



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ATHOS DE SIQUEIRA LAGES

**UM PROGRAMA PARA A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DARCY BASEADO EM
UMA FORMULAÇÃO DE GALERKIN DESCONTÍNUA**

Recife

2018

ATHOS DE SIQUEIRA LAGES

**UM PROGRAMA PARA A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DARCY BASEADO EM
UMA FORMULAÇÃO DE GALERKIN DESCONTÍNUA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Pernambuco como exigência para obtenção de grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof^o Dr. Ramiro Brito Willmersdorf.

Recife

2018

Catálogo na fonte
Bibliotecária Margareth Malta, CRB-4 / 1198

- L174p Lages, Athos de Siqueira.
- Um programa para a solução da equação de Darcy baseado em uma formulação de Galerkin descontínua / Athos de Siqueira Lages. – 2018.
65 folhas, figs., tabs.
- Orientador: Prof. Dr. Ramiro Brito Willmersdorf.
TCC (Graduação) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG.
Departamento de Engenharia Mecânica, 2018.
- Inclui Referências.
1. Engenharia Mecânica. 2. Equação de Darcy. 3. Escoamentos em meios porosos. 4. Métodos dos Elementos Finitos. 5. Reservatórios de petróleo. 6. Simulação numérica. I. Willmersdorf, Ramiro Brito. (Orientador). II. Título.

ATHOS DE SIQUEIRA LAGES

**UM PROGRAMA PARA A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DARCY BASEADO EM
UMA FORMULAÇÃO DE GALERKIN DESCONTÍNUA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Pernambuco como exigência para obtenção de grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Aprovado em: 19 / 12 / 2018.

BANCA EXAMINADORA

Profº. Dr. Ramiro Brito Willmersdorf (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Profº. Dr. Darlan Karlo Elisiário de Carvalho (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Profº. Me. Adriano Dayvson Marques Ferreira (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, por sempre ter me direcionado, por ter me dado sabedoria, e por ter me fortalecido em toda a minha vida.

Ao professor Ramiro Brito Willmersdorf, por todo direcionamento, paciência, e conhecimento transmitido, tanto neste trabalho, como em diversas situações da minha carreira profissional.

Ao meus pais, Azael e Dácia, pelos ensinamentos e conselhos que tem me dado. E também a minha irmã, Ágatha, por sempre ter sido uma pessoa importante em meus aprendizados e crescimento. Agradeço a minha namorada, Marília, pelo constante apoio e por ter me dado forças em minha caminhada. Vocês são meus suportes, e sem vocês, não conseguiria me tornar a pessoa que sou.

Aos meus parentes e amigos, por sempre se fazerem presentes em minha vida me ajudando e me apoiando.

Agradeço a todos os meus amigos da Universidade Federal de Pernambuco. Vocês foram fundamentais para o meu crescimento profissional e pessoal, durante todos esses anos. Um abraço especial aos meus amigos “Muralhas”.

RESUMO

A simulação computacional de reservatórios de petróleo impõe vários desafios numéricos, devido aos reservatórios terem formas geométricas complexas, estarem submetidos a mudanças bruscas de condições de contorno, além de serem caracterizados por meios porosos altamente heterogêneos e anisotrópicos. O presente trabalho consiste no desenvolvimento de um protótipo de simulador de reservatórios de petróleo, através da implementação de um método para a solução numérica da equação de Darcy, que rege o escoamento de fluidos incompressíveis em meios porosos. Com esse fim, foi implementado um Método de Elementos Finitos de Galerkin descontínuo misto estabilizado para Darcy, utilizando a linguagem de programação *Python* e a ferramenta computacional de *FEniCS/DOLFIN*. Inicialmente, é apresentado um breve contexto da simulação de escoamentos em reservatórios de petróleo e os Métodos de Elementos Finitos utilizados nesta aplicação. Posteriormente, apresenta-se a modelagem matemática do problema e a formulação do Método de Galerkin Descontínuo Misto Estabilizado, implementado neste trabalho. Além disso, é apresentado como este método foi escrito na plataforma *DOLFIN* e como foi resolvido por *FEniCS*. Por fim, com o objetivo de se validar o seu desempenho, o método foi analisado através de exemplos modelos. Os resultados são discutidos, realizando-se comparações com soluções analíticas e referências da literatura. Conclui-se que este método promove bons resultados para a simulação de escoamentos em meios porosos, mesmo para casos heterogêneos e anisotrópicos.

Palavras-chave: Equação de Darcy. Escoamentos em meios porosos. Métodos dos Elementos Finitos. Reservatórios de petróleo. Simulação numérica.

ABSTRACT

The computational simulation of oil reservoirs imposes several numerical challenges due to a series of factors such as complex geometric shapes, abrupt changes in boundary conditions and the presence of point sources, but mainly it is because the reservoirs are characterized by highly heterogeneous and anisotropic porous media. The present work consists in the development of a prototype simulator of oil reservoirs through the implementation of a method for the numerical solution of the Darcy's equation, which governs the flow of incompressible fluids in porous media. This work presents the implementation of a stabilized mixed discontinuous Galerkin Finite Element Method for Darcy's law using the Python programming language and the FEniCS/DOLFIN computational tool. Initially, a brief context of simulation of flow in oil reservoirs and Finite Element Methods used in this application are presented. Subsequently, the mathematical modeling of problem and the discontinuous Galerkin formulation are presented. In addition, it is presented how this method was written on the DOLFIN platform and how it was solved by FEniCS. Finally, in order to validate its performance, the method was analyzed through model examples. The results are discussed, making comparisons with analytical solutions and literature references. It is concluded that this method promotes good results for the flow simulation in porous media, even for heterogeneous and anisotropic cases.

Keywords: Darcy's equation. Finite Element Methods. Flow in porous media. Numerical simulation. Oil reservoirs.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Representação de mecanismos de produção de reservatórios.	12
Figura 2 - Funções bases de elementos finitos contínuas e descontínuas.	16
Figura 3 - Discretização de um domínio em uma malha.	21
Figura 4 - Aresta compartilhada por dois elementos adjacentes, com seus vetores normais. ..	26
Figura 5 - Matriz com valores da permeabilidade em um espaço bidimensional.	34
Figura 6 - Escolha de espaços de elementos finitos para a pressão e velocidade.....	36
Figura 7 - Formulação do MDGME implementado em <i>SIMEFres</i>	37
Figura 8 - Solução do MDGME para os campos de pressão e velocidade.....	38
Figura 9 - Interação entre os componentes de <i>FEniCS</i> para a solução do problema.	38
Figura 10 - Procedimento para salvar a solução do problema.....	39
Figura 11 - Cômputo impreciso do erro da norma L_2	40
Figura 12 - Função <i>errornorm</i> para o cômputo do erro da norma L_2	40
Figura 13 - Malha 8x8 do exemplo 5.1 com a componente K_{xx} da permeabilidade.....	42
Figura 14 - Resultados da pressão do problema 5.1.....	43
Figura 15 - Contorno de superfície para a pressão, no caso $\Psi = 1$	44
Figura 16 - Problema de cinco poços e domínio computacional.....	46
Figura 17 - Domínio heterogêneo para o problema de 1/4 de cinco poços.	47
Figura 18 - Resultados de pressões e velocidades para o meio homogêneo.	47
Figura 19 - Resultados de pressões e velocidades para o meio heterogêneo.	48
Figura 20 - Domínio altamente heterogêneo para o problema 5.4.	49
Figura 21 - Resultados para as pressões do problema 5.4.....	50
Figura 22 - Resultados para as velocidades do problema 5.4.....	50
Figura 23 - Resultados para as velocidades do problema 5.4, com $\beta u = 1010$	51
Figura 24 - Malha 24x24 utilizada para o problema 5.3.	52
Figura 25 - Resultados do campo da pressão para o problema 5.3.	53
Figura 26 - Resultados do NFLV implementado em Queiroz <i>et al.</i> (2014).....	54
Figura 27 - Malhas com 894 (esquerda) e 714 elementos (direita).....	55
Figura 28 - Resultados obtidos para a pressão no problema 5.4.	56
Figura 29 - Malha tetraédrica utilizada no problema tridimensional.	58
Figura 30 - Resultados para a pressão e velocidade no problema tridimensional.....	58
Figura 31 - Resultados do problema tridimensional em uma seção horizontal ($z = 0,5$).	59

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Operações matemáticas na notação de <i>DOLFIN</i>	37
Tabela 2 - Valores dos termos de estabilidade adotados para as análises.	41
Tabela 3 - Erros da norma L_2 e da norma do máximo para o problema 5.1 e $\Psi = 1$	44
Tabela 4 - Erros da norma L_2 e da norma do máximo para o problema 5.1 e $\Psi = 10$	45
Tabela 5 - Erros da norma L_2 e da norma do máximo para o problema 5.1 e $\Psi = 100$	45
Tabela 6 - Erros da norma L_2 e da norma do máximo para o problema 5.1 e $\Psi = 1000$	45
Tabela 7 - Erros e taxas de convergência para o problema 5.2.	49
Tabela 8 - Resultados do fluxo resultante nas fronteiras.	51
Tabela 9 - Pressões mínimas e máximas obtidas para o problema 5.3.....	53
Tabela 10 - Pressões mínimas e máximas obtidas para o problema 5.3, com $\beta p = 1000$	54
Tabela 11 - Pressões mínimas e máximas obtidas para o problema 5.4.....	56
Tabela 12 - Pressões mínimas e máximas obtidas para o problema 5.4, com $\beta p = 10000$	57

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA	11
1.2	JUSTIFICATIVA	14
2	OBJETIVOS	18
2.1	OBJETIVO GERAL	18
2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	18
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	19
3.1	MODELAGEM MATEMÁTICA	19
3.2	MODELAGEM NUMÉRICA	20
3.2.1	Método dos Elementos Finitos	21
3.2.2	Métodos dos Elementos Finitos Mistos	24
3.2.3	Métodos de Galerkin Descontínuos	25
3.2.4	Método de Galerkin Descontínuo Misto Estabilizado	27
4	METODOLOGIA	32
4.1	PRÉ-PROCESSAMENTO	32
4.2	PROCESSAMENTO	35
4.3	PÓS-PROCESSAMENTO	39
5	RESULTADOS	41
5.1	MEIO HETEROGÊNEO E SUAVEMENTE ANISOTRÓPICO	41
5.2	PROBLEMA 1/4 DE CINCO POÇOS	46
5.2	MEIO HOMOGÊNEO E FORTEMENTE ANISOTRÓPICO	52
5.4	MEIO FORTEMENTE HETEROGÊNEO E ANISOTRÓPICO	54
5.5	PROBLEMA EM UM DOMÍNIO TRIDIMENSIONAL	57
6	CONCLUSÃO	60
	REFERÊNCIAS	61

1 INTRODUÇÃO

O setor petrolífero obteve um considerável crescimento durante a industrialização da economia ocidental, fazendo do petróleo uma das principais fontes de energia numa escala global. A indústria petrolífera é caracterizada como uma atividade que está relacionada a novas tecnologias e novas perspectivas de inovação aplicada a todos os seus processos, de extração, refino e produção de petróleo. Deste modo, esta é uma indústria que exige projetos com grandes investimentos. O processo de perfuração para produção de óleo de um reservatório, por exemplo, pode custar várias centenas de milhões de dólares. Este fato tem proporcionado uma constante necessidade de desenvolvimentos de ferramentas confiáveis e precisas, que proporcionem auxílio nas tomadas de decisões das indústrias do petróleo (NAVEIRA, 2007).

Nesta indústria, a simulação numérica tem sido largamente utilizada em inúmeras aplicações, já que permite obter dados qualitativos e quantitativos que podem proporcionar um melhor entendimento dos processos físicos e químicos relacionados à suas atividades (NUÑEZ, 2014). Em particular, uma das mais importantes aplicações dessas simulações é a otimização de produção de reservatórios de petróleo, pois auxilia na compreensão da geologia dos reservatórios e do escoamento dos fluidos em seu interior, proporcionando uma previsão do desempenho destes e permitindo aplicar técnicas eficientes de recuperação de campos petrolíferos (THOMAS, 2001).

Desde a década de 50, quando computadores digitais começaram a surgir, programas de simulação numérica, denominados simuladores de reservatório, têm sido utilizados para premeditar, compreender e otimizar complexos processos físicos de escoamento de fluidos em reservatórios de petróleo, constituindo-se em uma ferramenta viável para solucionar os problemas de engenharia em questão. Entretanto, gradativamente, procura-se analisar modelos de reservatórios mais realistas, e conseqüentemente, mais complexos, tornando-se cada vez mais necessário que os resultados obtidos nas simulações numéricas sejam acurados e representem uma solução física real.

Os simuladores de reservatório, de modo geral, são baseados em métodos numéricos inadequados para tratar casos de reservatórios altamente heterogêneos e anisotrópicos. Deste modo, nas últimas décadas, novos métodos numéricos têm sido propostos e testados para uma precisa modelagem desse problema.

Diante disso, este trabalho contribui com o desenvolvimento de um programa para resolver escoamentos monofásicos em meios porosos, governados pela equação de Darcy, tendo como base um método numérico adequado para tratar o problema de escoamentos incompressíveis

em meios porosos rígidos. Este programa pode ser futuramente estendido para incorporar outros fenômenos físicos, como o escoamento multifásico, tornando-o uma base confiável para a criação de um simulador de reservatórios.

1.1 DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

Um reservatório de petróleo consiste em rochas porosas ou fraturadas impregnadas por hidrocarbonetos, água e outras substâncias encontradas na subsuperfície.

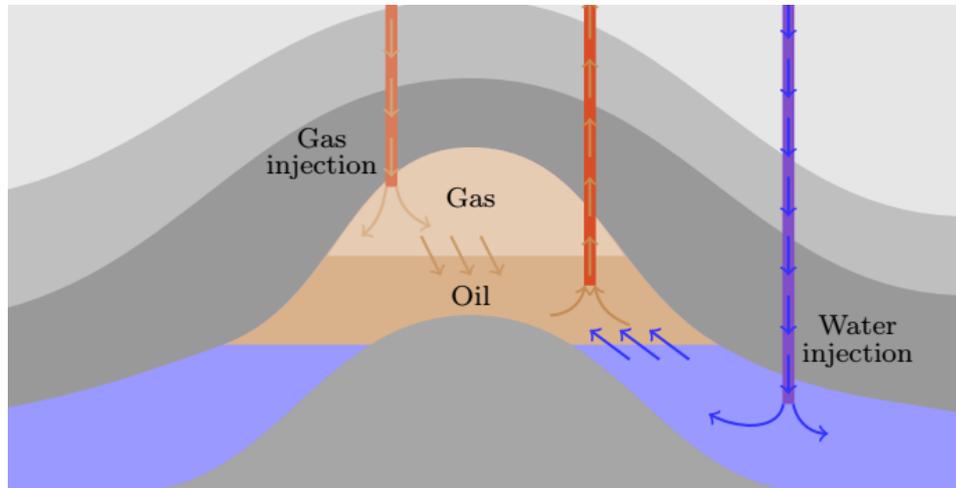
No início do processo de extração, a produção de óleo ocorre de forma natural, devido aos altos gradientes de pressão aos quais estão submetidos os reservatórios. Esta primeira etapa de extração do óleo é chamada de recuperação primária. “São três os principais mecanismos naturais de produção de reservatórios: mecanismo de gás em solução, mecanismo de óleo e mecanismo de influxo de água” (ROSA, CARVALHO e XAVIER, 2006), sendo este último o mais utilizado. Porém, o gradiente de potencial hidráulico vai decaindo durante o decorrer desta primeira fase, e a eficiência da recuperação do óleo fica limitada a uma faixa de 10 a 30 % do volume total, dependendo da natureza do reservatório, já que um considerável volume de óleo ainda fica retido na rocha (EWING, 1983).

A fim de se melhorar essa eficiência, o processo de extração passa a ser forçado, através de mecanismos de recuperação secundária. Durante este processo, água ou gases podem ser injetados em poços (injetores), perfurados no reservatório, com a finalidade de extrair o óleo das no interior das rochas através de poços produtores. A água injetada também tem a função de manter a pressão e taxas de fluxo no reservatório em níveis aceitáveis para a preservação do meio (CHEN, HUAN e MA, 2006). A Figura 1 ilustra, conceitualmente, alguns mecanismos de produção de reservatórios.

Neste âmbito, as principais características que influenciam no processo de produção em um reservatório de petróleo são a natureza da rocha e os fluidos no seu interior (CHEN, HUAN e MA, 2006), e um dos principais fenômenos físicos influenciadores é o escoamento multifásico de fluidos em meios porosos. Este fenômeno é muito complexo, mas tem sido extensivamente estudado, e modelos matemáticos que o descrevem com adequada precisão têm sido desenvolvidos há décadas. Estes modelos matemáticos, porém, são formados por equações diferenciais parciais não-lineares que só admitem soluções analíticas para casos com simplificações bem particulares. Desta forma, a aplicação de métodos numéricos, em programas de computadores, torna-se uma ferramenta imprescindível para a solução do

problema e para a área da engenharia de reservatórios. Estas ferramentas computacionais são denominadas de simuladores de reservatórios.

Figura 1 - Representação de mecanismos de produção de reservatórios.



Fonte: Lie (2015).

O primeiro método utilizado em larga escala para resolver Equações Diferenciais Parciais (EDP) numericamente, e ainda muito aplicado em simuladores de reservatórios de interesse comercial na indústria do petróleo, foi o Método de Diferenças Finitas. Este método tem a vantagem de requerer um baixo custo computacional, mas apresenta, como principal desvantagem, a dificuldade para lidar com domínios complexos, condições de contorno gerais e de incorporar adaptações locais de malhas (CHEN, HUAN e MA, 2006).

Neste contexto, métodos mais robustos e capazes de lidar com geometrias complexas e malhas não-estruturadas, como o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Volumes Finitos, têm sido implementados para problemas de escoamento de fluidos em meios porosos e suas diversas aplicações.

A modelagem matemática do escoamento de um fluido incompressível em um meio poroso rígido é dada pela equação de Darcy, que consiste de um sistema composto pela lei de Darcy e pela equação da conservação de massa. O objeto de estudo deste trabalho é a aplicação do modelo de Darcy para escoamentos de fluidos em reservatórios de petróleo, considerando apenas casos onde o fluido é monofásico.

A maneira mais usual de se formular o problema de escoamento monofásico em meios porosos é pela introdução da lei de Darcy na equação da conservação de massa, resultando em um problema de Poisson para a pressão (IGREJA, 2015). Esse é um problema elíptico que tem a pressão como única variável e pode ser facilmente aproximado pelo método de Galerkin e

elementos finitos lagrangeanos, conforme realizado em Ciarlet (1979). As velocidades são obtidas com os resultados encontrados para o campo de pressão, inseridos diretamente na lei de Darcy. Porém, segundo Nuñez (2014), tal alternativa têm as desvantagens de se obter uma perda na ordem de convergência da pressão e de não garantir a continuidade das velocidades nas interfaces dos elementos. Outras metodologias, como as técnicas de pós-processamento (Durlinsky, 1994; Loula et al., 1995; Malta et al., 2000), têm sido aplicadas para obtenção de campos de velocidades mais precisos. Ainda assim, Nuñez (2014) afirma que a escolha de elementos finitos de Raviart-Thomas (RT) (Raviart e Thomas, 1977) e de Brezzi-Douglas-Marini (BDM) (Brezzi *et al.*, 1985) na aplicação destas técnicas, proporciona uma ótima solução numérica, no entanto, alega que esses elementos não são localmente conservativos. Badia e Codina (2010) citam, ainda, que Arnold, Boffi e Falk (2005) demonstraram que os espaços de elementos finitos de RT promovem uma perda de precisão em algumas malhas.

