

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Centro de Tecnologia e Geociências - CTG
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE
Curso de Engenharia Elétrica



**ANÁLISE DO FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO
GLOBALMENTE CONVERGENTE POR MÉTODOS
DE REGIÃO DE CONFIANÇA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

POR

MANOEL DE SÁ JARDIM NETO

Professor Orientador: Geraldo Leite Torres

FEVEREIRO DE 2014

Catálogo na fonte
Bibliotecária Valdicéa Alves, CRB-4 / 1260

J37a

Jardim Neto, Manoel de Sá.

Análise do fluxo de potência ótimo globalmente convergente por métodos de região de confiança. / Manoel de Sá Jardim Neto - Recife: O Autor, 2014.
62folhas. Ilus.simb. e Tabs.

Orientador: Prof. Geraldo Leite Torres.

TCC (Graduação) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG.
Departamento de Engenharia Elétrica, 2014.
Inclui Referências e anexos.

1. Engenharia Elétrica. 2. Fluxo de potência ótimo. 3. Convergência global. 4. Funções de complementaridade. 5. Métodos de região de confiança I.Torres, Geraldo Leite (Orientador). II.Título.

UFPE

621.3 CDD (22. ed.)

BCTG/2014-076

RESUMO

Este trabalho é apresentado como proposta para conclusão do curso de graduação em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Foi desenvolvida uma abordagem do fluxo de potência ótimo (FPO) visando convergência global, o que significa que a solução deve ser obtida sempre que existir, independente da escolha de ponto inicial. Para tal fim é realizada uma reformulação das condições de otimalidade do problema restrito como um sistema de equações não lineares pelo uso de uma classe de funções de complementaridade não linear. O sistema obtido é resolvido por minimização dos resíduos quadrados, utilizando-se métodos de região de confiança para globalização do problema irrestrito. Desta forma, o FPO que é originalmente um problema de otimização com restrições é resolvido por técnicas de otimização irrestrita.

A motivação para a proposta surge da busca por algoritmos robustos para operação ótima dos sistemas elétricos de potência (SEP). Assim, o principal foco consiste na robustez do método que deve convergir globalmente, evitando custos computacionais elevados para conciliar a um bom tempo de processamento.

Três problemas distintos de otimização do fluxo de potência são estudados: a minimização das perdas ativas por efeito Joule, a maximização do carregamento do sistema elétrico sob uma dada configuração e a minimização do corte de carga quando da necessidade de interrupção do fornecimento de uma parcela da energia.

O tratamento matemático deve ser analisado destacando-se pontos cruciais na abordagem do problema. O estudo dos parâmetros do algoritmo de região de confiança representa o primeiro ponto de destaque. A análise da função de complementaridade utilizada na reformulação das condições de otimalidade e o estudo do condicionamento numérico apresentam-se bastante relevantes. Por fim, a análise das técnicas para solução do subproblema de região de confiança completa o estudo computacional.

SUMÁRIO

| | |
|---|-----|
| LISTA DE FIGURAS..... | iii |
| LISTA DE TABELAS..... | iv |
| LISTA DE ACRÔNIMOS..... | vi |
| LISTA DE SIMBOLOGIA..... | vii |
| 1. INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1. Objetivos do Trabalho..... | 2 |
| 1.2. Composição da Monografia..... | 3 |
| 2. INTRODUÇÃO AO FLUXO DE CARGA E FORMULAÇÃO DO FPO | 4 |
| 2.1. Equações do Fluxo de Potência Ótimo..... | 7 |
| 2.1.1. Minimização das Perdas Ativas | 8 |
| 2.1.2. Minimização do Corte de Carga | 9 |
| 2.1.3. Maximização do Carregamento do Sistema..... | 10 |
| 3. INTRODUÇÃO À OTIMIZAÇÃO E AOS PROBLEMAS DE COMPLEMENTARIDADE | 12 |
| 3.1. Introdução à Otimização..... | 12 |
| 3.2. Funções de Complementaridade Não Linear | 14 |
| 4. REFORMULAÇÃO DO FPO E ESTUDO DO CONDICIONAMENTO NUMÉRICO..... | 17 |
| 4.1. Reformulação do FPO..... | 17 |
| 4.2. Estudo do Condicionamento Numérico..... | 18 |
| 4.2.1. Condicionamento Numérico de um Problema..... | 18 |
| 4.2.2. Número Condicionador Absoluto..... | 18 |
| 4.2.3. Número Condicionador Relativo | 19 |
| 4.2.4. Número de Condição de uma Matriz | 20 |
| 4.2.5. Condicionamento de um Sistema de Equações Linear | 20 |
| 4.3. Tratamento do Mau Condicionamento Numérico da Matriz Hessiana..... | 21 |
| 5. MÉTODOS DE REGIÃO DE CONFIANÇA E SOLUÇÃO DO SUBPROBLEMA..... | 23 |
| 5.1. Método de Região de Confiança para Otimização Irrestrita..... | 23 |
| 5.1.1. Algoritmo de região de confiança | 26 |
| 5.2. Método <i>Dogleg</i> | 26 |
| 5.3. Minimização no Subespaço Bidimensional..... | 28 |
| 5.3.1. Implementação da Minimização no Subespaço Bidimensional | 30 |
| 5.4. Solução do Subproblema por Métodos Iterativos | 31 |
| 6. RESULTADOS COMPUTACIONAIS E ANÁLISE COMPARATIVA..... | 34 |
| 6.1. Resultados e Análise Quanto aos Parâmetros do Algoritmo de Região de Confiança.... | 34 |
| 6.1.1. Escolha do Raio Inicial..... | 35 |

| | | |
|--------|---|----|
| 6.1.2. | Escolha do Raio Máximo..... | 35 |
| 6.1.3. | Escolha dos Limites da Taxa de Redução para o Aumento ou Redução do Raio da Região..... | 36 |
| 6.1.4. | Escolha dos Fatores de Redução e Crescimento..... | 37 |
| 6.2. | Resultados e Análise quanto à Função de Complementaridade | 38 |
| 6.2.1. | Combinação Convexa X Fischer-Burmeister | 38 |
| 6.2.2. | Funções Definidas a partir de Normas P-Hölder | 39 |
| 6.3. | Resultados e Análise quanto ao Tratamento do Mau Condicionamento Numérico | 41 |
| 6.4. | Resultados e Análise quanto à Solução do Subproblema de Região de Confiança | 42 |
| 6.5. | Estratégia <i>Dogleg</i> X Minimização no Subespaço Bidimensional | 43 |
| 6.6. | Estratégia <i>Dogleg</i> X Solução Iterativa | 45 |
| 7. | CONCLUSÕES | 47 |
| 7.1. | Propostas Futuras..... | 47 |
| | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... | 48 |
| | ANEXO..... | 50 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 2.1 - Modelo π para a Linha de Transmissão entre as Barras k e m. Fonte: Monticelli (1983, p.5)..... | 5 |
| Figura 2.2 - Modelo do Transformador entre as Barras k e m. Fonte: Monticelli (1983, p.6)..... | 6 |
| Figura 5.1 - Trajetória Ótima Exata e Aproximação <i>Dogleg</i> . Fonte: Nocedal (1999, p.74)..... | 27 |
| Figura A.1 - Diagrama Unifilar do Subregional Angelim - Eixo I..... | 50 |
| Figura A.2 - Diagrama Unifilar do Subregional Angelim - Eixo II..... | 51 |
| Figura A.3 - Diagrama Unifilar do Subregional Bom Nome 69kV..... | 52 |
| Figura A.4 - Diagrama Unifilar do Subregional Bom Nome 138kV..... | 53 |
| Figura A.5 - Diagrama Unifilar do Subregional Bongí - Eixo I..... | 54 |
| Figura A.6 - Diagrama Unifilar do Subregional Bongí - Eixo II..... | 55 |
| Figura A.7 - Diagrama Unifilar do Subregional Goianinha - Eixo I..... | 56 |
| Figura A.8 - Diagrama Unifilar do Subregional Goianinha - Eixo II..... | 57 |
| Figura A.9 - Diagrama Unifilar do Subregional Itaparica..... | 58 |
| Figura A.10 - Diagrama Unifilar do Subregional Juazeiro..... | 59 |
| Figura A.11 - Diagrama Unifilar do Subregional Mirueira - Eixo I..... | 60 |
| Figura A.12 - Diagrama Unifilar do Subregional Mirueira - Eixo II..... | 61 |
| Figura A.13 - Diagrama Unifilar do Subregional Mirueira - Eixo III..... | 62 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| Tabela 6.1 - Sensibilidade em Relação ao Raio Inicial da Região de Confiança para Minimização de Perdas Ativas..... | 35 |
| Tabela 6.2 - Sensibilidade em Relação ao Raio Máximo da Região de Confiança para Minimização de Perdas Ativas..... | 35 |
| Tabela 6.3 - Influência do Limite da Taxa de Redução a partir do qual Pode Haver Aumento do Raio (Maximização do Carregamento do Sistema)..... | 36 |
| Tabela 6.4 - Influência do Limite para Redução do Raio (Maximização do Carregamento do Sistema)..... | 36 |
| Tabela 6.5 - Sensibilidade em Relação ao Fator de Redução do Raio (Maximização do Carregamento)..... | 37 |
| Tabela 6.6 - Influência do Fator de Crescimento do Raio (Maximização do Carregamento do Sistema)..... | 37 |
| Tabela 6.7 - Influência do Fator de Crescimento para Diferentes Raios Máximos e Limites para Ampliação (Maximização do Carregamento do Sistema) | 38 |
| Tabela 6.8 - Combinação Convexa X Fischer-Burmeister / Minimização das Perdas Ativas (Sistemas de Teste do IEEE) | 38 |
| Tabela 6.9 - Combinação Convexa X Fischer-Burmeister / Minimização das Perdas Ativas (Subregionais da Celpe) | 38 |
| Tabela 6.10 - Combinação Convexa X Fischer-Burmeister / Maximização do Carregamento do Sistema (Sistemas de Teste do IEEE) | 39 |
| Tabela 6.11 - Combinação Convexa X Fischer-Burmeister / Maximização do Carregamento do Sistema (Subregionais da Celpe)..... | 39 |
| Tabela 6.12 - Funções Definidas por Normas P-Hölder / Minimização das Perdas Ativas (Sistemas de Teste do IEEE)..... | 40 |
| Tabela 6.13 - Funções Definidas por Normas P-Hölder / Minimização das Perdas Ativas (Subregionais da Celpe)..... | 40 |
| Tabela 6.14 - Funções Definidas por Normas P-Hölder / Maximização do Carregamento do Sistema (Sistemas de Teste do IEEE)..... | 40 |
| Tabela 6.15 - Funções Definidas por Normas P-Hölder / Maximização do Carregamento do Sistema (Subregionais da Celpe)..... | 40 |
| Tabela 6.16 - Tratamento do Condicionamento Numérico / Minimização das Perdas Ativas (Sistemas de Teste do IEEE)..... | 41 |
| Tabela 6.17 - Tratamento do Condicionamento Numérico / Minimização das Perdas Ativas (Subregionais da Celpe)..... | 41 |
| Tabela 6.18 - Tratamento do Condicionamento Numérico / Minimização do Corte de Carga (Sistemas de Teste do IEEE)..... | 42 |
| Tabela 6.19 - Tratamento do Condicionamento Numérico / Minimização do Corte de Carga (Subregionais da Celpe)..... | 42 |
| Tabela 6.20 - <i>Dogleg</i> X Minimização Bidimensional / Minimização das Perdas Ativas (Sistemas de Teste do IEEE)..... | 43 |

| | |
|--|----|
| Tabela 6.21 - <i>Dogleg</i> X Minimização Bidimensional / Minimização das Perdas Ativas (Subregionais da Celpe)..... | 43 |
| Tabela 6.22 - <i>Dogleg</i> X Minimização Bidimensional / Maximização do Carregamento do Sistema (Sistemas de Teste do IEEE)..... | 43 |
| Tabela 6.23 - <i>Dogleg</i> X Minimização Bidimensional / Maximização do Carregamento do Sistema (Subregionais da Celpe)..... | 43 |
| Tabela 6.24 - <i>Dogleg</i> X Minimização Bidimensional / Minimização do Corte de Carga (Sistemas de Teste do IEEE)..... | 44 |
| Tabela 6.25 - <i>Dogleg</i> X Minimização Bidimensional / Minimização do Corte de Carga (Subregionais da Celpe)..... | 44 |
| Tabela 6.26 - <i>Dogleg</i> X Solução Iterativa / Minimização das Perdas Ativas (Sistemas de Teste do IEEE)..... | 45 |
| Tabela 6.27 - <i>Dogleg</i> X Solução Iterativa / Minimização das Perdas Ativas (Subregionais da Celpe)..... | 45 |
| Tabela 6.28 - <i>Dogleg</i> X Solução Iterativa / Maximização do Carregamento do Sistema (Subregionais da Celpe)..... | 46 |

LISTA DE ACRÔNIMOS

| | |
|-------|---|
| CA | Corrente Alternada |
| CDC | Comutador de Derivação em Carga |
| Celpe | Companhia Energética de Pernambuco |
| CHKS | Chen-Harker-Kanzow-Smale |
| CNL | Complementaridade Não Linear |
| FB | Fischer-Burmeister |
| FPO | Fluxo de Potência Ótimo |
| IEEE | Institute of Electrical and Electronics Engineers |
| KKT | Karush-Kuhn-Tucker |
| RS | Resíduo Natural |
| SEP | Sistemas Elétricos de Potência |
| UFPE | Universidade Federal de Pernambuco |

LISTA DE SIMBOLOGIA

- E ----- Vetor das Tensões Fasoriais nas Barras do Sistema;
- E_k ----- Tensão Fasorial na Barra k;
- V_k ----- Magnitude de Tensão na Barra k;
- θ_k ----- Fase da Tensão na Barra k;
- P ----- Potência Ativa;
- P_k ----- Potência Ativa Injetada Líquida na Barra k;
- P_{km} ----- Fluxo de Potência Ativa entre as Barras k e m;
- $P_{perdas (k,m)}$ ----- Perdas Ativas entre o Par de Barras k, m;
- P_{perdas} ----- Perdas Ativas Globais do Sistema;
- P_{Dk} ----- Potência Ativa Demandada à Barra k;
- P_{Dk}^0 ----- Potência Ativa Demandada à Barra k antes do Corte ou Crescimento de Carga;
- Q ----- Potência Reativa;
- Q_k ----- Potência Reativa Injetada Líquida na Barra k;
- Q_{Dk} ----- Potência Reativa Demandada à Barra k;
- Q_{Dk}^0 ----- Potência Reativa Demandada à Barra k antes do Corte ou Crescimento de Carga;
- Q_{Gk} ----- Potência Reativa Injetada na Barra k;
- Z_{km} ----- Impedância Série entre as Barras k e m;
- r_{km} ----- Resistência Série entre as Barras k e m;
- x_{km} ----- Reatância Série entre as Barras k e m;
- b ----- Susceptância;
- b_{km} ----- Susceptância Série entre as Barras k e m;
- b_{km}^{sh} ----- Susceptância Shunt no Ramo (k,m);
- b_k^{sh} ----- Susceptância referente ao Reator Conectado à Barra k;
- I ----- Vetor das Correntes Injetadas Líquidas nas Barras do Sistema;
- I_k ----- Corrente Injetada Líquida na Barra k;
- t ----- Relação de Transformação para Transformadores com Dispositivo CDC;
- t_{km} ----- Derivação do Transformador Conectado entre as Barras k e m;

t_{km}^{min} ----- Limite Inferior para a Derivação do Transformador;
 t_{km}^{max} ----- Limite Superior para a Derivação do Transformador;
 y_{km} ----- Admitância Série no Ramo (k,m);
 g_{km} ----- Condutância Série no Ramo (k,m);
 Y_{BARRA} ----- Matriz Admitância de Barra;
 G ----- Matriz de Condutância;
 G_{km} ----- Elemento da k-ésima Linha e m-ésima Coluna da Matriz de Condutância;
 B ----- Matriz de Susceptância;
 B_{km} ----- Elemento da k-ésima Linha e m-ésima Coluna da Matriz de Susceptância;
 q_{sh_k} ----- Reatância Shunt na Barra k;
 $q_{sh_k}^{min}$ ----- Limite Inferior para Reatância Shunt;
 $q_{sh_k}^{max}$ ----- Limite Superior para Reatância Shunt;
 F_{km} ----- Fluxo no Ramo (k,m), seja de Potência Aparente, Ativa, Reativa, ou Corrente;
 Ω_k ----- Conjunto dos Índices das Barras Conectadas à Barra k;
 N ----- Conjunto dos Pares de Índices de Barras Terminais de Todos os Ramos do Sistema;
 ζ_k ----- Fator de Corte de Carga ou de Crescimento de Carga Relacionado à Barra k;
 w_k ----- Coeficiente de Ponderação para Corte ou Crescimento de Carga referente à Barra k;
 ψ ----- Função de Complementaridade;
 ψ_{FB} ----- Função de Complementaridade de Fischer-Burmeister;
 ψ_{CHKS} ----- Função de Complementaridade de Chen-Harker-Kanzow-Smale;
 ψ_{θ} ----- Função de Complementaridade Obtida por Combinação Convexa;
 ψ_P ----- Generalização de Fischer-Burmeister pelo Uso de Normas P-Hölder;
 k ----- Número Condicionador de um Problema;
 $k(A)$ ----- Número de Condição da Matriz A;
 $\sigma_{máx}$ ----- Maior Autovalor em Módulo de uma Matriz;
 $\sigma_{mín}$ ----- Menor Autovalor em Módulo de uma Matriz;
 Δ ----- Raio da Região de Confiança;
 Δ_0 ----- Raio Inicial da Região de Confiança;
 $\Delta_{máx}$ ----- Raio Máximo da Região de Confiança;
 Δ_k ----- Raio da Região de Confiança na k-ésima Iteração;
 ρ_k ----- Taxa de Redução do Algoritmo de Região de Confiança na k-ésima Iteração;
 d ----- Vetor do \mathbb{R}^n ;
 d_n ----- Passo de Newton;

d_c ----- Passo de Cauchy;

d_k ----- Passo Tomado na k-ésima Iteração do Algoritmo de Região de Confiança.

