



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM
CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

IOLANDA POSSIDONIO DOS SANTOS SILVA

A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO COMO
UMA FERRAMENTA METODOLÓGICA PARA O ESTUDO
DAS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO
RETÂNGULO

CARUARU
2022

IOLANDA POSSIDONIO DOS SANTOS SILVA

**A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO COMO
UMA FERRAMENTA METODOLÓGICA PARA O ESTUDO
DAS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO
RETÂNGULO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito à obtenção do título de mestra em Educação em Ciências e Matemática.

Área de concentração: Educação em Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edelweis José Tavares Barbosa

CARUARU

2022

Catálogo na fonte:
Bibliotecária – Paula Silva - CRB/4 - 1223

S586t Silva, Iolanda Possidonio dos Santos.
A teoria antropológica do didático como uma ferramenta metodológica para o estudo das relações métricas no triângulo retângulo. / Iolanda Possidonio dos Santos Silva. – 2022.
84 f.; il.: 30 cm.

Orientador: Edelweis José Tavares Barbosa.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Programa de Pós- Graduação em Educação em Ciências e Matemática, 2022.
Inclui Referências.

1. Livros didáticos. 2. Didática. 3. Antropologia - Metodologia. 4. Análise matemática. 5. Matemática - Estudo e ensino. 6. Geometria. I. Barbosa, Edelweis José Tavares (Orientador). II. Título.

CDD 371.12 (23. ed.) UFPE (CAA 2022-036)

IOLANDA POSSIDONIO DOS SANTOS SILVA

**A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO COMO UMA
FERRAMENTA METODOLÓGICA PARA O ESTUDO DAS
RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito à obtenção do título de mestra em Educação em Ciências e Matemática.

Área de concentração: Educação em Ciências e Matemática.

Aprovada em: 29/03/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Edelweis José Tavares Barbosa (Orientador e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Marilena Bittar (Examinadora Externa)
Universidade Federal de Santa Maria

Profa. Dra. Marilene Rosa dos Santos (Examinadora Externa)
Universidade de Pernambuco

Dedico esta dissertação ao meu pai José Cláudio (in memoriam) que mesmo não estando presente fisicamente, sinto em meu coração o quanto está feliz e orgulhoso por mim.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por sempre estar comigo me dando força, paciência, coragem e por não me deixar desistir.

À minha família, por todo amor, carinho e incentivo, em especial à minha mãe Ivanilda, por sempre acreditar em mim e entender as minhas ausências. Aos meus irmãos, por saber que sempre posso contar com vocês. Ao meu esposo Fernando, que me mostrou que nossos sonhos podem ser sonhados juntos. À minha filha de coração, Ana Clara, por toda confiança e amor que você tem me dado. Vocês são minha base, amo vocês.

À minha mãe de coração, Marilene Rosa, que além de me apoiar, me incentivar, de despertar em mim o desejo pela pesquisa, lutou comigo me ensinando que pensar coletivamente é um ato de amor, um ato de resistência. Obrigada por me fazer ser uma pessoa melhor, amo você, minha eterna orientadora.

Às minhas amigas, Carol Souza, Júlia Barbosa e Juliana Godoi. É com vocês que divido minhas aflições, meus medos e minhas vitórias. Obrigada por tudo.

À minha irmã de coração, Wanessa Gomes, por ter insistido que eu fizesse minha inscrição para a seleção desse mestrado, por ter vibrado comigo em todos os resultados das etapas da seleção, por ter comemorado antecipadamente minha aprovação e por ter ficado ao meu lado durante todo esse percurso, por vezes sendo até o meu porto seguro. Como se já não bastasse tudo isso, ela ainda sentou comigo e me ajudou a corrigir a redação da minha dissertação, eu amo você meu melhor hambúrguer.

Aos meus amigos do grupo do WhatsApp, “Três quase mestres”, estamos juntos desde a graduação, mas a seleção do mestrado nos uniu ainda mais. Como terminar esse percurso sem agradecer a Epaminondas e Lucivania? Não tem como! Obrigada meus amigos, por toda dedicação e ajuda prestada a mim durante todo o processo, só nós sabemos as aflições que passamos, o quanto pensamos em desistir, mas estávamos sempre ali nos incentivando, nos dando forças e nos ajudando.

Ao grupo de pesquisa SEMEAR, por todos os ensinamentos compartilhados, estes têm sido úteis não apenas para minha vida acadêmica, mas também para a pessoal. É tão bom dividir as experiências com vocês, aqui eu me sinto em casa. Gratidão à Rosinalda Teles e Marilene Rosa por me permitirem estar neste grupo.

Aos membros da Banca, Marilena Bittar, Marilene Rosa e Ivanildo Carvalho, pelas importantes contribuições realizadas, desde a qualificação, para a melhoria desta pesquisa.

Ao meu orientador Edelweis Jose, por ter aceito me orientar, por toda compreensão e paciência demonstrada durante todo esse percurso.

Aos meus alunos, os atuais e aos que já cruzaram meus caminhos. Vocês despertaram em mim uma grande paixão em ser professora. Em especial, à Silmara Carlyne, que transformou a relação de professora e aluna, em madrinha e afilhada, amo você.

A todos da Escola São Vicente, essa casa que por anos estive nela como discente e hoje posso dividir experiências docentes com aqueles que me ajudaram a chegar até aqui.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desta pesquisa.

A todos vocês, o meu muito obrigado!

RESUMO

Tivemos como objetivo nesta pesquisa analisar as praxeologias matemáticas e didáticas acerca das relações métricas no triângulo retângulo presentes nas coleções de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental e dos livros didáticos do Ensino Médio escritas pelos mesmos autores, a fim de identificarmos como acontece a passagem desse saber matemático de uma etapa de ensino para outra. Como aporte teórico, fundamentamos nossa pesquisa na Teoria Antropológica do Didático (TAD) proposta por Chevallard (1999) e seus colaboradores, que nos permitiu identificar as praxeologias presentes nos livros didáticos ‘Matemática Realidade & Tecnologia’, ‘Teláris Matemática’, ‘#Contato Matemática’ e ‘Matemática Contexto & Aplicações’. Nossa metodologia tem uma abordagem qualitativa, pois não estamos preocupados com a representatividade numérica e sim na relação entre o mundo real e o sujeito. Em nossa análise dos livros didáticos, nos baseamos nos critérios propostos por Bittar (2017), denominados de parte curso e parte atividades propostas, elaboração do quarteto praxeológico matemático, elaboração da praxeologia didática e análise das praxeologias modeladas. De modo geral as análises realizadas apontam que esses autores dão ênfase no Teorema de Pitágoras como principal técnica de resolução e na construção do ambiente tecnológico-teórico, explorando nas tarefas a resolução por meio da aplicação de fórmulas tornando o ensino desse saber em uma abordagem tradicional. Acreditamos que as abordagens que foram desenvolvidas nos livros que analisamos contribuem para que o ensino e aprendizagem das relações métricas no triângulo retângulo, e conseqüentemente da geometria, continuem passando por dificuldades, sendo esse um dos fatores para que não avancemos no ensino da geometria.

PALAVRAS-CHAVE: livro didático; praxeologia matemática; praxeologia didática; relações métricas no triângulo retângulo; Teoria Antropológica do Didático.

ABSTRACT

In this research we aimed to analyze the mathematical and didactic praxeologies about the metric relations in the right triangle present in the final years of elementary school textbooks and high school textbooks written by the same authors, in order to identify how the passage of this mathematical knowledge from one stage of education to another happens. As a theoretical contribution, we based our research on the Anthropological Theory of Didactics (TAD) proposed by Chevallard (1999) and his collaborators, which allowed us to identify the praxeologies present in the 'Mathematics Reality & Technology', 'Teláris Mathematics', '#Contact Mathematics' and 'Mathematics Context & Applications' textbooks. Our methodology has a qualitative approach, because we are not concerned with numerical representativeness, but with the relationship between the real world and the subject. In our analysis of the textbooks, we based ourselves on the criteria proposed by Bittar (2017), called part course and part proposed activities, elaboration of the mathematical praxeological quartet, elaboration of the didactic praxeology and analysis of the modeled praxeologies. In general, the analyses performed point out that these authors emphasize the Pythagorean Theorem as the main resolution technique and the construction of the technological-theoretical environment, exploring in the tasks the resolution through the application of formulas making the teaching of this knowledge in a traditional approach. We believe that the approaches that were developed in the books we analyzed contribute to the teaching and learning of metric relations in the right triangle, and consequently geometry, continue to experience difficulties, and this is one of the factors for not advancing in the teaching of geometry.

KEYWORDS: textbook; mathematical praxeology; didactic praxeology; metric relations in the right triangle; Anthropological Theory of Didactics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Representação de um triângulo retângulo e seus elementos	21
Figura 2 -	Semelhanças de triângulos	22
Figura 3 -	Caso de semelhança de triângulos (AA)	22
Figura 4 -	Exemplo do uso da Técnica: $t_8 - a^2=b^2+c^2$	50
Figura 5 -	Exemplo do uso das Técnicas: $t_8 - a^2=b^2+c^2$ e $t_4 - h^2=mn$	50
Figura 6 -	Exemplo do uso das Técnicas: $t_8 - a^2=b^2+c^2$ e $ah=bc$	51
Figura 7 -	Exemplo do uso das Técnicas: $t_8 - a^2=b^2+c^2$; $t_4 - h^2=mn$ e $t_1 - a=m$ +n	51
Figura 8 -	Exemplo do uso das Técnicas: $t_8 - a^2=b^2+c^2$; $t_4 - h^2=mn$; $t_1 - a=m$ +n e $t_5 - bc=ah$	52
Figura 9 -	Exemplo do uso das Técnicas: $t_8 - a^2=b^2+c^2$; $t_4 - h^2=mn$; $t_1 - a=m$ +n; $t_5 - bc=ah$ e $t_3 - c^2=na$	53
Figura 10 -	Exemplo do uso da Técnica: $t_4 - h^2=mn$	53
Figura 11 -	Exemplo do uso das Técnicas: $t_4 - h^2=mn$ e $t_3 - c^2=an$	54
Figura 12 -	Exemplo do uso das Técnicas: $t_4 - h^2=mn$ e $t_1 - a=m +n$	54
Figura 13 -	Exemplo do uso das Técnicas: $t_4 - h^2=mn$ e $t_1 - a=m +n$; $t_3 - c^2=an$ e $t_2 - b^2=am$	55
Figura 14 -	Exemplo do uso da Técnica: $t_3 - c^2=na$	56
Figura 15 -	Exemplo do uso das Técnicas: $t_3 - c^2=an$; $t_2 - b^2=am$ e $t_1 - a=m +n$	56
Figura 16 -	Exemplo do uso da Técnica: $t_5 - bc=ah$	57
Figura 17 -	Tipo de Tarefas T_T	57
Figura 18 -	Tipo de Tarefas T_I	58
Figura 19 -	Exemplo do uso das Técnicas: $t_1 - a=m+n$; $t_2 - b^2=am$ e $t_3 - c^2=an$	60
Figura 20 -	Exemplo do uso das Técnicas: $t_1 - a=m+n$; $t_2 - b^2=am$; $t_3 - c^2=an$ e $t_5 - bc=ah$	61
Figura 21 -	Exemplo do uso das Técnicas: $t_8 - a^2=b^2+c^2$; $t_5 - bc=ah$; $t_3 - c^2=an$ e $t_1 - a=m +n$	61
Figura 22 -	Exemplo do uso das Técnicas: $t_8 - a^2=b^2+c^2$; $t_2 - b^2=am$; $t_3 - c^2=an$ e $t_5 - bc=ah$	62
Figura 23 -	Exemplo do uso da Técnica: $t_8 - a^2=b^2+c^2$	62
Figura 24 -	Exemplo do uso da Técnica: $t_8 - a^2=b^2+c^2$ em Tarefas do tipo T_D	62

Figura 25 -	Exemplo do Tipo de Tarefas identificar os catetos e/ou a hipotenusa de um triângulo retângulo	63
Figura 26 -	Exemplo do primeiro momento no LD ₁ do EF	65
Figura 27 -	Exemplo do primeiro momento no LD ₂ do EF	65
Figura 28 -	Exemplo da exploração do Tipo de Tarefas e da elaboração da Técnica no LD do EF	66
Figura 29 -	Exemplo do primeiro momento do LD ₃ do EM	69
Figura 30 -	Exemplo do primeiro momento do LD ₄ do EM	69
Figura 31 -	Exemplo da exploração do Tipo de Tarefas e da elaboração da Técnica no LD do EM	70

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 -	Critérios adotados na análise da Praxeologia Matemática	40
Quadro 2 -	Descrição dos momentos e critério de análise da Praxeologia Didática	41
Quadro 3 -	Filtro dos Tipos de Tarefas para análise das relações métricas no triângulo retângulo	47
Quadro 4 -	Técnicas identificadas nos livros didáticos analisados	47

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tipos de Tarefas das relações métricas no triângulo retângulo dos LD do EF	48
Tabela 2 – Subtipos da tarefa do Tipo T _C	49
Tabela 3 – Subtipos da tarefa do Tipo T _D	49
Tabela 4 – Tipos de Tarefas das relações métricas no triângulo retângulo dos LD do EM	59
Tabela 5 – Subtipos da tarefa do Tipo T _C	60

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	OBJETIVOS	17
1.1.1	Geral	17
1.1.2	Específicos	17
2	REFERENCIAL TEÓRICO	19
2.1	O ENSINO DA GEOMETRIA	19
2.2.1	Elementos de um Triângulo	20
2.2.2	Semelhança de Triângulos	21
2.2.3	Relações Métricas no Triângulo Retângulo	22
2.3	REVISÃO DE LITERATURA SOBRE AS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO	24
2.4	A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO	30
2.4.1	Organização Praxeológica	31
2.4.2	Praxeologia ou Organização Matemática	33
2.4.3	Praxeologia ou Organização Didática	35
3	METODOLOGIA	39
3.1	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	39
3.1.1	Parte Curso e Parte Atividades Propostas para Análise	40
3.1.2	Elaboração do Quarteto Praxeológico Matemático	40
3.1.3	Elaboração da Praxeologia Didática	41
3.1.4	Análise das Praxeologias Modeladas	41
3.2	LIVROS DIDÁTICOS ANALISADOS	42
3.2.1	Matemática Realidade & Tecnologia (9º ano do EF)	43
3.2.2	Teláris Matemática (9º ano do EF)	44
3.2.3	#Contato Matemática (1º ano do EM)	44
3.2.4	Matemática Contexto & Aplicações (1º ano do EM)	45
4	ANÁLISES DOS LIVROS DIDÁTICOS	46
4.1	ANÁLISE DAS PRAXELOGIAS MATEMÁTICAS DOS LIVROS DIDÁTICOS	46
4.1.1	Análise das Praxeologias Matemáticas dos Livros Didáticos do Ensino Fundamental	48

4.1.2	Análise das Praxeologias Matemáticas dos Livros Didáticos do Ensino Médio	59
4.2	ANÁLISE DAS PRAXELOGIAS DIDÁTICAS DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA	64
4.2.1	Análise das Praxeologias Didáticas dos Livros Didáticos do Ensino Fundamental	64
4.2.2	Análise das Praxeologias Didáticas dos Livros Didáticos do Ensino Médio	68
4.3	PASSAGEM DAS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO DA ETAPA DO ENSINO FUNDAMENTAL PARA A ETAPA DO ENSINO MÉDIO	72
4.3.1	Livros Didáticos de Joamir Souza	72
4.3.2	Livros Didáticos de Dante	74
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	77
	REFERÊNCIAS	80

1 INTRODUÇÃO

O estudo da geometria tem um importante papel no currículo de matemática, por estar presente em nosso dia a dia e nas práticas profissionais, como, na arquitetura, na engenharia, nas artes plásticas, etc.

Nos documentos curriculares oficiais, como por exemplo, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p. 51), encontramos referência à importância da geometria, em que traz os conceitos geométricos como sendo parte importante no currículo de matemática do Ensino Fundamental, “porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive”.

Outro documento, mais atual, que relata essa importância é a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018 p. 271) quando afirma que “A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento”.

Mesmo a geometria tendo tamanha relevância para o estudo da matemática e para o desenvolvimento humano, através dos seus conteúdos curriculares e das práticas profissionais, seu ensino durante muito tempo foi marcado por dificuldades, tanto no processo de ensino, como no processo de aprendizagem.

Durante a década de 90, alguns pesquisadores, como Pavanelo e Lorenzato, desenvolveram pesquisas sobre algumas das causas das dificuldades do ensino da geometria. Pavanelo (1993) concluiu que um dos problemas que o ensino da geometria enfrentava, naquela época, era a má formação dos professores sobre o assunto em tela, que era decorrente do ensino nas licenciaturas.

Já para Lorenzato (1995), além da formação do professor, ele apontava também a abordagem do livro didático, que contribuía para uma “omissão geométrica”, por trazer em seu contexto apenas propriedades, definições e aplicações de fórmulas, tornando assim algo desconexo do cotidiano.

Pesquisas atuais ainda apontam que existe um abandono ou “omissão geométrica” em nossas escolas, tais como Costa (2016), Costa e Rosa dos Santos (2017a; 2017b; 2018) e Moretti e Hillesheim (2018). Outro fator que deixa evidente as dificuldades do ensino da geometria, atualmente, são os resultados de avaliações em larga escala, como, Sistema de Avaliação da Educação Básica de Pernambuco (SAEPE, 2019), Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB, 2017) e Programa Internacional de Avaliação

Comparada (PISA, 2018), que apresentam baixo rendimento em questões que exploram conceitos geométricos.

Um dos motivos que me instigou a pesquisar sobre o ensino da geometria foi o meu percurso acadêmico, em que passei a perceber que eu tinha dificuldades para aprender e compreender os conteúdos geométricos estudados em determinadas disciplinas da graduação. Então, passei a me questionar se isso poderia ser uma deficiência minha, decorrente de uma má formação no ensino básico ou se tinha algum outro motivo por trás, já que os resultados de boa parte da turma nessas disciplinas não eram tão satisfatórios. Ao fazer pesquisas e estudos sobre o assunto, pude então perceber que o ensino e a aprendizagem da geometria há décadas enfrentam dificuldades.

Enquanto docente vejo o ensino e a aprendizagem da geometria passando ainda por bastantes dificuldades, muitos alunos, por exemplo, têm dificuldades de reconhecer e diferenciar elementos simples da geometria, como, retas paralelas de retas perpendiculares, trocam o conceito de área por perímetro, entre outros.

Diante disso, vejo o quanto é necessário continuar desenvolvendo pesquisas sobre o ensino da geometria para tentarmos entender essas dificuldades existentes e encontrarmos maneiras para melhor aperfeiçoar o seu ensino.

Como há uma vasta quantidade de conteúdos para serem estudados na geometria, decidimos investigar as relações métricas no triângulo retângulo. Essa escolha se deu pelo fato de termos uma escassez de pesquisas realizadas acerca deste conteúdo, como veremos na revisão de literatura. Outro fator que nos fez optar por esse objeto de estudo é por ele possibilitar imbricações entre as unidades temáticas geometria, grandezas e medidas, números e álgebra. Como exemplos podemos citar: proporcionalidade, grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais, coordenadas geográficas, entre outros.

Optamos por desenvolver nossa pesquisa na Instituição livro didático por ele ser, na maioria das vezes, o principal material de apoio do professor no planejamento e execução das suas aulas e o único recurso disponibilizado pela escola para trabalhar com os estudantes. Muitas vezes o professor segue fielmente o que está posto no livro didático adotado em sua escola, seguindo todas as orientações sugeridas por ele e executando todas as atividades propostas. Entendemos que o livro didático é um recurso importante, e que se faz necessário um maior cuidado ao fazer a escolha dos que serão adotados, pois, como ele é o material de apoio mais utilizado nas escolas da Educação Básica, se torna assim o principal norteador do ensino.

Como aporte teórico, optamos pela Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Chevallard (1999) e seus colaboradores. Essa teoria permite analisar livros didáticos e a prática docente do professor, pois é possível caracterizar as Praxeologias Matemáticas e as Praxeologias Didáticas, nos possibilitando assim identificarmos como acontece o ensino e a aprendizagem em determinada Instituição, no nosso caso, na Instituição livro didático.

Dessa forma, nos questionamos como acontece a passagem do saber matemático das relações métricas no triângulo retângulo, da Etapa do Ensino Fundamental para a Etapa do Ensino Médio em coleções de livros didáticos escritos pelos mesmos autores?

1.1 OBJETIVOS

Apresentamos neste tópico o objetivo geral da nossa pesquisa e os objetivos específicos. Esperamos que ao final de nossa pesquisa eles sejam alcançados.

1.1.1 Geral

Analisar as Praxeologias Matemáticas e Didáticas acerca das relações métricas no triângulo retângulo presentes nas coleções de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental e dos livros didáticos do Ensino Médio escritas pelos mesmos autores, a fim de identificarmos como acontece a passagem desse saber matemático de uma etapa de ensino para outra.

1.1.2 Específicos

- Caracterizar as Praxeologias Matemáticas e Didáticas das relações métricas no triângulo retângulo das coleções de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental;
- Caracterizar as Praxeologias Matemáticas e Didáticas das relações métricas no triângulo retângulo das coleções de livros didáticos do Ensino Médio;
- Analisar como acontece a passagem do ensino das relações métricas no triângulo retângulo da Etapa do Ensino Fundamental para a Etapa do Ensino Médio em coleções de livros didáticos escritas pelo mesmo autor.

Nossa pesquisa está estruturada da seguinte forma. No primeiro capítulo, intitulado “Referencial Teórico”, abordamos sobre o conceito de geometria, as principais discussões

levantadas sobre o seu ensino e a aprendizagem no âmbito da Educação Matemática, como também falamos das relações métricas no triângulo retângulo e apresentamos uma revisão de literatura sobre elas. Ainda nesse capítulo falamos da Teoria Antropológica do Didático e seus elementos.

Já no segundo capítulo, denominado “Metodologia”, explicamos o que é uma pesquisa com abordagem qualitativa, todos os procedimentos metodológicos que estiveram presentes em nossa pesquisa e apresentamos o padrão proposto por Bittar (2017), que usamos para auxiliar as nossas análises e como aconteceu o processo de escolhas das coleções dos livros didáticos que foram analisadas em nossa pesquisa e a apresentação de cada livro.