Outra alternativa em destaque para a solução da equação de Darcy são os Métodos de Elementos Finitos Mistos (Raviart e Thomas, 1977; Brezzi *et al.*, 1985; Brezzi e Fortin, 1991), que realizam os cálculos de forma simultânea para a velocidade e pressão, utilizando espaços de elementos finitos diferentes para cada variável. Entretanto, para obter soluções estáveis e convergentes, uma formulação mista deve satisfazer a condição de compatibilidade entre os espaços de aproximações, dada por Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (LBB), apresentada em Brezzi (1974), e conhecida como condição de *inf-sup* discreta. Desta forma, estes tipos de formulações ficam muito restritas na construção de aproximações para os campos de pressão e velocidade.

Apesar disso, Raviart e Thomas (1977) e Brezzi *et al.* (1985) desenvolveram uma aproximação de elementos finitos bem-sucedida para meios porosos, denominada formulação dual mista, que se baseia na imposição da continuidade da componente normal da velocidade combinada com espaços lagrangeanos descontínuos para a pressão (IGREJA, 2015).

Uma outra metodologia é recorrer às formulações de elementos finitos mistos estabilizadas propostas por Brezzi e Fortin (2001), Masud e Hughes (2002), Correa e Loula (2008) e Ellingsrud (2015), que tratem o problema de tal maneira que a aproximação de elementos finitos possa violar a condição de *inf-sup* no contexto funcional do problema contínuo (BADIA e CODINA, 2010).

Em geral, estas formulações estabilizadas utilizam aproximações contínuas de elementos finitos lagrangeanos e têm comprovados êxitos na simulação de fluxos de Darcy em meios porosos homogêneos. No entanto, essas interpolações contínuas não são adequadas para meios porosos heterogêneos, caracterizados por propriedades descontínuas (IGREJA, 2015). Hughes,

Masud e Wan (2006) demonstraram que métodos contínuos de elementos finitos para equação de Darcy são insuficientes para capturar com precisão os saltos nos campos da solução nos locais das descontinuidades do meio. Igreja (2015) explica que nas interfaces das descontinuidades a componente normal da velocidade de Darcy deve ser contínua, de acordo com a conservação de massa, mas a componente tangencial é descontínua, não sendo bem representadas pelos elementos contínuos, que produzem aproximações imprecisas e oscilações espúrias.

O presente trabalho tem como principal atividade a implementação de um protótipo de simulador de reservatórios baseado na formulação de Galerkin descontínua proposta por Badia e Codina (2010), além de avaliar o desempenho desta formulação em termos da qualidade e robustez dos resultados.

Desta forma, pretende-se responder a seguinte pergunta: “Como desenvolver um simulador de reservatórios de petróleo para uma precisa solução numérica da equação de Darcy?”

1.2 JUSTIFICATIVA

Como já mencionado anteriormente, simulações numéricas utilizando cálculos acurados da velocidade de Darcy são essenciais para se obter uma descrição precisa do fenômeno de escoamentos de fluidos em reservatórios de petróleo. Entretanto, o principal problema tem sido o fato desses meios porosos serem caracterizados por altas heterogeneidades em relação às suas propriedades petrofísicas.

Nas últimas décadas, dois principais novos Métodos de Elementos Finitos têm sido implementados como interessantes ferramentas numéricas para tratar adequadamente esses tipos de problemas: os Métodos Híbridos e os Métodos de Galerkin Descontínuos.

Os Métodos Híbridos (MEFH) têm como ideia central a obtenção da solução em subdomínios, obtidos a partir de uma decomposição do domínio, enquanto que a continuidade das aproximações nas interfaces desses subdomínios é imposta através da definição de multiplicadores de Lagrange, visando a equivalência entre o problema original com os problemas definidos em cada subdomínio (chamados problemas locais) (NUÑEZ, 2014). Duas formulações de métodos de elementos finitos misto-híbrido, utilizando multiplicadores de Lagrange descontínuos para a pressão (Nuñez, 2014; Nuñez et al., 2017), e utilizando multiplicadores de Lagrange descontínuos para a velocidade (Igreja, Loula e Faria, 2014; Igreja, 2015), têm sido utilizadas para resolver a equação de Darcy em meios porosos heterogêneos.

Estas formulações foram denominadas de métodos de elementos finitos híbrido dual estabilizado (referido por SDHM).

Os métodos híbridos têm uma relação natural com os métodos de Galerkin descontínuos. Segundo Igreja (2015), utilizando a opção de multiplicadores de Lagrange descontínuos, os métodos híbridos podem originar formulações de Galerkin descontínuas, e estes procedimentos são explorados por Codina e Badia (2013), para diversos problemas elípticos. O próprio Igreja (2015), derivou uma formulação de Galerkin descontínua a partir da formulação SDHM, resultando em uma formulação bem similar à desenvolvida por Badia e Codina (2010).

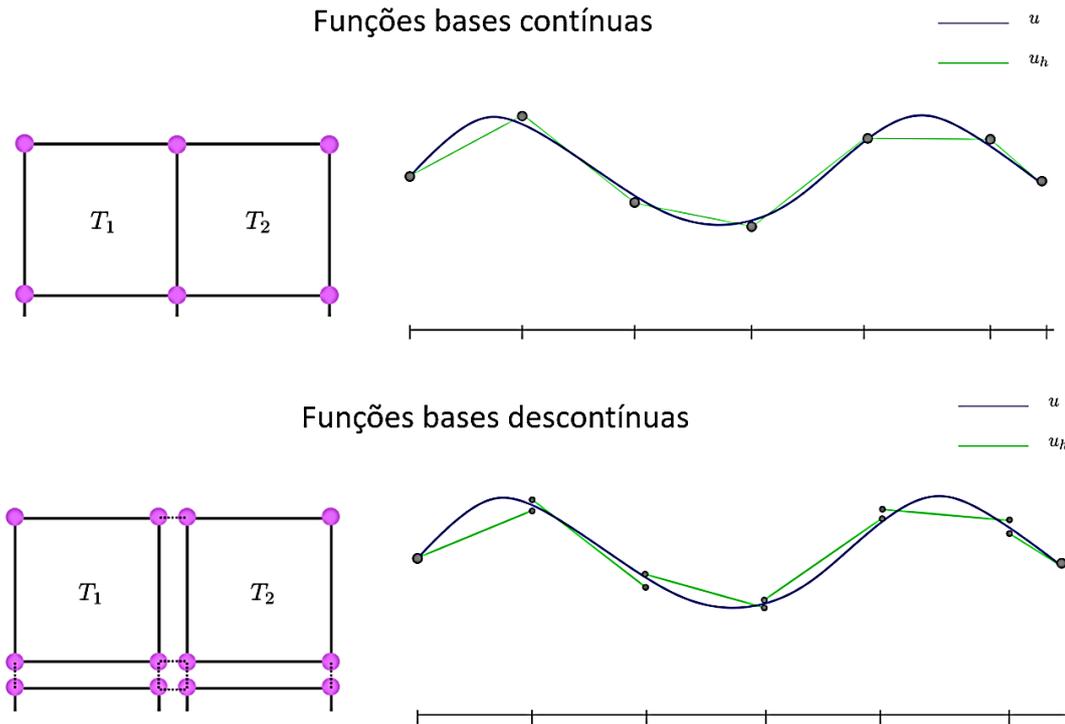
Os Métodos de Galerkin Descontínuos (métodos DG) são naturalmente aptos para capturar muito bem discontinuidades na solução e tratar malhas irregulares, devido à natureza dos seus espaços de aproximações (KLIEBER e RIVIÈRE, 2006), que consistem de polinômios descontínuos por partes. A Figura 2 ilustra os espaços de funções utilizados nos métodos de Galerkin e nos métodos de Galerkin descontínuos. Outras vantagens são que estes métodos permitem a utilização de adaptatividade h-p (SUN, 2003) e também usufruem de uma alta eficiência paralela devido ao padrão simples de interrelações entre os elementos (ADJERID et al. 2002). Além disso, os efeitos das condições de contorno nas distribuições de campo interior se propagam gradualmente através da conexão elemento a elemento, consistindo em uma importante característica para cálculos de fluxo de fluidos (LI, 2006). Todas essas vantagens fazem desse método uma opção bastante atrativa.

Originalmente, os métodos DG foram desenvolvidos por Reed e Hill (1973) para a solução da equação de transportes de nêutrons. Mais recentemente, estes métodos têm sido retomados e implementados com sucesso para resolver diversos tipos de problemas, dentre eles, muitos problemas governados por equações diferenciais elípticas (Arnold *et al.*, 2002; Brezzi *et al.*, 2006; Rivièrè, 2008; Cockburn *et al.*, 2009; Codina e Badia, 2013). No contexto de escoamentos de fluidos em meios porosos, vários trabalhos também têm implementado os métodos DG (Brezzi *et al.*, 2005; Hughes, Masud e Wan, 2006; Nakshatrala *et al.*, 2006; Badia e Codina, 2010), para a solução da equação de Darcy.

Brezzi *et al.* (2005) e Hughes, Masud e Wan (2006) desenvolveram, a partir do MEF misto estabilizado de Masud e Hughes (2002), uma formulação de Galerkin descontínua mista estabilizada. Eles afirmaram que o método utilizando espaços contínuos obteve sucesso para casos homogêneos, mas alegaram que a aplicação da continuidade da componente tangencial da velocidade impunha uma restrição técnica nas regiões em que os parâmetros do meio eram descontínuos. Posteriormente, Badia e Codina (2010) desenvolveram uma formulação similar, acrescidas de alguns termos de estabilização. E mais recentemente, estas formulações

estabilizadas foram implementadas por Joshaghani, Joodat e Nakshatrala (2018), para um modelo de dupla porosidade/permeabilidade, que consiste de praticamente uma extensão do modelo de Darcy, que considera duas redes de poros distintas com possível transferência de massa entre elas.

Figura 2 - Funções bases de elementos finitos contínuas e descontínuas.



Fonte: Adaptada de Massing (2018).

Joshaghani, Joodat e Nakshatrala (2018) ressaltam que a formulação de Galerkin descontínua mista estabilizada tem uma série de vantagens: (i) eliminam instabilidades espúrias e capturam muito bem saltos da solução em meios porosos heterogêneos; (ii) permitem interpolações de igual ordem para os campos das variáveis, o que é computacionalmente preferível; (iii) consiste de uma formulação matematicamente consistente estável, e, então, convergente; dentre outras vantagens.

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um protótipo de simulador de reservatórios, utilizando a plataforma computacional de código aberto *FEniCS/DOLFIN* (Logg e Wells, 2010) para a geração automática de código de baixo nível em C++ aplicado na solução numérica, a partir de uma interface com um programa escrito em código de alto nível (*Python* ou *C++*). Este *software* foi escolhido para o desenvolvimento deste trabalho, devido a sua facilidade de

se implementar formulações de elementos finitos, além de ser uma plataforma facilmente adaptável a sistemas de computação de alto desempenho.

Além da variedade de vantagens dos métodos DG, estes já têm sido largamente implementados na plataforma *FEniCS/DOLFIN*, enquanto que implementações de métodos híbridos ainda têm sido muito pouco exploradas neste *software*. Sendo assim, formulações de métodos de elementos finitos de Galerkin descontínuos foram preferíveis para consistir na base da modelagem numérica deste trabalho.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de um protótipo de simulador de reservatórios de petróleo a partir da implementação de um método numérico para a solução do problema de Darcy.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Escrever a formulação matemática para o escoamento monofásico em meios porosos na forma variacional discreta utilizando o Método de Elementos Finitos de Galerkin Descontínuo Misto Estabilizado (MDGME);
- Implementar esta formulação numérica proposta no *software FEniCS/DOLFIN*;
- Analisar a acurácia e robustez deste método na solução de problemas modelos encontrados na literatura;
- Contribuir em projetos realizados pelo grupo Processamento de Alto Desempenho na Mecânica Computacional (PADMEC) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE).

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

A lei de Darcy relaciona a velocidade média de um escoamento com o gradiente de pressão em um meio poroso, que pode ser escrita na forma abaixo:

$$\mathbf{u} = -\frac{K}{\mu} (\nabla p - \rho g \nabla z) \quad (1)$$

onde \mathbf{u} é a velocidade média do fluido, K é o tensor permeabilidade, μ é a viscosidade relacionada a capacidade do fluido de suportar tensões cisalhantes, ∇p é o gradiente de pressão hidrostática aplicado no meio poroso, ρ é a massa específica do fluido, g é a magnitude da aceleração da gravidade e ∇z é o gradiente da gravidade na direção z (ao longo da profundidade do meio poroso).

“A permeabilidade de um meio poroso é uma medida de sua capacidade de se deixar atravessar por fluidos. Em outras palavras, a permeabilidade é uma medida da condutividade de fluidos de um material” (ROSA, CARVALHO e XAVIER, 2006, p. 104). A dimensão da permeabilidade é de área, e usualmente é expressa em mili-Darcy (1 mili-Darcy = 1 mD $\approx 9,869 \times 10^{-6}$ cm²). Por definição, a unidade ‘Darcy’ corresponde a permeabilidade de uma rocha submetida a um gradiente de pressão de 1atm/cm, promovendo a vazão de 1cm³/s de um fluido de viscosidade de 1 centi-Poise (1 cP = 1 mPa.s), através de uma área de 1cm².

A permeabilidade é representada matematicamente por um tensor simétrico de segunda ordem (BEAR, 1988):

$$K = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \quad (2)$$

sendo, $K_{yx} = K_{xy}$, $K_{zx} = K_{xz}$ e $K_{zy} = K_{yz}$.

Os reservatórios de petróleo, em geral, são meios altamente heterogêneos em relação as suas propriedades petrofísicas. Desta forma, a permeabilidade depende da posição espacial no meio, ou seja, $K = K(x, y, z)$.

A equação básica de conservação de massa em um meio poroso é dada pela expressão:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = \tilde{f} \quad (3)$$

onde ϕ é a porosidade do meio, que corresponde à fração entre o volume poroso de uma rocha e seu volume total, e \tilde{f} é um termo fonte mássico por unidade de volume. Para aplicação da

engenharia em reservatórios de petróleo, usualmente essa equação é reduzida a sua forma permanente, visto que o fluido é considerado incompressível e o meio poroso é assumido como sendo rígido. Define-se, então, o termo fonte volumétrico $f = \tilde{f}/\rho$.

Assim, segundo Peaceman (1977) e Ewing (1983), o escoamento de um fluido newtoniano incompressível em um meio poroso rígido é governado por um sistema de equações diferenciais parciais formado pela equação da conservação da massa fluida combinada com a lei de Darcy. Esta combinação de equações, quando desprezados os efeitos gravitacionais no meio, pode ser dada por:

$$\mathbf{u} = -\frac{K}{\mu} \nabla p \quad \text{em } \Omega \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = f \quad \text{em } \Omega \quad (5)$$

Para que este sistema tenha solução, é necessário que sejam introduzidas condições de contorno, que podem ser do tipo Neumann, que corresponde a um fluxo conhecido na fronteira do domínio (BEAR, 2018, p. 319), conforme a Equação 6,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_o = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \quad (6)$$

e podem também ser do tipo Dirichlet, conforme a Equação 7, na qual a pressão é prescrita em algum trecho da fronteira.

$$p = p_o \quad \text{sobre } \Gamma \quad (7)$$

Nas equações 4 a 7, Ω é o domínio, $\Gamma = \partial\Omega$ é a sua fronteira, e \mathbf{n} é o vetor unitário normal exterior a Γ .

A razão K/μ é denominada condutividade hidráulica, sendo que o tensor de permeabilidade do meio é dependente da posição (x, y, z) , e a viscosidade é tratada como sendo constante.

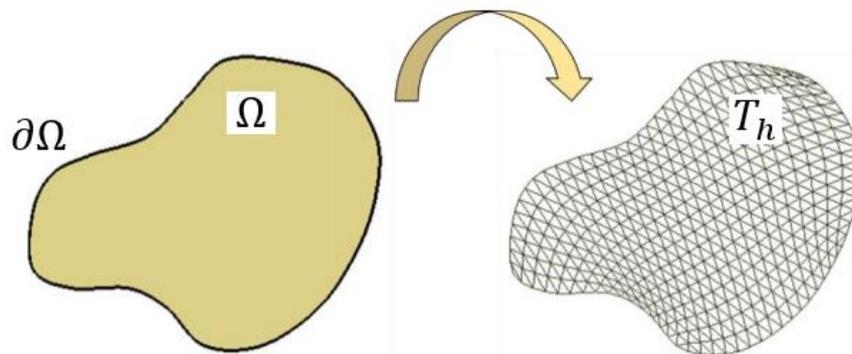
3.2 MODELAGEM NUMÉRICA

Neste trabalho, foi implementado em plataformas computacionais um Método de Elementos Finitos para a solução numérica da equação de Darcy, aplicado a simulações em reservatórios de petróleo. Portanto, nessa seção, serão apresentadas algumas formulações de elementos finitos utilizadas para o tratamento desses problemas, em particular o Método de Elementos Finitos de Galerkin descontínuo misto estabilizado adotado neste trabalho.

3.2.1 Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método numérico para encontrar soluções aproximadas para equações diferenciais parciais (EDPs). A ideia básica de praticamente todos os métodos numéricos para essa solução aproximada é a discretização de um problema contínuo com infinitos graus de liberdade em um modelo com um número finito de incógnitas, transformando as equações diferenciais parciais em um sistema de equações algébricas, que pode ser, normalmente, resolvido utilizando métodos bem conhecidos (CHEN, HUAN e MA, 2006). A discretização de um domínio contínuo Ω para uma malha é ilustrada na Figura 3.

Figura 3 - Discretização de um domínio em uma malha.



Fonte: Adaptada de Queiroz.

Os dois principais constituintes do Método de Elementos Finitos para a solução numérica de um problema são (HUGHES, 2000):

- i. A forma fraca, ou variacional, da equação diferencial parcial (EDP) associada ao problema;
- ii. A solução aproximada da forma fraca por meio do uso de “funções de elementos finitos”.

Com a aplicação desses dois componentes, o problema é reduzido à solução de um sistema acoplado de equações algébricas.

O passo (i) do MEF será mostrado a seguir, conforme procedimentos apresentados em Langtangen e Mardal (2016) e Ellingsrud (2015), através de um problema modelo para EDPs, a saber, o problema de Poisson, que é aplicável à problemas de gravitação, eletroestática, mecânica dos sólidos, mecânica dos fluidos e muitos outros. Este problema é dado pela Equação 8, sujeito às condições de contorno mostradas nas Equações 9 e 10.

$$-\nabla^2 p = f \quad \text{em } \Omega \quad (8)$$

$$p = p_o \quad \text{sobre } \partial\Omega_D \quad (9)$$

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} = u_o \quad \text{sobre } \partial\Omega_N \quad (10)$$

Onde, p é a incógnita do problema, f é o termo fonte, Ω é o domínio, e $\partial\Omega$ é o contorno do domínio, sendo que o subscrito D está relacionado à região do contorno onde são inseridas as condições de Dirichlet e N , as regiões onde são inseridas as condições de Neumann.

Para obtenção da forma fraca, a Equação 8 é multiplicada por uma função q arbitrária (normalmente chamada de função peso) e integrada sobre o domínio Ω :

$$-\int_{\Omega} \nabla^2 p q \, dx = \int_{\Omega} f q \, dx \quad (11)$$

É comum reescrever o termo a esquerda, para enfraquecer a exigência do espaço polinomial usado para a função peso, que como posto precisa ser duas vezes diferenciável para que a integral seja finita. Assim, este termo é reescrito em termos apenas da primeira derivada, por meio do Teorema de Green, resultando na Equação 12.