1. INTRODUÇÃO

O estudo de fluxo de carga, ou fluxo de potência, representa uma ferramenta crucial para a análise da operação estática dos sistemas elétricos de potência. A partir do fluxo de potência, o estado de operação das redes elétricas é determinado, tornando-se de conhecimento os intercâmbios de potências ativas e reativas entre as barras do sistema e os níveis de tensão das mesmas, assim como as defasagens angulares. Na sua versão otimizada, o fluxo de potência ótimo (FPO) visa alcançar o melhor estado de operação da rede, considerando algum objetivo previamente definido, tal como: minimizar perdas ativas oriundas do efeito Joule, maximizar o carregamento do sistema ou minimizar o corte de carga, quando da necessidade.

A operação dos sistemas elétricos de potência exige uma diversidade de tratamentos matemáticos para o fluxo de potência ótimo. Novas técnicas têm surgido, tornando-se alternativas para as abordagens clássicas do FPO. A busca de robustez nos algoritmos de FPO leva à formulação de métodos visando à convergência global. Neste trabalho, uma reformulação das condições de otimalidade para uma solução do problema de otimização restrita, faz com que ele possa ser globalizado usando método de região de confiança para otimização irrestrita. Os métodos de região de confiança constituem uma classe relativamente nova de algoritmos de otimização não linear, mas suas aplicações já são encontradas na literatura, ver Pajic & Clements (2003), Sousa (2010) e Torres & Quintana (2000), por exemplo.

A abordagem da região de confiança consiste na aproximação da função objetivo não linear por uma função quadrática em uma região fechada, chamada região de confiança. A aproximação quadrática deve apresentar relativa fidelidade de maneira que os esforços concentram-se em minimizá-la na devida região para conduzir a um decréscimo da função original em cada iteração em busca de um mínimo. Um quociente entre a redução real da função original e a redução da função aproximada possibilita o gerenciamento do raio da região, que pode ser aumentado, diminuído ou mantido constante para uma seguinte iteração.

Em cada iteração do método de região de confiança deve ser resolvido o subproblema referente à minimização da função aproximada restrita à região confiada. A solução do subproblema não precisa ser necessariamente exata para garantir convergência

da técnica, o que incentiva a busca por soluções aproximadas visando ganhos em tempo de processamento pela redução de custos computacionais. De fato, a existência de uma solução global é consequência da compacidade da região de confiança frente à continuidade do modelo quadrático, mas o cálculo desta solução poderia ser demasiadamente oneroso. Neste trabalho serão propostas três abordagens para a solução do subproblema. O método *dogleg* busca uma solução aproximada bem definida ao longo de um caminho no qual o modelo quadrático decresce monotonicamente, a minimização no subespaço bidimensional amplia o espaço de busca englobando o caminho *dogleg* e, portanto, buscando aproximações mais acuradas e a solução por métodos iterativos que em princípio deveria convergir para a solução global, mas é limitada a poucas iterações evitando acréscimos no custo computacional.

O tratamento das condições de complementaridade é realizado a partir do uso de uma classe de funções, que deverão ser comparadas visando à identificação da melhor técnica de complementaridade não linear, bem como do melhor método para o tratamento das não diferenciabilidades, calculando diferenciais generalizados de Clarke ou inserindo parâmetros que são reduzidos durante o processo iterativo.

O estudo do condicionamento numérico da matriz hessiana do problema irrestrito possibilita melhoramentos no processo de convergência. Com efeito, em cada solução do subproblema deverá ser calculado o mínimo irrestrito, que advém da solução de um sistema linear envolvendo a matriz hessiana. Assim, o mau condicionamento numérico levaria a imprecisões e prejuízos no desempenho do método e, portanto, um tratamento da instabilidade numérica permite aperfeiçoamentos. A análise comparativa deverá ser feita pelo estudo do número de condição aproximado das matrizes e do número de iterações do método global.

1.1. Objetivos do Trabalho

Os principais objetivos do trabalho apresentado são listados a seguir:

- Apresentar uma abordagem para o FPO com convergência global;
- Estudo de técnicas para o tratamento das condições de complementaridade para reformulação do FPO como um problema de otimização irrestrita;
- Aplicação de métodos de região de confiança para globalização e estudo dos parâmetros do algoritmo;

- Enfoque no condicionamento numérico do problema e contorno de instabilidades numéricas;
- Estudo detalhado de métodos para solução do subproblema de região de confiança;
- Análise comparativa das técnicas para sinergia entre robustez e bom tempo de processamento.

1.2. Composição da Monografia

Segue uma breve descrição dos capítulos que compõem a monografia:

Capítulo 1- Introdução: Apresenta a motivação, relevância e breve descrição do desenvolvimento do trabalho. Refere-se à originalidade instigando o leitor ao estudo do tema.

Capítulo 2- Introdução ao fluxo de carga e formulação do FPO: Breve estudo do fluxo de carga a partir da modelagem dos componentes do sistema elétrico e estabelecimento das equações do FPO.

Capítulo 3- Introdução à otimização e aos problemas de complementaridade: São apresentadas as principais definições da teoria de otimização e os teoremas relevantes para a pesquisa desenvolvida, assim como um estudo de problemas de complementaridade e a apresentação de funções trabalhadas na literatura.

Capítulo 4- Reformulação do FPO e estudo do condicionamento numérico: Apresenta a técnica que leva à transição do problema restrito ao problema de otimização irrestrita, além de estudos de condicionamento numérico e as soluções adotadas para aperfeiçoamento do FPO.

Capítulo 5- Métodos de região de confiança e solução do subproblema: Apresenta as principais questões relativas ao algoritmo de região de confiança e descrição detalhada das técnicas de solução para o subproblema.

Capítulo 6- Resultados computacionais e análise comparativa: São apresentados resultados das simulações computacionais com sistemas de teste do IEEE e de subregionais da Celpe, possibilitando a análise comparativa para decisão das melhores abordagens.

Capítulo 7- Conclusões: Apresenta as conclusões da monografia e incentiva pesquisas futuras para ampliação dos estudos.

2. INTRODUÇÃO AO FLUXO DE CARGA E FORMULAÇÃO DO FPO

O problema de fluxo de carga consiste na determinação do estado de operação das redes elétricas em regime estacionário. A partir das leis de Kirchhoff, são formuladas equações de potências ativa e reativa líquidas injetadas nas barras do sistema, que em conjunto às inequações referentes a restrições operacionais da rede elétrica e de seus componentes compõem o problema de fluxo de potência.

Para formulação do problema, é necessária a classificação de cada barra do sistema quanto às grandezas especificadas e a serem determinadas, além do desenvolvimento de equações de troca de potência entre as barras do sistema. Quatro grandezas são associadas a cada barra, sendo elas a magnitude e o ângulo da tensão nodal (V_k, θ_k) [V, rad] e as potências ativa e reativa injetadas líquidas (P_k, Q_k) [W, var]. Assim, as barras são classificadas da seguinte maneira:

- Barra de referência (flutuante) – $V\theta$:

A tensão é conhecida em amplitude e fase e devem ser calculadas as potências ativa e reativa;

- Barra de tensão controlada – VP :

São fornecidas a potência ativa e a magnitude de tensão e devem ser calculadas a potência reativa e a fase da tensão;

- Barra de carga – PQ :

As potências ativa e reativa são conhecidas e há a necessidade de obtenção da tensão em magnitude e fase.

A barra de referência tem função de fechar o balanço de potência, incluindo as perdas ativas do sistema, que não são conhecidas antes da solução do problema, além de fornecer a referência angular.

Existem ainda outros tipos de barras que surgem em situações particulares, que não serão detalhadas aqui. É importante observar também que estudos do fluxo de potência podem considerar modelos mais complexos para as cargas, com variações das potências em função da amplitude de tensão nodal.

O primeiro passo para solução de problemas de fluxo de potência em redes elétricas consiste na obtenção da matriz de admitância. Para isto, é necessária a modelagem dos componentes do sistema elétrico por suas grandezas elétricas.

As linhas de transmissão são modeladas pelo circuito π equivalente, conforme ilustrado na figura 2.1.

Em que Z_{km} [Ω] representa a impedância série, composta pela resistência r_{km} [Ω] e pela reatância x_{km} [Ω] e b_{km}^{sh} [S] representa a susceptância shunt.

Os parâmetros são calculados a partir da configuração geométrica da linha e estão relacionados a características dos cabos utilizados, tal como raio médio geométrico e resistência CA.

Transformadores são modelados pela conexão série entre um transformador ideal com relação definida pela derivação de transformação e uma admitância referente a dispersões de fluxo nos enrolamentos, conforme mostrado na figura 2.2.

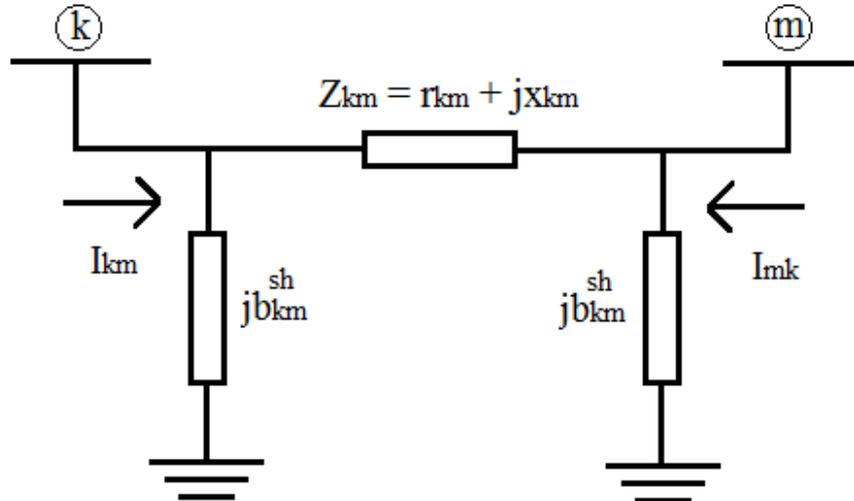


Figura 2.1 - Modelo π para a Linha de Transmissão entre as Barras k e m.

Fonte: Monticelli (1983, p. 5)

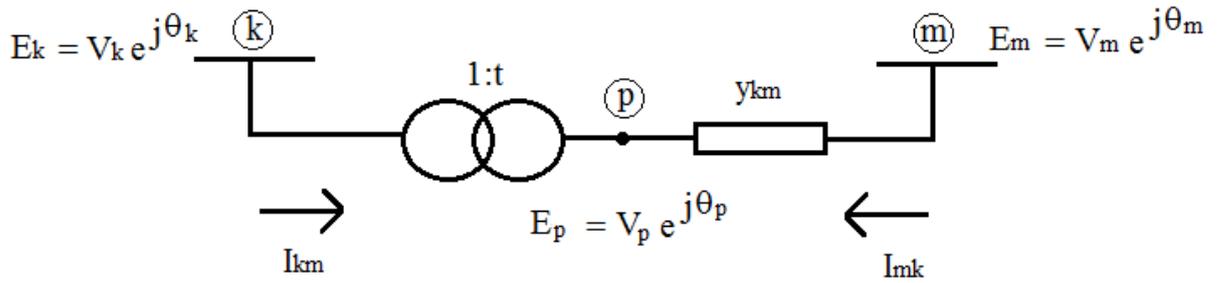


Figura 2.2 - Modelo do Transformador entre as Barras k e m.

Fonte: Monticelli (1983, p. 6)

O parâmetro t será real (definido pela derivação) quando se tratar de transformadores em fase e será complexo não real quando apresentar defasagens. Assim:

$t = a \rightarrow$ Transformador em fase;

$t = e^{j\phi} \rightarrow$ Defasador puro;

$t = a \cdot e^{j\phi} \rightarrow$ Defasador.

$a \in \mathbb{R}$

Os geradores e cargas são modelados a partir de injeções de potência nos nós da rede e os reatores shunt são representados pela susceptância entre o nó e a terra.

A partir dos modelos, obtêm-se as equações de injeção de corrente nas barras do sistema com respeito às tensões:

$$I_k = [jb_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} (jb_{km}^{sh} + a_{km}^2 \cdot y_{km})] \cdot E_k + \sum_{m \in \Omega_k} (-a_{km} e^{j\phi_{km}} \cdot y_{km}) E_m \quad [A] \quad (2.1)$$

Em que b_k^{sh} [S] refere-se aos reatores shunt e y_{km} [S] refere-se à admitância série. Para as linhas, $a_{km} = 1$ e $\phi_{km} = 0$; para transformadores em fase, $b_{km}^{sh} = 0$ e $\phi_{km} = 0$; e para defasadores puro, $b_{km}^{sh} = 0$ e $a_{km} = 1$. O conjunto dos índices de todas as barras conectadas à barra k é denotado por Ω_k .

Desta forma, a matriz de admitância Y_{BARRA} [S] é conhecida:

$$I = Y_{BARRA} \cdot E \quad [A] \quad (2.2a)$$

$$Y_{BARRA} = G + jB \quad [S] \quad (2.2b)$$

As matrizes G [S] e B [S] são matrizes de condutância e susceptância.

As injeções de potência ativa e reativa em cada barra do sistema podem ser calculadas por:

$$P_k = V_k \sum_{m \in \Omega_k \cup \{k\}} V_m (G_{km} \cdot \cos(\theta_k - \theta_m) + B_{km} \cdot \sin(\theta_k - \theta_m)) \quad [W] \quad (2.3a)$$

$$Q_k = V_k \sum_{m \in \Omega_k \cup \{k\}} V_m (G_{km} \cdot \sin(\theta_k - \theta_m) - B_{km} \cdot \cos(\theta_k - \theta_m)) \quad [var] \quad (2.3b)$$

Limites nas injeções de potência reativa, magnitude das tensões nodais, capacidade de geração, entre outros, apresentam inequações de restrição do problema de fluxo de carga.

2.1. Equações do Fluxo de Potência Ótimo

A maioria dos problemas de fluxo de potência ótimo podem ser expressos pela forma geral de um problema de otimização com restrições:

$$\text{Minimize } f(x) \quad (2.4)$$

$$\text{Sujeito a: } g(x) = 0; h(x) \leq 0$$

Problemas de maximização são equivalentes aos de minimização com pequena alteração na função objetivo pelo acréscimo de um sinal negativo. Temos:

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$: Função objetivo a ser otimizada, tal como perdas de potência, carregamento do sistema, corte de carga, custo de geração, intercâmbio de potência entre duas barras, etc.

$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$: Conjunto das restrições de igualdade contendo as equações usuais de balanço de potência além de eventuais restrições adicionais, tal como controle do fluxo de potência entre sistemas em uma operação em *pool*, entre outros.

$h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$: Vetor composto pelas restrições de desigualdade referente aos limites físicos e operacionais do sistema.

O vetor $x \in \mathbb{R}^n$ constitui-se das variáveis de decisão explícitas, incluindo variáveis de controle (tensões das barras de geração, derivações dos transformadores, compensação de reativo em paralelo, potência ativa dos geradores, fator de carregamento, etc.) e as variáveis dependentes que não são funções (ângulo de fase das tensões, tensões das barras de carga, potência reativa dos geradores, etc.).

Para realização das técnicas propostas foram implementados problemas referentes à minimização das perdas ativas na configuração base, à minimização do corte de carga em casos de violações das restrições operacionais e à maximização do carregamento do sistema mantendo o fator de potência das cargas e a viabilidade.

2.1.1. Minimização das Perdas Ativas

Este problema consiste na obtenção da operação ótima do sistema, visando minimizar as perdas ativas na transmissão que surgem do aquecimento dos condutores, sobretudo nas linhas e transformadores. As restrições referem-se ao balanço de potência ativa e reativa nas barras, limites dos níveis de tensão e de geração de reativos pelos geradores, além dos limites físicos das susceptâncias em paralelo e das derivações dos transformadores com dispositivo CDC. As variáveis de controle a serem manipuladas pelo operador são as tensões terminais dos geradores, as susceptâncias em paralelo dos compensadores e as derivações dos transformadores, enquanto que as variáveis de estado (dependentes) são as tensões nas barras de carga, as fases das tensões nodais e a potência reativa dos geradores. As injeções de potência ativa em todas as barras, exceto a barra de referência (folga), são conhecidas e definidas pelo despacho econômico na geração.

O fluxo de potência ativa entre duas barras pode ser calculado por:

$$P_{km} = V_k^2 g_{km} - V_k V_m g_{km} \cos(\theta_k - \theta_m) - V_k V_m b_{km} \sin(\theta_k - \theta_m) \quad [W] \quad (2.5a)$$

$$P_{mk} = V_m^2 g_{km} - V_k V_m g_{km} \cos(\theta_k - \theta_m) + V_k V_m b_{km} \sin(\theta_k - \theta_m) \quad [W] \quad (2.5b)$$

De forma que podemos calcular as perdas entre cada par de barras conectadas por algum ramo e, portanto, as perdas globais do sistema:

$$P_{perdas(k,m)} = P_{km} + P_{mk} = g_{km} [V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos(\theta_k - \theta_m)] \quad [W] \quad (2.6)$$

$$P_{perdas} = \sum_{(k,m) \in N} g_{km} [V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos(\theta_k - \theta_m)] \quad [W] \quad (2.7)$$

Em que N denota o conjunto dos pares de índices de barras terminais de todos os ramos do sistema.

Finalmente, as equações do problema de minimização de perdas ativas podem ser formuladas:

$$\text{Minimize } P_{perdas}(V, \theta, t) \quad [W] \quad (2.8a)$$

Sujeito a:

$$P_k(V, \theta, t) + P_{Dk} - P_{Gk} = 0 \quad [W] \quad (2.8b1)$$

$$Q_k(V, \theta, t) + Q_{Dk} - Q_{Gk} = 0 \quad [var] \quad (2.8b2)$$

$$Q_k(V, \theta, t) + Q_{Dk} - Q_{Gk} - q_{shk} = 0 \quad [var] \quad (2.8b3)$$

$$q_{sh_k}^{min} \leq q_{sh_k} \leq q_{sh_k}^{max} \quad [var] \quad (2.8b4)$$

$$t_{km}^{min} \leq t_{km} \leq t_{km}^{max} \quad (2.8b5)$$

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \quad [V] \quad (2.8b6)$$

$$Q_{G_k}^{min} \leq Q_{G_k} \leq Q_{G_k}^{max} \quad [var] \quad (2.8b7)$$

$$F_{km}^{min} \leq F_{km}(V, \theta, t) \leq F_{km}^{max} \quad (2.8b8)$$

Os índices G e D referem-se à geração (injeção) e à demanda, respectivamente.

