquer linha, coluna ou diagonal devem ser iguais a 12, 24 e 15 nos itens a, b e c respectivamente.

TVD3 – Determinar valores desconhecidos em quadrados mágicos.

tvd 3.1 – determinar valores desconhecidos em quadrados mágicos a partir de uma regra apresentada.

τvd 3.1.1- somar os elementos presentes numa linha, coluna ou diagonal (Por exemplo, 1 e 5 na coluna 3 do item a) e subtrair esse valor da soma solicitada.

τvd 3.1.2- Somar os dois elementos presentes numa linha, coluna ou diagonal (Por exemplo, 9 e 5 da coluna 1 do item b) e contar desse valor até completar a soma exigida.

Figura 36- Situação de cálculo de valores desconhecidos em quadrados mágicos.

6

Você sabe o que são **quadrados mágicos**? Em todas as linhas, colunas e diagonais deles a soma dos números é a mesma (soma mágica). Efetue as adições mentalmente e complete com o que falta.

a) Soma mágica: 12. Use os números naturais de 0 a 8.

→

3

→

8

→

1

→

2

→

4

→

6

→

7

→

0

→

5

b) Soma mágica: 24. Use os números naturais de 4 a 12.

→

9

→

4

→

11

→

10

→

8

→

6

→

5

→

12

→

7

c) Soma mágica: 15. Use os números naturais de 1 a 9.

Exemplo de resposta:

→

6

→

1

→

8

→

7

→

5

→

3

→

2

→

9

→

4

Dante, 4º ano (2017, p.104)

Este tipo de tarefa introduz novamente a ideia de descoberta do valor de uma variável abordada na Álgebra dos Anos Finais. Por exemplo no primeiro quadrado 1 a expressão $5 + a + 1 = 12$.

O quadro 20 sintetiza a frequência com a qual o tipo de tarefa determinação de valores desconhecidos em quadrados mágicos ocorrem nas coleções analisadas ao longos dos anos.

Quadro 21- Distribuição das tarefas envolvendo cálculo de valores desconhecidos em quadrados mágicos.

Tipo de Tarefa (T)		Tarefa (t)		Frequência das tarefas por coleções e ano de Escolaridade (1º ao 5º ano)									
				Buriti Mais Matemática					Ápis				
TVD3	Determinar valores desconhecidos em quadrados mágicos.	Tvd3.1	Determinar valores desconhecidos em quadrados mágicos a partir de uma regra apresentada.	0	0	0	3	0	0	5	0	3	0

Fonte: O Autor (2022)

Percebemos que a incidência deste tipo de tarefa não foi frequente nas coleções analisadas. A ocorrência se deu de forma pontual em ambas as coleções. No caso da coleção 1 apenas no 4º ano e na coleção Ápis foram observadas nas turmas do 2º e 4º ano. Percebemos que não acontece uma sequência com este tipo de tarefa ao longo dos cinco anos.

5.6 TIPOS DE TAREFAS QUE FAZEM PARTE DA CATEGORIA F (SIMBOLIZAR QUANTIDADES E OPERAR COM AS EXPRESSÕES SIMBÓLICAS).

Para esta categoria apenas uma habilidade do 5º ano foi contemplada: (EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido. Já era de se esperar pela pequena incidência deste tipo de atividades, pois na própria BNCC a orientação no eixo da Álgebra é que as crianças nesta fase não precisariam trabalhar com a simbologia da Álgebra.

Não encontramos nenhum tipo de tarefa que de fato exigisse a simbologia, ou seja, o uso de variáveis ou símbolos por parte dos alunos nesta fase analisada. Apesar de encontrarmos atividades no Eixo dos números (determinar valores desconhecidos em contextos de problemas) em nenhuma delas exigia-se que o aluno a representasse com símbolos ou variáveis. Na maioria dos casos, os alunos aplicavam a operação inversa para resolverem.

Contudo, achamos interessante uma atividade presente como forma de desafio para o 5º ano que mesmo não exigindo o uso de variáveis, mas tentativas por parte dos alunos representa uma situação futura comumente vista nos anos finais que os alunos irão fazer uso de variáveis ou simbologias.

As atividades propostas na figura 37 apresentam contextos de resolução de sistemas de equação do 1º grau, em que são dadas as informações da soma de dois números e da diferença entre eles. A tarefa do aluno é determinar os dois números que atendem às condições.

Figura 37- Exemplo de situação-problema que remete à ideia de sistema de equações.

 **6 ATIVIDADE EM DUPLA** Descubram os pares de números em cada item, conhecendo a soma deles e a diferença entre eles. Cada aluno deve responder em seu livro.

a) Soma: 10	b) Soma: 46	c) Soma: 100
Diferença: 4	Diferença: 2	Diferença: 12
Números: <u>7</u> e <u>3</u> .	Números: <u>24</u> e <u>22</u> .	Números: <u>56</u> e <u>44</u> .

7 A soma da idade de Pedro e da idade do pai dele é 70 anos. A diferença entre as idades deles é 30 anos. Descubra e registre a idade de Pedro e a idade do pai dele.

Pedro: 20 anos; pai dele: 50 anos.
 $50 + 20 = 70$ $50 - 20 = 30$

Dante, 5º ano (2017, p.196)

É comum, nos Anos finais, os alunos resolverem a atividade 7 fazendo uso das variáveis x e y da forma: $x + y = 70$ e $x - y = 10$. Nesta fase os alunos podem resolver este tipo de situação com o auxílio de uma tabela por tentativas de valores.

A ausência de atividades envolvendo simbolização era de ser esperada. A própria BNCC traz que nesta fase de ensino os alunos não precisam nem devem trabalhar com uma Álgebra baseada na representação simbólica.

5.7 TIPOS DE TAREFAS QUE FAZEM PARTE DA CATEGORIA G

A categoria G – tratar o número algebricamente não foi contemplada por nenhuma habilidade da BNCC tanto na Unidade temática da Álgebra como as demais Unidades temáticas.

Não encontramos nenhum tipo de tarefa que levassem o aluno a tratar o número de forma algébrica, ou seja, no contexto de conjecturação partindo de casos particulares para gerais.

5.8 TIPOS DE TAREFAS QUE FAZEM PARTE DA CATEGORIA H (DESCOBRIR RELAÇÕES FUNCIONAIS).

Os tipos de tarefas que abordam relações funcionais (TRF) ora tratam de contexto de equivalência ou de proporção conforme as habilidades da BNCC. Nesta categoria trataremos de tipos de tarefas que a proporção não passa despercebida

na sua resolução. Não iremos centrar nossas análises apenas nas habilidades presentes no eixo da Álgebra. Portanto, situações que aparecem na unidade temática número ou Grandezas e Medidas que apresentem o contexto da proporção serão contempladas. Este tipo de atividade remete à ideia de relação proporcional destacada pelos autores.

TRF1 aborda o tipo de tarefa na qual é trabalhada a ideia da proporcionalidade direta. Prezamos por problemas envolvendo grandezas não unitárias que fosse indispensável que o aluno percebesse uma relação entre ambas e calculando a proporcionalidade através da relação existente entre estas quantidades. Na figura 36 a variação de proporcionalidade direta está associada à multiplicação. Nesta atividade, por exemplo, relacionamos a quantidade de voltas com a medida da distância percorrida. Já na figura 37 usamos a divisão para resolver mais um problema de proporcionalidade direta.

TRF1- Calcular quantidades diretamente proporcionais.

trf1.1- Calcular uma quantidade por meio de uma relação proporcional não unitária fazendo uso da multiplicação.

trf1.1.1 multiplicar a grandeza distância percorrida proporcionalmente ao número de voltas. (perceber que o número de voltas dobrou e usar este fato para dobrar a distância percorrida).

Figura 38- Exemplo de cálculo de relação proporcional não unitária usando a multiplicação.

4 PROPORCIONALIDADE

Pedro percorreu 160 metros dando 3 voltas na pista. Se ele der 6 voltas nessa pista, então quantos metros ele vai percorrer?

Complete o esquema e responda.

$\times \underline{2}$

$\begin{array}{r} 160 \\ \times 2 \\ \hline 320 \end{array}$



Resposta: Pedro vai percorrer 320 metros.

A próxima atividade relaciona a proporcionalidade não unitária entre duas grandezas usando a divisão para determinar o valor procurado. Mesmo tratando de números racionais a divisão resulta no valor exato.

trf1.2- Calcular uma quantidade por meio de uma relação proporcional não unitária fazendo uso da divisão.

trf1.1.1 dividir a grandeza preço em reais proporcionalmente ao número de cadernos. (perceber que o número de cadernos é um terço da quantidade anterior e usar este fato para dividir por 3 o preço em reais).

Figura 39- Exemplo de cálculo de proporcionalidade usando a divisão

11 Se Marcela comprar 6 cadernos, todos de mesmo preço, então ela vai gastar R\$ 75,00.
Se comprar apenas 2 desses cadernos, então quanto ela vai gastar?
Dica: 2 é a terça parte de 6.



$$\begin{array}{r} \text{R\$ } 25,00 \\ \hline \div 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 75 \\ -6 \\ \hline 15 \\ -15 \\ \hline 00 \end{array}$$

Diagrama de raciocínio: 6 custam 75, então 2 custam ? (dividindo por 3).