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla q \, dx - \int_{\partial\Omega} (\nabla p \cdot \mathbf{n}) q \, ds = \int_{\Omega} f q \, dx \quad (12)$$

O último passo para a obtenção da forma fraca é a inserção das condições de contorno. As condições de Dirichlet, são impostas automaticamente através da hipótese de que a função p pertence a um espaço de funções Q , no qual todos os membros atendem a estas condições. As funções pesos são tomadas como pertencentes a um espaço de funções \hat{Q} , cujos membros se anulam na fronteira onde são impostas as condições de Dirichlet. Assim, a integração dos termos que contem a função peso sobre esses contornos torna-se nula.

As condições de Neumann são tipicamente aplicadas na forma fraca. Assim, a condição de Neumann dada pela Equação 10, inserida na Equação 12, resulta na forma fraca, cujo enunciado é dado na Equação 13.

Encontrar $p \in Q$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla q \, dx = \int_{\Omega} f q \, dx + \int_{\partial\Omega_N} u_o q \, ds \quad \forall q \in \hat{Q} \quad (13)$$

onde p é chamado de função tentativa e q é chamado função peso.

A discretização da forma fraca é feita através da escolha de espaços de funções de dimensão finita para as funções tentativa e peso, definidos em uma malha de elementos finitos.

O conceito de elementos finitos pode ser dado por três componentes (LANGTANGEN e MARDAL, 2016):

- Uma célula T de referência em um sistema de coordenadas referencial local;
- Um espaço $Q_h = \text{span} \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$, que é um conjunto de funções base de dimensão finita definidas em T , de N dimensões;
- Um conjunto de graus de liberdade associados aos elementos que são interpolados pelas funções base e definem os valores da função para cada ponto do domínio.

O conjunto de células, $T_h = \{T_1, \dots, T_m\}$, consiste em uma malha, como exemplificado na Figura 3. O diâmetro de um elemento (célula) T é denotado por h , sendo referido como parâmetro da malha.

Uma técnica comum é escolher o espaço Q_h de modo que cada função base esteja associada a cada nó, sendo igual a 1 nesse nó e nula em qualquer outro nó.

Uma escolha usual para o espaço de funções, gera os chamados elementos de Lagrange, que utilizam polinômios contínuos por partes de um grau $k \geq 1$, sendo denotados por CG_k . Outra classe popular são os elementos de Galerkin descontínuos, cujas bases consistem de polinômios descontínuos por partes com grau $k \geq 0$, sendo denotados por DG_k (ELLINGSRUD, 2015).

O passo (ii) do MEF pode ser, então, convenientemente representado pela projeção de Galerkin de p em Q_h (LANGTANGEN e MARDAL, 2016):

$$p_h = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(x, y, z) \quad (14)$$

Onde c_i são os coeficientes a serem determinados (chamados de graus de liberdade) e $\phi_i(x, y, z)$ são as funções base contidas em Q_h .

A parte final do MEF é a discretização da forma fraca no espaço do elemento finito, ou seja, quando a junção dos passos (i) e (ii) transforma a equação diferencial parcial em um sistema de equações algébricas lineares. Desta forma, substituindo-se p por sua aproximação p_h , dada pela Equação 14, e q por uma função peso arbitrária ϕ_j na formulação variacional dada pela Equação 13, obtém-se a formulação variacional discreta, cujo enunciado é dado na Equação 15.

Encontrar $p_h \in Q_h$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla p_h \cdot \nabla \phi_j \, dx = \int_{\Omega} f \phi_j \, dx + \int_{\partial\Omega_N} u_o \phi_j \, ds \quad \forall \phi_j \in \hat{Q}_h \quad (15)$$

A realização das integrais da Equação 15 gera o sistema de equações algébricas lineares mostrado na Equação 16.

$$Ap = b \quad (16)$$

onde p é um vetor com os coeficientes c_i para $i = 1, 2, \dots, N$, A é uma matriz $N \times N$ e b é um vetor de tamanho N , sendo os componentes de A e b dados por:

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx \quad ; \quad b_j = \int_{\Omega} f \phi_j \, dx + \int_{\partial\Omega_N} u_o \phi_j \, ds \quad (17)$$

Os procedimentos apresentados nesta seção para o cômputo da pressão na equação de Poisson, consistem na maneira mais usual e clássica para se tratar o problema de escoamentos monofásicos em meios porosos, através do método dos elementos finitos. Nesta metodologia, a equivalente à equação de Poisson é obtida pela introdução da lei de Darcy (4) na equação da conservação de massa (5) para o meio poroso. A incógnita p é a pressão, e após sua determinação, através da solução do sistema de equações representado pela Equação 16, as velocidades podem ser obtidas por meio de técnicas de pós-processamento da solução p (Durlfolsky, 1994; Loula *et al.*, 1995; Malta *et al.*, 2000).

3.2.2 Métodos dos Elementos Finitos Mistos

Em uma formulação alternativa para o problema de escoamentos em meios porosos, tanto a pressão quanto a velocidade são mantidos como variáveis independentes, como mostrado nas Equações 4 e 5. Uma formulação de elementos finitos na qual se aproximam estas variáveis com espaços de funções independentes é conhecida como um Método de Elementos Finitos Misto (LANGTANGEN e MARDAL, 2016).

No problema de Darcy, as variáveis de interesse são o campo de velocidade \mathbf{u} e o de pressão p . Define-se, \mathbf{V}_h como o espaço de elementos finitos para a velocidade e Q_h , o espaço de elementos finitos para a pressão. A formulação variacional mista é dada pela multiplicação da Equação 4 pela função peso $\mathbf{v}_h \in \widehat{\mathbf{V}}_h$, e da Equação 5 pela função peso $q_h \in \widehat{Q}_h$, pela integração sobre um domínio Ω , seguida por uma integração por partes, dando origem à forma fraca do problema como mostrado nas Equações 18.a e 18.b.

Encontrar $(\mathbf{u}_h, p_h) \in (\mathbf{V}_h, Q_h)$ tal que

$$\int_{\Omega} K^{-1} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h \, dx = \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, dx - \int_{\partial\Omega} p_h (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}) \, ds \quad \forall \mathbf{v}_h \in \widehat{\mathbf{V}}_h \quad (18.a)$$

$$- \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \nabla q_h \, dx = \int_{\Omega} f q_h \, dx - \int_{\partial\Omega} q_h (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}) \, ds \quad \forall q_h \in \widehat{Q}_h \quad (18.b)$$

O MEF misto requer um espaço de funções para cada uma das duas variáveis, mas estes espaços não podem ser escolhidos arbitrariamente pois devem satisfazer a condição de compatibilidade de *inf-sup* entre eles para que a formulação seja estável (Chen, Huan e Ma, 2006). A prova da existência e unicidade deste problema, com a requerida condição de compatibilidade decorre do teorema de Brezzi (Brezzi, 1974).

Um exemplo de MEF mistos estáveis muito aplicado em problemas de escoamentos em meios porosos é o que utiliza espaços de elementos finitos de Raviart e Thomas (1977), para elementos quadrilaterais, em uma formulação denominada mista dual.

Outras formulações de elementos finitos mistos têm utilizado de termos de estabilização advindos de resíduos de mínimos quadrados, sendo denominados de métodos GLS (Brezzi e Fortin, 2001; Masud e Hughes, 2002; 2007; Correa e Loula, 2008), e ditos incondicionalmente estáveis (IGREJA, 2015).

3.2.3 Métodos de Galerkin Descontínuos

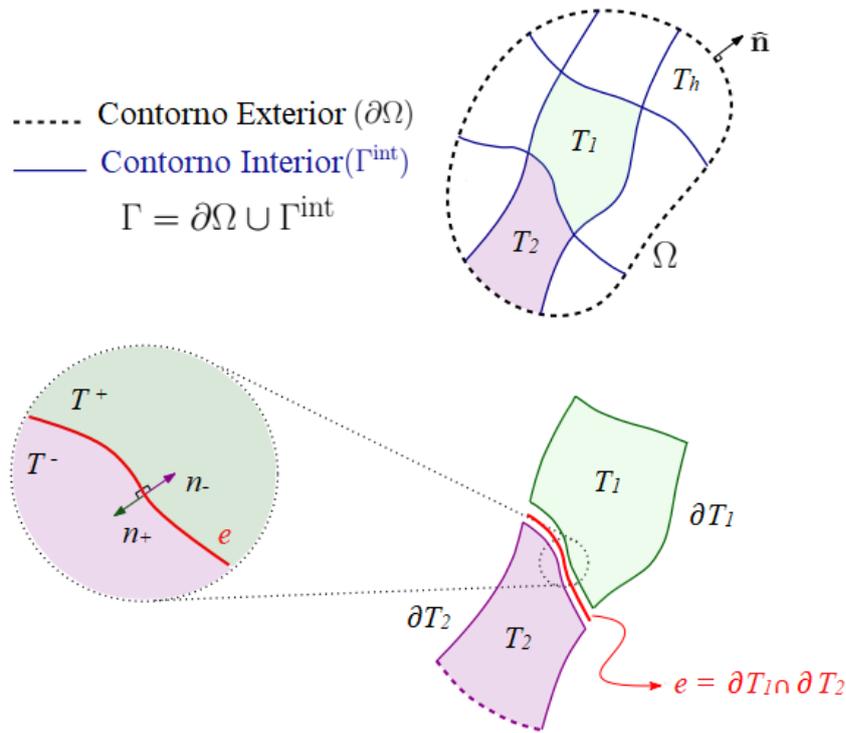
Os métodos dos elementos finitos de Galerkin descontínuos faz uso dos mesmos espaços de funções que o método contínuo, mas com uma continuidade relaxada na conexão entre os seus elementos. A ideia essencial do método é derivada do fato de que as funções bases podem ser escolhidas de modo que a variável de campo, ou suas derivadas, ou geralmente ambas, sejam consideradas descontínuas nos limites dos elementos, enquanto que a continuidade do domínio computacional é mantida (LI, 2006).

Uma das visões que têm sido mais amplamente aceitas para tratar o conceito de descontinuidade entre elementos é a baseada em fluxos numéricos. Arnold *et al.* (2002) realizaram um importante trabalho que forneceu uma estrutura unificada para o desenvolvimento de métodos DG em termos de fluxos numéricos, servindo de base para as definições e procedimentos aqui apresentados.

Primeiramente, define-se Γ como o conjunto das fronteiras de todos os elementos da malha (ou seja, a união de todas as arestas interiores ou exteriores). Todo o contorno interior, consistindo da união de todas as arestas interiores, é denotado como Γ^{int} , enquanto que, o contorno exterior é denotado por $\partial\Omega$. Ainda, Γ_D corresponde às regiões de $\partial\Omega$ onde são impostas as condições de Dirichlet, e Γ_N , corresponde às regiões de condição de Neumann.

Considerando uma aresta e no interior de um domínio ($e \in \Gamma^{int}$), os elementos que se justapõem a ela são denotados por T^+ e T^- , enquanto que os seus vetores normais unitários externos são denotados por \mathbf{n}_+ e \mathbf{n}_- , respectivamente, apresentados na Figura 4.

Figura 4 - Aresta compartilhada por dois elementos adjacentes, com seus vetores normais.



Fonte: Adaptada de Joshaghani, Joodat e Nakshatrala (2018).

Desta forma, os operadores de média $\{\cdot\}$ e salto $[[\cdot]]$ podem ser definidos para uma função escalar φ e para um campo vetorial $\boldsymbol{\tau}$, da seguinte maneira:

$$\{\varphi\} := \frac{1}{2}(\varphi^+ + \varphi^-) \quad [[\varphi]] := \varphi^+ \mathbf{n}_+ + \varphi^- \mathbf{n}_- \quad \forall e \in \Gamma^{int} \quad (19.a)$$

$$\{\boldsymbol{\tau}\} := \frac{1}{2}(\boldsymbol{\tau}^+ + \boldsymbol{\tau}^-) \quad [[\boldsymbol{\tau}]] := \boldsymbol{\tau}^+ \cdot \mathbf{n}_+ + \boldsymbol{\tau}^- \cdot \mathbf{n}_- \quad \forall e \in \Gamma^{int} \quad (19.b)$$

onde φ^+ e φ^- são as restrições de φ sobre os elementos T^+ e T^- , respectivamente, definidos matematicamente por:

$$\varphi^+ := \varphi|_{\partial T^+} \quad \varphi^- := \varphi|_{\partial T^-} \quad \forall e \in \Gamma^{int} \quad (20)$$

Da mesma forma, $\boldsymbol{\tau}^+$ e $\boldsymbol{\tau}^-$ são as restrições correspondentes a $\boldsymbol{\tau}$.

Os operadores são definidos ainda nos contornos, como:

$$\{\varphi\} = \varphi \quad [[\varphi]] = \varphi \mathbf{n} \quad \forall e \in \partial\Omega \quad (21.a)$$

$$\{\boldsymbol{\tau}\} = \boldsymbol{\tau} \quad \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \quad \forall e \in \partial\Omega \quad (21.b)$$

Utilizando as definições de salto e média, para todo $T \in T_h$, pode-se obter a seguinte identidade (BADIA e CODINA, 2010):

$$\begin{aligned} \sum_T \int_{\partial T} \varphi(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) ds &= \int_{\Gamma^{int}} \llbracket \varphi \rrbracket \cdot \{\boldsymbol{\tau}\} ds + \int_{\Gamma} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket \{\varphi\} ds \\ &= \int_{\Gamma} \llbracket \varphi \rrbracket \cdot \{\boldsymbol{\tau}\} ds + \int_{\Gamma^{int}} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket \{\varphi\} ds \end{aligned} \quad (22)$$

No contexto dos métodos DG, é importante fazer algumas observações. O termo “aresta”, utilizado nas definições anteriores, se referem a nós para os casos unidimensionais, a arestas nos casos bidimensionais, e a faces nos casos tridimensionais. O parâmetro de malha, nas arestas interiores ao domínio, é definido como uma medida para a média do tamanho de malha, ou seja:

$$h = \frac{1}{2}(h^+ + h^-) \quad \forall e \in \Gamma^{int} \quad (23)$$

sendo h^+ , o tamanho característico do elemento T^+ , e h^- , o tamanho característico do elemento T^- . Além disso, neste trabalho, o tamanho característico h de um determinado elemento é definido como o diâmetro da circunferência que o circunscreve, assim como em Ølgaard, Logg e Wells (2007).

3.2.4 Método de Galerkin Descontínuo Misto Estabilizado

Para resolução do problema de Darcy em meios porosos, Badia e Codina (2010) desenvolveram um método de Galerkin descontínuo misto estabilizado a partir de uma formulação de Galerkin mista. Os procedimentos para obtenção desse método, são aqui realizados de forma similar a Joshaghani, Joodat e Nakshatrala (2018).

Inicialmente, é obtida uma formulação de elementos finitos mistos, como nas Equações 18, para os campos da pressão e velocidade, com a integração sobre um determinado elemento T :

$$\int_T K^{-1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx = \int_T p \nabla \cdot \mathbf{v} dx - \int_{\partial T} p^* (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds \quad (24.a)$$

$$- \int_T \mathbf{u} \cdot \nabla q dx = \int_T f q dx - \int_{\partial T} q (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n}) ds \quad (24.b)$$

onde p^* e \mathbf{u}^* são chamados de fluxos numéricos das pressões e das velocidades, respectivamente.

Para uma formulação DG mista clássica, que é baseada no formalismo de Galerkin, a escolha destes fluxos numéricos é dada como a empregada por Bassi e Rebay (1997):

$$p^* = p \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{u} \quad (25)$$

Somando a Equação 24 sobre todos os elementos $T \in T_h$, utilizando a identidade (22), e substituindo as funções por suas correspondentes discretas, obtém-se a forma fraca, cujo enunciado é dado pelas Equações 26.

Encontrar $(\mathbf{u}_h, p_h) \in (\mathbf{V}_h, Q_h)$ tal que

$$\int_{T_h} K^{-1} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h \, dx = \int_{T_h} p_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, dx - \int_{\Gamma^{int}} \llbracket p_h \rrbracket \cdot \{\mathbf{v}_h\} \, ds - \int_{\Gamma} \llbracket \mathbf{v}_h \rrbracket \{p_h\} \, ds \quad (26.a)$$

$$- \int_{T_h} \mathbf{u}_h \cdot \nabla q_h \, dx = \int_{T_h} f q_h \, dx - \int_{\Gamma} \llbracket q_h \rrbracket \cdot \{\mathbf{u}_h\} \, ds - \int_{\Gamma^{int}} \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket \{q_h\} \, ds \quad (26.b)$$

$$\forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in (\mathbf{V}_h, Q_h)$$

Aqui, o espaço (\mathbf{V}_h, Q_h) é um espaço de elementos finitos descontínuos, que abrange funções descontínuas com suporte em um único elemento. Neste método, tanto (\mathbf{u}_h, p_h) , quanto (\mathbf{v}_h, q_h) , pertencem a (\mathbf{V}_h, Q_h) .

Fisicamente, os saltos na pressão e nas componentes normais das velocidades devem desaparecer em qualquer aresta no interior do domínio. Desta forma, impõe-se essas continuidades, conforme Equação 27.

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = 0, \quad \llbracket p \rrbracket = 0 \quad \forall e \in \Gamma^{int} \quad (27)$$

Além disso, a condição de contorno de Neumann dada pela Equação 6 (por simplicidade, somente condições deste tipo é imposta aqui), é inserida conforme Equação 28.

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = u_0 \quad \forall e \in \Gamma_N (= \partial\Omega) \quad (28)$$

O problema variacional discreto para a formulação DG mista clássica é, então, dado por:

Encontrar $(\mathbf{u}_h, p_h) \in (\mathbf{V}_h, Q_h)$ tal que

$$\int_{T_h} K^{-1} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h \, dx - \int_{T_h} p_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, dx + \int_{\Gamma} \llbracket \mathbf{v}_h \rrbracket \{p_h\} \, ds = 0 \quad (29.a)$$

$$\begin{aligned}
-\int_{T_h} \mathbf{u}_h \cdot \nabla q_h \, dx + \int_{\Gamma^{int}} \llbracket q_h \rrbracket \cdot \{\mathbf{u}_h\} \, ds &= \int_{T_h} f q_h \, dx - \int_{\Gamma_N} u_0 \{q_h\} \, ds \\
\forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in (\mathbf{V}_h, Q_h) &
\end{aligned} \tag{29.b}$$

Entretanto, essa formulação não é estável para todas as combinações de elementos finitos para os campos das variáveis, já que violam a condição de compatibilidade de *inf-sup*. Outra instabilidade numérica decorre da escolha dos fluxos numéricos adotada nesta formulação (JOSHAGHANI, JOODAT e NAKSHATRALA, 2018). As soluções obtidas, pelo uso destes fluxos, podem causar o fenômeno de Gibbs, caracterizado por oscilações não-físicas na vizinhança das descontinuidades (SILVA, 2010).

Desta maneira, Badia e Codina (2010) propuseram uma técnica de estabilização motivada pela estrutura de multiescala variacional (VMS). Esta técnica adiciona termos de estabilização do tipo adjunto (definidos sobre os elementos), associados aos resíduos vindos da equação da conservação da massa e da lei de Darcy (IGREJA, 2015). Além disso, ela incorpora fluxos numéricos apropriados ao longo das interfaces dos elementos.