As equações de restrições representam:

- 2.8b1: Balanço de potência ativa em todas as barras, exceto para barra de folga;
- 2.8b2: Balanço de potência reativa nas barras de carga com injeção de reativo fixa e barras de geração;
- 2.8b3: Balanço de potência reativa para as barras elegíveis ao controle de reativos;
- 2.8b4: Limites de controle de reativos;
- 2.8b5: Limitação das derivações dos transformadores com dispositivos CDC;
- 2.8b6: Restrição de magnitude de tensão em todas as barras;
- 2.8b7: Limites de geração de reativos;
- 2.8b8: Restrições para os fluxos no ramo (k,m), seja de potência aparente, ativa, reativa, ou corrente.

É evidente que o problema de minimização das perdas ativas exposto é equivalente à formulação genérica em (2.4).

2.1.2. Minimização do Corte de Carga

Em situações de contingência pode haver a necessidade de corte de carga. Casos em que há saída de geração, problemas em linhas de transmissão, transformadores, etc. requerem redução da carga para que o sistema possa continuar sendo suprido com segurança pela geração e topologia disponível. O problema de minimização do corte de carga consiste na determinação da menor carga possível a ser retirada quando da necessidade advinda de contingências.

De maneira análoga ao problema de minimização das perdas, as equações do problema de corte são formuladas no padrão (2.4), conforme apresentadas a seguir:

$$\text{Minimize} \quad \sum_{\forall k} w_k \zeta_k \quad (2.9a)$$

Sujeito a:

$$P_k(V, \theta, t) + P_{D_k}^0(1 - \zeta_k) - P_{G_k} = 0 \quad [W] \quad (2.9b1)$$

$$Q_k(V, \theta, t) + Q_{D_k}^0(1 - \zeta_k) - Q_{G_k} = 0 \quad [var] \quad (2.9b2)$$

$$Q_k(V, \theta, t) + Q_{D_k}^0(1 - \zeta_k) - Q_{G_k} - q_{sh_k} = 0 \quad [var] \quad (2.9b3)$$

$$q_{sh_k}^{min} \leq q_{sh_k} \leq q_{sh_k}^{max} \quad [var] \quad (2.9b4)$$

$$t_{km}^{min} \leq t_{km} \leq t_{km}^{max} \quad (2.9b5)$$

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \quad [V] \quad (2.9b6)$$

$$Q_{G_k}^{min} \leq Q_{G_k} \leq Q_{G_k}^{max} \quad [var] \quad (2.9b7)$$

$$F_{km}^{min} \leq F_{km}(V, \theta, t) \leq F_{km}^{max} \quad (2.9b8)$$

Os fatores de corte ζ representam os percentuais de carga que deverão ser cortados em cada barra, os parâmetros w_k são coeficientes de ponderação da importância de cada barra para o corte e os índices “0” nas potências indicam seus valores antes do corte.

É importante notar que o corte ocorre para potências ativa e reativa, significando que o fator de potência deve se manter constante em cada barra. A modelagem das cargas poderia apresentar-se mais complexa, mas o tipo potência constante é suficiente para a pesquisa desenvolvida.

2.1.3. Maximização do Carregamento do Sistema

O problema de maximização do carregamento consiste na determinação do maior crescimento de carga que o sistema pode suprir sem violar suas restrições operativas, mantendo-se sua configuração. O problema é importante, por exemplo, para permitir que distribuidoras de energia definam contratos com consumidores, transações entre sistemas interligados, etc.

Assim como no caso de minimização do corte de carga, o problema de maximização do carregamento é formulado como se segue:

$$\text{Maximize} \quad \sum_{\forall k} w_k \zeta_k \quad (2.10a)$$

Sujeito a:

$$P_k(V, \theta, t) + P_{D_k}^0(1 + \zeta_k) - P_{G_k} = 0 \quad [W] \quad (2.10b1)$$

$$Q_k(V, \theta, t) + Q_{D_k}^0(1 + \zeta_k) - Q_{G_k} = 0 \quad [var] \quad (2.10b2)$$

$$Q_k(V, \theta, t) + Q_{D_k}^0(1 + \zeta_k) - Q_{G_k} - q_{sh_k} = 0 \quad [var] \quad (2.10b3)$$

$$q_{sh_k}^{min} \leq q_{sh_k} \leq q_{sh_k}^{max} \quad [var] \quad (2.10b4)$$

$$t_{km}^{min} \leq t_{km} \leq t_{km}^{max} \quad (2.10b5)$$

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \quad [V] \quad (2.10b6)$$

$$Q_{G_k}^{min} \leq Q_{G_k} \leq Q_{G_k}^{max} \quad [var] \quad (2.10b7)$$

$$F_{km}^{min} \leq F_{km}(V, \theta, t) \leq F_{km}^{max} \quad (2.10b8)$$

Neste caso, ζ é denominado de fator de crescimento e os coeficientes w_k ainda servem de ponderação para diferenciação das barras no crescimento da carga.

Outros problemas de fluxo de potência ótimo surgem em diversas aplicações. A exposição destes casos é suficiente para a aplicação da técnica matemática a ser apresentada.

3. INTRODUÇÃO À OTIMIZAÇÃO E AOS PROBLEMAS DE COMPLEMENTARIDADE

3.1. Introdução à Otimização

Para compreensão dos principais resultados matemáticos aplicados ao FPO é necessária a introdução de uma variedade de conceitos e teoremas. Um problema da forma (2.4) é dito ser de otimização com restrição, enquanto que um problema irrestrito consiste na busca de mínimos e máximos em casos nos quais a função objetivo é livre de qualquer restrição.

Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, dizemos que x_* é um ponto de mínimo local do problema irrestrito se existe uma vizinhança V de x_* , satisfazendo:

$$f(x_*) \leq f(x) \quad \forall x \in V \quad (3.1)$$

Para ponto de máximo local a definição é idêntica, exceto pela inversão do sentido da desigualdade. Mínimos e máximos globais possuem a mesma propriedade validada para todo elemento de domínio.

Considerando o problema geral:

$$\text{Minimize } f(x) \quad (3.2)$$

Sujeito a: $x \in B$

Em que $B \subseteq \mathbb{R}^n$. As definições expostas acima podem ser generalizadas:

Definição 3.1:

a. Um ponto $x_* \in B$ é dito ponto de mínimo local se $\exists V \subset \mathbb{R}^n$, tal que:

$$x_* \in V \text{ e } f(x_*) \leq f(x) \quad \forall x \in V \cap B$$

b. Um ponto $x_* \in B$ é dito ponto de máximo local se $\exists V \subset \mathbb{R}^n$, tal que:

$$x_* \in V \text{ e } f(x_*) \geq f(x) \quad \forall x \in V \cap B$$

c. Um ponto $x_* \in B$ é dito ponto de mínimo global se:

$$x_* \in V \text{ e } f(x_*) \leq f(x) \quad \forall x \in B$$

d. Um ponto $x_* \in B$ é dito ponto de máximo global se:

$$x_* \in V \text{ e } f(x_*) \geq f(x) \quad \forall x \in B$$

Outro conceito importante é definido na sequência:

Definição 3.2:

- Seja $I \subset \mathbb{R}$, dizemos que α é cota inferior de I se $\alpha \leq x, \forall x \in I$. Observe que α não necessariamente é elemento de I .
- O ínfimo de um conjunto é definido como sua maior cota inferior, no caso de ser limitado. Suporemos $\inf I = -\infty$, se este for ilimitado inferiormente.
- O valor mínimo do problema (3.2) é definido por:

$$\inf f(x); x \in B$$

Quando o conjunto das restrições pode ser representado por um sistema de equações e inequações, podem ser utilizados teoremas valiosos para aplicações de técnicas computacionais para a busca de ótimos locais. O principal teorema a ser apresentado tem por hipótese as qualificações das restrições que podem ser consultadas em Nocedal & Wright (1999). Considerando o FPO com forma geral descrita por:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & f(x) & (3.3) \\ \text{Sujeito a: } & g(x) = 0; \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \end{aligned}$$

A aplicação do teorema que fornece condições necessárias de otimalidade para soluções do problema (3.3) é dada como se segue:

Teorema 3.1 (Karush-Kuhn-Tucker):

Seja x solução local do problema (3.3) e suponha que f e g são continuamente diferenciáveis. Suponha também que as qualificações das restrições são asseguradas. Assim, existe um vetor multiplicador de Lagrange (λ, π, ν) , único, satisfazendo:

$$S\pi = 0, s \geq 0, \pi \geq 0, \quad (3.4a)$$

$$Z\nu = 0, z \geq 0, \nu \geq 0, \quad (3.4b)$$

$$\underline{x} + s - x = 0, \quad (3.4c)$$

$$x + z - \bar{x} = 0, \quad (3.4d)$$

$$g(x) = 0 \quad (3.4e)$$

$$\nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda - \pi + \nu = 0 \quad (3.4f)$$

Em que s e z representam variáveis de folga que têm por finalidade transformar as restrições de desigualdade em igualdades. S e Z são matrizes diagonais com os elementos de s e z .

O objetivo deste trabalho consiste na abordagem do FPO com convergência global, que será possibilitada a partir de técnicas de região de confiança para otimização irrestrita pela reformulação das condições dadas pelo Teorema 3.1. O desenvolvimento e as características das técnicas serão expostos em seções precedentes.

3.2. Funções de Complementaridade Não Linear

Seja $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação suave, um problema de complementaridade não linear consiste na busca de soluções $x \in \mathbb{R}^n$, satisfazendo:

$$x \geq 0, F(x) \geq 0, \quad x^T \cdot F(x) = 0 \quad (3.5)$$

Abordagens diversas para a solução de problemas de complementaridade não linear são propostas na literatura. A maioria delas apresentam reformulações do problema como sistemas de equações não lineares ou como problemas de minimização irrestrita de resíduos quadrados. Tratamentos matemáticos para a solução de (3.5) têm levado ao surgimento de uma classe de funções com características especiais denominadas de funções de complementaridade. Segue a definição:

Definição 3.3:

Uma função $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dita função de complementaridade não linear (CNL) se satisfaz a seguinte propriedade:

$$\psi(a, b) = 0 \Leftrightarrow ab = 0, \quad a \geq 0, b \geq 0 \quad (3.6)$$

O interesse por este tipo de função para solução do FPO surge da tentativa em se tratar as condições de otimalidade dadas pelo teorema KKT. Com efeito, métodos numéricos tradicionais para solução de sistemas não lineares não asseguram as condições de não negatividade em (3.4a) e (3.4b) e, portanto, o uso de funções CNL mostra-se atrativo, possibilitando a reformulação de (3.4) como um sistema não linear. Detalhes da reformulação do problema original serão expostos posteriormente.

Uma função de complementaridade bastante explorada na literatura e que será utilizada neste trabalho é a função de Fischer-Burmeister (FB):

$$\psi_{FB}(a, b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3.7)$$

É fácil mostrar que esta função satisfaz a propriedade (3.6). A função FB tem apresentado resultados favoráveis em aplicações de complementaridade não linear.

A não diferenciabilidade da função FB na origem do plano cartesiano levaria a problemas no cálculo do vetor gradiente requerido pelas técnicas, o que é contornada pela inserção de um parâmetro positivo a ser reduzido ao longo do processo iterativo, conforme o que segue:

$$\psi_{FB}(a, b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2 + 2\mu} \quad (\mu \rightarrow 0) \quad (3.8)$$

Outra maneira de se tratar não diferenciabilidades consiste no uso de diferenciais generalizados, tal como o diferencial de Clarke, definido pelo fecho convexo do diferencial de Bouligand, ver Izmailov & Solodov (2007).

Uma função que também apresenta bons resultados quando aplicada ao FPO é a função de Chen-Harker-Kanzow-Smale (CHKS):

$$\psi_{CHKS}(a, b) = a + b - \sqrt{(a - b)^2 + 4\mu} \quad (\mu \rightarrow 0) \quad (3.9)$$

Pode ser demonstrado que qualquer reformulação diferenciável das condições KKT leva a singularidades da matriz jacobiana quando a condição de complementaridade estrita não é satisfeita. Portanto, o uso de funções semi-suaves tem se mostrado atrativo em problemas de complementaridade não linear.

Outra questão delicada a respeito do uso de funções CNL em problemas de otimização consiste na assegurabilidade das condições de regularidade das restrições para validação do teorema KKT.

Pesquisas na literatura revelaram o uso de certas funções semi-diferenciáveis em problemas de complementaridade:

$$\psi_{\theta}(a, b) = \theta \cdot \psi_{FB}(a, b) + (1 - \theta) \cdot a_+ b_+ \quad (0 \leq \theta \leq 1) \quad (3.10)$$

$$\psi_K(a, b) = a + b - \sqrt{(a - b)^2 + k \cdot ab} \quad (0 \leq k \leq 4) \quad (3.11)$$

$$\psi_P(a, b) = a + b - \|(a, b)\|_P \quad (3.12)$$

$$\psi_{\mu}(a, b) = (1 + \mu) \cdot (a + b) - \sqrt{(1 - \mu)^2 \cdot (a - b)^2 + 4\mu^2} \quad (\mu \rightarrow 0) \quad (3.13)$$

$$\psi_{RS}(a, b) = \min\{a, b\} \quad (3.14)$$

Os parâmetros θ e k são fixos e arbitrários, de forma que ψ_θ é uma combinação convexa entre Fischer-Burmeister e o produto a_+b_+ (em que: $x_+ = \max\{x, 0\}$). A norma de Hölder utilizada em (3.12) generaliza FB. A função em (3.13) é obtida de CHKS. Finalmente, o índice RS denota a função resíduo natural.

Para as aplicações em questão, são utilizadas a função FB com tratamento da diferenciabilidade, a combinação convexa para penalização de violações das condições de complementaridade, a extensão de FB pelo uso de normas P-Hölder e a função CHKS. As demais funções foram apresentadas apenas para enriquecimento do trabalho.

4. REFORMULAÇÃO DO FPO E ESTUDO DO CONDICIONAMENTO NUMÉRICO

4.1. Reformulação do FPO

Para utilização de métodos de região de confiança globalmente convergente para otimização irrestrita, o problema original deve ser reformulado como um problema livre de restrições. As condições de otimalidade trazem dificuldades no tratamento das condições de complementaridade, tal como foi observado.

O uso de funções de complementaridade não linear permite a reformulação das condições KKT como um sistema de equações:

$$h(y) = \begin{pmatrix} \psi(s, \pi) \\ \psi(z, v) \\ \underline{x} + s - x \\ x + z - \bar{x} \\ g(x) \\ \nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda - \pi + v \end{pmatrix} = 0 \quad (4.1)$$

O método de Newton-Rapshon, embora tenha a agradável propriedade de convergência local quadrática, não assegura que a solução seja alcançada e, portanto, não apresenta um algoritmo com a robustez desejada. Convergência global pode ser obtida pela abordagem de (4.1) como um problema de minimização dos resíduos quadrados:

$$\min \phi(y) = \frac{1}{2} h(y)^T h(y) \quad (4.2)$$

É fácil perceber que toda solução de (4.1) também satisfaz (4.2) e as possíveis soluções do problema de minimização que não satisfazem (4.1) levariam a contradições, presumindo que as condições de regularidade das restrições sejam asseguradas.

Neste ponto, o uso de algoritmos globalmente convergente para otimização irrestrita permite alcançar convergência global. Há duas abordagens clássicas para este propósito, métodos de busca em linha e técnicas de região de confiança. A primeira caracteriza-se por gerar passos baseando-se em duas etapas, uma das quais se define a direção descendente e na outra é calculado o comprimento do passo dado na direção

corrente. A técnica de região de confiança será o ponto central deste trabalho, consistindo na aproximação da função objetivo por um modelo quadrático confiado em uma região fechada na qual deve ser minimizado. O método será apresentado de maneira minuciosa em seções precedentes.

4.2. Estudo do Condicionamento Numérico

Como será visto, para solução dos problemas relacionados ao método de região de confiança haverá necessidade de se tratar equações lineares definidas pela matriz hessiana da função objetivo em (4.2). Por esta razão, faz-se necessário um estudo do condicionamento numérico desta matriz, uma vez que a instabilidade numérica associada ao sistema pode levar a prejuízos em tempo de processamento e até mesmo dificultar o processo de convergência.

4.2.1. Condicionamento Numérico de um Problema

Para o entendimento das definições e teoremas que serão apresentados, é importante a compreensão dos conceitos de condicionamento de problemas mais genéricos. Desta forma, considera-se o problema definido por uma aplicação contínua f de um espaço vetorial normado X em outro espaço vetorial Y também munido de uma norma: $f: X \rightarrow Y$.

Intuitivamente, diz-se que o problema avaliado em um ponto $x \in X$ é bem condicionado se toda pequena variação em x resultar em pequenas variações de $f(x)$. Por outro lado, se alguma pequena perturbação em x levar a variações significativas em $f(x)$, o problema é dito mau condicionado. Evidentemente, faz-se necessária uma definição formal que possibilite uma percepção quantitativa para avaliação de quão pequena ou grande são essas variações para um dado problema.

4.2.2. Número Condicionador Absoluto

Considerando o problema apresentado na seção precedente, para uma variação δx , seja $\delta f = f(x + \delta x) - f(x)$, a variação equivalente em f . O número condicionador absoluto do problema para perturbações em x é definido por:

$$k = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\|\delta x\| \leq \delta} \frac{\|\delta f\|}{\|\delta x\|} \quad (4.3)$$

Assumindo as variações infinitesimais, a equação acima pode ser generalizada tomando uma expressão mais simples:

$$k = \sup_{\delta x} \frac{||\delta f||}{||\delta x||} \quad (4.4)$$

Fazendo uso da diferenciabilidade de f , conclui-se facilmente que o número condicionador é calculado pela norma da matriz jacobiana induzida pelas normas em X e Y .

$$k = ||J(x)|| \quad (4.5)$$

4.2.3. Número Condicionador Relativo

Embora o conceito de número condicionador absoluto seja útil em variadas aplicações, é importante definir o número de condição relativo, para que haja bom senso em estudos de análise numérica envolvendo diferentes ordens de grandeza. É evidente que as interpretações de resultados da aritmética de ponto flutuante são melhor realizadas baseando-se em erros relativos.