Dante, 4º ano (2017, p.170)

Na próxima atividade os alunos são desafiados a resolver um problema envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais. Neste exemplo, uma das partes é o triplo da outra (bolinhas verdes). Este tipo de atividade trabalha com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.

trf1.3 Calcular quantidades proporcionais a partir da divisão de uma certa quantidade em partes desiguais, mas proporcionais.

trf 1.3.1 - identificar que são 4 bolinhas por grupo e dividir 20 por 4 encontrando 5 grupos. Em seguida multiplicar 5×1 para achar a quantidade de bolinhas brancas e 5×3 a quantidade de bolinhas vermelhas.

Figura 40- Exemplo de situação de proporcionalidade usando a divisão de quantidades em partes desiguais.

1 DESAFIO

Noemi fez uma pulseira com bolinhas verdes e vermelhas. Para cada bolinha vermelha, ela usou 3 bolinhas verdes. Ao todo ela usou 20 bolinhas. Quantas bolinhas eram vermelhas e quantas eram verdes?

Eram 5 bolinhas vermelhas e 15 verdes.

$$\begin{aligned} 1 + 3 &= 4 \text{ (4 bolinhas em cada grupo)} \\ 20 \div 4 &= 5 \text{ (5 grupos)} \\ 5 \times 1 &= 5 \quad \text{e} \quad 5 \times 3 = 15 \end{aligned}$$



Dante, 4º ano (2017, p.166)

É possível que os alunos tentem desenhar para chegar à resposta. Porém, o professor precisa sair de quantidades menores e oferecer situações com valores bem maiores. Essas ideias são reforçadas nos Anos Finais trabalhando a variação de proporcionalidade direta entre 2 grandezas no estudo da regra de três.

A figura 34 representa uma situação problema que trabalha a noção de proporcionalidade entre duas grandezas num contexto de receitas a qual leva o aluno a perceber a proporcionalidade entre o rendimento e a quantidade de ingredientes.

tf 1.4- Calcular quantidades proporcionais de ingredientes em receitas relacionando ao seu rendimento.

τf 1.4.1 Dividir por 2 a quantidade de gramas de goiabadas para 18 biscoitos, pois 18 é metade de 36 e multiplicar por 2 a quantidade de gramas de goiabadas para 72 biscoitos, pois 72 é o dobro de 36. (item a).

τf 1.4.2 – Multiplicar por 10 todos os ingredientes da receita ao perceberem que 360 é 36 x 10. (item b).

Figura 41- Exemplo de proporcionalidade no contexto de receitas culinárias



Proporcionalidade

1 Veja quais são os ingredientes para uma receita de biscoitinhos de goiaba.

Ingredientes

2 xícaras (chá) de farinha de trigo

150 gramas de manteiga

1 xícara (chá) de açúcar

3 colheres (sopa) de água

150 gramas de goiabada firme cortada em tiras finas



a) Sabendo que essa receita rende 36 biscoitos, quantos gramas de goiabada seriam necessários para fazer 18 biscoitos? E 72 biscoitos? Explique suas respostas.

Como 18 é a metade de 36, para fazer 18 biscoitos são necessários 75 gramas de goiabada; e como 72 é o dobro de 36, são necessários 300 gramas de goiabada.

b) Maria quer fazer 360 desses biscoitos para vender. Quanto ela precisará de cada ingrediente para fazer esses biscoitos? Complete a lista a seguir com as quantidades correspondentes.

20 xícaras (chá) de farinha de trigo

1500 gramas de manteiga

10 xícaras (chá) de açúcar

30 colheres (sopa) de água

1500 gramas de goiabada firme cortada em tiras finas

2 Pesquise na internet ou com seus familiares os ingredientes para fazer uma receita de bolo. Descubra a quantidade de porções que é possível preparar com essa receita.

Copie essas informações em seu caderno. Depois, reescreva a receita considerando a quantidade de cada ingrediente para que ela seja suficiente para servir uma porção a cada colega de sua classe. Considere que poderão sobrar porções, mas não poderão faltar. *Resposta pessoal.*

cento e quinze 115

Buriti Mais Matemática, 5º ano (2017, p.115)

A seguir apresentamos o quadro com a distribuição dos tipos de tarefas presentes nas coleções que trabalham a ideia da proporcionalidade nos diversos contextos analisados.

Quadro 22- Distribuição das tarefas que utilizam a ideia de proporcionalidade

Tipo de Tarefa (T)		Tarefa (t)		Frequência das tarefas por coleções e ano de Escolaridade (1º ao 5º ano)									
				Buriti Mais Matemática					Ápis				
				1º	2º	3º	4º	5º	1º	2º	3º	4º	5º
TRF1	Calcular quantidades proporcionais.	trf 1.1	Calcular uma quantidade por meio de uma relação proporcional não unitária fazendo uso da multiplicação.	0	1	1	3	5	1	0	1	2	4
		trf 1.2	Calcular uma quantidade por meio de uma relação proporcional não unitária fazendo uso da divisão.	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1
		trf 1.3	Calcular quantidades proporcionais a partir da divisão de uma certa quantidade em partes desiguais, mas proporcionais.	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
		trf 1.4	Calcular quantidades proporcionais de ingredientes em receitas relacionando ao seu rendimento.	0	1	0	1	3	0	0	0	0	0

Fonte: O Autor (2022)

Do quadro 22 identificamos que os tipos de tarefas que se referem à proporcionalidade apresenta certo destaque para o 5º ano como prescrito pela BNCC. Porém foi possível notar mesmo que de forma mais pontual nos outros anos de escolaridade principalmente as situações envolvendo relação entre ingredientes e rendimentos no contexto de receitas culinárias.

Situações envolvendo a proporcionalidade com quantidades desiguais ocorreram de forma muito tímida. Em ambas as coleções encontramos apenas uma tarefa que trabalhasse este contexto. Todas as situações analisadas se referiam a grandezas diretamente proporcionais. Não encontramos situações que trabalhassem com grandezas inversamente proporcionais.

Tarefas envolvendo proporcionalidade configuram-se como potencialmente favoráveis ao desenvolvimento do Pensamento algébrico. A própria BNCC orienta que estes tipos de problemas através do uso de esquemas ou tabelas facilita a identificação da proporcionalidade e que serão aperfeiçoados pelos alunos no estudo da regra de três nos anos finais do Ensino Fundamental.

5.9 TIPOS DE TAREFAS QUE FAZEM PARTE DA CATEGORIA I E J.

Por apresentar uma certa familiaridade na identificação de tipos de tarefas resolvemos agrupar num único bloco a categoria I — prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos — a categoria J — identificar e descrever padrões numéricos e geométricos. Fazem parte destas categorias aquelas atividades que englobam o conteúdo sequência.

É comum alguns tipos de tarefas envolvendo o conteúdo sequência contemplarem as duas categorias. Por exemplo, uma tarefa que exija do aluno a determinação dos próximos termos de uma sequência contemplando a categoria prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos (categoria I) induz de certa forma o mesmo aluno implicitamente a perceber o padrão ou regularidade na sequência (categoria J). Portanto, as tarefas sobre sequências serão denotadas por TS tanto para categoria I quanto para a J.

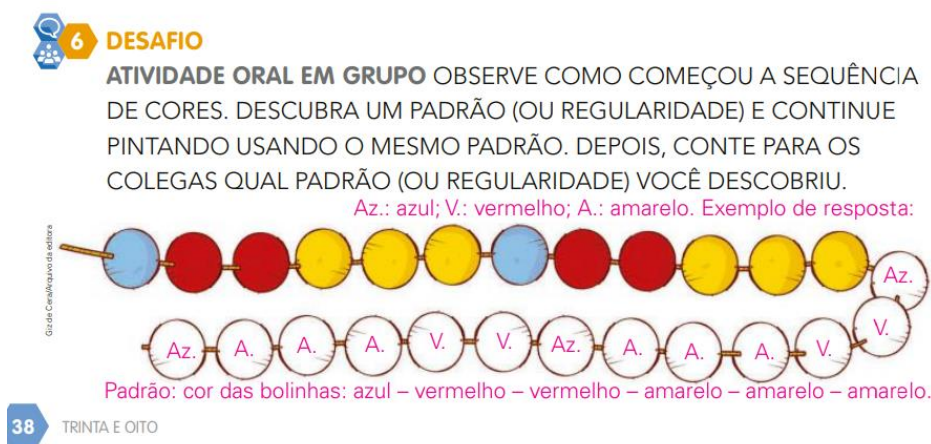
As tarefas TS1 tratam da representação de elementos ausentes em sequências repetitivas. A figura 42 trabalha a continuidade de sequência repetitiva (de números, objetos, cores ou formas geométricas). Na figura 43 a representação do elemento ocorre no meio da sequência e a 44 a representação do elemento se dar de acordo com a sua posição.