No terceiro capítulo, cujo título é “Análise dos Livros Didáticos”, será apresentado as análises das Praxeologias Matemáticas e Didáticas realizadas, e o que foi analisado em relação a passagem do ensino das relações métricas no triângulo retângulo da Etapa do Ensino Fundamental para o Ensino Médio.

Por fim, temos o último capítulo, que tem como título “Considerações Finais”, nele apresentamos os principais resultados obtidos em nossa pesquisa e quais as contribuições que ela oferece para o ensino das relações métricas no triângulo retângulo e para o ensino da geometria.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

É nesse capítulo que fundamentamos nossa pesquisa. Discutimos aqui sobre o ensino da geometria e um pouco do seu percurso histórico, como também sobre os elementos de um triângulo, sendo essa figura geométrica o nosso principal objeto de estudo. Dando continuidade, fazemos um breve estudo sobre a semelhança de triângulos, e a partir desse estudo estabelecemos as relações métricas no triângulo retângulo. Por fim, apresentamos a Teoria Antropológica do Didático e seus elementos, teoria esta que foi usada como nosso aporte metodológico nas análises dos livros didáticos.

2.1 O ENSINO DA GEOMETRIA

Diante da necessidade do homem de compreender o meio em que vive surgiram os primeiros conhecimentos geométricos. Segundo Eves (1997), a geometria é muito antiga e se originou a partir de observações e da capacidade de reconhecer figuras, como também de comparar tamanhos e formas. Um dos primeiros conceitos da geometria a ser desenvolvido foi a noção de distância, acreditamos que foi a partir dele que surgiu a palavra ‘geometria’. Ela deriva do grego, geo = (terra) e metria = (medir), formando assim o seu significado geo + metria = medição de terra. Mas sabemos que a geometria não se limita apenas a medir, em seu processo de evolução, ela passou a ser considerada também como o estudo das formas dos objetos presentes no mundo físico, como também das posições que esses objetos ocupam, o que deu origem a novos conceitos geométricos. Por exemplo, hoje temos a geometria Euclidiana, que nos permite estudar os conceitos de geometria plana e espacial, assim como temos também a geometria analítica que nos permite representar geometricamente qualquer objeto matemático que esteja no espaço por meio de uma figura geométrica ou por uma fórmula matemática.

Antes da década de 60 o ensino da geometria era marcado por processos lógicos dedutivos e através de demonstrações. No início da década de 60, com a difusão do Movimento da Matemática Moderna¹, aqui no Brasil, o ensino de geometria passou a ser algebrizado. Mas, essa nova metodologia não contribuiu para o avanço do ensino de

¹ Por volta de 1960, o ensino de matemática no Brasil e em outros países, recebeu a influência do Movimento da Matemática Moderna (MMM). Esse movimento buscou aproximar a matemática que era ensinada na escola básica com a produzida por pesquisadores. Sobre as propostas defendidas por esse movimento, destacam-se as estruturas algébricas, a topologia, a teoria dos conjuntos, as transformações geométricas, entre outras (SILVA, 2006).

geometria em nosso país, e é vista como uma das causas do abandono da geometria. Segundo Costa (2016, p. 31) “tal proposta, de algebrizar a Geometria, entra em declínio no fim da década de 70, porém, provocou a eliminação do paradigma antecedente, que era marcado pela lógica e dedução, com demonstrações”.

Costa (2016) e Costa e Rosa dos Santos (2017a; 2017b; 2018) falam sobre o avanço nas pesquisas em Educação Matemática no campo do ensino da geometria, que proporcionam ao professor um apoio em sua estruturação de situações didáticas, favorecendo assim, a aprendizagem dos estudantes. Mas, destacam que apesar de todos os avanços na geometria, ela parece continuar sendo ensinada de forma confusa nos vários níveis escolares, seja do ensino básico ao ensino superior, como é visto nas avaliações de larga escala, a presença do baixo rendimento em questões que exploram conceitos geométricos.

Esses autores também trazem em comum, em suas pesquisas, a formação dos professores de matemática como sendo uma das causas do abandono da geometria. Moretti e Hillesheim (2018) trazem em seu trabalho que o ensino de geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental também sofre com esse abandono. Para eles tal abandono também é decorrente da formação dos pedagogos, que apresentaram dificuldades no ensino do campo da matemática, porém, o da geometria é o que apresenta maior fragilidade.

Como já falado anteriormente, em nossa pesquisa estudamos as relações métricas no triângulo retângulo. Para iniciarmos esse estudo, precisamos entender os elementos que compõem tal figura geométrica e quais os elementos de um triângulo, por ele ser o nosso objeto de estudos.

2.2.1 Elementos de um Triângulo

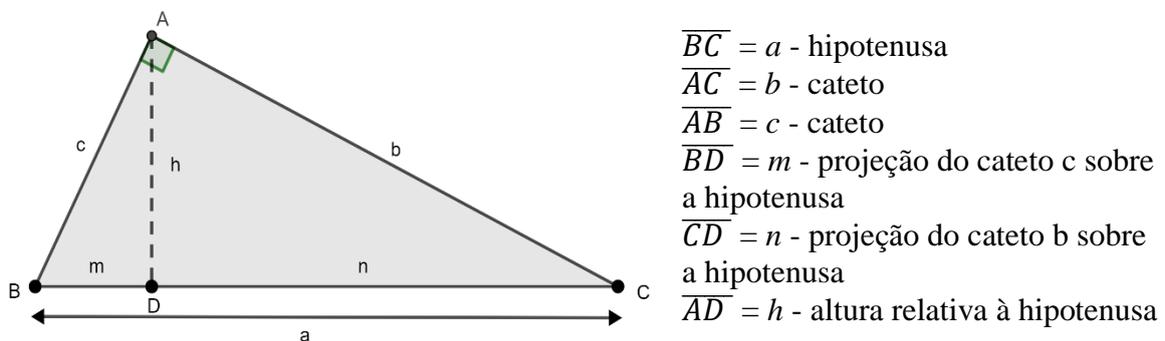
Dentro do campo da geometria, optamos por estudar a Geometria Euclidiana Plana, nesse sentido escolhemos a figura triângulo, por se tratar de uma figura que através das suas características e elementos, torna possível a construção de várias outras figuras geométricas, como o quadrado, o retângulo, o pentágono, entre outras.

Eles podem se constituir em “células básicas” para a construção de muitas das figuras que estudamos na geometria e, além disso, escondem, na sua aparente simplicidade, uma enorme riqueza de propriedades matemáticas (LIMA E CARVALHO, 2010, p. 153).

Seguimos as ideias de Lima e Carvalho (2010, p. 153) para definir a figura geométrica triângulo. “Tomamos três pontos A, B e C, não pertencentes a uma mesma reta

e os ligamos pelos três segmentos de reta \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} . A união desses três segmentos é o que chamamos de triângulo”. Mais particularmente, vamos estudar o triângulo retângulo, que se classifica assim, por ter um dos seus ângulos internos reto, ou seja, medindo 90° . O triângulo retângulo é uma figura geométrica que é bastante explorada no ensino da matemática, como por exemplo: no cálculo de área, no cálculo algébrico, nas razões trigonométricas, nas relações métricas, etc. Veremos na figura a seguir a representação de um triângulo retângulo e seus elementos.

Figura 1 – Representação de um triângulo retângulo e seus elementos



Fonte: Autoria própria

Como podemos ver na figura acima, a projeção do cateto c sobre a hipotenusa a somada a projeção do cateto b também sobre a hipotenusa, pode ser entendida como a medida da própria hipotenusa, já que o segmento $\overline{BD} = m$ e o $\overline{CD} = n$ equivale a $m + n = a$. A seguir vamos ver um pouco de semelhança de triângulos.

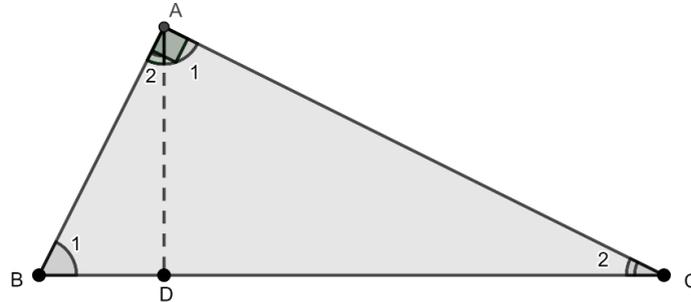
2.2.2 Semelhança de Triângulos

Quando nos referimos a semelhança de triângulos, estamos falando de forma geral entre proporção de dois ou mais triângulos. Dados dois triângulos ABC e DEF, eles são semelhantes se, e somente se, todos os seus lados e ângulos internos do triângulo ABC forem proporcionais aos lados e ângulos internos do triângulo DEF.

Temos alguns casos de semelhança de triângulos, como: Caso Lado – Ângulo – Lado (LAL), em que dois triângulos são semelhantes se dois dos seus lados forem proporcionais e os ângulos entre esses lados congruentes. O Caso Lado – Lado – Lado (LLL), que acontece quando dois triângulos são ditos semelhantes, se os três lados do primeiro triângulo forem ordenadamente proporcionais aos lados do segundo triângulo. E por último o Caso Ângulo – Ângulo (AA), em que dois triângulos são semelhantes se dois

ângulos de um triângulo forem congruentes a dois ângulos do outro triângulo.

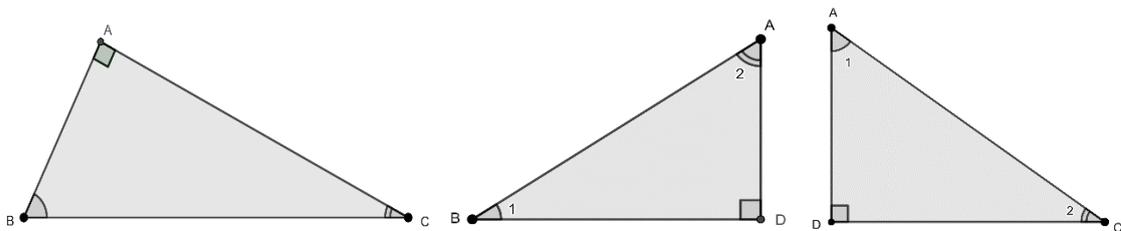
Figura 2 – Semelhanças de triângulos



Fonte: Autoria própria

Observando a figura 2, notaremos que se conduzirmos uma altura \overline{AD} relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo $\triangle ABC$, vamos obter dois triângulos retângulos $\triangle DBA$ e o $\triangle DCA$ que serão semelhantes ao $\triangle ABC$. O que torna esses triângulos semelhantes é a congruência dos ângulos, em que o ângulo $\hat{B} = \hat{1}$ é complemento do ângulo \hat{C} e o ângulo $\hat{C} = \hat{2}$ é complemento do ângulo \hat{B} . Dessa forma, podemos concluir que os $\triangle ABC \sim \triangle DBA$, o $\triangle ABC \sim \triangle DAC$ e o $\triangle DBA \sim \triangle DAC$ são semelhantes, pois eles têm dois ângulos congruentes, logo: $\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$, são semelhantes. Como podemos ver na figura 3 a seguir.

Figura 3 – Caso de semelhança de triângulos (AA)



Fonte: Autoria própria

2.2.3 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Com base nos casos de semelhanças dos triângulos citados no item anterior, mais especificamente o caso (AA) e com os elementos já caracterizados, temos as relações métricas:

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \rightarrow \begin{cases} \frac{a}{c} = \frac{b}{h} \rightarrow bc = ah \quad (4) \\ \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \rightarrow c^2 = am \quad (2) \\ \frac{b}{h} = \frac{c}{m} \rightarrow ch = bm \quad (6) \end{cases}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta DAC \rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \rightarrow b^2 = an & \text{(1)} \\ \frac{a}{c} = \frac{b}{h} \rightarrow bc = ah & \text{(4)} \\ \frac{b}{n} = \frac{c}{h} \rightarrow bh = cn & \text{(5)} \end{cases}$$

$$\Delta DBA \sim \Delta DAC \rightarrow \begin{cases} \frac{b}{n} = \frac{c}{h} \rightarrow bh = cn & \text{(5)} \\ \frac{b}{h} = \frac{c}{m} \rightarrow ch = bm & \text{(6)} \\ \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \rightarrow h^2 = mn & \text{(3)} \end{cases}$$

Resumindo as relações encontradas e excluindo as repetidas, temos:

$$\begin{array}{lll} \text{(1)} \quad b^2 = a \cdot n & \text{(3)} \quad h^2 = m \cdot n & \text{(5)} \quad b \cdot h = c \cdot n \\ \text{(2)} \quad c^2 = a \cdot m & \text{(4)} \quad b \cdot c = a \cdot h & \text{(6)} \quad c \cdot h = b \cdot m \end{array}$$

1ª e 2ª relação: Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção desse cateto sobre a hipotenusa.

$$b^2 = a \cdot n \qquad c^2 = a \cdot m$$

3ª relação: Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas dos segmentos que essa altura determina sobre a hipotenusa (que são as projeções dos dois catetos sobre a hipotenusa).

$$h^2 = m \cdot n$$

4ª relação: Em qualquer triângulo retângulo, o produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa.

$$b \cdot c = a \cdot h$$

5ª e 6ª relação: Em qualquer triângulo retângulo, o produto da medida de um cateto pela medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto da medida do outro cateto pela projeção da medida do primeiro sobre a hipotenusa.

$$b \cdot h = c \cdot n \qquad c \cdot h = b \cdot m$$

7ª relação: Em qualquer triângulo retângulo, a medida da hipotenusa é igual à soma das projeções dos catetos desse triângulo sobre a hipotenusa.

$$a = m + n$$

8ª relação: Em qualquer triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual o quadrado da medida da hipotenusa (Teorema de Pitágoras).

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Para provar esta última relação apresentada, basta somar membro a membro (1) e (2), como mostraremos a seguir:

$$\left. \begin{array}{l} b^2 = a \cdot n \\ c^2 = a \cdot m \end{array} \right\} + \rightarrow b^2 + c^2 = am + an \rightarrow b^2 + c^2 = a \frac{(m+n)}{1} \rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

As relações métricas do triângulo retângulo que acabamos de demonstrar através da semelhança de triângulo é um conteúdo curricular importante no ensino da matemática. Como sinalizado pela BNCC (2018), em que a partir das relações métricas no triângulo retângulo podemos favorecer a integração da matemática com outras áreas de conhecimentos, como Ciências, em estudos de densidade de grandezas e de escalas do sistema solar, ou mesmo com a Geografia, em estudos de coordenadas geográficas, densidade demográficas, entre outros. A seguir apresentaremos uma revisão de literatura sobre as relações métricas no triângulo retângulo.

2.3 REVISÃO DE LITERATURA SOBRE AS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Fizemos uma revisão de literatura sobre pesquisas brasileiras envolvendo as relações métricas no triângulo retângulo. Buscamos esses trabalhos nos principais periódicos de universidades brasileiras, no banco de dados de teses e dissertações da Capes e no Google Scholar. Encontramos 13 pesquisas no total, que constam em seu título as relações métricas no triângulo retângulo, sendo esse o nosso critério adotado na busca por essas pesquisas. Foram encontradas 05 dissertações, 02 monografias, 01 trabalho de conclusão de curso e 05 artigos.

Após a identificação das pesquisas que já foram realizadas no Brasil sobre as relações métricas no triângulo retângulo, fizemos a leitura de cada uma delas para identificar os objetivos e os principais resultados.

Iniciamos a apresentação das pesquisas pela de Ferreira (2018). O objetivo do seu trabalho foi avaliar os efeitos de uma sequência didática, diferente da tradicional, por meio de atividades estruturadas no ensino das relações métricas no triângulo retângulo no 9º ano do Ensino Fundamental. Para realizar a avaliação dos efeitos dessa sequência didática ele utilizou a Engenharia Didática da segunda geração² como metodologia da pesquisa. Os resultados da pesquisa dele apontaram que houve um aumento considerável nas notas do pós-teste; o teste de hipótese comprovou estatisticamente este aumento e nenhum dos fatores socioeconômicos interferiu nos resultados obtidos. Ele conclui que a metodologia de ensino aplicada teve efeito satisfatório, e conseqüentemente melhora significativa no desempenho dos discentes na resolução de problemas envolvendo as relações métricas no triângulo retângulo.

Pires (2018) traz como objetivo do seu trabalho inserir o uso do computador no cotidiano do aluno, através do Software GeoGebra³, utilizando a álgebra e a geometria para a construção de conhecimentos matemáticos nas relações métricas do triângulo retângulo. Para a efetivação do que foi posto como objetivo, ele aplicou atividades práticas com uso do computador. Os estudantes através do GeoGebra fizeram construções de triângulos retângulos e suas respectivas alturas, para através da semelhança dos triângulos encontrarem as relações métricas. Ele concluiu que com uso do GeoGebra a aula se torna mais dinâmica e facilita a compreensão do objeto de estudo e ajuda a desenvolver o raciocínio lógico dos estudantes e conseqüentemente a aprendizagem das relações métricas.

O trabalho de Santos (2016) teve por objetivo desenvolver um planejamento de ensino que integrasse Robótica Educacional⁴ no ensino das relações métricas do triângulo Retângulo. Para desenvolver esse planejamento de ensino, ele o fundamentou no Alinhamento Construtivo⁵, considerando o desenvolvimento de duas habilidades: (i) visualização e aplicação das propriedades das figuras geométricas; e, (ii) desenvolvimento

² Segundo Perrin-Glorian uma engenharia didática de segunda geração, tem por primeiro objetivo o desenvolvimento de recursos (ou objeto de aprendizagem) para o ensino regular, ou a formação de professores. O que, conseqüentemente, necessita de vários níveis de construção. Podem-se distinguir dois tipos de engenharias didáticas em função da pergunta inicial da investigação, sendo a Engenharia Didática para a Investigação (IDR) e a Engenharia Didática de Desenvolvimento (IDD). (apud ALMOULOU E SILVA, 2012, p. 28).

³ O GeoGebra é um software de matemática dinâmica, que combina conceitos da geometria, álgebra e cálculo.

⁴ Segundo Santos (2016), Robótica Educacional é um termo utilizado para designar um modelo ou proposta didática que utiliza os fundamentos e recursos tecnológicos da robótica, para a resolução de problemas em diferentes áreas como Matemática, Ciências, Informática, etc.

⁵ Segundo Silva (2016), o Alinhamento Construtivo foi proposto por John Biggs (BIGGS; TANG, 2011) e é definido pelo próprio autor como “*design for teaching*”. Em Português, pode ser entendido como uma maneira de planejar, projetar e delinear o ensino.

do raciocínio dedutivo na construção de soluções para os problemas propostos. A integração da Robótica Educacional no ensino de matemática, conforme proposto neste trabalho, foi avaliada por meio de um estudo de caso realizado com 30 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública. Os resultados dessa pesquisa, revelaram uma melhoria na aprendizagem dos alunos, sendo que os índices mais significativos foram alcançados no desenvolvimento da primeira habilidade. Sobre a segunda habilidade os resultados obtidos foram mais modestos, pois o desenvolvimento dos cálculos prescindia conhecimentos sobre as operações aritméticas, cujo domínio pelos estudantes era limitado.

No trabalho de Batista (2016), ele traz como objetivo identificar quais são os recursos didáticos utilizados pelos professores de Ensino Médio de matemática e como esses recursos podem potencializar o ensino-aprendizagem aos alunos surdos de uma escola em Cruzeiro do Sul-Acre. Para a execução foi utilizada a abordagem qualitativa do tipo estudo de caso com realização de questionários abertos. Foram feitas também observações não estruturadas. Durante a pesquisa foram construídos e aplicados dois recursos didáticos, o primeiro com foco no conteúdo de matrizes, componente do segundo ano que foi aplicado na sala de aula regular com todos os estudantes, dentre eles um aluno surdo. O segundo aborda as relações métricas no triângulo retângulo, conteúdo trabalhado no primeiro ano do Ensino Médio e foi aplicado na sala de aula no contraturno com três estudantes surdos. Ele traz como resultado que a utilização dos dois recursos didáticos, potencializou o ensino-aprendizagem de forma eficaz quando foram mediados pelo professor de matemática e intérprete de Libras e conclui que as aulas de matemática podem explorar ao máximo o visual com os recursos didáticos, pois é assim que o aluno surdo capta as informações transmitidas pelo professor e intérprete.

O texto de Souza, Prado, Silva e Espíndola (2016) traz como objetivo principal identificar as tarefas e as Técnicas fomentadas nas propostas dos autores para o ensino das relações métricas. Para a execução elas fazem a identificação e descrição da Praxeologia Matemática utilizando os fundamentos da Teoria Antropológica do Didático de (CHEVALLARD, 1996). As análises mostraram que as tarefas incidem predominantemente no cálculo das medidas dos segmentos de reta correspondentes aos lados do triângulo retângulo (Calcular a medida dos catetos e/ou da hipotenusa). E, entre as Técnicas que possibilitam alcançar os resultados esperados nas mesmas tarefas, a mais incentivada pelos autores dos livros didáticos analisados é o Teorema de Pitágoras.

A pesquisa desenvolvida por Corrêa (2014) teve por objetivo verificar a efetividade de uma sequência didática composta por atividades de aprendizagem e de fixação para o

ensino de relações métricas no triângulo retângulo na Educação de Jovens e Adultos (EJA). No desenvolvimento da pesquisa ela aplicou preliminarmente um pré-teste com questões envolvendo este conteúdo matemático em uma turma de 4ª Etapa da EJA, em seguida aplicou a sequência didática e por último aplicou um pós-teste composto pelas mesmas questões do pré-teste. A análise dos resultados permitiu verificar que no geral houve melhora no desempenho dos alunos. No entanto, alguns fatores, tais como o pouco tempo para a aplicação das atividades e o elevado número de questões do pós-teste, podem ter contribuído para um resultado aquém do esperado. Verificou-se ainda que os alunos não apresentaram dificuldades na identificação das relações métricas corretas para resolução das questões do pós-teste, as principais dificuldades identificadas foram na resolução de equações e na interpretação do comando da questão.

A pesquisa de Paula (2014) teve por objetivo criar um software online e gratuito, em parceria com alunos do curso de graduação em Sistemas de Informação, da Universidade Severino Sombra, para ser o instrumento de comunicação entre o professor e os alunos envolvidos na pesquisa. O trabalho dela é subsidiado pela Teoria das Situações Didáticas⁶, uma vez que todo processo é analisado sob o aspecto do triângulo didático: professor – aluno – saber matemático. Durante a pesquisa foram aplicadas questões sobre as relações métricas no triângulo retângulo para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, essas atividades foram respondidas com e sem o auxílio do software proposto. Para as atividades, são apresentadas reflexões sobre o auxílio do software, no processo de ensino e aprendizagem do aluno, confrontando os dados obtidos do estado da arte de trabalhos semelhantes. A partir de resultados encontrados no confronto das atividades *a priori* e *a posteriori*, mostraram que de fato, existe a intervenção no processo, sobretudo no rendimento escolar, no tempo e até mesmo na motivação dos alunos na consolidação do saber matemático, o Teorema de Pitágoras.

Pereira e Leivas (2014) descrevem em seu trabalho uma atividade com o uso de material manipulável como ferramenta facilitadora na aprendizagem da construção das relações métricas no triângulo retângulo. O objetivo traçado por eles foi colocar os alunos em contato direto com o objeto de estudo, recortando, comparando, descobrindo e

⁶ Segundo Brousseau (2008), uma *situação didática* é um modelo de interação do sujeito com um meio específico, o qual determinará certo conhecimento. As Situações Didáticas podem ser modeladas por uma tríade professor-aluno-saber, que comporta as partes da relação didática: aluno, sistema educacional e conhecimento escolar, levando em consideração as interações, entre professor e aluno, mediadas pelo saber, consolidando, assim, a forma como tais relações se estabelecerão (apud PAULA, 2014, p. 24).

deduzindo as relações métricas. Nesse trabalho eles utilizaram a Teoria de Van Hiele⁷ e seus níveis hierárquicos, para descrever o nível de maturidade geométrica dos estudantes. Eles concluíram que houve aprendizagem, a partir das atividades propostas e que elas, possibilitaram a reflexão, por parte do professor, sobre o uso de material manipulável como um facilitador nas aulas de matemática.

O artigo de Vargas (2013) é um relato de experiência que apresenta a abordagem do estudo das relações métricas no triângulo retângulo numa proposta de ensino de Geometria Dinâmica através do software GeoGebra. O objetivo central desse trabalho foi promover um aprendizado diferenciado e relevante desse conceito, aliado com uma revisão de outros conceitos e elementos geométricos, como estudo das retas, segmentos, polígonos e rotação. Para isso, utilizou-se como referencial teórico um artigo em Geometria Dinâmica – Uma nova abordagem para o aprendizado da geometria, e para validar a proposta, foi desenvolvida e aplicada uma proposta didática, visando contemplar o aprendizado e construção desses conceitos com o uso de novas tecnologias. A autora conclui que sobre a aprendizagem os alunos demonstraram resultados satisfatórios, tanto nos conceitos abordados, quanto nas construções em Geometria Dinâmica. Conseguiram compreender as relações métricas do triângulo retângulo através das atividades propostas, assim como, construir figura utilizando o dinamismo que o GeoGebra permite.

A pesquisa de Paula, Silva e Araújo (2013) identificou através da Prova Brasil 2011 que as relações métricas no triângulo retângulo foi o conteúdo com o mais baixo índice de acertos. A partir desse dado obtido, eles decidiram desenvolver um software educacional. Como base teórica, eles adotaram a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau. O objetivo deles é utilizar esse software educacional criado por eles em um processo investigativo futuro com o intuito de sanar ou pelo menos minimizar as dificuldades dos alunos observadas na análise da Prova Brasil 2011, em relação ao item estudado. Como esse software ainda estava em fase de desenvolvimento neste artigo, não temos como indicar os resultados obtido com o uso desse software.

Os autores Lima e Luz (2009) em seu trabalho trazem como objetivo apresentar as relações métricas no triângulo retângulo a partir de uma abordagem vetorial. O desenvolvimento desse estudo é realizado a partir de demonstrações das relações métricas,

⁷ Segundo Pereira e Leivas (2014, p. 533), o modelo de van Hiele foi criado por Pierre Van Hiele e sua esposa Dina van Hiele-Geoldof, na década de 50, baseado nas dificuldades apresentadas em Geometria por seus alunos do curso secundário na Holanda. A ideia principal do modelo é que o estudante avance a partir de uma sequência de níveis de compreensão de conceitos na aprendizagem de Geometria. Esta sequência segue uma ordem hierárquica, pela qual o aluno só consegue avançar se passar pelos níveis anteriores.

de duas maneiras, pela forma tradicional e vetorial. Eles apresentam em suas conclusões, que os vetores desempenham um papel importante do ponto de vista da Geometria Descritiva e que a aprendizagem das relações métricas, através da álgebra vetorial permite que o estudante faça de seus estudos mais interessantes, já que o seu conhecimento se torna mais prático na resolução de problema.

A pesquisa de Lamas e Mauri (2006) teve como objetivo criar modelos concretos construídos com EVA para demonstrarem as relações métricas. Para isso, foram desenvolvidas particularmente atividades experimentais para mostrar passo a passo as demonstrações do Teorema de Pitágoras e das Relações Métricas no Triângulo Retângulo, utilizando o modelo construído com material emborrachado (EVA). Estes modelos podem ser considerados materiais didáticos, que visam facilitar a visualização e o entendimento das propriedades geométricas. Como nesse estudo foi apresentado os modelos sem a aplicação dos mesmos, não temos como indicar os resultados alcançados com o uso deles.

O estudo realizado por Quadro (2004) teve por objetivo conhecer os saberes matemáticos relativos às relações métricas trabalhadas na 8ª série, atual nono ano do Ensino Fundamental. Como referencial teórico é usado a Teoria Antropológica do Saber, de Yves Chevallard. No desenvolvimento da sua pesquisa ela fez a identificação dos elementos sobre as relações métricas, no âmbito nacional através dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) e no âmbito estadual através da Proposta Curricular de Santa Catarina (1998). Nesse estudo ela também buscou identificar qual a abordagem das relações métricas em livros identificando quais as tarefas propostas e quais as configurações relativas às tarefas são exploradas. Em seus resultados ela apresenta que segundo os livros didáticos estudados a tarefa mais solicitada é a de calcular a medida de um segmento. A configuração em geral explorada é a canônica.

Como podemos observar, encontramos duas pesquisas que se assemelham a nossa, por analisarem as relações métricas no triângulo retângulo em livros didáticos. A primeira foi a pesquisa publicada pelas autoras Souza, Prado, Silva e Espíndola (2016), o trabalho traz a TAD como ferramenta metodológica para análise da Organização Matemática referente aos Tipos de Tarefas e Técnicas, fomentadas pelos autores dos livros didáticos de matemática acerca da aprendizagem das relações métricas no triângulo retângulo.

A Praxeologia Matemática ou Organização Matemática é composta de dois blocos: o da 'práxis', saber-fazer composto por Tipos de Tarefas e Técnicas, e o do 'logos', composto por Tecnologia, que justifica a Técnica, e a Teoria que justifica a Tecnologia. Olhar apenas para Tipos de Tarefas e Técnicas como fizeram as autoras da pesquisa citada

no parágrafo anterior não se configura em análise praxeológica, mas sim, em uma análise do saber-fazer.

A segunda pesquisa foi a de Quadro (2004), ela fez um estudo das relações métricas em livros didáticos utilizando como aporte teórico a Teoria Antropológica do Saber de Chevallard, para observar quais as tarefas propostas e quais as configurações relativas a elas.

Em nossa pesquisa, podemos ver que avançamos em relação as pesquisas de Souza, Prado, Silva e Espíndola (2016) e de Quadro (2004), pois ampliamos nossa análise incluindo as Praxeologias Matemáticas e as Praxeologias Didáticas acrescentamos ainda a análise de coleções de livros didáticos do Ensino Médio, escritas pelos mesmos autores das coleções do Ensino Fundamental.

Essa revisão de literatura foi produzida com o intuito de entender como tem sido realizado o ensino das relações métricas no triângulo retângulo no Brasil. Observamos que essas pesquisas têm utilizado na maioria das vezes abordagens para auxiliar o ensino desse saber de forma mais dinâmica, através do uso de software educacionais e materiais manipuláveis e tem se obtido resultados satisfatórios em suas aplicações.

Percebemos que os autores compartilham do mesmo sentimento que o nosso, em querer entender o que tem acontecido com o ensino da geometria, mas particularmente com o das relações métricas no triângulo retângulo, para tentar encontrar maneiras para melhorar o seu ensino. Apresentamos no próximo tópico a teoria e seus elementos que nos deu suporte para realizar esta pesquisa.

2.4 A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Para fazermos a análise das relações métricas do triângulo retângulo nos livros didáticos, adotaremos a Teoria Antropológica do Didático (TAD). Essa teoria é uma ampliação da Transposição Didática proposta por Yves Chevallard na década de 90. “A TAD estuda o homem diante do saber matemático e, mais particularmente, frente a situações matemáticas, partindo do princípio que todo trabalho matemático aparece como resposta a um tipo de tarefa.” (ROSA DOS SANTOS, 2015, p. 38).

Chevallard inicialmente alicerça a TAD em três conceitos primitivos: Objeto (O), Instituição (I) e Pessoa (X). Para Chevallard (1998) “todas as coisas são objetos” e para o mesmo existir deve ser reconhecido por pelo menos uma pessoa (X) ou uma Instituição (I).

A Instituição (I) pode ser explicitada como sendo um dispositivo social, total ou parcial que impõe aos seus sujeitos formas de fazer e de pensar que são próprias a cada “tipo” ou forma de Instituição, sendo assim, todo saber é o saber de uma Instituição. São exemplos de instituição: a família, a escola, a sala de aula, o livro didático, entre outros. Em nossa pesquisa, a Instituição alvo é o livro didático e o Objeto matemático é o estudo das relações métricas no triângulo retângulo.

Quando nos referimos a Pessoa (X) no âmbito da TAD, Chevallard (1999) diferencia dois estágios desse conceito: indivíduo e sujeito. O primeiro é o de indivíduo, tendo em vista que nele não se sofre interferências com as relações cotidianas.

O segundo estágio acontece quando o indivíduo passa a se sujeitar dentro das instituições a qual pertence. Por exemplo, quando uma criança nasce ela é apenas um indivíduo que pertence a instituição família, a partir do momento que ela começa a ter relações e a se sujeitar nessa instituição e em outras, como a instituição escola, ela passa a ser sujeito dessas duas instituições e são essas relações estabelecidas dentro das instituições que o fazem ser Pessoa. Então a Pessoa (X) é constituída por todos os assujeitamentos que o indivíduo tem com as várias instituições que ele pertence e pertenceu.

Destes reconhecimentos surgem as Relações (R) do Objeto com a Instituição $R(O, I)$, que é construída a partir das práticas sociais que se realizam na Instituição e que põem em jogo o Objeto, ou seja, o que é feito nesta Instituição com esse Objeto que está em questão (BOSCH e CHEVALLARD, 1999). Da mesma forma, a relação pessoal de uma Pessoa (X) com o Objeto do saber se caracteriza através das interações que ela pode ter com o Objeto (O), de forma individual ou pelas práticas sociais vivenciadas também de forma individual com esse Objeto.

A TAD tem sido considerada como uma teoria inovadora que se diferencia das outras. Enquanto outras teorias evidenciam as dificuldades que surgem nos processos de ensino aprendizagem no ensino da matemática, mais especificadamente, como aprende o estudante, como ensina o professor. A TAD estuda uma ampla variedade de coisas, uma delas são as condições que favorecem uma determinada atividade matemática que possa se desenvolver em uma determinada Instituição e também restrições que dificultam ou que impedem a prática desta mesma atividade.

2.4.1 Organização Praxeológica

Para Chevallard, toda atividade humana pode ser descrita por uma Organização

Praxeológica, que é composta por quatro componentes, Tipos de Tarefas, Técnica, Tecnologia e Teoria. Na TAD os Tipos de Tarefas (T) e as Técnicas (τ) formam o bloco “saber fazer” que é representado por $[T, \tau]$ e está relacionado à prática, já as Tecnologias e Teorias formam o bloco do “saber” representado por $[\theta, \Theta]$ que é associado à razão.

A noção de praxeologia se forma em torno de tipos de tarefas (T) a serem cumpridas por meio de pelo menos uma técnica (τ), que, por sua vez, é explicada e validada por elementos tecnológicos (θ) que são justificados e esclarecidos por uma teoria (Θ) (ROSA DOS SANTOS, 2015, p. 42).

Para Chevallard (1999), a noção de *Tipo de Tarefas* (T) está em conformidade com o sentido antropológico da teoria, em que supõe a existência de objetos que são precisos, e inclui apenas as ações humanas, ou seja, que não são obtidas diretamente da natureza. A noção de Tipos de Tarefas está ligada a um objeto claro e exato, na qual, geralmente é expressado a princípio por um verbo de ação mais o complemento da frase, como, por exemplo, “em um triângulo ABC, o cateto \overline{AB} mede 15cm e o \overline{AC} mede 16cm. Determine a medida x da hipotenusa desse triângulo ABC”.

Se pararmos para observar apenas o verbo “determinar”, temos o que Chevallard (1999) nomeia de gênero de tarefas, pois não está explicando o que é para determinar e sim englobando várias possibilidades para este verbo. Tendo isso em vista notamos que para existir um gênero de tarefa, se faz necessário a existência de vários Tipos de Tarefas. Dessa forma, notamos que apesar dos conceitos de Tipo de Tarefas (T) e Tarefa (t), estarem relacionados entre si, eles são distintos. O Tipo de Tarefas pode ser definido como um conjunto de tarefas que abrange várias tarefas com propriedade em comum. Quando uma Tarefa (t) faz parte de um Tipo de Tarefas (T), falamos que $t \in T$.

Para resolvermos determinada Tarefa de $t \in T$, devemos elaborar alguns procedimentos, essa maneira ou “caminho” de realizar determinada Tarefa é chamada por Chevallard (1999) de Técnica (τ). Segundo esse autor, uma praxeologia pertencente a um Tipo de Tarefas (T) precisa de uma Técnica (τ) para realizar as Tarefas $t \in T$. Porém, pode acontecer de uma Técnica (τ) não ser suficiente para a realização de todos os Tipos de Tarefas $t \in T$. Portanto, se faz necessário o emprego de mais de uma Técnica, nesse caso, a Técnica pode funcionar para uma parte de $P(\tau)$ dos Tipos de Tarefas (T), mas ser falha em outra.

Quando Chevallard (1999) se refere ao uso da Técnica em uma determinada Instituição (I), ele argumenta que existe um número limitado de Técnicas (τ) institucionalmente reconhecidas, porém, essas mesmas técnicas poderão não ser reconhecidas em outra instituição. Todas as técnicas que forem usadas para realizar as

Tarefas t e T , precisam ser justificadas através de um discurso lógico e coerente, dando origem a noção de Tecnologia (θ).

Chevallard (1999) define *Tecnologia* (θ) como sendo um discurso racional sobre as Técnicas, ele ainda destaca três funções para a Tecnologia. A primeira função é justificar racionalmente a Técnica (τ), de forma que ela seja realizada assegurando bem a Tarefa do tipo (t). A segunda função é explicar, tornar inteligível e esclarecer o motivo da Técnica funcionar na realização de determinada Tarefa. Já a terceira função da Tecnologia é a produção de novas Técnicas, em que possam ser mais eficientes e adaptáveis para a realização de certa Tarefa.

Para Chevallard (1999), a *Teoria* (Θ) é a justificativa e esclarecimento da Tecnologia. Nela existe um nível superior de justificação-explicação-produção, na qual irá exercer com a Tecnologia a mesma função que a exercida da Tecnologia com a Técnica. Esse autor explica que não existe necessidade de se justificar a Teoria, como foi feito com os demais elementos da Organização Praxeológica.

Especificando nossa pesquisa, vamos nos aprofundar nas praxeologias relativas ao saber matemático. Sobre o estudo e análise de um tema matemático, Chevallard (1999) faz a distinção entre duas praxeologias. A Praxeologia ou Organização Matemática se refere ao estudo e análise da realidade matemática construída para sala de aula. Já a Praxeologia ou Organização Didática demonstra como se pode construir esta realidade matemática, como veremos a seguir.

2.4.2 Praxeologia ou Organização Matemática

A Praxeologia Matemática se refere ao estudo e análise da realidade matemática, através dos Tipos de Tarefas (T), que serão realizadas por meio de Técnicas (τ), justificadas pela Tecnologia (θ) e validadas pela Teoria (Θ).

De acordo com Chevallard (1997) as Praxeologias Matemáticas envelhecem, ou seja, em um certo período da Instituição algumas Técnicas se destacam e são importantes, em outros momentos perdem sua importância, tornando-se ultrapassadas com o surgimento de Técnicas novas para resolver determinados Tipos de Tarefas.

Para Chevallard (1997), o primeiro objetivo a ser traçado pelo pesquisador é determinar e caracterizar as Praxeologias Matemáticas a serem estudadas a partir dos documentos oficiais vigentes e dos livros didáticos adotados. Essa análise deve ser realizada de forma precisa, na busca de descrever e analisar de forma minuciosa os Tipos de Tarefas

propostas e as condições de desenvolvimento concedidas aos demais elementos da Praxeologia (Técnica, Tecnologia e Teoria). Para isso, Chevallard (1999), propõe alguns critérios de análise descritos a seguir.

1. **Para a avaliação de tipos de tarefas (T)**, Chevallard sugere os seguintes critérios:

- **Critério de identificação:** verificar se os tipos de tarefas estão postos de forma clara e bem identificados;
- **Critério das razões de ser:** verificar se as razões de ser dos tipos de tarefas estão explicitadas ou ao contrário, esses tipos de tarefas aparecem sem motivos válidos;
- **Critério de pertinência:** verificar se os tipos de tarefas considerados são representativos das situações matemáticas, mais frequentemente encontradas e se são pertinentes tendo em vista as necessidades matemáticas dos alunos.

2. **Para a avaliação das técnicas (τ)**: A avaliação de técnicas apoia-se nos mesmos critérios discutidos na avaliação de tipos de tarefa. Além disso, é preciso responder as seguintes questões: a) As técnicas propostas são efetivamente elaboradas, ou somente esboçadas? b) São fáceis de utilizar? c) Sua importância é satisfatória? d) Sua confiabilidade é aceitável sendo dadas suas condições de emprego? e) São suficientemente inteligíveis?

3. **Com relação ao bloco tecnológico-teórico (θ)**: Podemos fazer observações análogas a propósito do bloco tecnológico-teórico. Assim, sendo dado um enunciado, o problema de sua justificação é somente posto ou ele é considerado tacitamente como pertinente, evidente, natural ou ainda bem conhecido? a) As formas de justificação utilizadas são próximas das justificativas matematicamente válidas? b) Elas são adaptadas ao problema colocado? c) Os argumentos usados são cientificamente válidos? O resultado tecnológico de uma dada atividade pode ser explorado para produzir novas técnicas para resolver novas tarefas (ALMOULOUD, 2015, p. 16-17).

Chevallard fala ainda de um outro tipo de análise das Praxeologias Matemáticas, a qual ele se refere: a análise da dinâmica institucional. Segundo o autor, essa análise está representada nas condições de gênese e no desenvolvimento de uma Praxeologia Matemática em uma determinada instituição, que pode ser descrita em prático, técnico, tecnológico e teórico, porém essa praxeologia é suficiente apenas inicialmente para modelar a atividade matemática institucional, tornando-se um dos postulados da TAD que deve ser testado empiricamente.

A TAD postula que toda atividade matemática institucional pode ser moldada por meio da noção da Praxeologia Matemática, isto é, que toda atividade matemática institucional pode ser analisada em termos de Praxeologia Matemática de Complexidade Crescente (CHEVALLARD, 1999). Esse autor traz diferentes praxeologias que são utilizadas para deixar mais fácil a análise desse processo didático observando essas Praxeologias Matemáticas, que estão organizadas em: Praxeologia Matemática Pontual

(PMP), Praxeologia Matemática Local (PML), Praxeologia Matemática Regional (PMR) e Praxeologia Matemática Global (PMG).

A Praxeologia Matemática Pontual é definida por $[T, \tau, \theta, \Theta]$ e se desenvolve em um determinado Tipo de Tarefas. Portanto, a noção de PMP é relativa à Instituição considerada, e ela está definida, em princípio, a partir do bloco prática e técnica, como por exemplo, classificar triângulos quanto aos ângulos com o auxílio de um transferidor, presentes no livro didático do 6º ano do Ensino Fundamental.

A Praxeologia Matemática Local $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$ é constituída através da interação de várias PMP. Cada PML é relacionada a uma determinada Tecnologia, que servem para justificar e explicar que elas se inter-relacionam e produzem as Técnicas que integram as PMP. Por exemplo, a resolução de vários Tipos de Tarefas envolvendo o Teorema de Pitágoras.

A Praxeologia Matemática Regional $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$ é formada pela integração entre ela e as PML, cuja teoria fundamenta, coordena e integra as PML em um discurso matemático comum. Por exemplo, o estudo das relações métricas no triângulo retângulo.

Por fim, a Praxeologia Matemática Global $[T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta_k]$ é formada por PMR associando várias teorias, como é o caso, do estudo da geometria em uma sala de aula do Ensino Médio.

Em nosso trabalho fizemos a análise das Praxeologias Matemáticas Pontuais, observando-as como foram abordadas no estudo das relações métricas no triângulo retângulo em livros didáticos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. No próximo subtópico veremos como se comporta a Praxeologia Didática.

2.4.3 Praxeologia ou Organização Didática

Segundo Farias (2008), as Praxeologias Didáticas estão ligadas as possibilidades de ações, ou seja, as várias maneiras de organizar o processo de ensino e de aprendizagem da matemática em uma instituição concreta. Dessa forma entendemos que elas não estão restritas apenas ao trabalho do professor em sala de aula, mas se estende ao livro didático e a todos os sujeitos que transformam o ‘saber científico’ em ‘saber ensinado’.

Em suma, a Praxeologia Didática está associada a maneira pela qual podemos ver a realidade matemática a ser estudada, ela nos permite identificar as escolhas didáticas feitas pelo professor ou pelo autor do livro didático ao abordar determinado conteúdo matemático, por exemplo.

A Praxeologia Didática está organizada em seis momentos didáticos ou de estudos, que são eles: ‘primeiro encontro’, ‘exploração do Tipo de Tarefas e da elaboração da Técnica’, ‘constituição do ambiente tecnológico-teórico’, ‘trabalho da Técnica’, ‘institucionalização’ e ‘avaliação’. É importante ressaltar que esses momentos não definem uma ordem cronológica.

Assim como a Praxeologia Matemática, a Praxeologia Didática apresenta os dois blocos praxeológicos, o bloco do ‘saber-fazer’ e o do ‘saber’, que formam a quádrupla [T, τ , θ , Θ]. Porém essas duas praxeologias se diferenciam, enquanto a Praxeologia Matemática estuda a realidade matemática que pode ser construída para ser desenvolvida em sala de aula, a Praxeologia Didática refere-se ao modo de como será feito esse estudo.

Descreveremos a seguir cada um dos seis momentos didáticos. O *primeiro momento*, acontece quando existe o ‘primeiro encontro’ com a Praxeologia Matemática a ser estudada. Esse encontro ou (re)encontro pode acontecer de várias maneiras, porém, sempre deverá existir ao menos um Tipo de Tarefas (T). Segundo Chevallard (1999), existem duas maneiras prováveis de produzir o primeiro encontro com a Praxeologia Matemática, a primeira seria o encontro mimético-cultural e a outra, por meio de criações de situações fundamentais.

No encontro mimético-cultural a Praxeologia Matemática que será estudada é apresentada de forma explícita ao aluno, seja de forma fictícia, que no caso seria o sub-momento cultural, ou através do mimético, que acontece quando existe a manipulação efetiva do tema. Já na criação das situações fundamentais, o encontro acontece de maneira contrária ao anterior, enquanto o mimético cultural leva o estudante ao encontro da Praxeologia Matemática através de uma aproximação com uma realidade pré-existente, as situações fundamentais afastam totalmente essa aproximação. Nessa situação a Praxeologia Matemática a ser estudada é apresentada ao aluno, considerando-o como ator principal, como resposta a uma ou mais questões particulares desse sistema de situações.

O *segundo momento* é o da ‘exploração do Tipo de tarefas (T) e da elaboração de uma Técnica (τ)’, ao fazer o estudo de um problema específico. Além desse momento ter como objetivo o estudo das maneiras ‘caminhos’ de resolução de determinado Tipo de Tarefas, ele preocupa-se também, que esse caminho sirva para a constituição de determinada Técnica. Chevallard (1999) afirma que a elaboração da Técnica está na essência da atividade matemática, tornando-a em um processo de constituição de uma dialética, na qual, por um lado nos permite criar e aperfeiçoar uma Técnica relativa às Tarefas de mesma natureza, em contrapartida, essa Técnica será o meio utilizado para

resolver quase que de maneira automática as Tarefas de mesma espécie.

O *terceiro momento* é o da ‘constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à Técnica’. Esse momento tem relação com os dois anteriores, uma vez que, ao escolhermos uma determinada Técnica, ela terá ligação direta com o bloco tecnológico-teórico, com o propósito de explicá-la e justificá-la. Dependendo da concepção do autor do livro didático, do professor e da escola, existirá uma ênfase no bloco tecnológico-teórico, em que, a estratégia de direção de estudos acontecerá de forma tradicional, tornando assim, esse terceiro momento a primeira etapa do estudo.

O *quarto momento* é o ‘trabalho da Técnica’, no qual consiste melhorá-la, no sentido de torná-la mais econômica e confiável. Outra finalidade desse momento é aperfeiçoar o trabalho da Técnica, deixando-lhe mais rápida e eficiente, possibilitando pôr em prova o alcance da Técnica, bem como, verificar de forma quantitativa e qualitativa a sua credibilidade.

O *quinto momento* é o da ‘institucionalização’, tendo por finalidade reconhecer com exatidão a Praxeologia Matemática elaborada. Nesse momento de estudo se faz necessário a distinção dos elementos que permanecerão na Praxeologia Matemática com relação aqueles que serão dispensados. Para Chevallard, (1999),

O momento de institucionalização é, de início, aquele que, na construção *bruta* que pouco a pouco, emergindo do estudo, vão separar, por um movimento que compromete o porvir, o “matematicamente necessário”, que será conservado, e o “matematicamente contingente”, que logo será esquecido (CHEVALLARD, 1999, p. 244).

O *sexto momento* é o da ‘avaliação’, considerado sob dois aspectos: o primeiro sobre a avaliação das relações pessoais e o segundo sobre a avaliação da relação institucional, ambos em relação ao objeto construído. Esse momento está articulado com o da ‘institucionalização’, tendo por objetivo a verificação do que foi efetivamente compreendido com a Praxeologia Matemática construída e institucionalizada em Tipos de Tarefas, de Técnicas, Tecnologias e Teoria.

Esses seis momentos didáticos nos permitem evidenciar o desenvolvimento da Praxeologia Didática que tem por objetivo o ensino de determinado saber, no nosso caso, o das relações métricas no triângulo retângulo. Segundo Chevallard (1999), essa Praxeologia é de fundamental importância para o professor, por ser um instrumento de análise dos processos didáticos que foram apresentados no desenvolvimento da Praxeologia Matemática e por permitir identificar os problemas que deverão ser usados nos diferentes momentos de estudos. A seguir apresentamos de uma forma breve os níveis de

Codeterminação Didática propostos por Chevallard, que embora não seja o foco da nossa pesquisa, consideramos importante na perspectiva de localizar nosso objeto de estudo em uma escala hierárquica.

3 METODOLOGIA

Nessa pesquisa adotamos uma abordagem qualitativa, na qual vamos analisar a relação entre as Praxeologias Matemática e Didática na abordagem em livros didáticos de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, acerca das relações métricas no triângulo retângulo, que foram escritos pelos mesmos autores,

Quando nos referimos a uma abordagem qualitativa, concordamos com Prodanov e Freitas (2013, p. 70) que diz que esse tipo de abordagem “considera que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números”.

Tendo isso em vista, podemos notar que essa abordagem tende a contribuir com nossa pesquisa, visto que Chevallard aborda na Teoria Antropológica do Didático, o estudo do homem diante do saber matemático e as condições que favorecem uma determinada atividade matemática que possa se desenvolver em uma determinada instituição.

Relembramos aqui os objetivos específicos da nossa pesquisa para que fique mais claro para o leitor sobre os procedimentos metodológicos postos neste estudo.

- Caracterizar as Praxeologias Matemáticas e Didáticas das relações métricas no triângulo retângulo das coleções de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental;
- Caracterizar as Praxeologias Matemáticas e Didáticas das relações métricas no triângulo retângulo das coleções de livros didáticos do Ensino Médio;
- Analisar como acontece a passagem do ensino das relações métricas no triângulo retângulo da Etapa do Ensino Fundamental para a Etapa do Ensino Médio em coleções de livros didáticos escritas pelo mesmo autor.

3.1 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

No primeiro momento identificamos as coleções de livro didático de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio que foram escritas pelos mesmos autores, feito isso, consultamos os documentos oficiais do ensino básico para localizar em que ano ou anos são estudadas as relações métricas no triângulo retângulo e as competências e habilidades que são trabalhadas. Em seguida, continuamos a nossa pesquisa a partir das análises das Praxeologias Matemáticas e Didáticas, essas análises seguiram o padrão proposto por Bittar (2017), que apresentaremos a seguir.

3.1.1 Parte Curso e Parte Atividades Propostas para Análise

Em nossa análise dos livros didáticos, seguimos os critérios de (BITTAR 2017), dividimos seu texto em duas partes: Curso e Atividades Propostas, em que a parte Curso traz definições, propriedades, resultados e exercícios resolvidos. É essa parte que nos possibilita identificar alguns Tipos de Tarefas que os autores propõem e o que consideram importante para o aprendizado do estudante, na Instituição livro didático. É nessa primeira análise que iniciamos a identificação do conjunto de Tarefas e reorganizamos em Tipos de Tarefas suficientemente próximas. A partir da análise da parte Curso, produzimos os blocos praxeológicos que foram testados ao investigar a parte Atividades Propostas (BITTAR, 2017).

Após a realização da análise da Parte Curso, passamos para a análise das Atividades Propostas. De acordo com Bittar (2017, p. 373), “é nesse momento que devemos buscar analisar cada atividade, qual é a tarefa do estudante e qual é a técnica que se espera que ele utilize para a resolução da tarefa”. Mas para isso, devemos entender como o autor do livro didático espera que os estudantes resolvam as Tarefas produzidas por ele. Uma maneira de entender isso foi retornando a parte Curso e verificando as praxeologias existentes, e uma outra maneira foi nos basear no Manual do Professor, ele nos permitiu entender melhor como o autor fez essas abordagens das Atividades Propostas.

3.1.2 Elaboração do Quarteto Praxeológico Matemático

Nesta etapa, foi realizada uma leitura minuciosa, página a página, do capítulo referente as relações métricas no triângulo retângulo de cada livro. Identificar os blocos “prático-técnico” e “teórico-tecnológico”. Utilizamos para isso, o que construímos na parte Curso e Atividades propostas.

Para a análise praxeológica do saber matemático nas relações métricas no triângulo retângulo, acerca da avaliação dos blocos “prático-técnico” e “teórico-tecnológico”, utilizamos os critérios que foram adotados por Rosa dos Santos (2015) em sua tese e que estão fundamentados nos critérios de Chevallard (1999) como mostra o quadro a seguir:

Quadro 1 – Critérios adotados na análise da Praxeologia Matemática

Elemento da praxeologia	Critérios adotados
Tipo de tarefa (T)	<ul style="list-style-type: none"> • Identificação. • Representatividade.

	<ul style="list-style-type: none"> • Razão de ser. • Importância. • Pertinência.
Técnica (τ)	<ul style="list-style-type: none"> • Fáceis de utilização. • Confiáveis e aceitáveis. • Abrangentes. • Possíveis de evoluir. • Bem elaboradas.
Tecnologia e Teoria [θ , Θ]	<ul style="list-style-type: none"> • Explicitação do conceito. • Apresentação e justificativa do enunciado. • Tipo de justificativa: canônica ou não. • Forma de justificativa: explicativa, dedutiva, etc. • Validade de argumentação. • Exploração do bloco tecnológico-teórico.

Fonte: Autoria própria (adaptado de ROSA DOS SANTOS, 2015, p. 101)

3.1.3 Elaboração da Praxeologia Didática

Nesta fase, fizemos a análise das escolhas didáticas dos autores de como ensinar as relações métricas no triângulo retângulo, para isso utilizamos os seis momentos de estudo descritos por Chevallard (1999), adaptados por Rosa dos Santos (2015) e ilustrados no quadro a seguir.

Quadro 2 – Descrição dos momentos e critério de análise da Praxeologia Didática

Momentos	Critério de análise
Primeiro encontro	Como se inicia o assunto de relações métricas no triângulo retângulo?
Exploração do Tipo de Tarefas e de elaboração de uma Técnica	Como se dá a exploração do Tipo de Tarefas? Como é feita a elaboração da Técnica?
Constituição do ambiente tecnológico-teórico	Como é realizada a construção das justificativas referente a Técnica?
Trabalho da Técnica	Quando acontece a construção do seu domínio? Da precisão? Há criação de novas Técnicas?
Institucionalização	Como se concretiza o momento de institucionalização?
Avaliação	Como acontece a avaliação das relações pessoais e institucionais?

FONTE: Autoria própria (adaptado de ROSA DOS SANTOS, 2015, p. 101)

Ao identificarmos e analisarmos esses momentos, temos a possibilidade de entender como é feita a abordagem dos saberes matemáticos propostos pelo autor do livro didático.

3.1.4 Análise das Praxeologias Modeladas

Nesta última fase, após a elaboração das Praxeologias Matemáticas e Didáticas dos

livros didáticos, fizemos a interpretação dos dados obtidos em cada fase. Assim, podemos descrever a abordagem dos autores dos livros didáticos analisados sobre o saber matemático nas relações métricas no triângulo retângulo. Por fim, fizemos uma comparação entre os dados produzidos com os livros didáticos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, a fim de identificarmos como acontece a passagem desse saber matemático da Etapa do Ensino Fundamental para a Etapa do Ensino Médio.

3.2 LIVROS DIDÁTICOS ANALISADOS

O processo de escolha das coleções de livros didáticos que foram analisados em nossa pesquisa se deu a partir da identificação de coleções do Ensino Fundamental e do Ensino Médio escritas pelos mesmos autores do último PNLD aprovado. Essa escolha sobre livros escritos pelos mesmos autores se deu pelo fato de podermos responder com mais clareza ao final da nossa pesquisa nossa problemática. Obtemos como resultado as seguintes coleções do Ensino Fundamental: ‘Matemática Realidade & Tecnologia’ de Joamir Souza e ‘Teláris Matemática’ de Dante. No Ensino Médio as coleções escolhidas foram: ‘#Contato Matemática’ de Joamir Souza e Jacqueline Garcia e ‘Matemática Contexto & Aplicações’ de Dante.

Para identificar em qual ou quais anos o ensino das relações métricas no triângulo retângulo é posto nos livros didáticos tivemos que consultar dois documentos vigentes em nosso país. O primeiro foi a (BNCC, 2017) – Base Nacional Comum Curricular do Ensino Fundamental. Consultamos esse documento por essa coleção ter sido aprovada após a sua publicação e por ele ser o principal documento normativo a ser seguido. Já no Ensino Médio o documento que consultamos foi o Currículo de Matemática do Estado de Pernambuco de 2012, por ele ter como base o PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais, e organizar de forma mais clara em que ano os conteúdos devem ser vivenciados, documento esse que deve servir de modelo para o PNLD daquele ano, tendo em vista que a BNCC do Ensino Médio foi aprovada apenas em 2018.

Na BNCC do Ensino Fundamental as relações métricas no triângulo retângulo aparecem no 9º ano, na Unidade Temática Geometria e tem como objetos de conhecimento: relações métricas no triângulo retângulo, Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração. Em que o estudante deve desenvolver como habilidades: demonstrar as relações métricas no triângulo retângulo, entre elas o Teorema de Pitágoras, utilizando a semelhança de triângulos, resolver e elaborar problemas de aplicação do Teorema de

Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

O Currículo de Matemática do Estado de Pernambuco apresenta o ensino das relações métricas no triângulo retângulo para ser vivenciado no 1º ano do Ensino Médio. Ele está inserido no Campo da Geometria e tem como expectativas de aprendizagem, utilizar a semelhança de triângulos para estabelecer as relações métricas no triângulo retângulo (inclusive o teorema de Pitágoras) e aplicá-las para resolver e elaborar problemas.

Como podemos ver, o ensino das relações métricas no triângulo retângulo aparece no 9º ano do Ensino Fundamental e no 1º ano do Ensino Médio, portanto nossa pesquisa foi realizada em livros didáticos desses respectivos anos.

A seguir apresentamos uma visão geral de como se estrutura cada um dos livros que foram analisados.

3.2.1 Matemática Realidade & Tecnologia (9º ano do EF)

Este livro foi escrito por Joamir Souza e publicado pela Editora FTD, tendo sua primeira edição produzida em São Paulo, no ano de 2018. É importante ressaltar que essa obra foi aprovada pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2020, com ciclo de duração de quatro anos. O livro tem um total de 288 páginas e está dividido em 08 unidades, que possuem abertura, atividades, seções e boxes.

Cada abertura de unidade está organizada em duas páginas, elas apresentam uma diversidade de imagens, textos e infográficos acompanhados de algumas questões sobre o tema que será tratado durante a unidade. As atividades são propostas para serem realizadas individualmente ou em grupos, e trazem discussões de conteúdos ou conceitos matemáticos. Em algumas atividades podemos notar a presença de ilustrações através de imagens, tirinhas, textos e outros recursos. Durante o decorrer do livro podemos encontrar seções como “Você cidadão” que traz uma reflexão e o diálogo sobre o significado do que é ser cidadão, o que nos mostra que o livro aborda conteúdos sobre diversas áreas. Já nos boxes o autor tenta ampliar o conhecimento dos estudantes através de informações complementares sobre o contexto em estudo, essas informações são encontradas em seções como “Fique ligado”.

Aprofundamos nossos estudos na unidade 6 deste livro, pois foi nela que encontramos o conteúdo das relações métricas no triângulo retângulo que analisamos. Esta unidade é nomeada por “Educação financeira e relações métricas no triângulo retângulo”,

tendo início na página 168 e se estendendo até a página 195.

3.2.2 Teláris Matemática (9º ano do EF)

Esse foi nosso segundo livro analisado, ele foi escrito por Luiz Roberto Dante e publicado pela Editora Ática, tendo sua terceira edição produzida em São Paulo no ano de 2018. O livro tem um total de 312 páginas e está dividido em 09 capítulos, que possuem abertura, atividades, seções e boxes.

Em cada abertura de capítulo é apresentada uma imagem, relacionada ao conteúdo a ser estudado. As atividades são propostas para serem realizadas individualmente ou em grupos, elas trazem discussões de conteúdo ou conceitos matemáticos, que podem ser resolvidas através de cálculo mental, resolução oral ou com uso de calculadora, como indicado pelo autor. Em algumas atividades podemos notar a presença de ilustrações através de imagens, tirinhas, textos e outros recursos. Durante o decorrer do livro podemos encontrar seções como “Explorar e descobrir” que faz exploração, experimentação, verificação de descobertas e sistematização dos conteúdos apresentados. Já nos boxes o autor tenta ampliar o conhecimento dos estudantes através de informações complementares sobre o contexto em estudo, essas informações são encontradas com o tema “Fique ligado”.

Aprofundamos nossos estudos no capítulo 6 deste livro, pois é nele que encontramos o conteúdo das relações métricas no triângulo retângulo, no qual fizemos análise. Este capítulo é nomeado por “Relações métricas no triângulo retângulo”, tendo início na página 182 e se estendendo até a página 205.

3.2.3 #Contato Matemática (1º ano do EM)

O terceiro livro analisado, foi escrito por Joamir Souza e Jacqueline Garcia e publicado pela Editora FTD, tendo sua primeira edição produzida em São Paulo, no ano de 2016. O livro tem um total de 288 páginas e está dividido em 09 capítulos, que possuem abertura, atividades, seções e boxes.

As aberturas dos capítulos sempre apresentam uma imagem, relacionada ao conteúdo a ser estudado e sugestões de sites para os alunos aprofundarem seus estudos. As atividades são propostas para serem realizadas em sua grande maioria individualmente, elas trazem discussões de conteúdo ou conceitos matemáticos, que podem ser resolvidas através de cálculo mental, ou em alguns casos com uso de calculadora. Em algumas atividades podemos notar a presença de ilustrações através de imagens, textos e outros recursos.

Durante o decorrer do livro podemos encontrar seções como “Ser consciente” que leva o aluno a aplicar os conteúdos estudados em diferentes temas, como cidadania, saúde, etc. Já nos boxes o autor apresenta novas informações complementares para tentar ampliar o conhecimento dos estudantes.

O capítulo que analisamos é o 9, é nele que está o nosso saber matemático analisado. Esse capítulo tem como tema “Trigonometria no triângulo”, tendo início na página 232 e finalizando na página 265.

3.2.4 Matemática Contexto & Aplicações (1º ano do EM)

O quarto e último livro analisado, foi escrito por Luiz Roberto Dante e publicado pela Editora Ática, tendo sua terceira edição produzida em São Paulo, no ano de 2016. O livro tem um total de 408 páginas e está dividido em 04 unidades e 08 capítulos, que possuem abertura, atividades, seções e boxes.

A abertura é feita tanto da unidade quanto do capítulo, nelas são expostas imagens que retratam a aplicação do assunto a ser estudado em algumas situações do mundo físico. As atividades aparecem para ser resolvidas de diversas formas, seja, individualmente, em grupos ou com uso de calculadora, outras aparecem já resolvidas como forma de explicação de determinado conteúdo. As seções são inseridas neste livro como recurso para aprofundar a leitura de determinado assunto, para relacionar a matemática com outros contextos, etc. Já os boxes trazem questões para o estudante refletir ou dicas de determinado assunto, geralmente encontramos os boxes sendo nomeados por: Para refletir, Fique atento e Você sabia?

Fizemos nossa análise na unidade 4, intitulada por “Sequências e trigonometria”, mais especificamente o capítulo 8, que tem como tema “Trigonometria no triângulo retângulo”, ele tem início na página 235 e finaliza na página 260. No próximo tópico será apresentada as análises realizadas durante este estudo.

4 ANÁLISES DOS LIVROS DIDÁTICOS

Nesse capítulo vamos apresentar nossa produção e análise dos dados obtidos dos livros didáticos. Vamos explicar como se deu o processo de organização das Tarefas analisadas, quais as Técnicas presentes em cada Tipo de Tarefas. Ainda nesse capítulo, apresentaremos as Praxeologias Matemáticas e as Praxeologias Didáticas presentes nesses livros didáticos de matemática analisados.

4.1 ANÁLISE DAS PRAXELOGIAS MATEMÁTICAS DOS LIVROS DIDÁTICOS

Decidimos fazer nossa análise organizando os livros didáticos a serem analisados em três tópicos. No primeiro tópico apresentamos a análise dos dois livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental, no segundo tópico apresentamos os dados produzidos através da análise dos outros dois livros didáticos de matemática do Ensino Médio e no terceiro tópico mostramos como acontece a passagem das relações métricas no triângulo retângulo da etapa do Ensino Fundamental para a etapa do Ensino Médio.

Acreditamos que ao organizar desta forma, deixamos nossa pesquisa mais clara para a compreensão do leitor e evitamos também a repetição desnecessária da análise dos Tipos de Tarefas e Técnicas comuns entre os dois livros didáticos.

A princípio vamos apresentar os Tipos de Tarefas e seus subtipos acerca das relações métricas no triângulo retângulo, como também as Técnicas que forem mobilizadas para responder as Tarefas. Iniciaremos as análises nos livros “*Matemática Realidade & Tecnologia*” e “*Teláris Matemática*”, ambos do Ensino Fundamental. Faremos esse mesmo percurso com os livros “*#Contato Matemática*” e “*Matemática Contexto & Aplicações*” do Ensino Médio.

É importante ressaltar que não tivemos um modelo a *priore* para nos basearmos na identificação dos Tipos de Tarefas referentes as relações métricas no triângulo retângulo, pois em nossa revisão de literatura não encontramos pesquisas anteriores que tivessem esse modelo. As autoras: Souza, Prado, Silva e Espíndola (2016), publicaram um artigo sobre as relações métricas no triângulo retângulo em que a TAD é utilizada como ferramenta metodológica. Elas fazem uma análise do bloco “prático-técnico” e identificam um único Tipo de Tarefas que foi “*Calcular a medida de um segmento do triângulo retângulo por meio das relações métricas*”.

Como em nossa pesquisa vamos elaborar o quarteto praxeológico matemático, decidimos não tomar como modelo a pesquisa citada no parágrafo acima, por ela não nos

dar suporte suficiente na elaboração da Praxeologia Matemática e por acreditarmos que um único Tipo de Tarefas não deve ser tido como um modelo *a priori*.

Portanto, apresentamos a seguir no quadro 3 os Tipos de Tarefas encontrados por nós nessa pesquisa, para analisar as relações métricas no triângulo retângulo, esse filtro foi produzido a partir da caracterização praxeológicas identificadas nos livros didáticos que fizeram parte da nossa análise nesta pesquisa.

Quadro 3 – Filtro dos Tipos de Tarefas para análise das relações métricas no triângulo retângulo

Tipos de Tarefas
T _C – Calcular a medida de um segmento do triângulo retângulo por meio das relações métricas
T _D – Determinar o valor de uma medida de grandeza, em problema cujo enunciado comporta dados relativos as relações métricas no triângulo retângulo
T _I – Identificar os catetos e/ou a hipotenusa de um triângulo retângulo
T _T – Classificar triângulo retângulo quanto aos ângulos
T _V – Verificar as condições de existência das relações métricas no triângulo retângulo

Fonte: Autoria própria

Apresentamos no quadro 4 abaixo às Técnicas que foram identificadas também na análise dos livros desta pesquisa, para resolver as tarefas referentes ao ensino das relações métricas no triângulo retângulo. Destacamos que algumas das técnicas também podem tomar pra si o papel de tecnologia em algumas tarefas.

Quadro 4 – Técnicas identificadas nos livros didáticos analisados

Técnicas
$\tau_1 - a = m + n$
$\tau_2 - b^2 = a \cdot n$
$\tau_3 - c^2 = a \cdot m$
$\tau_4 - h^2 = m \cdot n$
$\tau_5 - b \cdot c = a \cdot h$
$\tau_6 - b \cdot h = c \cdot n$
$\tau_7 - c \cdot h = b \cdot m$
$\tau_8 - a^2 = b^2 + c^2$

Fonte: Autoria própria

No próximo tópico damos início a nossa análise das Praxeologias Matemática dos livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental.

4.1.1 Análise das Praxeologias Matemáticas dos Livros Didáticos do Ensino Fundamental

Nossa análise das Praxeologias Matemáticas dos livros didáticos do Ensino Fundamental foi produzida a partir da unidade 6 do “LD₁ – Matemática Realidade & Tecnologia” e do capítulo 6 do “LD₂ – Teláris Matemática”, por serem eles que abordam o ensino das relações métricas no triângulo retângulo.

Identificamos no primeiro livro 38 Tarefas, já no segundo livro temos uma quantidade bem maior que no primeiro, foram identificadas 77 Tarefas, todas sobre o saber matemático do nosso estudo. Apresentaremos a seguir uma tabela com os Tipos de Tarefas identificados nesses livros, e respectivamente a quantidade em que elas aparecem.

Tabela 1 – Tipos de Tarefas das relações métricas no triângulo retângulo dos LD do EF

	Tipos de tarefas	LD₁	LD₂
T _C	Calcular a medida de um segmento do triângulo retângulo por meio das relações métricas	15	47
T _D	Determinar o valor de uma medida de grandeza, em problema cujo enunciado comporta dados relativos as relações métricas no triângulo retângulo	11	13
T _I	Identificar os catetos e/ou a hipotenusa de um triângulo retângulo	5	-----
T _T	Classificar triângulo retângulo quanto aos ângulos	-----	2
T _V	Verificar as condições de existência das relações métricas no triângulo retângulo	7	15
Total		38	77

Fonte: Autoria própria

Podemos observar através dos dados apresentados na tabela 1 que nos dois livros o Tipo de Tarefas mais explorado foi o de T_C – “Calcular a medida de um segmento do triângulo retângulo por meio das relações métricas”, correspondendo a aproximadamente 39,4% e de 61% das tarefas identificadas no LD₁ e no LD₂, respectivamente.

Como segundo Tipo de Tarefas mais frequente, temos T_D – “Determinar o valor de uma medida de grandeza, em problema cujo enunciado comporta dados relativos as relações métricas no triângulo retângulo” no LD₁ e T_V – “Verificar as condições de existência das relações métricas no triângulo retângulo” no LD₂.

Sobre o Tipo de Tarefas T_I – “Identificar os catetos e/ou a hipotenusa de um triângulo retângulo”, como podemos ver na tabela 01, esse Tipo de Tarefas é explorado apenas pelo autor do LD₁. Em contrapartida o Tipo de Tarefas T_T – “Classificar triângulo quanto aos ângulos” é explorado apenas no LD₂.

Ainda sobre os Tipos de Tarefas identificados nesses livros didáticos, podemos notar que o Tipo de Tarefas menos explorado no LD₁ é T_I – “*Identificar os catetos e/ou a hipotenusa de um triângulo retângulo*”, com apenas cinco tarefas, já no LD₂ o Tipo de Tarefas foi o T_T – “*Classificar triângulo retângulo quanto aos ângulos*”, com duas tarefas apenas.

Após a caracterização das Tarefas, percebemos que nos Tipos de Tarefas T_C e T_D existem subtipos de tarefas, em que quatro estão em T_C e outros três em T_D, como iremos apresentar abaixo nas tabelas 2 e 3 respectivamente.

Tabela 2 – Subtipos da tarefa do Tipo T_C

	Subtipos de tarefa T_C	LD₁	LD₂
T _{C1}	Calcular a medida da altura relativa h à hipotenusa do triângulo retângulo.	04	14
T _{C2}	Calcular a medida do cateto c ou b do triângulo retângulo	05	12
T _{C3}	Calcular a medida da projeção m e/ou n do cateto sobre a hipotenusa.	02	03
T _{C4}	Calcular a medida da hipotenusa a	04	18
Total		15	47

Fonte: Autoria própria

Podemos observar através da tabela acima que os autores nesse momento se preocuparam em fazer uma divisão de subtipos de tarefa T_C de forma mais equilibrada com relação ao quantitativo de vezes que cada subtipo de tarefa é explorado. O subtipo de tarefa que foge um pouco desse equilíbrio nos dois livros didáticos é o T_{C3} – “*Calcular a medida da projeção m e/ou n do cateto sobre a hipotenusa*”.

Tabela 3 – Subtipos da tarefa do Tipo T_D

	Subtipos de tarefa T_D	LD₁	LD₂
T _{D1}	Determinar a medida do comprimento da diagonal de uma figura geométrica plana	05	01
T _{D2}	Determinar a medida do perímetro de uma figura geométrica plana	03	06
T _{D3}	Determinar a medida da área de uma figura geométrica plana	03	06
Total		11	13

Fonte: Autoria própria

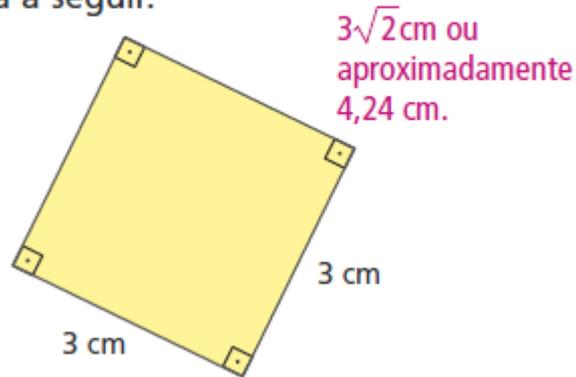
Na tabela 3 podemos observar que o autor do LD₁ continuou a explorar a quantidade de tarefas dentro dos subtipos de tarefa de forma equilibrada, já o autor do LD₂ priorizou o ensino dos subtipos de tarefa T_{D2} e T_{D3}.

A seguir apresentaremos um exemplo de cada Técnica ou do conjunto de Técnicas que foram identificadas nos livros, juntamente com o Tipo de Tarefas e seus respectivos subtipos.

Figura 4 – Exemplo do uso da Técnica: $t_8 - a^2 = b^2 + c^2$

4. Calcule as medidas das diagonais de cada figura a seguir.

a)

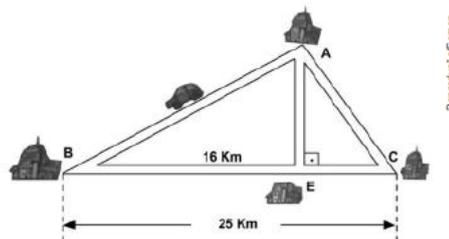


FONTE: Souza (2018 p. 185)

Conforme apresentado na figura 4, a Tarefa explorada pelo autor é ‘calcular a medida da diagonal’. Essa Tarefa faz parte do subtipo T_{D1} . A Técnica mobilizada aqui é o uso do Teorema de Pitágoras. Como podemos observar os valores dos catetos já estão expressos no enunciado, portanto basta traçar uma diagonal no quadrado e substituir os valores correspondentes a medida dos catetos como uso da $t_8 - a^2 = b^2 + c^2$ para descobrir o valor do comprimento da diagonal. Encontramos essa Técnica aplicada em 19 Tarefas do LD_1 e em 43 Tarefas do LD_2 .

Figura 5 – Exemplo do uso das Técnicas: $t_8 - a^2 = b^2 + c^2$ e $t_4 - h^2 = mn$

5 ▶ (Saresp) Um motorista vai da cidade A até a cidade E, passando pela cidade B, conforme mostra a figura.



Ele percorreu:

- a) 41 km. $(h^2 = 16 \times 9 \Rightarrow h = 12; (AB)^2 = 16^2 + 12^2$ ou $(AB)^2 = 25 \times 16$, com $AB > 0 \Rightarrow AB = 20$;
 b) 15 km. $P = 20 + 16 = 36$)
 c) 9 km.
 X d) 36 km.

FONTE: Dante (2018 p. 204)

Nessa Tarefa encontramos os subtipos T_{C1} e T_{C4} . O estudante precisa desenvolver três Técnicas, a primeira é usando a $t_4 - h^2 = mn$, para descobrir o valor da medida da altura

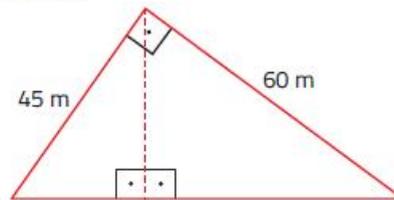
relativa à hipotenusa, em seguida usando a $t_8 - a^2 = b^2 + c^2$ para encontrar o valor da hipotenusa e por fim, utilizar o algoritmo da adição, para descobrir quantos **Km** esse motorista percorreu partindo da cidade **A** até a cidade **E**, passando pela cidade **B**. A combinação dessas Técnicas está presente apenas nessa Tarefa que apareceu no LD₂.

Figura 6 – Exemplo do uso das Técnicas: $t_8 - a^2 = b^2 + c^2$ e $ah = bc$

- 3 ▶ Em uma cidade, foi projetada uma praça com forma triangular, conforme esta figura.



216 m ($a^2 = 45^2 + 60^2$, com $a > 0 \Rightarrow a = 75$; $75 \times h = 45 \times 60 \Rightarrow h = 36$; $45 + 60 + 75 + 36 = 216$)
 Calcule no caderno qual será a medida de comprimento total das passarelas (indicadas em cinza na figura) dessa praça. (Dica: Use este modelo matemático da praça.)

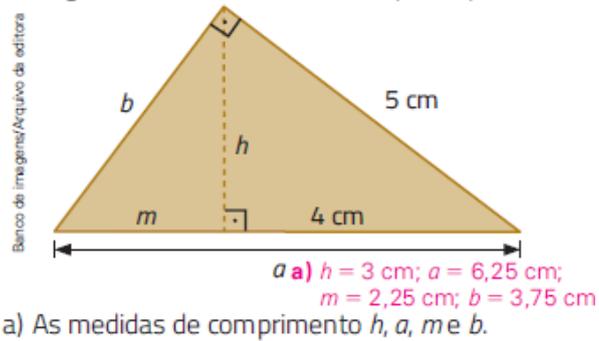


FONTE: Dante (2018 p. 205)

Ao realizar essa Tarefa o estudante terá que desenvolver mais de uma Técnica. A primeira consiste em realizar o cálculo do Teorema de Pitágoras para encontrar o valor da hipotenusa. Na segunda tarefa ele deve através da $t_5 - bc = ah$ encontrar a medida do comprimento da altura do triângulo retângulo. Por último, usar o algoritmo da adição para descobrir o comprimento total das passarelas dessa praça ao somar todos os lados da figura. Assim como no exemplo anterior a combinação dessas duas Tarefas aparece apenas no LD₂ e os subtipos de tarefas explorados aqui são T_{C1} e T_{C4}.

Figura 7 – Exemplo do uso das Técnicas: $t_8 - a^2 = b^2 + c^2$; $t_4 - h^2 = mn$ e $t_1 - a = m + n$

- 14 ▶ Considere as medidas de comprimento dadas nesta região triangular, limitada por um triângulo retângulo, e calcule no caderno o que se pede.

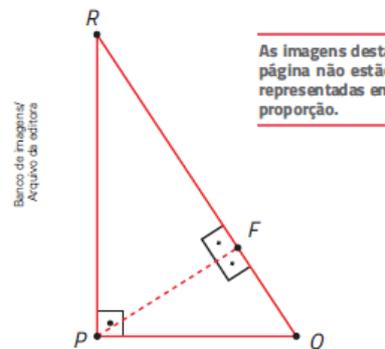


FONTE: Dante (2018 p. 195)

Essa Tarefa comporta os subtipos de tarefa TC_1 , TC_2 , TC_3 e TC_4 . Isso faz com que seja necessário o uso de mais de uma Técnica, como veremos a seguir. A princípio ele terá que pelo Teorema de Pitágoras encontrar o valor do comprimento da altura h relativa à hipotenusa, em seguida, deve encontrar o valor do comprimento m através da $t_4 - h^2 = mn$, após descobrir o valor de m basta aplicar a $t_1 - a = m + n$ para descobrir o valor da hipotenusa a . Para descobrir o valor de b deve utilizar novamente o Teorema de Pitágoras, encontrando assim todas as medidas de comprimento que é posto no enunciado. Esse conjunto de Técnicas foi encontrado apenas nessa Tarefa no LD₂.

Figura 8 – Exemplo do uso das Técnicas: $t_8 - a^2 = b^2 + c^2$; $t_4 - h^2 = mn$; $t_1 - a = m + n$ e $t_5 - bc = ah$

- 1 ▶ Considere o triângulo retângulo desta figura.



A única afirmação que não vale para ele é:

- a) $(PF)^2 = (RF) \cdot (QF)$.
 b) $(FQ)^2 + (PF)^2 = (PQ)^2$.
 x c) $(RF)^2 = (RQ) \cdot (PR)$.
 d) $(RQ) \cdot (PF) = (RP) \cdot (PQ)$.
 e) $(RF) + (FQ) = QR$.

FONTE: Dante (2018 p. 203)

Temos na figura 8 o Tipo de Tarefas T_V , nele o estudante terá que identificar, através de semelhança de triângulos, quais dos itens dados são relações métricas no triângulo retângulo. Ele deve no item **a** fazer uso de $t_4 - h^2=mn$, no item **b** usar a $t_8 - a^2=b^2+c^2$, no item **c** ele deve identificar que essa é a única relação das que foram apresentadas na atividade que não é possível obter, no item **d** a Técnica aplicada foi a $t_5 - bc=ah$, já no item **e** é a Técnica $t_1 - a=m+n$. Esse conjunto de Técnicas foi utilizado apenas nessa Tarefa que se encontra no LD₂.

Figura 9 – Exemplo do uso das Técnicas: $t_8 - a^2=b^2+c^2$; $t_4 - h^2=mn$; $t_1 - a=m+n$; $t_5 - bc=ah$ e $t_3 - c^2=an$

1 ▶ Este $\triangle ABC$ é retângulo em A

Banco de imagens/Aquivo da editora

Copie o triângulo no caderno e copie também as relações métricas indicadas abaixo. Em cada uma delas, complete com a medida de comprimento que está faltando.

- $r + s = \square z$
- $x^2 = z \cdot \square r$
- $p^2 = r \cdot \square s$
- $x \cdot y = z \cdot \square p$
- $z^2 = x^2 + \square y^2$
- $r^2 + p^2 = \square x^2$

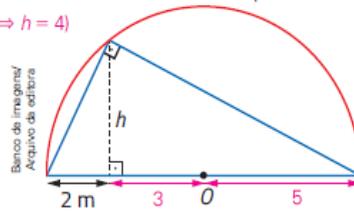
FONTE: Dante (2018 p. 205)

Esse exemplo da figura 9 também é do Tipo de Tarefas T_V , é parecido com o anterior em que precisa verificar se as relações dadas estão corretas. Neste exemplo aqui, além de verificar as relações o estudante precisa completá-las com a medida do comprimento que está faltando, outra coisa que também faz com que se distingue da anterior, é a quantidade de Técnicas presentes. Nesta temos a $t_3 - c^2=an$, que não apareceu na anterior e a $t_8 - a^2=b^2+c^2$ que nessa aparece para ser verificada no triângulo maior e no menor. O uso dessa combinação de Técnicas está presente somente nesta Tarefa do LD₂.

Figura 10 – Exemplo do uso da Técnica: $t_4 - h^2=mn$

- 31 ▶ Determine no caderno a medida de comprimento da altura relativa à hipotenusa deste triângulo retângulo sabendo que o raio da circunferência tem medida de comprimento de 5 m.

$$4 \text{ m } (h^2 = 2 \times 8 \Rightarrow h^2 = 16, \text{ com } h > 0 \Rightarrow h = 4)$$

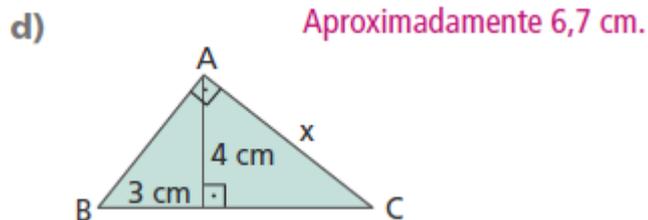


FONTE: Dante (2018 p. 198)

Essa Tarefa é mais uma do subtipo T_{C1} . Como podemos observar o enunciado já fornece vários dados. Para conseguir encontrar a medida do comprimento da altura relativa à hipotenusa o estudante precisa lembrar que o raio de uma circunferência é metade do seu diâmetro, feito isso ele perceberá que o lado oposto ao ângulo reto é a hipotenusa desse triângulo com seu comprimento medindo 10m. Por último, ele precisa substituir os valores utilizando a $t_4 - h^2 = mn$ e então descobrir o que a Tarefa pede. Essa Técnica apareceu em uma tarefa do LD_1 e em três no LD_2 .

Figura 11 – Exemplo do uso das Técnicas: $t_4 - h^2 = mn$ e $t_3 - c^2 = an$

3. Em cada triângulo retângulo a seguir, calcule o valor da medida x.

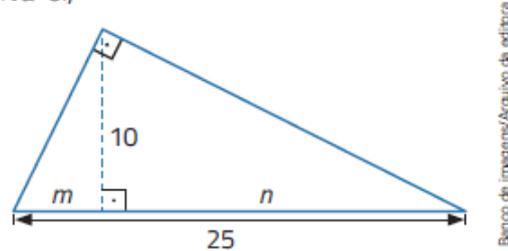


FONTE: Souza (2018 p. 182)

Nessa Tarefa o estudante terá que mobilizar duas Técnicas pra conseguir encontrar o valor da medida X , a primeira é utilizando a $t_4 - h^2 = mn$ para descobrir o valor da medida de n , em seguida deve usar a $t_3 - c^2 = an$, chegando ao resultado do valor da medida X . Essa combinação de Técnica aparece somente essa vez e no LD_1 . Os subtipos de tarefa presentes neste exemplo são T_{C2} e T_{C3} .

Figura 12 – Exemplo do uso das Técnicas: $t_4 - h^2 = mn$ e $t_1 - a = m + n$

- 20 ▶ Desafio.** Determine no caderno os valores de m e n nesta figura, com $m < n$. (Sugestão: Monte um sistema de equações com incógnitas m e n e resolva-o.)

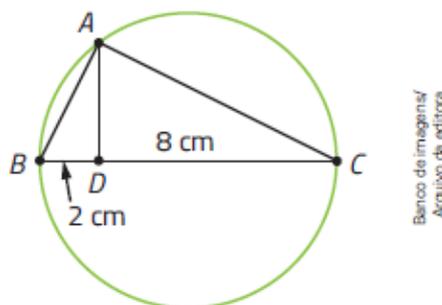


FONTE: Dante (2018 p. 195)

Como podemos observar na figura 12 acima os dados fornecidos são a medida da altura relativa à hipotenusa e o valor da medida da hipotenusa. O que o autor quer que o estudante encontre é a medida de m e n . O autor ainda sugere no enunciado que se monte um sistema de equação usando as incógnitas m e n . Então para montar o sistema que permita encontrar os valores das incógnitas o estudante terá que usar as Técnicas $t_1 - a=mn$ e $t_4 - h^2=mn$, encontrando a resposta ao resolver o sistema de equação, $m=5$ e $n=20$. Esse exemplo pertence ao subtipo de tarefa Tc3 e a combinação dessas Técnicas foram usadas 3 vezes apenas pelo o autor do LD₂.

Figura 13 – Exemplo do uso das Técnicas: $t_4 - h^2=mn$; $t_1 - a=m+n$; $t_3 - c^2=an$ e $t_2 - b^2=am$

- 39 ▶** Este triângulo ABC é retângulo, pois está inscrito em uma semicircunferência e a hipotenusa do triângulo coincide com o diâmetro da circunferência. As projeções das cordas \overline{AB} e \overline{AC} sobre a hipotenusa têm medidas de comprimento de 2 cm e 8 cm, respectivamente. Qual é a medida de comprimento dessas cordas?

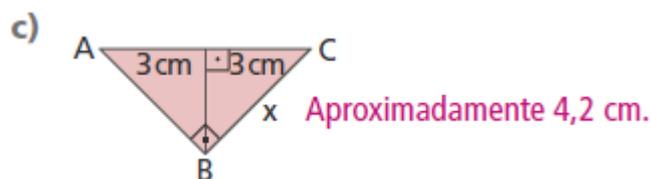


FONTE: Dante (2018 p. 201)

Nessa Tarefa o subtipo explorado é o T_{C2} . O autor espera que o estudante seja capaz de encontrar as medidas dos comprimentos das cordas \overline{AB} e \overline{AC} . Para isso, ele terá que mobilizar mais de uma Técnica. A primeira consiste em o estudante através dos dados informados na questão deduzir que a medida do comprimento da hipotenusa é de 10cm, em seguida encontrar a medida do comprimento da altura relativa à hipotenusa, pela Técnica $t_4 - h^2 = m \cdot n$. Por último ele deve aplicar as Técnicas $t_2 - b^2 = am$ e $t_3 - c^2 = an$ (sendo a a medida de comprimento da hipotenusa do triângulo) para encontrar respectivamente as medidas de comprimento das cordas \overline{AB} e \overline{AC} . Esse conjunto de Técnicas foi encontrado apenas nessa Tarefa que pertence ao LD_2 .

Figura 14 – Exemplo do uso da Técnica: $t_3 - c^2 = an$

3. Em cada triângulo retângulo a seguir, calcule o valor da medida x .

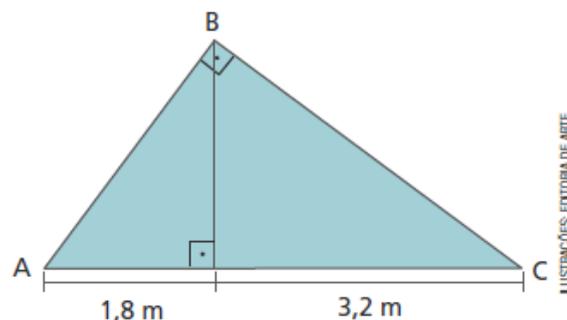


FONTE: Souza (2018 p. 182)

Para responder essa Tarefa basta fazer uso apenas de uma Técnica. Como já conhecemos o valor da hipotenusa e das projeções é só substituir esses valores utilizando a Técnica $t_3 - c^2 = an$, feito isso o resultado encontrado será o valor da medida x . Essa Tarefa está inserida no subtipo T_{C2} . Essa Técnica aparece apenas em uma Tarefa do LD_1 .

Figura 15 – Exemplo do uso das Técnicas: $t_3 - c^2 = an$; $t_2 - b^2 = am$ e $t_1 - a = m + n$

7. Calcule o perímetro e a área do triângulo retângulo a seguir. Perímetro: 12 m; área: 6 m².

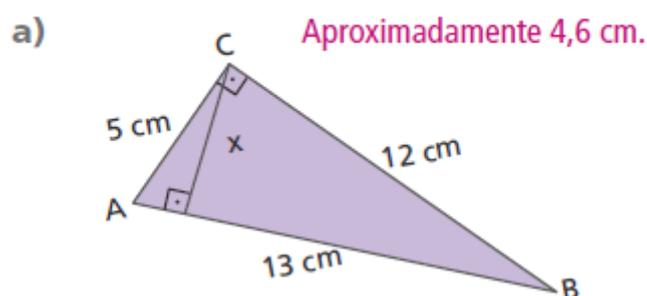


FONTE: Souza (2018 p. 182)

Nessa Tarefa os subtipos presentes são o T_{D2} e T_{D3} . Para desenvolver essa Tarefa será preciso o uso de algumas Técnicas. Primeiro vamos somar as medidas do comprimento das projeções para descobrir o valor da hipotenusa pela $t_1 - a=m+n$, em seguida devemos encontrar a medida do comprimento dos lados desse triângulo que corresponde aos catetos, para isso aplicamos os valores da medida das projeções e da hipotenusa através das $t_2 - b^2=am$ e $t_3 - c^2=an$. Como agora já se conhece todos os valores que precisa pra descobrir o perímetro e a área do triângulo é só substituir os valores em suas respectivas fórmulas e calcular. Esse conjunto de Tarefa é usado pelo autor do LD₁ em 4 Tarefas e em 1 uma Tarefa pelo autor do LD₂.

Figura 16 – Exemplo do uso da Técnica: $t_5 - bc=ah$

3. Em cada triângulo retângulo a seguir, calcule o valor da medida x .

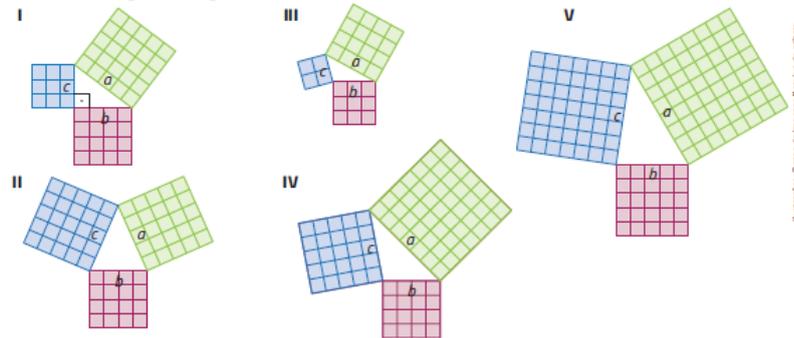


FONTE: Souza (2018 p. 182)

Essa Tarefa da figura 16 faz parte do subgrupo T_{C1} e aparece com o uso dessa Técnica apenas no LD₁. Ao observarmos o enunciado da Tarefa podemos perceber que ele já traz várias medidas. O enunciado pede para encontrar o valor da medida X , basta então usar a Técnica $t_5 - ah=bc$, ao substituir os valores na relação dada encontramos a medida referente a h que corresponde ao valor da medida de X .

Figura 17 – Tipo de Tarefas T_T

- 2 > Copie esta tabela no caderno e complete-a usando os triângulos das figuras. Registre a classificação de triângulo quanto aos ângulos: acutângulo, obtusângulo ou retângulo. Depois, constate que o teorema de Pitágoras só vale nos triângulos retângulos.



Triângulo	Tipo de triângulo	a^2	$b^2 + c^2$	a^2 é igual a $b^2 + c^2$?
I	Retângulo	25	16 + 9	Sim
II	Acutângulo	25	16 + 25	Não
III	Obtusângulo	16	9 + 4	Não
IV	Obtusângulo	49	16 + 25	Não
V	Acutângulo	64	25 + 49	Não

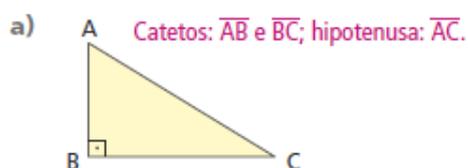
Tabela elaborada para fins didáticos.

FONTE: Dante (2018 p. 187)

Nessa atividade encontramos dois Tipos de Tarefas, T_T e T_V . Como o Tipo de Tarefas T_V já foi exemplificado anteriormente vamos nesse exemplo tratar do Tipo de Tarefas T_T . Como podemos observar na figura acima o autor pede que se complete a tabela com a classificação dos triângulos quanto aos ângulos observando os triângulos das figuras. Como em nossa pesquisa o ‘saber matemático’ estudado é as relações métricas no triângulo retângulo consideramos como Tarefa apenas a figura I por ser ela a única que satisfaz a relação $a^2 = b^2 + c^2$ e nos permitindo assim fazer a classificação do triângulo retângulo. É importante ressaltar que esse Tipo de Tarefas T_T , está presente apenas no LD₂.

Figura 18 – Tipo de Tarefas T_I

1. Para cada triângulo retângulo representado a seguir, indique os catetos e a hipotenusa.



FONTE: Souza (2018 p. 181)

Nesse Tipo de Tarefas T_I não encontramos uma Técnica que seja justificada por uma Tecnologia ou uma Teoria em específico, pois para resolução dela observamos quais os lados que estão formando o ângulo reto para identificarmos os catetos, enquanto o lado que está oposto a esse ângulo reto será a hipotenusa.

Ao observar essa análise dos livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental adotados em nossa pesquisa, podemos perceber que os dois autores exploram quatro Tipos de Tarefas, mas apenas três desses tipos é comum nos dois livros. O autor do LD₁ traz uma quantidade de Tarefas bem menor que o autor do LD₂, porém o autor do LD₁ tenta distribuí-las de forma mais equilibrada entre os Tipos de Tarefas.

Quanto ao uso das Técnicas, os dois autores aplicam o Teorema de Pitágoras como principal Técnica na resolução das Tarefas sobre as relações métricas no triângulo retângulo. Destacamos aqui que o autor do LD₂ na maioria de suas Tarefas tenta mobilizar várias Técnicas juntas para conseguir chegar a resolução da atividade.

4.1.2 Análise das Praxeologias Matemáticas dos Livros Didáticos do Ensino Médio

As análises das Praxeologias Matemáticas dos livros didáticos do Ensino Médio foram produzidas a partir do capítulo 9 do “LD₃ – #Contato Matemática” e da unidade 4, capítulo 8 do “LD₄ – Matemática Contexto & Aplicações”, por serem eles que abordam o ensino das relações métricas no triângulo retângulo. No LD₃ identificamos 09 Tarefas, já no LD₄ foram identificadas 10 Tarefas, todas referentes ao ‘saber matemático’ do nosso estudo. Na tabela a seguir estão os Tipos de Tarefas identificados nesses livros e a quantidade de vezes que aparecem.

Tabela 4 – Tipos de Tarefas das relações métricas no triângulo retângulo dos LD do EM

	Tipos de Tarefas	LD₃	LD₄
T _C	Calcular a medida de um segmento do triângulo retângulo por meio das relações métricas	06	10
T _D	Determinar o valor de uma medida de grandeza, em problema cujo enunciado comporta dados relativos as relações métricas no triângulo retângulo	01	-----
T _I	Identificar os catetos e/ou a hipotenusa de um triângulo retângulo	01	-----
T _V	Verificar as condições de existência das relações métricas no triângulo retângulo	01	-----
Total		09	10

Fonte: Autoria própria

Observando os dados apresentados na tabela 4, podemos notar que nos dois livros o Tipo de Tarefas mais recorrente é o de T_C – “Calcular a medida de um segmento do triângulo retângulo por meio das relações métricas”, correspondendo a aproximadamente 66,6% e de 100% das tarefas identificadas no LD₃ e no LD₄, respectivamente. Sendo no LD₄ o único Tipo de Tarefas explorado pelo autor acerca das relações métricas no triângulo retângulo.

Observando ainda a tabela 4, podemos notar que o autor do LD₃ explora mais três Tipos de Tarefas: T_D – “Determinar o valor de uma medida de grandeza, em problema cujo

enunciado comporta dados relativos as relações métricas no triângulo retângulo”, T_I – “Identificar os catetos e/ou a hipotenusa de um triângulo retângulo” e T_V – “Verificar as condições de existência das relações métricas no triângulo retângulo”.

Após a caracterização das Tarefas, percebemos que no Tipo de Tarefas T_C existem subtipos de tarefas. Classificamos esses subtipos de tarefas em quatro subtipos, como mostraremos na tabela 5 abaixo.

Tabela 5 – Subtipos da tarefa do Tipo T_C

	Subtipos de tarefa T_C	LD ₃	LD ₄
T_{C1}	Calcular a medida da altura relativa h à hipotenusa do triângulo retângulo.	-----	03
T_{C2}	Calcular a medida do cateto c ou b do triângulo retângulo	04	03
T_{C3}	Calcular a medida da projeção m e/ou n do cateto sobre a hipotenusa.	-----	02
T_{C4}	Calcular a medida da hipotenusa a	02	02
Total		06	10

Fonte: Autoria própria

Observamos através da tabela 5 que o autor do LD₄ faz uma divisão mais igualitária entre a quantidade de Tarefas nos subtipos de tarefa apresentados, enquanto os autores do LD₃ exploram apenas dois desses quatro subtipos. A seguir apresentaremos exemplos de todos os Tipos de Tarefas e subtipos, juntamente com as Técnicas mobilizadas para responder as Tarefas que encontramos nesses livros didáticos de matemática do Ensino Médio.

Figura 19 – Exemplo do uso das Técnicas: $t_1 - a = m + n$; $t_2 - b^2 = am$ e $t_3 - c^2 = an$

30. Em um triângulo retângulo, a razão entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa é $\frac{9}{16}$. Sabendo que a hipotenusa mede 10 cm, calcule a medida dos catetos. **6 cm e 8 cm.**

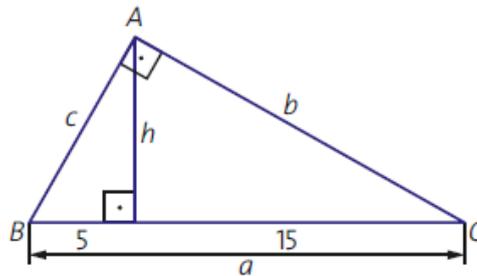
FONTE: Dante (2016 p. 248)

Temos no exemplo da figura 19 o subtipo de tarefa T_{C2} , para responder essa Tarefa o estudante terá que mobilizar mais de uma Técnica. Inicialmente ele deve construir um sistema de equação. A primeira equação será construída pela razão entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa que é de $\frac{9}{16}$. A segunda equação deve ser construída a partir da utilização da $t_1 - a = m + n$, pois temos que $m + n = 10$, logo podemos isolar n e obter a equação $n = 10 - m$. Em seguida ao substituir a segunda equação na primeira, obtemos o valor da medida de m e a partir dela podemos encontrar também o valor da medida de n na relação já mencionada aqui. Por fim, para descobrir os valores das medidas encontradas deve-se

usar as Técnicas $t_2 - b^2=am$ e $t_3 - c^2=an$.

Figura 20 – Exemplo do uso das Técnicas: $t_1 - a=m+n$; $t_2 - b^2=am$; $t_3 - c^2=an$ e $t_5 - bc=ah$

28. Calcule as medidas b , c e h indicadas no triângulo retângulo a seguir. $b = 10\sqrt{3}$; $c = 10$; $h = 5\sqrt{3}$



FONTE: Dante (2016 p. 248)

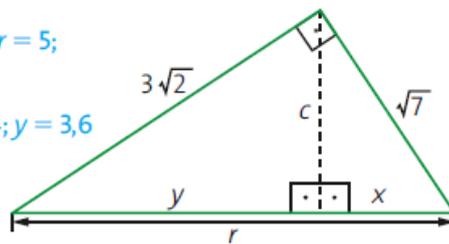
Nessa Tarefa exemplificada na figura 20, encontramos os subtipos T_{C1} e T_{C2} . Será necessário o uso de várias Técnicas, a primeira é a $t_1 - a=m+n$. Como já conhecemos as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa, fazemos a soma dos dois que descobriremos quanto mede a hipotenusa. Para descobrir as medidas dos catetos b e c , aplicamos as medidas das projeções e da hipotenusa através das Técnicas $t_2 - b^2=am$ e $t_3 - c^2=an$. Por fim, para encontrarmos a medida de h usamos a $t_5 - bc=ah$.

Figura 21 – Exemplo do uso das Técnicas: $t_8 - a^2=b^2+c^2$; $t_5 - bc=ah$; $t_3 - c^2=an$ e $t_1 - a=m+n$

29. Calcule os valores de c , r , x e y do triângulo abaixo.

$$c = \frac{3\sqrt{14}}{5}; r = 5;$$

$$x = \frac{7}{5} \text{ ou } 1,4; y = 3,6$$



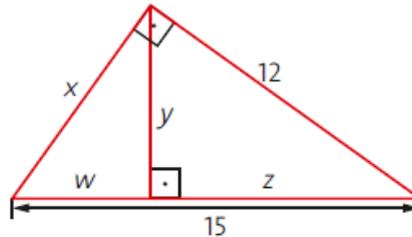
FONTE: Dante (2016 p. 248)

Encontramos nessa Tarefa da figura 21 os subtipos T_{C1} , T_{C3} e T_{C4} . A primeira Técnica que deve ser mobilizada na resolução dessa Tarefa é relação métrica do Teorema de Pitágoras, para descobrir o valor da medida de r . Em seguida podemos encontrar a medida do comprimento de c através do uso da $t_5 - bc=ah$. Dando continuidade na resolução da Tarefa, podemos agora calcular o valor de n pela $t_3 - c^2=an$. Por último podemos

encontrar o valor da medida de y pela $t_1 - a = m + n$.

Figura 22 – Exemplo do uso das Técnicas: $t_8 - a^2 = b^2 + c^2$; $t_2 - b^2 = am$; $t_3 - c^2 = an$ e $t_5 - bc = ah$

27. Determine o valor de x , y , z e w no triângulo retângulo abaixo. $x = 9$; $y = \frac{36}{5}$; $z = \frac{48}{5}$; $w = \frac{27}{5}$



FONTE: Dante (2016 p. 248)

A Tarefa da figura 22 é formada pelos subtipos de tarefa T_{C1} , T_{C2} e T_{C3} . Podemos iniciar sua resolução a partir da utilização do Teorema de Pitágoras como Técnica para encontrarmos a medida do valor de x . Para encontrar o valor da medida de w , podemos usar a $t_3 - c^2 = an$. Em seguida podemos encontrar a medida de z pela $t_2 - b^2 = am$. Finalizando a resolução dessa Tarefa, podemos encontrar o valor da medida de y pela $t_5 - bc = ah$.

Figura 23 – Exemplo do uso da Técnica: $t_8 - a^2 = b^2 + c^2$

- 15.** Em cada item estão indicadas as medidas, em centímetros, dos lados de um triângulo.
- ΔABC : 3, 2 e 4
 - ΔGHI : 8, 16 e $8\sqrt{5}$
 - ΔDEF : 10, $\sqrt{149}$ e 7
 - ΔJKL : $9\sqrt{3}$, 14 e 13
- a) Quais dos triângulos possuem um ângulo reto?
 ΔDEF e ΔGHI

FONTE: Souza e Garcia (2016 p. 243)

O Tipo de Tarefas presente no exemplo da figura 23 é o T_V . Para resolução dele devemos fazer a validação das condições de existência desses triângulos através do uso da $t_8 - a^2 = b^2 + c^2$ (Teorema de Pitágoras) para verificarmos quais dos triângulos tem um ângulo reto. É importante destacar aqui que essa Técnica é usada em todas as tarefas do LD_3 .

Figura 24 – Exemplo do uso da Técnica: $t_8 - a^2 = b^2 + c^2$ em Tarefas do tipo T_D

- 17.** Determine a medida da diagonal de um retângulo de perímetro 98 cm, sabendo que a razão entre as medidas do menor e do maior lado é $\frac{3}{4}$. 35 cm

FONTE: Souza e Garcia (2016 p. 243)

A figura 24 acima apresenta o Tipo de Tarefas T_D , para descobrir a medida da diagonal desse exemplo, inicialmente devesse fazer a razão entre as medidas do menor e do maior lado desse retângulo, obtendo a expressão $y = \frac{3x}{4}$. Sabemos que o perímetro mede 98cm, logo podemos concluir que $x+y=49$, então ao substituir y na expressão é possível determinar o valor de x e y que correspondem a medida dos lados do retângulo. Por fim para encontrar a medida da diagonal aplicamos a $t_8 - a^2 = b^2 + c^2$.

Figura 25 – Exemplo do Tipo de Tarefas identificar os catetos e/ou a hipotenusa de um triângulo retângulo

15. Em cada item estão indicadas as medidas, em centímetros, dos lados de um triângulo.

- ΔABC : 3, 2 e 4
- ΔDEF : 10, $\sqrt{149}$ e 7
- ΔGHI : 8, 16 e $8\sqrt{5}$
- ΔJKL : $9\sqrt{3}$, 14 e 13

a) Quais dos triângulos possuem um ângulo reto?
 ΔDEF e ΔGHI

b) Em relação aos triângulos que você indicou no item a, determine a medida da hipotenusa.
 ΔDEF : $\sqrt{149}$ cm; ΔGHI : $8\sqrt{5}$ cm

FONTE: Souza e Garcia (2016 p. 243)

Essa atividade foi retirada do LD₃, o item analisado nesse exemplo é o item **b** da figura 25 acima. A Tarefa proposta é identificar qual das medidas dos triângulos DEF e GHI é a hipotenusa. Para chegar a resposta esperada, não existe uma Técnica que possa ser justificada por o bloco tecnológico-teórico, ela pode ser resolvida observando que a hipotenusa é o maior valor das medidas apresentadas em cada triângulo.

Ao analisar as Praxeologias Matemáticas dos livros didáticos de matemática do Ensino Médio, observamos que os autores do LD₃ abordam poucas Tarefas sobre o ensino das relações métricas no triângulo retângulo, mas tentam explorar os Tipos de Tarefas de forma equilibrada, como já vimos, eles trabalharam com quatro Tipos de Tarefas.

Sobre as Técnicas usadas por esses autores, percebemos que eles dão ênfase ao uso do Teorema de Pitágoras, nas nove Tarefas que eles trouxeram, oito delas fizeram o uso dessa Técnica. A única Tarefa que se diferenciou foi o Tipo de Tarefas T_I que para ser respondida não se tem uma Técnica específica, ela é resolvida mediante observação da maior medida entre as três apresentadas.

O autor do LD₄ também traz uma quantidade pequena de Tarefas, porém ele faz o caminho contrário dos autores do LD₃, ele explora apenas um Tipo de Tarefas e em

compensação ele usa várias Técnicas para responder as Tarefas. Observamos que para responder a maioria das Tarefas ele explora não apenas uma Técnica por Tarefa e sim um conjunto de Técnicas.

A seguir apresentaremos a análise das Praxeologias Didáticas dos livros didáticos de matemática adotados em nossa pesquisa, acerca das relações métricas no triângulo retângulo.

4.2 ANÁLISE DAS PRAXELOGIAS DIDÁTICAS DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

Para nossa análise das Praxeologias Didáticas adotamos como critério os seis momentos de estudo propostos por Chevallard (1999), que são eles: ‘primeiro encontro’, ‘exploração do Tipo de Tarefas e de elaboração de uma Técnica’, ‘constituição do ambiente tecnológico-teórico’, ‘trabalho da Técnica’, ‘institucionalização’ e ‘avaliação’. É importante lembrar que esses momentos não definem uma ordem cronológica, será a partir da análise dos livros didáticos que vamos entender como os autores estruturam essa organização.

A análise das Praxeologias Didáticas nos permite entender como é ensinado determinado ‘saber matemático’, no nosso caso como as relações métricas no triângulo retângulo estão sendo ensinadas na Instituição livro didático. A seguir apresentamos as análises das Praxeologias Didáticas dos livros didáticos do Ensino Fundamental.

4.2.1 Análise das Praxeologias Didáticas dos Livros Didáticos do Ensino Fundamental

No livro didático ‘Matemática Realidade & Tecnologia’ de Joamir Souza – LD₁, o ‘primeiro momento’ acontece através das situações fundamentais, em que as relações métricas no triângulo retângulo são apresentadas, a partir da semelhança de triângulos e de recordações de alguns elementos do triângulo, como a soma dos ângulos internos. Ou seja, dentro do ‘primeiro momento’ acontece outros momentos como a ‘apresentação da institucionalização’ e o da ‘justificativa da Técnica’. A seguir temos uma figura para ilustrar um recorte desse momento.

Figura 26 – Exemplo do primeiro momento no LD₁ do EF

Relações métricas no triângulo retângulo

Você se lembra do que é um triângulo retângulo? Estudamos, em anos anteriores, que um triângulo é classificado dessa maneira quando possui um ângulo interno reto, ou seja, medindo 90°. Agora, ampliaremos esse estudo discutindo relações em um triângulo retângulo. Para isso, inicialmente, observe como podem ser nomeados os lados de um triângulo retângulo.

Cateto: um dos lados que formam o ângulo reto.

Hipotenusa: lado oposto ao ângulo reto. Esse é o maior lado do triângulo retângulo.

Agora, vamos traçar o segmento de reta AD correspondente à altura desse triângulo relativa à hipotenusa.

Assim, podemos considerar três triângulos retângulos obtidos: ABC, DBA e DAC. Observe.

Vamos verificar que esses triângulos são semelhantes dois a dois. Observe.

- Triângulos ABC e DBA.

Note que esses triângulos possuem dois pares de ângulos internos correspondentes congruentes: ângulos BAC e BDA e ângulos ABC e DBA.

Portanto, pelo caso AA, temos que os triângulos ABC e DBA são semelhantes.

- Triângulos ABC e DAC.

Note que esses triângulos possuem dois pares de ângulos internos correspondentes congruentes: ângulos BAC e ADC e ângulos ACB e DCA.

Portanto, pelo caso AA, temos que os triângulos ABC e DAC são semelhantes.

- Triângulos DBA e DAC.

Como já concluímos que cada um desses dois triângulos é semelhante ao triângulo ABC, podemos afirmar que os triângulos DBA e DAC são semelhantes entre si.

Em um triângulo retângulo ABC, quando traçamos a altura relativa à hipotenusa, obtemos dois triângulos semelhantes ao triângulo ABC e semelhantes entre si.

Agora, considere o triângulo retângulo ABC a seguir cuja altura \overline{AD} relativa à hipotenusa está traçada.

Com base nas semelhanças de triângulos observadas anteriormente, podemos escrever proporções envolvendo as medidas dos lados dos triângulos obtidos. Observe.

- Triângulos ABC e DBA.

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \rightarrow ah = bc$$

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \rightarrow c^2 = an$$

$$\frac{b}{h} = \frac{c}{n} \rightarrow ch = bn$$

FONTE: Souza (2018 p. 178-179)

No livro didático ‘Teláris Matemática’ de Dante – TD₂, o ‘primeiro momento’ acontece de maneira contrária ao LD₁, ele apresenta o ‘primeiro momento’ através do encontro mimético-cultural. O autor apresenta na abertura do capítulo uma situação ilustrando um triângulo retângulo, demonstrando sobre as relações métricas no triângulo retângulo, o que é formado através de um fio esticado do topo de um prédio até o ponto mais alto de uma árvore, as medidas dos lados são apresentadas na ilustração, porém para a medida do comprimento do fio (hipotenusa do triângulo) é lançada uma pergunta na página seguinte, mas o autor nesse momento não pede que ela seja respondida, ele diz que para descobrir essa medida é preciso de um teorema que será estudado no capítulo. Como podemos ver em um recorte na figura abaixo.

Figura 27 – Exemplo do primeiro momento no LD₂ do EF



FONTE: Dante (2018 p. 182)

A exploração do Tipo de Tarefas e da elaboração da Técnica acontece de forma semelhante nos dois livros, após o ‘primeiro momento’, através do Tipo de Tarefas T_C – “Calcular a medida de um segmento do triângulo retângulo por meio das relações métricas”, o autor do LD_1 apresenta um exemplo resolvido usando as relações métricas no triângulo retângulo para calcular algumas medidas desse triângulo.

Já o autor do LD_2 apresenta inicialmente o Teorema de Pitágoras como Técnica, através de uma constatação concreta do caso particular do triângulo retângulo, cujos lados têm medidas de comprimento de 3, 4 e 5 unidades. Outras Técnicas são elaboradas posteriormente no momento da ‘institucionalização’ das relações métricas no triângulo retângulo por meio das demonstrações dessas relações usando semelhança de triângulos. Destacamos aqui que o Teorema de Pitágoras é uma ampliação da Técnica por ser construído a partir de relações métricas já demonstradas. Como os dois autores fazem a ‘exploração do Tipo de Tarefas e da elaboração da Técnica’ de forma semelhante, apresentaremos apenas um exemplo desse momento na figura a seguir.

Figura 28 – Exemplo da exploração do Tipo de Tarefas e da elaboração da Técnica no LD do EF

deve ser realizado de forma contínua e prolongada em que se deve construir estratégias de avaliação e trabalhar também com o erro. Ele ainda sugere alguns instrumentos de avaliação como: prova escrita, prova escrita em fases, prova-escrita-com-cola, trabalho em grupo, seminário, portfólio e autoavaliação.

O autor do LD₂ também traz um pensamento parecido com o do autor do LD₁. Ele fala que a ‘avaliação’ deve servir para entender como está se realizando o processo de ensino-aprendizagem, tanto por parte da equipe escolar como também para cada aluno verificar o seu próprio desempenho, ele acredita que a ‘avaliação’ deve ser formativa. Quanto aos instrumentos de avaliação ele sugere o uso de: observação e registro, provas, testes, trabalhos, entrevistas, conversas informais e autoavaliação. Todos visando entender os aspectos matemáticos.

Observando a análise das Praxeologias Didáticas nos dois livros, percebemos que o autor do LD₁ traz uma abordagem tradicional das relações métricas no triângulo retângulo, em que a aprendizagem acontece de forma a responder Tarefas quase sempre por meio de aplicações de fórmulas prontas. Foram poucos os momentos em que o autor se preocupou em relacionar esse ‘saber matemático’ com algo que esteja presente na realidade do estudante ou em apresentar como ele surgiu historicamente, o que se difere do autor do LD₂, que tenta relacionar as Tarefas exploradas em seu livro com situações da realidade do estudante e em mostrar a ele um pouco da história desse ‘saber matemático’.

Outra coisa importante que pudemos observar foi que os Tipos de Tarefas no LD₁ são explorados de forma mais equilibrada com relação ao quantitativo de vez em que aparecem, enquanto o autor do LD₂ prioriza o Tipo de Tarefas T_C, tornando o processo de aprendizagem dele mecânico pela quantidade de repetições que o estudante é obrigado a fazer.

No próximo tópico apresentaremos a análise das Praxeologias Didáticas dos livros didáticos do Ensino Médio.

4.2.2 Análise das Praxeologias Didáticas dos Livros Didáticos do Ensino Médio

No livro didático ‘#Contexto Matemática’ de Joamir Souza e Jacqueline Garcia – LD₃, assim como no livro didático ‘Contexto e Aplicações’ de Dante – LD₄, o ‘primeiro momento’ acontece através de um (re)encontro, pois como já sabemos as relações métricas foram estudadas no 9º ano do EF. No LD₃ esse (re)encontro acontece por meio da apresentação do Teorema de Pitágoras e sua demonstração geometricamente, sendo ele a

única relação métrica explorada por esse autor neste livro, como veremos na figura abaixo.

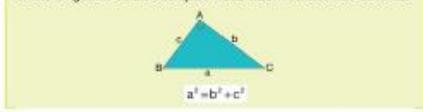
Figura 29 – Exemplo do primeiro momento do LD₃ do EM

Teorema de Pitágoras

Um dos teoremas matemáticos mais conhecidos é o Teorema de Pitágoras. Demonstrado pela primeira vez há cerca de 2500 anos, pelo matemático grego Pitágoras (c. 585-500 a.C.), esse teorema é um dos que possuem maior número de demonstrações. A imagem ao lado é um fragmento de um texto grego de cerca de 800 d.C., que apresenta a demonstração do Teorema de Pitágoras dada por Euclides de Alexandria.

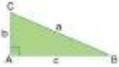
O Teorema de Pitágoras apresenta a seguinte relação entre os três lados de um triângulo retângulo:

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

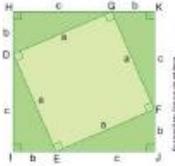


$$a^2 = b^2 + c^2$$

Para demonstrar esse teorema, consideramos inicialmente o triângulo retângulo ABC.



Sobre os lados de um quadrado DEFG, de lado a, dispomos quatro triângulos congruentes ao triângulo retângulo ABC dado, obtendo um quadrado HIJK, de lado b+c.



Note que a área do quadrado HIJK pode ser obtida de duas maneiras:

- adicionando a área do quadrado DEFG e a dos quatro triângulos retângulos: $a^2 + 4 \frac{bc}{2}$
- elevando ao quadrado a medida de seu lado: $(b+c)^2$

Dessa maneira, segue que:

$$a^2 + 4 \frac{bc}{2} = (b+c)^2$$

$$a^2 + 2bc = b^2 + 2bc + c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Explique aos alunos que o teorema recebe esse nome em homenagem a Pitágoras, o primeiro a demonstrá-lo. Contudo, casos particulares desse teorema já eram conhecidos por povos anteriores a Pitágoras, como os egípcios.

Trigonometria no triângulo 241

FONTE: Souza e Garcia (2016 p. 241)

Já no LD₄, esse (re)encontro acontece a partir da apresentação das relações métricas, inicialmente por meio da explicação do triângulo retângulo e seus elementos e em seguida pelas relações métricas. Como podemos perceber, nos dois livros outros momentos são encontrados no ‘primeiro momento’, como o de ‘institucionalização’ e o da ‘justificativa da Técnica’. A seguir a figura 32 apresenta um recorte do ‘primeiro momento’ do LD₄.

Figura 30 – Exemplo do primeiro momento do LD₄ do EM

2 Relações métricas no triângulo retângulo

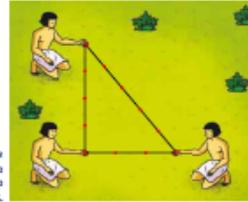
O triângulo retângulo

O triângulo retângulo é um dos mais importantes tipos de triângulo, pela utilidade que ele tem em Matemática e na vida cotidiana. Pelo fato de possuir um ângulo reto, o triângulo retângulo é muito usado em Engenharia, em construções de todos os tipos.

Há mais de 5 mil anos, os egípcios já utilizavam triângulos de lados proporcionais a 3, 4 e 5, feitos de corda, para obter ângulos retos.

Pista histórica
Por meio de ângulos e pesquisa em quem mora em as "situações de triângulo retângulo que eles fazem".
Veja a resposta no Manual do Professor.

Representação de egípcios obtendo o triângulo retângulo com nós em cordas.



Em um triângulo retângulo, o maior lado é a **hipotenusa** (lado oposto ao ângulo reto). Os outros dois lados, perpendiculares entre si, são os **catetos**. Os ângulos agudos são complementares ($\alpha + \beta = 90^\circ$).

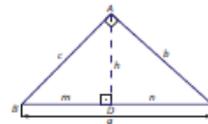


Elementos do triângulo retângulo

Considere um triângulo ABC , retângulo em A , e o segmento de reta AD perpendicular ao lado BC , com D em BC .

Ficam definidos os seguintes elementos do $\triangle ABC$:

- \overline{BC} → hipotenusa (medida a)
- \overline{AC} → cateto (medida b)
- \overline{AB} → cateto (medida c)
- \overline{BD} → projeção do cateto \overline{AB} sobre a hipotenusa (medida m)
- \overline{CD} → projeção do cateto \overline{AC} sobre a hipotenusa (medida n)
- \overline{AD} → altura relativa à hipotenusa (medida h)

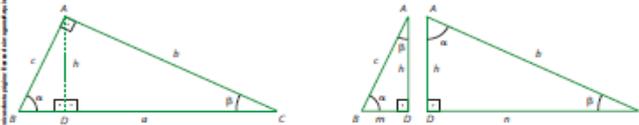


Relações métricas

Uma importante aplicação da semelhança de triângulos são as relações métricas no triângulo retângulo: fórmulas que relacionam entre si as medidas dos lados e das alturas do triângulo.

Triângulos semelhantes

A altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo ABC divide-o em dois triângulos retângulos semelhantes a ele e semelhantes entre si. Observe:



Como os três triângulos têm todos os ângulos congruentes, pelo 1º caso de semelhança, temos:
 $\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$

366 Capítulo 8

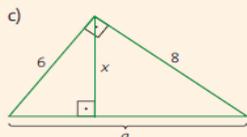
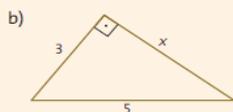
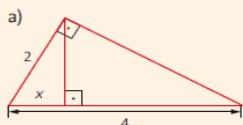
FONTE: Dante (2016 p. 246)

Nos dois livros a ‘exploração do Tipo de Tarefas e da elaboração da Técnica’ acontece após o ‘primeiro momento’, pelo Tipo de Tarefas T_C – “*Calcular a medida de um segmento do triângulo retângulo por meio das relações métricas*”. O autor do LD₃ apresenta um exemplo respondido que foi extraído do Enem-MEC, em que a Técnica utilizada na resolução é o Teorema de Pitágoras. No LD₄ o autor traz no exercício resolvido Tarefas que são respondidas utilizando algumas das relações métricas no triângulo retângulo como Técnicas, entre elas está o Teorema de Pitágoras encontrado também no LD₃, por essa razão apresentaremos aqui apenas um exemplo desse momento.

Figura 31 – Exemplo da exploração do Tipo de Tarefas e da elaboração da Técnica no LD do EM

Exercícios resolvidos

5. Calcule o valor de x em cada uma das figuras.



Resolução:

a) $c^2 = am \Rightarrow 2^2 = 4x \Rightarrow 4 = 4x \Rightarrow x = 1$

b) Pelo teorema de Pitágoras:

$$3^2 + x^2 = 5^2 \Rightarrow 9 + x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

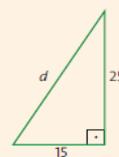
c) $a^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$

$$ah = bc \Rightarrow 10x = 6 \cdot 8 \Rightarrow x = 4,8$$

6. Uma rodovia cruza uma hidrovia perpendicularmente por meio de uma ponte. Ambas podem ser consideradas retilíneas. No mesmo instante em que um carro cruza a ponte, a uma velocidade constante de 100 km/h, uma barcaça passa sob a ponte a 60 km/h e prossegue a viagem a essa velocidade. Após 15 minutos, qual será a distância aproximada entre o automóvel e a barcaça supondo que ambos estejam no mesmo plano horizontal?

Resolução:

A velocidade do carro é 100 km/h; logo, em 15 minutos terá percorrido 25 km. Por sua vez, a barcaça está a 60 km/h; logo, terá percorrido 15 km nesses 15 minutos.



$$d^2 = 15^2 + 25^2 \Rightarrow d^2 = 225 + 625 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 = 850 \Rightarrow d = 5\sqrt{34}$$

Portanto, $d = 29,15$ km.

FONTE: Dante (2016 p. 248)

A criação do ‘ambiente tecnológico-teórico’ acontece nos dois livros a partir de demonstrações. No LD₃ é demonstrado geometricamente o Teorema de Pitágoras a partir da adição de áreas, enquanto no LD₄ a demonstração das relações métricas no triângulo retângulo é feita pela semelhança de triângulos.

O ‘trabalho da Técnica’ acontece no LD₃ de maneira absoluta pela utilização do Teorema de Pitágoras. Já no LD₄ o autor explora quase todas as Técnicas apresentadas na ‘institucionalização’, essas Técnicas são utilizadas na maioria das vezes em conjunto. Em relação as que não foram exploradas nesse momento, temos as Técnicas: $t_7 - ch=bn$ e $t_6 - bh=cm$.

Sobre ‘avaliação’ o autor do LD₃ se omite a ela. Procuramos no decorrer do capítulo e no Manual do Professor e não encontramos nada sobre ‘avaliação’. No LD₄ o autor traz no Manual do Professor sua posição sobre ‘avaliação’ e como ela deve ocorrer. Ele fala que esse momento deve servir para entender como está acontecendo o processo de ensino-aprendizagem, tanto por parte da equipe escolar como também para cada aluno verificar o seu próprio desempenho, diz ainda que a ‘avaliação’ deve ser considerada em seus três aspectos: diagnóstico, formativo e certificativo.

Observando as análises das Praxeologias Didáticas desses dois livros didáticos do Ensino Médio, percebemos que o ‘saber’ relações métricas no triângulo retângulo é explorado nessa etapa de ensino para auxiliar a introdução das relações trigonométricas no triângulo retângulo que aparece como tema nos dois capítulos desses livros que analisamos.

Percebemos também que os dois autores trazem um pouco sobre a importância histórica do ensino das relações métricas. O autor do LD₃ faz relato do Teorema de Pitágoras, já o autor do LD₄ fala sobre a importância do triângulo retângulo. Porém os dois autores nas Tarefas propostas não relacionam o ‘saber matemático’ analisado com situações da realidade dos estudantes.

Também deve ser destacado aqui que o autor do LD₄ mesmo explorando mais Tarefas que o autor do LD₃, centraliza todas elas em apenas um Tipo de Tarefas, já o autor do LD₃ classifica suas Tarefas em quatro Tipos de Tarefas. Outro ponto importante é que o autor do LD₃ ao explorar apenas uma Técnica, consegue aplicar ela em mais Tipos de Tarefas que o autor do LD₄, em contrapartida, o autor do LD₄ explora uma quantidade maior de Técnicas que o autor do LD₃.

4.3 PASSAGEM DAS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO DA ETAPA DO ENSINO FUNDAMENTAL PARA A ETAPA DO ENSINO MÉDIO

Como falamos anteriormente em nossa pesquisa, queremos entender como acontece a passagem do ensino das relações métricas no triângulo retângulo da etapa do Ensino Fundamental para a etapa do Ensino Médio. Para conseguirmos entender isso, vamos comparar as análises das Praxeologias Matemáticas e Didáticas dos livros didáticos escritos pelos mesmos autores que descrevemos nos tópicos anteriores.

4.3.1 Livros Didáticos de Joamir Souza

Primeiro observamos como aconteceu essa passagem do ensino das relações métricas no triângulo retângulo nos livros didáticos do autor Joamir Souza. No livro didático ‘Matemática Realidade & Tecnologia’ do Ensino Fundamental (LD₁) e no livro didático ‘#Contato Matemática’ do Ensino Médio (LD₃), lembrando que esse livro didático do Ensino Médio teve a colaboração de Jacqueline Garcia.

Esse autor explora um total de 47 Tarefas, sendo 38 no LD₁ e 09 no LD₃. Podemos classificá-las em quatro Tipos de Tarefas, são eles: T_C – *Calcular a medida de um segmento do triângulo retângulo por meio das relações métricas*, T_D – *Determinar o valor de uma medida de grandeza, em problemas cujo enunciado comporte dados relativos as relações métricas no triângulo retângulo*, T_I – *Identificar os catetos e/ou a hipotenusa de um triângulo retângulo* e T_V – *Verificar as condições de existência das relações métricas no triângulo retângulo*. É importante ressaltar que nos dois livros ele explora os mesmos Tipos

de Tarefas.

Sobre as Técnicas utilizadas por ele, nos dois livros a mais usada é o Teorema de Pitágoras, sendo ela a única que aparece no LD₃. Percebemos também que as Técnicas $t_7 - ch=bn$ e $t_6 - bh=cm$ que apareceram no momento da ‘institucionalização da Técnica’ não foram exploradas nos Tipos de Tarefas.

O ‘ambiente tecnológico-teórico’ acontece de maneira diferente entre os dois livros. No LD₁ ele ocorre a partir das demonstrações das relações métricas no triângulo retângulo por meio da semelhança de triângulos. Porém mesmo o LD₃ usando a Técnica do Teorema de Pitágoras que está presente no LD₁ esse ambiente é construído de maneira diferente, no LD₃ a demonstração acontece por meio de adição de áreas.

Há uma diferença do ‘primeiro momento’ do encontro das relações métricas no triângulo retângulo do LD₁ para o LD₃, no primeiro livro esse conteúdo é apresentado pela primeira vez para o estudante, enquanto que no segundo livro esse momento é visto como um (re)encontro. Porém esse encontro e esse (re)encontro acontecem de forma semelhante nos dois livros, em que esse autor traz dentro do ‘primeiro momento’ outros momentos como a ‘apresentação da institucionalização’ e o da ‘justificativa da Técnica’.

A ‘exploração do Tipo de Tarefas’ e da ‘elaboração da Técnica’ acontece de forma semelhante nos dois livros, elas vêm logo após o ‘primeiro momento’. A ‘exploração do Tipo de Tarefas’ é dada por T_C – *Calcular a medida de um segmento do triângulo retângulo por meio das relações métricas*, em que no LD₁ é apresentado um exemplo resolvido usando as relações métricas no triângulo retângulo e como Técnica para calcular algumas medidas desse triângulo, já no LD₃ a Técnica consiste apenas na utilização do Teorema de Pitágoras.

Sobre a ‘avaliação’, encontramos apenas no Manual do Professor do LD₁ orientações de como ela deve acontecer. Para Joamir o processo de aprendizagem não deve ser reduzido a avaliação de um único momento e ser atribuído um valor a ele, esse processo deve ser realizado de forma contínua e prolongada em que se deve construir estratégias de avaliação. Ele sugere alguns instrumentos de avaliação como: prova escrita, prova escrita em fases, prova-escrita-com-cola, trabalho em grupo, seminário, portfólio e autoavaliação.

Podemos perceber que Joamir explora nos seus dois livros didáticos a mesma quantidade de Tipos de Tarefas, mesmo a quantidade de tarefas sendo bem menor no LD₃. Porém no LD₃ esse autor não traz nenhuma seção intitulada por relações métricas no triângulo retângulo. O que encontramos foi a relação métrica correspondente ao Teorema de Pitágoras, em uma abordagem com demonstração do teorema por adição de áreas e não

pela demonstração de semelhança de triângulos.

Com isso, notamos que esse autor não aborda o ensino das relações métricas no triângulo retângulo no livro didático do Ensino Médio, como está descrito no Currículo de Matemática do Estado de Pernambuco, documento esse que usamos como apoio em nossa pesquisa. Segundo esse documento, as expectativas de aprendizagem indicam que deve-se utilizar a semelhança de triângulos para estabelecer as relações métricas no triângulo retângulo (inclusive o teorema de Pitágoras) e aplicá-las para resolver e elaborar problemas.

Dessa forma, entendemos que a passagem das relações métricas no triângulo retângulo nos livros de Joamir Souza da Etapa do Ensino Fundamental para o Ensino Médio, sofre alterações que contribuem para uma aprendizagem defasada desse saber no Ensino Médio, pois esse autor explora o Teorema de Pitágoras pelo conceito de adição de áreas e não pelas relações métricas no triângulo retângulo.

4.3.2 Livros Didáticos de Dante

Dando continuidade também observamos como aconteceu a passagem das relações métricas no triângulo retângulo do livro didático ‘Teláris Matemática’ do Ensino Fundamental (LD₂) para o livro ‘Matemática Contexto & Aplicações’ do Ensino Médio (LD₄), ambos do autor Dante.

Dante explora um total de 87 Tarefas, sendo 77 delas no LD₂ e 10 no LD₄. Essas Tarefas foram classificadas em quatro Tipos de Tarefas, são eles: T_C – *Calcular a medida de um segmento do triângulo retângulo por meio das relações métricas*, T_D – *Determinar o valor de uma medida de grandeza, em problemas cujo enunciado comporte dados relativos as relações métricas no triângulo retângulo*, T_T – *Classificar triângulo quanto aos ângulos* e T_V – *Verificar as condições de existência das relações métricas no triângulo retângulo*.

É importante destacar que no LD₄ o único Tipo de Tarefas explorado por ele nas Tarefas foi “*Calcular a medida de um segmento do triângulo retângulo por meio das relações métricas*”.

Observamos que as Técnicas utilizadas por Dante na ‘elaboração e no trabalho da Técnica’ divergem. Na ‘elaboração’ ele explora 08 tipos de Técnicas e no ‘trabalho da Técnica’ apenas 06 tipos, isso acontece nos dois livros. As Técnicas que não apareceram no ‘trabalho da Técnica’ foram: $t_7 - ch=bn$ e $t_6 - bh=cm$.

Outra coisa que observamos é que nos dois livros a Técnica mais utilizada foi o

Teorema de Pitágoras, e que na maioria das Tarefas ele utiliza mais de uma Técnica em sua resolução.

A ‘construção do ambiente tecnológico-teórico’ acontece de maneira semelhante entre os dois livros. Ele é construído a partir das demonstrações das relações métricas no triângulo retângulo por meio da semelhança de triângulos.

Há uma diferença do ‘primeiro momento’ do encontro das relações métricas no triângulo retângulo do LD₂ para o LD₄. No primeiro livro esse conteúdo é apresentado pela primeira vez para o estudante, já no segundo livro esse momento é visto como um (re)encontro. Porém esse encontro e esse (re)encontro acontecem de forma distintas. No LD₂ esse autor traz no ‘primeiro momento’ as relações métricas no triângulo retângulo relacionadas a uma situação que pode ser presenciada na realidade dos estudantes e no LD₄ ele traz dentro do ‘primeiro momento’ outros dois, o de ‘institucionalização’ e da ‘justificativa da Técnica’.

A ‘exploração do Tipo de Tarefas e da elaboração da Técnica’ acontece de forma semelhante nos dois livros. O Tipo de Tarefa explorado nesse momento é o T_C – “*Calcular a medida de um segmento do triângulo retângulo por meio das relações métricas*”. No LD₂ é apresentado um exemplo resolvido usando o Teorema de Pitágoras como a principal Técnica, no LD₄ é explorado no exercício resolvido algumas das relações métricas como Técnica.

Dante apresenta, nos dois livros analisados, ideias parecidas sobre ‘avaliação’. Ele diz que ela deve servir para entender como está acontecendo o processo de ensino-aprendizagem, tanto por parte da equipe escolar como também para cada aluno verificar o seu próprio desempenho. O autor acredita que a ‘avaliação’ deve ser considerada em seus três aspectos: diagnóstico, formativo e certificativo. Quanto aos instrumentos de avaliação ele sugere o uso de: observação e registro, provas, testes, trabalhos, entrevistas, conversas informais e autoavaliação. Todos visando entender os aspectos matemáticos.

Como podemos observar, Dante aborda o ensino das relações métricas no triângulo retângulo de forma semelhante nos dois livros didáticos, principalmente na ‘institucionalização do saber’, na ‘elaboração da Técnica’ e na ‘construção do ambiente tecnológico-teórico’. Porém quando olhamos para os Tipos de Tarefas presentes nos dois livros, percebemos que no LD₄ apenas o Tipo de Tarefas T_C é explorado nas atividades propostas.

Por mais que as abordagens do ensino das relações métricas no triângulo retângulo se assemelhem nos livros didáticos de Dante, podemos perceber que quando esse ‘saber’

parte da Etapa do Ensino Fundamental para o Ensino Médio algumas coisas simplesmente são ignoradas. Como é o caso dos Tipos de Tarefas, em que no LD₄ o autor prioriza apenas o cálculo das relações métricas. Nessa Etapa também não existe mais a mesma preocupação em relacionar esse ‘saber’ com situações do cotidiano do estudante.

Portanto, entendemos que a passagem da Etapa do Ensino Fundamental para a Etapa do Ensino Médio sofre algumas mudanças, sendo deixadas de lado alguns Tipos de Tarefas que ajudariam o estudante a ter uma aprendizagem mais completa sobre as relações métricas no triângulo retângulo. Isso também acontece quando esse autor deixa de relacionar esse ‘saber’ com situações do mundo físico. Acreditamos que, quando essa assimilação é posta para o estudante facilita o entendimento e conseqüentemente auxilia o estudante a construir as competências e habilidades sobre o ‘saber’ a ser estudado.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao iniciar nossa pesquisa tínhamos o propósito de tentar entender o que acontece no ensino da geometria, que mesmo tendo tamanha relevância para o estudo da matemática e desenvolvimento humano, através dos seus conteúdos curriculares e das práticas profissionais, o seu ensino desde muito tempo é marcado por dificuldades, tanto no processo de ensino, como de aprendizagem.

Apresentamos na fundamentação teórica pesquisas que mostraram indícios que essas dificuldades acontecem decorrente da má formação dos professores, tanto nos cursos de licenciatura como pela falta de uma formação continuada. Outro fator, que por muito tempo também contribuiu para que isso acontecesse, foi a forma que os conteúdos de geometria eram abordados nos livros didáticos.

Após serem realizadas várias pesquisas que levaram a essas conclusões apresentadas, houve uma tentativa de resolver esses problemas. Passou a se ter mais investimentos na formação inicial do professor, como também em formação continuada, e uma reformulação nos livros didáticos de matemática a partir da implantação do Programa Nacional do Livro Didático – PNLD, que passou a organizar o ensino dos conteúdos da geometria de maneira que eles não fossem estudados apenas nos últimos capítulos do livro e sim ao longo de todos eles, fazendo conexões com os conteúdos dos outros campos da matemática, como por exemplo o da álgebra e das grandezas e medidas.

Logo após as pesquisas que realizamos sobre o ensino e aprendizagem da geometria, percebemos um número pequeno de pesquisas brasileiras que investigam a abordagem do ensino das relações métricas no triângulo retângulo. A partir disso, fizemos uma revisão de literatura buscando pesquisas que apresentassem em seu título as relações métricas. Encontramos nessa revisão pesquisas com diferentes abordagens, mas entre elas não encontramos nenhuma que investigasse esse saber em livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental e do Ensino médio. Surgindo assim nosso problema de pesquisa, *“Como acontece a passagem do saber matemático das relações métricas no triângulo retângulo, da Etapa do Ensino Fundamental para a Etapa do Ensino Médio em coleções de livros didáticos escritos pelos mesmos autores?”*.

Para nos ajudar a responder esse problema de pesquisa utilizamos como aporte metodológico a Teoria Antropológica do Didático – TAD, proposta por Chevallard (1999). Essa teoria foi escolhida por nós, por acreditarmos que ela tem elementos que nos possibilita analisar de forma mais precisa como acontece o ensino das relações métricas no triângulo

retângulo em coleções de livros didáticos. Através da teoria analisamos as Praxeologias Didáticas, tal análise nos permitiu entender de forma mais clara como aconteceu a escolha didática dos autores e as Praxeologias Matemáticas, analisando os procedimentos por eles utilizados no ensino das relações métricas no triângulo retângulo.

Em nossas análises observamos que os autores dos livros analisados têm uma abordagem semelhante sobre as relações métricas no triângulo retângulo, mas divergem em algumas escolhas didáticas, principalmente nos livros didáticos do Ensino Fundamental. Joamir Souza explora o ensino das relações métricas no triângulo retângulo de forma desconexa do mundo físico, em que na maioria das situações expostas por ele o ‘saber’ é ensinado de forma tradicional e tecnicista, em que o estudante é posto apenas como um reprodutor de conceitos matemáticos e de fórmulas, principalmente nas tarefas pertencentes aos Tipos de Tarefas T_C e T_D .

Já Dante nos permite encontrar sentido no ‘saber’, quando ele relaciona os conteúdos a serem ensinados com situações que fazem parte do mundo físico e que podem ser perceptíveis pelos estudantes. Entretanto, quando fizemos a análise das Praxeologias Matemáticas percebemos que ele deixa transparecer que o ensino se efetiva mediante a repetição exagerada nas resoluções de Tarefas, tornando o ensino desse saber mecânico.

Acreditamos que as abordagens que foram desenvolvidas por esses autores nos livros didáticos que analisamos estão contribuindo para que o ensino das relações métricas no triângulo retângulo e conseqüentemente da geometria continuem passando por dificuldades e sendo esse um dos fatores para que não avancemos no ensino e aprendizagem da geometria.

Portanto, sugerimos que os professores ao fazerem a escolha dos livros didáticos tentem observar como acontece as escolhas didáticas dos autores. É importante ressaltar que o livro didático não seja o único material de apoio para o professor usar em seus planejamentos, ele deve buscar se reinventar e apresentar propostas didáticas que desperte a atenção e curiosidade do estudante.

A partir do desenvolvimento dessa pesquisa, acreditamos que esta pode nos oferecer subsídios para trabalhos futuros sobre as relações métricas no triângulo retângulo, entre eles, analisar se as Praxeologias Matemáticas e Didáticas adotadas pelo professor se diferem das que estão presentes no livro didático e investigar a aprendizagem dos estudantes diante de uma sequência de ensino tendo como aporte teórico os Percursos de Estudo e Pesquisa proposto por Chevallard (2011).

Para concluir, acreditamos que essa pesquisa utilizando a Teoria Antropológica do

Didático, como referencial metodológico, reforça o que já falamos anteriormente sobre a sua importância para nossas análises do ensino das relações métricas no triângulo retângulo. A análise das Praxeologias Matemáticas e Didáticas nos permitiu ter uma visão detalhada das praxeologias propostas pelos autores dos livros didáticos adotados em nossa pesquisa, o que nos possibilitou responder nosso problema de pesquisa e alcançar os objetivos que traçamos. Além disso, o desenvolvimento dessa pesquisa favoreceu nosso desenvolvimento enquanto professores e pesquisadores, que estamos sempre em processo de evolução.

REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, S. A. Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**. n. 42, p. 09-34, 2015.
- ANDRÉ, M. E.D.A. de. **Etnografia da prática escolar**. Campinas, SP: Papirus, 18 ed. 2011.
- BARBOSA, E. J. T. **Praxeologia do professor: análise comparativa com os documentos oficiais e do livro didático no ensino de equações polinomiais do primeiro grau**. 2017. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática) – Departamento de Educação. Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife.
- BATISTA, O. A. G. **O USO DOS RECURSOS DIDÁTICOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA PARA ALUNOS SURDOS: Uma proposta de material voltado para o ensino de matrizes e das relações métricas no triângulo retângulo**. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Pró-reitora de Pesquisa e Pós-Graduação. Universidade Federal do Acre. Rio Branco-AC.
- BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. In: **Recherches en didactique des mathématiques**, vol. 19, no 1, p. 77-124, 1999.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação**. Brasília, DF: FNDE, 2020. Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos>. Acesso em: 28 jan. 2021.
- BRASIL. Diretoria de Avaliação da Educação Básica. **Relatório Brasil no PISA 2018**. Brasília: INEP, 2018.
- BRASIL. Diretoria de Avaliação da Educação Básica. **Sistema de Avaliação da Educação Básica: Matemática**. Brasília: INEP, 2017.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2015. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documento/BNCCAPRESENTACAO.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2019.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/ SEF, 1998.
- CHAACHOUA, H; BITTAR, M. A teoria antropológica do didático: paradigmas, avanços e perspectivas. **Caminhos da educação matemática em revista (on-line)**, v. 9, p. 1-16, 2019.
- CHACÓN, A. M. A. La gestion de la mémoire didactique par le professeur dans l'enseignement secondaire des mathématiques : Etude du micro-cadre institutionnel en France et au Costa Rica. THÈSE Du Doctorat De L'université De Toulouse Délivré par l'Université Toulouse III – Paul Sabatier en Didactique des Disciplines Scientifiques et Technologiques Spécialité : Didactique Des Mathématiques. 2008.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes ET didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. In: **Recherches en didactique des mathématiques**, Grenoble, Éditions La Pensée Sauvage, v.19.2, n.56, p.221-265, 1999.

CHEVALLARD, Y. Familière et problématique, la figure du professeur. In: **Recherches en didactique de Mathématiques**, 1997, p. 17-54.

CHEVALLARD, Y. **Organizer L'étude. 3. Ecologie & regulation**. Actes de la 11^e École d'Été de Didactique des Mathématiques. France: La Pensée Sauvage. 2002. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=53. Acesso em janeiro de 2017, com paginação de 1-22.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: L'approche anthropologique. **Actes de l'U.E. de la Rochelle**, 1998.

CORRÊA, E. C. T. **O ensino de relações métricas no triângulo retângulo: uma sequência didática para a Educação de Jovens e Adultos**. 2014. TCC (Especialização em Educação Matemática) – Universidade do Estado do Pará. Belém-PA.

COSTA, A. P. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental: um estudo sob a luz da teoria vanhieliana**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2016.

COSTA, A. P.; ROSA DOS SANTOS, M. O pensamento geométrico de professores de Matemática em formação inicial. **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA-RS**, v. 2, p. 1-20, 2017.

COSTA, A. P.; ROSA DOS SANTOS, M. Os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes de uma Licenciatura em Matemática no Estado de Pernambuco: um estudo sob a ótica da teoria de Van-Hiele. **EDUCAÇÃO ON-LINE (PUCRJ)**, v. 25, p. 63- 86, 2017.

COSTA, A. P.; ROSA DOS SANTOS, M. Os quadriláteros notáveis no 8º ano do Ensino Fundamental: um estudo sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. **Revista de Educação Matemática**, v. 15, p. 353-372, 2018.

COSTA, A. P.; ROSA DOS SANTOS, M. Uma análise praxeológica do ensino de triângulos no 8º ano do ensino fundamental. **Educação Matemática em Revista**, v. 2, p. 189-197, 2018.

DANTE, L. R. **Matemática Contexto & Aplicações** (1º ano do EM). 3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2016.

DANTE, L. R. **Teláris Matemática** (9º ano do EF). 3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2018.

EVES, Howard. Geometria: **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula**. Geometria Tradução Higino H Domingues. São Paulo, Atual, 1997.

FERREIRA, A. P. **O ensino de relações métricas no triângulo retângulo por meio de atividades**. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Centro de Ciências Sociais e Educação Departamento de Matemática, Estatística e Informática. Universidade do Estado do Pará. Belém-PA.

FONSECA, C. (2004), Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Enseñaza Secundaria y la Enseñaza Universitaria. Tesis Doctoral. Departamento de Matemática Aplicada I. Universidad de Vigo, 2004.

JÚNIOR, G. R. J; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática**. 4. Ed. São Paulo: FTD, 2018. (9º ano do Ensino Fundamental).

LAMAS, R. C. P; MAURI, J. **O teorema de Pitágoras e as relações métricas no triângulo retângulo com material emborrachado**. UNESP Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, 2006. Disponível em <https://docplayer.com.br/22999007-O-teorema-de-pitagoras-e-as-relacoes-metricas-no-triangulo-retangulo-com-material-emborrachado.html>; acesso em 07 de abr. 2020, às 16h40.

LIMA, H. A.; LUZ, R. C. **Relações métricas no triângulo: abordagem vetorial**. 2009. Monografia (Especialização em Matemática) – Departamento de Matemática e Física. Universidade Federal de Santa Catarina, Universidade Virtual do Maranhão. Imperatriz-MA.

LIMA, J. S. **BELÉM 400 ANOS: APLICAÇÕES DAS RELAÇÕES MÉTRICAS E TRIGONOMÉTRICAS DO TRIÂNGULO NA CIDADE DAS MANGUEIRAS**. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Exatas e Naturais Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística. Universidade Federal do Pará. Belém-PA.

LIMA, P. F.; CARVALHO, J. B. P. F. Geometria. In: **Coleção Explorando o Ensino**. Brasil. Matemática: ensino fundamental. Coordenação João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho, Brasília: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, volume 17, 2010, p. 135 – 166.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista – SBEM** – nº 4, p. 3 – 13, 1995.

LUCAS, C. O. **Una Posible “Razón de Ser” del Cálculo Diferencial Elemental en el Ámbito de la Modelización Funcional**. 2015. 625 f. Tesis (Doctorado en Técnicas Matemáticas Avanzadas)- Universidad de Vigo, Vigo, 2015. Disponível em: <<http://www.atd.tad.org/wp-content/uploads/2016/01/Una-posible-%C2%ABraz%C3%B3n-de-ser%C2%BB-del-c%C3%A1lculo-diferencial-elemental2.pdf>>. Acesso em: 15 mar. 2021.

MORETTI, Méricles T.; HILLESHEIM, Selma F. Linguagem natural e formal na semiosfera da aprendizagem matemática: o caso da geometria para a formação do pedagogo. **Em teia - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 9, p. 1-19, 2018.

PAULA, S. C. R. **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DAS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO**

RETÂNGULO COM AUXÍLIO DE UM SOFTWARE EDUCACIONAL

VASSOURAS, 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – FUSVE. Universidade de Vassouras. Rio de Janeiro-RJ.

PAULA, S. C. R.; SILVA, J. C.; ARAÚJO, M. A. P. Educação matemática tecnológica: discussão sobre as relações métricas no triângulo retângulo com auxílio de software educacional. In: XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2013, Curitiba. **Anais do XI ENEM: Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas**. Curitiba, 2013.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Revista Zetetiké**, n. 1, p. 7 – 17, 1993.

PEREIRA, C. C.; LEIVAS, J. C. P. Descobrimos relações métricas no triângulo retângulo por meio do uso de material manipulável. In: XX Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul, 2014, Bagé. **Anais do XX EREMAT**. Bagé: UNIPAMPA, 2014, p. 531-538.

PERNAMBUCO. Secretaria Estadual de Educação. **Sistema de Avaliação da Educação Básica de Pernambuco– SAEPE: Matemática**. Recife: Revista da Gestão Escolar, 2019.

PIRES, K. M. **Relações métricas no triângulo retângulo com GeoGebra**. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista, Júlio de Mesquita Filho. São José do Rio Preto-SP.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do Trabalho Científico: Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico**, 2ª Ed., Novo Hamburgo - RS, Associação Pró-Ensino Superior em Novo Hamburgo - ASPEUR Universidade Feevale, 2013.

QUADRO, R. C. **Relações métricas no triângulo retângulo um estudo didático**. 2004. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Centro de Matemática e Física. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis-SC.

ROSA DOS SANTOS, M. **A transposição didática do conceito de área de figuras planas no 6º ano do ensino fundamental: um olhar sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático**. 2015. 281f. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática) – Departamento de Educação. Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife.

SANTOS, M. E. **Ensino das relações métricas do triângulo retângulo com robótica educacional**. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino Tecnológico) – Pró-reitora de Pesquisa e Pós-Graduação. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas. Manaus-AM.

SILVA, M. C. L. Movimento da Matemática Moderna – Possíveis Leituras de uma Cronologia. **Revista Diálogo Educacional**, v. 6, n.18, p.49-63, maio/ago. Curitiba, 2006.

SOUZA, J. R. **Matemática Realidade & Tecnologia** (9º ano do EF). 1. ed. São Paulo: FTD, 2018.

SOUZA, J. R.; GARCIA, J. S. R. **Matemática Realidade & Tecnologia** (1º ano do EM).

1. ed. São Paulo: FTD, 2018.

SOUZA, L. S. S.; PRADO, A. A.; SILVA, R. M.; ESPÍNDOLA, E. B. M. **RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO**: análise da organização matemática no livro didático. In: IX Encontro Paraibano de Educação Matemática, 2016, Campina Grande. **Anais do IX EPBEM**. Campina Grande: IFPB, 2016.

VARGAS, E. T. Geometria Dinâmica para estudo das relações métricas no triângulo retângulo. **Dynamic Geometry to study relations metrics in right triangle**. REVEMAT. eISSN 1981-1322. Florianópolis (SC), v. 08, *Ed. Especial* (dez.), p. 266-277, 2013. DOI:10.5007/1981-1322.2013v8nespp266.