A escolha dos fluxos numéricos é dada de forma muito similar à apresentada por Rivière (2008, p. 61):

$$\mathbf{u}_h^*|_e = \{\mathbf{u}_h\} - (\beta_p/h)\{A_{max}\}\llbracket p_h \rrbracket \quad \forall e \in \Gamma^{int} \tag{30.a}$$

$$p_h^*|_e = \{p_h\} - (\beta_u h)\{K_{max}\}\llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket \quad \forall e \in \Gamma^{int} \tag{30.b}$$

$$\mathbf{u}_h^*|_e = \mathbf{u}_h - (\beta_p/h)(A_{max})(p_h - p_0) \quad \forall e \in \Gamma_D \tag{30.a}$$

$$p_h^*|_e = p_0 \quad \forall e \in \Gamma_D \tag{30.b}$$

$$\mathbf{u}_h^*|_e = u_0 \quad \forall e \in \Gamma_N \tag{30.a}$$

$$p_h^*|_e = p_h - (\beta_u h)(K_{max})(\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}) + (\beta_u h)(K_{max})u_0 \quad \forall e \in \Gamma_N \tag{30.b}$$

onde, p_0 e u_0 são os valores prescritos da pressão e da velocidade normal, dados pelas condições de Dirichlet (5) e Neumann (6), respectivamente. β_p e β_u são os parâmetros de estabilidade, enquanto h é o parâmetro da malha, dado em cada aresta pela relação (23). Além disso, K_{max} e A_{max} denotam a norma do máximo (a maior soma absoluta das linhas) do tensor permeabilidade K e da sua inversa $A = K^{-1}$, respectivamente.

Aplicando esses fluxos numéricos e adicionando os termos do tipo adjunto, o problema variacional discreto da formulação DG mista estabilizada (MDGME) de Badia e Codina (2010), em sua forma bilinear-linear, é dado pela Equação 31.

Encontrar $(\mathbf{u}_h, p_h) \in (\mathbf{V}_h, Q_h)$ tal que

$$B_{MDGME}((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) = L_{MDGME}(\mathbf{v}_h, q_h) \quad (31)$$

$$\forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in (\mathbf{V}_h, Q_h)$$

Onde:

$$\begin{aligned} B_{MDGME}((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) &= \\ &= \int_{T_h} A \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h \, dx - \int_{T_h} p_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, dx - \int_{T_h} \nabla \cdot \mathbf{u}_h q_h \, dx \\ &\quad - \delta_1 \int_{T_h} (\mathbf{u}_h + K \nabla p_h) \cdot (A \mathbf{v}_h - \nabla q_h) \, dx \\ &\quad + \delta_2 \int_{T_h} A_{max} \nabla \cdot \mathbf{u}_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, dx \\ &\quad + \int_{\Gamma^{int} + \Gamma_N} (\{p_h\} \llbracket \mathbf{v}_h \rrbracket + \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket \{q_h\} - (\beta_u h) \{A_{max}\} \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket \llbracket \mathbf{v}_h \rrbracket) \, ds \\ &\quad + \int_{\Gamma^{int} + \Gamma_D} (\beta_p/h) \{K_{max}\} \llbracket p_h \rrbracket \cdot \llbracket q_h \rrbracket \, ds \end{aligned} \quad (31.a)$$

$$\begin{aligned} L_{MDGME}(\mathbf{v}_h, q_h) &= \\ &= - \int_{T_h} f q_h \, dx + \delta_2 \int_{T_h} A_{max} f \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, dx \\ &\quad - \int_{\Gamma_D} (p_0(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}) - (\beta_p/h)(K_{max}) p_0 q_h) \, ds \\ &\quad + \int_{\Gamma_N} (u_0 q_h - (\beta_u h)(A_{max}) u_0(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n})) \, ds \end{aligned} \quad (31.b)$$

Para definir completamente a formulação, os termos de parametrização devem ser prescritos.

Os termos de estabilidade δ_1 e δ_2 definidos sobre os elementos são bases residuais vindas das equações que compõem o problema de escoamentos monofásicos em meios porosos. Eles permitem contornar a condição de estabilidade *inf-sup* LBB, sendo o método dito incondicionalmente estável, e flexível na escolha dos elementos finitos. A formulação de

Hughes, Masud e Wan (2006) já havia apresentado o termo δ_1 , sendo considerado como $\delta_1 = 0,5$. Além disso, nos estudos numéricos realizados por eles, foi considerado $\delta_2 = 0,0$, valor adotado para a realização dos casos apresentados neste trabalho.

Os termos de estabilidade β_u e β_p definidos sobre as interfaces dos elementos, são oriundos de uma escolha de fluxos numéricos apropriados e consistentes, que permitem evitar o fenômeno de Gibbs e, ao mesmo tempo, manter estabilidade. Joshaghani, Joodat e Nakshatrala (2018) fizeram recomendações, que segundo eles são baseadas em análises de convergência teórica (citando Alnaes *et al.*, 2015) e extensivas simulações numéricas (citando Alnaes *et al.*, 2014, Amestoy *et al.*, 2001, Arnold *et al.*, 2002): para aproximações conformes, os parâmetros podem ser dados por $\beta_u = \beta_p = 0$, para aproximações não conformes, os parâmetros podem ser dados por $\beta_u = \beta_p = 10$ ou 100.

4 METODOLOGIA

O processo de uma simulação numérica computacional envolve 3 etapas:

- **Pré-processamento:** Consiste na modelagem computacional do problema físico. Nesta etapa, é definida a geometria que aproxime o domínio real do problema e é realizada a discretização ou geração da malha. Além disso, são fornecidas as condições de contorno e as propriedades dos materiais envolvidos no problema físico. São definidos, ainda, os parâmetros da análise.
- **Processamento:** Processo onde os cálculos propriamente ditos são realizados para a obtenção das variáveis de interesse. Nesta etapa, é aplicado um método numérico específico que trate de forma adequada a descrição matemática do problema.
- **Pós-processamento:** Visualização e análise dos resultados obtidos na etapa de processamento, através de interfaces gráficas. As análises podem ser realizadas por meio de cálculos simples para obtenção de variáveis secundárias, ou algum tipo de índice de qualidade dos cálculos numéricos, como erros e taxas de convergência.

Neste trabalho, o principal foco se manteve na etapa de processamento, onde foi implementado o Método dos Elementos Finitos de DG misto estabilizado para a solução do problema de Darcy, aplicado a reservatórios de petróleo. As demais etapas foram realizadas no decorrer deste trabalho, para a execução dos casos de estudos propostos, com o fim de analisar os resultados obtidos pelo método numérico aqui implementado.

Desta forma, o programa aqui desenvolvido consiste apenas de um submódulo do *FEniCS/Dolfin*, contendo a parte de processamento e algumas partes das demais etapas descritas anteriormente. Esse programa será referido como *SIMEFres*.

4.1 PRÉ-PROCESSAMENTO

Geometria e Malha

Inicialmente, nesta etapa, foram realizadas a modelagem geométrica dos reservatórios que seriam analisados. Intrinsecamente relacionada a esta modelagem, está o processo de definição do domínio computacional, através da discretização da geometria, ou seja, da geração da malha.

O programa *FEniCS/Dolfin* permite duas possibilidades para obtenção da malha. A primeira é através do seu gerador interno, e a segunda é a importação de malhas de outros *softwares* geradores de malha.

A primeira possibilidade é disponibilizada através de rotinas básicas de geração de malhas, com a vantagem de ser um processo que independe da aplicação de qualquer programa externo. No entanto, existe uma grande desvantagem relacionada a limitação das geometrias disponíveis, pois apenas formas primitivas podem ser confeccionadas utilizando esta ferramenta. Apesar disso, como a maioria dos casos aqui analisados não consistiam de geometrias muito complexas, esta ferramenta teve a importância de proporcionar uma geração de malha, para alguns casos, de forma mais prática e automatizada.

A segunda opção consiste de se utilizar qualquer outro *software* com gerador de malhas, e depois importá-las para o *FEniCS/Dolfin*. Neste trabalho, foi utilizado para a geração de malha, o programa *Gmsh* (Geuzaine e Remacle, 2009), que apresenta a vantagem de se proporcionar uma maior flexibilidade na definição da geometria, podendo criar formas mais complexas, e disponibilizar de uma maior quantidade de ferramentas para a geração de malha. Além disso, o *Gmsh* é uma ferramenta que oferece simplicidade e automatização, por meio de uma interface que permite a escrita de *scripts* com comandos para gerar a geometria e a malha. Após a geração de malha no *Gmsh*, a importação para o *FEniCS/Dolfin* foi realizada por meio de um *script convert-malha* configurado neste trabalho, adaptado do *dolfin-convert* (Logg e Wells, 2010). Estes realizam a conversão de malha no formato “.mesh” (do *Gmsh*) para o formato “.xml” (do *FEniCS/Dolfin*).

Tradicionalmente, os simuladores de reservatórios utilizam malhas estruturadas quadrilaterais (em 2D) ou hexaédricas (em 3D). Entretanto, *FEniCS/Dolfin* (versão 2018.1.0) não resolve formulações que utilizam malhas quadrilaterais ou hexaédricas, para o caso específico de elementos finitos descontínuos. Desta maneira, o programa *convert-malha* foi adaptado de *dolfin-convert*, com o intuito não só de converter malhas de *Gmsh* para *FEniCS/Dolfin*, mas de permitir que malhas quadrilaterais ou hexaédricas, geradas no primeiro, pudessem ser transformadas em malhas triangulares ou tetraédricas, respectivamente.

Propriedades do Material

Neste trabalho, a resolução da equação de Darcy está relacionada a apenas uma propriedade petrofísica das rochas dos reservatórios, a permeabilidade. Desta forma, a etapa de inserção das propriedades dos materiais para as simulações, se resume a inserir os valores de permeabilidade no programa.

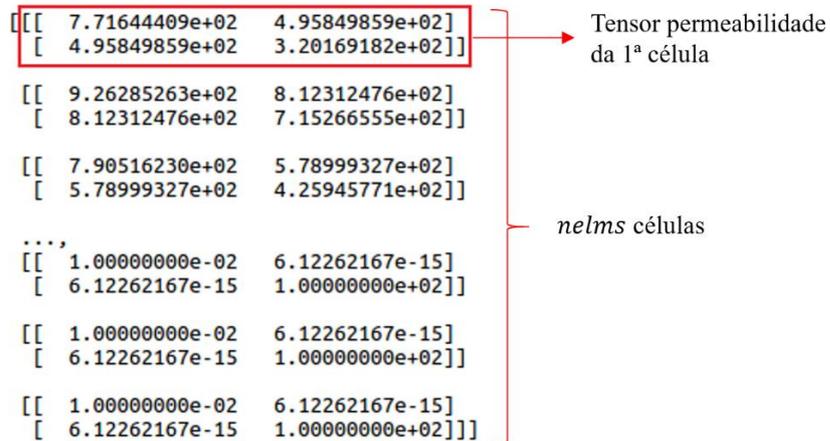
Como já mencionado, a permeabilidade é fortemente dependente do espaço, para a maioria dos reservatórios. Em geral, na indústria do petróleo, as propriedades de permeabilidade são associadas às células do domínio. A ideia mais intuitiva, então, para o seu tratamento

computacional, é armazenar os seus valores em uma matriz que esteja associada a malha, e utilizá-la nos processos dos cálculos.

O *SIMEFres* apresenta uma função, chamada *permeabilidade*, que permite a importação de dados relativos a permeabilidade do reservatório em questão, e realiza cálculos de alguns parâmetros necessários para a solução do problema. Esta função, recebe os valores de permeabilidade de duas maneiras: através da simples importação da “matriz permeabilidade”, ou por meio de expressões matemáticas que a descrevem ao longo do domínio. É importante ressaltar que no programa, a permeabilidade é tratada na sua forma tensorial.

A permeabilidade é atribuída no programa, de modo que cada célula da malha receba o seu correspondente valor tensorial desta propriedade. Desta forma, a “matriz permeabilidade” é tratada, neste trabalho, como uma matriz de 3 dimensões, em que a sua primeira dimensão contém *nelms* elementos, e as outras duas contêm *dim* elementos, sendo *nelms* o número de células (elementos) da malha e *dim*, a dimensão geométrica do problema. A Figura 5 ilustra uma matriz permeabilidade para um caso bidimensional.

Figura 5 - Matriz com valores da permeabilidade em um espaço bidimensional.



Fonte: O Autor.

A primeira maneira, é realizada simplesmente pela leitura de um arquivo (como, por exemplo, “.txt”), que contém os valores da permeabilidade para cada célula, ou pela simples inserção da própria matriz contendo os dados diretamente no corpo do programa, o que é útil para pequenos testes.

Para os casos apresentados neste trabalho, as permeabilidades foram dadas pela segunda opção. Inicialmente, foram definidos subdomínios, ou seja, regiões do domínio que a permeabilidade é dada por uma expressão tensorial matemática específica (podendo ser esta,

um simples tensor com valores constantes). Os subdomínios foram definidos utilizando ferramentas de funções de malhas (*MeshFunction*) do *FEniCS/Dolfin*. Após as marcações destas regiões sobre o domínio, as “expressões de permeabilidade” foram inseridas. Por fim, com os valores e as regiões, foram construídas as matrizes permeabilidades dos casos.

A função *permeabilidade*, após a obtenção da matriz permeabilidade, associa esses valores a malha, utilizando um espaço tensorial de funções de elementos de Galerkin descontínuos de grau 0 (DG_0). E depois realiza, os cálculos dos inversos dos tensores da matriz permeabilidade K , para a obtenção de A , e executa os cálculos das normas do máximo destas, para a obtenção de K_{max} e A_{max} , que serão inseridos na formulação elementos finitos implementada posteriormente.

Termos Fontes e Condições de Contorno

Os termos fontes foram definidos pela função *Expression* do *FEniCS/Dolfin*, as condições de contorno, por sua vez, são inseridas fracamente na formulação implementada.

Desta forma, os únicos dados requeridos nesta etapa, foram, as regiões do contorno na qual cada condição é inserida, sendo representadas por um número *cond*, e o tipo *tipcond* das condição, “D” para Dirichlet (pressão) e “N” para Neumann (velocidade). Além disso, foram definidos os valores (ou expressões) para a condições de contorno e termos fontes.

4.2 PROCESSAMENTO

Após inseridos os dados no pré-processamento, tem início a etapa de processamento, onde um método numérico apropriado é escolhido e utilizado para a solução do problema. O método que foi implementado e será posteriormente analisado nos estudos de casos, nesse trabalho, foi o Método de Elementos Finitos de Galerkin descontínuo misto estabilizado para resolver a equação de Darcy, expresso em (31).

Como mencionado na seção 3.2.1, os métodos dos elementos finitos constituem duas etapas: a forma variacional do problema e a solução aproximada, utilizando uma determinada escolha de elementos finitos. Diante disso, o programa *FEniCS/DOLFIN* consistiu de uma importante plataforma para o desenvolvimento deste trabalho, já que foi essencial para a implementação destes dois passos.

O *FEniCS* é um projeto colaborativo em código aberto com o objetivo de automatizar a solução de modelos matemáticos baseados em equações diferenciais (Logg, Mardal e Wells, 2011). O *DOLFIN* é uma biblioteca de *FEniCS* que, de um modo geral, é

responsável pela interface com o usuário via programas em *C++* ou *Python*. O programa *SIMEFres*, desenvolvido nesse trabalho, foi construído em *DOLFIN*, via linguagem *Python*.

Portanto, a etapa de processamento para a simulação numérica deste trabalho foi desenvolvida da seguinte maneira:

- No *SIMEFres*, foi implementada a formulação DG mista estabilizada para Darcy, além de serem escolhidos os espaços de elementos finitos para as variáveis da pressão e velocidade.
- O programa *SIMEFres* então calcula a solução aproximada do problema, com os elementos e rotinas pré-definidos no *FEniCS*.

Como o método utilizado consiste de um Método de Galerkin descontínuo, primeiramente, no *SIMEFres*, foram escolhidos espaços de funções descontínuas. Para a maioria dos casos analisados neste trabalho, utilizou-se polinômios com grau de ordem 2, para a velocidade, e de ordem 1, para a pressão. A Figura 6 ilustra a escolha desses elementos para u e p através de um espaço de elementos misto dado por W .

Figura 6 - Escolha de espaços de elementos finitos para a pressão e velocidade.

```

1 #Espaces de Funcoes
2 Vh = VectorElement("DG", mesh.ufl_cell(), 2)
3 Qh = FiniteElement("DG", mesh.ufl_cell(), 1)
4 element = MixedElement([Vh,Qh])
5 W = FunctionSpace(mesh, element)
6
7 #Funcoes
8 u, p = TrialFunctions(W)
9 v, q = TestFunctions(W)

```

Fonte: O Autor.

O importante passo da implementação do problema variacional também se deu pela interface de *DOLFIN*, utilizando a *Unified Form Language* (UFL) (Logg, Mardal e Wells, 2011), que é a linguagem específica de domínio para a declaração da discretização via MEF de formas variacionais e funcionais.

O *DOLFIN* dispõe de operadores básicos e até de operações mais complexas para definição das formas variacionais, permitindo que nele sejam configurados códigos com uma notação muito próxima da matemática. A Tabela 1 apresenta algumas operações matemáticas, com a simbologia utilizada em *DOLFIN*.

Alguns operadores na notação UFL ainda são fornecidos para a implementação de métodos de Galerkin descontínuos. A restrição de uma função para o lado positivo e o negativo de uma

aresta no interior do domínio é expressa simplesmente por $u(' +')$ e $u(' -')$, respectivamente. Além disso, os operadores salto e média, são denotados por $jump(u, n)$ e $avg(u)$, sendo n o vetor normal unitário. Esses operadores podem somente ser usados quando integrados sobre aresta interiores, usando a denotação $* dS$ (LOGG, MARDAL e WELLS, 2011).

Tabela 1 - Operações matemáticas na notação de *DOLFIN*.

Operações	Símbolos
Adição	$(a + b)$
Multiplicação	$(a * b)$
Integração	$(a * dx)$
Produto Interno	$dot()$
Divergente	$div()$
Gradiente	$grad()$

Fonte: O Autor.

Assim, a implementação da formulação expressa na Equação 31 para a solução de Darcy, no programa *SIMEFres*, é ilustrada na Figura 7.

Figura 7 - Formulação do MDGME implementado em *SIMEFres*.

```

1 #Forma Fraca
2 n = FacetNormal(mesh)
3 h = CellDiameter(mesh)
4 h_avg = (h(' +')+h(' -'))/2
5
6 b0 = dot(A*u,v)*dx - p*div(v)*dx - q*div(u)*dx \
7     - delta1*dot(u+K*grad(p), A*v-grad(q))*dx \
8     + delta2*Amax*div(u)*div(v)*dx
9
10 b1 = avg(p)*jump(v,n)*dS + jump(u,n)*avg(q)*dS \
11     - (betau*h_avg)*avg(Amax)*jump(u,n)*jump(v,n)*dS \
12     + (betap/h_avg)*avg(Kmax)*dot(jump(p,n), jump(q,n))*dS
13
14 b2 = p*dot(v,n)*ds(2) + dot(u,n)*q*ds(2) \
15     - (betau*h)*Amax*dot(u,n)*dot(v,n)*ds(2) \
16     + (betap/h)*Kmax*dot(p*n, q*n)*ds(1)
17
18 B = b0+b1+b2
19
20 L = - f*q*dx + delta2*Amax*f*div(v)*dx \
21     - p0*dot(v, n)*ds(1) + (betap/h)*Kmax*p0*q*ds(1) \
22     + u0*q*ds(2) - (betau*h)*Amax*u0*dot(v, n)*ds(2)

```

Fonte: O Autor.