TS1- Representar elementos ausentes de uma sequência repetitiva.

ts 1.1- Representar elementos ausentes dando continuidade a uma sequência repetitiva (de números, objetos, cores ou formas geométricas).

ts 1.1.1- Representar os elementos seguintes observando as cores de acordo com o motivo inicial.

Figura 42- Exemplo de atividade de representação de elementos ausentes em sequência repetitiva.

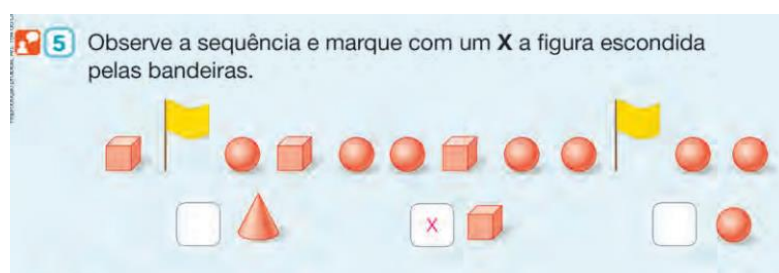


Dante, 1º ano (2017, p.38)

ts 1.2- Representar elementos ausentes no meio de sequências repetitiva (de números, objetos, cores ou formas geométricas).

τs 1.2.1- Representar os elementos ausentes no meio de sequências de acordo com o motivo inicial.

Figura 43- Atividade de representação de elementos ausentes no meio de sequência repetitiva.



Fonte: Buriti Mais Matemática, 2º ano (2017, p.93)

ts 1.3- Representar elementos ausentes de sequência repetitiva (de números, objetos, cores ou formas geométricas) de acordo com a sua posição.

τs 1.3.1- Perceber que a posição da bandeira verde é múltipla de 3: (3,6, 9, ...) e contar de 3 em 3 não passará por 20 e concluir que na 20ª posição teremos bandeira laranja.

Figura 44- Atividade de determinação de elemento ausente em sequência repetitiva a partir de sua posição.

- 2 Observe a sequência de bandeirinhas. Se ela continuar seguindo o mesmo padrão, então que cor terá a vigésima (20ª) bandeirinha?

Exemplo de resposta: Laranja.

24 vinte e quatro



Dante, 5º ano (2017, p.24)

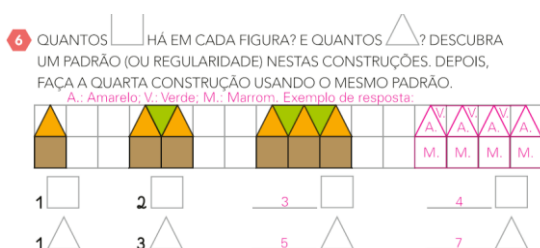
As tarefas TS2 tratam da representação de elementos ausentes em sequências recursivas. A tarefa da figura 45 trabalha com a representação de termos de uma sequência recursiva aditiva (de objetos, cores ou formas geométricas e figura 46 uma sequência recursiva multiplicativa (de objetos, cores ou formas geométricas).

TS2- Representar elementos ausentes de uma sequência recursiva.

ts2.1 – Representar elementos ausentes dando continuidade a uma sequência recursiva aditiva (de objetos, cores ou formas geométricas).

τ s 2.1.1- Acrescentar um quadrado e dois triângulos a cada figura em relação ao termo anterior. Nesta tarefa o aluno pode perceber que as cores dos triângulos podem representar sequências distintas (triângulos laranja e verdes).

Figura 45- Atividade de determinação de elementos ausentes em sequência recursiva aditiva de figuras e objetos.



Dante, 1º ano (2017, p.91)

ts2.2 – Representar elementos ausentes dando continuidade a uma sequência recursiva multiplicativa (de objetos, cores ou formas geométricas).

τ s 2.2.1- Repetir a imagem anterior e acrescentar um tracinho entre cada par de tracinhos.

τ s 2.2.1- Repetir a imagem anterior multiplicando por 2 a quantidade de tracinho da figura anterior.

Figura 46- Determinação de elementos ausentes em sequência recursiva multiplicativa de figuras e objetos.

2 DESAFIO

OBSERVE A SEQUÊNCIA DE IMAGENS E OS TRACINHOS.

Exemplo de resposta:

2 TRACINHOS. 4 TRACINHOS. 8 TRACINHOS. 16 TRACINHOS.

A) DESCUBRA UMA REGULARIDADE PARA A SEQUÊNCIA, DESENHE A 4ª IMAGEM E CONFIRA COM OS COLEGAS. Regularidade: repetir a imagem anterior e acrescentar 1 tracinho entre cada par de tracinhos consecutivos.

B) ESCREVA O NÚMERO DE TRACINHOS DESENHADOS EM CADA IMAGEM.

Dante, 2º ano (2017, p.44)

As figuras 47 a 50 tratam de atividades em que o aluno deve representar elementos de sequências recursivas. Na figura 47 a situação envolve a representação de elemento de uma sequência recursiva numérica aditiva e subtrativa. A figura 48 apresenta um contexto no qual os elementos ausentes estão no início e no final da sequência e a figura 49 trata-se de uma sequência recursiva trabalhando a ideia de múltiplos.

ts 2.3 – Representar elementos ausentes dando continuidade a uma sequência recursiva numérica aditiva (item a).

τ s 2.3.1- Somar uma quantidade ao termo anterior para se obter o próximo termo (no nosso exemplo somar 10).

τ s 2.3.2- Contar pulando certa quantidade do número conhecido para ir para o próximo termo (no nosso exemplo pular 10 unidades).

ts 2.4 – Representar elementos ausentes dando continuidade a uma sequência recursiva numérica subtrativa (item b).

τ s 2.4.1- Retirar de qualquer termo certa quantidade (no nosso exemplo 5) para obter o elemento posterior.

Figura 47- Determinação de elementos ausentes em sequência recursiva aditiva e subtrativa.

11 PADRÃO OU REGULARIDADE

ATIVIDADE ORAL EM GRUPO DESCUBRA UM PADRÃO (OU REGULARIDADE) EM CADA SEQUÊNCIA E CONTE-O PARA OS COLEGAS. DEPOIS, COMPLETE AS SEQUÊNCIAS.

Exemplos de resposta:
Padrão: todos os números terminam em 7 (o algarismo das unidades é 7)

A) 7 17 27 37 47 57 67 77 87 97
na sequência dos números. Ou: a partir do 7, vamos somando 10.

B) 45 40 35 30 25 20 15 10 5
Padrão: subtrair 5 do número anterior, a partir do número 45.

TRINTA E TRÊS 33

Dante, 2º ano (2017, p.33)

ts 2.5 – Representar elementos ausentes em sequência recursiva numérica aditiva antes e após números conhecidos.

τ s 2.5.1- Diminuir de qualquer termo certa quantidade para obter o termo anterior e somar certa quantidade a qualquer termo para obter o termo posterior. (no nosso exemplo, somando ou diminuindo 4).

Figura 48- Atividade de determinação de elementos ausentes em sequência recursiva aditiva com elementos no início e final da sequência.

11 Observe a numeração das casas e descubra o código. Coloque os números nas outras 2 casas e pinte-as como quiser. Código: da esquerda para a direita, ir somando 4 ou, da direita para a esquerda, ir tirando 4. Pintura pessoal.

857 861 865 869 873

Dante, 2º ano (2017, p.207)

ts 2.6 – Representar elementos ausentes em sequência recursiva multiplicativa com ideia de múltiplos.

τ s 2.6.1- Somar ao termo anterior a quantidade representada pelo múltiplo envolvido para conseguir o termo posterior. No nosso exemplo somar sempre 4. (0+4; 4+4; 8+4; 12+4...).

Figura 49- Atividade de determinação de elementos ausentes em sequência recursiva multiplicativa com ideia de múltiplos.

3 Complete a tabela da tabuada do 4.

As imagens não estão representadas em proporção.

Tabuada do 4

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

Tabela elaborada para fins didáticos.

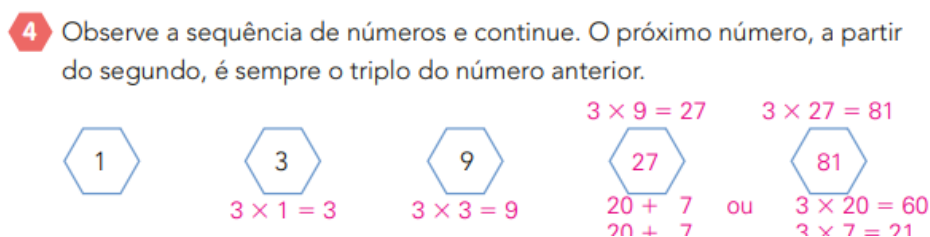
Dante, 2º ano (2017, p,148)

A figura 50 representa uma situação de representação dos elementos de uma sequência numérica recursiva multiplicativa diferente da anterior que acaba gerando uma nova técnica. O termo posterior sempre representa o triplo do anterior.

τ s 2.6.2- Somar o termo anterior três vezes para determinar o termo posterior (Exemplo $9+9+9= 27$; $27+27+27= 81$)

τ s 2.6.3- Multiplicar o valor anterior por 3 para determinar o termo posterior.