Por analogia direta às equações definidas na seção precedente, o número condicionador relativo é dado por:

$$k = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{||\delta x|| \leq \delta} \frac{\left(\frac{||\delta f||}{||f(x)||} \right)}{\left(\frac{||\delta x||}{||x||} \right)} \quad (4.6)$$

Generalizando para simplificação:

$$k = \sup_{\delta x} \frac{\left(\frac{||\delta f||}{||f(x)||} \right)}{\left(\frac{||\delta x||}{||x||} \right)} \quad (4.7)$$

Utilizando diferenciabilidade:

$$k = \frac{\|J(x)\|}{\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}} \quad (4.8)$$

A definição de condicionamento numérico de um problema deixa claro que problemas bem condicionados devem ter números condicionadores pequenos, enquanto que números condicionadores elevados sugerem mau condicionamento. Neste sentido, o número de condição representa uma maneira quantitativa de se obter informações quanto à instabilidade numérica de um problema.

4.2.4. Número de Condição de uma Matriz

Cálculos relacionando o número de condição de problemas em álgebra linear fazem surgir frequentemente o produto da norma de uma matriz pela norma de sua inversa. Por este motivo, este produto é denominado o número de condição da matriz, conforme expresso pela equação:

$$k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad (4.9)$$

Esta definição estabelece o número de condição da matriz, não mais do problema. Da mesma forma, o bem ou mau condicionamento da matriz será firmado por este número. Para matrizes singulares, o número de condição é definido infinito ($k(A) = \infty$, se A é singular). Por inspeção direta, com uso da norma matricial induzida pela norma euclidiana, o número de condição de uma matriz consiste na razão entre seu maior e menor autovalor:

$$k_2(A) = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \quad (4.10)$$

4.2.5. Condicionamento de um Sistema de Equações Linear

Conforme já mencionado, o fluxo de potência ótimo por métodos de região de confiança, ainda a ser exposto, requer a solução de sistemas lineares envolvendo a matriz hessiana, como também requer operações de multiplicação matriz vetor. É, portanto, válido ter conhecimento do condicionamento numérico destes dois problemas simples.

A compreensão dos seguintes teoremas, consultar Trefethen & Bau (1997), é suficiente para o entendimento inicial da instabilidade numérica associada a tais problemas:

Teorema 4.1:

Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ não singular e considere a equação $Ax = b$. O problema de se calcular “b”, dado “x”, tem número de condição:

$$k = \|A\| \frac{\|x\|}{\|b\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad (4.11)$$

em relação a perturbações em “x”. O problema de se calcular “x”, na posse de “b”, tem número condicionador:

$$k = \|A^{-1}\| \frac{\|b\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad (4.12)$$

com respeito a perturbações em “b”. Se a norma é $\|\dots\|_2$, então a igualdade em (4.11) é satisfeita se “x” é um múltiplo do vetor singular à direita de “A” correspondente ao seu menor valor singular, e a igualdade em (4.12) é assegurada se “b” é um múltiplo do vetor singular à esquerda de “A” correspondente ao seu maior valor singular.

Teorema 4.2:

Seja “b” fixo e considere o problema de se calcular $x = A^{-1}b$, no qual “A” é quadrada e não singular. O número de condição deste problema em relação a perturbações em “A” é:

$$k = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = k(A) \quad (4.13)$$

Os teoremas enunciados sugerem que a análise do número condicionador das matrizes associadas a um dado problema, revela quão acurada é uma possível solução. Para o problema em questão, a matriz hessiana da função objetivo de minimização de resíduos quadrados desempenha papel fundamental e, por isto, atenção especial é dada ao seu condicionamento numérico.

4.3. Tratamento do Mau Condicionamento Numérico da Matriz Hessiana

O condicionamento numérico da matriz hessiana está associado às derivadas de segunda ordem posicionadas na diagonal principal. Algumas destas derivadas tendem a assumir valores nulos em pontos sobre as retas $a = 0$ ou $b = 0$, ocasionando uma instabilidade numérica e conseqüente dificuldade em cálculos que compõem os passos para solução do subproblema de região de confiança (o próximo capítulo tornará esta afirmação clara).

Uma maneira de evitar valores nulos na diagonal consiste na comparação direta dos elementos calculados para montagem da hessiana com zero e utilização de valores pequenos, mas não nulos, para substituição dos zeros diagonais. O procedimento adotado para o tratamento da instabilidade numérica foi exatamente tal como descrito:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial a^2} \leq 0,005 \rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial a^2} = 0,005 \quad (4.11. a)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial b^2} \leq 0,005 \rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial b^2} = 0,005 \quad (4.11. b)$$

5. MÉTODOS DE REGIÃO DE CONFIANÇA E SOLUÇÃO DO SUBPROBLEMA

5.1. Método de Região de Confiança para Otimização Irrestrita

A abordagem de região de confiança para a globalização do problema irrestrito consiste em minimizar uma aproximação quadrática da função objetivo original dentro de uma região na qual possa ser confiada. Esta região é chamada de região de confiança e a aproximação é obtida do truncamento da expansão em série de Taylor da função objetivo $\phi(y)$ em torno da iteração corrente, desde que esta função seja duas vezes diferenciável. Desta maneira, o subproblema de região de confiança, que deve ser resolvido em cada iteração, apresenta a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min m_k(y_k + d) &= \phi(y_k) + \nabla\phi(y_k)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 \phi(y_k) d \\ \text{s. a.: } \|d\|_2 &\leq \Delta_k \end{aligned} \quad (5.1)$$

O raio da região que restringe o subproblema de minimização deve ser controlado para que a aproximação quadrática seja fidedigna à função original, de forma que seja pequeno o suficiente para validar a aproximação e grande o quanto possa para dar maiores passos em busca da solução. A escolha do tamanho do raio adequado para a região de confiança representa o principal aspecto do método. Assim, em cada iteração há a verificação do tamanho da região, além da resolução do subproblema.

O monitoramento é realizado pelo estudo do parâmetro dado pelo quociente entre a redução real alcançada e a redução prevista pelo modelo entre duas iterações. Este parâmetro é denominado de taxa de redução e mensura o quão boa é a aproximação. A taxa é calculada por:

$$\rho_k = \frac{\phi(y_k) - \phi(y_k + d_k)}{m_k(0) - m_k(d_k)} \quad (5.2)$$

O raio só deve ser aumentado quando ρ_k for suficientemente próximo da unidade e a iteração alcançar a fronteira da região, por outro lado, deve ser reduzido quando a taxa for muito pequena.

Em princípio, é de se pensar que o método de região de confiança requer a busca de uma solução global do problema quadrático restrito para cada iteração, o que representa custo computacional significativo, sobretudo considerando a possibilidade de resolução de mais de um subproblema para se alcançar um valor adequado para o raio da região. Todavia, o método apresenta uma propriedade de convergência que assume papel crucial em sua implementação, permitindo a busca por soluções aproximadas. A seguir, é enunciado um teorema que estabelece condições para garantia da convergência global, mas antes é necessária a definição de alguns conceitos.

Definição 5.1:

O mínimo irrestrito do problema (5.1) é denominado passo (ponto) de Newton ou passo completo:

$$d_n = -\nabla^2 \phi(y_k)^{-1} \cdot \nabla \phi(y_k) \quad (5.3)$$

Definição 5.2:

O passo de Cauchy é definido como o mínimo restrito do problema (5.1) na direção de máxima descendência a partir da iteração corrente:

$$d_c = -\alpha_k \nabla \phi(y_k) \quad (5.4)$$

Em que α_k é o comprimento de passo ótimo obtido por:

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla \phi(y_k)^T [-\alpha \nabla \phi(y_k)] + \frac{1}{2} [-\alpha \nabla \phi(y_k)]^T \nabla^2 \phi(y_k) [-\alpha \nabla \phi(y_k)]; \alpha \geq 0 \\ \text{s. a.:} \quad & \| -\alpha \nabla \phi(y_k) \|_2 \leq \Delta_k \end{aligned} \quad (5.5)$$

Definição 5.3:

Define-se o conjunto de nível de ϕ por:

$$S = \{y / \phi(y) \leq \phi(y_0)\} \quad (5.6)$$

Em que y_0 representa o ponto inicial para desencadear o processo iterativo de região de confiança.

Uma vizinhança aberta de S é definida por:

$$S(R_0) = \{y / \|y - q\| \leq R_0 \text{ para algum } q \in S\} \quad (5.7)$$

Em que R_0 é uma constante positiva.

Teorema 5.1:

Suponha que $\|\nabla^2 \phi_k\| \leq \beta$, para algum “ β ” positivo e que ϕ seja limitada inferiormente em seu conjunto de nível como definido acima. Suponha também que ϕ seja Lipschitziana e duas vezes diferenciável numa vizinhança $S(R_0)$. Se para algumas constantes positivas c_1 e Λ , as desigualdades a seguir são satisfeitas para toda solução aproximada do subproblema de região de confiança:

$$m_k(0) - m_k(d_k) \geq c_1 \|\nabla \phi_k\| \cdot \min \left(\Delta_k, \frac{\|\nabla \phi_k\|}{\|\nabla^2 \phi_k\|} \right), c_1 \in (0,1] \quad (5.8)$$

$$\|d_k\| \leq \Lambda \cdot \Delta_k, \quad \Lambda \geq 1 \quad (5.9)$$

Então:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|\nabla \phi_k\| = 0 \quad (5.10)$$

O que significa que o algoritmo de região de confiança, tal como será apresentado, converge para um ponto estacionário quando satisfeitas as hipóteses do teorema.

Uma demonstração para este resultado pode ser obtida em Nocedal & Wright (1999). O teorema incentiva a busca de soluções aproximadas para o subproblema, haja vista que não há necessidade da obtenção de soluções exatas para garantia de convergência. Pode ser mostrado facilmente que o ponto de Cauchy satisfaz as desigualdades (5.8) e (5.9) e, portanto, as soluções aproximadas advindas das técnicas para solução do subproblema a serem apresentadas não devem apresentar dificuldades.

Outra questão facilitadora diz respeito à estrutura específica do subproblema de região de confiança para a qual existem vários métodos eficientes de otimização, principalmente para o problema em questão de minimização de resíduos quadrados no qual a matriz hessiana é positiva definida. As técnicas utilizadas para solução do subproblema

serão expostas em detalhes para efeito de análise comparativa e compreensão dos resultados.

5.1.1. Algoritmo de região de confiança

Segue o algoritmo de região de confiança baseado em Nocedal & Wright (1999):

1. Faça $k = 0$, defina o raio máximo da região $\Delta_{máx} > 0$, escolha $\Delta_0 \in (0, \Delta_{máx})$ e $\eta \in [0, 1/4)$.
2. Monte e resolva aproximadamente o subproblema de região de confiança (5.1) para o passo d_k . Calcule a taxa de redução ρ_k por (5.2).
3. Se $\rho_k < 1/4$, então faça $\Delta_{k+1} = \frac{1}{4} \Delta_k$ e vá para o passo 5.
4. Se $\rho_k > 3/4$ e $||d_k|| = \Delta_k$, então faça $\Delta_{k+1} = \min(2 \Delta_k, \Delta_{máx})$. Caso contrário, faça $\Delta_{k+1} = \Delta_k$.
5. Se $\rho_k > \eta$, então $x_{k+1} = x_k + d_k$. Caso contrário, $x_{k+1} = x_k$. Faça $k = k + 1$ e retorne para o passo 2.

Inicialmente define-se o raio máximo e o raio inicial da região de confiança, assim como o parâmetro que decidirá se o passo deve ser tomado, ou não, para uma iteração seguinte. O subproblema de região de confiança é resolvido por alguma das técnicas a serem apresentadas e a taxa de redução é calculada para análise da fidelidade entre o modelo aproximado e a função original. O terceiro e o quarto passos decidem a respeito do tamanho da região. Por fim, é decidido se o passo deve ser dado pela comparação da taxa de redução com o parâmetro definido.

5.2. Método *Dogleg*

O método *dogleg* para solução do subproblema de região de confiança baseia-se na aproximação do caminho ótimo por um poligonal composto por dois segmentos de reta. O caminho é definido pelo centro da região e pelos passos de Newton e de Cauchy, conforme ilustrado a seguir.

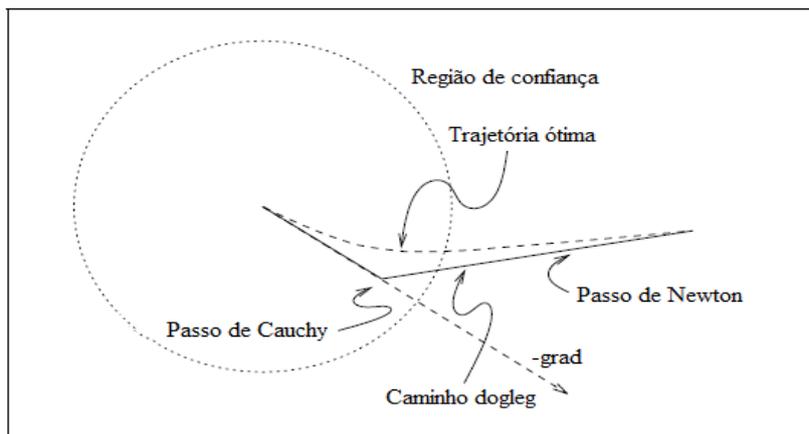


Figura 5.1 – Trajetória Ótima Exata e Aproximação Dogleg

Fonte: Nocedal (1999, p. 74)

No caso em questão, em que a matriz hessiana da função de resíduos quadrados é positiva definida, o método *dogleg* está bem definido, uma vez que satisfaz a proposição a seguir:

Proposição 5.1:

Seja $\nabla^2\phi(y_k)$ positiva definida. Então:

- $\|d(\tau)\|$ é uma função crescente de τ .
- $m(d(\tau))$ é função decrescente de τ .

Em que $d(\tau)$ parametriza o caminho *dogleg*, conforme a equação:

$$d(\tau) = \begin{cases} \tau d_c, & 0 \leq \tau \leq 1 \\ d_c + (\tau - 1)(d_n - d_c) & 1 \leq \tau \leq 2 \end{cases} \tag{5.11}$$

A proposição afirma que o passo de Newton sempre está mais longe do centro da região quando comparado ao passo de Cauchy e, por isto, ao percorrer o caminho no sentido crescente do parâmetro τ deve haver distanciamento do centro da região. Também, a aproximação quadrática é decrescente ao longo do caminho, o que significa que o mínimo sobre a trajetória *dogleg* deve estar na fronteira com a região de confiança, quando o passo de Newton estiver fora da região e será o mínimo irrestrito, nos casos em que o caminho não interceptar a fronteira da região.

Desta forma, para solucionar o subproblema aproximadamente via estratégia *dogleg* é suficiente calcular o passo de Newton e verificar o posicionamento relativo à região de confiança. Caso o ponto de Newton não satisfaça a restrição de confiança, o que deve

ocorrer na maioria das iterações, o passo de Cauchy é calculado e a interseção entre o caminho *dogleg* e a fronteira da região é obtida por:

$$\|d_c + (\tau - 1)(d_n - d_c)\|^2 = \Delta_k^2 \quad (5.12)$$

Finalmente, segue o algoritmo com a técnica *dogleg* da maneira em que foi implementado:

- Calcule d_n por (5.3). Se $\|d_n\| \leq \Delta_k$, então retorne $d_k = d_n$.
- Calcule d_c por (5.4). Se $\|d_c\| = \Delta_k$, então retorne $d_k = d_c$.
- Calcule $d(\tau)$ usando (5.11) e (5.12) e retorne $d_k = d(\tau)$.

É fácil perceber que o custo computacional associado ao método está relacionado ao cálculo do passo de Newton e, portanto, representa o custo de uma fatorização Cholesky por iteração. Para estudo comparativo entre as técnicas a serem apresentadas, é essencial o conhecimento dos custos computacionais, uma vez que refletem no tempo de processamento das iterações.

5.3. Minimização no Subespaço Bidimensional

Já é sabido que para globalização dos métodos de região de confiança para otimização irrestrita não são requeridas soluções exatas para o subproblema em cada iteração. Por este motivo, a busca por soluções aproximadas é realizada na maioria das técnicas. O método *dogleg* surge como uma boa abordagem e tentativas de superá-lo são propulsionadas principalmente por dois aspectos: buscar soluções mais próximas da solução global ou reduzir o custo da iteração para efficientização da técnica.

O método de minimização sobre o subespaço bidimensional apresenta-se como alternativa viável para solução do subproblema, uma vez que amplia o espaço de busca em relação à estratégia *dogleg*, levando a soluções mais acuradas para o subproblema, mantendo o mesmo custo computacional de uma fatorização.

Assim como a estratégia *dogleg*, o método de minimização bidimensional procede resolvendo o subproblema de maneira aproximada. A busca pela aproximação se dá no subespaço gerado pelo mínimo irrestrito e pelo gradiente na iteração corrente $[\nabla^2 \phi(y_k)^{-1} \cdot \nabla \phi(y_k) \quad \nabla \phi(y_k)]$ (equivalentemente: subespaço gerado pelos pontos de Newton

e de Cauchy $[d_n \ d_c]$), o que justifica o nome da técnica. A positividade da matriz hessiana facilita a aplicação da técnica para o problema de minimização dos resíduos, que alcança ótimas aproximações da solução exata para cada iteração, apresentando baixíssimo custo computacional.

Um ponto do subespaço é expresso como uma combinação linear dos vetores geradores, conforme a equação:

$$d(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 \nabla^2 \phi(y_k)^{-1} \cdot \nabla \phi(y_k) + \alpha_2 \nabla \phi(y_k) \quad (5.13)$$

É interessante perceber que haveria dependência linear entre os vetores geradores se e só se o vetor gradiente fosse um autovetor da matriz hessiana. Embora esta observação não leve a qualquer necessidade de cuidados adicionais, ela traduz uma condição na qual o espaço gerado teria dimensão reduzida, sendo, portanto, unidimensional.

A partir de (5.13), o subproblema de região de confiança reduz-se a um problema de minimização restrita no plano \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla \phi(y_k)^T \cdot d(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{1}{2} d(\alpha_1, \alpha_2)^T \cdot \nabla^2 \phi(y_k) \cdot d(\alpha_1, \alpha_2) \\ \text{s. a.:} \quad & \|d(\alpha_1, \alpha_2)\| \leq \Delta_k \end{aligned} \quad (5.14)$$

Uma vez que o espaço de busca está restrito à região de confiança e ao espaço bidimensional, a região viável é mais ampla do que o que ocorre com a técnica *dogleg*, porém mais restrita que a região de confiança original.

Quando o passo de Newton é interior à região, é ele próprio a solução do subproblema (caso em que $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 0$). É fácil mostrar que a solução global do subproblema se encontra na fronteira da região de confiança quando o passo de Newton está fora desta. Portanto, o procedimento consiste basicamente na verificação da viabilidade do ponto de Newton e quando este violar a restrição, calcular os coeficientes da combinação linear (α_1, α_2) que minimizem a aproximação quadrática sob a restrição de igualdade em (5.14).

Utilizando a norma-1, pode ser demonstrado que a solução do problema bidimensional restrito é obtida pela resolução do sistema linear a seguir, no qual γ é o multiplicador de Lagrange do problema bidimensional associado à restrição de igualdade:

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \sqrt{k_4} \\ k_2 & k_3 & \sqrt{k_2} \\ \sqrt{k_4} & \sqrt{k_2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \\ -k_2 \\ -\Delta \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Em que:

$$k_1 = \nabla\phi(y_k)^T \cdot \nabla^2\phi(y_k)^{-1} \cdot \nabla\phi(y_k)$$

$$k_2 = \|\nabla\phi(y_k)\|^2$$

$$k_3 = \nabla\phi(y_k)^T \cdot \nabla^2\phi(y_k) \cdot \nabla\phi(y_k)$$

$$k_4 = \|\nabla^2\phi(y_k)^{-1} \cdot \nabla\phi(y_k)\|^2$$

O custo para a solução de (5.15) é muito baixo, justificando a vantagem da aplicação do método. O uso do sinal que acompanha o raio da região é uma maneira de evitar o tratamento com valores absolutos advindos da norma-1. Com efeito, as duas primeiras equações do sistema garantem a negatividade de pelo menos um dos coeficientes da combinação linear, haja vista a não negatividade do multiplicador de Lagrange γ e de cada um dos coeficientes k_i . Para o sucesso do método a solução do sistema é comparada ao par $(\alpha_1, -\alpha_2)$ e o resultado que leva à maior redução na aproximação quadrática é tomado como par de coeficientes da combinação linear para a solução aproximada do subproblema.

5.3.1. Implementação da Minimização no Subespaço Bidimensional

O algoritmo, da maneira em que foi implementado, consistiu nos seguintes passos:

- Calcule d_n por (5.3). Se $\|d_n\| \leq \Delta_k$, então retorne $d_k = d_n$.
- Calcule os coeficientes $k_i (i = 1,2,3,4)$ e resolva (5.15)
- Calcule $m(d(\alpha_1, \alpha_2))$ e $m(d(\alpha_1, -\alpha_2))$
- Se $m(d(\alpha_1, \alpha_2)) \leq m(d(\alpha_1, -\alpha_2))$, faça $d_k = d(\alpha_1, \alpha_2)$
- Outro caso: $d_k = d(\alpha_1, -\alpha_2)$

A implementação evidencia a viabilidade do método, tendo em vista seu baixo custo computacional para obtenção de aproximações melhores do que aquelas obtidas pela estratégia *dog/leg*. Os resultados da aplicação são expostos em seções posteriores.

5.4. Solução do Subproblema por Métodos Iterativos

Os métodos já apresentados buscam soluções aproximadas para o subproblema de região de confiança, o que é suficiente para garantia de convergência global, satisfeitas as hipóteses do teorema 5.1. Ainda assim, tentativas do cálculo de soluções mais aproximadas pode ser valioso em problemas com menos variáveis de decisão. Ao custo de poucas fatorizações adicionais, métodos iterativos que convergem para a solução global do subproblema podem ser implementados, baseando-se no teorema de Sorensen e Moré:

Teorema 5.2. (Sorensen-Moré):

O vetor p_* é solução do subproblema de região de confiança:

$$\min g^T d + \frac{1}{2} d^T B d$$

$$s. a.: \|d\| \leq \Delta_k$$

Se e somente se, é viável e existe um escalar $\sigma \geq 0$, tal que as seguintes condições são satisfeitas:

$$(B + \sigma \cdot I) \cdot p_* = -g$$

$$\sigma \cdot (\Delta - \|p_*\|) = 0$$

$$(B + \sigma \cdot I) \text{ é positiva semidefinida.}$$

A demonstração deste resultado é omitida, mas pode ser obtida em Nocedal & Wright (1999). O teorema incentiva a busca da solução pelo cálculo do multiplicador de Lagrange σ associado à restrição do problema. Evidentemente, apenas quando o passo de Newton estiver fora da região, métodos iterativos são aplicados às equações:

$$\|d(\sigma)\| = \Delta \tag{5.16}$$

$$d(\sigma) = -(B + \sigma \cdot I)^{-1} \cdot g \tag{5.17}$$

O problema então consiste de uma equação não linear com uma variável e pode ser resolvido aproximadamente por algumas iterações do método de Newton. Obviamente, $(B + \sigma \cdot I)$ deve ser positiva semidefinida. Para a aplicação em minimização dos resíduos

quadrados, qualquer deslocamento de uma parcela positiva na matriz hessiana garante positividade, uma vez que esta é positiva definida.

Da maneira em que está apresentada, a equação (5.16) é fortemente não linear na vizinhança da solução, indicando desvantagens em aplicações do método de Newton. De fato, a diferenciabilidade é o ponto crucial da técnica de Newton, permitindo o uso de aproximações lineares da função original em cada iteração. Para contornar tal situação, a busca da solução é efetuada na equação equivalente:

$$\frac{1}{\|d(\sigma)\|} = \frac{1}{\Delta} \quad (5.18)$$

Ao contrário da formulação anterior, esta equação apresenta-se aproximadamente linear nas proximidades da solução.

Exceto no caso em que os autovetores associados ao menor autovalor da matriz hessiana são ortogonais ao vetor gradiente (“*hard case*”), a implementação do algoritmo para solução de (5.18) é simples, conforme o exposto:

Dado $\sigma_0, \Delta > 0$:

Para $i=0,1,2,3,\dots$

1. Fatorize $(\nabla^2 \phi + \sigma_i \cdot I) = G^T \cdot G$ (Cholesky)

2. Resolva $G^T \cdot G \cdot d_i = -\nabla \phi$, e $G^T \cdot q_i = d_i$

3. Faça: $\sigma_{i+1} = \sigma_i + \left(\frac{\|d_i\|}{\|q_i\|}\right)^2 \cdot \left(\frac{\|d_i\| - \Delta}{\Delta}\right)$

Para que não haja aumento significativo do custo computacional são realizadas poucas iterações. A fatorização Cholesky requer positividade da matriz e para isto, os valores de σ devem ser maiores que o negativo do menor autovalor da matriz hessiana. A inicialização com valor de σ_0 nulo é adequada.

É evidente que o algoritmo só desencadeará nos casos em que o passo de Newton estiver fora da região de confiança. Deve-se notar que a direção inicial (d_0) do processo iterativo é o próprio passo de Newton.

Vale ressaltar que a técnica apresenta vantagens em sistemas de teste cujas matrizes têm dimensões favoráveis a algumas poucas fatorizações (normalmente 3). Deve ser observado que o processo iterativo só poderá cessar sob a condição de viabilidade do passo d calculado.

O algoritmo foi implementado tal como apresentado e os resultados serão expostos adiante.

6. RESULTADOS COMPUTACIONAIS E ANÁLISE COMPARATIVA

Neste capítulo são apresentados os resultados da aplicação das técnicas obtidos a partir de simulações computacionais com sistemas de teste do IEEE e de subregionais da Celpe. Os diagramas unifilares da maioria dos subsistemas Celpe estão apresentados no (Anexo). A análise dos resultados é baseada, sobretudo, no número de iterações e no condicionamento numérico da matriz hessiana, possibilitando um estudo comparativo para decisão das melhores abordagens.

6.1. Resultados e Análise Quanto aos Parâmetros do Algoritmo de Região de Confiança

O sucesso do método de região de confiança está relacionado à escolha inteligente do raio da região em cada iteração. De fato, quando este é demasiado pequeno perde-se a oportunidade de maiores progressos em busca da solução. Em contrapartida, raios muito grandes levariam riscos à fidelidade da aproximação da função objetivo pelo modelo quadrático, uma vez que esta é validada apenas localmente.

Os parâmetros do algoritmo de região de confiança definem o controle do raio da região, apresentando como principal objetivo o monitoramento eficiente do tamanho da região no decorrer do processo iterativo.

Para os resultados na sequência, quando não se fizer menção, os valores *defaults* para os parâmetros do método são:

- Solução do subproblema: Método *dogleg*
- Raio inicial: 1
- Raio máximo: 5
- Limite da taxa de redução para aumento do raio: 0,75
- Fator de ampliação do raio: 1,2
- Limite da taxa de redução para redução do raio: 0,1
- Fator de redução do raio: 0,5

Para a análise quanto aos parâmetros do método de região de confiança, são utilizadas as funções de complementaridade de Fischer-Burmeister (FB) e de Chen-Harker-Kanzow-Smale (CHKS).

6.1.1. Escolha do Raio Inicial

Os resultados obtidos pela variação do raio inicial da região de confiança em aplicações para alguns sistemas de teste do IEEE e subregionais da Celpe se resumem na Tabela 6.1, na qual são apresentados números de iterações médios.

Tabela 6.1 - Sensibilidade em Relação ao Raio Inicial da Região de Confiança para Minimização de Perdas Ativas

| | | | | | | | | |
|---------------------------|------|------|-----|------|-----|-----|-----|-----|
| Raio Inicial: | 0,05 | 0,1 | 0,5 | 0,75 | 1 | 1,5 | 2 | 3 |
| # Iterações médio (FB): | 12,6 | 9,8 | 6,8 | 6,4 | 6,8 | 7,7 | 7,5 | 7,9 |
| # Iterações médio (CHKS): | 12,7 | 10,8 | 5,7 | 6,6 | 5,7 | 7,6 | 7,1 | 7,4 |

Os resultados do estudo indicaram o que se previra intuitivamente. Mais iterações para raios iniciais muito pequenos, já que o algoritmo requereu algumas iterações para alcançar um tamanho adequado em concordância com a taxa de redução. Raios iniciais grandes também levaram a resultados relativamente ruins e a melhor escolha se deu nas proximidades do *default*.

6.1.2. Escolha do Raio Máximo

A análise quanto à escolha do raio máximo é baseada nos seguintes resultados:

Tabela 6.2 - Sensibilidade em Relação ao Raio Máximo da Região de Confiança para Minimização de Perdas Ativas

| | | | | | | | | | |
|---------------------------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Raio Máximo: | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 1 | 3 | 5 | 6 | 8 | 100 |
| # Iterações médio (FB): | 11,8 | 7,6 | 6,3 | 6,8 | 6,8 | 6,8 | 6,8 | 6,8 | 6,8 |
| # Iterações médio (CHKS): | 11,7 | 7,6 | 5,9 | 5,8 | 5,7 | 5,7 | 5,7 | 5,7 | 5,7 |

É interessante perceber os bons resultados para maiores valores do raio máximo e a constância do número de iterações a partir de certo valor. Isto é facilmente justificado pelo passo 4 do algoritmo de região de confiança, que estabelece que a ampliação do raio para uma iteração seguinte só deve ocorrer quando a taxa de redução ultrapassar um limite especificado e o passo da iteração corrente alcançar a fronteira da região de confiança. Ainda mais, o raio ampliado assume o menor valor entre o dobro do valor anterior e o raio máximo, o que significa que para valores muito grandes de raio máximo, o algoritmo opta por dobrar a região, quando necessário. É evidente que a escolha de raios máximos grandes

combinados a raios iniciais exagerados e pequenos limites da taxa de redução para o aumento da região levaria a maiores tempos para a convergência.

A análise quanto à variação dos demais parâmetros do algoritmo de região de confiança foi baseada no problema de maximização do carregamento. Isto porque é um problema de dimensão maior e com mais iterações, permitindo uma maior sensibilidade à variação dos parâmetros.

6.1.3. Escolha dos Limites da Taxa de Redução para o Aumento ou Redução do Raio da Região

O algoritmo de região de confiança realiza comparações entre a taxa de redução e parâmetros definidos, com a finalidade de verificar as possibilidades de aumento ou redução do raio da região para uma iteração seguinte. O passo 3 do algoritmo identifica quando o raio deve ser diminuído para que a fidelidade da função aproximada seja melhorada na próxima iteração, enquanto que o passo 4 estabelece se é seguro permitir a ampliação da região.

Resultados para diferentes limites da taxa de redução são expostos a seguir:

Tabela 6.3 - Influência do Limite da Taxa de Redução a partir do qual Pode Haver Aumento do Raio (Maximização do Carregamento do Sistema)

| | | | | | | | | |
|---------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Limite para o aumento: | 0,1 | 0,3 | 0,55 | 0,65 | 0,75 | 0,85 | 0,9 | 0,95 |
| # Iterações médio (FB): | 16,4 | 16,6 | 16,9 | 17,2 | 17,5 | 17,4 | 17,6 | 18,1 |
| # Iterações médio (CHKS): | 14,7 | 14,7 | 14,7 | 14,6 | 14,6 | 16,1 | 17,3 | 17,6 |

Tabela 6.4 - Influência do Limite para Redução do Raio (Maximização do Carregamento do Sistema)

| | | | | | | | | | |
|---------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Limite para redução: | -100 | -10 | -1 | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 |
| # Iterações médio (FB): | 12,2 | 13,2 | 15,5 | 17,5 | 17,5 | 18,5 | 18,3 | 19,2 | 20,9 |
| # Iterações médio (CHKS): | 10,3 | 11 | 11,7 | 13,7 | 14,6 | 14,6 | 16,2 | 17,5 | 18,1 |

Os limites para ampliação ou redução do raio apresentaram melhores resultados para valores menores. O que significa que é desvantajoso reduzir o raio da região para o problema de maximização do carregamento, ainda que a taxa indique péssima fidelidade entre a função objetivo e o modelo quadrático. Ao contrário, a opção de aumentar a região deve sempre ser levada em conta, obviamente porque há mais de uma exigência para que isto ocorra. Com efeito, o raio da região só é aumentado quando a taxa de redução excede o

limite especificado e o comprimento do passo é suficientemente grande para que o valor da iteração alcance a fronteira da região. A satisfação de ambas as exigências sugere segurança para a ampliação do raio.

6.1.4. Escolha dos Fatores de Redução e Crescimento

A influência do fator de redução pode ser visualizada abaixo:

Tabela 6.5 - Sensibilidade em Relação ao Fator de Redução do Raio (Maximização do Carregamento)

| Fator de redução | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
|---------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| # Iterações médio (FB): | 19,2 | 18,9 | 17,8 | 17,1 | 17,5 | 17,1 | 18 | 19,2 | 25,4 |
| # Iterações médio (CHKS): | 17,4 | 19 | 15,3 | 15,7 | 14,6 | 15,8 | 17,2 | 17,2 | 20,6 |

A tabela indica resultados ruins para valores muito pequenos ou muito grandes do fator de redução, o que é justificado pela filosofia bastante ressaltada da escolha inteligente do tamanho da região, evitando superestimá-la ou subestimá-la. Valores próximos ao *default* apresentaram melhores resultados.

Para o fator de crescimento, os seguintes resultados foram obtidos:

Tabela 6.6 - Influência do Fator de Crescimento do Raio (Maximização do Carregamento do Sistema)

| Fator de crescimento | 1 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 2 | 3 |
|---------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| # Iterações médio (FB): | 21 | 15,8 | 17,5 | 14 | 15,9 | 15 | 15,2 | 15,6 | 20,9 |
| # Iterações médio (CHKS): | 18,9 | 14,1 | 14,6 | 11,4 | 13,6 | 11,2 | 11,7 | 12,7 | 12 |

A escolha do fator de crescimento por si só não pareceu ser definitiva para uma convergência com mais ou menos iterações, apresentando resultados variados, normalmente melhores nas proximidades do *default*. A influência deste parâmetro é melhor percebida quando estudada em conjunto com o raio máximo e o limite para ampliação. A análise para um sistema de teste arbitrário, utilizando a função de Fischer-Burmeister revela o quanto o desempenho do método pode ser afetado pelo fator de crescimento (FC), para diferentes valores do raio máximo ($R_{m\acute{a}x}$) e do limite para ampliação (l):

Intuitivamente, é claro que o fator de crescimento deve apresentar maior influência para maiores valores do raio máximo e menores limites da taxa de redução para ampliação, fato que é de verificação imediata pelos resultados da Tabela 6.7.

A análise dos resultados é baseada no número de iterações.

Tabela 6.7 - Influência do Fator de Crescimento para Diferentes Raios Máximos e Limites para Ampliação (Maximização do Carregamento do Sistema)

| $FC/(R_{m\acute{a}x}; l)$ | $R_{m\acute{a}x} = 5$ $l = 0,75$ | $R_{m\acute{a}x} = 5$ $l = 0,1$ | $R_{m\acute{a}x} = 10$ $l = 0,75$ | $R_{m\acute{a}x} = 5$ $l = 0,1$ |
|---------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|
| FC=1,2 | 26 | 24 | 21 | 21 |
| FC=3 | 28 | 31 | 26 | 33 |
| FC=10 | 28 | 33 | 35 | 44 |

6.2. Resultados e Análise quanto à Função de Complementaridade

O tratamento da condição de complementaridade se deu pelo uso de uma vasta classe de funções CNL. A análise é realizada tomando-se como parâmetro a função de Fischer-Burmeister, a qual é comparada à generalização a partir de normas P-Hölder e à função obtida pela combinação convexa com o termo de penalização.

6.2.1. Combinação Convexa X Fischer-Burmeister

O termo adicional em relação à função FB introduzido a partir de uma combinação convexa tem por finalidade penalizar violações na condição de complementaridade. Também, a geometria das curvas de nível da função obtida é menos plana, apresentando menor incidência de derivadas parciais nulas.

Alguns dos resultados obtidos são apresentados na sequência:

Tabela 6.8 - Combinação Convexa X Fischer-Burmeister / Minimização das Perdas Ativas (Sistemas de Teste do IEEE)

| Sistema | FB | $\psi_{\theta} (\theta=0,9)$ | $\psi_{\theta} (\theta=0,8)$ | $\psi_{\theta} (\theta=0,6)$ |
|---------|-----|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| IEEE30 | 11 | 5 | 6 | 8 |
| IEEE57 | 6 | 6 | 7 | 7 |
| IEEE118 | 7 | 7 | 8 | 9 |
| IEEE300 | 10 | 10 | 10 | 12 |
| Média | 8,5 | 7 | 7,75 | 9 |

Tabela 6.9 - Combinação Convexa X Fischer-Burmeister / Minimização das Perdas Ativas (Subregionais da Celpe)

| Sistema | FB | $\psi_{\theta} (\theta=0,9)$ | $\psi_{\theta} (\theta=0,8)$ | $\psi_{\theta} (\theta=0,6)$ |
|----------------|----|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| Angelim | 8 | 6 | 7 | 9 |
| Bomnome(69kV) | 4 | 7 | 7 | 7 |
| Bomnome(138kV) | 10 | 9 | 7 | 13 |
| Bongi | 15 | 11 | 6 | 7 |

| | | | | |
|-----------|-----|-----|-----|-----|
| Goianinha | 5 | 6 | 6 | 7 |
| Itaparica | 1 | 1 | 2 | 2 |
| Juazeiro | 6 | 6 | 9 | 6 |
| Mirueira | 6 | 12 | 7 | 5 |
| Pau Ferro | 12 | 9 | 10 | 12 |
| Várzea | 4 | 4 | 4 | 6 |
| Média | 7,1 | 7,1 | 6,5 | 7,4 |

Tabela 6.10 - Combinação Convexa X Fischer-Burmeister / Maximização do Carregamento do Sistema (Sistemas de Teste do IEEE)

| Sistema | FB | $\theta=0,9$ | $\theta=0,8$ | $\theta=0,6$ |
|---------|------|--------------|--------------|--------------|
| IEEE30 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| IEEE57 | 20 | 21 | 23 | 22 |
| IEEE118 | 30 | 52 | 24 | 24 |
| IEEE300 | 41 | 40 | 40 | 40 |
| Média | 24,8 | 30,5 | 24,3 | 24,3 |

Tabela 6.11 - Combinação Convexa X Fischer-Burmeister / Maximização do Carregamento do Sistema (Subregionais da Celpe)

| Sistema | FB | $\theta=0,9$ | $\theta=0,8$ | $\theta=0,6$ |
|----------------|------|--------------|--------------|--------------|
| Angelim | 26 | 24 | 24 | 22 |
| Bomnome(69kV) | 20 | 22 | 22 | 21 |
| Bomnome(138kV) | 24 | 25 | 35 | 39 |
| Bongi | 7 | 8 | 8 | 10 |
| Goianinha | 8 | 8 | 8 | 9 |
| Itaparica | 16 | 17 | 18 | 20 |
| Juazeiro | 13 | 14 | 15 | 13 |
| Mirueira | 10 | 8 | 9 | 10 |
| Pau Ferro | 18 | 18 | 16 | 14 |
| Várzea | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Média | 14,7 | 15 | 16,2 | 16,6 |

Conforme previsto, a inserção do termo para penalização eventualmente levou a resultados melhores, sobretudo para o problema de minimização das perdas ativas.

6.2.2. Funções Definidas a partir de Normas P-Hölder

O uso de normas de Hölder para o tratamento das condições de complementaridade representa uma forma de generalizar a função FB. Detalhes relacionados à diferenciabilidade destas funções podem ser trabalhados na tentativa de superar a rapidez de convergência.

Os resultados seguintes referem-se a funções definidas a partir de normas-P, com P par.

Tabela 6.12 - Funções Definidas por Normas P-Holder / Minimização das Perdas Ativas (Sistemas de Teste do IEEE)

| Sistema | P=2 (Euclidiana) | P=4(holder) | P=8(holder) | P=80(holder) |
|---------|------------------|-------------|-------------|--------------|
| IEEE30 | 11 | 10 | 10 | 8 |
| IEEE57 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| IEEE118 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| IEEE300 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| Média | 8,5 | 8,3 | 8,3 | 7,8 |

Tabela 6.13 - Funções Definidas por Normas P-Holder / Minimização das Perdas Ativas (Subregionais da Celpe)

| Sistema | P=2 (Euclidiana) | P=4(holder) | P=8(holder) | P=80(holder) |
|----------------|------------------|-------------|-------------|--------------|
| Angelim | 8 | 8 | 8 | 8 |
| Bomnome(69kV) | 4 | 7 | 7 | 7 |
| Bomnome(138kV) | 10 | 7 | 7 | 7 |
| Bongi | 15 | 11 | 12 | 6 |
| Goianinha | 5 | 6 | 6 | 6 |
| Itaparica | 1 | 2 | 2 | 2 |
| Juazeiro | 6 | 7 | 7 | 7 |
| Mirueira | 6 | 5 | 5 | 6 |
| Pau Ferro | 12 | 12 | 12 | 12 |
| Várzea | 4 | 4 | 5 | 5 |
| Média | 7,1 | 6,9 | 7,1 | 6,6 |

Tabela 6.14 - Funções Definidas por Normas P-Holder / Maximização do Carregamento do Sistema (Sistemas de Teste do IEEE)

| Sistema | P=2 (Euclidiana) | P=4(holder) | P=8(holder) | P=80(holder) |
|---------|------------------|-------------|-------------|--------------|
| IEEE30 | 8 | 9 | 9 | 9 |
| IEEE57 | 20 | 18 | 18 | 18 |
| IEEE118 | 30 | 72 | 72 | 72 |
| IEEE300 | 41 | 40 | 39 | 39 |
| Média | 24,8 | 34,8 | 34,5 | 34,5 |

Tabela 6.15 - Funções Definidas por Normas P-Holder / Maximização do Carregamento do Sistema (Subregionais da Celpe)

| Dados da rede | P=2 (Euclidiana) | P=4(holder) | P=8(holder) | P=80(holder) |
|----------------|------------------|-------------|-------------|--------------|
| Angelim | 26 | 24 | 23 | 23 |
| Bomnome(69kV) | 20 | 22 | 19 | 19 |
| Bomnome(138kV) | 24 | 29 | 29 | 29 |
| Bongi | 7 | 7 | 12 | 15 |
| Goianinha | 8 | 19 | 19 | 19 |
| Itaparica | 16 | 16 | 16 | 16 |
| Juazeiro | 13 | 14 | 14 | 14 |

| | | | | |
|-----------|------|------|------|------|
| Mirueira | 10 | 10 | 14 | 17 |
| Pau Ferro | 18 | 21 | 21 | 20 |
| Várzea | 5 | 5 | 6 | 6 |
| Média | 14,7 | 16,7 | 17,3 | 17,8 |

O uso de normas de Hölder apresentou vantagens somente para o problema de minimização de perdas ativas. De maneira geral, a menos para alguns casos excepcionais, a utilização da função de Fischer-Burmeister levou a resultados favoráveis para os demais casos.

6.3. Resultados e Análise quanto ao Tratamento do Mau Condicionamento Numérico

O tratamento do mau condicionamento numérico da matriz hessiana, tal como expresso pelas equações (4.11a) e (4.11b), permitiu alcançar bons resultados, que estão expostos nas tabelas a seguir. O caso em estudo refere-se à função de Fischer-Burmeister com diferencial generalizado de Clarke.

Tabela 6.16 - Tratamento do Condicionamento Numérico / Minimização das Perdas Ativas (Sistemas de Teste do IEEE)

| Sistema | Sem tratamento | Tratamento do Condicionamento Numérico |
|---------|----------------|--|
| IEEE30 | 10 | 9 |
| IEEE57 | 9 | 12 |
| IEEE118 | 18 | 15 |
| IEEE300 | 29 | 26 |
| Média | 16,5 | 15,5 |

Tabela 6.17 - Tratamento do Condicionamento Numérico / Minimização das Perdas Ativas (Subregionais da Celpe)

| Sistema | Sem tratamento | Tratamento do Condicionamento Numérico |
|-------------|----------------|--|
| Angelim | 60 | 15 |
| Bomnome(69) | 48 | 12 |
| Bomnome138 | 37 | 37 |
| Bongi | 19 | 13 |
| Goianinha | 13 | 9 |
| Itaparica | 5 | 2 |
| Juazeiro | 8 | 14 |
| Mirueira | 61 | 13 |
| Pau Ferro | 13 | 17 |
| Várzea | 46 | 9 |
| Média | 31 | 14,1 |

Tabela 6.18 - Tratamento do Condicionamento Numérico / Minimização do Corte de Carga (Sistemas de Teste do IEEE)

| Sistema | Sem tratamento | Tratamento do Condicionamento Numérico |
|---------|----------------|--|
| IEEE30 | 41 | 20 |
| IEEE57 | 30 | 20 |
| IEEE118 | 70 | 65 |
| IEEE300 | 96 | 80 |
| Média | 59,3 | 46,3 |

Tabela 6.19 - Tratamento do Condicionamento Numérico / Minimização do Corte de Carga (Subregionais da Celpe)

| Sistema | Sem tratamento | Tratamento do Cond. Numérico |
|----------------|----------------|------------------------------|
| Angelim | 25 | 26 |
| Bomnome(69kV) | 44 | 38 |
| Bomnome(138kV) | 39 | 30 |
| Bongi | 38 | 32 |
| Goianinha | 33 | 28 |
| Itaparica | 12 | 6 |
| Juazeiro | 18 | 21 |
| Mirueira | 39 | 22 |
| Pau Ferro | 20 | 15 |
| Várzea | 17 | 23 |
| Média | 28,5 | 24,1 |

Com o uso da função “condest(...)” do MatLab foi avaliado o número de condicionamento aproximado das matrizes hessianas. A análise computacional revelou o sucesso do tratamento da instabilidade numérica, visto que houve uma diminuição acentuada do número de condição e conseqüente redução do número de iterações em cada caso.

6.4. Resultados e Análise quanto à Solução do Subproblema de Região de Confiança

O bom desempenho do algoritmo de região de confiança está intrinsecamente relacionado à técnica para solução do subproblema, no que se refere ao custo computacional para o cálculo da solução aproximada e quão boa ela é para garantia de progressos em busca da solução do problema global. Desta forma, a aplicação de diferentes metodologias para solução do subproblema enriquece o trabalho e a análise comparativa, a ser apresentada nesta seção, consta de um ponto crucial.

6.5. Estratégia *Dogleg* X Minimização no Subespaço Bidimensional

Deve ser lembrado que a minimização no subespaço bidimensional visa ampliar o espaço de busca em relação à estratégia *dogleg*, mantendo o custo computacional da iteração.

Os resultados são expostos nas tabelas a seguir:

Tabela 6.20 - *Dogleg* X Minimização Bidimensional / Minimização das Perdas Ativas (Sistemas de Teste do IEEEE)

| Sistema | <i>Dogleg</i> | Min. Bidimensional |
|---------|---------------|--------------------|
| IEEE30 | 11 | 11 |
| IEEE57 | 6 | 6 |
| IEEE118 | 7 | 7 |
| IEEE300 | 10 | 10 |
| Média | 8,5 | 8,5 |

Tabela 6.21 - *Dogleg* X Minimização Bidimensional / Minimização das Perdas Ativas (Subregionais da Celpe)

| Sistema | <i>Dogleg</i> | Min. Bidimensional |
|-----------------|---------------|--------------------|
| Angelim | 8 | 8 |
| Bomnome (69kV) | 4 | 4 |
| Bomnome (138kV) | 10 | 10 |
| Bongi | 15 | 15 |
| Goianinha | 5 | 5 |
| Itaparica | 1 | 1 |
| Juazeiro | 6 | 6 |
| Mirueira | 6 | 6 |
| Pau Ferro | 12 | 12 |
| Várzea | 4 | 4 |
| Média | 7,1 | 7,1 |

Tabela 6.22 - *Dogleg* X Minimização Bidimensional / Maximização do Carregamento do Sistema (Sistemas de Teste do IEEEE)

| Sistema | <i>Dogleg</i> | Min. Bidimensional |
|---------|---------------|--------------------|
| IEEE30 | 8 | 8 |
| IEEE57 | 20 | 16 |
| IEEE118 | 30 | 49 |
| IEEE300 | 41 | 17 |
| Média | 24,8 | 22,5 |

Tabela 6.23 - *Dogleg* X Minimização Bidimensional / Maximização do Carregamento do Sistema (Subregionais da Celpe)

| Sistema | <i>Dogleg</i> | Min. Bidimensional |
|---------|---------------|--------------------|
| Angelim | 26 | 22 |

| | | |
|----------------|------|----|
| Bomnome(69kV) | 20 | 16 |
| Bomnome(138kV) | 24 | 15 |
| Bongi | 7 | 7 |
| Goianinha | 8 | 8 |
| Itaparica | 16 | 13 |
| Juazeiro | 13 | 11 |
| Mirueira | 10 | 10 |
| Pau Ferro | 18 | 13 |
| Várzea | 5 | 5 |
| Média | 14,7 | 12 |

Tabela 6.24 - Dogleg X Minimização Bidimensional / Minimização do Corte de Carga (Sistemas de Teste do IEEE)

| Sistema | <i>Dogleg</i> | Min. Bidimensional |
|---------|---------------|--------------------|
| IEEE30 | 11 | 11 |
| IEEE57 | 13 | 15 |
| IEEE118 | 27 | 26 |
| IEEE300 | 40 | 40 |
| Média | 22,8 | 23 |

Tabela 6.25 - Dogleg X Minimização Bidimensional / Minimização do Corte de Carga (Subregionais da Celpe)

| Sistema | <i>Dogleg</i> | Min. Bidimensional |
|-----------------|---------------|--------------------|
| Angelim | 20 | 18 |
| Bomnome (69kV) | 10 | 10 |
| Bomnome (138kV) | 10 | 10 |
| Bongi | 18 | 18 |
| Goianinha | 20 | 20 |
| Itaparica | 6 | 4 |
| Juazeiro | 10 | 10 |
| Mirueira | 14 | 14 |
| Pau Ferro | 17 | 17 |
| Várzea | 14 | 14 |
| Média | 13,9 | 13,5 |

Conforme esperado, o método de minimização no subespaço bidimensional se sobressaiu em relação ao *dogleg* em consequência das maiores reduções para a aproximação quadrática obtida em cada iteração.

A análise do número de iterações é totalmente válida, visto que os custos computacionais da iteração de cada método são exatamente os mesmos. O cálculo mais oneroso consiste na fatorização da matriz hessiana para o cálculo do passo de Newton.

As técnicas apresentaram os mesmos resultados para o problema de minimização das perdas ativas, o que pode ser entendido pela menor dimensão do problema

e menor número de iterações. Para os problemas de maximização do carregamento do sistema e minimização do corte de carga, o método de minimização no subespaço bidimensional foi mais bem sucedido devido à maior dimensão do problema e maiores não linearidades.

6.6. Estratégia *Dogleg* X Solução Iterativa

O procedimento de solução iterativa para o subproblema de região de confiança não se apresentou como alternativa viável para substituição das demais técnicas na maneira em que foi implementado. Alguns dos resultados obtidos das simulações computacionais mostraram divergência ou lentidão para os casos de sistemas com mais variáveis de decisão. Este segundo caso não consiste em um problema, visto que a proposta já previra lentidão associada às fatorizações Cholesky adicionais em relação aos outros métodos e, portanto, estava estabelecido que a solução iterativa possibilitaria bons resultados apenas para problemas de dimensões reduzidas. Já a divergência é um caso a ser estudado e, neste aspecto, a consideração do “*hard case*” deve ser levada em conta em propostas posteriores. Ainda assim, o método apresentou vantagens em alguns casos.

As tabelas ilustram resultados além dos casos de lentidão e divergência:

Tabela 6.26 - *Dogleg* X Solução Iterativa / Minimização das Perdas Ativas (Sistemas de Teste do IEEE)

| Sistema | <i>Dogleg</i> | Solução Iterativa |
|---------|---------------|-------------------|
| IEEE30 | 11 | 10 |
| IEEE57 | 6 | 8 |
| IEEE118 | 7 | 29 |
| IEEE300 | 10 | Lento* |

*Demasiado lento com problemas de convergência.

Tabela 6.27 - *Dogleg* X Solução Iterativa / Minimização das Perdas Ativas (Subregionais da Celpe)

| Sistema | <i>Dogleg</i> | Solução Iterativa |
|-----------------|---------------|-------------------|
| Angelim | 8 | 8 |
| Bomnome (69kV) | 4 | 5 |
| Bomnome (138kV) | 10 | 10 |
| Bongi | 15 | 6 |
| Goianinha | 5 | 5 |
| Itaparica | 1 | 1 |
| Juazeiro | 6 | 6 |
| Mirueira | 6 | 5 |
| Pau Ferro | 12 | 12 |
| Várzea | 4 | 4 |
| Média | 7,1 | 6,2 |

É válido ressaltar que para a técnica de solução iterativa foram utilizadas 3 ou 5 iterações para solução do subproblema.

Para problemas de maximização do carregamento e minimização do corte de carga é inviável a aplicação do método de solução iterativa apresentado, o que é justificado pela maior dimensão destes problemas que leva a lentidão demasiada em decorrência das fatorizações adicionais. Análises computacionais constataram este fato.

Em poucos casos a solução iterativa revelou bons resultados para os problemas referidos. Apenas para enriquecimento do trabalho, seguem exemplos destes casos para maximização do carregamento do sistema.

Tabela 6.28 - *Dogleg* X Solução Iterativa / Maximização do Carregamento do Sistema (Subregionais da Celpe)

| Sistema | <i>Dogleg</i> | Solução Iterativa |
|-----------|---------------|-------------------|
| Bongi | 7 | 7 |
| Goianinha | 8 | 7 |
| Mirueira | 10 | 7 |
| Pau Ferro | 18 | 20 |
| Várzea | 5 | 4 |
| Média | 9,6 | 9 |

Ao contrário do que ocorre no estudo comparativo entre o método de minimização no subespaço bidimensional e a estratégia *dogleg*, os custos computacionais associados às iterações das técnicas comparadas aqui são diferentes e, por este motivo, a análise do número de iterações pode não ser o parâmetro ideal para a definição da melhor proposta. Apesar deste fato, os casos apresentados nas tabelas se referem a sistemas nos quais a iteração do método de região de confiança é bastante rápida, possibilitando que a escolha da melhor abordagem para o subproblema seja baseada no número de iterações.

Em suma, os resultados indicam vantagens na aplicação da solução iterativa em problemas de dimensões reduzidas, em concordância com o que fora previsto.

7. CONCLUSÕES

A abordagem do fluxo de potência ótimo por algoritmos globalmente convergentes para otimização irrestrita visou à robustez na busca de soluções. Para que isto fosse possível, a técnica de complementaridade não linear levou a uma reformulação genuína do problema, que pôde ser globalizado por métodos de região de confiança.

A convergência global decorre das características do método em aplicação e a rapidez pôde ser associada pela escolha das melhores técnicas para solução do subproblema, além do tratamento do mau condicionamento numérico da matriz hessiana.

Resultados computacionais permitiram o estudo da sensibilidade do método quanto aos parâmetros do algoritmo de região de confiança e a análise comparativa entre as técnicas, expressando o sucesso alcançado.

7.1. Propostas Futuras

Há muitas possibilidades para a ampliação do trabalho na linha de pesquisa que tem sido desenvolvida. Novas técnicas de complementaridade podem ser trabalhadas para redução do tempo de processamento, além de novos métodos para a solução do subproblema de região de confiança. O uso de normas diferentes e escalonamento das matrizes para aplicação de métodos iterativos para o cálculo do passo de Newton apresentam possibilidades viáveis em problemas de larga escala.

Aplicação de métodos de região de confiança ao problema restrito consiste em uma área de pesquisa moderna e relevante, apresentando uma real possibilidade para desenvolvimento em programas de pós-graduação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CHEN, B.; CHEN, X. & KANZOW, C. *A penalized Fischer-Burmeister NCP-function*, 2000.
- CHEN, J. S. & PAN, S. *A family of NCP functions and a descent method for the nonlinear complementarity problem*, 2006.
- COSTA, A. S.; SALGADO, R. & HAAS, P. *Globally convergent state estimation based on Givens rotations*. in Proc. of the 2007 IREP Symposium, (Charleston SC, USA), Aug. 2007.
- DENNIS JR, J. E. & SCHNABEL, R. B., *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Philadelphia: SIAM Classics In Applied Mathematics, 1996.
- FISCHER, A. *A special Newton-type optimization method*. Optimization, vol. 24, pp. 269-284, 1992.
- IZMAILOV, A. & SOLODOV, M. *Otimização, vol. 2, Métodos Computacionais*. Rio de Janeiro, IMPA, 2007.
- IZMAILOV, A. & SOLODOV, M. *Otimização, vol. 1, Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade*. Rio de Janeiro, IMPA, 2008.
- MONTICELLI, A. J. *Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica*. São Paulo, Edgard Blücher Ltda., 1983.
- NOCEDAL, J. & WRIGHT, S. J. *Numerical Optimization*. USA, Springer, 1999.
- PAJIC, S. & CLEMENTS, K. A. *Globally convergent state estimation via the trust region Method*, in 2003 IEEE Bologna PowerTech Conference, (Bologna, Italy), June 2003.
- POWELL, M. J. D. *A hybrid method for nonlinear equations*, in Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations, pp. 87-144, Gordon and Breach Science, 1970.

Referências Bibliográficas

SOUZA, A. A.; TORRES, G. L. & CAÑIZARES, C. A. *Robust optimal Power flow solution using trust region and interior-point methods*, IEEE Trans. on Power Systems, vol. 1, pp. 1-13, Aug. 2010.

TORRES, G. L. & QUINTANA, V. H. *Optimal power flow by a nonlinear complementarity method*. IEEE Trans. on Power Systems, vol. 15, pp. 1028-1033, Aug. 2000.

TREFETHEN L. N. & BAU, D. *Numerical Linear Algebra*, Philadelphia, SIAM, 1997.

WANG H.; MURILLO-SÁNCHEZ C. E.; ZIMMERMAN, R. D. & THOMAS R. J. *On computational issues of market-based optimal power flow*, IEEE Trans. on Power Systems, vol. 22, pp. 1185-1193, Aug. 2007.

ANEXO

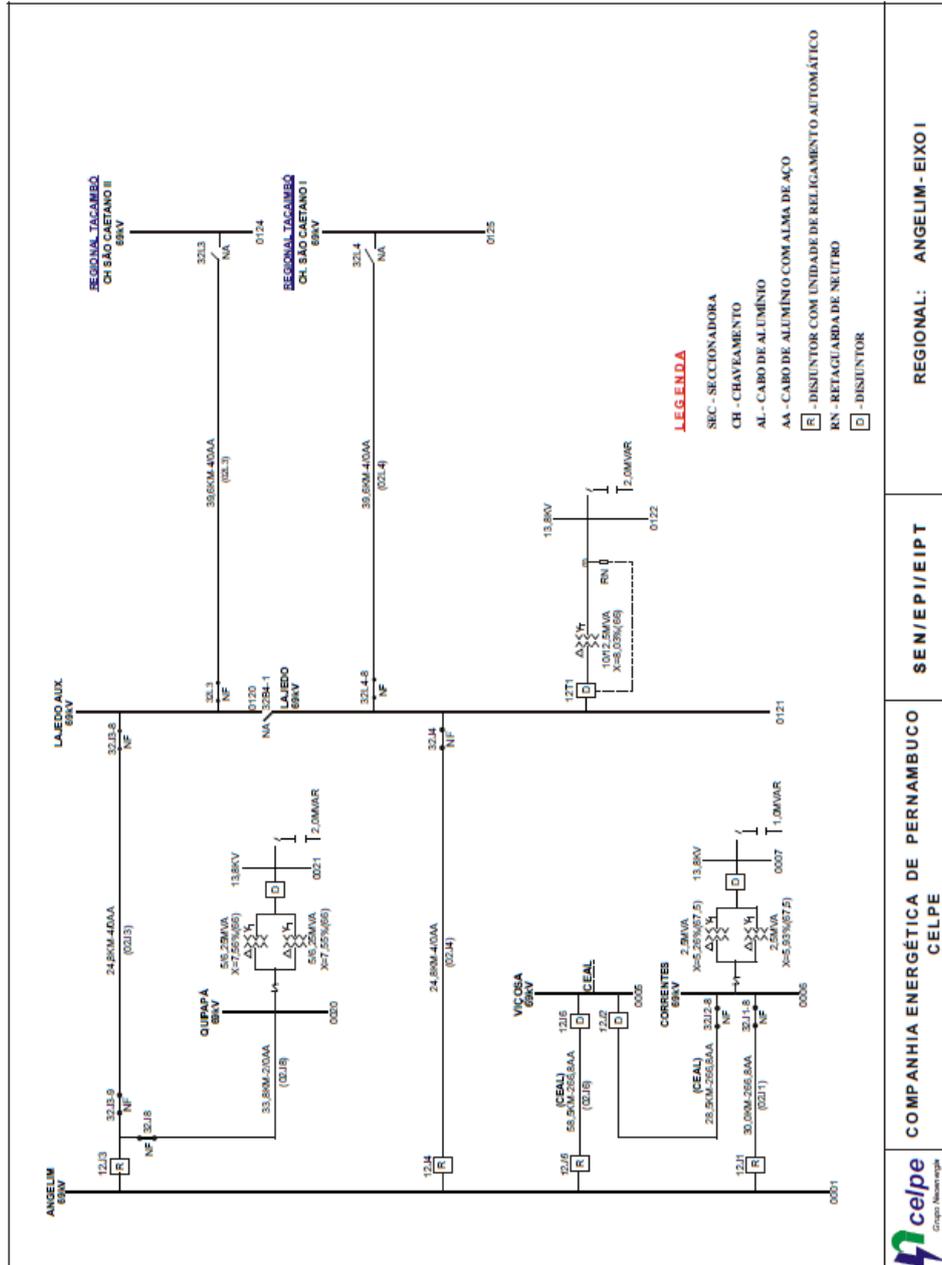


Figura A.1 – Diagrama Unifilar do Subregional Angelim – Eixo I

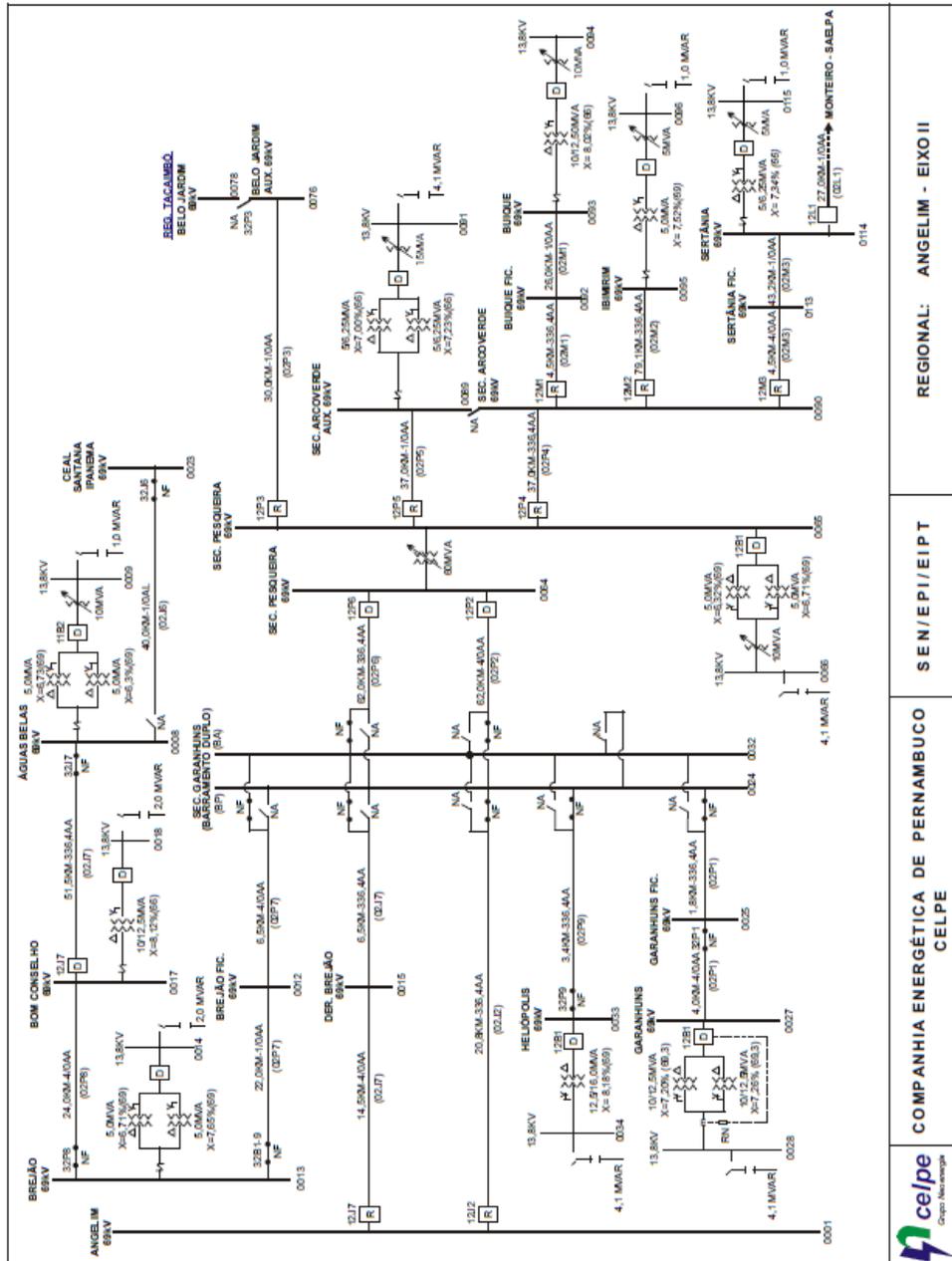


Figura A.2 – Diagrama Unifilar do Subregional Angelim – Eixo II

| | | |
|---|---|------------------------------------|
|  <p>Grupo: Neenergia</p> | <p>COMPANHIA ENERGÉTICA DE PERNAMBUCO CELPE</p> | <p>REGIONAL: ANGELIM - EIXO II</p> |
|---|---|------------------------------------|

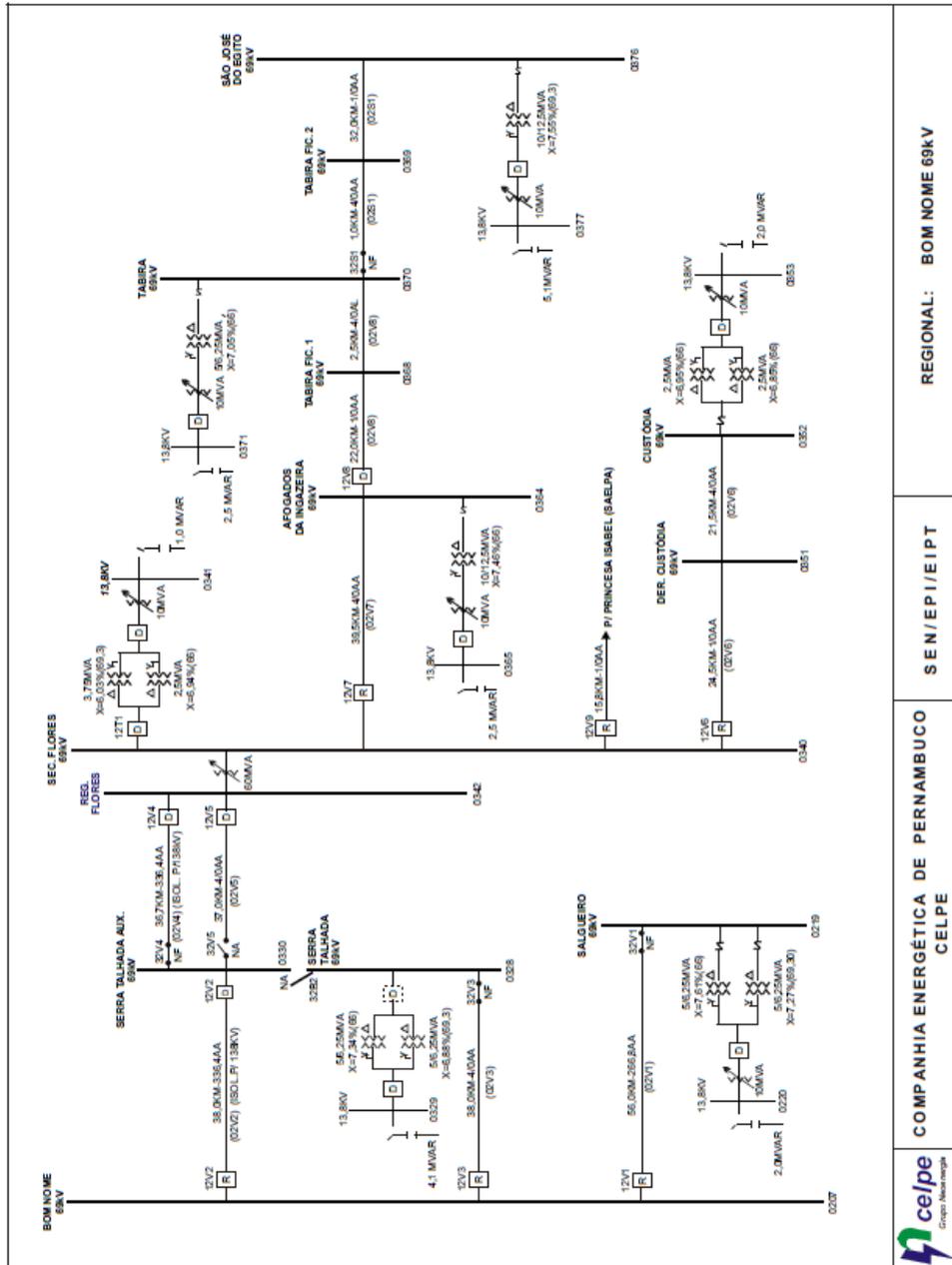


Figura A.3 – Diagrama Unifilar do Subregional Bom Nome 69kV



COMPANHIA ENERGÉTICA DE PERNAMBUCO
CELPE

SEN/IEPI/EIPT

REGIONAL: BOM NOME 69kV

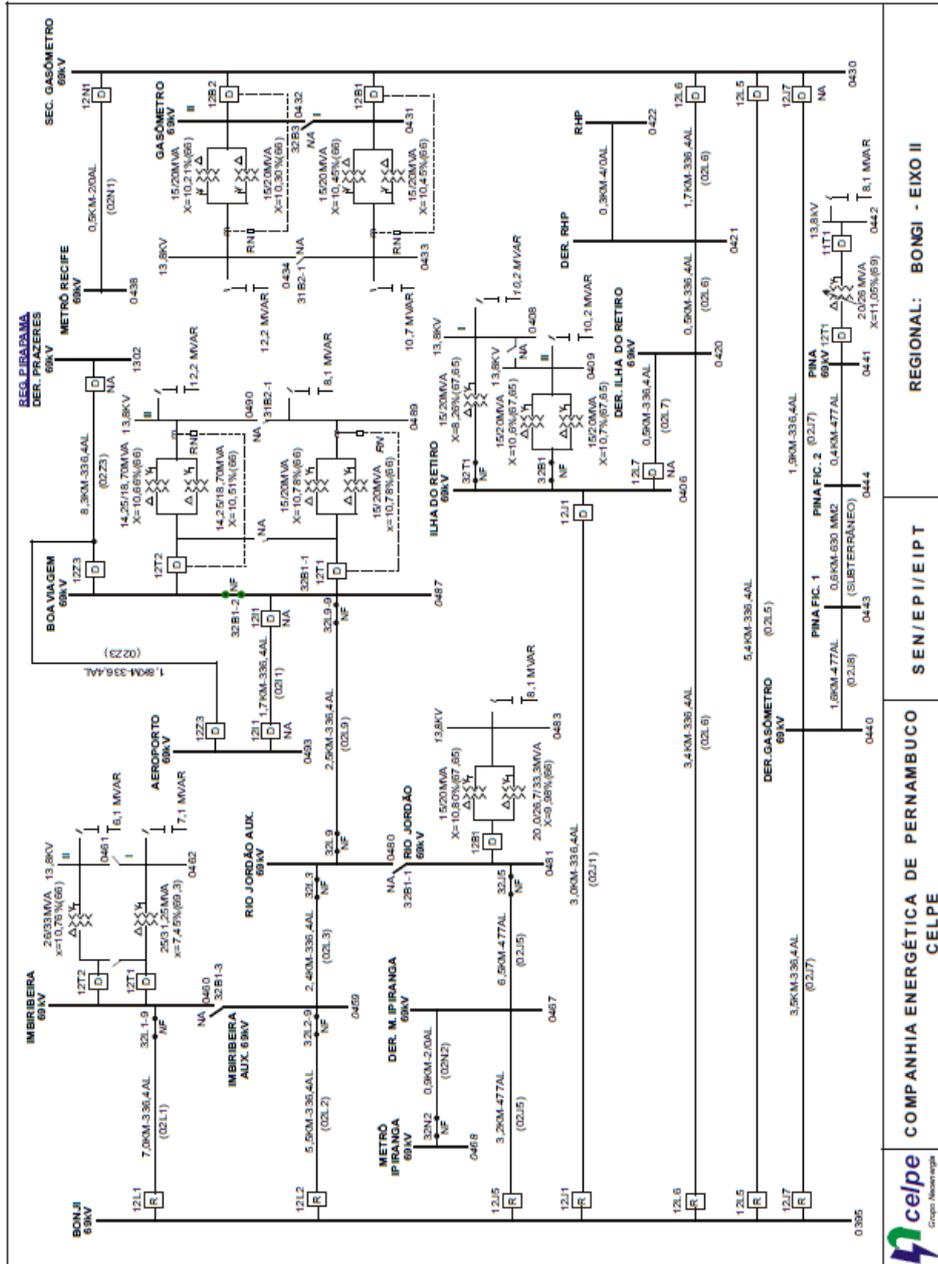


Figura A.6 – Diagrama Unifilar do Subregional Bongi – Eixo II

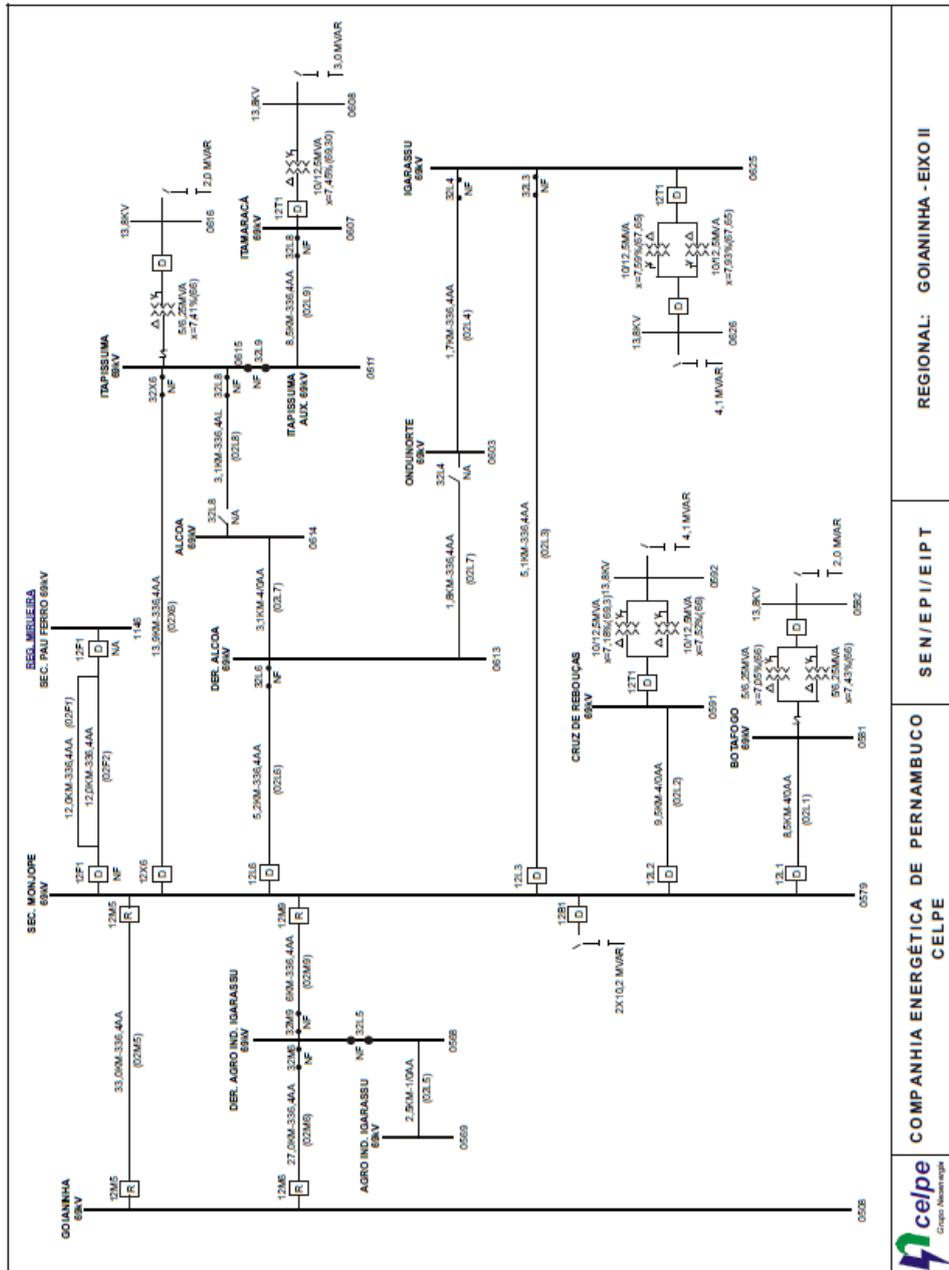


Figura A.8 – Diagrama Unifilar do Subregional Goianinha – Eixo II

| | | |
|--|---------------|-------------------------------|
| COMPANHIA ENERGÉTICA DE PERNAMBUCO CELPE | SEN/E/PI/EIPT | REGIONAL: GOIANINHA - EIXO II |
|--|---------------|-------------------------------|

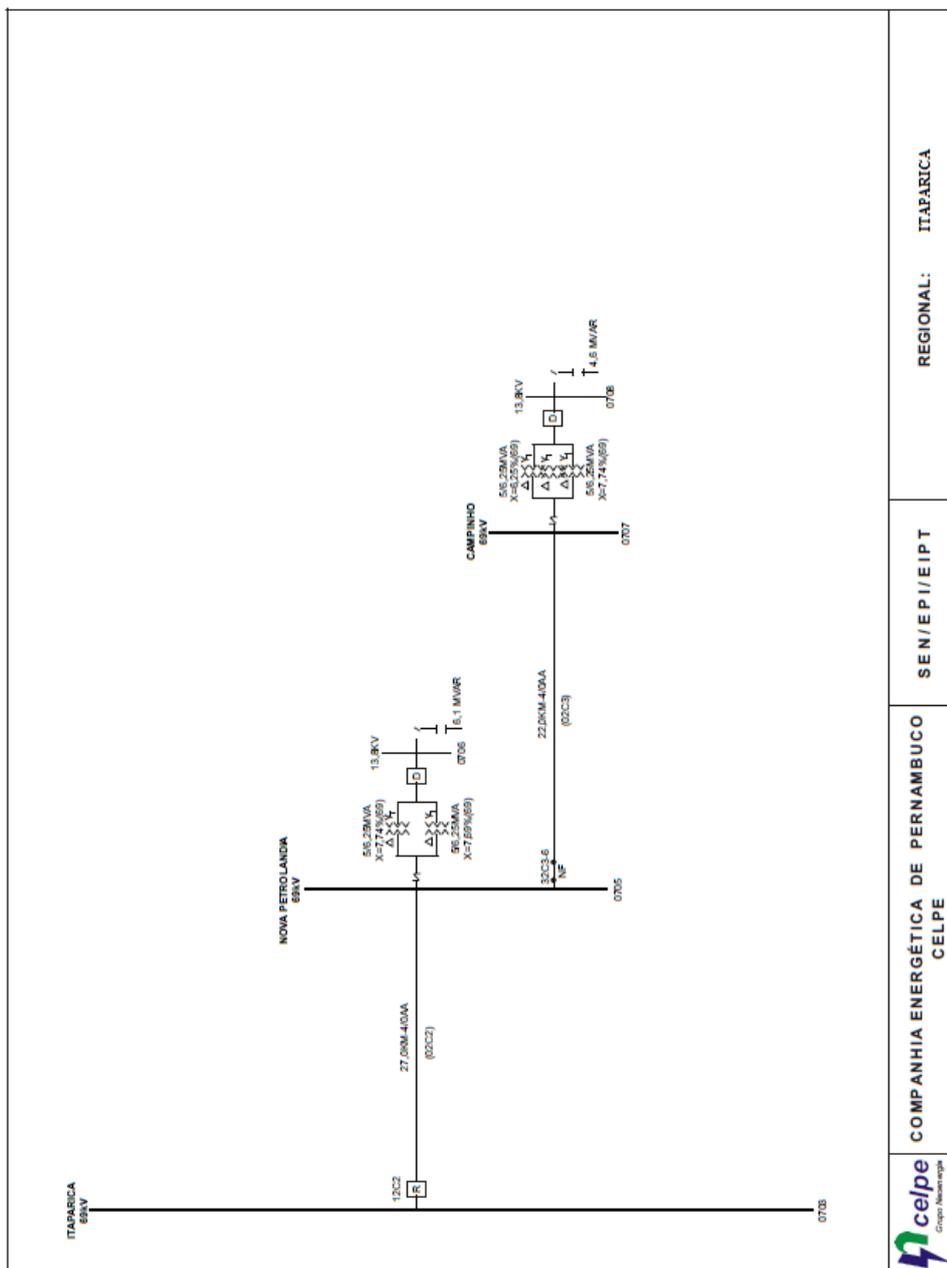
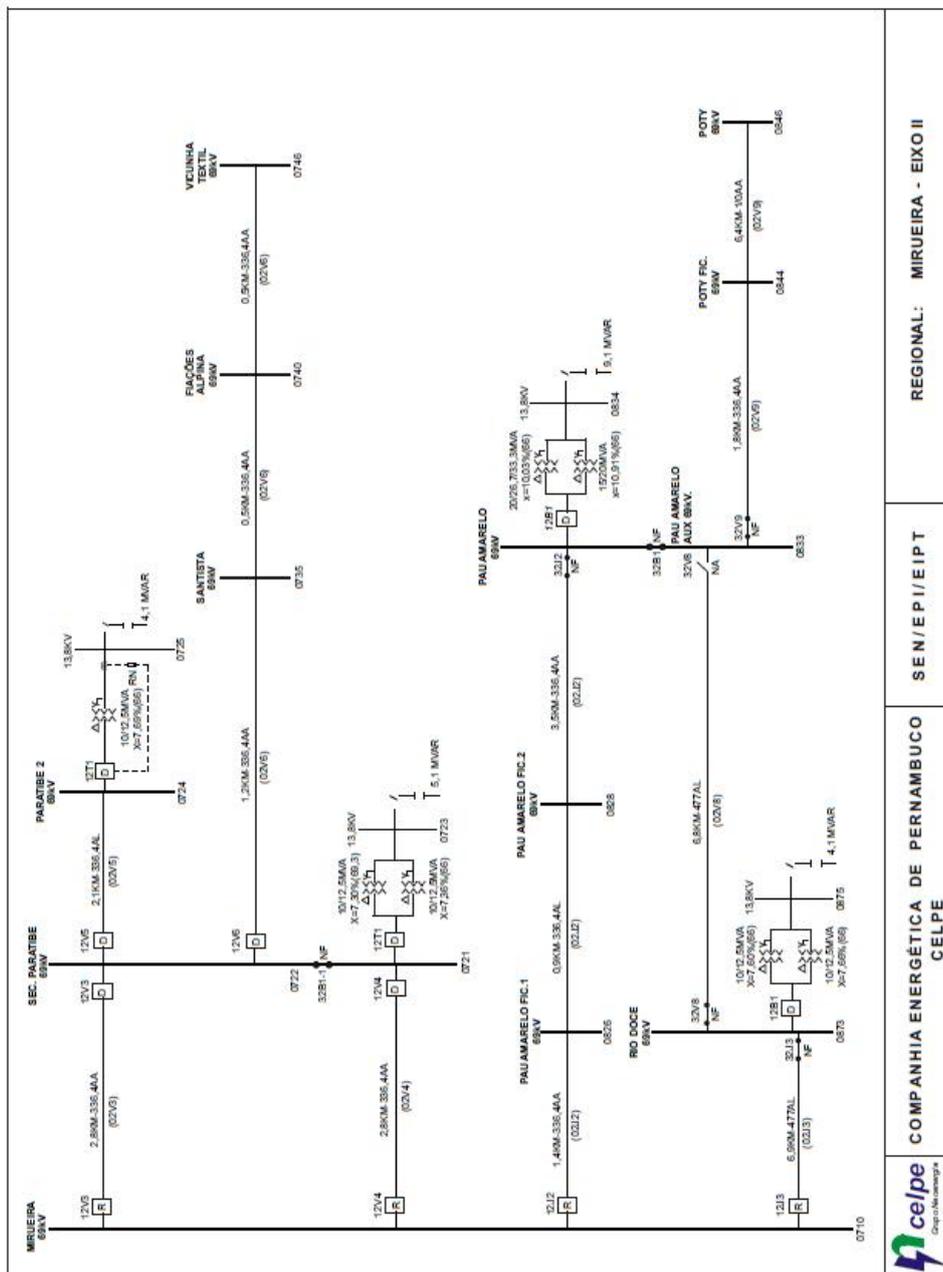


Figura A.9 – Diagrama Unifilar do Subregional Itaparica



| | | | |
|---|---|--------------|------------------------------|
|  | COMPANHIA ENERGÉTICA DE PERNAMBUCO CELPE | SEN/EPI/EIPT | REGIONAL: MIRUEIRA - EIXO II |
|---|---|--------------|------------------------------|

Figura A.12 – Diagrama Unifilar do Subregional Mirueira – Eixo II

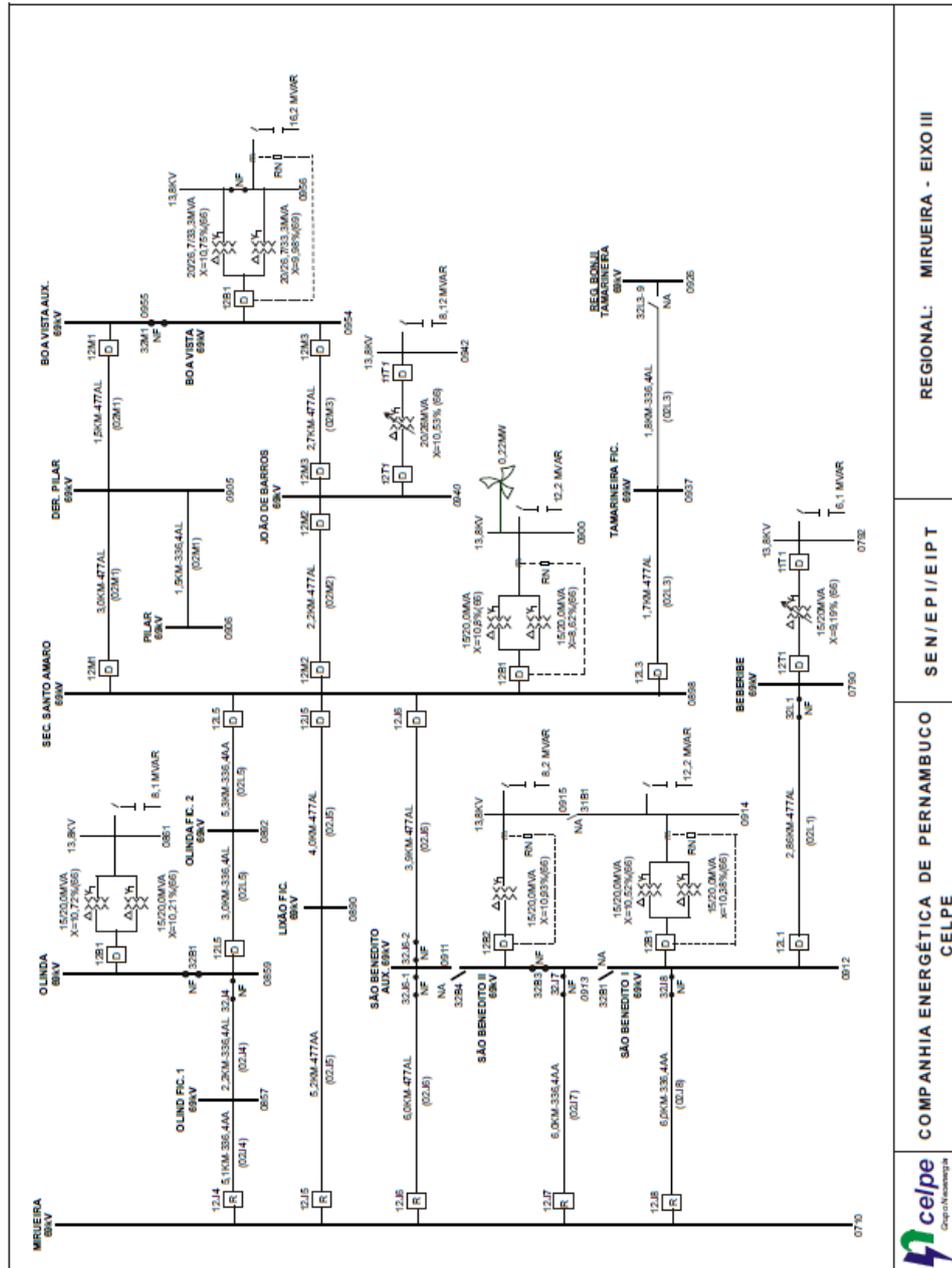


Figura A.13 – Diagrama Unifilar do Subregional Mirueira – Eixo III

| | | | |
|---|---|--------------|-------------------------------|
|  | COMPANHIA ENERGÉTICA DE PERNAMBUCO CELPE | SEN/EPI/EIPT | REGIONAL: MIRUEIRA - EIXO III |
|---|---|--------------|-------------------------------|