Conforme ilustrado na Figura 7, primeiramente são obtidos os parâmetros de malha requeridos, como os vetores n unitários normais de cada aresta da malha e o parâmetro de malha h . Além disso, anteriormente, são especificados os parâmetros de estabilidade δ_1 , δ_2 , β_u e β_p . Os símbolos dx , $ds(1)$, $ds(2)$, e dS , representam a integração sobre os elementos, sobre os contornos onde são impostas as condições de Dirichlet, sobre os contornos onde são impostas as condições de Neumann, e sobre os contornos dos elementos no interior da malha, respectivamente.

Por fim, o sistema de equações é montado e resolvido no comando da linha 26 da Figura 8, sendo w a representação do elemento misto, dado pela combinação dos elementos finitos para velocidade u e para a pressão p .

Figura 8 - Solução do MDGME para os campos de pressão e velocidade.

```
24 #Solucao
25 w = Function(W)
26 solve(B == L, w)
27 (u , p) = w.split()
```

Fonte: O Autor.

O *FEniCS* resolve o problema através da interação entre seus componentes (Figura 9). Após a implementação da forma variacional descrita em UFL, estas são compiladas utilizando o *FEniCS Form Compiler* (FFC) (Logg, Mardal e Wells, 2011), responsável pela real geração automática do código otimizado em linguagem de baixo-nível. Este código se encontra no formato padrão do *Unified Form-assembly Code* (UFC), podendo ser acessado através de classes de *DOLFIN*. Este, então, automatiza a montagem do sistema proveniente da discretização da forma fraca definida em *SIMEFres*. O *DOLFIN* possui interfaces com coleções de solucionadores de equações lineares, que são acessados para a solução do problema discreto.

Figura 9 - Interação entre os componentes de *FEniCS* para a solução do problema.



Fonte: Adaptada de Luna (2012).

4.3 PÓS-PROCESSAMENTO

Após a solução de um determinado problema, os resultados são visualizados na etapa de pós-processamento. Neste trabalho, foram utilizadas duas ferramentas de visualização, o *Matplotlib* e o *Paraview*.

O *Matplotlib* é uma biblioteca popular de plotagem em duas dimensões em *Python*, apresentando uma interação natural com o *DOLFIN*. Desta forma, ele foi utilizado para algumas plotagens de resultados bidimensionais, por oferecer simplicidade e praticidade. O *DOLFIN* permite também a visualização rápida não só através do *Matplotlib*, mas por sua ferramenta própria de visualização, chamada *Viper*.

O *Paraview* (Henderson, 2007) é um *software*, de código aberto, de visualização e análise de dados de múltiplas plataformas. Ele contém inúmeras ferramentas de visualização de resultados tridimensionais, que são acessadas por uma interface gráfica, utilizando técnicas qualitativas e quantitativas. Para a visualização com o *Paraview*, foram utilizadas funções de impressões do *DOLFIN*, para os dados armazenados e resultados obtidos no processo da simulação. A Figura 10 ilustra a impressão dos resultados para os campos da pressão e velocidade para serem visualizados em *Paraview*.

Figura 10 - Procedimento para salvar a solução do problema.

```
# Salvando solucao
ufile_pvd = File("results2/velocidade.pvd")
ufile_pvd << u
pfile_pvd = File("results2/pressao.pvd")
pfile_pvd << p
```

Fonte: O Autor.

Nesta etapa ainda foram computados os erros com o objetivo de se avaliar a acurácia da solução numérica dada pelo método implementado. Para isso, foram calculados dois tipos de erros: o erro da norma L_2 e o erro da norma do máximo.

O erro da norma L_2 é definido por:

$$E_{L_2} = \sqrt{\int_{\Omega} (p_e - p)^2 dx} \quad (32)$$

onde p é a solução numérica obtida e p_e é a solução analítica ou uma solução referência, de um determinado problema.

O erro da norma do máximo é definido como o valor máximo do erro entre todos os vértices da malha de elementos finitos.

Em *SIMEFres*, o erro da norma L_2 foi computado através da função *errornorm* do *FEniCS*. Segundo Logg, Mardal e Wells (2010), o procedimento simples para se computar o erro, conforme ilustrado na Figura 11, pode introduzir erros significativos de arredondamento. Desta forma, a função *errornorm* calcula o erro da norma L_2 , interpolando as soluções p e p_e (representadas por u e u_e nas Figuras 11 e 12, respectivamente) em um espaço de elementos finitos de maior ordem, subtraindo os seus graus de liberdade e, em seguida, realizando a integração do campo do erro. A função *errornorm* do *FEniCS* é ilustrada na Figura 12.

Figura 11 - Cômputo impreciso do erro da norma L_2 .

```
error = (u_e - u)**2*dx
E = sqrt(abs(assemble(error)))
```

Fonte: Logg, Mardal e Wells (2011).

Figura 12 - Função *errornorm* para o cômputo do erro da norma L_2 .

```
def errornorm(u_e, u):
    V = u.function_space()
    mesh = V.mesh()
    degree = V.ufl_element().degree()
    W = FunctionSpace(mesh, 'P', degree + 3)
    u_e_W = interpolate(u_e, W)
    u_W = interpolate(u, W)
    e_W = Function(W)
    e_W.vector()[:] = u_e_W.vector().array() - u_W.vector().array()
    error = e_W**2*dx
    return sqrt(abs(assemble(error)))
```

Fonte: Logg, Mardal e Wells (2011).

Para calcular o erro da norma do máximo, inicialmente são computados os valores de p e p_e em todos os vértices da malha, subtrai-se os resultados, e então encontra-se o máximo valor absoluto da diferença.

Por fim, são computadas as taxas de convergência em relação aos erros, que é definida como:

$$r_i = \frac{\ln(E_{i-1}/E_i)}{\ln(h_{i-1}/h_i)} \quad (33)$$

onde E representa o erro, h é o parâmetro de malha, e i é um índice que representa que a comparação dos erros está sendo realizada entre duas malhas consecutivas, em relação a uma escala de refinamento de malha.

5 RESULTADOS

Nesta seção são apresentados estudos de casos, onde foram desenvolvidos problemas modelos regidos pela equação de Darcy. É importante mencionar que na área da simulação de escoamentos em reservatórios de petróleo, devido a perfurações de poços, que, em geral, são tratados como termos fontes pontuais, além de permeabilidade heterogenia e mudanças bruscas nas condições de contorno, é comum o surgimento de singularidades ou elevados gradientes de pressão (LUNA, 2012).

Portanto, o principal objetivo desta seção é a validação do desempenho do Método de Elementos Finitos DG misto estabilizado implementado neste trabalho para a solução do problema de Darcy.

A Tabela 2 apresenta os valores dos termos de estabilidade adotados para a maioria dos exemplos numéricos realizados nesta seção, com base, principalmente, no trabalho de Hughes, Masud e Wan (2006) e de Joshaghani, Joodat e Nakshatrala (2018).

Tabela 2 - Valores dos termos de estabilidade adotados para as análises.

Termos de	
Estabilidade	Valores
β_u	0,0
β_p	0,0
δ_1	0,5
δ_2	0,0

Fonte: O Autor.

5.1 MEIO HETEROGÊNIO E SUAVEMENTE ANISOTRÓPICO

Este problema consiste de um exemplo modelo, que foi originalmente proposto por Crumpton *et al.* (1995), e tem sido analisado por diversos outros trabalhos, como Carvalho (2005), Luna (2012) e Contreras (2012), utilizando diferentes métodos de elementos finitos e volumes finitos para a sua solução numérica.

O domínio é dado por um quadrado com dimensões $[-1, 1] \times [-1, 1]$, onde o tensor permeabilidade do meio é dado por:

$$K = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{para } x < 0 \\ \Psi \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \text{para } x > 0 \end{cases} \quad (34)$$

Na Equação 34, Ψ é a intensidade da descontinuidade em $x = 0$.

As condições de contorno são do tipo Dirichlet, e consiste na solução analítica do problema, sendo dadas por:

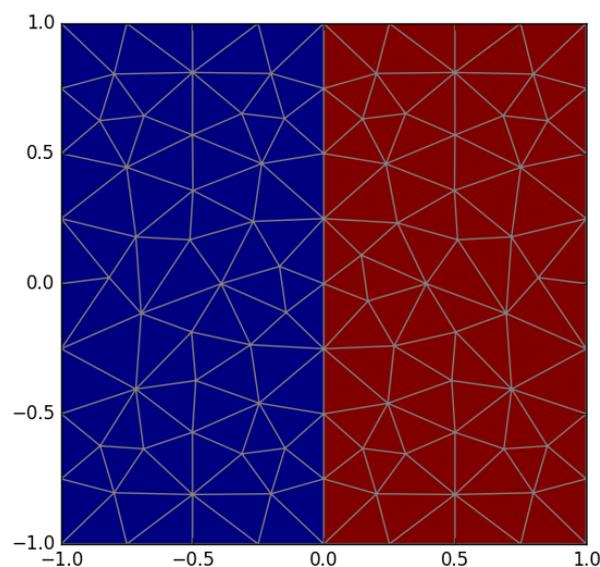
$$p = \begin{cases} (2\text{sen}(y) + \cos(y))\Psi x + \text{sen}(y); & \forall x \leq 0 \\ e^x \text{sen}(y); & \forall x > 0 \end{cases} \quad (35)$$

O termo fonte é dado por:

$$f(x, y) = \begin{cases} (2\text{sen}(y) + \cos(y))\Psi x + \text{sen}(y); & \forall x \leq 0 \\ -2e^x \Psi \cos(y); & \forall x > 0 \end{cases} \quad (36)$$

Na resolução deste problema foram consideradas malhas triangulares não-estruturadas, com dimensões aproximadas de (8x8), (16x16), (32x32), (64x64) e (128x128). Além disso, foram utilizados elementos descontínuos de 1ª ordem para a pressão, e de 2ª ordem para a velocidade. A Figura 13 apresenta a malha (8x8) utilizada neste caso, juntamente com a componente K_{xx} do tensor de permeabilidade.

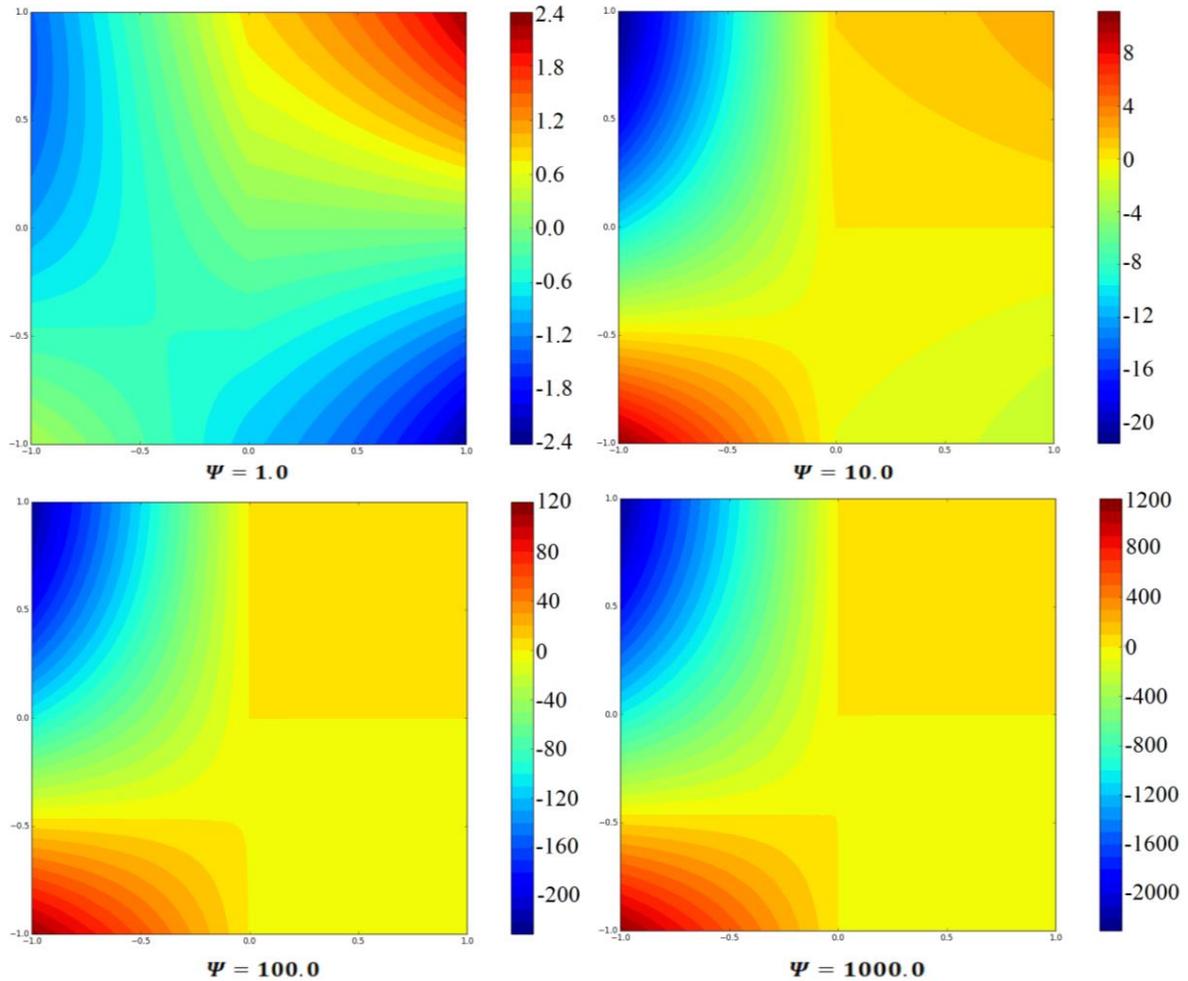
Figura 13 - Malha 8x8 do exemplo 5.1 com a componente K_{xx} da permeabilidade.



Fonte: O Autor.

Na Figura 14, são apresentados os campos de pressões obtidos neste trabalho para os diferentes valores Ψ , utilizando a malha 64x64.

Figura 14 - Resultados da pressão do problema 5.1.



Fonte: O Autor.

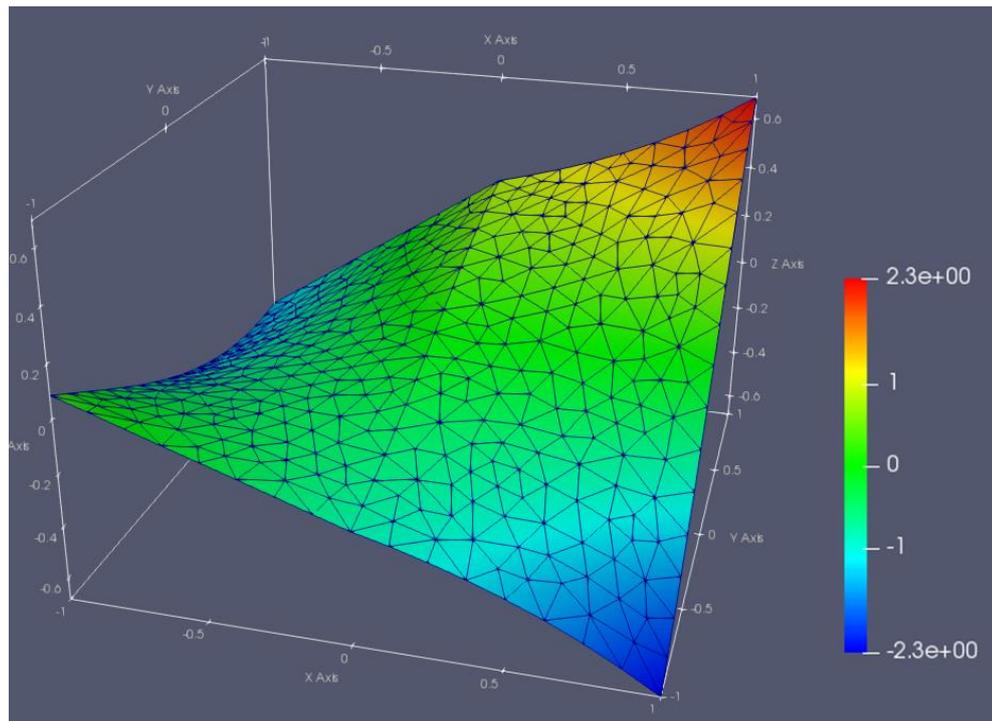
Os erros da norma do máximo e da norma L_2 relacionados à solução analítica para o campo da pressão, juntamente com os obtidos por Luna (2012), estão nas Tabelas 3, 4, 5 e 6, para os casos de Ψ igual a 1, 10, 100 e 1000, respectivamente. O trabalho de Luna (2012) foi preferido para a realização dessa comparação, devido a este autor ter utilizado exatamente o mesmo procedimento para a obtenção dos erros da norma L_2 e do máximo, ou seja, assim como neste trabalho, os erros foram computados utilizando as ferramentas de *FEniCS*.

É possível observar das tabelas, que Luna (2012) obteve resultados com uma ordem de convergência maior do que os encontrados neste trabalho. O trabalho do Luna (2012), utilizou

para este exemplo, um Método de Elementos Finitos Misto Estabilizado e, em ambos os trabalhos, foram adotadas interpolações lineares para a pressão.

Além disso, na Figura 15 é apresentado contornos de superfícies para o caso $\Psi = 1$, utilizando a malha 16x16, com o objetivo de se analisar de melhor maneira se a solução numérica não apresentou singularidades não reais em nenhuma região do domínio.

Figura 15 - Contorno de superfície para a pressão, no caso $\Psi = 1$.



Fonte: O Autor.

Tabela 3 - Erros da norma L_2 e da norma do máximo para o problema 5.1 e $\Psi = 1$.

Malha ($\Psi = 1$)	\mathbf{E}_{L2}		\mathbf{E}_{max}	
	\mathbf{E}_{L2}	\mathbf{E}_{max}	(Luna, 2012)	(Luna, 2012)
8x8	7.79E-03	1.06E-02	4.50E-02	5.40E-02
16x16	5.71E-03	6.08E-03	2.00E-02	2.70E-02
32x32	2.08E-03	3.38E-03	9.80E-03	1.30E-02
64x64	1.33E-03	1.81E-03	4.80E-03	6.60E-03
128x128	5.38E-04	7.45E-04	2.40E-03	3.20E-03

Fonte: O Autor.

Tabela 4 - Erros da norma L_2 e da norma do máximo para o problema 5.1 e $\Psi = 10$.

Malha ($\Psi = 10$)			$\ E_{L2}\ $	$\ E_{max}\ $
	$\ E_{L2}\ $	$\ E_{max}\ $	(Luna, 2012)	(Luna, 2012)
8x8	7.92E-02	2.73E-01	1.80E-01	9.20E-02
16x16	1.73E-02	7.69E-02	5.20E-02	3.80E-02
32x32	5.16E-03	1.90E-02	1.80E-02	1.90E-02
64x64	1.90E-03	6.33E-03	7.70E-03	9.20E-03
128x128	8.27E-04	1.46E-03	3.60E-03	4.60E-03

Fonte: O Autor.

Tabela 5 - Erros da norma L_2 e da norma do máximo para o problema 5.1 e $\Psi = 100$.

Malha ($\Psi = 100$)			$\ E_{L2}\ $	$\ E_{max}\ $
	$\ E_{L2}\ $	$\ E_{max}\ $	(Luna, 2012)	(Luna, 2012)
8x8	7.81E-01	2.68E+00	1.70E+00	8.60E-01
16x16	1.61E-01	8.35E-01	4.30E-01	2.90E-01
32x32	4.09E-02	1.78E-01	1.10E-01	8.80E-02
64x64	1.08E-02	5.40E-02	2.80E-02	2.50E-02
128x128	2.30E-03	7.67E-03	7.90E-03	7.20E-03

Fonte: O Autor.

Tabela 6 - Erros da norma L_2 e da norma do máximo para o problema 5.1 e $\Psi = 1000$.

Malha ($\Psi = 1000$)			$\ E_{L2}\ $	$\ E_{max}\ $
	$\ E_{L2}\ $	$\ E_{max}\ $	(Luna, 2012)	(Luna, 2012)
8x8	7.82E+00	2.68E+01	1.70E+01	8.80E+00
16x16	1.61E+00	8.42E+00	4.30E+00	2.90E+00
32x32	4.07E-01	1.82E+00	1.10E+00	9.20E-01
64x64	1.06E-01	5.57E-01	2.70E-01	2.70E-01
128x128	2.13E-02	7.85E-02	6.80E-02	7.90E-02

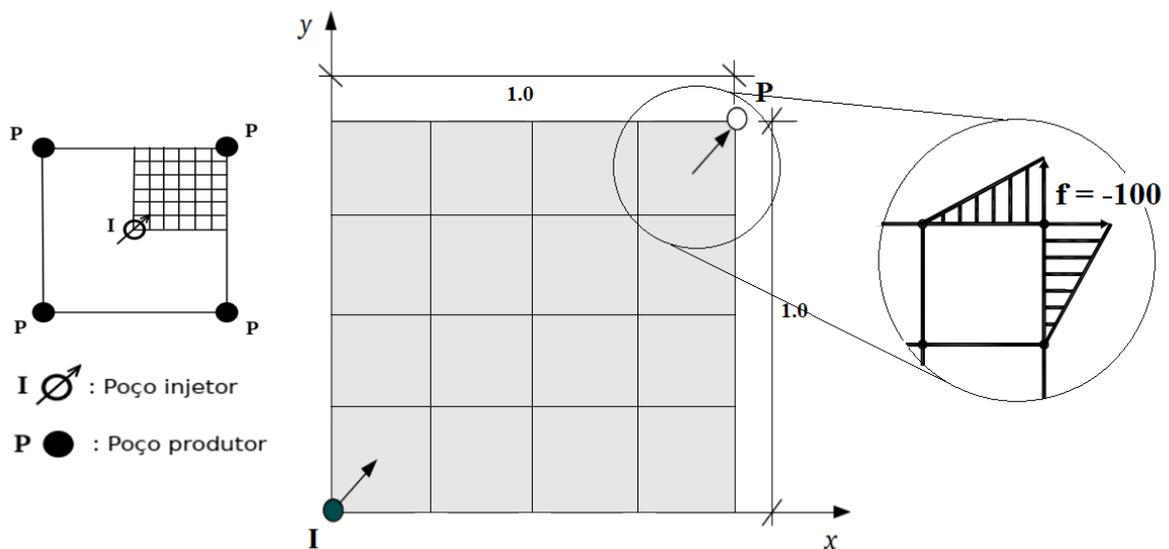
Fonte: O Autor.

5.2 PROBLEMA 1/4 DE CINCO POÇOS

Este caso consiste em um real problema de escoamento de óleo no processo de injeção com uma configuração padrão de cinco poços (Figura 16, esquerda), sendo um poço injetor e quatro poços produtores, alinhados na diagonal principal, conforme Peaceman (1977).

O problema é comumente analisado em trabalhos que estudam escoamentos em reservatórios de petróleo. O trabalho presente se baseou nas condições impostas em Hughes, Masud e Wan (2006), Nunez (2014) e Nunez *et al.* (2017).

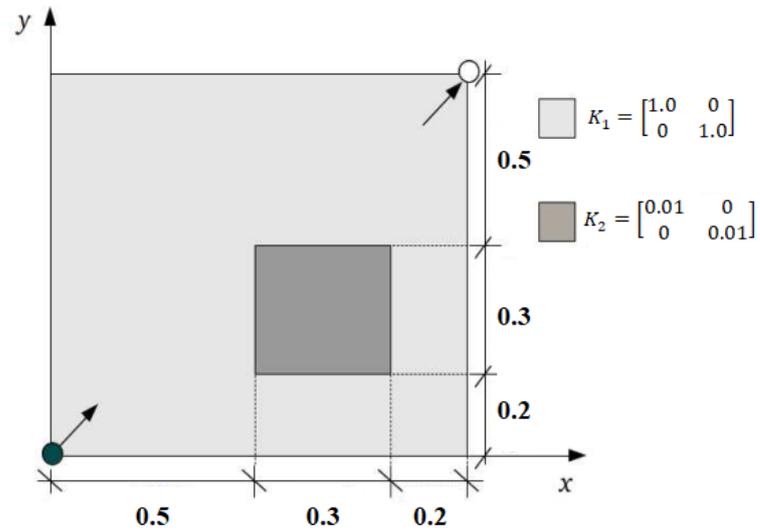
Figura 16 - Problema de cinco poços e domínio computacional.



Fonte: Adaptado de Nuñez (2014).

O domínio foi dado por um quadrado $[0,1] \times [0,1]$, representando apenas um quarto do reservatório. A injeção do fluido, em geral a água, no processo de extração de petróleo, foi modelada pelo termo fonte, distribuído linearmente no elemento mais próximo a região do poço injetor, com $f = 100$, e no elemento mais próximo do poço produtor, com $f = -100$. A Figura 16 (direita), ilustra o domínio com uma representação de como o termo fonte é distribuído nas regiões do poço produtor do reservatório. Para as condições de contorno, foram consideradas, velocidades normais nulas em todo o contorno do domínio. Além disso, foi prescrita uma pressão $p_0 = 0$, no ponto $(1,0)$.

Figura 17 - Domínio heterogêneo para o problema de 1/4 de cinco poços.

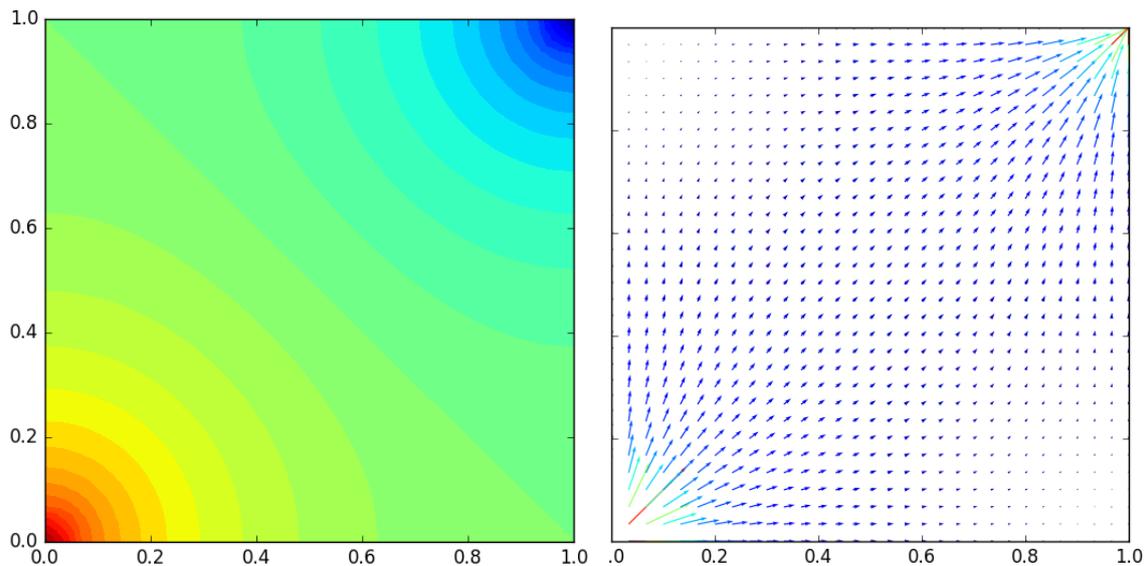


Fonte: Adaptado de Nuñez (2014).

Inicialmente, foi simulado um caso de reservatório homogêneo, com permeabilidade isotrópica $K = I$, sendo I a matriz identidade bidimensional. Posteriormente, foi simulado um caso, cujo domínio apresentava dois valores de permeabilidade, como ilustrado na Figura 17.

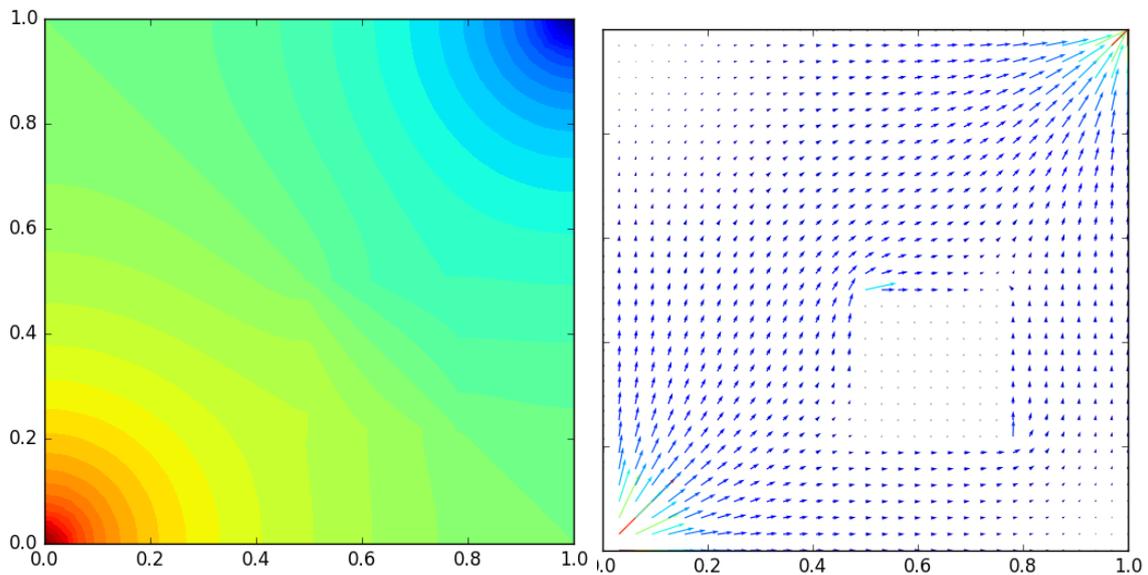
Estes dois subcasos, serviram unicamente para se ter uma noção preliminar do fenômeno que rege esse problema. Os resultados qualitativos para as pressões e velocidades dessas duas configurações são apresentados nas Figuras 18 e 19.

Figura 18 - Resultados de pressões e velocidades para o meio homogêneo.



Fonte: O Autor.

Figura 19 - Resultados de pressões e velocidades para o meio heterogêneo.



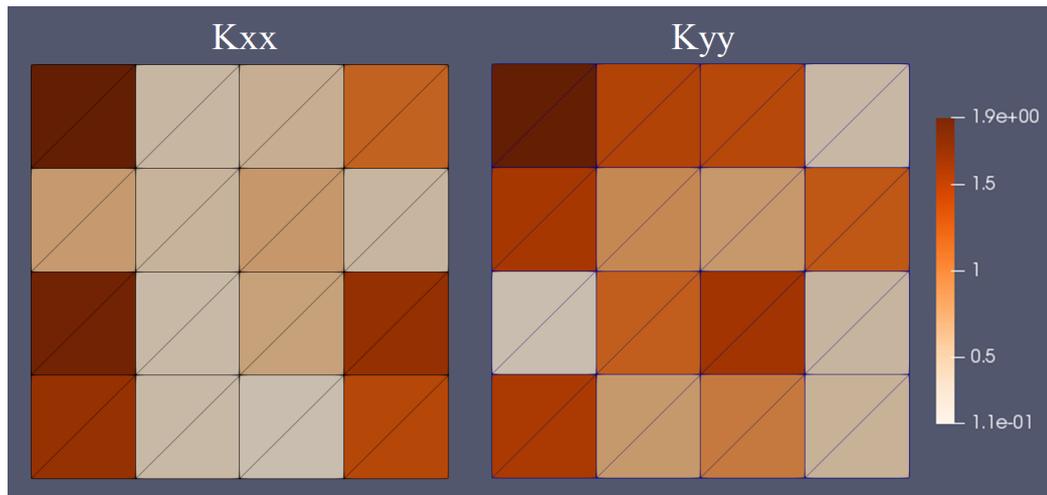
Fonte: O Autor.

Para uma análise qualitativa deste problema, foi proposto um caso adaptado de Nuñez *et al.* (2017). Neste, o termo fonte foi distribuído linearmente em uma região próxima ao poço injetor, dada por $[0, 1/4] \times [0, 1/4]$, sendo $f = 100$ no ponto $(0,0)$, e distribuído em $[3/4, 1] \times [3/4, 1]$, com o valor de $f = -100$ no ponto $(1,1)$. As condições de contorno permaneceram as mesmas.

O tensor permeabilidade foi dado apenas por suas componentes K_{xx} e K_{yy} , sendo $K_{xy} = K_{yx} = 0$, consistindo de um problema ortotrópico. Além disso, o domínio foi dividido em 16 diferentes regiões de permeabilidade (como ilustrado na Figura 16), sendo os seus valores K_{xx} e K_{yy} definidos por funções *random* de *Numpy* (módulo de *Python* que trabalha com matrizes), ou seja, por valores gerados aleatoriamente, dentro de uma faixa de 0,001 a 2,0. A Figura 20 ilustra os valores de permeabilidade que foram utilizados para os resultados que serão apresentados nesta seção.

Para este problema foi realizado um estudo de convergência de malha, considerando como referência o resultado obtido para uma malha triangular alinhada 100x100. Desta forma, foram obtidos erros de norma do máximo e da norma L_2 , para malhas triangulares alinhadas, considerando elementos de 1ª ordem para a pressão e 2ª ordem para a velocidade. A Tabela 7 apresenta os erros resultantes e as taxas de convergência.

Figura 20 - Domínio altamente heterogêneo para o problema 5.4.



Fonte: O Autor.

Tabela 7 - Erros e taxas de convergência para o problema 5.2.

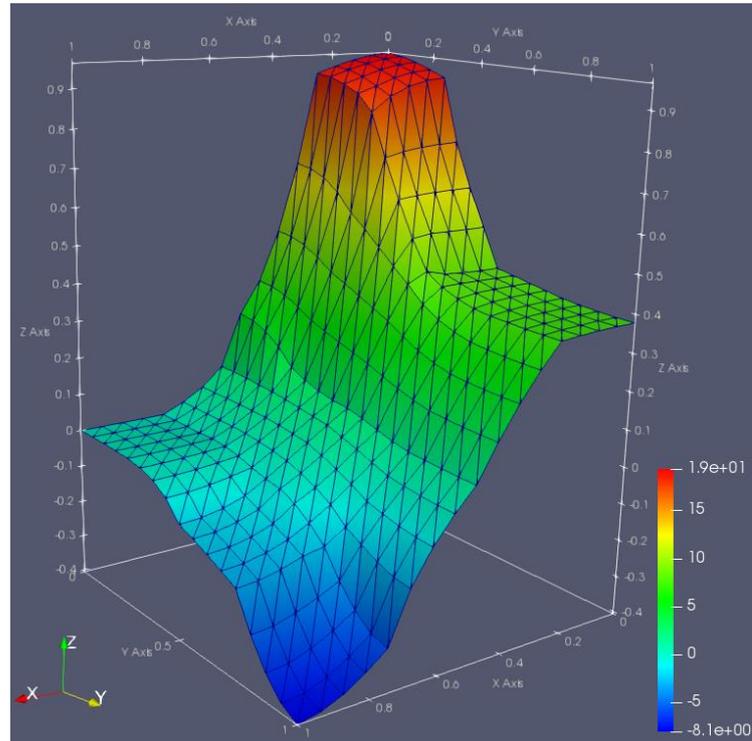
Malhas	$\ E_{L2}\ $	$\ E_{max}\ $	r_{L2}	$r_{máx}$
4x4	1.48E+00	2.91E+00	-	-
8x8	6.11E-01	1.29E+00	1,28	1,17
16x16	2.61E-01	5.82E-01	1,23	1,15
32x32	1.07E-01	2.49E-01	1,29	1,22
64x64	2.97E-02	8.87E-02	1,84	1,49
100x100	-	-	-	-

Fonte: O Autor.

A Figura 21 apresenta o perfil da pressão no domínio da malha 16x16. Este resultado condiz com o esperado pelas conclusões obtidas nos subcasos anteriores. Além disso, mesmo com a presença de várias transições de valores de permeabilidade, não foram encontradas regiões com oscilações espúrias de pressão. A Figura 22 apresenta o perfil de velocidade em todo o domínio.

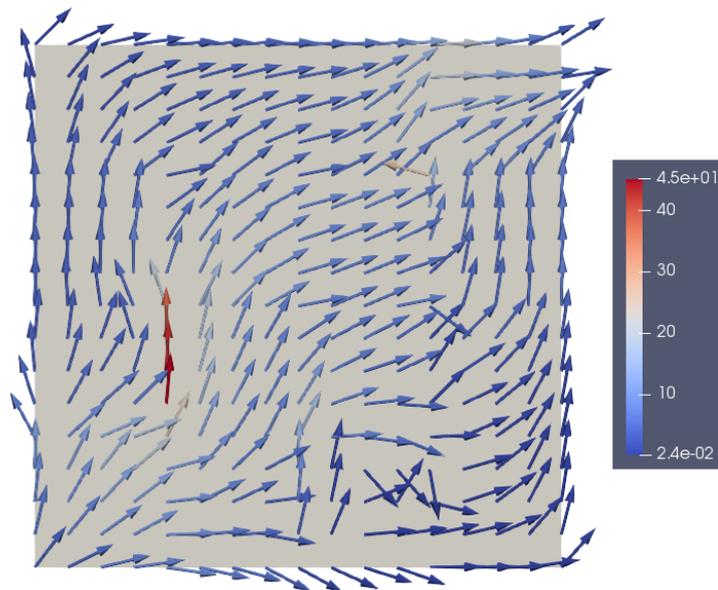
Um fato observado na Figura 22 é que as condições impostas para que as velocidades normais sejam nulas em todo o contorno do domínio não foram satisfatoriamente atendidas. Desta forma, na Figura 23 é apresentado os resultados das velocidades, na mesma malha 16x16, com as mesmas condições, porém com o termo de estabilidade β_u alterado. O novo valor de $\beta_u = 10^{10}$ foi proposto com base em algumas considerações realizadas por Igreja (2015). Com esse novo valor de β_u pode-se concluir que a condição de Neumann foi melhor imposta, resultando em valores de velocidades mais precisos.

Figura 21 - Resultados para as pressões do problema 5.4.



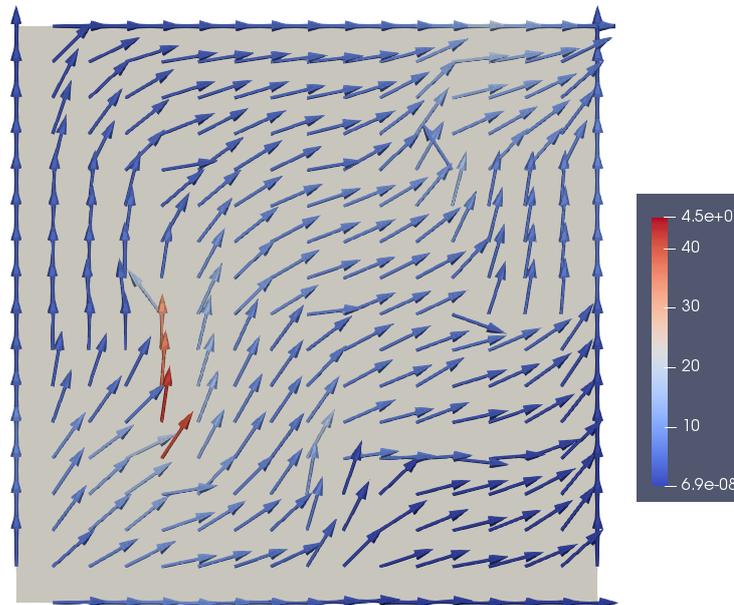
Fonte: O Autor.

Figura 22 - Resultados para as velocidades do problema 5.4.



Fonte: O Autor.

Figura 23 - Resultados para as velocidades do problema 5.4, com $\beta_u = 10^{10}$.



Fonte: O Autor.

Além disso, a fraca imposição da condição de contorno de Neumann no caso apresentado na Figura 22 (ou seja, com $\beta_u = 0$), resulta em uma consequência incoerente com o problema físico de reservatórios de petróleo. Este resultado apresenta regiões no contorno do domínio onde estaria acontecendo vazamentos de fluidos no reservatório, o que não ocorre na realidade. Desta forma, uma maneira de avaliar o efeito do termo de estabilidade β_u nos resultados para o campo da velocidade é a realização do cômputo do fluxo volumétrico normal à fronteira do domínio. A Tabela 8 apresenta os resultados do fluxo resultante nas fronteiras do domínio, para os dois casos simulados.

Tabela 8 - Resultados do fluxo resultante nas fronteiras.

Caso	Fluxo Volumétrico (u.v./u.t.)
$\beta_u = 0$	-0.1482
$\beta_u = 10^{10}$	2.844E-13

Fonte: O Autor.

5.2 MEIO HOMOGENEO E FORTEMENTE ANISOTRÓPICO

Este exemplo foi retirado de Contreras (2017), com o objetivo de se avaliar o princípio do máximo discreto (DMP).

Segundo Contreras (2017), idealmente, os métodos numéricos utilizados para a solução do campo da pressão no problema de escoamentos monofásicos em meios porosos deveriam preservar a positividade da solução numérica, ou, ao menos, o princípio do máximo discreto (*Discrete Maximum Principle*, DMP). Ele ressalta que a não satisfação do DMP, no contexto da simulação de reservatórios de petróleo, implica em se obter soluções não-físicas para o campo das pressões.

O domínio consiste de um quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, com tensor anisotrópico dado por:

$$K = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \text{ com } \theta = 40^\circ \quad (37)$$

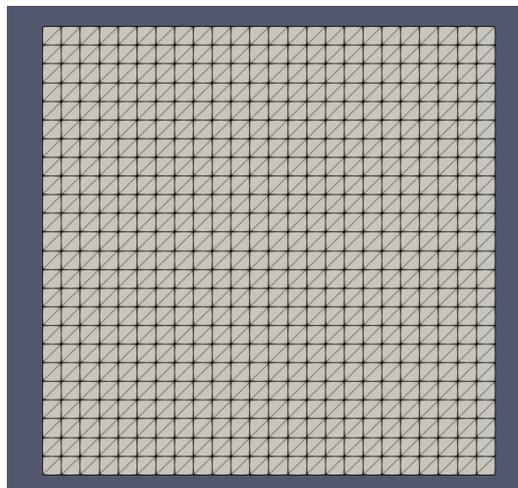
O termo fonte é nulo em todo o domínio e as condições de contorno são do tipo Dirichlet, com a pressão dada por uma função linear continua por partes definida por:

$$p = \begin{cases} 1; & \text{sobre } [0.0,0.2] \times 0.0 \cup 0.0 \times [0.0,0.2] \\ 0; & \text{sobre } [0.8,1.0] \times 1.0 \cup 1.0 \times [0.8,1.0] \\ 0.5; & \text{sobre }]0.2,1.0] \times 0.0 \cup 0.0 \times]0.2,1.0] \\ 0.5; & \text{sobre } [0.0,0.8[\times 1.0 \cup 1.0 \times [0.0,0.8[\end{cases} \quad (38)$$

A condição de DMP para esse caso, então, é de que não se pode haver resultados de pressão acima de 1 em todo o domínio, e somente valores positivos.

Para esta análise foram utilizadas 3 malhas triangulares alinhadas de 24x24, 50x50 e 90x90. A Figura 24 apresenta a malha 24x24 utilizada.

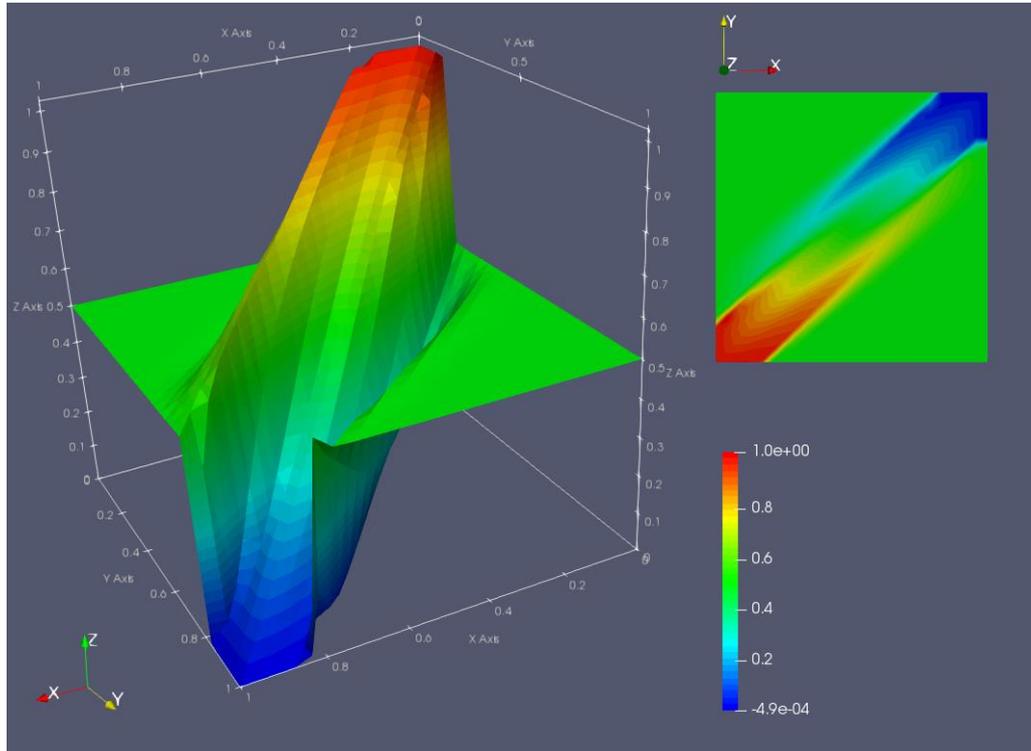
Figura 24 - Malha 24x24 utilizada para o problema 5.3.



Fonte: O Autor.

A Figura 25 apresenta o campo de pressão obtido na malha 24x24, obtendo um resultado condizente com a física do problema. A Tabela 9 apresenta mais detalhadamente os resultados encontrados para a pressão máxima e mínima no domínio computacional.

Figura 25 - Resultados do campo da pressão para o problema 5.3.



Fonte: O Autor.

Tabela 9 - Pressões mínimas e máximas obtidas para o problema 5.3.

Malhas	Pressão mínima	Pressão máxima
24x24	-0.00049	1.02426
50x50	-0.00028	1.04263
90x90	-0.00177	1.04998

Fonte: O Autor.

Esta tabela mostra que apesar dos resultados condizentes com a física do problema, ainda ocorrem pequenas oscilações no perfil do campo da pressão, não permitindo que o método satisfaça o DMP.

Assim como realizado no problema anterior, este caso foi testado para um valor relativamente grande do termo de estabilidade, considerando $\beta_p = 1000$, mantendo-se $\beta_u = 0$. Diferentemente do estudo anterior, o termo de estabilidade proposto para ser não nulo e igual a

1000, foi o termo β_p , já que aqui foram impostas condições de Dirichlet. A Tabela 10 apresenta os valores de pressões máximas e mínimas para esta nova situação, para as mesmas malhas apresentadas anteriormente. No entanto, foi observado que os resultados se mostraram ainda mais imprecisos em relação ao DMP.

Tabela 10 - Pressões mínimas e máximas obtidas para o problema 5.3, com $\beta_p = 1000$.

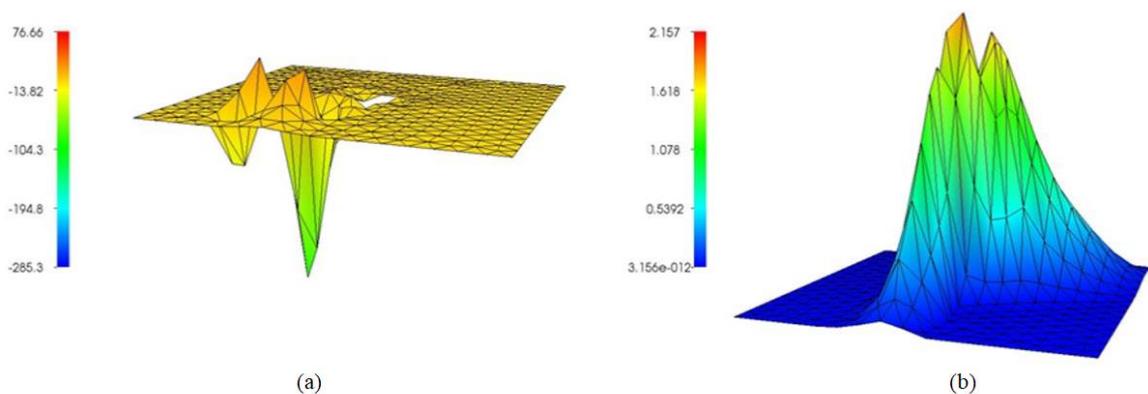
Malhas	Pressão mínima	Pressão máxima
24x24	-0.14069	1.17011
50x50	-0.15965	1.18908
90x90	-0.16708	1.19651

Fonte: O Autor.

5.4 MEIO FORTEMENTE HETEROGÊNIO E ANISOTRÓPICO

Este exemplo foi retirado de Queiroz *et al.* (2014) e Contreras (2017), também com o objetivo de se avaliar o princípio do máximo discreto (DMP). Queiroz *et al.* (2014) implementaram um Método de Volumes Finitos Não-Linear (NFLV) que, dependendo da estratégia de interpolação, apresentam resultados falhos na solução (conforme Figura 26.a) e resultados que não só representam bem o comportamento físico, como mantém a positividade (conforme Figura 26.b) do exemplo 5.4, aqui apresentado.

Figura 26 - Resultados do NFLV implementado em Queiroz *et al.* (2014).



Fonte: Queiroz *et al.* (2014).

O domínio consiste de um quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ com um furo quadrado no seu centro dado por $[4/9, 5/9] \times [4/9, 5/9]$. O tensor permeabilidade foi dado por:

$$K = \begin{cases} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}; & \text{se } x \leq 0.5 \\ \begin{bmatrix} y_1^2 + \alpha x_1^2 & -(1-\alpha)y_1x_1 \\ -(1-\alpha)y_1x_1 & x_1^2 + \alpha y_1^2 \end{bmatrix} & \text{com } \alpha = 10^3 \quad ; \text{ se } x > 0.5 \end{cases} \quad (39)$$

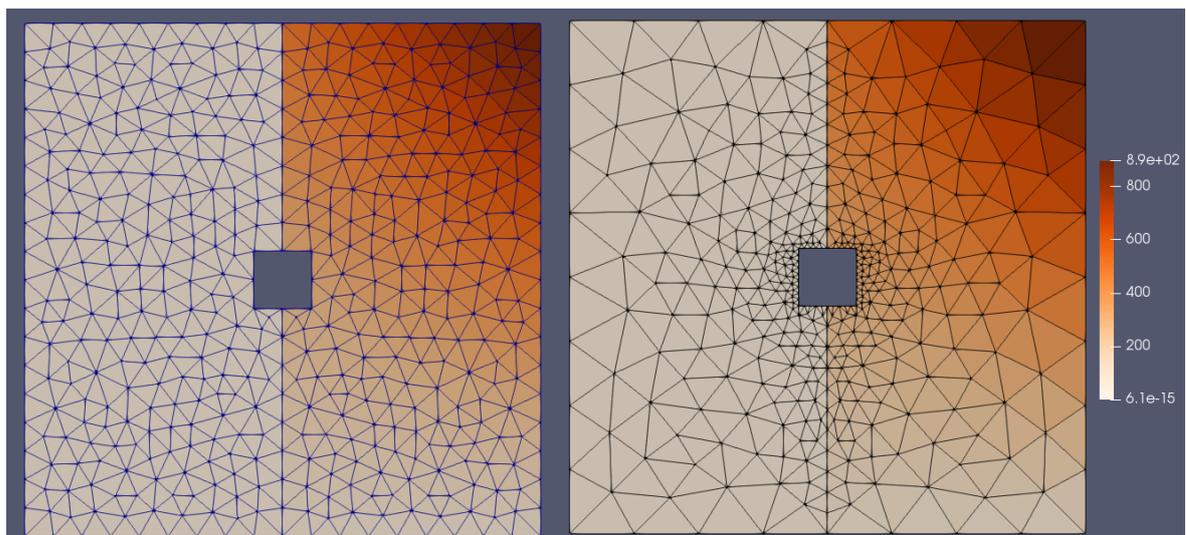
onde os valores dos parâmetros $\theta = \pi/2$, $x_1 = x + 10^{-3}$, $y_1 = y + 10^{-3}$ foram retirados de Queiroz *et al.* (2014).

As condições de contorno são do tipo Dirichlet, sendo a pressão no contorno externo do domínio dada por $p_{ext} = 0$ e a pressão no contorno do furo dada por $p_{furo} = 2$. Além disso, o termo fonte é nulo em todo o domínio.

A condição de DMP para esse caso, então, é de que não se pode haver resultados de pressão acima de p_{furo} em todo o domínio, da mesma forma que não são adequados resultados negativos (ou seja, valores menores que p_{ext}).

Para esse problema foram utilizadas 3 malhas não estruturadas triangulares com 894 e 3374 elementos, e outra (714 elementos) com um refinamento mais local na descontinuidade da permeabilidade e nas proximidades do furo. A Figura 27 apresenta as malhas com 894 e 714 elementos, e os seus valores para a componente K_{xy} do tensor permeabilidade. Foram utilizados elementos de 1ª ordem para a pressão e elementos de 2ª para a velocidade.

Figura 27 - Malhas com 894 (esquerda) e 714 elementos (direita).

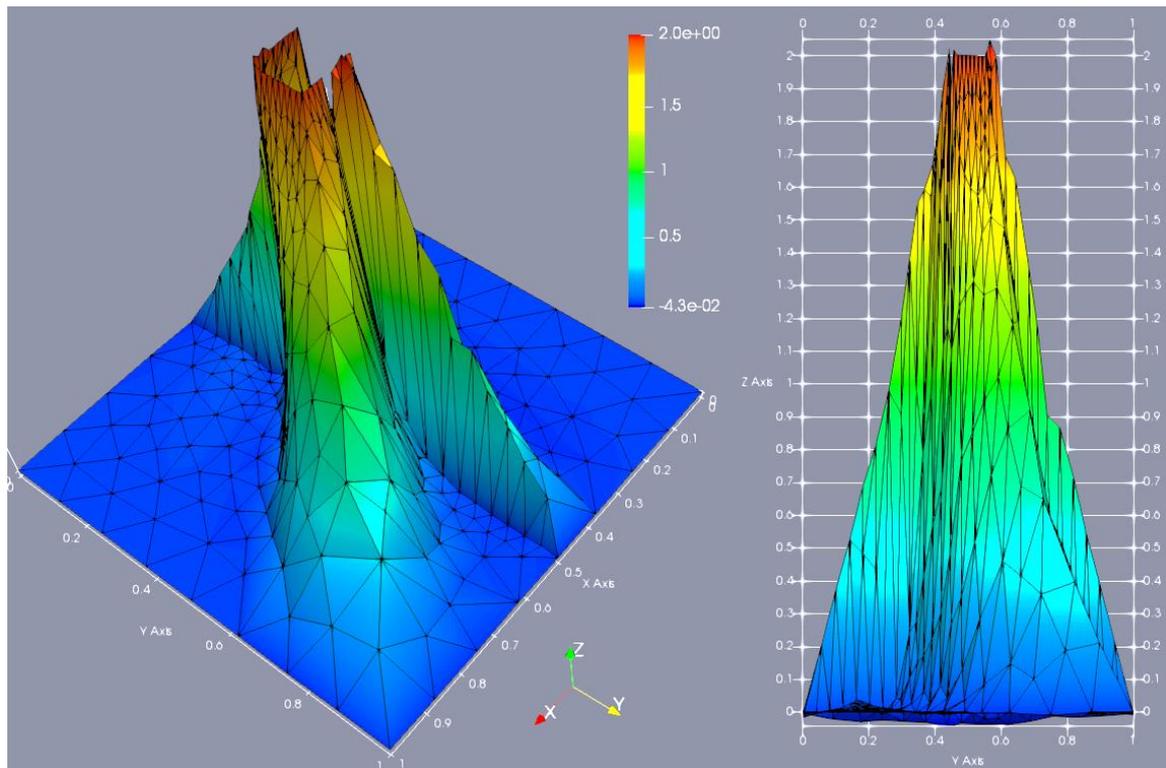


Fonte: O Autor.

Na Figura 28 pode-se observar que o método DG misto estabilizado representa bem a física do problema. Ou seja, a pressão aumenta do contorno externo do domínio para o furo, com preferência a algumas direções.

Entretanto, ainda é possível observar (Figura 28) que o método obteve pequenos valores acima de 2.0, e também pequenos valores negativos, em algumas regiões do domínio.

Figura 28 - Resultados obtidos para a pressão no problema 5.4.



Fonte: O Autor.

A Tabela 11 apresenta os valores de pressões máximas e mínimas para os resultados obtidos nas três malhas.

Tabela 11 - Pressões mínimas e máximas obtidas para o problema 5.4.

Malhas (nº elementos)	Pressão mínima	Pressão máxima
714	-0.04306	2.04831
894	-0.11855	2.03594
3374	-0.08284	2.05885

Fonte: O Autor.

Desta forma, pode-se concluir que realizando-se um refinamento condizente com o domínio, os resultados apresentam erros na ordem da segunda casa decimal para os critérios de DMP e positividade.

Além disso, a Tabela 12 apresenta estes mesmos indicadores de pressões máximas e mínimas, para um caso onde $\beta_p = 10000$, apresentando resultados melhores em relação ao critério de DMP.

Tabela 12 - Pressões mínimas e máximas obtidas para o problema 5.4, com $\beta_p = 10000$.

Malhas (nº elementos)	Pressão mínima	Pressão máxima
714	-0.04317	2.00018
894	-0.07444	2.00015
3374	-0.09300	2.00011

Fonte: O Autor.

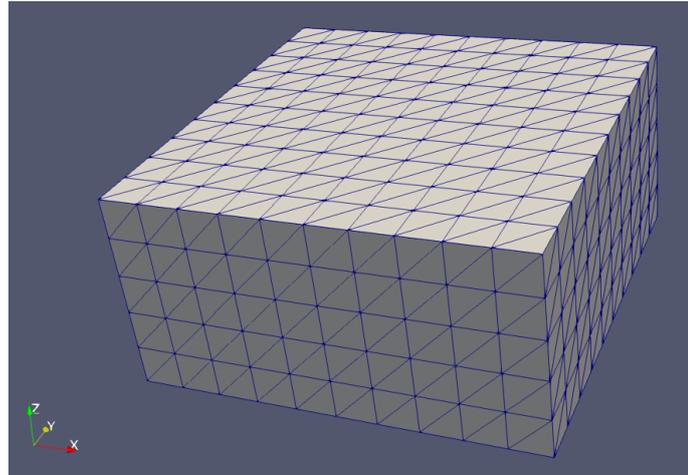
É importante ressaltar que Contreras (2017) ainda menciona que Le Potier (2005), Lipnikov *et al.* (2007) e Yuan e Sheng (2008) fundamentam que qualquer método linear é propenso a promover resultados com oscilações espúrias, não atendendo à preservação do DMP e da positividade. Desta forma, apesar do método de Galerkin descontínuo misto estabilizado não ter atendido a esses critérios, ele obteve valores de pressões muito próximos destes limites nos exemplos 5.3 e 5.4. Isto afirma que, em se tratando de um método linear, a formulação implementada neste trabalho obteve resultados bastante satisfatórios.

5.5 PROBLEMA EM UM DOMÍNIO TRIDIMENSIONAL

O último caso, consistiu apenas de uma extensão do problema 5.2 simulado em um domínio tridimensional, apenas com o objetivo de demonstrar a capacidade das ferramentas computacionais baseadas no *FEniCS*. Para isto, foram adotados $\beta_u = 10^{10}$, enquanto $\beta_p = 0$.

O caso simulado consistiu de um domínio com formato de paralelepípedo simples $[0, 2] \times [0, 2] \times [0, 1]$, representando um reservatório com propriedade homogênea, onde o tensor permeabilidade é dado pela matriz identidade tridimensional em todo domínio. A Figura 29 mostra a malha tetraédrica, contendo 3000 elementos e 726 nós, utilizada no exemplo.

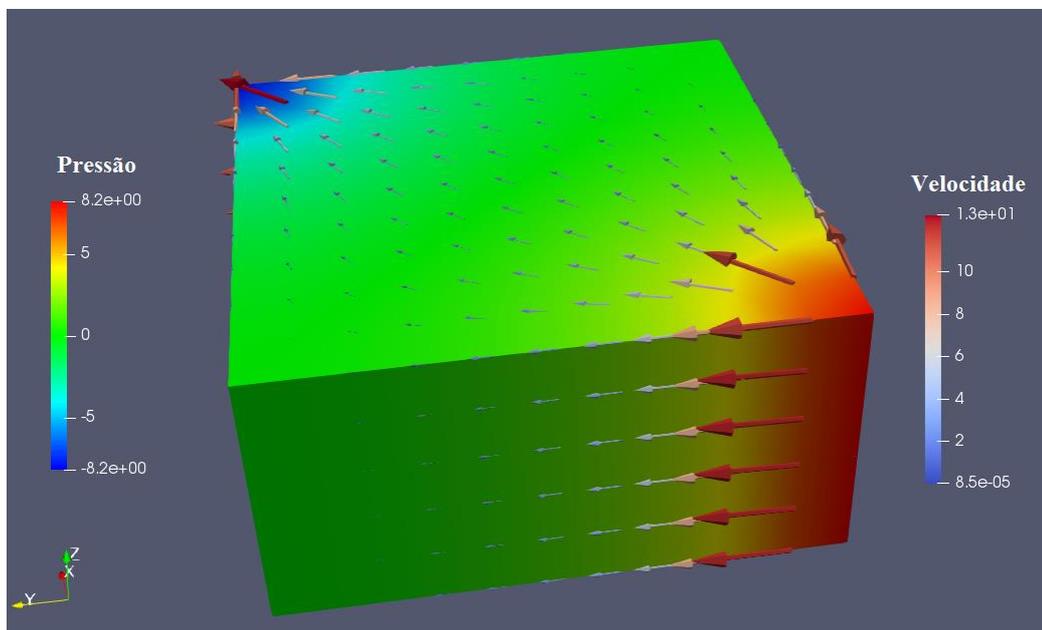
Figura 29 - Malha tetraédrica utilizada no problema tridimensional.



Fonte: O Autor.

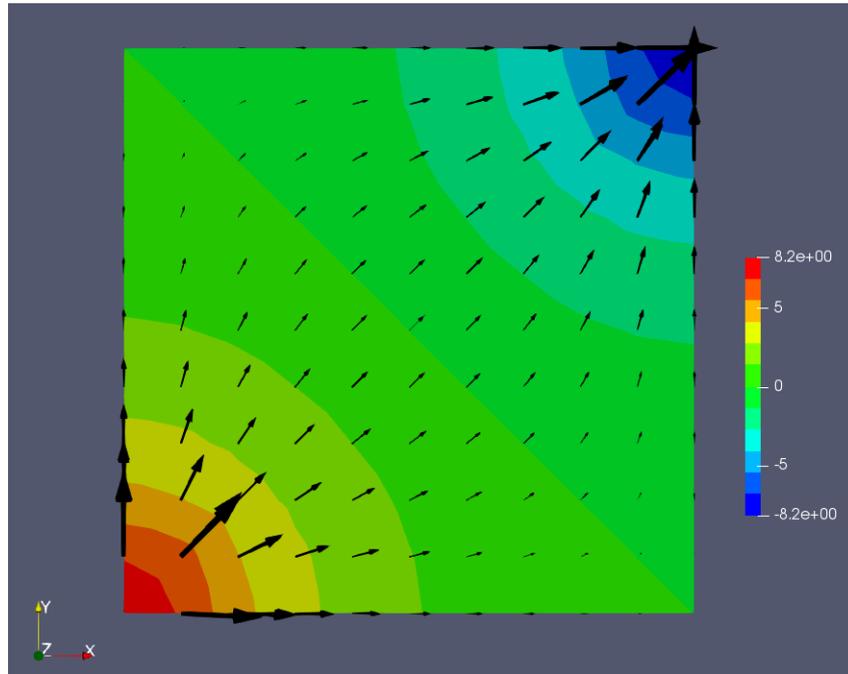
A Figura 30 apresenta os resultados encontrados para a pressão e a velocidade no domínio tridimensional. A Figura 31 apresenta estes resultados em uma seção horizontal ($z = 0,5$) do domínio.

Figura 30 - Resultados para a pressão e velocidade no problema tridimensional.



Fonte: O Autor.

Figura 31 - Resultados do problema tridimensional em uma seção horizontal ($z = 0,5$).



Fonte: O Autor.

6 CONCLUSÃO

No presente trabalho, foi implementado o Método de Elementos Finitos de Galerkin Descontínuo Misto Estabilizado para a equação de Darcy, aplicado a problemas de reservatórios de petróleo. Este método foi analisado através da sua aplicação em exemplos modelos.

Conforme analisado, o método obteve bons resultados numéricos, condizentes com as situações físicas dos problemas, e com resultados prévios encontrados na literatura. Além disso, no primeiro exemplo, foi observado que este método obteve taxas de convergência melhores que as encontradas pelo método de elementos finitos misto estabilizado implementado por Luna (2012). No segundo exemplo, concluiu-se que este método é convergente e robusto para modelos altamente heterogêneos, já que não apresentou oscilações não físicas nos seus resultados. Nos exemplos 5.3 e 5.4, foram simulados casos onde além da heterogeneidade da permeabilidade, os seus tensores eram caracterizados por forte anisotropia. Observou-se, para estes casos, que o método ainda apresentou pequenas oscilações em relação aos critérios de positividade e DMP.

Um fato interessante, foi levantado nos exemplos 5.2 a 5.4. A importância de se definir corretamente, e precisamente, os termos de estabilidade definidos sobre as interfaces dos elementos. Isto, devido à conclusão de que estes termos estão intrinsicamente relacionados com as condições de contorno impostas nos problemas. Desta forma, a sua escolha inadequada pode promover resultados imprecisos, tanto para a pressão, como para a velocidade. Foi notado, que estes termos, em geral, impõem mais fortemente as condições de contorno na formulação. Apesar disso, pode ser observado dos resultados que a definição destes termos não é fácil de ser realizada. O ideal é que para cada caso específico analisado os parâmetros sejam escolhidos com base na sua influência na precisão das aproximações da pressão ou da velocidade, através de estudos numéricos do problema.

O método ainda se mostrou extensível para casos tridimensionais. No entanto, ainda são necessárias análises mais rigorosas para a completa validação desta extensão, principalmente para casos com situações mais complexas e reais.

Desta forma, este trabalho desempenhou bem o seu objetivo, de implementar e analisar o desempenho do Método de Elementos de Finitos de Galerkin Descontínuo Misto Estabilizado para a equação de Darcy, concluindo que este método promove bons resultados para aplicações em reservatórios de petróleo, porém, com a ressalva de que este ainda deve ser melhor analisado e explorado, principalmente em relação aos seus termos de estabilidade.

REFERÊNCIAS

- ADJERID, S., DEVINE, K. D., FLAHERTY J. E., KRIVODONOVA, L. A posteriori error estimation for discontinuous Galerkin solutions of hyperbolic problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2002.
- ALNAES, M., BLECHTA, J., JOHANSSON, A., KEHLET, B., LOGG, A., RICHARDSON, C., RING, J., ROGNES, M. E., WELLS, G. N. The FEniCS Project version 1.5. **Archive of Numerical Software**, 2015.
- ALNAES, M. S., LOGG, A., ØLGAARD, K. B., ROGNES, M. E., WELLS, G. N. Unified form language: A domain-specific language for weak formulations of partial differential equations. **ACM Transactions on Mathematical Software**, 2014.
- AMESTOY, P. R., DUFF, I. S., KOSTER, J., L'EXCELLENT, J. Y. A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling. **SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications**, 2001.
- ARNOLD, D. N., BOFFI, D., FALK, R. S. Quadrilateral H(div) finite elements. **SIAM J. Numer. Anal.**, 2005.
- ARNOLD, D. N., BREZZI, F., COCKBURN, B., MARINI, L. D. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. **SIAM J. Numer. Anal.**, 2001/02.
- BADIA, S., CODINA, R. Stabilized continuous and discontinuous Galerkin techniques for darcy flow. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2010.
- BASSI, F., REBAY, S. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations. **Journal of Computational Physics**, 1997.
- BEAR, J. **Dynamics of Fluids in Porous Media**. New York: Dover, 1988.
- BEAR, J. **Modeling Phenomena of Flow and Transport in Porous Media**. Springer, 2018.
- BREZZI, F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrange multipliers. **Analyse numérique/Numerical Analysis (RAIRO)**, 1974.
- BREZZI, F., DOUGLAS J., MARINI L. D. Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems. **Numerische Mathematik**, 1985.
- BREZZI, F., FORTIN, M. **Mixed and Hybrid Finite Element Methods**. SpringerVerlag, 1991.
- BREZZI, F., FORTIN, M. A minimal stabilisation procedure for mixed finite element methods. **Numer. Math.**, 2001.

BREZZI, F., HUGHES, T. J. R., MARINI, L. D., MASUD, A. Mixed Discontinuous Galerkin Methods for Darcy Flow. **Journal of Scientific Computing**, Volumes 22 and 23, June 2005.

CARVALHO, D. K. E. **Uma Formulação do Método dos Volumes Finitos com Estrutura de dados por Aresta para a Simulação de Escoamento em Meios Porosos**. 2005. 185f. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Pernambuco.

CHEN, Z., HUAN, G., MA, Y. **Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media**. Dallas – Texas: SIAM, 2006.

CIARLET, P. G. **The Finite Element Method for Elliptic Problems**. NorthHolland, Amsterdam, 1979.

COCKBURN, B., GUZMÁN, J., WANG, H. Superconvergent discontinuous Galerkin methods for second-order elliptic problems. **Mathematics of Computation**, 2009.

CODINA, R., BADIA, S. On the design of discontinuous galerkin methods for elliptic problems based on hybrid formulations. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, 2013.

CONTRERAS, F. R. L. **Um Método de Volumes Finitos Centrado na Célula para a Simulação de Escoamentos Bifásicos em Reservatórios de Petróleo Heterogêneos e Anisotrópicos**. 2012. 108 f. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica. DEMEC, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Pernambuco.

CONTRERAS, F. R. L. **Métodos de Volumes Finitos Robustos para a Simulação de Escoamentos Bifásicos de Água e Óleo em Reservatórios de Petróleo**. 2017. 118 f. Tese de Doutorado em ciências de Engenharia Mecânica. DEMEC, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Pernambuco.

CORREA, M. R., LOULA, A. F. D. Unconditionally stable mixed finite element methods for Darcy flow. Laboratório Nacional de Computação Científica – LNCC, 2008.

CRUMPTON P. I., SHAW G.J. and WARE A.F. Discretisation and Multigrid Solution of Elliptic Equations with Mixed Derivative Terms and Strongly Discontinuous Coefficients. **Journal of Computational Physics**, 1995.

DURLOFSKY, L. J. Accuracy of Mixed and Control Volume Finite Element Approximations to Darcy Velocity and Related Quantities. **Water Resources Research**, 1994.

ELLINGSRUD, Ada Johanne. **Preconditioning unified mixed discretizations of coupled Darcy-Stokes flow**. 2015. Thesis (Master of Science). Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Oslo.

EWING, R. E. **The Mathematics of Reservoir Simulation**. Philadelphia: **Frontiers in Applied Mathematics**, SIAM, 1983.

GEUZAIN, C., REMACLE, J.-F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2009.

HENDERSON, A. **Paraview Guide, A Parallel Visualization Application**. Kitware Inc. Report, 2007.

HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. New York, Dover Publications, 2000.

HUGHES, T. J. R., MASUD, A., WAN, J. A stabilized mixed discontinuous Galerkin method for Darcy flow. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, 2006.

IGREJA, Iury Higor Aguiar da. **Métodos de Elementos Finitos Híbridos Estabilizados para Escoamentos de Stokes, Darcy e Stokes-Darcy Acoplados**. 2015. 177f. Tese de Doutorado. Laboratório Nacional de Computação Científica – LNCC.

IGREJA, I. H. A., LOULA, A. F. D., FARIA, C. O. A New Hybridized Mixed Finite Element Method for Heterogeneous Porous Media Flow. In: **XXXV Iberian Latin American Congresso n Computation Methods in Engineering**, Fortaleza, Ceará, Brazil, November 23-26, 2014.

JOSHAGHANI, M. S., JOODAT, S. H. S., NAKSHATRALA, K. B. A stabilized mixed discontinuous Galerkin formulation for double porosity/permeability model. **Computational and Applied Mechanics Laboratory**, 2018.

KLIEBER, W., RIVIÈRE, B. Adaptive simulations of two-phase flow by discontinuous galerkin methods. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, 2006.

LANGTANGEN, H. P., MARDAL, K.-A. **Introduction to Numerical Methods for Variational Problems**. 2016.

LE POTIER, C. A nonlinear finite volume scheme satisfying maximum and minimum principles for diffusion operators. **International Journal on Finite Volumes**, p. 1–20, 2009.

LI, B. Q. **Discontinuous Finite Elements in Fluid Dynamics and Heat Transfer**. London: Springer-Verlag, 2006.

LIE, K.-A. **An Introduction to Reservoir Simulation Using MATLAB**. Oslo – Norway: SINTEF ICT, Department of Applied Mathematics, 2015. Cap. 1, 3, 6.

LIPNIKOV, K.; SHASHKOV, M.; SVYATSKIY, D.; VASSILEVSKI, Y. Monotone finite volume schemes for diffusion equations on unstructured triangular and shape-regular polygonal meshes. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 227, n. 1, p. 492–512, 2007.

LOGG, A., MARDAL, K.-A., WELLS, G. **Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method: The FEniCS Book**. Berlin, Springer, 2011.

LOGG, A., WELLS, G. **Dolfin: Automated finite element computing**. **ACM Transactions on Mathematical Software**, 2010.

LOULA, A. F. D., ROCHINHA F. A., MURAD, M. A. Higher-order gradient postprocessings for second-order elliptic problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1995.

LUNA, Bruno Gustavo Borges. **Modelagem Automática de Escoamentos em Meios Porosos via Métodos dos Elementos Finitos**. 2012. 94f. Dissertação de Mestrado. DEMEC, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Pernambuco.

MALTA, S. M. C., LOULA, A. F. D., GARCIA E. L. M. Numerical analysis of a stabilized finite element method for tracer injection simulations. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, 2000.

MASSING, A. **Discontinuous Galerkin methods for elliptic equations**. In: FEniCS Course, Lecture 10. 2018.

MASUD, A., HUGHES, T. J. R. A stabilized finite element method for Darcy flow. **Computer. Methods Appl. Mech. Eng.**, 2002

NAVEIRA, Lilia Palma. **Simulação de Reservatórios de Petróleo Utilizando o Método de Elementos Finitos para Recuperação de Campos Maduros e Marginais**. 2007. 97f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Engenharia Civil). COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Rio de Janeiro.

NAKSHATRALA, K. B., TURNER, D. Z. HJELMSTAD, K. D., MASUD, A. A stabilized mixed finite element method for Darcy flow based on a multiscale decomposition of the solution. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2006.

NUÑEZ, Yoissell Rodríguez. **Métodos de Elementos Finitos Híbridos Aplicados a Escoamentos Miscíveis em Meios Porosos Heterogêneos**. 2014. 137f. Tese de Doutorado. Laboratório Nacional de Computação Científica – LNCC.

NUÑEZ, Y. R., FARIA, C. O., LOULA, A. F. D., MALTA, S. M. C. Um método híbrido de elementos finitos aplicado a deslocamentos miscíveis em meios porosos heterogêneos. **Rev. Int. Métodos Numér. Cál. Diseño Ing.**, 2017.

ØLGAARD, K. B., LOGG, A., WELLS, G. N. Automated Code Generation for Discontinuous Galerkin Methods, 2007.

PEACEMAN, D. W. **Fundamental of Numerical Reservoir Simulation**. Amsterdam, Elsevier, 1977.

QUEIROZ, L. E. S. **Um Método de Volumes Finitos Não-Linear Acoplado com uma Formulação de Alta Ordem para a Simulação do Escoamento Bifásico de Água e Óleo em Reservatórios de Petróleo Heterogêneos e Anisotrópicos**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). DEMEC, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Pernambuco.

QUEIROZ, L., SOUZA, M., CONTRERAS, F., LYRA, P., CARVALHO, D. On the accuracy of a nonlinear finite volume method for the solution of diffusion problems using diferente interpolations strategies. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Wiley Online Library, p. 270–291, 2014.

RAVIART, P. A., THOMAS, J. M. A mixed finite element method for second order elliptic problems. In: I. Galligani e E. Magenes (editores), **Lecture Notes in Math**, volume 606. New York, Springer-Verlag, 1977.

RIVIÈRE, Beatrice. **Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations: theory and implementation**. SIAM, 2008.

ROSA, A. J., CARVALHO, R. S., XAVIER, J. A. D. **Engenharia de Reservatórios de Petróleo**. Rio de Janeiro: Interciência: PETROBRÁS, 2006. Cap. 1-3 e 5.

SILVA, Natalia Cristina Braga Arruda Alves da. **Métodos Não-lineares Descontínuos Submalha para a Equação de Convecção-Difusão-Reação**. 2010. 175f. Tese de Doutorado. Laboratório Nacional de Computação Científica – LNCC.

SUN, Shuyu. **Discontinuous Galerkin Methods for Reactive Transport in Porous Media**. 2003. Tese de Doutorado. University of Texas at Austin.

THOMAS, José Eduardo. **Fundamentos de Engenharia de Petróleo**. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

YUAN, G.; SHENG, Z. Monotone finite volume schemes for diffusion equations on polygonal meshes. **Journal of computational physics**, Elsevier, v. 227, n. 12, p. 6288–6312, 2008.