Figura 50- Exemplo de sequência recursiva com termo posterior sendo o triplo do anterior



Dante, 2º ano (2017, p.146)

O quadro 23 resume a distribuição ao longo do 1º ao 5º ano dos tipos de tarefas TS1 e TS2 das duas coleções analisadas.

Quadro 23- Distribuição das tarefas de representação de elementos ausentes em sequências

Tipo de Tarefa (T)		Tarefa (t)		Frequência das tarefas por coleções e ano de Escolaridade (1º ao 5º ano)									
				Buriti Mais Matemática					Ápis				
				1º	2º	3º	4º	5º	1º	2º	3º	4º	5º
TS1	Representar elementos ausentes de uma sequência repetitiva.	ts1.1	Representar elementos ausentes dando continuidade a uma sequência repetitiva (de números, objetos, cores ou formas geométricas).	2	0	0	0	0	7	6	0	0	0
		ts1.2	Representar elementos ausentes no meio de sequências repetitiva (de números, objetos, cores ou formas geométricas).	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
		ts1.3	Representar elementos ausentes de sequência repetitiva (de números, objetos, cores ou formas geométricas) de acordo com a sua posição.	0	0	2	0	0	0	1	1	0	0
TS2	Representar elementos ausentes de uma sequência recursiva.	ts2.1	Representar elementos ausentes dando continuidade a uma sequência recursiva aditiva (de objetos, cores ou formas geométricas).	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
		ts2.2	Representar elementos ausentes dando continuidade a uma sequência recursiva multiplicativa (de objetos, cores ou formas geométricas).	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
		ts2.3	Representar elementos ausentes dando continuidade a uma sequência recursiva numérica aditiva.	8	4	3	2	4	6	11	6	4	2

		ts2.4	Representar elementos ausentes dando continuidade a uma sequência recursiva numérica subtrativa.	4	2	1	1	4	1	4	2	0	0
		ts2.5	Representar elementos ausentes em sequência recursiva numérica aditiva antes e após números conhecidos.	3	4	3	1	3	0	6	2	2	2
		ts2.6	Representar elementos ausentes em sequência recursiva multiplicativa com ideia de múltiplos.	0	12	10	0	1	0	13	5	8	0

Fonte: O Autor (2022)

Do quadro 23 podemos identificar que o tipo de tarefa TS1- Representar elementos ausentes de uma sequência repetitiva se apresentam apenas nos dois primeiros anos do Ensino Fundamental. Isso explica-se pela fase a qual se encontra os alunos. Estes têm mais facilidades no trabalho com sequências envolvendo cores e formas que o trabalho com números. Representar elementos de acordo com a posição ocorreu apenas no 3º ano.

As sequências recursivas apresentam uma maior incidência em ambas as coleções analisadas se comparadas com sequencias repetitivas. No caso da coleção 1 estão presentes do 1º ao 5º ano. A BNCC não apresenta habilidade que tratem do conteúdo de sequência no 5º ano o que representa uma descontinuidade. Porém, encontramos atividades de sequências na unidade temática números por todos os anos analisados. As sequências recursivas aditivas e multiplicativas com ideia de múltiplos são as mais frequentes. Na coleção 2 no 5º ano configura-se apenas sequencias aditivas e multiplicativas.

TS3 aborda a construção de sequencias recursivas quando se conhece uma regra e pelo menos um elemento desta sequencia. Na figura 51 temos uma situação de construção de uma sequencia recursiva aditiva (item a), sequencia recursiva subtrativa (item d) e os itens (b e c) abordam a ideia de metade e terça parte.

TS3 – Construir sequencias recursivas.

ts 3.1- Construir uma sequência recursiva aditiva a partir do conhecimento do primeiro elemento e uma regra (item a).

τ s 3.1.1- Situar o primeiro elemento e ir somando 11 para obter o termo seguinte.

ts 3.2- Construir uma sequência recursiva subtrativa a partir do conhecimento do primeiro elemento e uma regra (item c).

τ s 3.2.1- Situar o primeiro elemento e ir diminuindo 15 unidades para encontrar o termo posterior.

ts 3.3- Construir uma sequência recursiva com elemento posterior sendo a metade do anterior (item b).

τ s 3.3.1- Situar o primeiro termo e dividir o valor do termo encontrado por 2 para determinar seu termo posterior.

ts 3.4- Construir uma sequência recursiva em que o termo posterior é a terça parte do anterior. (item c).

τ s 3.4.1- Situar o primeiro termo e dividir o valor do termo encontrado por 3 para determinar seu termo posterior.

Figura 51- Exemplo de construção de sequência recursiva aditiva e subtrativa.

10 É HORA DE CONSTRUIR SEQUÊNCIAS!

a) Forme uma sequência de 6 números, na qual o 1º número é 32 e, a partir do 2º, cada número é 11 a mais do anterior.

32, 43, 54, 65, 76, 87

b) Forme uma sequência de 5 números, na qual o 1º número é 80 e, a partir do 2º, cada número é a metade do anterior.

80, 40, 20, 10, 5

c) Forme uma sequência de 4 números, na qual o 1º número é 27 e, a partir do 2º, cada número é a terça parte do anterior.

27, 9, 3, 1

d) Forme uma sequência de 6 números, na qual o 1º número é 75 e, a partir do 2º, cada número é 15 a menos do que o anterior.

75, 60, 45, 30, 15, 0

162 cento e sessenta e dois

Dante, 3º ano (2017, p.162)

A atividade da figura 52 consiste na construção de uma sequência numérica recursiva em que o termo posterior é sempre o dobro do termo anterior.

ts 3.5- Construir uma sequência recursiva em que o termo posterior é o dobro do anterior.

ts 3.5.1- Situar o primeiro termo e multiplicar seu valor por 2 para determinar o termo posterior.

ts 3.5.2- Situar o primeiro termo e somá-lo com ele próprio e continuar fazendo o mesmo com os próximos termos. (Exemplo: $1 + 1 = 2$; $2 + 2 = 4$; $4 + 4 = 8$).

Figura 52- Exemplo de sequência recursiva com termo posterior sendo o dobro do anterior.

5 DESAFIO

Construa a sequência que tem 7 números, na qual o primeiro número é 1 e, a partir do segundo, cada número é o dobro do anterior. Exemplos de resolução:

$16 = 10 + 6$ $\frac{10 + 6}{20 + 12} = 32$ $\frac{+ 32}{64}$

As imagens não estão representadas em proporção.

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64

$2 \times 1 = 2$ $2 \times 4 = 8$ $2 \times 16 = 32$

$2 \times 2 = 4$ $2 \times 8 = 16$ $2 \times 32 = 64$

Dante, 2º ano (2017, p.142)

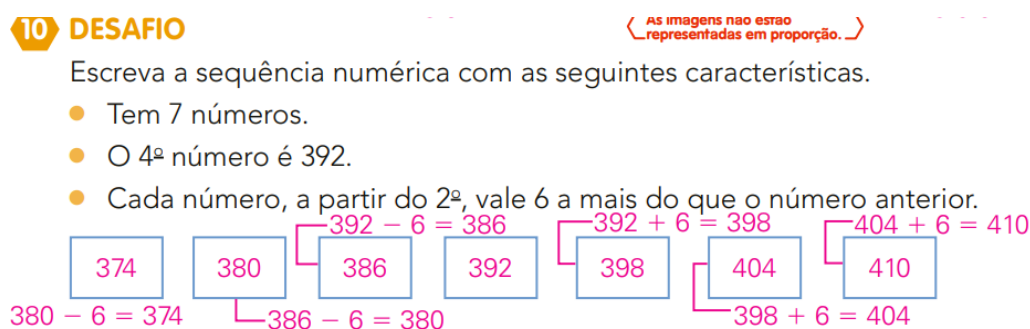
A figura 53 apresenta um contexto de construção de uma sequência recursiva aditiva conhecendo sua regra, a quantidade de termos e o número de uma dada

posição (neste exemplo o 4º termo). Esta atividade é diferente das demais que geralmente era dado o primeiro termo e sua regra. Para construir, pois, esta sequência o aluno carece fazer ora uma adição ora uma subtração.

ts 3.6- Construir uma sequência recursiva conhecendo qualquer um do seu termo e a regra de construção.

τs 3.6.1- Colocar o numeral 392 na quarta posição e diminuir 6 para encontrar seu termo anterior e aumentar 6 para encontrar seu termo posterior.

Figura 53- Construção de sequência recursiva aditiva sem conhecimento do primeiro termo.



Dante, 3º ano (2017, p.89)

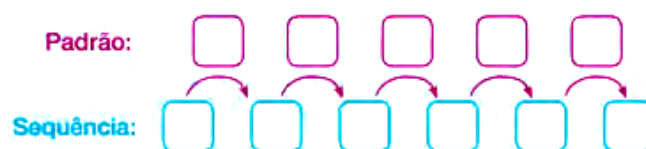
A figura 54 trata de situação na qual o aluno deve construir uma sequência escolhendo o padrão e um número inicial. Este tipo de atividade é interessante uma vez que possibilita aos alunos apresentarem uma diversidade de sequências.

ts 3.7- Construir uma sequência recursiva escolhendo um valor inicial e um padrão qualquer.

τs 3.7.1- Escolher um número qualquer e aplicar a regra criada para todos os termos da sequência.

Figura 54- Construção de uma sequência com números e padrão livres

- 6** Escolha um número para ser o primeiro termo, determine um padrão e crie uma sequência. A sequência depende do número e padrão escolhidos;



Buriti Mais matemática, 2º ano (2017, p.73)

O quadro 24 apresenta a distribuição dos tipos de tarefas de construção de sequências nas coleções analisadas.

Quadro 24- Distribuição das tarefas de construção de sequências recursivas

Tipo de Tarefa (T)		Tarefa (t)	Frequência das tarefas por coleções e ano de Escolaridade (1º ao 5º ano)									
			Buriti Mais Matemática					Ápis				
			1º	2º	3º	4º	5º	1º	2º	3º	4º	5º
TS3	Construir sequência recursivas.	ts3.1 Construir uma sequência recursiva aditiva a partir do conhecimento do primeiro elemento e uma regra	0	0	0	0	0	0	2	2	0	0
		ts3.2 Construir uma sequência recursiva subtrativa a partir do conhecimento do primeiro elemento e uma regra.	0	0	0	0	0	0	1	2	0	0
		ts3.3 Construir uma sequência recursiva com elemento posterior sendo a metade do anterior.	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
		ts3.4 Construir uma sequência recursiva em que o termo posterior é a terça parte do anterior.	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
		ts3.5 Construir uma sequência recursiva em que o termo posterior é o dobro do anterior.	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
		ts3.6 Construir uma sequência recursiva conhecendo qualquer	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0

		um do seu termo e a regra de construção.											
	ts3.7	Construir uma sequência recursiva escolhendo um valor inicial e um padrão qualquer.	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Fonte: O Autor (2022)

Como podemos ver no quadro 24 o tipo de tarefa TS3 que aborda a construção de sequência por parte do aluno quase não acontece na coleção 1 com exceção de apenas 3 delas distribuídas no 2º e 3º ano. Na coleção 2 o resultado não é tão diferente. Comparando-se com outros tipos de tarefas abordando sequência a de construção é a que menos configurou-se nas coleções. Até o momento o tipo de tarefa que apresenta mais ênfase são aquelas voltadas para determinação de elementos ausentes (completar sequências).

TS4 trata do tipo de tarefa na qual o aluno precisa a partir da sua observação identificar sua regra ou padrão. O caso da figura 55 exemplifica a descoberta de uma regra ou padrão numa sequência repetitiva (de números, objetos, cores, formas geométricas).

TS4 – Descrever a regra ou padrão de formação de uma sequência repetitiva.

ts4.1- Descrever a regra de formação de uma sequência repetitiva (de números, objetos, cores, formas geométricas).

τs 4.1.1- observar a sequência e descrever as características dos elementos que compõem o motivo inicial.

Figura 55- Exemplo de descoberta de regra ou padrão em sequência repetitiva

2 Observe a sequência. **Exemplos de resposta:**

1ª 2ª 3ª 4ª 5ª 6ª 7ª 8ª 9ª 10ª 11ª 12ª ...

a) ATIVIDADE ORAL EM DUPLA Descubra um padrão para essa sequência e conte para um colega. **Padrão: repetição da sequência de cores laranja – azul – azul dos círculos.**

TS5 representam o tipo de tarefa à qual o aluno precisa a partir da sua observação chegar à descoberta de uma regra ou padrão de uma sequência recursiva. A figura 56 trata de uma sequência recursiva aditiva (item a) e subtrativa (item b) e a figura 57 sequências recursiva aditiva abordando a ideia de múltiplos.

TS5 - Descrever a regra ou padrão de formação de uma sequência recursiva.

ts 5.1 – Descrever regra ou padrão de formação de uma sequência recursiva aditiva (item a).

τs 5.1.1- Contar quanto falta de um termo para seu termo posterior.

ts 5.2 – Descrever regra ou padrão de formação de uma sequência recursiva subtrativa (item b).

τs 5.2.1- Contar quanto diminui de um termo para o termo posterior.

Figura 56- Descoberta de regra ou padrão em sequência recursiva aditiva e subtrativa.

 **4 ATIVIDADE ORAL EM GRUPO** Descubra um padrão no começo de cada sequência e complete-a. Depois, descreva para os colegas o padrão que você descobriu e veja como eles fizeram. *Exemplos de resposta:*

a)

1	8	15	22	29	36	43	50	57	64	71	78
---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Padrão: somar 7 ao número anterior.

b)

108	105	102	99	96	93	90	87	84	81	78	75
-----	-----	-----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Padrão: tirar 3 do número anterior.

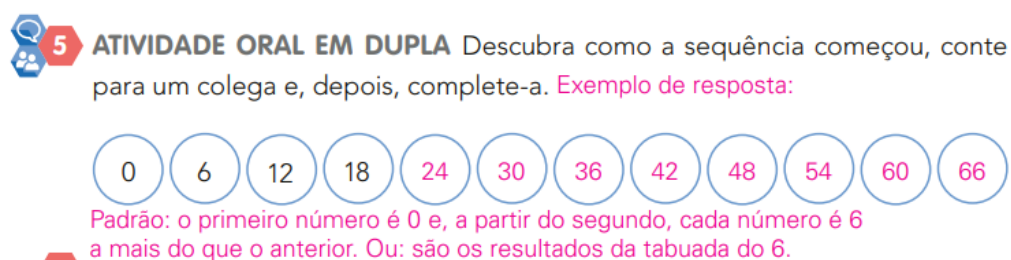
Dante, 3º ano (2017, p.92)

ts 5.3 – Descrever regra ou padrão de formação de uma sequência recursiva aditiva com ideia de múltiplo.

τs 5.3.1- Contar quanto diminui de um termo para o termo posterior.

τs 5.3.2- Associar a sequência à tabuada do 6.

Figura 57- Exemplo de descrição de regra ou padrão em sequência recursiva aditiva com ideia de múltiplo.



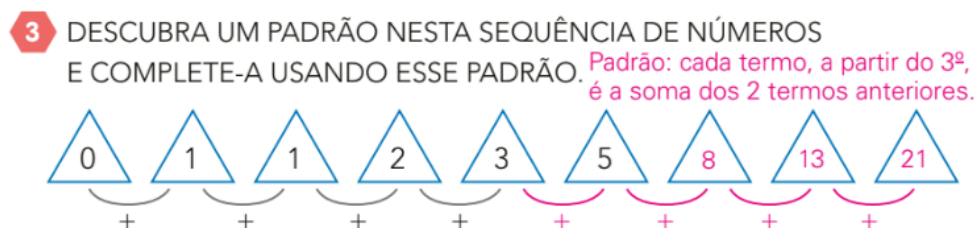
Dante, 3ª ano (2017, p.130)

A seguir na figura 58 traz um exemplo de sequência bem famosa que a sequência de Fibonacci. Trata-se de uma sequência cujo padrão não é fixo. A partir do terceiro termo se encontra o seu valor somando os dois últimos termos anteriores a sua posição. Por exemplo o terceiro termo é a soma do primeiro com o segundo, o quarto termo é a soma do segundo termo com o terceiro e assim sucessivamente.

ts 5.4 Descrever regra ou padrão de formação de uma sequência recursiva que não seja fixo.

ts 5.4.1- Perceber que a partir do terceiro termo o valor deste é a resultado da soma de dois termos anteriores. Exemplo $1 = 0 + 1$, $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 2$, $5 = 2 + 3$ e assim por diante.

Figura 58- Exemplo de sequência cujo padrão de formação não é fixo



Dante, 2º ano (2017, p.87)

A tarefa proposta na figura 59 embora não peça ao aluno de forma explícita para descobrir o padrão resolvemos encaixá-la neste grupo, pois acreditamos que para determinar a quantidade de palitos para a construção de um número qualquer

de quadrados a descoberta do padrão facilitaria ao aluno calcular o número de palitos para qualquer quantidade de quadrados, ou seja, fazer uma generalização. É possível neste contexto chegar -se a uma lei de formação da sequência.

ts 5.5 – Descrever regra ou padrão de formação de uma sequência recursiva tomando como suporte a presença de figuras que possibilitem uma generalização.

ts 5.5.1- perceber que o número de palitos de uma figura para outra aumenta sempre 3 unidades. (figura 1: 4 palitos, figura 2: 7 palitos, figura 3: 10 palitos...).

ts 5.5.2- Perceber que a quantidade de palitos pode ser dada em função do número de quadrados. Por exemplo figura 1 é formada por 1 quadrado. Número de palitos $4 = 3 \times 1 + 1$. A figura 2 é formada por 2 quadrados e 7 palitos $= 3 \times 2 + 1$; A figura 3 é formada por 3 quadrados e 10 palitos $= 3 \times 3 + 1$.

