



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ALEXANDER PATRICIO ALBERCA DONAYRE

**Existência de Soluções Fracas do Problema Estacionário e não Estacionário das
Equações do Fluxo Bioconvectivo**

Recife

2022

ALEXANDER PATRICIO ALBERCA DONAYRE

**Existência de Soluções Fracas do Problema Estacionário e não Estacionário das
Equações do Fluxo Bioconvectivo**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Orientador: Miguel Fidencio Loayza Lozano.

Recife

2022

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

D677e Donayre, Alexander Patricio Alberca
Existência de soluções fracas do problema estacionário e não estacionário das equações do fluxo bioconvectivo / Alexander Patricio Alberca Donayre. – 2022.
62 f.

Orientador: Miguel Fidencio Loayza Lozano.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2022.

Inclui referências.

1. Análise. 2. Equações de fluxo bioconvectivo. I. Lozano, Miguel Fidencio Loayza (orientador). II. Título.

515 CDD (23. ed.) UFPE - CCEN 2022-153

ALEXANDER PATRICIO ALBERCA DONAYRE

***EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES FRACAS DO PROBLEMA ESTACIONÁRIO E NÃO ESTACIONÁRIO
DAS EQUAÇÕES DO FLUXO BIOCONVECTIVO***

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovada em: 29/07/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Cilon Valdez Ferreira Perusato (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Ricardo Donato Castillo Maldonado (Examinador Externo)
Universidad del Bío Bío-Chile

Dedico este trabalho ao meu tio Miguel Ángel Donayre Benites, pelo exemplo de força e determinação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família pelo apoio incondicional, em especial a minha mãe Teresa Ivonne por ser meu grande suporte nesta carreira. Ao meu falecido irmão Jesus Hernan que me ensinou a não desistir nesta vida.

Ao meu pai, Juan Pelayo, e a minha irmã, Miriam Alberca, agradeço-lhes pelo apoio e os conselhos dados. Para meus queridos primos, primas e tias, pelos momentos de alegria e tristeza, a minha avó Maria Cristina, que apesar da idade e da doença continua sendo a mulher forte e feliz, ao pai Emilio, pelo carinho, amor que da a seu sobrinho, e finalmente, à minha segunda família, mãe Esther Yanina, pai Miguel Angel e minhas irmãs Claudia Valeria e Nicolle Alexandra, este agradecimento é para todos vocês.

Um agradecimento especial ao professor e orientador Miguel Loayza por todo o tempo investido, pelas disciplinas ministradas e por tornar a minha chegada aqui muito mais fácil. Deixo aqui um registro de toda minha gratidão e admiração.

Minha mais sincera gratidão àquela família peruana que cresceu em Recife, Alberto, Oscar, Angel, Brandon e Milagros, sem a qual esta conquista acadêmica não seria possível. Obrigado por todas as risadas e momentos especiais que compartilhamos juntos.

Minha gratidão também aos novos amigos que fiz no Departamento de Matemática, especialmente àqueles da sala de mestrado. Obrigado pela ajuda no idioma e àquelas conversas que deram muitas risadas.

Agradeço à Universidade Federal de Pernambuco e à cidade do Recife por essas anedotas que jamais esquecerei.

Finalmente, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Nesta dissertação descreve-se primeiramente o modelo dinâmico do fluido relacionado às equações do Fluxo Bioconvectivo e que está fundamentado nas equações de Navier-Stokes; como o fluido é viscoso e incompressível o novo sistema de equações é complementado por certas condições iniciais e de contorno. Finalmente se apresentam resultados sobre a existência de soluções do problema estacionário e não estacionário. A existência da solução do problema estacionário, deve-se à escolha arbitrária da concentração total de microrganismo estritamente maior que zero. Como resultado da existência da solução do problema estacionário, estuda-se a positividade pontual da concentração. Formula-se também o problema do decaimento para as equações que regem as perturbações da solução estacionária cuja concentração total é igual a dos dados iniciais e mostra-se que se a solução estacionária for suficientemente pequena, então existe uma solução global fraca. Dita solução é obtida pelo método de Galerkin. Lembre que para a existência e toma de dita base ortonormal completa no método de Galerkin, é necessário que o operador simétrico seja auto-adjunto.

Palavras-chaves: equações de fluxo bioconvectivo; equações de Navier-Stokes; soluções fracas; método de Galerkin.

ABSTRACT

This dissertation first describes the fluid dynamic model related to the Bioconvective Flow equations and which is based on the Navier-Stokes equations; as the fluid is viscous and incompressible, the new system of equations is complemented by certain initial and boundary conditions. Finally, results are presented on the existence of solutions for the stationary and non-stationary problem. The existence of the solution to the stationary problem is due to the arbitrary choice of the total concentration of microorganism strictly greater than zero.. As a result of the existence of a solution to the stationary problem, the point positivity of the concentration is studied. The decay problem is also formulated for the equations that govern the perturbations of the stationary solution whose total concentration is equal to the initial data and it is shown that if the stationary solution is small enough, then a weak global solution exists. This solution is obtained by Galerkin's method. Remember that for the existence and taking of this complete orthonormal basis in Galerkin's method, it is necessary that the symmetric operator be self-adjoint.

Keywords: bioconvective flow equations; Navier-Stokes equations; weak solutions; Galerkin's method.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	CONCEITO PRELIMINARES	11
2.1	ESPAÇOS FUNCIONAIS	11
2.2	RESUMO DOS ESPAÇOS DE SOBOLEV	14
2.3	EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES	21
2.4	REGULARIDADE DE SOLUÇÕES DO PROBLEMA DE STOKES	27
2.5	CONSERVAÇÃO DA MASSA	29
3	O PROBLEMA ESTACIONÁRIO E A POSITIVIDADE DE CON- CENTRAÇÃO	32
3.1	MODELO DINÂMICO DO FLUIDO	32
3.2	PROBLEMA ESTACIONÁRIO	34
3.3	POSITIVIDADE DE CONCENTRAÇÃO	48
4	O PROBLEMA NÃO ESTACIONÁRIO E O OPERADOR AUTO- ADJUNTO $P_1(-\theta\Delta)$	51
4.1	REDUÇÃO A UM PROBLEMA DE DECAIMENTO	51
4.2	O AUTO-ADJUNTO DO OPERADOR $P_1(-\theta\Delta)$	59
	REFERÊNCIAS	62

1 INTRODUÇÃO

A dinâmica dos fluidos é um dos ramos mais complexos da dinâmica estudando o movimento e suas propriedades. Em (LEVANDOWSKY et al., 1975) e (MORIBE, 1973), M. Levandowsky e Y. Moribe (1973-1975) apresentaram um modelo, o qual descreve o movimento do fluido da reprodução dos microrganismos *Tetrahymena pyriformis* e *Cryptocodinium cohnii*. Este modelo está relacionado com as equações do fluxo bioconvectivo e em ambos trabalhos mencionados foram discutidas ideias biológicas e físicas, mas a análise matemática formal só foi realizada em (KAN-ON; NARUKAWA; TERAMOTO, 1992). A bioconvecção é uma convecção causada pela concentração e movimento de certos microrganismos numa cultura.

Nesta dissertação, apresentamos um modelo matemático baseado nas equações de Navier-Stokes que descrevem o movimento do fluido (i.e. viscoso e incompressível) acoplado com a concentração dos microrganismos:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = g(1 + \gamma c) \chi + f & x \in \Omega, t > 0, \\ \operatorname{div} u = 0 & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial c}{\partial t} - \theta \Delta c + (u \cdot \nabla) c + U \frac{\partial c}{\partial x_3} = 0 & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado com fronteira regular, $c(x, t)$ representa a concentração no ponto $x \in \Omega$, $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$ e $p = p(x, t)$ denotam a velocidade e a pressão do fluido da reprodução do microrganismo, $f = (f_1, f_2, f_3)$ a força externa, g a gravidade, ν a viscosidade, θ a taxa de difusão do microrganismo. A constante positiva U denota a velocidade media de nado dos microrganismos e γ a densidade do organismo no fluido. A condição $\operatorname{div} u = 0$ garante que modelo seja homogêneo e incompressível (SOHR, 2001).

O objetivo deste dissertação é estudar a existência de soluções fracas do problema não estacionário (1.1) e da sua versão estacionária. A solução do problema estacionário é obtida via o princípio de Leray-Schauder e no problema não estacionário usamos o Método de Galerkin.

Esta dissertação está estruturada da seguinte maneira: no Capítulo 2, descrevemos as notações que serão usadas, alguns resultados clássicos da teoria dos espaços funcionais, dos espaços de Sobolev, alguns resultados sobre a conservação de massa e um resumo das equações de Navier-Stokes.

No Capítulo 3 descrevemos primeiro o modelo dinâmico do fluido e depois mostramos que

para um $\alpha > 0$ arbitrário, existe uma solução fraca do problema estacionário com concentração total igual a α . Em seguida, analisamos a positividade pontual da concentração da solução.

O Capítulo 4 é dedicado ao estudo do problema não estacionário. Para isso, formulamos o problema do decaimento para as equações que governam a perturbação da solução estacionária cuja concentração total é igual à dos dados iniciais, e definimos uma solução global fraca para este problema usando o Método de Galerkin. Então concluímos que se a solução estacionária for pequena o suficiente, existe uma solução global fraca para o problema perturbado. Para usar o método de Galerkin mostramos que o operador $P(-\theta\Delta)$ é auto-adjunto, o que nos permite construir uma base apropriada.

2 CONCEITO PRELIMINARES

Neste capítulo introduzimos alguns resultados úteis para uma melhor compreensão do trabalho.

2.1 ESPAÇOS FUNCIONAIS

Definição 2.1.1. Se Ω é um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$, define-se o espaço

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega) \right\},$$

com

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Definição 2.1.2. Se Ω é um subconjunto de $\mathbb{R}^N$, define-se o espaço

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mensurável e } \exists C \in \mathbb{R} / |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega \right\},$$

com

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf \{C; |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

Lembre que $\|f\|_\infty$ é uma norma.

O seguinte resultado permite relacionar alguns espaços L^p .

Teorema 2.1.1 (Desigualdade de Hölder). Se $1 < p < \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$, onde $1/p + 1/p' = 1$, então $u \cdot v \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}. \quad (2.1)$$

Demonstração. A função

$$f(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{1}{p'} - t$$

possui para $t \geq 0$, o mínimo valor zero, e este mínimo é atingido apenas em $t = 1$. Definindo $t = ab^{-\frac{p'}{p}}$, concluímos, para números não negativos a e b , que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \quad (2.2)$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $a^p = b^{p'}$. Se $\|u\|_p = 0$ ou $\|v\|_{p'} = 0$, então $u(x)v(x) = 0$ em Ω , logo a desigualdade (2.1) é satisfeita. Caso contrário, a desigualdade é

obtida pondo $a = \frac{|u(x)|}{\|u\|_p}$ e $b = \frac{|v(x)|}{\|v\|_{p'}}$ na desigualdade (2.2) e integrando sobre Ω . Por último, note que a igualdade em (2.1) ocorre se, e somente se, $|u(x)|^p$ e $|v(x)|^{p'}$ são proporcionais em Ω . ■

Observação 2.1.1. Consequência do Teorema 2.1.1. Sejam $f_1, f_2, \dots, f_k$ funções tais que

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega), \quad 1 \leq i \leq k, \quad \text{com} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Então o produto $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_k \in L^p(\Omega)$ e

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \cdot \dots \cdot \|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

O conceito de produto escalar é definido a seguir.

Definição 2.1.3. Seja H um espaço vetorial. Um produto escalar (u, v) é uma forma bilinear de $H \times H$ com valores em $\mathbb{R}$, (uma aplicação de $H \times H$ em $\mathbb{R}$ a qual é linear em cada uma das variáveis) de modo que:

- i) $(u, v) = (v, u)$ para todo $u, v \in H$,
- ii) $(u, u) \geq 0$ para todo $u \in H$,
- iii) $(u, u) \neq 0$ para todo $u \neq 0$.

Definição 2.1.4. Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial H , munido de um produto escalar $(\cdot, \cdot)$ tal que H é completo para a norma $|u| = \sqrt{(u, u)}$. Ser completo significa que toda sequência de Cauchy é convergente em H .

Observação 2.1.2. Todo produto escalar satisfaz a desigualdade de Cauchy–Schwarz:

$$|(u, v)| \leq |u|^{1/2} |v|^{1/2},$$

para todo $u, v \in H$.

Teorema 2.1.2 (Representação de Riesz–Fréchet). Seja H um espaço de Hilbert. Um funcional linear φ pertence a H^* se, e somente se, existe um único $f \in H$, tal que

$$\langle \varphi, x \rangle = (f, x), \quad \text{para todo } x \in H.$$

Além disso, verifica-se

$$|f| = \|\varphi\|_{H^*}.$$

Demonstração. Seja $M = \varphi^{-1}(0)$. Então M é um subespaço fechado de H . Se $M = H$, isto é, $\varphi \equiv 0$, o resultado é válido tomando $f = 0$. Suponhamos que $M \neq H$. Mostraremos que existe um elemento $g \in H$ tal que:

$$g \notin M, \quad |g| = 1 \quad \text{e} \quad (g, z) = 0, \quad \text{para todo } z \in M.$$

Com efeito, sejam $g_0 \in H$ com $g_0 \notin M$, $g_1 = P_{Mg_0}$, e $g = \frac{g_0 - g_1}{|g_0 - g_1|}$. Como $x \in H$ admite uma decomposição da forma $x = \lambda g + z$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ e $z \in M$, temos que:

$$\lambda = \frac{\langle \varphi, x \rangle}{\langle \varphi, g \rangle} \quad \text{e} \quad z = x - \lambda g.$$

Então, $0 = (g, z) = (g, x - \lambda g)$ isto é, $(g, x) = \lambda = \frac{\langle \varphi, x \rangle}{\langle \varphi, g \rangle}$. Portanto,

$$\langle \varphi, x \rangle = \langle f, x \rangle, \quad \text{para todo } x \in H,$$

onde f é definido por $f = \langle \varphi, g \rangle g$. ■

Teorema 2.1.3 (Princípio de Leray-Schauder). Sejam H um espaço de Hilbert separável e A é um operador completamente contínuo em H , o qual é em geral, não linear.¹ Se todas as soluções possíveis das equações

$$x = \lambda Ax,$$

para $\lambda \in [0, 1]$ estiverem dentro de alguma bola $|x| \leq \rho$. Então a equação $x = Ax$, tem pelo menos uma solução dentro dessa bola.

Demonstração. Veja J. Leray and J. Schauder. (LERAY; SCHAUDER, 1934) p. 45 – 78. ■

Observação 2.1.3. O Princípio de Leray-Schauder é particularmente notável na medida que pode ser usado para tratar problemas onde não existe unicidade.

Definição 2.1.5. Uma norma num espaço vetorial E (real ou complexo) é uma aplicação $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

- i) $\|x\| \geq 0$, para todo $x \in X$, e $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$.
- ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, para todo $x \in X$ e qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$.
- iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todos $x, y \in X$ (desigualdade triangular).

¹ A é dito completamente contínuo (ou compacto) em H , se ele aplica conjuntos limitados de H , em conjuntos precompactos de H (o fecho é um conjunto compacto).

O par $(X, \|\cdot\|)$ é chamado de espaço normado.

Definição 2.1.6. Se E é um espaço normado. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ converge fracamente a $x \in E$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T(x)$ para todo $T \in E^*$, onde E^* é o dual de E .

Definição 2.1.7. E, F são dois espaços normados, diz-se que um operador linear $T : E \rightarrow F$ é compacto se (Tx_n) possui subsequência convergente em F para toda sequência limitada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$.

Proposição 2.1.1. Sejam E um espaço de Banach reflexivo, F um espaço normado e T um operador em $\mathcal{L}(E, F)$ onde $\mathcal{L}(E, F)$ é o espaço de todos os operadores lineares. Então T é compacto se, e somente se, toda sequência (x_n) fracamente convergente em E admite uma subsequência (x_{n_k}) tal que (Tx_{n_k}) é convergente em F .

Note que esta caracterização vale também quando E é um espaço de Hilbert.

Definição 2.1.8. A topologia fraca $\sigma(E, E^*)$ em E é a topologia mais grosseira associada à coleção $(\varphi_f)_{f \in E^*}$ de funcionais lineares.

Proposição 2.1.2. Seja (x_n) uma sequência em E . Então

Se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(E, E^*)$, então $(\|x_n\|)$ é limitado e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$

Demonstração. Para a demonstração veja Haim Brezis (BREZIS; BRÉZIS, 2011) p. 58. ■

Teorema 2.1.4. Seja E um espaço de Banach reflexivo e seja (x_n) uma sequência limitada em E . Então existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge na topologia fraca $\sigma(E, E^*)$.

Demonstração. Para a demonstração veja Haim Brezis (BREZIS; BRÉZIS, 2011) p. 69. ■

2.2 RESUMO DOS ESPAÇOS DE SOBOLEV

Definição 2.2.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $1 \leq p \leq \infty$. Dizemos que $u \in W^{1,p}(\Omega)$, se $u \in L^p(\Omega)$ e existem funções $g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi \quad \text{para todo } \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad i = 1, \dots, N,$$

onde $C_c^\infty(\Omega)$ (ou $C_0^\infty(\Omega)$) denota o conjunto das funções de classe C^∞ com suporte compacto².

² Uma função tem suporte compacto se a aderência do conjunto onde não é zero forma um conjunto fechado e limitado.

Quando $p = 2$, denotamos o espaço Sobolev $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é munido com a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p},$$

ou com a norma equivalente

$$\left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \quad \text{se } 1 \leq p < \infty.$$

O espaço $H^1(\Omega)$ é munido com o produto escalar

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2} = \int_{\Omega} uv + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i},$$

e a norma associada

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

a qual é equivalente à norma $W^{1,2}(\Omega)$.

Observação 2.2.1. O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$, reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$. Em particular $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável, veja (BREZIS; BRÉZIS, 2011).

Para $m \in \mathbb{N}, m > 1$ o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é definido da seguinte maneira.

Definição 2.2.2. Sejam $m \geq 2$ um inteiro e $1 \leq p \leq \infty$. Define-se por indução

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega), \text{ para todo } i = 1, \dots, N \right\}.$$

Alternativamente, podemos dizer que $u \in W^{m,p}(\Omega)$ se, $u \in L^p(\Omega)$ e existem funções g_{α} de $L^p(\Omega)$, $0 \leq |\alpha| \leq m$ tal que

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g_{\alpha} \varphi dx, \text{ para todo } \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega).$$

Lembre que usamos a notação multi-índice estandar, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ com $\alpha_i \geq 0$ um número inteiro,

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i \quad \text{e} \quad D^{\alpha} \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

Observação 2.2.2. As funções g_{α} (ou melhor, as classes de funções equivalentes determinadas por elas) são chamadas derivadas de distribuição ou derivadas fracas de u e escrevemos $D^{\alpha}u = g_{\alpha}$.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$, munido com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)},$$

é um espaço de Banach. Quando $p = 2$, o espaço $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, munido com o produto escalar

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2},$$

é um espaço de Hilbert.

De maneira similar, podemos considerar o espaço $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$ das classes de funções vetoriais com norma definida por

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} |D^\alpha u_i|^2 \right]^{p/2} dx \right\}^{1/2} \quad \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N).$$

Os espaços $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$ são também um espaço de Banach, e para $p = 2$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H^m} = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} D^\alpha u_i \overline{D^\alpha v_i} dx.$$

Teorema 2.2.1 (Friedrichs). Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$. Então existe uma sequência (u_n) de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

- i) $u_n|_{\Omega} \rightarrow u$ em $L^p(\Omega)$.
- ii) $\nabla u_n|_{\omega} \rightarrow \nabla u|_{\omega}$ em $L^p(\omega)^N$ para todo $\omega \subset\subset \Omega$.

No caso em que $\Omega = \mathbb{R}^N$ e $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p < \infty$, existe uma sequência (u_n) de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

- a) $u_n \rightarrow u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$.
- b) $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)^N$.

Para a demonstração veja Haim Brezis (BREZIS; BRÉZIS, 2011) p. 265.

Teorema 2.2.2. Suponha que Ω seja Lipschitziana. Então existem constantes $C_1(N, p, \Omega)$ e $C_2(N, p, \Omega, c)$ tal que

$$\int_{\Omega} |u|^p dx \leq C_1 \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \quad \text{se} \quad \bar{u} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} u dx = 0, \quad (2.3)$$

$$\int_{\Omega} |u|^p dx \leq C_2 \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \quad \text{se} \quad |S| \geq c |\Omega| \quad (c > 0), \quad (2.4)$$

para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Aqui S é o conjunto onde $u(x) = 0$. No caso de $\Omega = B(x_0, R)$, a bola aberta de centro x_0 e raio $R > 0$, podemos escrever

$$C_1(\nu, p, \Omega) = C_1(\nu, p)R^p; \quad C_2(\nu, p, \Omega, c) = C_2(\nu, p, c)R^p.$$

Demonstração. Provaremos a desigualdade (2.4). A validade é dada pela homogeneidade, isto é, se não fosse verdadeiro, existirá uma sequência (u_n) tal que $\|u_n\|_{W^{1,p}} = 1$, $u_n \rightarrow u_0$ em $L^p(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} |u_n|^p dx > n \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx \quad \text{se} \quad |S_n| \geq c |\Omega| > 0,$$

para cada n . Portanto, $\nabla u_n \rightarrow 0$ em $L^p(\Omega)$, e $u_n \rightarrow u_0$ em $W^{1,p}(\Omega)$ com $u_0 = \text{const.}$ Logo, pelo Teorema 2.2.1 $\bar{u}_0 \neq 0$ já que $\nabla u_0 = 0$ e $\|u_0\|_{W^{1,p}} = 1$. Além disso, como $u_n = 0$ em S_n concluímos a partir da convergência que

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n - u_0|^p dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{S_n} |u_n - u_0|^p dx = \lim_{n \rightarrow \infty} |\bar{u}_0|^p \cdot |S_n|$$

o que contradiz o fato de que $|S_n| \geq c |\Omega| > 0$ para todo n . ■

Definição 2.2.3. Seja $1 \leq p < \infty$, O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ denota o fecho de $C_c^1(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Quando $p = 2$ denotamos

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

Observação 2.2.3. O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$, munido com a norma de $W^{1,p}(\Omega)$, é um espaço de Banach e reflexivo se $1 < p < \infty$. Da mesma maneira, o espaço $H_0^1(\Omega)$, munido com o produto escalar de $H^1(\Omega)$, é um espaço de Hilbert.

Teorema 2.2.3 (Desigualdade de Poincaré). Suponha que $1 \leq p < \infty$ e Ω um conjunto aberto limitado. Então existe uma constante C , dependendo de Ω e de p , tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Observação 2.2.4. A desigualdade de Poincaré é também válida se Ω é de medida finita ou se Ω é limitado em uma direção.

Observação 2.2.5. Da desigualdade de Poincaré vemos que a expressão $\|\nabla u\|_{L^p}$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente à norma usual $\|u\|_{W^{1,p}}$. Em particular, no espaço $H_0^1(\Omega)$ a expressão $\int_{\Omega} \nabla u \nabla v$ é um produto escalar que induz a norma $\|\nabla u\|_{L^2}$ equivalente à norma $\|u\|_{H^1}$.

Teorema 2.2.4 (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg). Seja $1 \leq p < N$. Então

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subseteq L^{p^*}(\mathbb{R}^N), \text{ onde } p^* \text{ é dado por } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

e existe uma constante $C = C(p, N)$ tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq \|\nabla u\|_{L^p} \quad \text{para todo } u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Para a demonstração, veja Haim Brezis (BREZIS; BRÉZIS, 2011) p. 279.

Corolário 2.2.1. Seja $1 \leq p < N$. Então

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subseteq L^q(\mathbb{R}^N) \quad \text{para todo } q \in [p, p^*].$$

Demonstração. Dado $q \in [p, p^*]$ escrevemos

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*} \quad \text{para algum } \alpha \in [0, 1].$$

Logo, pela Observação 2.1.1 e a desigualdade de Young, temos que

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p^\alpha \|u\|_{p^*}^{1-\alpha} \leq \|u\|_p + \|u\|_{p^*}.$$

Usando o Teorema 2.2.4, concluímos que

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subseteq L^q(\mathbb{R}^N).$$

■

Corolário 2.2.2. No caso limite $p = N$, temos que

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subseteq L^q(\mathbb{R}^N) \quad \text{para todo } q \in [N, +\infty).$$

Teorema 2.2.5 (Morrey). Seja $p > N$. Então

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Este Teorema está provado em Haim Brezis (BREZIS; BRÉZIS, 2011) p. 282.

Teorema 2.2.6 (Teoremas de imersão de Sobolev). Sejam $m \geq 1$ um inteiro e $p \in [1, +\infty]$. Temos que

$$\text{a) Se } \frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0 \text{ então } W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subseteq L^q(\mathbb{R}^N) \text{ onde } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N},$$

b) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$ então $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subseteq L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in [p, +\infty)$,

c) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$ então $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Em todos os casos as injeções são contínuas.

Demonstração. Todos os itens são obtidos por aplicações repetidas do Teorema 2.2.4, Corolário 2.2.2 e Teorema 2.2.5. ■

Observação 2.2.6. Do Teorema 2.2.6, se $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ e $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$, então u pertence a $L^q(\mathcal{O})$ para qualquer conjunto limitado $\mathcal{O}$ e qualquer q , $1 \leq q < \infty$.

Teorema 2.2.7. Para $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, $m \geq 1$, $1 \leq p < \infty$.

a) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = \frac{1}{q} > 0$, $|u|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq c(m, p, N) \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}$,

b) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$, $|u|_{L^q(\mathcal{O})} \leq c(m, p, N, q, \mathcal{O}) \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}$ para todo $\mathcal{O}$, $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^N$, $1 \leq q < \infty$,

c) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$, $|u|_{C^0(\mathcal{O})} \leq c(m, N, p, \mathcal{O}) \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}$, para todo $\mathcal{O}$, $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^N$.

Para a demonstração, veja Roger Teman (TEMAM, 2001) p. 159.

Observação 2.2.7. Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Os resultados do Teorema 2.2.7 podem ser obtidos se Ω for suficientemente regular de modo que existe um operador de prolongamento linear contínuo

$$P \in \mathcal{L}(W^{m,p}(\Omega), W^{m,p}(\mathbb{R}^N)). \quad (2.5)$$

Observação 2.2.8. A existência do operador do prolongamento (2.5) é satisfeita para um conjunto Ω localmente Lipschitziana. Neste caso, as propriedades do Teorema 2.2.7 aplicadas ao operador de prolongamento P em $W^{m,p}(\Omega)$, $m \geq 1$, $1 < p < \infty$ são as seguintes:

a) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = \frac{1}{q} > 0$, $|u|_{L^q(\Omega)} \leq c(m, p, N, \Omega) \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$,

b) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$, $|u|_{L^q(\mathcal{O})} \leq c(m, p, N, q, \mathcal{O}, \Omega) \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ onde $1 \leq q < \infty$ e $\mathcal{O} \subseteq \overline{\Omega}$,

c) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$, $|u|_{C^0(\mathcal{O})} \leq c(m, p, N, q, \Omega, \mathcal{O}) \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ onde $\mathcal{O} \subseteq \overline{\Omega}$.

Observação 2.2.9. Quando $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, a função $\tilde{u}$ que é igual a u em Ω e a 0 em $\mathbb{C}\Omega$, pertence a $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ e, portanto, as propriedades dadas na Observação 2.2.8 são válidas sem nenhuma hipótese sobre Ω .

Um caso particular é quando $p = 2$ e $m = 1$, ou seja, o caso $H_0^1(\Omega)$. Sem qualquer propriedade de regularidade exigida para Ω , temos para $u \in H_0^1(\Omega)$ o seguinte:

a) $N = 2$, $|u|_{L^q(\Omega)} \leq c(q, \mathcal{O}, \Omega) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$, para todo $\mathcal{O} \subseteq \Omega$, $1 \leq q < \infty$,

b) $N = 3$, $|u|_{L^6(\Omega)} \leq c(\Omega) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$,

c) $N = 4$, $|u|_{L^4(\Omega)} \leq c(\Omega) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$,

d) $N \geq 3$, $|u|_{L^{2N/(N-2)}(\Omega)} \leq c(\Omega) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$.

Teorema 2.2.8. Seja Ω qualquer conjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ tal que existe o operador de prolongamento (2.5). Então a imersão

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^{q_1}(\Omega),$$

é compacta para qualquer $q_1 \in [1, +\infty)$, se $p \geq N$, e para qualquer $q_1 \in [1, q)$, onde q é dado por $\frac{1}{p} - \frac{1}{N} = \frac{1}{q}$, se $1 \leq p < N$.

Corolário 2.2.3. Para qualquer $q_1 \in [1, +\infty)$, se $p \geq N$, e para qualquer $q_1 \in [1, q)$, onde q é dado por $\frac{1}{p} - \frac{1}{N} = \frac{1}{q}$, se $1 \leq p < N$, a imersão

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq L^{q_1}(\Omega),$$

é compacta para qualquer conjunto aberto limitado Ω .

Observação 2.2.10. Como um caso particular do Corolário 2.2.3 notamos que para qualquer conjunto ilimitado Ω , si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então a restrição de u para $\mathcal{O}$, $\mathcal{O} \subseteq \overline{\mathcal{O}} \subseteq \Omega$, $\mathcal{O}$ limitado, pertence a $L^{q_1}(\mathcal{O})$ e esta restrição

$$W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^{q_1}(\mathcal{O}),$$

é compacta para os mesmos valores de p e q_1 .

2.3 EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Definição 2.3.1. Seja Ω um conjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$. Diremos que Ω é regular quando:

$$\begin{aligned} &\text{a fronteira } \partial\Omega \text{ é uma variedade } (N-1) \text{ - dimensional da classe} \\ &\mathcal{C}^k \ (k \geq 1) \text{ e } \Omega \text{ está localizado localmente em um lado de } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Um conjunto Ω que satisfaz a propriedade (2.6) é dita ser da classe $\mathcal{C}^k$.

Observação 2.3.1. A hipótese na definição (2.3.1) as vezes é muito restritiva para situações práticas (como o escoamento num quadrado). Por isso, todos os principais resultados serão provados sob uma condição mais fraca: a fronteira de Ω é localmente Lipschitziana.

Definição 2.3.2 (As Equações Homogêneas de Navier-Stokes). Seja Ω um conjunto aberto limitado e lipschitziana em $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$. Seja $f \in L^2(\Omega)$ uma função vetorial dada. Procuramos uma função vetorial $u = (u_1, \dots, u_N)$ e uma função escalar p , representando a velocidade e a pressão do fluido definidas em Ω , verificando as seguintes equações e condições de contorno:

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \sum_{i=1}^N u_i D_i u + \nabla p = f & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.9)$$

Observação 2.3.2. Se f, u e p são funções suaves que satisfazem as equações (2.7)-(2.9), então $u \in \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}$ e para cada $v \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$

$$\nu((u, v)) + b(u, u, v) = (f, v), \quad (2.10)$$

onde

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) w_j dx. \quad (2.11)$$

Lembremos que $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções $C_0^\infty(\Omega)$, com divergente nulo e $((u, v)) = \sum_{i=1}^N (\nabla u_i, \nabla v_i)$.

Observação 2.3.3. Um argumento de continuidade mostra que a equação (2.10) é satisfeita por qualquer $v \in \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}$. Por outro lado, se u é uma função em $\overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}$ tal que (2.10) vale para cada $v \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$, então existe uma distribuição p tal que (2.7) é satisfeita, e as equações (2.8)-(2.9) são verificados pois $u \in \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}$.

Definição 2.3.3. Denotamos por $\overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1 \cap L^N}}$ o fecho de $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega) \cap L^N(\Omega)$ com a norma

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} + |u|_{L^N(\Omega)}. \quad (2.12)$$

Observação 2.3.4. Em geral, $\overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1 \cap L^N}}$ é um subespaço de $\overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}$ diferente de $\overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}$. Por causa de (2.12), $\overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1 \cap L^N}} = \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}$ para $N = 2, 3$ ou 4 e Ω limitado.

Definição 2.3.4. Denotamos por $\overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1 \cap H^s}}$ o fecho de $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega) \cap H^s(\Omega)$, $(s \geq 1)$, com a norma Hilbertiana

$$\left\{ \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}.$$

O espaço $\overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1 \cap H^s}}$ está incluído em $\overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}$.

Lema 2.3.1. A forma b , dada por (2.11), é trilinear e contínua em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times (H_0^1(\Omega) \cap L^N(\Omega))$ sendo Ω limitado ou não limitado.

Demonstração. Se $u, v \in \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}$ e $w \in \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1 \cap L^N}}$, então por causa da Observação 2.2.9

$$u_i \in L^{2N/(N-2)}(\Omega), \quad D_i v_j \in L^2(\Omega), \quad w_j \in L^N(\Omega), \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

Pela desigualdade de Hölder, $u_i (D_i v_j) w_j$ pertence a $L^1(\Omega)$ e

$$\left| \int_{\Omega} u_i D_i v_j w_j dx \right| \leq |u_i|_{L^{2N/(N-2)}(\Omega)} |D_i v_j|_{L^2(\Omega)} |w_j|_{L^N(\Omega)}, \quad (2.13)$$

Então $b(u, v, w)$ está bem definido e

$$|b(u, v, w)| \leq c(n) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega) \cap L^N(\Omega)}. \quad (2.14)$$

Portanto, é claro que a forma b é trilinear e a desigualdade (2.14) assegura a continuidade de b . ■

Observação 2.3.5. Quando $N = 2$, temos um resultado similar e, a estimativa (2.13) deve ser substituída por

$$\left| \int_{\Omega} u_i D_i v_j w_j dx \right| \leq |u_i|_{L^4(\Omega)} |D_i v_j|_{L^2(\Omega)} |w_j|_{L^4(\Omega)}.$$

Lema 2.3.2. Para qualquer conjunto aberto Ω , b é uma forma contínua trilinear em $\overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}} \times \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}} \times \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1 \cap L^N}}$. Se Ω é limitado e $N \leq 4$, b é uma forma contínua trilinear em $\overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}} \times \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}} \times \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}$.

Demonstração. O argumento é similar à demonstração do Lema 2.3.1. ■

Definição 2.3.5. Denotamos por $B(u, v)$ com $u, v \in H_0^1(\Omega)$, a forma linear contínua em $\overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1 \cap L^N}}$, definida por

$$\langle B(u, v), w \rangle = b(u, v, w), \quad u, v \in H_0^1(\Omega), \text{ para todo } w \in \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1 \cap L^N}}.$$

Para $u = v$ escrevemos

$$B(u) = B(u, u), \quad u \in H_0^1(\Omega). \quad (2.15)$$

Lema 2.3.3. Seja Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}^N$ arbitrário. Então

- a) $b(u, v, v) = 0$ para todo $u \in \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}, v \in H_0^1(\Omega) \cap L^N(\Omega)$.
- b) $b(u, v, w) = -b(u, w, v)$ para todo $u \in \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}, v, w \in H_0^1(\Omega) \cap L^N(\Omega)$.

Demonstração. Provaremos somente o item a) pois o item b) é obtido de a) substituindo v por $v + w$, e usando as propriedades multilineares de b .

É suficiente mostrar a igualdade para $u \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ e $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_i D_i v_j v_j dx &= \int_{\Omega} u_i D_i \frac{(v_j)^2}{2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} D_i u_i (v_j)^2 dx, \\ b(u, v, v) &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \operatorname{div} u (v_j)^2 dx = 0 \end{aligned}$$

■

Teorema 2.3.1. Seja Ω um conjunto limitado em $\mathbb{R}^N$ e seja f dado em $H^{-1}(\Omega)$. Então

$$\nu((u, v)) + b(u, u, v) = (f, v), \quad \text{para todo } v \in \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1 \cap L^N}}$$

tem pelo menos uma solução $u \in \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}$ e existe uma distribuição $p \in L_{loc}^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \sum_{i=1}^N u_i D_i u + \nabla p = f & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

são satisfeitas.

Demonstração. Para a demonstração veja Roger Temam (TEMAM, 2001) ■

Definição 2.3.6 (A Equação Navier-Stokes da Evolução). Seja $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $-\infty \leq a, b \leq \infty$, e seja X um espaço de Banach. Para cada $1 \leq \alpha < +\infty$, definimos $L^\alpha(a, b; X)$ que denota o espaço L^α —funções integráveis de $[a, b]$ em X que é um espaço de Banach com a norma

$$\left(\int_a^b \|f(t)\|_X^\alpha dt \right)^{1/\alpha}.$$

Observação 2.3.6. a) O espaço $L^\infty(a, b; X)$ é o espaço de funções essencialmente limitados de $[a, b]$ em X e é munido com a norma de Banach

$$\text{Ess Sup}_{[a,b]} \|f(t)\|_X.$$

b) O espaço $C([a, b]; X)$ é o espaço de funções contínuas de $[a, b]$ em X e se $-\infty < a, b < +\infty$ é munido com a norma de Banach

$$\text{Sup}_{t \in [a,b]} \|f(t)\|_X.$$

Lema 2.3.4. Seja X um espaço de Banach com dual X^* e seja u e g dois funções pertencente a $L^1(a, b; X)$. Então os três seguintes condições são equivalentes.

i) u é quase igual a uma função de g , isto é,

$$u(t) = \varepsilon + \int_0^t g(s) ds, \quad \text{onde } \varepsilon \in X, \text{ quase } t \in [a, b].$$

ii) Para qualquer função teste $\phi \in C_0^\infty((a, b))$,

$$\int_a^b u(t) \phi'(t) dt = - \int_a^b g(t) \phi(t) dt$$

iii) Para qualquer $\eta \in X^*$

$$\frac{d}{dt} \langle u, \eta \rangle = \langle g, \eta \rangle$$

no sentido de distribuição escalar em (a, b) .

Se i)-iii) forem satisfeitas u em particular é quase igual a uma função contínua de $[a, b]$ em X .

Demonstração. Para a demonstração veja Roger Temam (TEMAM, 2001) ■

Definição 2.3.7 (Um teorema de existência em $\mathbb{R}^N$ ($N \leq 4$)). Como a dimensão é menor ou igual a 4, pode-se definir em $H_0^1(\Omega)$ e em particular em $\overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}$; uma forma contínua trilinear b definido em (2.11) .

Para $u, v \in \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}$, denotamos por $B(u, v)$ o elemento de $\left(\overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}\right)^*$ definido por

$$\langle B(u, v), w \rangle = b(u, v, w) \quad \text{para todo } w \in \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}.$$

Também define-se

$$B(u) = B(u, u) \in \left(\overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}\right)^*, \quad \text{para todo } u \in \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}$$

Em sua forma clássica, o problema de valor de contorno inicial das equações de Navier-Stokes é o seguinte:

Para encontrar um funcional vetorial

$$u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N,$$

e uma função escalar

$$p : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sum_{i=1}^N u_i D_i u + \nabla p = f & \text{em } Q = \Omega \times [0, T], \quad (2.16) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{em } Q, \quad (2.17) \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega \times [0, T], \quad (2.18) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega, \quad (2.19) \end{array} \right.$$

onde Q é o cilindro e $T > 0$ é fixo. Da equação (2.16) e (2.19) temos que f, u_0 são dadas e definidas em Q e Ω respectivamente. Então vamos supor que u e p são soluções clássicas de (2.16)-(2.19), digamos que $u \in C^2(\overline{Q})$, $p \in C^1(\overline{Q})$. Obviamente $u \in L^2\left(0, T; \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}\right)$, e se v é um elemento de $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ pode-se verificar que

$$\frac{d}{dt} (u, v) + \nu ((u, v)) + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle. \quad (2.20)$$

Por continuidade, a equação (2.20) será válida para cada $v \in \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}$. Sugerimos a seguinte Formulação Fraca do problema (2.16)-(2.20).

Proposição 2.3.1. Para f e u dadas com

$$f \in L^2 \left(0, T; \left(\overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}} \right)^* \right) \quad (2.21)$$

$$u_0 \in \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^2}} \quad (2.22)$$

para encontrar u satisfazendo

$$u \in L^2 \left(0, T; \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}} \right) \quad (2.23)$$

e

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (u, v) + \nu ((u, v)) + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle & \text{para todo } v \in \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}} \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.24)$$

$$(2.25)$$

Se u pertence apenas a $u \in L^2 \left(0, T; \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}} \right)$, a condição (2.25) não precisa fazer sentido. Mas pero se $u \in L^2 \left(0, T; \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}} \right)$ e satisfaz (2.24) então usando o Lema 2.3.4 u é quase sempre igual a uma função contínua de modo que (2.25) é significativo.

Lema 2.3.5. Assumimos que a dimensão do espaço é $N \leq 4$ e que $u \in L^2 \left(0, T; \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}} \right)$. Então a função Bu definida por $\langle Bu(t), v \rangle = b(u(t), u(t), v)$, para todo $\overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}$, quase em todas partes em $t \in [0, T]$ pertence a $u \in L^1 \left(0, T; \left(\overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}} \right)^* \right)$.

Demonstração. Para a demonstração veja Roger Temam (TEMAM, 2001) ■

Agora se u satisfaz (2.23)-(2.24), então pelo Teorema de Representação de Riez temos que

$$\langle f, u \rangle = (f, u) \text{ para todo } f \in \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^2}} \text{ e } u \in \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}},$$

$$\langle Au, v \rangle = ((u, v)) \text{ para todo } v \in \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}},$$

e pelo Lema 2.3.5, (2.20) pode-se escrever como

$$\frac{d}{dt} \langle u, v \rangle = \langle f - \nu Au - Bu, v \rangle \text{ para todo } v \in \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}$$

Como $Au \in L^2 \left(0, T; \left(\overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}} \right)^* \right)$, então a função

$$f - \nu Au - Bu \in L^1 \left(0, T; \left(\overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}} \right)^* \right).$$

O Lema 2.3.4 implica que

$$\frac{du}{dt} \in L^1 \left(0, T; \left(\overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}} \right)^* \right) \text{ e } \frac{du}{dt} = f - \nu Au - Bu,$$

e que u é quase sempre igual a uma função contínua de $[0, T]$ em $\left(\overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}\right)^*$. Esta observação diz-nos que $u(0) = u_0$ torna-se significativo.

Uma formulação alternativa do problema (2.23)-(2.25) é:

Proposição 2.3.2. Dado f e u_0 satisfazendo (2.21)-(2.22), então para encontrar u que satisfaz

$$u \in L^2\left(0, T; \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}\right), \quad \frac{du}{dt} \in L^1\left(0, T; \left(\overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1}}\right)^*\right), \quad (2.26)$$

$$\frac{du}{dt} + \nu Au + Bu = f \quad \text{em } (0, T), \quad (2.27)$$

$$u(0) = u_0, \quad (2.28)$$

mostra-se que para qualquer solução da Proposição 2.3.1 é uma solução da Proposição 2.3.2 e inversamente também satisfaz-se, o qual esses Proposições são equivalentes.

A existência de soluções para estas Proposições é assegurado pelo seguinte Teorema.

Teorema 2.3.2. Se a dimensão é $N \leq 4$ e sejam f e u_0 que satisfaz (2.21)-(2.22). Então existe pelo menos uma função u que satisfaz (2.26)-(2.27).

Além disso

$$u \in L^\infty\left(0, T; \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^2}}\right),$$

e u é fracamente contínua de $[0, T]$ em $\overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^2}}$.

Demonstração. A prova de existência de um u satisfazendo (2.26)-(2.27) é desenvolvido pelo método de Galerkin para a demonstração veja Roger Temam (TEMAM, 2001) pag 283. ■

2.4 REGULARIDADE DE SOLUÇÕES DO PROBLEMA DE STOKES

Proposição 2.4.1. Seja Ω um conjunto aberto limitado de classe C^r , onde $r = \max\{m + 2, 2\}$ e m inteiro maior que zero. Vamos a supor que

$$u \in W^{1,\alpha}(\Omega), \quad p \in L^\alpha(\Omega) \quad 1 < \alpha < \infty,$$

são soluções do problema generalizado de Stokes

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \nabla p = f & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} u = g & \text{em } \Omega, \\ u = \phi & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Se $f \in W^{m,\alpha}(\Omega)$, $g \in W^{m+1,\alpha}(\Omega)$ e $\phi \in W^{(m+2)-1/\alpha,\alpha}(\partial\Omega)$. Então

$$u \in W^{m+2,\alpha}(\Omega) \quad \text{e} \quad p \in W^{m+1,\alpha}(\Omega).$$

Se a dimensão n do espaço for menor ou igual a três, podemos obter alguma informação sobre qualquer solução u de

$$\nu((u, v)) + b(u, u, v) = (f, v), \quad \text{para todo } v \in \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1 \cap L^n}},$$

reiterando o seguinte procedimento simples: a informação que temos de u nos dá alguma propriedade de regularidade do termo não linear

$$\sum_{i=1}^n u_i D_i u$$

Então escrevemos (2.7)-(2.10)

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \nabla p = f - \sum_{i=1}^n u_i D_i u & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.29)$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\begin{cases} u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.31)$$

Usando as propriedades de regularidades disponíveis de f e a Proposição 2.4.1 obtemos novas informações sobre a regularidade de u . Se as propriedades de u assim obtidas forem melhores do que antes, podemos reiterar o procedimento.

Proposição 2.4.2. Seja Ω um conjunto aberto de classe C^∞ em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ e seja f dado em $C^\infty(\overline{\Omega})$. Então qualquer solução u, p de (2.29)-(2.31) pertence a $C^\infty(\overline{\Omega}) \times C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Vamos a considerar o caso em que Ω é limitado. O termo não linear

$$\sum_{i=1}^n u_i D_i u = \sum_{i=1}^n D_i(u_i D_i u) \quad \text{por } \operatorname{div} u = 0$$

Se $N = 2$, sabemos pelo Teorema 2.2.6 item a) e b) que quando $\alpha = 1, 2$

$$W^{1,\alpha}(\Omega) \subseteq L^\alpha(\Omega)$$

Temos que

$$u_i \in L^\alpha(\Omega) \quad \text{para qualquer } 1 \leq \alpha < +\infty,$$

então

$$u_i u_j \in L^\alpha(\Omega), \quad D_i(u_i u_j) \in W^{-1,\alpha}(\Omega), \quad \text{para qualquer } \alpha,$$

o qual nos mostra que

$$u \in W^{1,\alpha}(\Omega) \text{ e } p \in L^\alpha(\Omega) \text{ para qualquer } \alpha.$$

Para $\alpha > 2$, sabemos pelo Teorema 2.2.6 item c) que

$$W^{1,\alpha}(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega).$$

o qual nos mostra

$$u_i D_i u \in L^\alpha(\Omega) \text{ para qualquer } \alpha$$

Então pela Proposição 2.4.1 prova que

$$u \in W^{2,\alpha}(\Omega), \quad p \in W^{1,\alpha}(\Omega) \text{ para qualquer } \alpha.$$

É fácil verificar que $u_i D_i u \in W^{1,\alpha}(\Omega)$ tal que $u \in W^{3,\alpha}(\Omega)$.

Repetindo este procedimento encontramos em particular que

$$u \in H^m(\Omega), \quad p \in H^m(\Omega) \text{ para qualquer } m \geq 1.$$

As mesmas propriedades valem para qualquer derivada de u ou p , o Teorema de Imersão de Sobolev implica que qualquer derivada de u ou p pertence a $C(\overline{\Omega})$.

Para $n = 3$ sabemos pelo Teorema 2.2.6 item a) que $u_i \in L^6(\Omega)$

$$u_i D_i u_j \in L^{3/2}(\Omega).$$

Pela Proposição 2.4.1 implica que $u \in W^{2,3/2}(\Omega)$; e a Observação 2.2.8 item b) mostra-se que para $p = 3/2$, $m = 2$ e $N = 3$,

$$u \in L^\alpha(\Omega) \text{ para qualquer } 1 \leq \alpha < \infty$$

Portanto

$$D_i(u_i, u_j) \in W^{-1,\alpha}(\Omega),$$

para qualquer α , e neste ponto só precisa repetir a prova dada para $N = 2$. ■

2.5 CONSERVAÇÃO DA MASSA

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ um domínio que contém o fluxo e $\mathbf{x} = (x, y, z)$ um ponto em Ω . Sabemos que para uma partícula do fluido que se move através de $\mathbf{x}$ no instante t , existem duas grandezas

básicas que descrevem as propriedades do escoamento:

$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rightarrow$ campo de velocidade do fluido,

$\rho(\mathbf{x}, t) \rightarrow$ densidade da massa.

e assumiremos que $\mathbf{u}$ e ρ são suficientemente suaves. Além disso, conhecemos os três princípios dos quais é possível derivar as equações do movimento:

- a) A massa não é criada nem destruída.
- b) A taxa de variação do momento de uma porção do fluido é igual à força aplicada a ela (segunda lei de Newton).
- c) A energia não é criada nem destruída.

Considere $W \subseteq \Omega$ uma região fixa. A massa total do fluido dentro de W é dado por

$$m(W, t) = \int_W \rho(\mathbf{x}, t) dV,$$

onde dV é o elemento de volume. A taxa de variação da massa em W é, portanto,

$$\frac{d}{dt} m(W, t) = \frac{d}{dt} \int_W \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dV.$$

Denotando a fronteira de W por ