



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

GUSTAVO GAMA CAMBRAINHA DE ALBUQUERQUE DIAS

## **Dinâmica de Pêndulos de Huygens**

Recife

2022

GUSTAVO GAMA CAMBRAINHA DE ALBUQUERQUE DIAS

## **Dinâmica de Pêndulos de Huygens**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

**Área de Concentração:** Dinâmica Não-linear, Caos e Sistemas Complexos

**Orientador (a):** José Roberto Rios Leite

Recife

2022

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Luiza de Oliveira, CRB4-1316

D541d Dias, Gustavo Gama Cambrinha de Albuquerque  
Dinâmica de pêndulos de Huygens/Gustavo Gama Cambrinha de Albuquerque Dias. –  
2022.  
54 f.: il.

Orientador: José Roberto Rios Leite.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Física, Recife,  
2022.

Inclui referências.

1. Caos transiente. 2. Caos hamiltoniano. 3. Pêndulos de Huygens. 4. Lyapunov. 5.  
Sincronização. I. Leite, José Roberto Rios (orientador). II. Título.

515.39                      CDD (23. ed.)                      UFPE - CCEN 2022-146

**GUSTAVO GAMA CAMBRAINHA DE ALBUQUERQUE DIAS**

**DINÂMICA DE PÊNDULOS DE HUYGENS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 28/06/2022.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. José Roberto Rios Leite  
Orientador  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Antonio Azevedo da Costa  
Examinador Interno  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante  
Examinador Externo  
Universidade Federal da Paraíba

Dedico este trabalho à minha mãe, Marilda, e minha irmã, Géssika.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha mãe e minha irmã por todo apoio e suporte, sem vocês nada teria sido possível, obrigado por tudo.

Agradeço também ao meu orientador o professor emérito José R. Rios Leite, por todos seus ensinamentos, todas as discussões esclarecedoras e dúvidas instigantes e pela oportunidade única de estudar junto a alguém com tanto conhecimento na área.

A meu primo Sandro e sua esposa Paula por terem me acolhido em sua casa durante o início de minha graduação, sem isso não poderia ter cursado física longe de casa.

A Irio, Naudson, Marcos, Ruben e os tantos outros amigos que o curso me deu e que levarei para a vida, pelas incontáveis risadas, pelas discussões sobre todos os assuntos possíveis, pelos cafés, as saídas para comprar coxinha e por sempre me lembrarem do sentimento que compartilhamos pela física.

Aos professores Ernesto Raposo e Shahram Jalalzadeh, com os quais aprendi muito em minhas iniciações científicas e me deram novas formas de ver o mundo. Também ao professor Sérgio Coutinho pelos incríveis cursos e valorosos conselhos.

E a todos que fizeram parte deste percurso, com pequenos ou grandes gestos, pois de uma forma ou de outra a junção de todos eles me ajudou a chegar até aqui.

Por fim, agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro.

For want of a nail the shoe was lost, for want of a shoe the horse was lost,  
for want of a horse the rider was lost, for want of a rider the battle was  
lost, for want of a battle the kingdom was lost, and all for the want of a  
horseshoe nail.

(OPIE; OPIE, 1951 apud LOWE, 1980)

## RESUMO

Caos transiente devido à fraca dissipação em sistemas dinâmicos hamiltonianos vem sendo estudado visando a compreensão de muitos sistemas naturais na física, biologia, economia e astronomia. Nesta dissertação apresentaremos um estudo de osciladores acoplados na configuração de pêndulos com seus eixos fixos a uma estrutura rígida e livre para mover-se horizontalmente. Nomeamos este conjunto de osciladores de pêndulos de Huygens, motivados pelo sistema de relógios originalmente descrito por Christiaan Huygens no século XVII, onde ele observou pela primeira vez o fenômeno de sincronização. Avaliamos então a dinâmica a partir de condições iniciais com altas velocidades angulares nos pêndulos, também consideramos os efeitos dissipativos de atrito. Ao realizar esta evolução no tempo percebemos que o sistema apresenta instabilidades devido à tendência de sincronização dos pêndulos entre si. Estas instabilidades apresentam-se na forma de bifurcações com regiões de quasi-periodicidade transiente assim como de caos transiente. Os cálculos numéricos são realizados seguindo a trajetória do sistema para analisar o papel das dissipações nestas instabilidades, assim como procuramos entender como o parâmetro de acoplamento dos pêndulos afeta os comportamentos observados. Calculamos numericamente o máximo expoente de Lyapunov de tempo finito ao longo de trajetórias típicas. Vemos que é possível obter valores positivos para algumas das regiões observadas, servindo de forte indicativo de caos nestas regiões, em particular o tipo de caos denominado de duplamente transiente. Nossas escolhas de parâmetros para as equações tratadas numericamente foram feitas baseadas em observações qualitativas de um sistema experimental montado em laboratório.

**Palavras-chaves:** caos transiente; caos hamiltoniano; pêndulos de Huygens; Lyapunov; sincronização.

## ABSTRACT

Transient chaos due to weak dissipation in dynamical Hamiltonian systems have been studied in the context of many natural systems in physics, biology, economy and astronomy. In this dissertation, we present a study on coupled oscillators in a pendula configuration, with the axis fixed to a rigid structure that is free to move horizontally. We named this set of coupled oscillators 'Huygens Pendula', inspired by the coupled clocks system originally described by Christiaan Huygens in XVII century, where he observed for the first time the synchronization phenomenon. We assess the dynamics starting from a set of initial conditions with high angular velocity pendula, we also consider the dissipative effects of friction. Analyzing the time evolution, we notice that the system presents instabilities due to the pendula tendency to synchronize. Those instabilities appear as transient quasiperiodic and transient chaos regions. The numerical calculations are made following system trajectories to analyze the job of dissipation on those instabilities, as well as varying the coupling parameter to understand the effects on the observed behaviors. We numerically calculated the maximum finite time Lyapunov exponent of typical trajectories. We see that it is possible to obtain a positive value on some of the observed regions, serving as a strong indicator of chaos in those regions, in particular the so called doubly transient chaos. Our parameters choices are motivated for the numerical treatment are based on qualitative observations from an experimental system built in the laboratory.

**Keywords:** transient chaos; hamiltonian chaos; Huygens' pendula; Lyapunov; synchronization.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esquema de relógios conectador por uma viga desenhado por Huygens para ilustrar seu aparato . . . . .	13
Figura 2 – Esquema de pêndulos forçados presos a parede por uma mola utilizado por Blekhman para simular os efeitos vistos por Huygens . . . . .	15
Figura 3 – Esquema de pêndulos forçados utilizado por Willms similar ao realizado por Blekhman . . . . .	15
Figura 4 – Projeção no plano X-Z de uma órbita descrita pelas equações de Lorenz . . . . .	17
Figura 5 – Trajetoria de uma função com um $\frac{m_1}{m_2} = 3$ . O movimento se fecha em si após realizar uma volta ao redor do raio maior e 3 voltas ao redor do raio menor. . . . .	19
Figura 6 – Modelo do sistema de pêndulos . . . . .	23
Figura 7 – Movimento do centro de massa da barra que acopla os pêndulos com condição inicial quase simétrica. Condições iniciais $q_c = 0$ , $q_1 = -q_2 = \pi/2$ , $\dot{q}_1 = 15 - 0,05$ , $\dot{q}_2 = -15$ , $\dot{q}_c = 0$ , $\gamma_1 = 0.0001$ , $\gamma_c = 0.004$ e $\beta = 2/3$ . . . . .	26
Figura 8 – Em pequenas oscilações com pêndulos oscilando em modo de anti-fase, os pêndulos completam uma oscilação em um tempo $\tau = 2\pi$ . Condições iniciais $q_c = 0$ , $q_1 = q_2 = \pi/32$ , $\dot{q}_1 = -\dot{q}_2 = 0$ , $\dot{q}_c = 0$ , $\gamma_1 = 0.0001$ , $\gamma_c = 0.004$ e $\beta = 2/3$ . . . . .	28
Figura 9 – Em pequenas oscilações com pêndulos oscilando em modo de fase, os pêndulos completam uma oscilação em menos de um tempo $\tau = 2\pi$ . Condições iniciais $q_c = 0$ , $q_1 = q_2 = \pi/32$ , $\dot{q}_1 = -\dot{q}_2 = 0$ , $\dot{q}_c = 0$ , $\gamma_1 = 0.0001$ , $\gamma_c = 0.004$ e $\beta = 2/3$ . . . . .	28
Figura 10 – Energia total do sistema com os pêndulos oscilando em modo de fase. Condições iniciais $q_c = 0$ , $q_1 = q_2 = \pi$ , $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 15$ , $\dot{q}_c = 0$ , $\gamma_1 = 0.0001$ , $\gamma_c = 0.004$ e $\beta = 2/3$ . . . . .	30
Figura 11 – Energia total do sistema com os pêndulos oscilando em fase não decresce monotonamente . . . . .	31
Figura 12 – Energia total do sistema com pêndulos oscilando em modo de anti-fase. Condições iniciais $q_c = 0$ , $q_1 = q_2 = \pi$ , $\dot{q}_1 = -\dot{q}_2 = 15$ , $\dot{q}_c = 0$ , $\gamma_1 = 0.0001$ , $\gamma_c = 0.004$ e $\beta = 2/3$ . . . . .	32

Figura 13 – Energia total do sistema com os pêndulos oscilando em anti-fase decresce monotonamente . . . . .	32
Figura 14 – Comparação entre as curvas de energia total de ambos os modos de oscilação do sistema . . . . .	33
Figura 15 – Velocidade do centro de massa da barra. Condições iniciais $q_c = 0, q_a = 0, q_s = 0 \dot{q}_a = 20 \dot{q}_s = 0.5, \dot{q}_c = 0, \gamma_1 = 0.00005, \gamma_c = 0.005$ e $\beta = 2/3$ . . .	35
Figura 16 – Velocidade do centro de massa da barra em detalhe na região inicial. Condições iniciais $q_c = 0, q_a = 0, q_s = 0 \dot{q}_a = 20 \dot{q}_s = 0.5, \dot{q}_c = 0, \gamma_1 = 0.00005, \gamma_c = 0.005$ e $\beta = 2/3$ . . . . .	36
Figura 17 – Velocidade do centro de massa da barra próximo a região onde é observada uma mudança de comportamento. Condições iniciais $q_c = 0, q_a = 0, q_s = 0 \dot{q}_a = 20 \dot{q}_s = 0.5, \dot{q}_c = 0, \gamma_1 = 0.00005, \gamma_c = 0.005$ e $\beta = 2/3$ . . . . .	37
Figura 18 – Aproximação entre os picos da oscilação. Condições iniciais $q_c = 0, q_a = 0, q_s = 0 \dot{q}_a = 20 \dot{q}_s = 0.5, \dot{q}_c = 0, \gamma_1 = 0.00005, \gamma_c = 0.005$ e $\beta = 2/3$ . . . . .	37
Figura 19 – Velocidade do centro de massa da barra para $\gamma_1 = 0,5$ . Condições iniciais $q_c = 0, q_a = 0, q_s = 0 \dot{q}_a = 20 \dot{q}_s = 0.5, \dot{q}_c = 0, \gamma_1 = 0.5, \gamma_c = 0.005$ e $\beta = 2/3$ . . . . .	38
Figura 20 – Velocidade do centro de massa da barra para $\gamma_1 = 0,05$ . Condições iniciais $q_c = 0, q_a = 0, q_s = 0 \dot{q}_a = 20 \dot{q}_s = 0.5, \dot{q}_c = 0, \gamma_1 = 0.05, \gamma_c = 0.005$ e $\beta = 2/3$ . . . . .	39
Figura 21 – Velocidade do centro de massa da barra para $\gamma_1 = 0,005$ . Condições iniciais $q_c = 0, q_a = 0, q_s = 0 \dot{q}_a = 20 \dot{q}_s = 0.5, \dot{q}_c = 0, \gamma_1 = 0.005, \gamma_c = 0.005$ e $\beta = 2/3$ . . . . .	39
Figura 22 – Velocidade do centro de massa da barra para $\gamma_1 = 0,0005$ . Condições iniciais $q_c = 0, q_a = 0, q_s = 0 \dot{q}_a = 20 \dot{q}_s = 0.5, \dot{q}_c = 0, \gamma_1 = 0.0005, \gamma_c = 0.005$ e $\beta = 2/3$ . . . . .	40
Figura 23 – Velocidade do centro de massa da barra para $\gamma_1 = 0,000005$ . Condições iniciais $q_c = 0, q_a = 0, q_s = 0 \dot{q}_a = 20 \dot{q}_s = 0.5, \dot{q}_c = 0, \gamma_1 = 0.000005, \gamma_c = 0.005$ e $\beta = 2/3$ . . . . .	41
Figura 24 – Velocidade do centro de massa da barra para $\gamma_c = 0,5$ . Condições iniciais $q_c = 0, q_a = 0, q_s = 0 \dot{q}_a = 20 \dot{q}_s = 0.5, \dot{q}_c = 0, \gamma_1 = 0.00005, \gamma_c = 0.5$ e $\beta = 2/3$ . . . . .	42

Figura 25 – Velocidade do centro de massa da barra para $\gamma_c = 0,05$ . Condições iniciais $q_c = 0, q_a = 0, q_s = 0, \dot{q}_a = 20, \dot{q}_s = 0.5, \dot{q}_c = 0, \gamma_1 = 0.00005, \gamma_c = 0.05$ e $\beta = 2/3$ . . . . .	42
Figura 26 – Velocidade do centro de massa da barra para $\gamma_c = 0,00005$ . Condições iniciais $q_c = 0, q_a = 0, q_s = 0, \dot{q}_a = 20, \dot{q}_s = 0.5, \dot{q}_c = 0, \gamma_1 = 0.00005, \gamma_c = 0.00005$ e $\beta = 2/3$ . . . . .	43
Figura 27 – Velocidade do centro de massa da barra para $\beta = 3/4$ . Condições iniciais $q_c = 0, q_a = 0, q_s = 0, \dot{q}_a = 20, \dot{q}_s = 0.5, \dot{q}_c = 0, \gamma_1 = 0.00005, \gamma_c = 0.05$ e $\beta = 3/4$ . . . . .	44
Figura 28 – Velocidade do centro de massa da barra para $\beta = 1/2$ . Condições iniciais $q_c = 0, q_a = 0, q_s = 0, \dot{q}_a = 20, \dot{q}_s = 0.5, \dot{q}_c = 0, \gamma_1 = 0.00005, \gamma_c = 0.05$ e $\beta = 1/2$ . . . . .	44
Figura 29 – Velocidade do centro de massa da barra para $\beta = 4/900$ . Condições iniciais $q_c = 0, q_a = 0, q_s = 0, \dot{q}_a = 20, \dot{q}_s = 0.5, \dot{q}_c = 0, \gamma_1 = 0.00005, \gamma_c = 0.05$ e $\beta = 4/900$ . . . . .	45
Figura 30 – Representação gráfica do processo numérico de cálculo do expoente máximo de Lyapunov . . . . .	46
Figura 31 – Variação dos valores máximos para o expoente de Lyapunov ao longo da trajetória . . . . .	48
Figura 32 – Ajuste linear parcial aplicado à distância entre duas trajetórias inicialmente próximas, uma seguindo a trajetória determinada pelo ponto $\tau = 22000$ da figura 15, outra iniciada com um deslocamento de $d = 10^{-8}$ em cada coordenada. . . . .	48
Figura 33 – Ajuste linear aplicado à distância entre duas trajetórias inicialmente próximas, uma seguindo a trajetória determinada pelo ponto $\tau = 33000$ da figura 15, outra iniciada com um deslocamento de $d = 10^{-8}$ em cada coordenada . . . . .	49

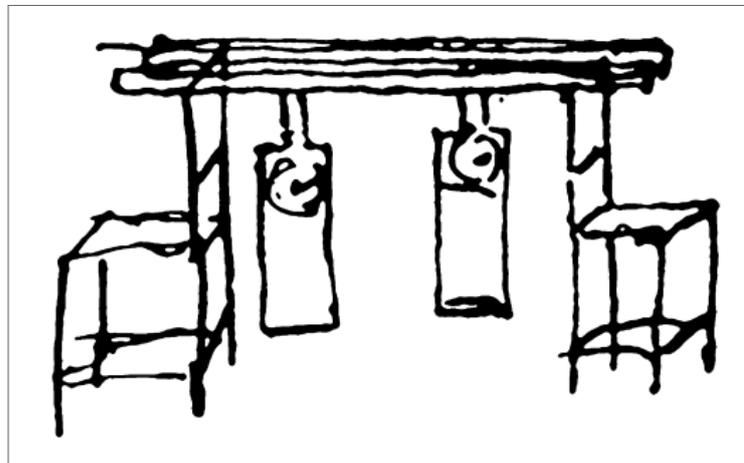
## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>O QUE É CAOS?</b>	<b>16</b>
2.1	SENSIBILIDADE ÀS CONDIÇÕES INICIAIS	16
2.2	CAOS TRANSIENTE	17
2.3	QUASIPERIODICIDADE	18
<b>3</b>	<b>EXPOENTES DE LYAPUNOV</b>	<b>20</b>
3.1	EM MAPAS	20
3.2	EM FLUXOS	21
<b>4</b>	<b>PÊNDULOS DE HUYGENS</b>	<b>23</b>
4.1	ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES	24
4.2	PEQUENAS OSCILAÇÕES	26
4.3	MOVIMENTOS DE SIMETRIA	29
<b>4.3.1</b>	<b>Movimento dos pêndulos em fase</b>	<b>29</b>
<b>4.3.2</b>	<b>Movimento dos pêndulos em anti-fase</b>	<b>30</b>
4.4	UMA VISÃO ALTERNATIVA	33
<b>5</b>	<b>EFEITOS DA VARIAÇÃO DE PARÂMETROS</b>	<b>38</b>
5.1	VARIANDO O ATRITO NOS PÊNDULOS	38
5.2	VARIANDO O ATRITO NA BARRA	41
5.3	VARIANDO O PARÂMETRO DE ACOPLAMENTO ( $\beta$ )	43
<b>6</b>	<b>CÁLCULO DO MAIOR EXPOENTES DE LYAPUNOV DO SISTEMA</b>	<b>46</b>
6.1	O MÉTODO	46
6.2	RESULTADO	47
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b>	<b>50</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>52</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Em 1665, enquanto buscava uma solução para o problema de medida das longitudes proposto pela Royal Society, Christiaan Huygens tentou utilizar seus relógios de pêndulo para medir precisamente o tempo de viagem e com isso obter a longitude (BENNETT et al., 2002). Por questão de segurança, era comum levar mais de um de seus relógios por viagem, para caso o primeiro apresentasse algum defeito houvesse uma redundância. No entanto, ao armar seus relógios como descrito na figura 1, Huygens observou que os pêndulos entravam em um aparente sincronismo após certo tempo, onde apresentavam mesmo período, mas com deslocamentos em direções opostas em relação aos seus respectivos pontos de repouso. Este comportamento hoje é denominado sincronização em anti-fase dos relógios (WILLMS; KITANOV; LANGFORD, 2017). Ao estudar mais profundamente o caso ele foi capaz de determinar que o fenômeno ocorria devido a movimentos quase imperceptíveis da viga de ligação entre os relógios (PIKOVSKY; ROSEBLUM; KURTHS, 2001).

Figura 1 – Esquema de relógios conectador por uma viga desenhado por Huygens para ilustrar seu aparato



Fonte: (PIKOVSKY; ROSEBLUM; KURTHS, 2001)

Uma explicação para a escolha do modo de sincronização apresentada pelos pêndulos veio a ser dada, muitos anos depois, por Korteweg (1906 apud BENNETT et al., 2002), que explicou a seleção de movimento em anti-fase como uma consequência da ação do atrito. Deste modo o mecanismo presente no relógio não era capaz de dar energia suficiente para certos tipos de movimento serem mantidos. Isto foi realizado através do estudo de um sistema de dois pêndulos conectados a uma barra rígida com movimento apenas unidimensional (BENNETT et al., 2002). Um sistema parecido ao de Korteweg também é estudado em Blekhman (1988), no

entanto, o autor não considera uma adição de energia através de pulsos, mais similar a como ocorre com o escapamento de um relógio, dando preferência a um sistema que se comporta como dois osciladores de Van-der-Pol. Nesta nova configuração, Blekhman conseguiu identificar que tanto o estado de movimento dos osciladores em fase quanto em anti-fase poderiam ser estáveis e coexistir (BENNETT et al., 2002). Um estudo bastante completo utilizando uma força contínua também foi realizado por Willms, Kitanov e Langford (2017), observando vários dos comportamentos possíveis quando o sistema apresenta pequenas oscilações, percebendo também que a possibilidade de sincronização em fase existe para certos valores de amortecimento aplicado à viga que liga os pêndulos.

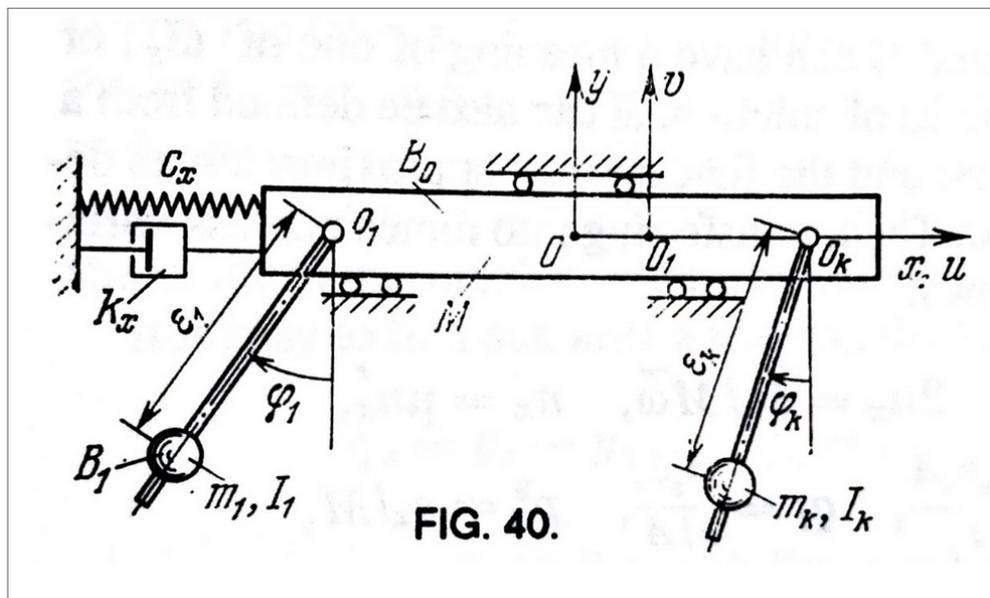
Para nosso estudo nos baseamos, principalmente, no esquema proposto por Fonseca (2011), em que são utilizados dois pêndulos ao invés de relógios, por sua vez, estes são conectados a um carro com a liberdade de movimentar-se em uma direção. Portanto, não há mais forças que alimentam o sistema, se assemelhando mais ao aparato utilizado por Korteweg (BENNETT et al., 2002), podendo ser pensado como um carrinho que acopla ambos os pêndulos, conforme proposto por Fonseca (2011), ou uma barra como a presente na figura 3, desde que desconsideramos a mola  $K$  e paredes laterais, além disso, os pêndulos devem ter liberdade de realizar voltas completas em seu eixos sem se encostarem. No estudo de Fonseca (2011) ao considerar a ação do atrito foi novamente observado a tendência do movimento dos pêndulos à sincronização em anti-fase para movimentos de baixa energia. Verificamos este resultado e realizamos então a análise deste sistema para a região menos abordada nos estudos mencionados, considerando o comportamento quando a energia inicial do sistema é muito maior que a energia potencial gravitacional dos pêndulos

$$E_0 \gg mgl, \quad (1.1)$$

onde  $m$  é a massa de cada pêndulo,  $l$  seu comprimento e  $g$  a constante gravitacional. Com isto observamos que o sistema exibe 4 principais regiões de comportamento quando lançado de uma condição inicial mais geral, apresentando uma atenuação inicial relacionada ao movimento em fase dos pêndulos, seguido da exibição de respirações do sistema que seguem até o momento em que começamos a observar um movimento errático e aparentemente aleatório. Este movimento se mantém até o sistema perder energia suficiente para apresentar comportamentos compatíveis com as observações do regime de baixa energia. Realizamos, numericamente, a variação dos parâmetros de controle do sistema para analisar sua relação com cada uma das diferentes regiões de comportamento. Em seguida, através de métodos numéri-

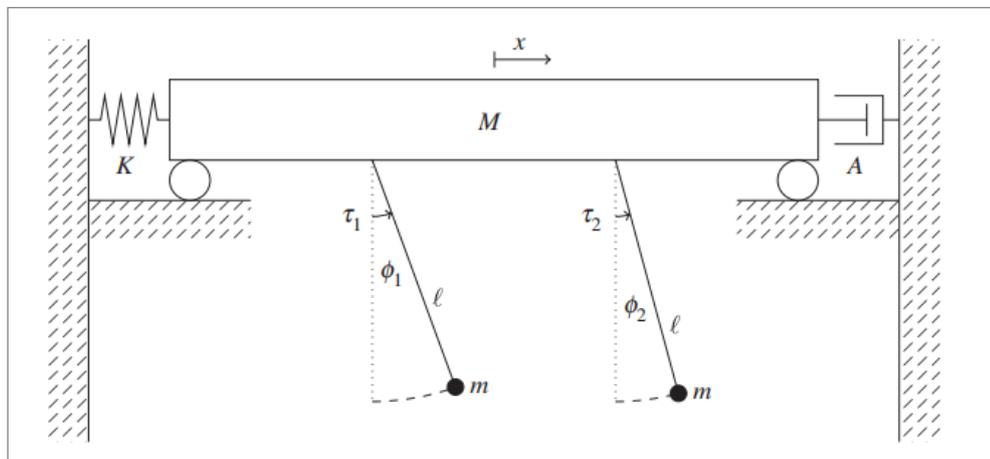
cos, o cálculo da evolução do expoente de Lyapunov no decorrer do movimento para entender a dependência do sistema em relação às suas condições iniciais e o caracterizar como caótico ou não. O comportamento do sistema, como proposto nesta dissertação, onde a simetria de anti-fase dos pêndulos apresenta baixa dissipação, enquanto a simetria de fase apresenta uma alta dissipação devido ao acoplamento pela barra, pode ser tida como análogo com a sub-radiância e a super-radiância proposta no modelo de Dicke (1954) de emissores acoplados (DEVOE; BREWER, 1996).

Figura 2 – Esquema de pêndulos forçados presos a parede por uma mola utilizado por Blekhan para simular os efeitos vistos por Huygens



Fonte: (BLEKHMANN, 1988)

Figura 3 – Esquema de pêndulos forçados utilizado por Willms similar ao realizado por Blekhan



Fonte: (WILLMS; KITANOV; LANGFORD, 2017)

## 2 O QUE É CAOS?

A introdução da palavra “caos” no contexto de sistemas dinâmicos é creditada a Li e Yorke (1975), onde é originalmente utilizada para descrever o comportamento não periódico e desordenado aparentemente apresentado por certos modelos determinísticos (LAYEK, 2015)(SMITH, 2007). Entretanto, atualmente existem diversas definições possíveis para o que constitui um comportamento caótico, sem uma concordância completa da comunidade (DEVANEY, 1992)(LAYEK, 2015), apesar disso podemos apontar algumas características com as quais qualquer definição deve concordar, são elas: sensibilidade à escolha de condições iniciais, aperiodicidade e determinismo. Esta última característica se deve ao fato de que o comportamento caótico deve ocorrer sempre como consequência de equações puramente determinísticas, sem a necessidade de inclusão de ruído ou variáveis aleatórias.

### 2.1 SENSIBILIDADE ÀS CONDIÇÕES INICIAIS

A noção de que pequenas mudanças nas condições de um sistema pode causar resultados completamente diferentes esteve presente no estudo de sistemas físicos durante muito tempo, sendo famosamente exposto nas máximas de James C. Maxwell de que a partir das mesmas causas produziremos os mesmos efeitos, mas que não podemos afirmar sempre que de causas parecidas obteremos efeitos parecidos (MAXWELL, 2010). No entanto, esta ideia, hoje central no estudo de sistemas dinâmicos, se manteve principalmente ligada a sistemas com muitos graus de liberdade e despertava pouco interesse na comunidade científica.

O interesse moderno em tais sistemas surge com o artigo de Lorenz (1963) em que ele, no contexto do estudo do movimento atmosférico, reduziu a solução de Saltzman para a convecção de Rayleigh-Bérnard a um sistema de 3 equações

$$\dot{X} = \sigma(Y - X), \quad (2.1)$$

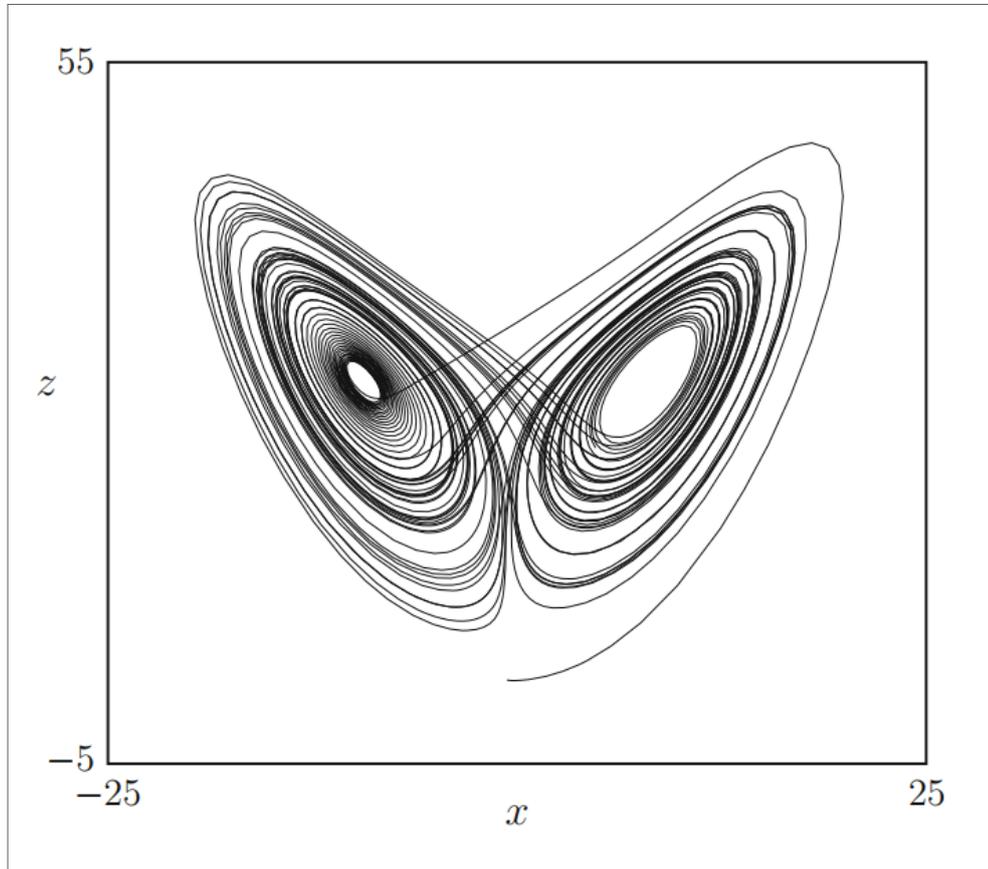
$$\dot{Y} = X(r - Z) - Y, \quad (2.2)$$

$$\dot{Z} = XY - bZ. \quad (2.3)$$

Observando que dentro deste sistema viviam trajetórias não periódicas circulando ao redor de atratores, essas trajetórias eram todas instáveis e portanto qualquer pequena perturbação  $\delta$  sobre elas mudava os resultados por um fator muito maior após um curto tempo. Isso o levou

à conclusão de que não seria possível realizar uma previsão sobre as condições atmosféricas a longo prazo sem conhecimento perfeito das condições iniciais.

Figura 4 – Projeção no plano X-Z de uma órbita descrita pelas equações de Lorenz



Fonte: (BROER; TAKENS, 2011)

## 2.2 CAOS TRANSIENTE

A visão de caos como um comportamento de longo tempo governado por um atrator estranho é de certa forma muito restritiva, excluindo diversos outros sistemas de interesse (TÉL, 2015), em particular sistemas puramente dissipativos. Para lidar com isso introduzimos a ideia de caos transiente.

Dizemos que um sistema apresenta caos transiente quando um comportamento, conforme descrito anteriormente, é observado durante um período  $t$  necessariamente muito maior que o tempo característico de nosso sistema, embora ainda menor que o tempo observacional total

$T_O$ (LAI; TÉL, 2011)

$$t \gg \tau, \quad (2.4)$$

$$t < T_O. \quad (2.5)$$

Devido ao tempo finito de vida desse comportamento a noção de atrator com dinâmica caótica no espaço de fase é substituída pela de um conjunto não atrativo com dinâmica caótica, podendo ser selas estranhas ou repulsores estranhos, o primeiro comumente aparecendo em sistemas dinâmicos inversíveis, enquanto o segundo em não-inversíveis (LAI; TÉL, 2011). Ainda dentro destes transientes existem infinitas trajetórias em que  $t \rightarrow \infty$ , estas ocorrem quando iniciamos na própria sela ou repulsor, no entanto, este conjunto tem medida de Lebesgue 0 e, portanto, em uma escolha aleatória de condições iniciais a chance de escolher uma destas trajetórias é 0 (LAI; TÉL, 2011).

### 2.3 QUASIPERIODICIDADE

A necessidade de exigir que o movimento caótico seja aperiódico vem da existência de outra categoria de comportamento que à primeira vista também aparenta ser aleatório e errático, mas que se trata de uma combinação finita de movimentos periódicos. A este tipo de comportamento damos o nome de quasiperiódico. Uma função quasiperiódica de  $N$  frequências pode ser representada como uma função de  $N$  variáveis independentes

$$F(t_1, t_2, \dots, t_N), \quad (2.6)$$

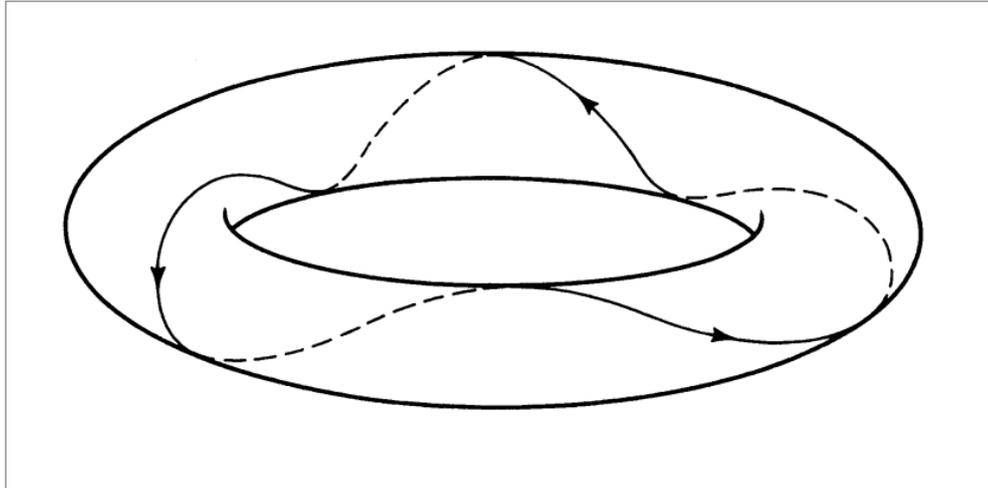
que seja periódica em todas suas variáveis. Por sua vez, as frequências associadas aos períodos de cada uma delas devem ser incomensuráveis, ou seja, nenhuma delas pode ser escrita como uma combinação linear das outras

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \dots + m_N\omega_N = 0, \quad (2.7)$$

onde  $m_i$  são números inteiros (OTT, 2002).

Como funções do tipo 2.6, onde todas as variáveis são periódicas, podem ser pensadas como existindo na superfície de um toro  $T^N$ , podemos visualizar melhor a consequência da incomensurabilidade. No caso em que as  $\omega_i$  não fossem incomensuráveis, após um certo número de voltas sobre o toro, a trajetória voltaria a se repetir conforme a relação  $m_i/m_j$  como no exemplo da figura 5.

Figura 5 – Trajetória de uma função com um  $\frac{m_1}{m_2} = 3$ . O movimento se fecha em si após realizar uma volta ao redor do raio maior e 3 voltas ao redor do raio menor.



Fonte: (OTT, 2002)

Por consequência disso quando  $m_i/m_j$  é um número irracional não é possível que a trajetória se feche, portanto, eventualmente preenche o toro completamente, nunca se repetindo (HILBORN, 2000). Isto tem implicações em nossa capacidade de previsão do futuro destas trajetórias como bem exposto por Broer e Takens (2011), que ao invocar a noção de um “horizonte de previsibilidade”, ou seja, o conjunto de possibilidades para onde o sistema pode evoluir, mostra que este horizonte contém apenas uma possibilidade para um sistema periódico enquanto cresce linearmente para sistemas quasiperiódicos. Este comportamento ainda se difere do que chamamos caótico, pois para isso deve apresentar um crescimento exponencial deste horizonte (BROER; TAKENS, 2011).

Quasiperiodicidade também demonstra ter uma relação com caos quando olhamos para sistemas hamiltonianos devido ao chamado teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser)(OTT, 2002). Isso ocorre porque sistemas hamiltonianos integráveis sempre podem ser escritos na forma descrita em 2.6 por uma transformação canônica, portanto é natural falar da dinâmica desses sistemas como ocorrendo sob um toro. O teorema nos diz que se realizarmos uma pequena perturbação  $\delta$

$$H(\vec{p}, \vec{q}) = H_0(\vec{p}, \vec{q}) + \delta H_1(\vec{p}, \vec{q}), \quad (2.8)$$

as trajetórias periódicas do sistema deixaram de existir para qualquer  $\delta > 0$ , mas as quasiperiódicas continuarão existindo sob um novo toro deformado. As regiões do espaço de fase onde antes viviam as trajetórias periódicas se tornam caóticas, além disso, conforme  $\delta$  é aumentado os toros quasiperiódicos também são destruídos(OTT, 2002).

### 3 EXPOENTES DE LYAPUNOV

Ao falarmos de órbitas e sensibilidade à mudança de condições iniciais é necessário quantificar este comportamento, para isto introduzimos a noção de expoente de Lyapunov para caracterizar sistemas dinâmicos. Por vezes, na literatura, o termo “expoente de Lyapunov” é utilizado com significados levemente diferentes (CVITANOVIĆ et al., 2020), sendo, portanto, importante então definirmos bem a quantidade à qual nos referimos.

#### 3.1 EM MAPAS

Começamos definindo para um mapa unidimensional

$$x_{n+1} = M(x_n). \quad (3.1)$$

Para este mapa o quanto uma órbita iniciada na posição  $x_0$  se move em relação a outra, iniciada em  $x_0 + \delta_0$ , após uma aplicação é dada por

$$|\delta_1| = |M(x_0 + \delta_0) - M(x_0)|, \quad (3.2)$$

$$\approx |\delta_0| \left| \frac{dM(x)}{dx} \right|_{x=x_0}, \quad (3.3)$$

onde assumimos  $\delta_0$  pequeno para aplicar esta aproximação (OTT, 2002). Estendemos então essa noção ao usar essa relação para descrever o comportamento ao longo de uma trajetória inteira onde teremos

$$\delta_n = \delta_0 \left| \frac{dM^{(n)}(x)}{dx} \right|, \quad (3.4)$$

e como  $\frac{dM^{(n)}(x)}{dx}$  é simplesmente a composição das aplicações  $M(x)$ , temos pela regra da cadeia que

$$\frac{dM^{(n)}(x)}{dx} = M'(x_n)M'(x_{n-1})\dots M'(x_0). \quad (3.5)$$

Mas para dizer que o comportamento é caótico esperamos que essa relação tenha uma característica exponencial ao longo da trajetória, portanto

$$e^{h(x)n} = \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| = \prod_{j=0}^n |M'(x_j)|, \quad (3.6)$$

$$h(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n \ln(|M'(x_j)|). \quad (3.7)$$

No limite  $n \rightarrow \infty$  obtemos o que chamamos expoente de Lyapunov, essa condição se faz necessária para que nossa quantidade descreva bem o comportamento em um tempo longo, assim como não dependa da condição inicial (HOLDEN, 1986). Estes resultados podem ser generalizados para maiores dimensões onde  $M'(x_j)$  é substituído pela matriz jacobiana do sistema, os expoentes de Lyapunov, por sua vez, terão relação com seus autovalores (SCHUSTER; JUST, 2005)(OTT, 2002).

### 3.2 EM FLUXOS

Como visto em Benettin et al. (1980a), é possível, de maneira bem geral, escrever uma quantidade

$$h(a_t, \vec{g}) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(\|a_t \vec{g}\|) < \infty, \quad (3.8)$$

em que  $a_t$  é um mapeamento linear de um espaço vetorial  $n$ -dimensional  $E_0$  em outro  $E_t$  e  $g$  um vetor pertencente a  $E_0$ . Ainda podemos definir

$$h(a_t, \vec{g}_i) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(\text{Vol}^n(a_t(U))) < \infty, \quad (3.9)$$

no qual  $\text{Vol}$  representa o volume do paralelepípedo  $n$ -dimensional formado pelos vetores  $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$ . Para estas quantidades, se  $a_t$  for regular podemos substituir os  $\limsup_{t \rightarrow \infty}$  por  $\lim_{t \rightarrow \infty}$  e  $h(E_0) = \sum_{i=1}^n h_i$  (BENETTIN et al., 1980a).

Estamos interessados em particular na variação infinitesimal no caso em que  $a_t$  é um fluxo  $T^t$  em uma variedade diferenciável  $n$  dimensional  $\mathcal{M}$  dotada de uma produto escalar, ou seja  $dT^t : T_x \mathcal{M} \rightarrow T_{T^t x} \mathcal{M}$ . Portanto, para um ponto  $x$  temos

$$h(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(\|dT^t(x)(\vec{g})\|), \quad (3.10)$$

$$\sum_{i=1}^n h_i(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(\text{Vol}^n([dT^t(x)(\vec{g}_1), dT^t(x)(\vec{g}_2), \dots, dT^t(x)(\vec{g}_n)])). \quad (3.11)$$

Importante notar que o resultado do expoente não depende do produto escolhido (ECKMANN; RUELLE, 1985), além disso, o teorema de Oseledec nos diz que esses limites existem e são o mesmo para quase todo  $x$  escolhido na bacia do atrator (OTT, 2002). Também vem do teorema que subespaços  $L_i$  serão tais que  $R^n = L_1 \supset L_2 \supset \dots \supset L_n$  e que isso nos dá (BROER; TAKENS, 2011)(ECKMANN; RUELLE, 1985)(RUELLE, 1989)(BENETTIN et al., 1980a)

$$h_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(dT^t(x)(u)) \iff u \in L_i - L_{i+1}. \quad (3.12)$$

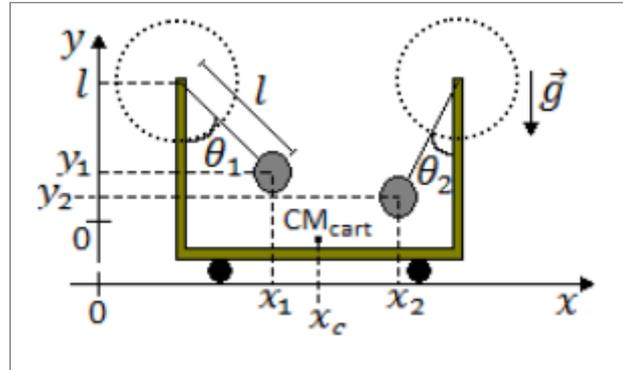
É comum denotarmos esses expoentes ordenadamente com

$$h_1 > h_2 > \dots > h_n \tag{3.13}$$

desta forma é comum definir um sistema como caótico se ao menos  $h_1 > 0$  (HILBORN, 2000)(OTT, 2002), no entanto, é necessário ter cuidado quando tratamos de sistemas transitentes e ter esta quantidade como um forte indicativo, mas não como taxativo da presença de caos (LAI; TÉL, 2011). Para hierarquizar os comportamentos, sistemas com mais de um  $h_i > 0$  por vezes são chamados hiper caóticos.

## 4 PÊNDULOS DE HUYGENS

Figura 6 – Modelo do sistema de pêndulos



Fonte: (FONSECA, 2011)

O sistema ao qual damos o nome de “pêndulos de Huygens” consiste em um acoplamento de dois pêndulos de mesma massa através de um barra rígida que pode mover-se em apenas uma dimensão (FONSECA, 2011) conforme a figura 1 ou, como descrito no capítulo 1, por uma barra superior ligando ambos os pêndulos, mais similar à descrição feita por Willms, Kitanov e Langford (2017) e Blekhman (1988), desde que a barra possa se movimentar livremente e os pêndulos possam realizar rotações completas sem encostarem um no outro. Para analisar o comportamento deste sistema, recorreremos então ao formalismo Lagrangiano

$$L = T - V. \quad (4.1)$$

A lagrangiana para este sistema é simplesmente:

$$L = \frac{M}{2} \dot{x}_c^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - (mgy_1 + mgy_2), \quad (4.2)$$

em que  $M$  e  $m$  são as massas da barra e dos pêndulos respectivamente. A posição horizontal do centro de massa da barra é representado por  $x_c$ , enquanto  $x_1$  e  $y_1$  representam a posição horizontal e vertical do primeiro pêndulo e  $x_2$  e  $y_2$  do segundo. A dissipação, que aparecerá na forma dos coeficientes  $\gamma_1$  e  $\gamma_c$  durante a solução da equação de Euler-Lagrange do sistema, será discutida na seção 4.3.1.

Podemos também escrever a energia total para este sistema como a soma da energia cinética com a potencial:

$$E = \frac{M}{2} \dot{x}_c^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + (mgy_1 + mgy_2). \quad (4.3)$$

#### 4.1 ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

Conforme visto em Fonseca (2011), a equação 4.2 pode ser tornada adimensional para a utilização de métodos numéricos, denotada agora como  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L} = \left( \frac{1}{\beta} + 1 \right) \dot{q}_c^2 + \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \dot{q}_c \dot{q}_1 \cos q_1 + \dot{q}_c \dot{q}_2 \cos q_2 + \cos q_1 + \cos q_2 - 2 \quad (4.4)$$

onde agora  $\beta$  é um parâmetro de proporção entre as massas ( $\beta = \frac{2m}{M}$ ), com este parâmetro é que controlamos a força do acoplamento de nosso sistema. Conforme aumentamos beta, aumentando a massa  $m$  em relação a  $M$ , o acoplamento se torna mais forte e a transferência de energia entre os pêndulos se torna mais fácil. Se, por outro lado, diminuirmos o parâmetro, a energia passa a ser transferida através apenas de pequenos movimentos da barra, levando o sistema para o que chamamos acoplamento fraco. No limite deste comportamento os pêndulos agem de forma completamente independente.

As variáveis  $q_c$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  são coordenadas generalizadas para o problema que se relacionam com as coordenadas anteriores através da descrição do movimento a partir dos ângulos formado entre os pêndulos de comprimento  $l$  e o eixo vertical

$$q_c = \frac{x_c}{l} \quad (4.5a)$$

$$q_1 = \theta_1 \quad (4.5b)$$

$$q_2 = \theta_2 \quad (4.5c)$$

mais especificamente as relações se dão por:

$$x_c = l q_c \quad (4.6a)$$

$$x_1 = l q_c + k_1 + l \sin q_1 \quad (4.6b)$$

$$x_2 = l q_c + k_2 + l \sin q_2 \quad (4.6c)$$

$$y_1 = l(1 - \cos q_1) \quad (4.6d)$$

$$y_2 = l(1 - \cos q_2), \quad (4.6e)$$

sendo  $k_1$ ,  $k_2$  a distância do centro de massa da barra até pivô dos respectivos pêndulos.

Também definimos um  $\omega_0$  que tem unidade de frequência como

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (4.7)$$

sendo essa a frequência de um pêndulo simples, de comprimento  $l$ , em pequenas oscilações. Com isso podemos definir um  $\tau$  adimensional na forma

$$\tau = \omega_0 t \quad (4.8)$$

de modo que a derivada com respeito a esta nova variável, se relaciona com a derivada em relação ao tempo pela equação

$$\frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau} \quad (4.9a)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \omega_0^2 \frac{d^2}{d\tau^2} \quad (4.9b)$$

como bem mostrado em Fonseca (2011).

Aplicando este conjunto de equações 4.6 a energia obtemos

$$E = \frac{M}{2} l^2 \dot{q}_c^2 + \frac{m}{2} (l^2 (\dot{q}_c + \dot{q}_1 \cos q_1)^2 + l^2 \dot{q}_1^2 \sin^2 q_1) + \frac{m}{2} (l^2 (\dot{q}_c + \dot{q}_2 \cos q_2)^2 + l^2 \dot{q}_2^2 \sin^2 q_2) + mg(l(1 - \cos q_1) + l(1 - \cos q_2)) \quad (4.10)$$

reorganizamos a equação para obter

$$E = \frac{l^2}{2} (M + 2m) \dot{q}_c^2 + \frac{m}{2} l^2 ((\dot{q}_c \dot{q}_1 \cos q_1 + \dot{q}_1 \cos q_1)^2 + l^2 \dot{q}_1^2 \sin^2 q_1) + \frac{m}{2} (l^2 (\dot{q}_c + \dot{q}_2 \cos q_2)^2 + l^2 \dot{q}_2^2 \sin^2 q_2) + mg(l(1 - \cos q_1) + l(1 - \cos q_2)) \quad (4.11)$$

Dividimos então a equação toda por  $mg l$ , em nosso sistema corresponde a energia potencial de um dos pêndulos quando solto com angulo  $\frac{\pi}{2}$ , ficamos com

$$\mathcal{E} = \frac{E}{mg l} = \frac{l}{2g} \left( \frac{M}{m} + 2 \right) \dot{q}_c^2 + \frac{l}{2g} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{l}{g} (\dot{q}_c \dot{q}_1 \cos q_1 + \dot{q}_c \dot{q}_2 \cos q_2) + (2 - \cos q_1 - \cos q_2) \quad (4.12)$$

Aplicando então 4.9 junto ao fato de que  $\frac{l}{g} = \frac{1}{\omega_0^2}$  simplificará 4.12 para

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\omega_0^2} \left( \frac{M}{m} + 2 \right) \dot{q}_c^2 + \frac{1}{2\omega_0^2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{\omega_0^2} (\dot{q}_c \dot{q}_1 \cos q_1 + \dot{q}_c \dot{q}_2 \cos q_2) + (2 - \cos q_1 - \cos q_2) \quad (4.13)$$

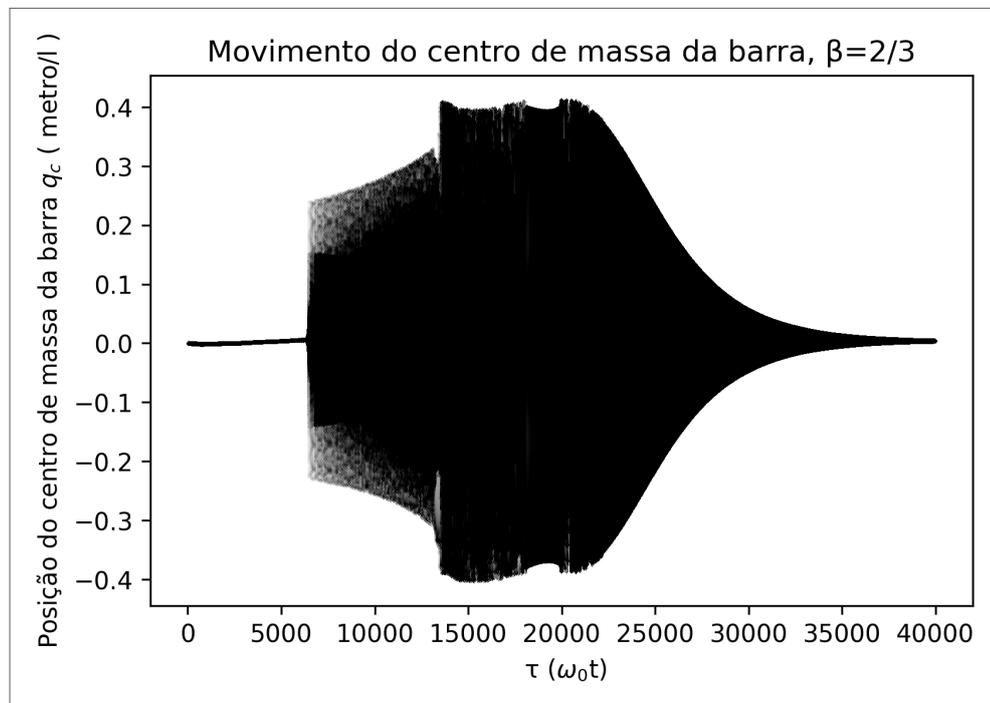
Onde agora o ponto acima da variável denota uma derivada em relação ao  $\tau$  e nossa energia está adimensionalizada, valores inteiros de 4.13 correspondem a múltiplos de  $mg l$ . Deste modo é necessário ter ao menos  $\mathcal{E} = 2$  para que um pêndulo realize uma rotação completa. As duas quantidades adimensionais  $\tau$  e  $\mathcal{E}$  são fundamentais na análise do comportamento do sistema.

$$\mathcal{E} = \left( \frac{1}{\beta} + 1 \right) \dot{q}_c^2 + \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \dot{q}_c \dot{q}_1 \cos q_1 + \dot{q}_c \dot{q}_2 \cos q_2 - \cos q_1 - \cos q_2 + 2. \quad (4.14)$$

Quando vamos à região onde  $\mathcal{E} \gg 1$  entramos no regime não linear, nele observamos um comportamento errático de nosso sistema, sem nenhum período aparente se não impomos condições iniciais simétricas. Conforme acompanhamos o movimento para  $\tau \gg 1$  é possível observar o efeito das forças de atrito no sistema o levando de volta ao regime linear, onde os pêndulos tendem a assumir um movimento em anti-fase por ser o modo de movimento que dispersa menos energia como observaremos na próxima seção.

Se o mesmo processo é feito utilizando o lagrangiano no lugar da energia a equação 4.4 é obtida.

Figura 7 – Movimento do centro de massa da barra que acopla os pêndulos com condição inicial quase simétrica. Condições iniciais  $q_c = 0$ ,  $q_1 = -q_2 = \pi/2$ ,  $\dot{q}_1 = 15 - 0,05$ ,  $\dot{q}_2 = -15$ ,  $\dot{q}_c = 0$ ,  $\gamma_1 = 0.0001$ ,  $\gamma_c = 0.004$  e  $\beta = 2/3$



Fonte: O Autor(2022)

## 4.2 PEQUENAS OSCILAÇÕES

No regime de pequenas oscilações é possível realizar a análise dos modos normais de movimento deste sistema através da equação

$$\det[\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}] = 0, \quad (4.15)$$

onde  $\omega$  são as auto-frequências do movimento. Reproduzimos então os resultados obtidos por Fonseca (2011) de que as auto-frequências são

$$\omega_1^2 = 1 \quad (4.16)$$

$$\omega_2^2 = 1 + \beta \quad (4.17)$$

$$\omega_3^2 = 0, \quad (4.18)$$

sendo  $\omega_3$  correspondente ao movimento de translação de todo o sistema, sem movimento dos pêndulos.

Vemos que o resultado de  $\omega_1$  corresponde ao mesmo valor que demos para  $\omega_0$  em nossas unidades. Isto ocorre por este estado corresponder ao movimento em anti-fase dos pêndulos, com auto-vetor

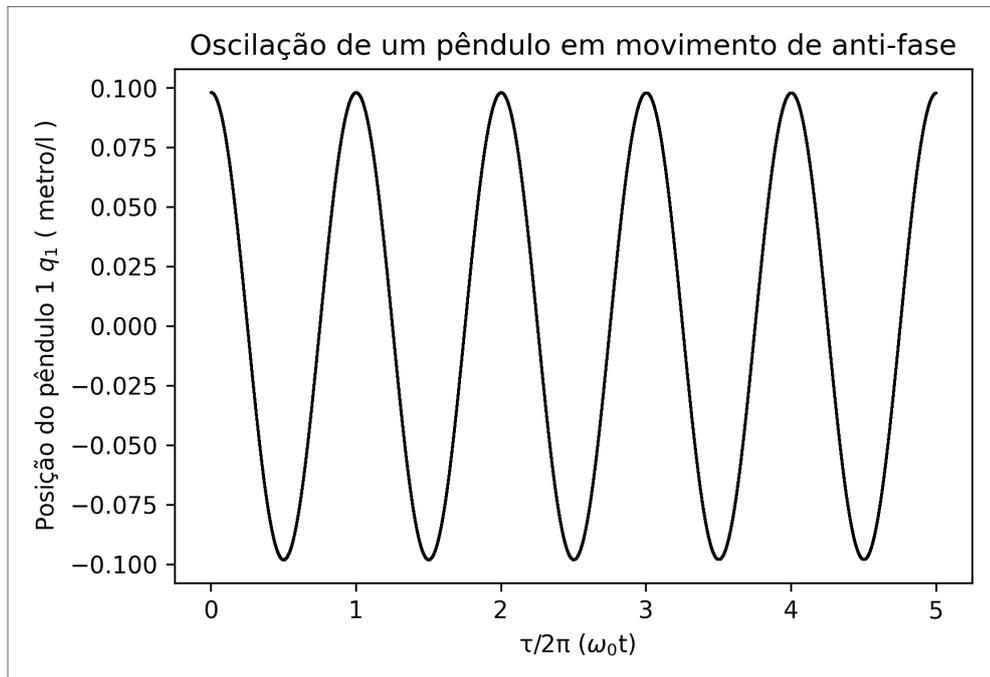
$$\vec{\rho}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.19)$$

Onde as duas primeiras variáveis se referem à posição dos pêndulos e a terceira à posição da barra. Neste estado os dois pêndulos se comportam como pêndulos simples e independentes, não gerando movimento na barra.

Por outro lado,  $\omega_2$  é sempre maior que nossa frequência  $\omega_0$  ( $\omega_2 = \omega_0\sqrt{1+\beta}$ ) devido ao movimento que ocorre da barra. Esta auto-frequência corresponde ao movimento em fase dos pêndulos, em que a barra se move na direção oposta aos pêndulos devido à conservação de momentum, como exposto pelo auto-vetor:

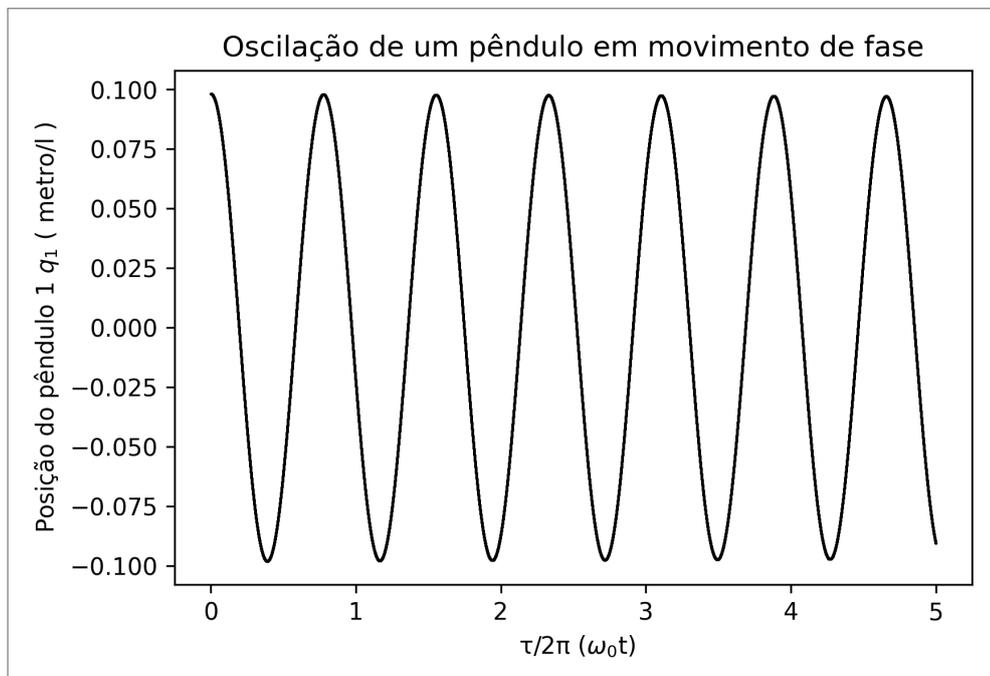
$$\vec{\rho}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{\beta}{1+\beta} \end{Bmatrix}. \quad (4.20)$$

Figura 8 – Em pequenas oscilações com pêndulos oscilando em modo de anti-fase, os pêndulos completam uma oscilação em um tempo  $\tau = 2\pi$ . Condições iniciais  $q_c = 0$ ,  $q_1 = q_2 = \pi/32$ ,  $\dot{q}_1 = -\dot{q}_2 = 0$ ,  $\dot{q}_c = 0$ ,  $\gamma_1 = 0.0001$ ,  $\gamma_c = 0.004$  e  $\beta = 2/3$



Fonte: O Autor(2022)

Figura 9 – Em pequenas oscilações com pêndulos oscilando em modo de fase, os pêndulos completam uma oscilação em menos de um tempo  $\tau = 2\pi$ . Condições iniciais  $q_c = 0$ ,  $q_1 = q_2 = \pi/32$ ,  $\dot{q}_1 = -\dot{q}_2 = 0$ ,  $\dot{q}_c = 0$ ,  $\gamma_1 = 0.0001$ ,  $\gamma_c = 0.004$  e  $\beta = 2/3$



Fonte: O Autor(2022)

### 4.3 MOVIMENTOS DE SIMETRIA

Analizamos agora dois casos especiais do movimento do sistema. Estes movimentos se relacionam com os modos normais em pequenas oscilações, são eles o caso em que os pêndulos iniciam seu movimento com condições iniciais simétricas, relacionada ao modo de oscilação em fase, e o caso com condições iniciais anti-simétricas que se relaciona ao modo de oscilação em anti-fase.

#### 4.3.1 Movimento dos pêndulos em fase

Nesta situação os pêndulos realizam o mesmo movimento, na mesma velocidade, isso corresponde a aplicarmos as seguintes restrições:

$$q_1 = q_2 \quad (4.21a)$$

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_2. \quad (4.21b)$$

Deste modo, reduzimos nossa equação se reduz a

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \dot{q}_c^2 + \frac{\dot{q}_1^2}{2} + \frac{\dot{q}_1^2}{2} + \dot{q}_c \dot{q}_1 \cos q_1 + \dot{q}_c \dot{q}_1 \cos q_1 + \cos q_1 + \cos q_1 - 2 \\ &= \left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \dot{q}_c^2 + \dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_c \dot{q}_1 \cos q_1 + 2 \cos q_1 - 2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Podemos então analisar as equações de movimento considerando uma força dissipativa não potencial através de equação da Euler-Lagrange modificada

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (4.23)$$

sendo  $i$  um índice que pode assumir os valores  $c, 1$  ou  $2$ . A função  $\mathcal{F}$  atua modelando uma força de atrito em nosso sistema que será dada por

$$\mathcal{F} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \gamma_i \dot{q}_i^2 \quad (4.24)$$

chamada de função de Rayleigh (JOSÉ; SALETAN, 1998)(GOLDSTEIN, 1980)(LEMONS, 2013). Os termos  $\gamma_i$  correspondem aos coeficientes de atrito de cada parte de nosso sistema de acordo com seu índice. Como nosso sistema está adimensionalizado, nossos  $\gamma_i$  também serão adimensionais ( $\frac{\text{kg}}{\text{sm}\omega_0}$ ).

Ao aplicar em nosso sistema temos as equações de movimento

$$\ddot{q}_1 = -(\sin q_1 + \ddot{q}_c \cos q_1) - \gamma_1 \dot{q}_1 \quad (4.25a)$$

$$\ddot{q}_c = \frac{2 \sin q_1 (\cos q_1 + \dot{q}_1^2) + 2\gamma_1 \cos q_1 \dot{q}_1 - \gamma_c \dot{q}_c}{2 \left( \left( \frac{1}{\beta} + 1 \right) - \cos^2 q_1 \right)}. \quad (4.25b)$$

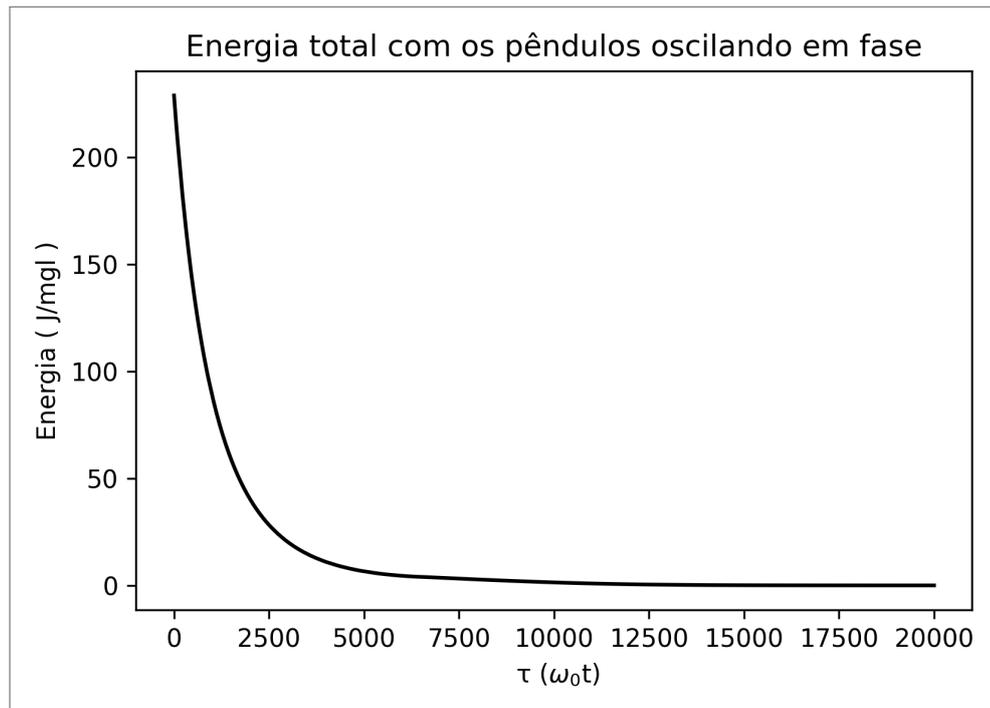
Podemos ver que nesta circunstância há um acoplamento entre como os pêndulos se movem e o movimento da barra, isto é esperado devido à conservação de momentum do conjunto.

Sua energia total será:

$$\mathcal{E}_f = \left( \frac{1}{\beta} + 1 \right) \dot{q}_c^2 + \dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_c \dot{q}_1 \cos q_1 - 2 \cos q_1 + 2, \quad (4.26)$$

que não decresce monotonicamente como podemos ver na figura 11.

Figura 10 – Energia total do sistema com os pêndulos oscilando em modo de fase. Condições iniciais  $q_c = 0$ ,  $q_1 = q_2 = \pi$ ,  $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 15$ ,  $\dot{q}_c = 0$ ,  $\gamma_1 = 0.0001$ ,  $\gamma_c = 0.004$  e  $\beta = 2/3$



Fonte: O Autor(2022)

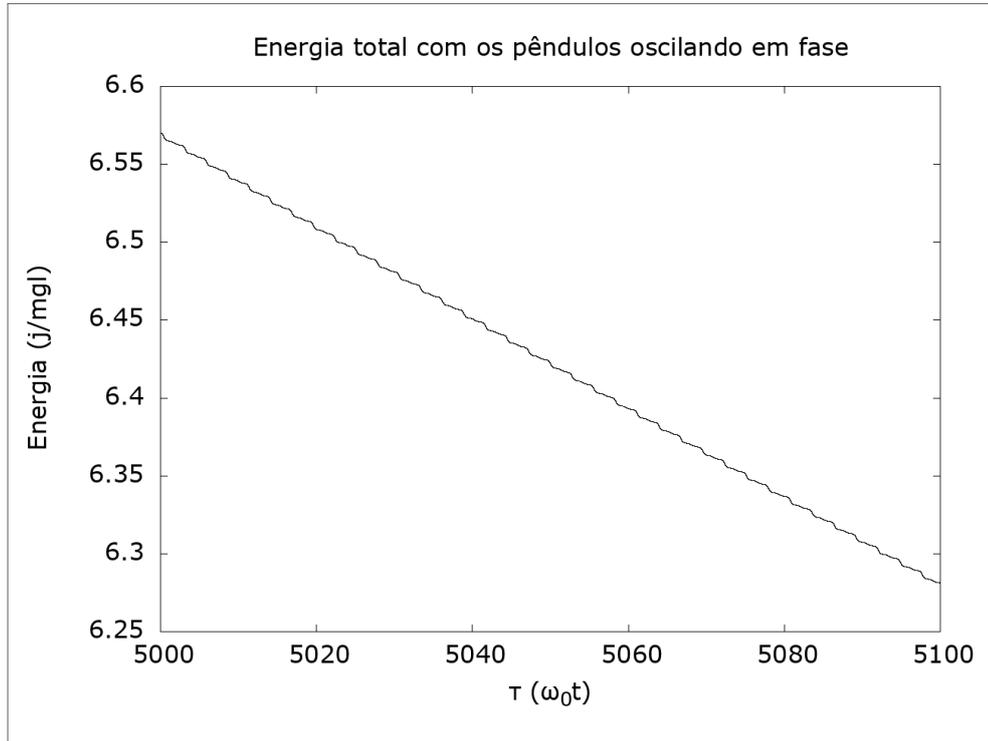
### 4.3.2 Movimento dos pêndulos em anti-fase

Neste caso, as condições a serem aplicadas são

$$q_1 = -q_2, \quad (4.27a)$$

$$\dot{q}_1 = -\dot{q}_2, \quad (4.27b)$$

Figura 11 – Energia total do sistema com os pêndulos oscilando em fase não decresce monotonamente



Fonte: O Autor(2022)

com as quais é possível obter novamente uma versão mais simples para o lagrangiano

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \dot{q}_c^2 + \frac{\dot{q}_1^2}{2} + \frac{\dot{q}_1^2}{2} + \dot{q}_c \dot{q}_1 \cos q_1 - \dot{q}_c \dot{q}_1 \cos -q_1 + \cos q_1 + \cos -q_1 - 2 \\ &= \left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \dot{q}_c^2 + \dot{q}_1^2 + 2 \cos q_1 - 2.\end{aligned}\quad (4.28)$$

Ao aplicar novamente 4.23 temos as duas equações de movimento para este novo caso

$$\ddot{q}_1 = -\sin q_1 - \gamma_1 \dot{q}_1, \quad (4.29a)$$

$$\ddot{q}_c = -\frac{\gamma_c}{\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)} \dot{q}_c. \quad (4.29b)$$

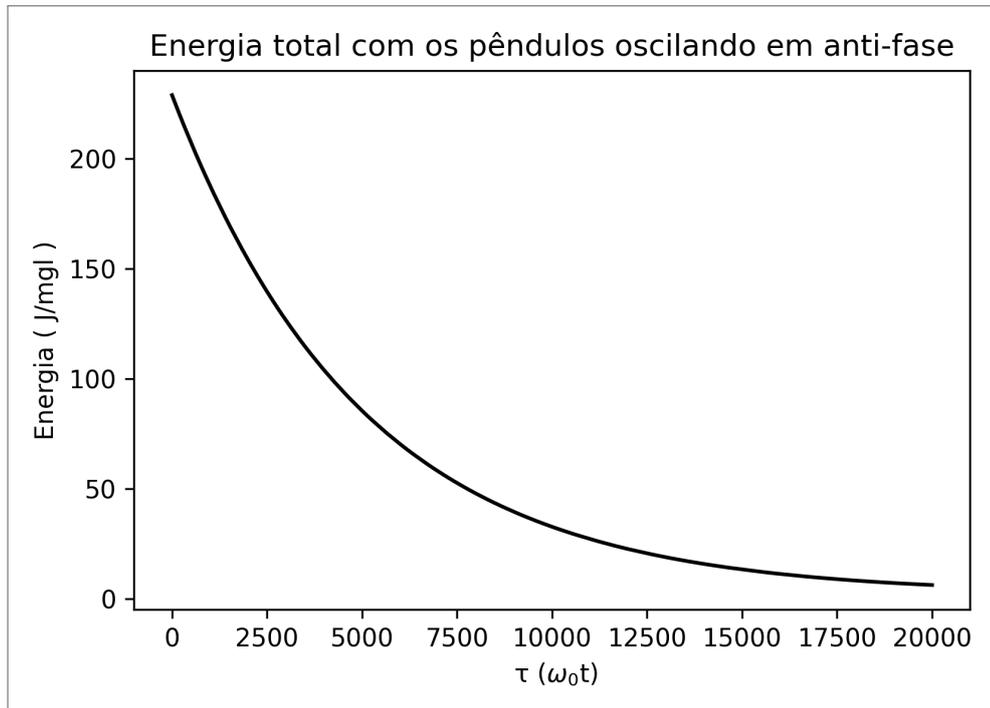
Percebemos que agora as equações não estão acopladas. O movimento dos pêndulos corresponde ao de pêndulos simples sob a ação de uma força dissipativa. Já a barra caso tenha velocidade inicial apenas desacelerará no tempo e caso não tenha velocidade inicial continuará parada, o movimento dos pêndulos não irá gerar um novo movimento nela.

A energia total se torna:

$$\mathcal{E}_{af} = \left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \dot{q}_c^2 + \dot{q}_1^2 - 2 \cos q_1 + 2, \quad (4.30)$$

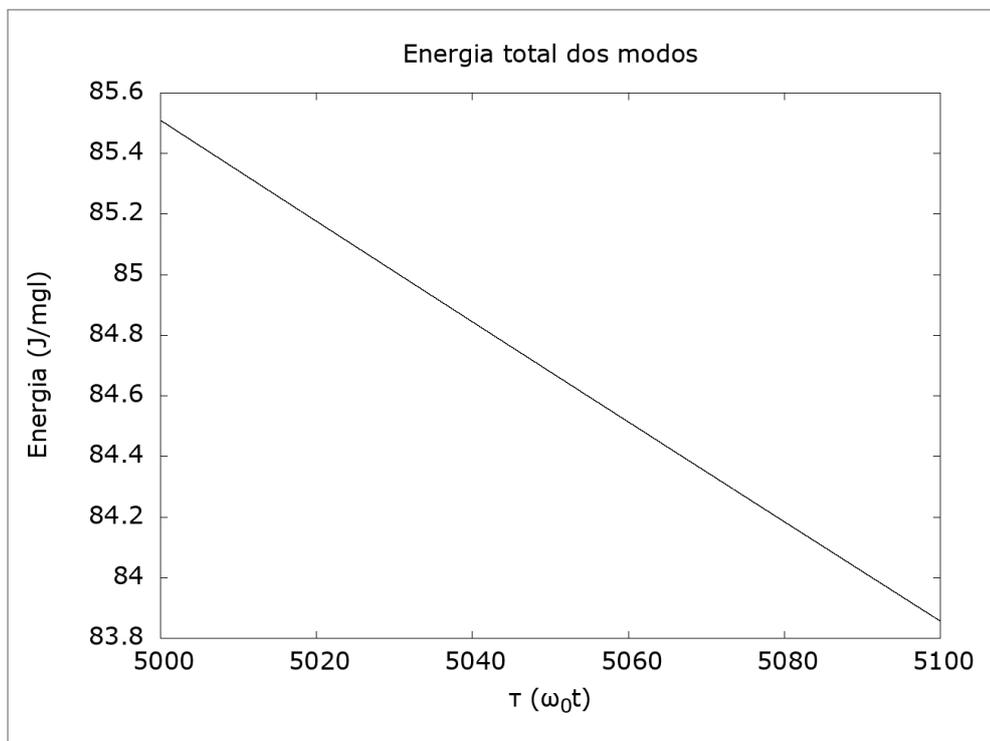
que, ao contrário do caso anterior, decresce monotonamente como visto na figura 13

Figura 12 – Energia total do sistema com pêndulos oscilando em modo de anti-fase. Condições iniciais  $q_c = 0$ ,  $q_1 = q_2 = \pi$ ,  $\dot{q}_1 = -\dot{q}_2 = 15$ ,  $\dot{q}_c = 0$ ,  $\gamma_1 = 0.0001$ ,  $\gamma_c = 0.004$  e  $\beta = 2/3$



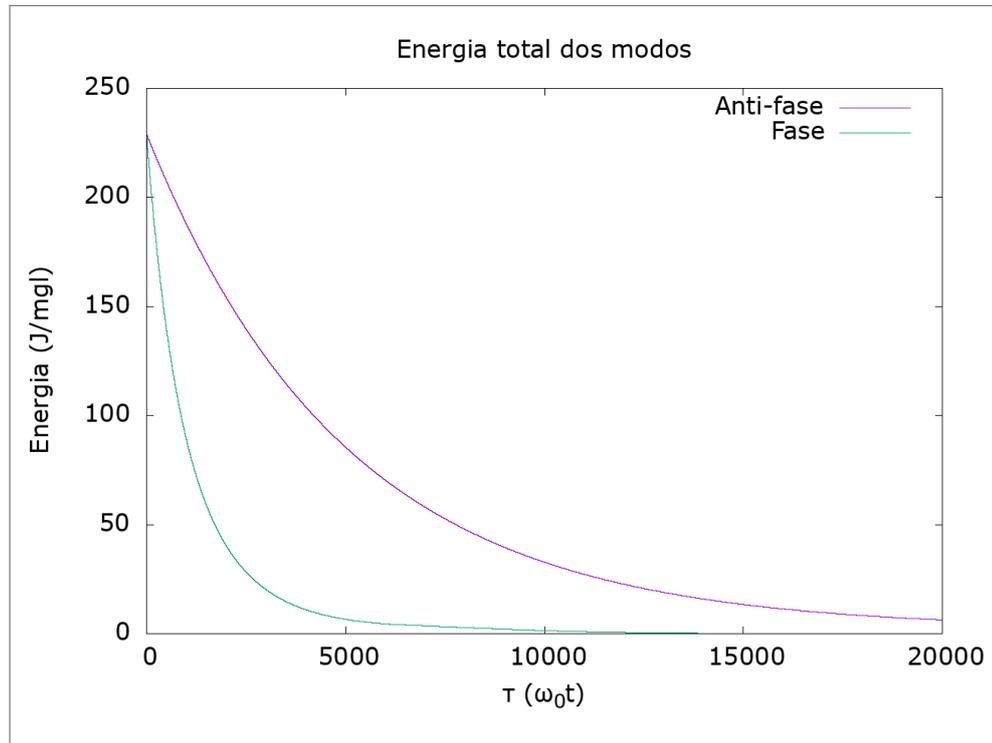
Fonte: O Autor(2022)

Figura 13 – Energia total do sistema com os pêndulos oscilando em anti-fase decresce monotonicamente



Fonte: O Autor(2022)

Figura 14 – Comparação entre as curvas de energia total de ambos os modos de oscilação do sistema



Fonte: O Autor(2022)

#### 4.4 UMA VISÃO ALTERNATIVA

Tendo em vista estes dois modos de movimento distintos observados, podemos buscar reescrever nosso sistema em termos de variáveis que representem essa dinâmica. Para isso realizamos a mudança de variáveis

$$q_a = \frac{q_1 - q_2}{2} \quad (4.31)$$

$$q_s = \frac{q_1 + q_2}{2} \quad (4.32)$$

que nos leva ao lagrangiano

$$\mathcal{L} = \left( \frac{1}{\beta} + 1 \right) \dot{q}_c^2 + \dot{q}_a^2 + \dot{q}_s^2 + 2\dot{q}_c\dot{q}_s \cos q_a \cos q_s - 2\dot{q}_c\dot{q}_a \sin q_a \sin q_s + \cos q_a \cos q_s - 2 \quad (4.33)$$

Essa é uma transformação pontual do espaço de configuração e pode ser facilmente estendida como para uma transformação canônica no espaço de fase (SUSSMAN; WISDOM, 2014), preservando, portanto, toda a dinâmica hamiltoniana do sistema. Essa transformação pode ser gerada por uma função geradora do tipo 2 (GOLDSTEIN, 1980)

$$F_2 = \left( \frac{q_1 - q_2}{2} \right) P_a + \left( \frac{q_1 + q_2}{2} \right) P_s \quad (4.34)$$

em que  $P_a, P_s$  são os momentos conjugados as suas respectivas variáveis e podem ser encontrados em função dos momentos relativos a  $q_1$  e  $q_2$ .

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 + \dot{q}_c \cos q_1 = \dot{q}_a + \dot{q}_s + \dot{q}_c (\cos q_a \cos q_s - \sin q_a \sin q_s)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_2 + \dot{q}_c \cos q_2 = \dot{q}_s - \dot{q}_a + \dot{q}_c (\cos q_a \cos q_s + \sin q_a \sin q_s)$$

de modo que

$$P_a = P_1 - P_2 \quad (4.35)$$

$$P_s = P_1 + P_2. \quad (4.36)$$

Buscamos então tratar numericamente nossas novas equações. Para isto transformamos o sistema de 3 equações de movimento de 2ª ordem obtidos a partir de 4.33

$$\ddot{q}_a = \ddot{q}_c \sin q_a \sin q_s - \sin q_a \cos q_s - \gamma_1 \dot{q}_a$$

$$\ddot{q}_s = \ddot{q}_c \cos q_a \cos q_s - \cos q_a \sin q_s - \gamma_1 \dot{q}_s$$

$$\ddot{q}_c = [\sin q_s (\sin^2 q_a \cos q_s + \dot{q}_a^2 \cos q_a) + \cos q_a (\cos^2 q_s \sin q_a + \dot{q}_s^2 \sin q_s) +$$

$$+ 2\dot{q}_a \dot{q}_s \sin q_a \cos q_s + \gamma_1 (\dot{q}_s \cos q_a \cos q_s - \dot{q}_a \sin q_a \sin q_s)$$

$$- \frac{\gamma_c}{2} \dot{q}_c] \left[ \left( \frac{1}{\beta} + 1 \right) - (\cos q_a \cos q_s)^2 - (\sin q_a \sin q_s)^2 \right]^{-1},$$

em um sistema de 6 equações de 1ª ordem que serão integradas numericamente

$$\dot{q}_a = \nu_a \quad (4.37)$$

$$\dot{q}_s = \nu_s \quad (4.38)$$

$$\dot{q}_c = \nu_c \quad (4.39)$$

$$\dot{\nu}_a = \dot{\nu}_c \sin q_a \sin q_s - \sin q_a \cos q_s - \gamma_1 \nu_a \quad (4.40)$$

$$\dot{\nu}_s = \dot{\nu}_c \cos q_a \cos q_s - \cos q_a \sin q_s - \gamma_1 \nu_s \quad (4.41)$$

$$\dot{\nu}_c = [\sin q_s (\sin^2 q_a \cos q_s + \nu_a^2 \cos q_a) + \cos q_a (\cos^2 q_s \sin q_a + \nu_s^2 \sin q_s) +$$

$$+ 2\nu_a \nu_s \sin q_a \cos q_s + \gamma_1 (\nu_s \cos q_a \cos q_s - \nu_a \sin q_a \sin q_s)$$

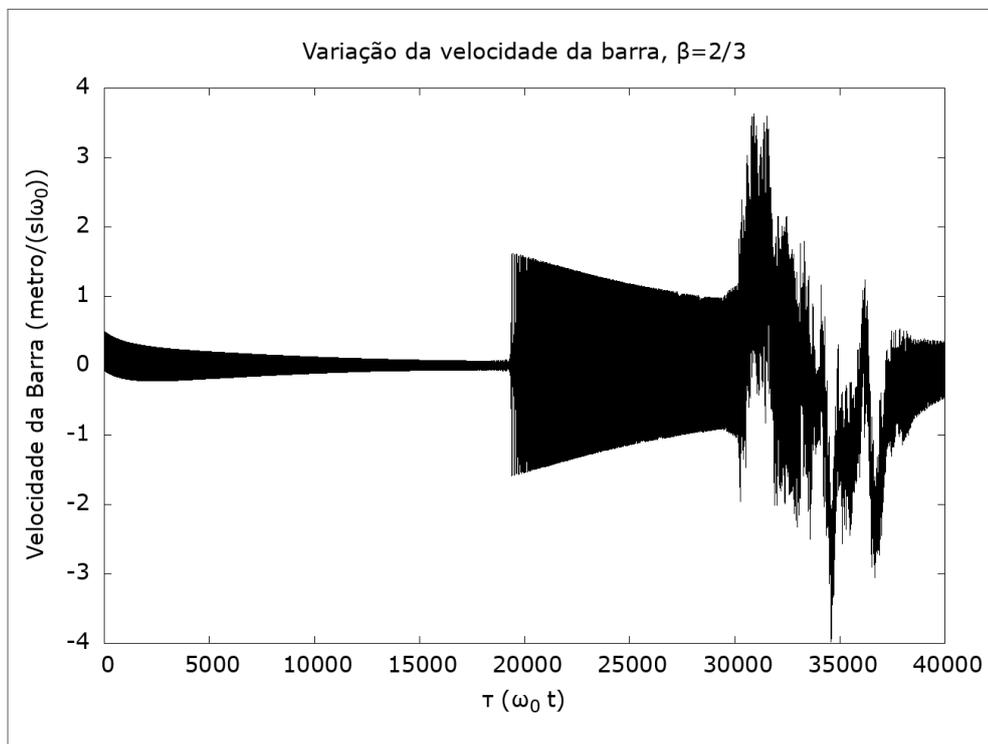
$$- \frac{\gamma_c}{2} \nu_c] \left[ \left( \frac{1}{\beta} + 1 \right) - (\cos q_a \cos q_s)^2 - (\sin q_a \sin q_s)^2 \right]^{-1} \quad (4.42)$$

Este conjunto de equações apresenta um desafio quando integramos numericamente. Ao utilizar o método de Runge-Kutta explícito de 4ª ordem, sendo este o método mais comum encontrado na literatura, percebemos que apesar de ser um sistema dissipativo a energia do sistema divergia após alguns passos de integração. Este problema persistiu com alguns outros

métodos utilizados. Para solucionar isto foi necessário utilizar um método de Runge-Kutta implícito da família Radau disponibilizado no pacote *scipy* para a linguagem *python*. Os dados para as figuras expostas neste capítulo assim como nos próximos foram obtidos desta forma, foi utilizado também um passo de integração  $dt = 0.0002$ .

Podemos agora observar que a velocidade da barra apresenta comportamento similar ao da posição do centro de massa visto por Fonseca (2011), ao escolhermos condições iniciais mistas. Isto é, vemos uma região bem comportada, onde a barra oscila levemente, outra onde aparece uma forte oscilação na variável, em um terceiro momento um movimento aparentemente caótico e por fim voltamos a ter uma região bem comportada.

Figura 15 – Velocidade do centro de massa da barra. Condições iniciais  $q_c = 0$ ,  $q_a = 0$ ,  $q_s = 0$   $\dot{q}_a = 20$   $\dot{q}_s = 0.5$ ,  $\dot{q}_c = 0$ ,  $\gamma_1 = 0.00005$ ,  $\gamma_c = 0.005$  e  $\beta = 2/3$

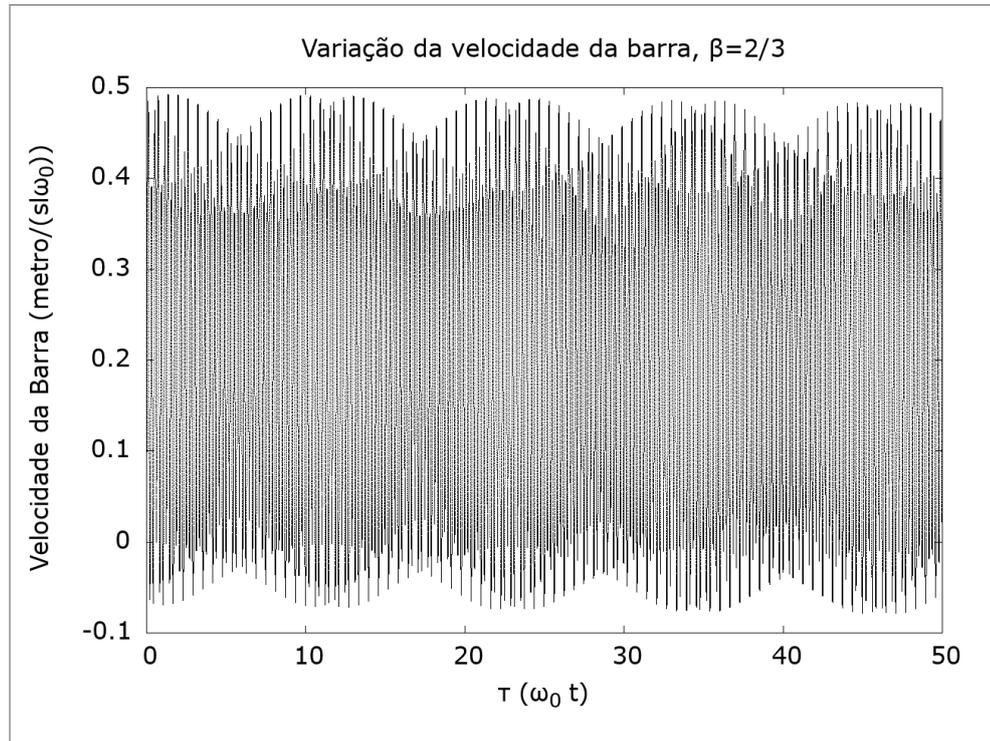


Fonte: O Autor(2022)

A existência de uma velocidade inicial no modo simétrico gera uma velocidade no início do movimento da barra levando a um movimento oscilatório atenuado devido ao atrito como vemos melhor na figura 16. O sistema passa então por uma região em que está com quase toda sua energia no modo correspondente aos pêndulos se movimentarem em anti-fase. Vemos então uma mudança brusca no movimento, com o surgimento mais uma frequência de oscilação em sua composição, sendo este de maior amplitude. Este aparecimento seguido da diminuição gradual da amplitude desta frequência é característico de uma bifurcação de Hopf supercrítica

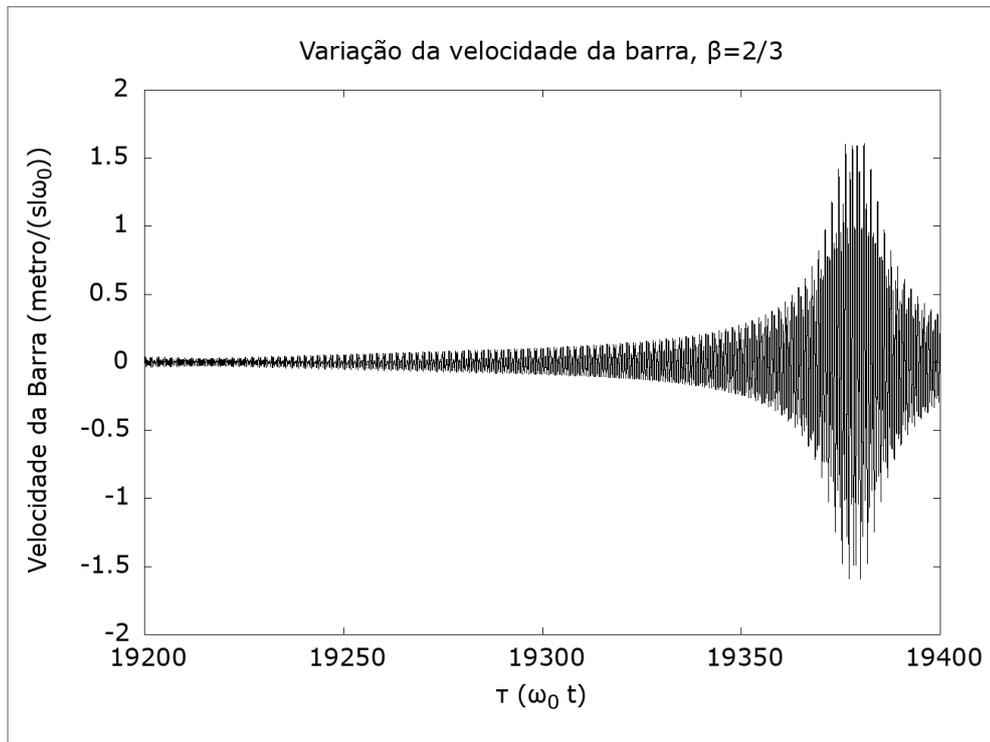
(STROGATZ, 1994). Ao olharmos de maneira mais próxima esta região na figura 17, percebemos que este comportamento ocorre como na forma de pulsos, sendo então denominado respiração do sistema. Percebemos também, ao analisarmos a figura 18 que a distância entre os picos desses pulsos diminui gradualmente.

Figura 16 – Velocidade do centro de massa da barra em detalhe na região inicial. Condições iniciais  $q_c = 0$ ,  $q_a = 0$ ,  $q_s = 0$   $\dot{q}_a = 20$   $\dot{q}_s = 0.5$ ,  $\dot{q}_c = 0$ ,  $\gamma_1 = 0.00005$ ,  $\gamma_c = 0.005$  e  $\beta = 2/3$



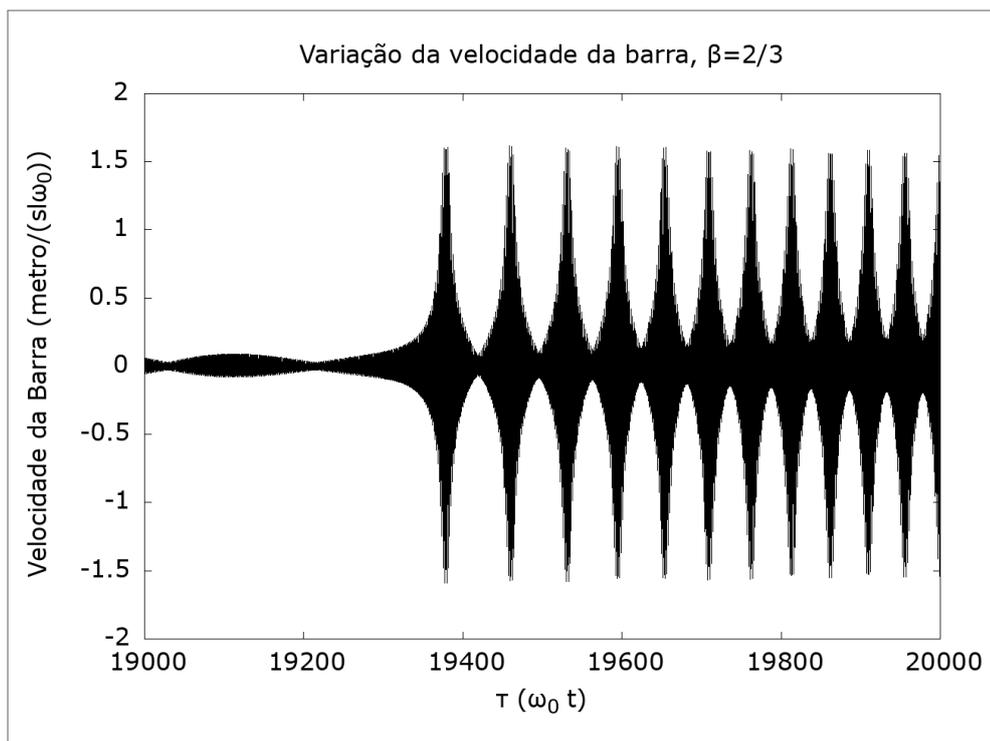
Fonte: O Autor(2022)

Figura 17 – Velocidade do centro de massa da barra próximo a região onde é observada uma mudança de comportamento. Condições iniciais  $q_c = 0$ ,  $q_a = 0$ ,  $q_s = 0$ ,  $\dot{q}_a = 20$ ,  $\dot{q}_s = 0.5$ ,  $\dot{q}_c = 0$ ,  $\gamma_1 = 0.00005$ ,  $\gamma_c = 0.005$  e  $\beta = 2/3$



Fonte: O Autor(2022)

Figura 18 – Aproximação entre os picos da oscilação. Condições iniciais  $q_c = 0$ ,  $q_a = 0$ ,  $q_s = 0$ ,  $\dot{q}_a = 20$ ,  $\dot{q}_s = 0.5$ ,  $\dot{q}_c = 0$ ,  $\gamma_1 = 0.00005$ ,  $\gamma_c = 0.005$  e  $\beta = 2/3$



Fonte: O Autor(2022)

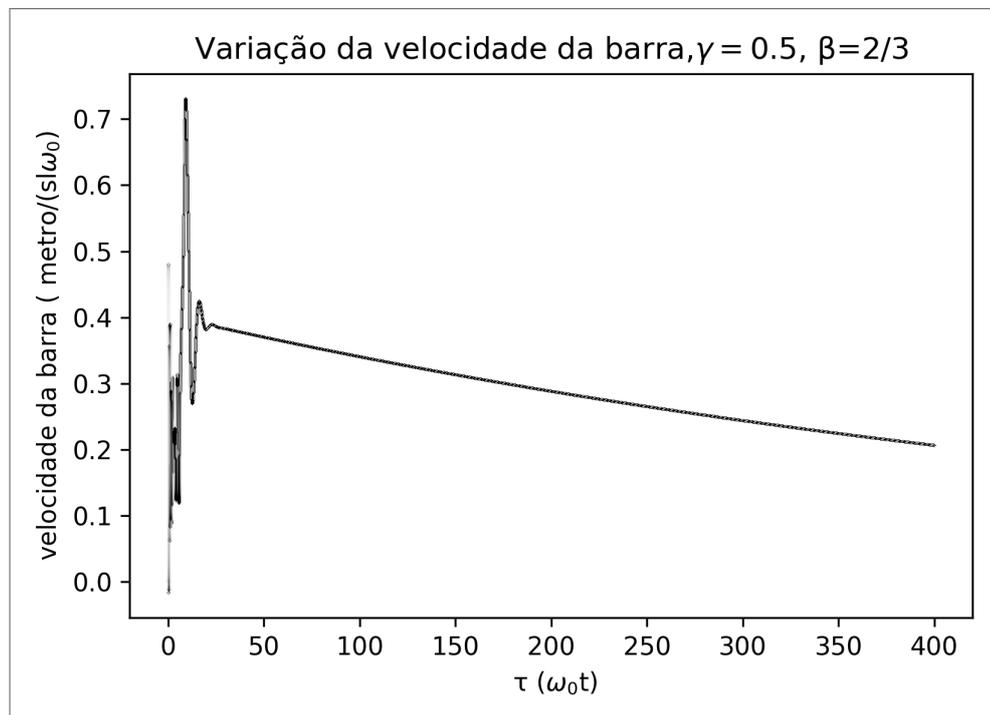
## 5 EFEITOS DA VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

Dado a forma que a equação 4.33 se apresenta combinada com a função de dissipação 4.24 que introduzimos, percebemos que temos 3 parâmetros de controle no sistema,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_c$  e  $\beta$ . Realizamos então a variação destes parâmetros para melhor entender como o sistema se comporta. Começamos com a escolha de diferentes valores para a resistência sobre os pêndulos.

### 5.1 VARIANDO O ATRITO NOS PÊNDULOS

Para valores mais altos de  $\gamma_1$  vemos que apenas um curto movimento devido aos pêndulos, seu movimento então para e resta apenas o momentum transferido pelo modo simétrico à barra que decai mais lentamente como observamos na figura 19.

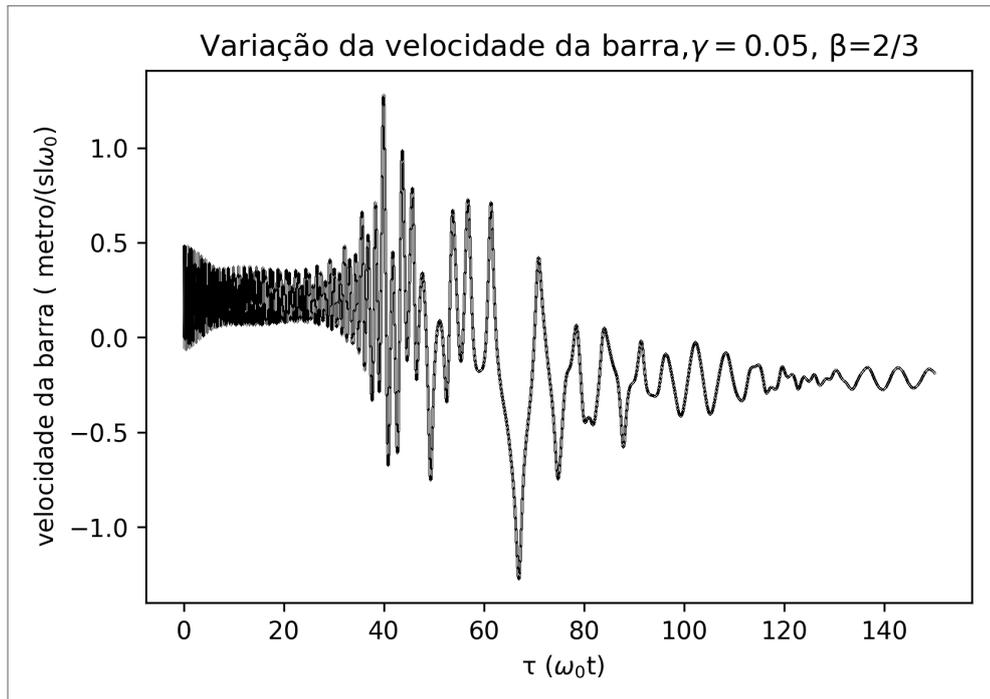
Figura 19 – Velocidade do centro de massa da barra para  $\gamma_1 = 0,5$ . Condições iniciais  $q_c = 0$ ,  $q_a = 0$ ,  $q_s = 0$   $\dot{q}_a = 20$   $\dot{q}_s = 0,5$ ,  $\dot{q}_c = 0$ ,  $\gamma_1 = 0,5$ ,  $\gamma_c = 0,005$  e  $\beta = 2/3$



Fonte: O Autor(2022)

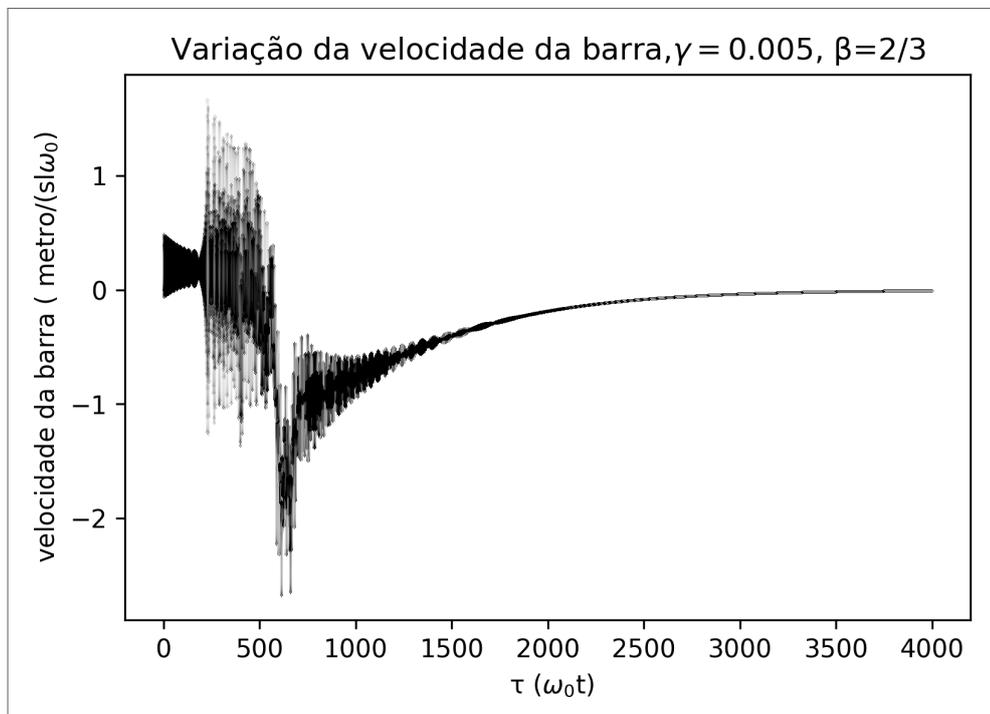
Nas figuras 20 e 21 vemos que o movimento já tem algumas das regiões observadas inicialmente de modo mais definida embora ainda em uma escala menor devido à perda de energia. A região de rápida perda de energia devido ao movimento simétrico ainda se confunde com a região em que constatamos a mudança de comportamento.

Figura 20 – Velocidade do centro de massa da barra para  $\gamma_1 = 0,05$ . Condições iniciais  $q_c = 0$ ,  $q_a = 0$ ,  $q_s = 0$ ,  $\dot{q}_a = 20$ ,  $\dot{q}_s = 0,5$ ,  $\dot{q}_c = 0$ ,  $\gamma_1 = 0,05$ ,  $\gamma_c = 0,005$  e  $\beta = 2/3$



Fonte: O Autor(2022)

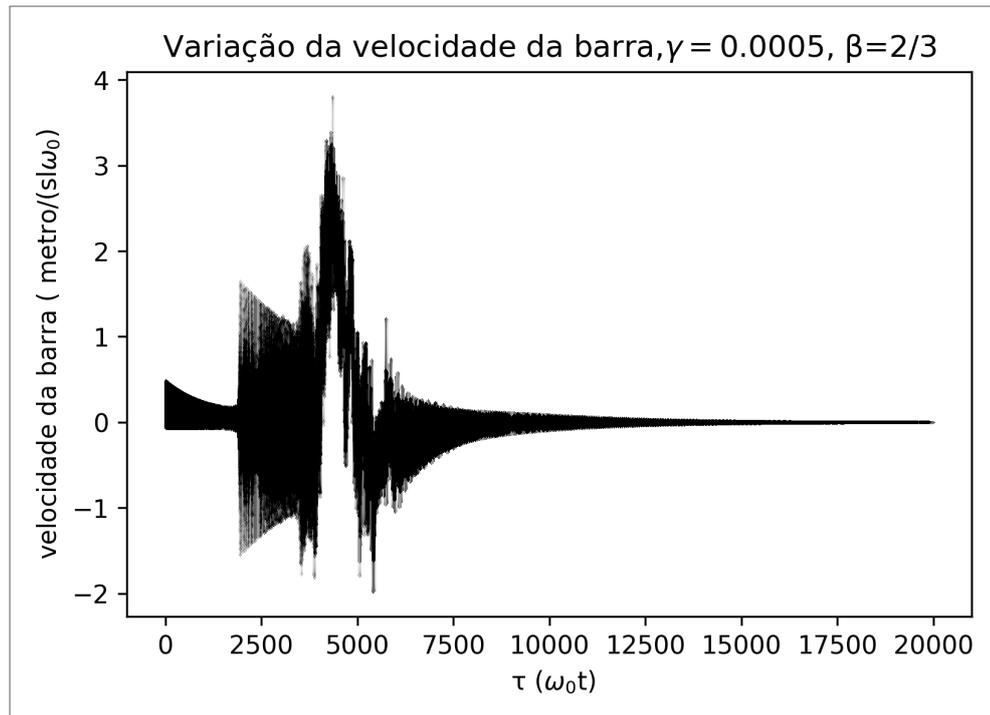
Figura 21 – Velocidade do centro de massa da barra para  $\gamma_1 = 0,005$ . Condições iniciais  $q_c = 0$ ,  $q_a = 0$ ,  $q_s = 0$ ,  $\dot{q}_a = 20$ ,  $\dot{q}_s = 0,5$ ,  $\dot{q}_c = 0$ ,  $\gamma_1 = 0,005$ ,  $\gamma_c = 0,005$  e  $\beta = 2/3$



Fonte: O Autor(2022)

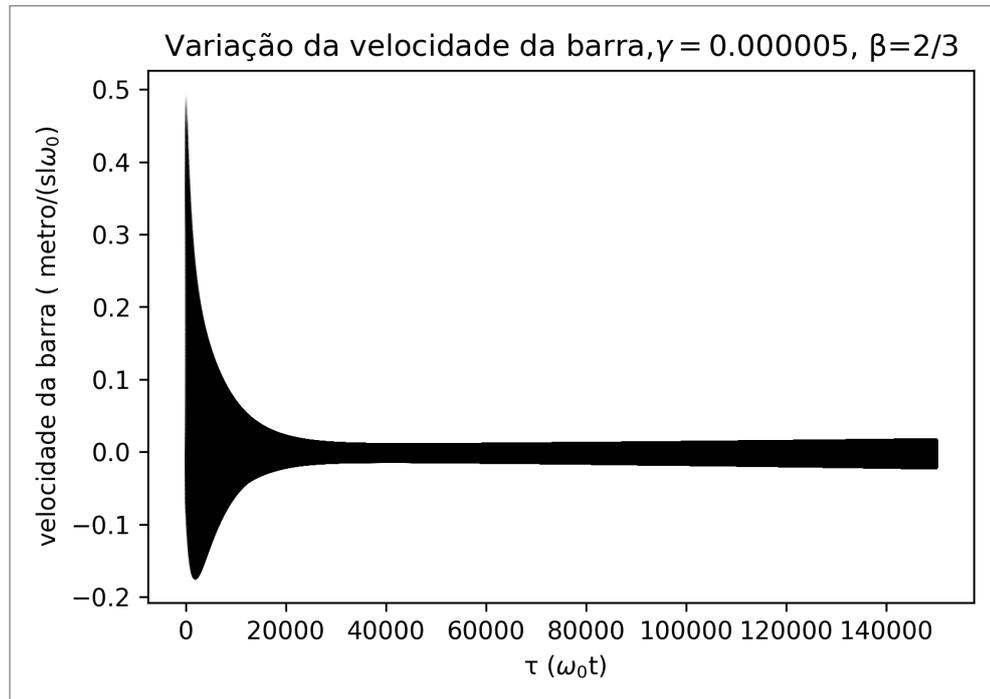
Ao fazermos  $\gamma_1 = 0,0005$ , as regiões então bem delimitadas ainda que curtas. O comportamento é muito similar ao visto na figura 15. Para  $\gamma_1 = 0,000005$  o comportamento também é similar, mas as escalas em que os comportamentos ocorrem se tornam muito maiores, de modo que se torna muito difícil evitar que a energia divirja numericamente como podemos observar na figura 23, nela também podemos ver que além dos modos rápidos de oscilação, também esta presente uma frequência lenta de oscilação no movimento.

Figura 22 – Velocidade do centro de massa da barra para  $\gamma_1 = 0,0005$ . Condições iniciais  $q_c = 0$ ,  $q_a = 0$ ,  $q_s = 0$   $\dot{q}_a = 20$   $\dot{q}_s = 0.5$ ,  $\dot{q}_c = 0$ ,  $\gamma_1 = 0.0005$ ,  $\gamma_c = 0.005$  e  $\beta = 2/3$



Fonte: O Autor(2022)

Figura 23 – Velocidade do centro de massa da barra para  $\gamma_1 = 0,000005$ . Condições iniciais  $q_c = 0$ ,  $q_a = 0$ ,  $q_s = 0$ ,  $\dot{q}_a = 20$ ,  $\dot{q}_s = 0.5$ ,  $\dot{q}_c = 0$ ,  $\gamma_1 = 0.000005$ ,  $\gamma_c = 0.005$  e  $\beta = 2/3$



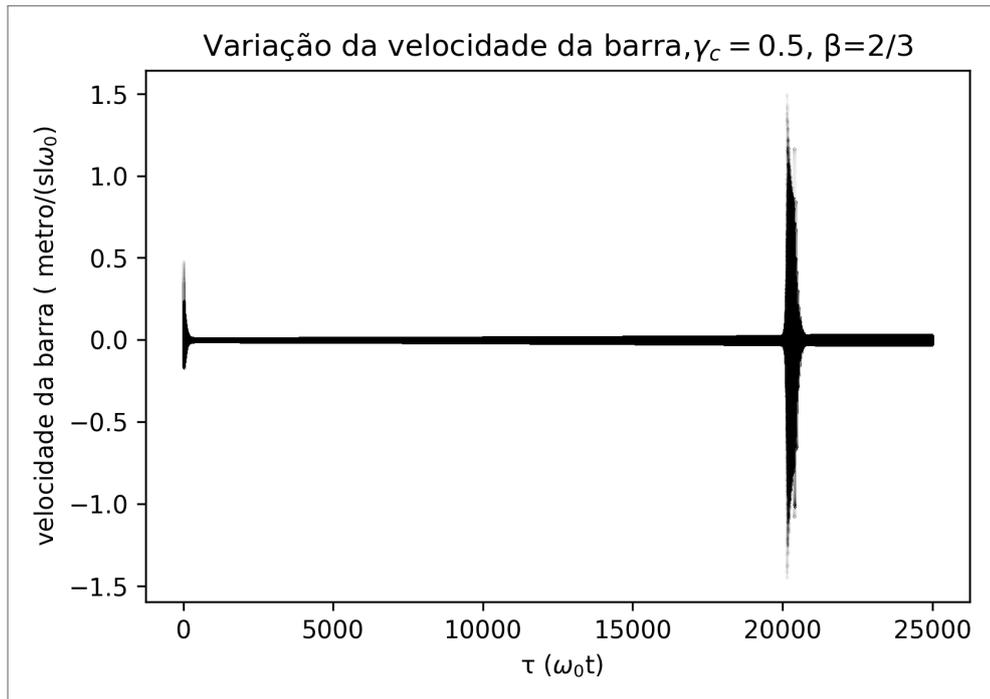
Fonte: O Autor(2022)

## 5.2 VARIANDO O ATRITO NA BARRA

Verificamos que ao mudar os valores de  $\gamma_c$  a dinâmica encurta ou alonga as faixas de tempo da região onde há o decaimento inicial, devido à velocidade no modo simétrico, tal modo é o único que interage com a barra. Também interage na região após a bifurcação e onde o movimento errático devido ao ganho repentino de velocidade da barra.

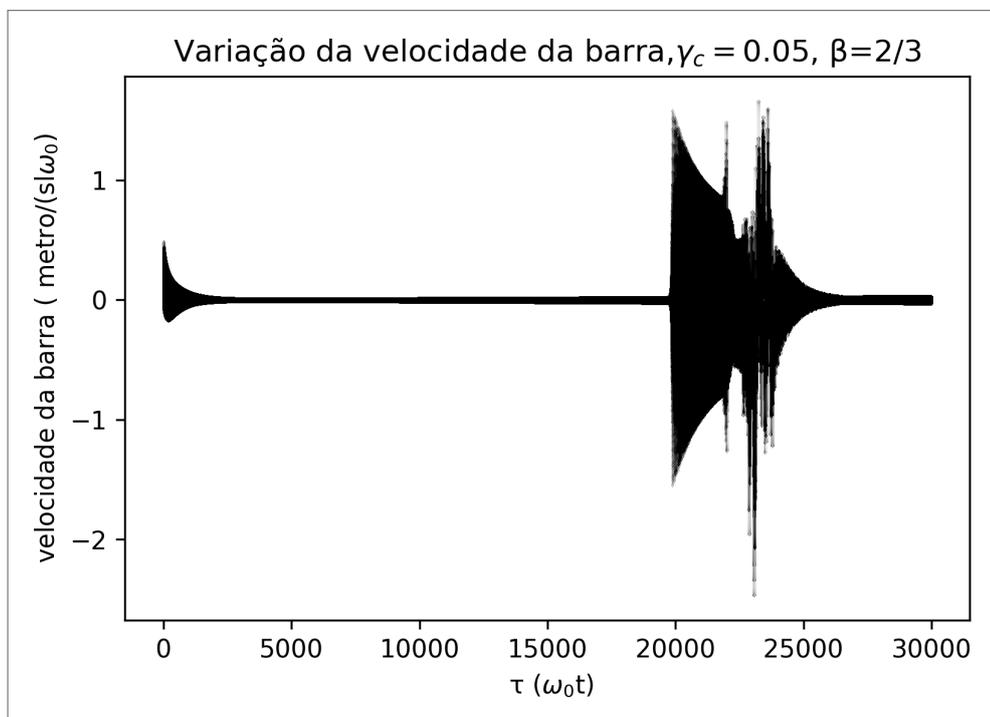
A análise da seção 5.1 e desta indica que a ocorrência das diferentes regiões de comportamento está ligado à presença de condições iniciais que misturam os dois diferentes modos de movimento e também à energia total do sistema, de modo que a alteração das forças dissipativas altera apenas os comprimentos das regiões, mas não sua existência. Deste modo temos que cada região, para um  $\beta$  fixo, está ligada a um conjunto diferente de hiperfícies, no espaço de fase, de energia constante por onde a dinâmica do sistema acontece. É possível então pensar na energia como um segundo parâmetro ao lado de  $\beta$ , enquanto  $\gamma_1$  e  $\gamma_c$  controlam indiretamente a evolução deste parâmetro.

Figura 24 – Velocidade do centro de massa da barra para  $\gamma_c = 0,5$ . Condições iniciais  $q_c = 0, q_a = 0, q_s = 0$   
 $\dot{q}_a = 20 \dot{q}_s = 0,5, \dot{q}_c = 0, \gamma_1 = 0,00005, \gamma_c = 0,5$  e  $\beta = 2/3$



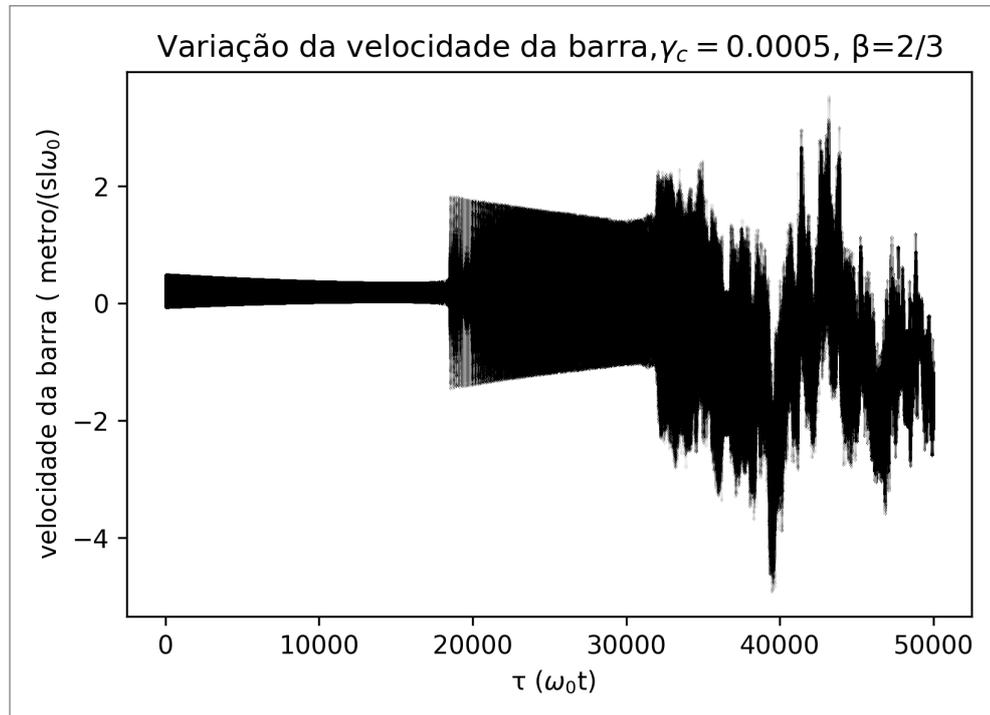
Fonte: O Autor(2022)

Figura 25 – Velocidade do centro de massa da barra para  $\gamma_c = 0,05$ . Condições iniciais  $q_c = 0, q_a = 0, q_s = 0$   
 $\dot{q}_a = 20 \dot{q}_s = 0,5, \dot{q}_c = 0, \gamma_1 = 0,00005, \gamma_c = 0,05$  e  $\beta = 2/3$



Fonte: O Autor(2022)

Figura 26 – Velocidade do centro de massa da barra para  $\gamma_c = 0,00005$ . Condições iniciais  $q_c = 0$ ,  $q_a = 0$ ,  $q_s = 0$   $\dot{q}_a = 20$   $\dot{q}_s = 0.5$ ,  $\dot{q}_c = 0$ ,  $\gamma_1 = 0.00005$ ,  $\gamma_c = 0.00005$  e  $\beta = 2/3$

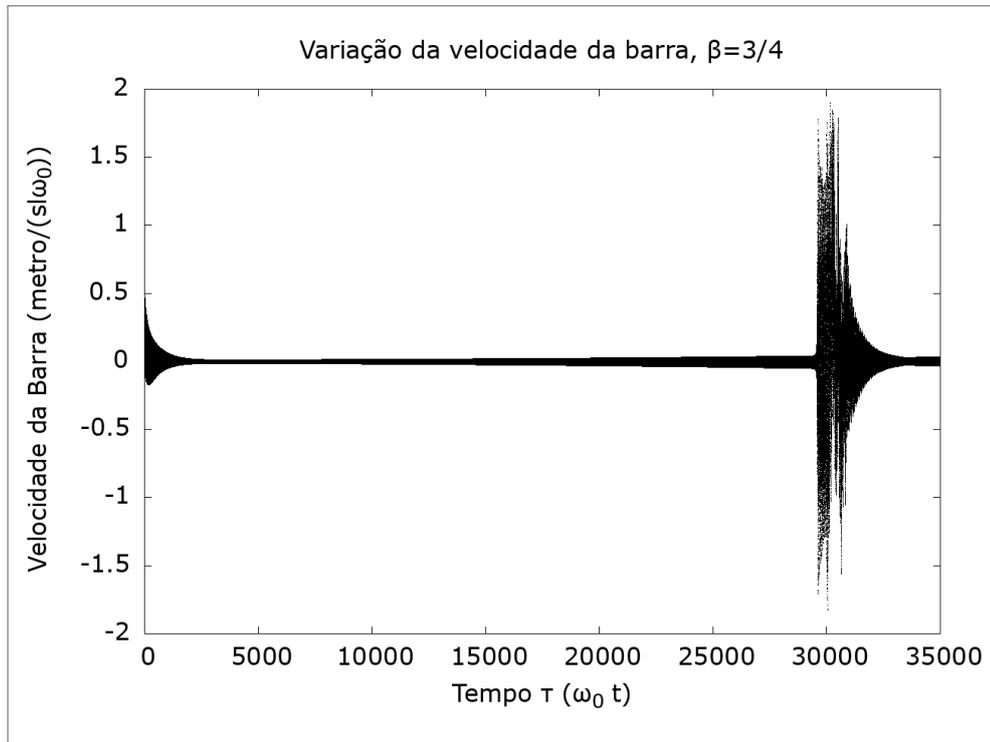


Fonte: O Autor(2022)

### 5.3 VARIANDO O PARÂMETRO DE ACOPLAMENTO ( $\beta$ )

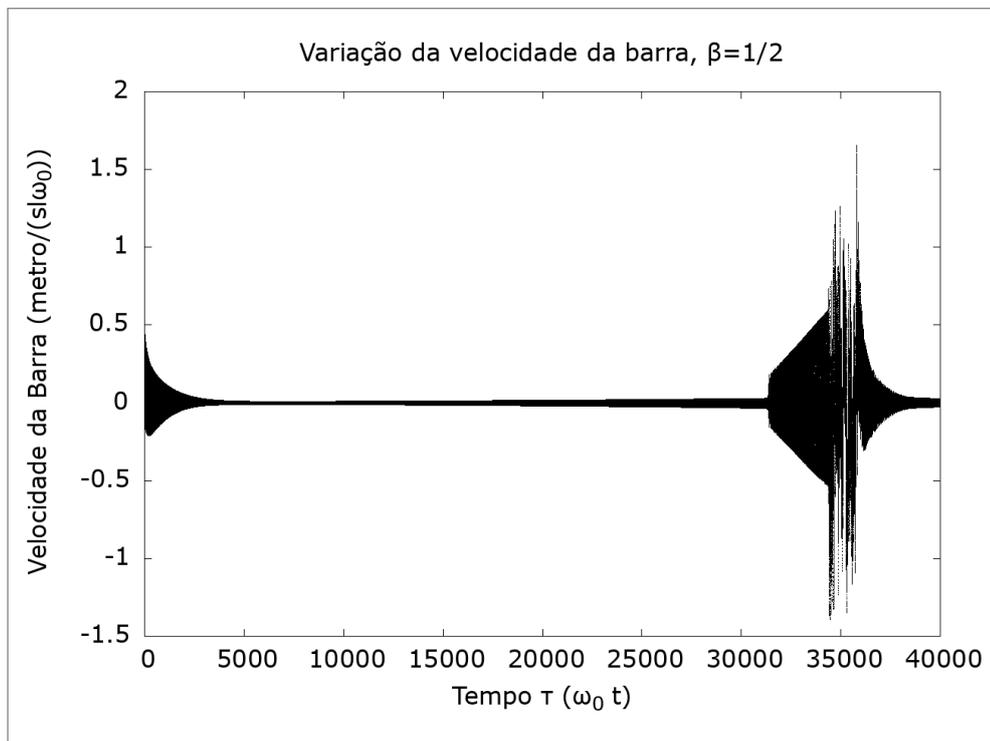
Ao variar o último parâmetro de nosso sistema percebemos que ele é capaz de alterar algumas propriedades do sistema, em especial nas figuras 27 e 28 é fácil notar mudanças na região em que observamos as respirações anteriormente. Ao aproximarmos levemente mais os valores de  $m$  e  $M$ , fazendo  $\beta = 3/4$ , o sistema ainda parece apresentar a região mais errática, no entanto, não tem mais as respirações, ficando, portanto, com apenas 3 regiões. Por outro lado, se diminuirmos um pouco essa relação, em comparação com a que vínhamos usando ( $\beta = 2/3$ ), as 4 regiões são mantidas, no entanto, a forma como entramos nas respirações é alterada. Ao invés de observarmos o aparecimento de uma nova frequência que em seguida diminui de amplitude, vemos que ela aumenta até a mudança para a nova região. Portanto, mudando do que antes era característico de uma bifurcação de Hopf supercrítica para uma subcrítica (STROGATZ, 1994). No limite  $\beta \rightarrow 0$  temos que os pêndulos não estariam mais acoplados, portanto, devem se comportar como pêndulos simples, onde, mesmo no regime não linear, caos não é observado.

Figura 27 – Velocidade do centro de massa da barra para  $\beta = 3/4$ . Condições iniciais  $q_c = 0$ ,  $q_a = 0$ ,  $q_s = 0$   
 $\dot{q}_a = 20$   $\dot{q}_s = 0.5$ ,  $\dot{q}_c = 0$ ,  $\gamma_1 = 0.00005$ ,  $\gamma_c = 0.05$  e  $\beta = 3/4$



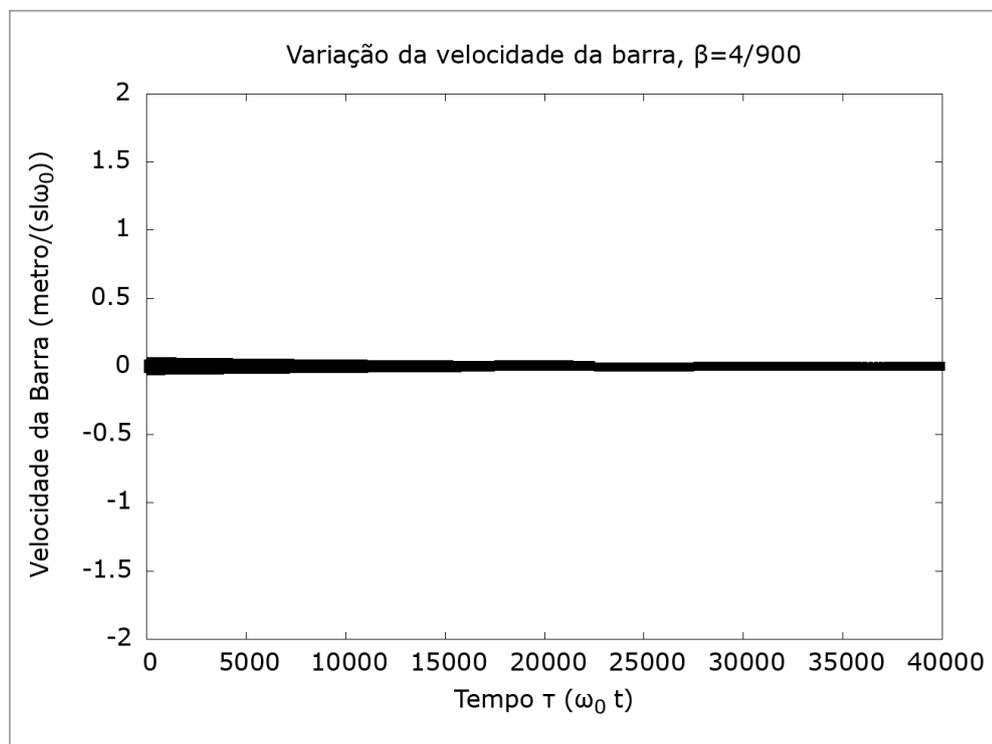
Fonte: O Autor(2022)

Figura 28 – Velocidade do centro de massa da barra para  $\beta = 1/2$ . Condições iniciais  $q_c = 0$ ,  $q_a = 0$ ,  $q_s = 0$   
 $\dot{q}_a = 20$   $\dot{q}_s = 0.5$ ,  $\dot{q}_c = 0$ ,  $\gamma_1 = 0.00005$ ,  $\gamma_c = 0.05$  e  $\beta = 1/2$



Fonte: O Autor(2022)

Figura 29 – Velocidade do centro de massa da barra para  $\beta = 4/900$ . Condições iniciais  $q_c = 0$ ,  $q_a = 0$ ,  $q_s = 0$ ,  $\dot{q}_a = 20$ ,  $\dot{q}_s = 0.5$ ,  $\dot{q}_c = 0$ ,  $\gamma_1 = 0.00005$ ,  $\gamma_c = 0.05$  e  $\beta = 4/900$



Fonte: O Autor(2022)

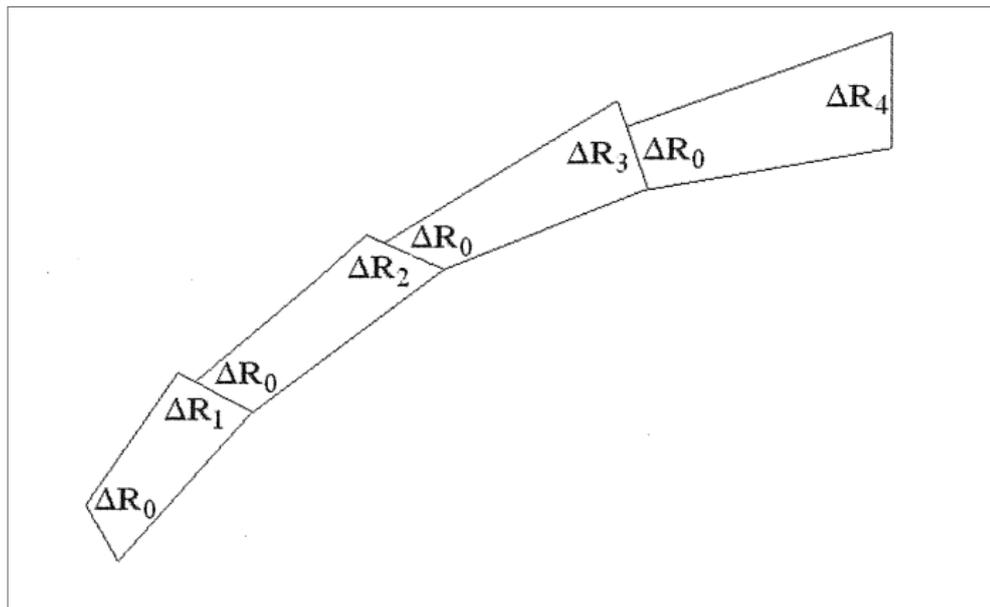
## 6 CÁLCULO DO MAIOR EXPOENTES DE LYAPUNOV DO SISTEMA

### 6.1 O MÉTODO

Tentamos então caracterizar nosso sistema e suas diferentes janelas de comportamento em termos de seus expoentes de Lyapunov, no entanto, a análise numérica do limite 3.10 é difícil devido ao próprio crescimento exponencial das quantidades. Partimos então para a implementação do método numérico para o cálculo do maior expoente de Lyapunov descrito em Benettin et al. (1980b) assim como em Sprott (2001), tirando proveito da possibilidade de decomposição do fluxo em  $dT^{t+s}(x)(\vec{g}) = dT^t(x(s))(dT^s(x)(\vec{g}))$ . Partindo de um conjunto de condições iniciais de certa energia, calculamos numericamente a evolução de duas trajetórias separadas por uma perturbação da ordem de  $d = 10^{-8}$  em cada uma de suas coordenadas. Este valor foi escolhido baseado na precisão numérica da variável *double* utilizada no processo. Utilizando  $w_i$  como as componentes de nossa trajetória fiduciária e  $w'_i$  as de sua perturbação,  $\Delta R_0$  em 30 se relaciona com nosso  $d$  por

$$\Delta R_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^6 (w_i - w'_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^6 d^2} \quad (6.1)$$

Figura 30 – Representação gráfica do processo numérico de cálculo do expoente máximo de Lyapunov



Fonte: (SPROTT, 2001)

Após um passo ( $d\tau$ ) analisamos a relação entre a distância inicial ( $d_0$ ) e a evoluída ( $d_1$ ) é

analisada

$$\alpha_1 = \frac{d_1}{d_0}, \quad (6.2)$$

seu valor é então redefinido, ajustando a direção do vetor distância para a que mais cresceu utilizando

$$w'_i = w_i + \frac{d_0}{d_1}(w'_i - w_i). \quad (6.3)$$

Após repetir esse processo  $n$  vezes temos:

$$h_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nd\tau} \sum_{i=1}^n \ln(\alpha_i). \quad (6.4)$$

## 6.2 RESULTADO

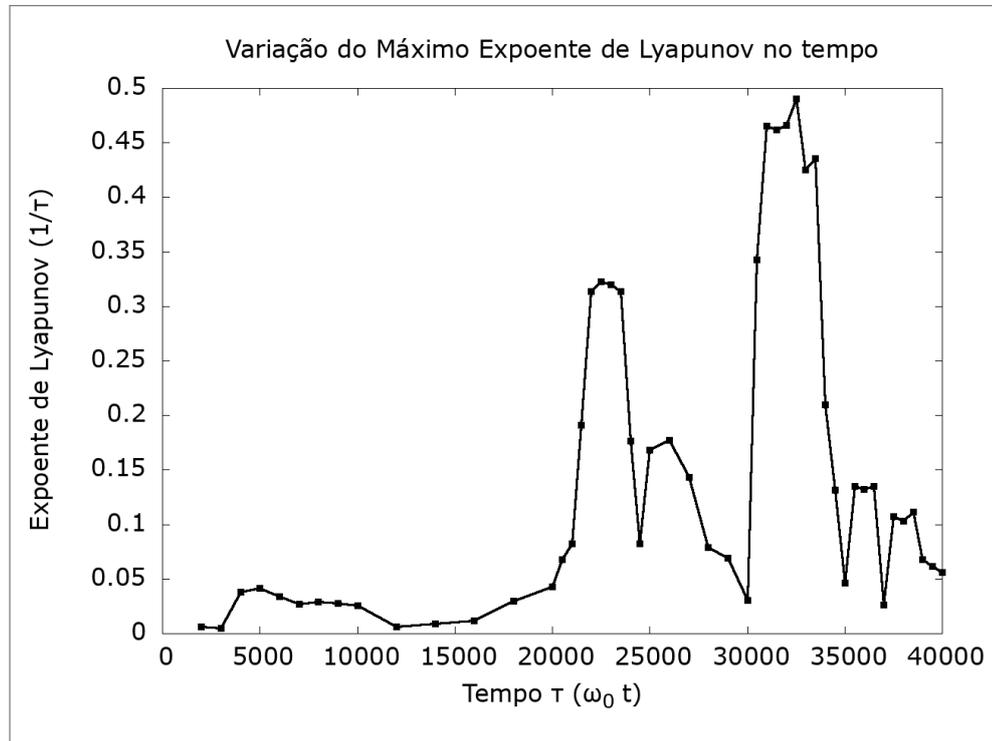
Escolhemos para esta computação condições iniciais sobre a trajetória representada por 15, como nosso sistema é dissipativo para que nossa órbita não passe por diversos níveis de energia, diminuimos os atritos para  $\gamma_1 = 0,0000005$  e  $\gamma_c = 0,00005$ . Utilizamos passos de integração de tamanho  $d\tau = 0,0002$  e calculamos 5.000.000 de iterações. Como apontando no capítulo 3 o valor do expoente será dependente da posição inicial escolhida, portanto pareamos o valor obtido para  $h_1(\vec{x})$  com o valor de  $\tau$  correspondente às condições iniciais, formando então a figura 31.

Conforme apontado por Hilborn (2000) esperamos que os valores para trajetórias periódicas sejam próximos de zero, conforme esperávamos isto ocorre no trecho  $[0, 20000]$ . Em seguida, após o ponto em que observamos a bifurcação de Hopf na figura 15, percebemos um aumento na sensibilidade do sistema à escolha de condições iniciais. O valor então diminui gradualmente até apresentar outro salto, em nossa terceira região de comportamento, passando um tempo próximo a esse valor até decair novamente, desta vez com alguns saltos de menor amplitude. Esse comportamento de alternância entre janelas periódicas e caóticas é a marca do fenômeno de caos intermitente (LAYEK, 2015)(SCHUSTER; JUST, 2005).

Ainda baseado na mesma referência observamos para alguns pontos nessas regiões se as trajetórias de fato se afastam exponencialmente para confirmar nossa suposição, para isso escolhemos um ponto nas regiões influenciadas pelos aparentes conjuntos caóticos e construímos as figuras 32 e 33. No caso da figura 33 é visível o comportamento exponencial, no entanto, a figura 32 não é tão clara.

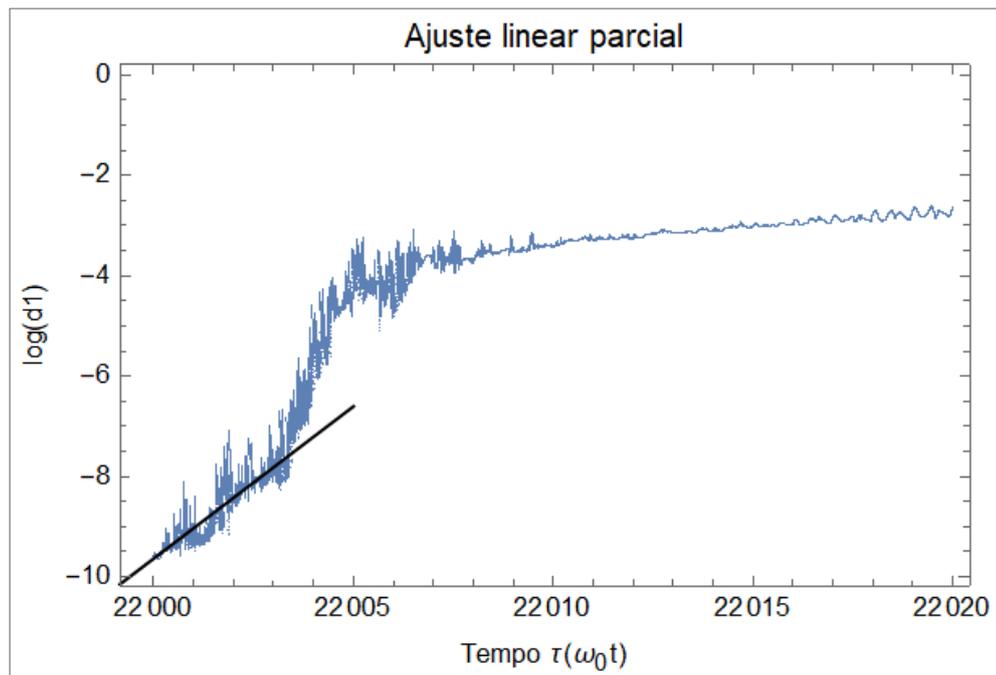
Como dito anteriormente, podemos pensar nossa dinâmica como ocorrendo através da variação de um parâmetro, neste caso a energia, e conforme variamos ele o sistema que

Figura 31 – Variação dos valores máximos para o expoente de Lyapunov ao longo da trajetória



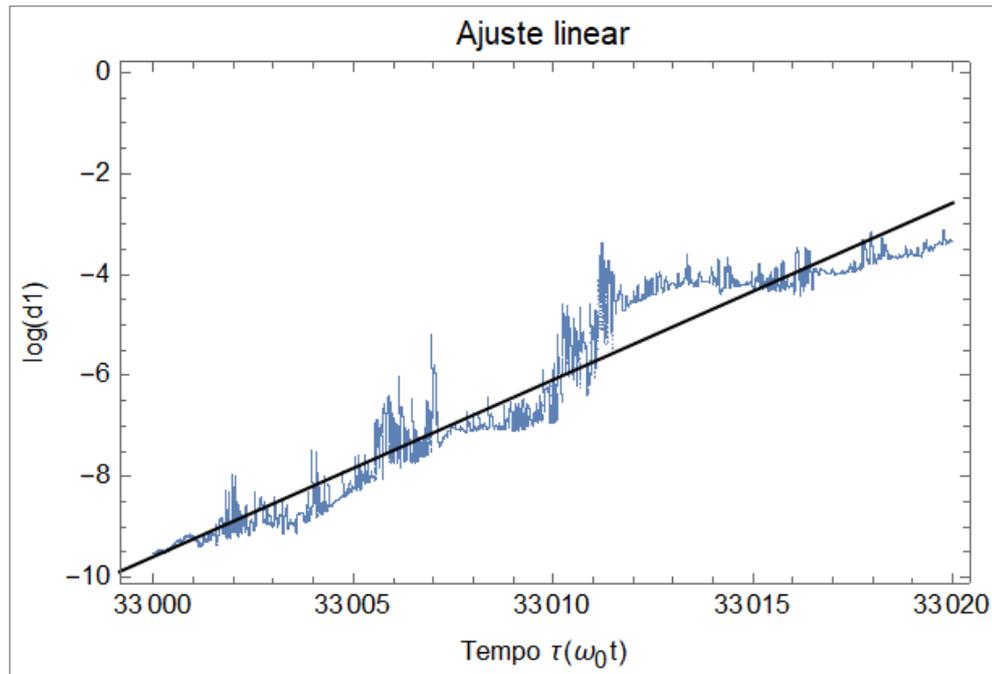
Fonte: O Autor(2022)

Figura 32 – Ajuste linear parcial aplicado à distância entre duas trajetórias inicialmente próximas, uma seguindo a trajetória determinada pelo ponto  $\tau = 22000$  da figura 15, outra iniciada com um deslocamento de  $d = 10^{-8}$  em cada coordenada.



Fonte: O Autor(2022)

Figura 33 – Ajuste linear aplicado à distância entre duas trajetórias inicialmente próximas, uma seguindo a trajetória determinada pelo ponto  $\tau = 33000$  da figura 15, outra iniciada com um deslocamento de  $d = 10^{-8}$  em cada coordenada



Fonte: O Autor(2022)

apresentava inicialmente apenas um atrator, devido à dissipação, aparenta ganhar uma sela caótica por breves momentos. Esta sela então desaparece e o sistema continua sua trajetória em direção ao atrator, esta sela habitaria, portanto, apenas algumas hiperfícies de energia constante no espaço de fase. Tal comportamento se assemelha ao discutido por Motter et al. (2013) e Károlyi e Tél (2021), onde ganha o nome de *caos duplamente transiente*, pois não apenas possui um conjunto caótico não atrator, mas tal conjunto é em si transiente. Em particular, Omel'Chenko e Tél (2022) aponta que ao acompanhar a evolução de um toro KAM nesse tipo de sistema é comum ver ele se distorcer e em seguida sumir, tal distorção do toro KAM estaria associado ao desaparecimento de trajetórias periódicas mantendo apenas as quasi-periódicas, este comportamento explicaria a figura 32, seguido então da região caótica onde o toro sumiria. No entanto, se faz necessário mais investigação, guiado por desenvolvimentos recentes na área.

## 7 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Apesar de se basear em um sistema inicialmente estudado em 1669, os pêndulos de Huygens ainda guardam muitas possibilidades físicas escondidas em sua dinâmica. Neste estudo conseguimos mostrar que para certos trechos da evolução do sistema dissipativo é possível obter um expoente de Lyapunov positivo indicando separação exponencial de órbitas próximas. Essa quantidade tem um salto momentâneo seguido de um decaimento, tal comportamento foi observado como característico de um caos duplamente transiente por Károlyi e Tel (2021) que por sua vez é a forma de caos em sistemas puramente dissipativos como o nosso, pois devido ao atrator criado pela dissipação todas as órbitas devem ir em direção a ele, não podendo haver um atrator caótico nem selas caóticas permanentes por possuírem órbitas que passariam um tempo infinito próximas a eles (MOTTER et al., 2013). Em nosso sistema isso parece ocorrer antes do sistema entrar em estado de sincronização em anti-fase no regime linear observado por Fonseca (2011).

Este comportamento está ligado as hiperfícies de energia constante que folheiam nosso sistema, onde ocorre a dinâmica Hamiltoniana, portanto as escolhas de parâmetros de atrito apenas alteram o quão rápido passamos por cada uma delas. Por sua vez, o parâmetro de acoplamento  $\beta$  é capaz de mudar propriedades destas hiperfícies, como trocar a bifurcação de hopf super-crítica pela sub-crítica, no limite em que  $\beta \rightarrow 0$  não há mais acoplamento e como não há caos para pêndulos simples mesmo no regime não linear (HILBORN, 2000), já que é descrito por apenas duas equações autônomas de primeira ordem, não vemos mais região a caótica, que necessita de ao menos três dimensões para existir.

Devido a dificuldades ocasionadas pela pandemia de COVID-19 algumas ideias precisaram ser deixadas para investigação futura. A exemplo disso temos a montagem de mapas de Poincaré para análise da dinâmica Hamiltoniana do sistema, onde será possível tirar proveito de vantagens fornecidas pelo tratamento da chamada dinâmica simbólica como discutido por McCauley (1993), assim como a utilização de medidas experimentais que podem ser obtidas com o aparato já presente no laboratório. Mais possibilidades também se abrem com o resultado que obtivemos, entre elas a do cálculo da função de energia livre do sistema para obtenção do *settling rate* como forma de caracterizar completamente o comportamento duplamente transiente (MOTTER et al., 2013). Outra possibilidade é análise da bacia do conjunto caótico e seus limites (KÁROLYI; TEL, 2021). Também é possível realizar a análise da evolução dos toros

KAM (JOSÉ; SALETAN, 1998) em nossa dinâmica, motivados pelo recente desenvolvimento descrito por Jánosi e Tél (2019) que possibilitaria observar a deformação e desintegração destes toros.

## REFERÊNCIAS

- BENETTIN, G.; GALGANI, L.; GIORGILLI, A.; STRELCYN, J. M. Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory. *Meccanica*, v. 15, n. 1, p. 9–20, 1980. ISSN 00256455.
- BENETTIN, G.; GALGANI, L.; GIORGILLI, A.; STRELCYN, J. M. Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part 2: Numerical application. *Meccanica*, v. 15, n. 1, p. 21–30, 1980. ISSN 00256455.
- BENNETT, M.; SCHATZ, M. F.; ROCKWOOD, H.; WIESENFELD, K. Huygens's clocks. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 458, n. 2019, p. 563–579, 2002. ISSN 13645021.
- BLEKHMANN, I. *Synchronization in Science and Technology*. New York: American Society of Mechanical Engineers, 1988. ISBN 0791800032.
- BROER, H.; TAKENS, F. *Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer, 2011. 313 p. ISBN 9781441968692.
- CVITANOVIĆ, P.; ARTUSO, R.; MAINIERI, R.; TANNER, G.; VATTAY, G. *Chaos: Classical and Quantum*. Copenhagen: Niels Bohr Institute, 2020. 1090 p. Disponível em: <ChaosBook.org>.
- DEVANEY, R. L. *A First Course In Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*. [S.l.]: Perseus Books Publishing, 1992. 302 p. ISBN 0-201-55406-2.
- DEVOE, R. G.; BREWER, R. G. Observation of Superradiant and Subradiant Spontaneous Emission of Two Trapped Ions. *Physical Review Letters*, v. 76, n. 12, p. 2049–2052, 1996. ISSN 10797114.
- DICKE, R. H. Coherence in spontaneous radiation processes. *Physical Review*, v. 93, n. 1, p. 99–110, 1954. ISSN 0031899X.
- ECKMANN, J. P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of Modern Physics*, v. 57, n. 3, p. 617–656, 1985. ISSN 00346861.
- FONSECA, J. S. da. *Dinâmica não linear em pêndulos de Huygens*. Dissertação (Mestrado em Física) - Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal de Pernambuco. Recife: [s.n.], 2011. 66 p.
- GOLDSTEIN, H. *Classical Mechanics*. 2. ed. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1980. 672 p. ISBN 0-201-02918-9.
- HILBORN, R. C. *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford: Oxford University Press, 2000. 650 p. ISBN 0198507232.
- HOLDEN, A. V. *Chaos*. 1. ed. Princeton: Princeton University Press, 1986. 324 p. ISBN 0691084246.
- JÁNOSI, D.; TÉL, T. Chaos in Hamiltonian systems subjected to parameter drift. *Chaos*, AIP Publishing LLC, v. 29, n. 12, 2019. ISSN 10541500.

JOSÉ, J. V.; SALETAN, E. J. *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. ISBN 0-521-63176-9.

KÁROLYI, G.; TEL, T. New features of doubly transient chaos: Complexity of decay. *Journal of Physics: Complexity*, IOP Publishing, v. 2, n. 3, 2021. ISSN 2632072X.

KORTEWEG, D. J. Les Horloges Sympathiques de Huygens. *Archives Neerlandaises*, v. 2, n. XI, p. 273–295, 1906.

LAI, Y.-C.; TÉL, T. *Transient Chaos: Complex Dynamics on Finite-Time Scales*. New York: Springer, 2011. v. 57. 497 p. ISSN 00255572. ISBN 9781441969866.

LAYEK, G. C. *An introduction to dynamical systems and chaos*. New Delhi: Springer, 2015. 1–622 p. ISBN 9788132225560.

LEMONS, N. A. *Mecânica Analítica*. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013. 386 p. ISBN 85-88325-24-1.

LI, T.-Y.; YORKE, J. A. . Period Three Implies Chaos. *The American Mathematical Monthly*, v. 82, n. 10, p. 985–992, 1975.

LORENZ, E. Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 20, n. 2, p. 130–141, 1963.

LOWE, E. J. For Want of a Nail. *Analysis*, v. 40, n. 1, p. 50–52, 1980. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/332732>>.

MAXWELL, J. C. *Matter and Motion*. New York: Cambridge University Press, 2010. 128 p. ISBN 9781108014021.

MCCAULEY, J. L. *Chaos, Dynamics and Fractals: An Algorithmic Approach to Deterministic Chaos*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 323 p. ISBN 9780521467476.

MOTTER, A. E.; GRUIZ, M.; KÁROLYI, G.; TÉL, T. Doubly transient chaos: Generic form of chaos in autonomous dissipative systems. *Physical Review Letters*, v. 111, n. 19, p. 1–5, 2013. ISSN 00319007.

OMEL'CHENKO, O. E.; TÉL, T. Focusing on transient chaos. *Journal of Physics: Complexity*, IOP Publishing, v. 3, n. 1, 2022. ISSN 2632072X.

OPIE, I.; OPIE, P. *Oxford Dictionary of Nursery Rhymes*. Oxford: Clarendon Press, 1951. 324 p.

OTT, E. *Chaos in Dynamical Systems*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 478 p. ISBN 978052101084.

PIKOVSKY, A.; ROSEBLUM, M.; KURTHS, J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. ISBN 0511075952.

RUELLE, D. *Chaotic Evolution and Strange Attractors*. Cambridge: Cambridge University Press, 1989. 96 p. ISBN 0521368308.

SCHUSTER, H. G.; JUST, W. *Deterministic chaos - An Introduction*. 4. ed. Weinheim: Wiley-VCH, 2005. 287 p. ISBN 3527404155.

SMITH, L. A. *Chaos: A Very Short Introduction*. Oxford: Oxford University Press, 2007. 180 p.

SPROTT, J. C. *Chaos and Time-Series Analysis*. 1. ed. Oxford: Oxford University Press, 2001. 507 p. ISBN 0198508409.

STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics And Chaos*. 1. ed. Reading, Massachusetts: Perseus Books Publishing, 1994. 512 p.

SUSSMAN, G. J.; WISDOM, J. *Structure and Interpretation of Classical Mechanics*. 2. ed. Cambridge: MIT Press, 2014. 569 p. ISBN 9780262028967.

TÉL, T. The joy of transient chaos. *Chaos*, v. 25, n. 9, 2015. ISSN 10897682.

WILLMS, A. R.; KITANOV, P. M.; LANGFORD, W. F. Huygens ' clocks revisited. *Royal Society Open Science*, 2017.