Este tipo de atividade acaba sendo interessante, pois leva o aluno a explorar outros contextos que o de identificar uma relação funcional como determinar o número de palitos em função da quantidade de quadrados. $Q(p) = Q(q) + 1$. Mesmo não exigindo simbolização por parte dos alunos nesta fase a atividade apresenta um forte potencial para o pensamento algébrico, pois além de trabalhar aspecto de generalização também traz o aspecto relacional presente nas funções.

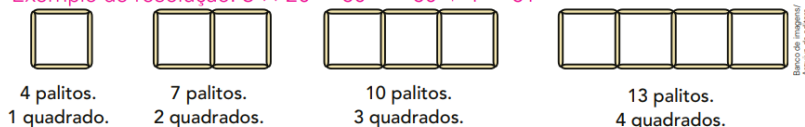
Figura 59- Determinação de quantidades numa sequência recursiva em função de outro elemento da sequência.

3 DESAFIO

Observe a sequência, calcule e responda: Quantos palitos são necessários

para construir 20 quadrados? 61 palitos.

Exemplo de resolução: $3 \times 20 = 60$ $60 + 1 = 61$



Dante, 5º ano (2017, p.95)

T6 englobam os tipos de tarefas as quais os alunos precisam olhar para uma sequência e justificar se estas seguem ou não um determinado padrão. Na figura 60

o aluno é convidado a olhar para uma sequência e justificar se esta apresenta ou não um padrão ou uma regularidade. A figura 61 trabalha que o fato de duas sequências seguindo padrões diferentes resultarem em sequências iguais.

T6 – Justificar o padrão de sequências.

ts 6.1 – Justificar se uma sequência segue um padrão a partir de números aleatórios. (item a).

ts 6.1.1- Observar numerais vizinhos e perceber se estes aumentam ou diminuem na mesma quantidade.

Figura 60- Exemplo de justificação de Padrão em sequência

5 Observe as casas ilustradas abaixo.



a) Na ordem em que estão apresentados, os números dessas casas formam uma sequência que segue algum padrão? Caso sigam, qual?
 Não seguem padrão.

b) Escreva os números dessas casas em ordem crescente.
 23, 25, 27, 29 e 31.

c) A sequência formada por esses números em ordem crescente possui algum padrão? Se possuir, escreva qual.
 Exemplo de resposta: Aumenta de 2 em 2.

Buriti Mais matemática, 2º ano (2017, p.109)

ts 6.2 – Justificar o motivo pelo qual sequências iguais podem ser formadas seguindo diferentes padrões.

ts 6.2.1- Perceber que adicionar 10 a um número e subtrair 4 do total é o mesmo que adicionar 6 a esse número.

Figura 61- Justificação da igualdade de sequências a partir da observação dos padrões de cada uma.

2 Juliano escreveu uma sequência numérica que começava no número 20. Para obter o próximo número, ele adicionou 10 e subtraiu 4. Seguindo essa regra, Juliano obteve a sequência de números abaixo.

20 26 32 38 44 50 56 62 68 74

Clarice escreveu a sequência numérica abaixo, que também começa no número 20. Para obter o próximo número, ela sempre adicionou 6.

20 26 32 38 44 50 56 62 68 74

 a) Por que, apesar de terem seguido regras diferentes, Juliano e Clarice obtiveram sequências numéricas iguais? **Resposta pessoal.**

b) Agora é sua vez. Crie duas regras diferentes que formem sequências numéricas iguais.
Resposta pessoal.

Buriti Mais Matemática, 5º ano (2017, p.61)

O quadro a seguir apresenta a distribuição dos tipos de tarefas TS4 e TS5 analisadas nas coleções.

Quadro 25- Distribuição das tarefas de descrição de regras de sequências

Tipo de Tarefa (T)		Tarefa (t)		Frequência das tarefas por coleções e ano de Escolaridade (1º ao 5º ano)									
				Buriti Mais Matemática					Ápis				
				1º	2º	3º	4º	5º	1º	2º	3º	4º	5º
TS4	Descrever a regra ou padrão de formação de uma sequência repetitiva.	ts 4.1	Descrever a regra de formação de uma sequência repetitiva (de números, objetos, cores, formas geométricas).	0	0	0	0	0	6	1	0	0	0
TS5	Descrever a regra ou padrão de formação de uma sequência recursiva.	ts 5.1	Descrever regra ou padrão de formação de uma sequência recursiva aditiva.	2	4	0	2	3	1	2	1	1	0
		ts 5.2	Descrever regra ou padrão de formação de uma sequência recursiva subtrativa.	2	3	0	1	2	0	1	1	0	0
		ts 5.3	Descrever regra ou padrão de formação de uma sequência recursiva aditiva com ideia de múltiplo.	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0
		ts 5.4	Descrever regra ou padrão de formação de uma sequência	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

			recursiva que não seja fixo.										
		ts 5.5	Descrever regra ou padrão de formação de uma sequência recursiva tomando como suporte a presença de figuras que possibilitem uma generalização.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
T6	Justificar o padrão de sequências.	ts 6.1	Justificar se uma sequência segue um padrão a partir de números aleatórios.	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0
		ts 6.2	Justificar o motivo pelo qual sequências iguais podem ser formadas seguindo diferentes padrões.	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Fonte: O Autor (2022)

Do quadro 25 identificamos que a descrição de padrões em sequências repetitivas configura-se apenas nos dois primeiros anos e na coleção 2. A descrição de regras ou padrões apresentam-se em ambas as coleções mais para o tipo de sequências recursivas, sobretudo, aquelas cujo padrão se relaciona à sequência recursiva aditiva e subtrativa.

O tipo de tarefa TS6 que abordam casos de justificar se uma sequência apresenta ou não um padrão ocorre de forma muito tímida totalizando apenas 3 casos na coleção 1 e nenhuma tarefa deste tipo na coleção 2. Pensamos que este tipo de tarefa poderia ter sido mais explorado uma vez que atividades neste sentido explora o aluno a opinar e ao mesmo tempo apresentar seus argumentos.

Após finalizarmos a seleção das tarefas achamos interessante termos uma visão mais global da quantidade total de atividades por categorias. Assim apresentamos um ranking da quantidade de tarefas agrupadas por conteúdos nas duas coleções. A ideia é através de uma comparação percebermos os conteúdos predominantes em cada uma e tecermos nossos comentários.

5.10 QUANTIDADE DE ATIVIDADES POR CATEGORIAS OU CONTEÚDO.

O quadro abaixo apresenta uma visão mais global do número de tarefas identificadas em ambas as coleções por agrupamento de conteúdo. Agrupamos os

tipos de tarefas de acordo com sua familiaridade nos seguintes conteúdos: Classificação de números em pares e ímpares, propriedades das operações, valores desconhecidos, equivalência, relações funcionais / proporcionalidade e sequências.

Quadro 26- Quantidade de tarefas agrupadas por conteúdo das coleções analisadas.

Quantidade de tarefas por conteúdos nas coleções analisadas		
	Coleção Buriti Mais Matemática	Coleção Ápis
Identificação de números pares e ímpares	4	7
Propriedade das operações	18	29
Valores desconhecidos	29	74
Equivalência	57	32
Sequências	104	119
Relações funcionais / proporcionalidade	18	11

Fonte: O Autor (2022)

Conforme o quadro exposto vimos que as tarefas que fazem parte do conteúdo sequências são as mais predominantes nas duas coleções. O destaque ocorre tanto na frequência quanto na variedade dos tipos de tarefas que fazem parte deste conteúdo como descrição de regularidades, continuação de sequências entre outras. É perceptível a intencionalidade da abordagem deste tipo de conteúdo nas duas coleções.

Na questão de atividades de classificação dos números a partir da observação de sua estrutura foi o tipo de tarefa que apresentou uma menor frequência nas duas coleções o que já fora percebido na primeira análise da BNCC. Não havia habilidades que explorassem as propriedades dos números com foco na sua estrutura para se chegar a uma generalização. O foco se dava mais no sistema de numeração decimal sobretudo na composição e decomposição.

O trabalho com tarefas ligadas à equivalência e cálculo de valores desconhecidos apresentam assimetria nas coleções. Enquanto que na coleção Ápis o cálculo de valores desconhecidos é mais incidente que o aspecto da equivalência na coleção Buriti Mais Matemática ocorre o contrário. Mesmo assim, a frequência

com estes tipos de tarefas é bem presente perdendo apenas para aquelas voltadas para o trabalho com sequência.

O trabalho voltado para as estruturas das operações sobretudo as propriedades da adição e multiplicação apresenta uma maior frequência na coleção Ápis; já as tarefas voltadas para o trabalho com relações funcionais envolvendo o aspecto da proporcionalidade estão mais presentes na coleção 1.

As relações funcionais se fazem presentes também nas duas coleções através de atividades envolvendo proporcionalidade que relaciona duas grandezas envolvidas em diferentes contextos como situações de cálculo de ingredientes em relação ao rendimento, escalas em mapas, divisões em partes desiguais.

No geral, podemos dizer que ambas as coleções trazem nos seus tipos de tarefas a intencionalidade do trabalho com o desenvolvimento do pensamento algébrico contemplando aspectos apresentados pela BNCC como: generalização, equivalência, relação entre igualdade, trabalho com termos desconhecidos, relações funcionais entre outros.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa pesquisa surgiu de inquietações após a publicação da BNCC trazendo a implantação da unidade temática Álgebra para ser trabalhada desde os anos iniciais. Por se tratar de algo novo nos debruçamos a investigar como deveria se dar este trabalho nas séries iniciais. Decidimos então mergulhar no documento normativo, a BNCC e ao constatar que o objetivo da Álgebra nesta fase é desenvolver o pensamento algébrico dos alunos decidimos buscar um pouco mais sobre esta forma de pensar.

Utilizamos a noção de praxeologia que faz parte da teoria antropológica do didático (TAD) para fazermos a análise praxeológica de duas coleções dos anos iniciais. Valemo-nos de vários autores que traziam contribuições acerca do tema em pesquisa. E dentre tantos eles focamos nossa análise a partir das ideias de pensamento algébrico apresentadas por Blanton e Kaput (2005). Utilizamos 10 categorias que representavam práticas de pensamento algébrico identificadas pelos autores a partir da observação de uma turma de 3º ano.

A partir dos contextos apresentados pelos autores em cada categoria analisamos quais habilidades da BNCC se enquadravam em cada uma delas. Em seguida quais atividades das coleções eram favoráveis ao desenvolvimento do pensamento algébrico de acordo com as visões dos autores. Ao longo da análise praxeológica das coleções identificamos situações que nos levaram a refletir e tirar algumas conclusões ou considerações acerca da temática. Achamos pertinente fazê-la primeiro por categorias e ao final no contexto geral.

A categoria A: explorar propriedades e relações de números inteiros apresentou-se bem distribuída ao longo dos anos iniciais tanto na BNCC quanto nos livros didáticos, porém com foco no estudo das características do sistema de numeração decimal sobretudo o valor posicional dos números. Percebemos uma ausência de habilidades e de atividades explorando propriedades e relações entre números. Percebemos um foco ligado diretamente ao Sistema de Numeração Decimal.

A categoria B: explorar propriedades das operações com os números inteiros nos mostra que este aspecto ocorre de forma pontual na BNCC apenas na turma do 4º ano aplicada ao contexto de números naturais. Algumas atividades foram bem pertinentes quando se refere à busca de generalizações de propriedades como, por exemplo, $a + b = b + a$, $a - a = 0$, $a \times b = b \times a$. Para Blanton e Kaput (2005) esse tipo de generalização constitui indícios de pensamento algébrico e é importante que seja abordada desde os primeiros anos.

A categoria C: explorar igualdade como relação entre quantidades mostrou-se na BNCC bem presente (do 3º ao 4º ano) e explorando bem os diversos contextos do sinal de = (igual). O uso do sinal para representar equivalência foi bem intencional sobretudo com a exploração de situações com balanças. Este contexto, segundo os autores, auxiliarão os alunos nas séries finais a trabalhar o conteúdo equação com mais significado.

Foram contempladas situações as quais o sinal de igual trabalha com o aspecto relacional entre quantidades. O contexto é muito propício no desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Estes passam a olhar para este sinal não mais como um indutor do resultado de uma operação como é comumente apresentado nos primeiros anos. E as vezes, pelo despreparo de alguns professores não apresentam aspectos explorados pelos mesmos. Um ponto muito positivo foi de que mesmo as habilidades que contemplem tais aspectos iniciarem no 3º ano conseguimos identificar este trabalho em anos anteriores.

A categoria D: tratar o número algebricamente nos levou a concluir que nem mesmo a BNCC nem as coleções analisadas apresentam um trabalho voltado para este foco. Raras exceções de algumas atividades de classificação de números exploravam este contexto, mas não de forma intencional ou estruturada. Este aspecto do pensamento algébrico precisa receber uma atenção maior e ser inserida no contexto dos anos iniciais. Esta categoria foi a que se fez menos presente como episódio observado pelos autores. É algo preocupante, pois se os livros didáticos não apresentarem este contexto dificilmente os professores farão sozinhos sem uma boa formação e orientação.

A categoria E: encontrar valores desconhecidos embora intencionada por apenas uma habilidade da BNCC para o 4º ano se mostrou bem distribuída nos livros didáticos ao longo dos anos. A determinação de valores desconhecidos se deu no contexto de resoluções de problemas e até mesmo de completar quadrados mágicos que seguissem uma determinada regra. Esta última tarefa foi também observada pelos autores nas suas análises quando fizeram suas observações e para estes refletem a intencionalidade do trabalho com pensamento algébrico. Mesmo se tratando de descobrir valores desconhecidos estes não se referem a resultados. Por isso, constituem também como cenário importante para o trabalho com o aspecto relacional do sinal de igual.

A categoria F: simbolizar quantidades e operar com expressões simbolizadas configurou-se em apenas uma habilidade da BNCC dentro do 5º ano. Porém, não encontramos dentro das coleções atividades que tivessem esta intenção, ou seja, que para o aluno resolvesse um problema necessitasse de representar a situação com símbolos. Na própria BNCC orienta-se que nesta fase de ensino não foque ou exija do aluno o aspecto da representação em símbolos. O que se pode trabalhar é o aspecto da noção de quase variável contextualizando situações partindo de valores numéricos para se chegar no quase algébrico.

A categoria G: representar dados graficamente não se configurou na unidade temática da Álgebra, mas apenas em Geometria voltada mais para a situação de representar objetos a partir de uma coordenada. Esse enfoque não traz representações de situações de pares ordenados que nos levassem a concluir relações funcionais entre eles. Por isso motivo não foram consideradas tais tipos de tarefas. Para Blanton e Kaput (2005) situações de representação gráfica que abordassem este aspecto da relação funcional seria visto como potencialmente algébrica o que não foi nenhum caso das atividades presentes nas coleções.

A categoria H: encontrar relações funcionais configurou-se bem destacada nas unidades temáticas álgebra, Números e Grandezas e Medidas mais uma vez mostrando o caráter algébrico de outras unidades temáticas que se interrelacionam com a Álgebra. É possível vermos alguns exemplos de relações funcionais no contexto de grandezas e medidas, quando se procura identificar por exemplo a

relação existente entre o perímetro e a medida do lado de um quadrado. Vale destacar que tais contextos não fizeram parte da nossa análise.

Em relação à Álgebra o foco acontece no trabalho com a ideia de proporcionalidade. Embora exista uma única habilidade (5º ano) que aborde este tipo de situação foi possível encontramos problemas relacionados na unidade temáticas grandezas e medidas principalmente abordando a proporção entre quantidade de ingredientes de uma receita e o rendimento. Segundo Blanton e Kaput (2005) o trabalho com proporcionalidade desde cedo favorecerão aos alunos a trabalharem com contextos de regra de três explorados nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Percebemos certa ausência na exploração de relações funcionais com tarefas que remetessem à ideia de transformação de um valor inicial a um valor final. Outro contexto é a busca da lei de formação de uma sequência figurativa como o explorado no exemplo da atividade da figura 59. O aluno através do preenchimento de uma tabela poderia identificar a relação existente entre o número de palitos e a quantidade de quadrado.

A categorias I: prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos configurou-se como destaque na Unidade temática Álgebra em quatro habilidades que se distribuem do 1º ao 3º ano. Enquanto a categoria J- identificar e descrever padrões numéricos e geométricos também se destaca na unidade temática Álgebra nas turmas do 1º ao 4º ano apresentando uma descontinuidade no 5º ano o que para nós trata-se de um ponto negativo.

É perceptível na análise praxeológica das coleções o trabalho intencional focando o contexto de atividades que se utilizem de sequências sobretudo aquelas recursivas. São explorados contextos de identificação de regularidades, determinação de elementos e até justificação de pertencimento de elementos a uma sequência analisada.

Sentimos, portanto, falta do trabalho com regularidades em outros contextos diferentes daqueles que não fosse dentro das sequências. Outro contexto não muito vivenciado nas coleções foi aquele que o aluno deveria descobrir um termo mais

distante da sequência. Na maioria das vezes, tratava-se de determinar um termo mais próximo. Para os autores esta última apresenta-se como situação muito favorável ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Da análise praxeológica podemos perceber que as coleções apresentaram atividades que dependendo do entendimento e a correta aplicação por parte do professor potencializa o desenvolvimento do pensamento algébrico por parte dos alunos. Vários elementos característicos do pensamento algébrico puderam ser explorados ao longo das tarefas: a descoberta de generalizações em diversos contextos, determinação de elementos desconhecidos, as ideias de proporcionalidade entre grandezas, descoberta de relações funcionais e os aspectos de equivalência trabalhado por exemplo, com balanças de dois pratos e o aspecto relacional do sinal de igualdade.

As atividades com potencial algébrico identificadas nas coleções não se configuraram apenas na unidade temática Álgebra conforme nossa análise praxeológica. Este é um ponto positivo, pois esta forma de organização das atividades pois corrobora com o que vem sendo pregado na BNCC. A proposta de auxiliar o pensamento algébrico dos alunos não é tratar este aspecto apenas do ponto de vista da Álgebra, mas perpassando por todos os eixos da matemática.

Queremos deixar claro que não será fácil julgar se a aplicação de determinada tarefa auxiliará no desenvolvimento do pensamento algébrico. Isso porque há vários fatores que podem interferir como a forma de abordagem do professor e até mesmo aquilo que é solicitado à criança realizar. Nossa intenção aqui não é mostrar receitas prontas, mas trazer uma contribuição para educadores dos anos iniciais a terem um olhar mais aguçado e experimentar formas de trabalho com a Álgebra que auxiliem no desenvolvimento do pensamento algébrico de seus alunos.

Trata-se de uma realidade nova que deve ser enfrentada pelos professores dos anos iniciais. E enquanto professores devemos estar prontos a enfrentar novos desafios. A Álgebra ou pensamento algébrico daqui para frente fará parte dos contextos das salas de aulas do 1º ao 5º ano. A necessidade por formação voltada para esta temática é urgente.

Nossas descobertas acerca do pensamento algébrico não se esgotam por aqui. Há ainda alguns pontos que ainda me inquieta e que abrirão parênteses para outros pesquisas. Que concepções de pensamento algébrico são apresentadas pelos professores dos anos iniciais? Em quais contextos suas atividades estão alinhadas às ideias de pensamento algébrico apresentadas pelos autores? De que forma são manifestadas algumas destas ideias por alunos dos anos iniciais?

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, J. R.; SANTOS, M. C. Pensamento algébrico em busca de uma definição. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, PR, v. 6, n. 10, p. 34-60, Jan./ jun. 2017.
- ALMOULOU, S. Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos. **Revista Ibero-americana de Educacion Matemática**, n.42, p.09-34, nov. 2015.
- BARBOSA, E.J.T. **Praxeologia do professor**: análise comparativa com Documentos oficiais e do Livro Didático no Ensino de Equações Polinomiais do 1º grau. (Tese de doutorado em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal de Pernambuco), 2017.
- BATISTA, L. A. L.; BARBOSA, J.E.T. Limites de funções reais de uma variável em livros didáticos: organização matemática e didática. **Educ. Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.22, p. 144-170, 2020.
- BITENCOURT, D. V. **Early Algebra na perspectiva do livro didático**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual De Santa Cruz, Ilhéus, 2018.
- BITTAR, M. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. **Zetetiké**, Campinas, SP, v.25, n. 3, set./dez.2017, p.364-387.
- BLANTON, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom*. Transforming thinking, Transforming Practice. Heinemann: Portsmouth, NH.
- BLANTON, M.L. et al. Early Algebra. In: **ALGEBRA: Gateway to a Technological Future**, 2006, Columbia. Algebra: Gateway to a Technological Future. Columbia: The Mathematical Association of America, 2007. p. 7-14.
- BLANTON, M.L.; KAPUT, J. *Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning*. Journal for Research in Mathematics Education, Massachusetts, v. 36 n.5, p. 412-446, nov. 2005.
- BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais. Matemática: Ensino de primeira à quarta Série. Brasília: 1997.
- BRASIL. Ministério da Educação. A Base Nacional Comum Curricular. Brasília: 2017.
- BRASIL. Ministério da Educação. Elementos conceituais e metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo de alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental. Brasília: MEC; SEB, 2012.
- CANAVARRO, A. P. O Pensamento Algébrico na Aprendizagem Matemática nos Primeiros Anos. Quadrante, v.16, n.2, p.81-118, 2007.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D.; BRIZUELA, B. M.; EARNEST, D. *Arithmetic and algebra in early Mathematics Education*. Journal for Research in Mathematics Education, v. 2, n. 37, p. 87-115, mar. 2006.

CHEVALLARD, Y. *Le passage de l'arithmétique a l'algebrique dans l'enseignement des mathématiques au college*. Troisième partie. Voies d'attaque et problemes didactiques. Petit x, Grenoble, n. 23, p. 5-38. 1990.

DANTE, L.R. Ápis matemática, 1º ano: ensino fundamental, anos iniciais- 3 ed. São Paulo: Ática, 2017.

DANTE, L.R. Ápis matemática, 2º ano: ensino fundamental, anos iniciais- 3 ed. São Paulo: Ática, 2017.

DANTE, L.R. Ápis matemática, 3º ano: ensino fundamental, anos iniciais- 3 ed. São Paulo: Ática, 2017.

DANTE, L.R. Ápis matemática, 4º ano: ensino fundamental, anos iniciais- 3 ed. São Paulo: Ática, 2017.

DANTE, L.R. Ápis matemática, 5º ano: ensino fundamental, anos iniciais- 3 ed. São Paulo: Ática, 2017.

FAVERO, D.C.B. **As mudanças geradas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em uma coleção de livros didáticos para o ciclo de alfabetização na abordagem do pensamento algébrico**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) -- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 2020.

FERNANDES, R. K. **Manifestação de pensamento algébrico em registros escritos de estudantes do Ensino Fundamental I**. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

FERREIRA, M. C. N.; RIBEIRO, M.; RIBEIRO, A. J. “Conhecimento matemático para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental”. *Zetetiké*, Campinas, v. 25, n. 3, p. 496-514, set. /dez. 2018.

FERREIRA, M.C.N. **Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: uma análise do conhecimento matemático acerca do Pensamento Algébrico**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do ABC, Santo André, SP. Programa de Pós – Graduação em Ensino de História das Ciências e da Matemática, 2017, 147p.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F.; CRISTOVÃO, E. “Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações Matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico”. In: Seminário luso-brasileiro de investigações Matemáticas no currículo e na formação do professor, 2005, Lisboa. Anais... Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2005.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3 ed. Campinas: autores associados, 2012.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A; MIGUEL, A.; Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Proposições**, São Paulo, v. 7, n. 1, p. 79-91, mar. 1993.

FREIRE, S. R. **Desenvolvimento de conceitos algébricos por professores dos anos iniciais do ensino fundamental**. 2011. 181 p. Tese (Doutorado em Educação Brasileira) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.

JUNGBLUTH, A. **Algebra no currículo de Matemática dos Anos Iniciais: e agora?** Dissertação (Mestrado em Educação científica e tecnológica) - Programa de Pós-Graduação em Educação científica e tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2020.

KAPUT, J. J. (2008). *What is algebra? What is algebraic reasoning?* In Kaput, J. J.; Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (Eds.). *Algebra in the early grades* (pp. 5 -17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

KAPUT, J. *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, 1999.

KIERAN, C. *“Algebraic thinking in the early grades: What is it?”* **The Mathematics Educator**, v. 8, n. 1, p. 139-151, 2004.

KIERAN, C.; PANG J. S.; SCHIFTER, D; NG, S. F. *Early Algebra. Research into its Nature, its Learning, its Teaching*. Hamburg: Springer Open, 2016.

LIMA, J. C. **Pensamento algébrico no currículo do ciclo de alfabetização: estudo comparativo de duas propostas**. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2018.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus Editora, 1997.

MAGINA, S.; OLIVEIRA, C. F. dos S.; MERLINI, V. “O Raciocínio Algébrico no Ensino Fundamental: O debate a partir da visão de quatro estudos”. **Em teia, Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 9, n. 1, p.1-23, 2018.

PERNAMBUCO. Secretaria Estadual de Educação de Pernambuco. Parâmetros para a Educação Básica do Estado do Pernambuco – **Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio**. Recife – PE, 2012.

NCTM. 2000. Princípios e Normas para a Matemática Escolar. (1.ed. 2000) Tradução Portuguesa dos Principles and Standards for School Mathematics. 2.ed. Lisboa: APM, 2008.

NOBREGA, M. C.; RIBEIRO, F. M.; SILVA, T. H. I. “Matemática nos Anos Iniciais e o desenvolvimento do pensamento algébrico”. In: RIBEIRO, A. J.; BEZERRA, F. J. B.; GOMES V. M. S. (Orgs.) **Formação de professores que ensinam Matemática e a Álgebra da educação básica**: Um projeto desenvolvido na Universidade Federal do ABC no âmbito do Observatório da Educação. Campinas: Edições Leitura Crítica, 2017, p.171-188.

RODRIGUES, R.F.; MENEZES, M.B.; SANTOS, M.C. Licenciatura em matemática e o percurso de estudo e pesquisa: uma proposta do modelo epistemológico de referência para o ensino e aprendizagem do conceito de função. **Revista de Educação em Ciências e Matemática**, Amazonas/AM, v.14, set., 2017, p.36-50.

SILVA, D. P. **Caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do ensino fundamental I**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

TOLEDO, C. M. Buriti mais matemática, 1º ano: ensino fundamental, anos iniciais – 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2017.

TOLEDO, C. M. Buriti mais matemática, 2º ano: ensino fundamental, anos iniciais – 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2017.

TOLEDO, C. M. Buriti mais matemática, 3º ano: ensino fundamental, anos iniciais – 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2017.

TOLEDO, C. M. Buriti mais matemática, 4º ano: ensino fundamental, anos iniciais – 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2017.

TOLEDO, C. M. Buriti mais matemática, 5º ano: ensino fundamental, anos iniciais – 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2017.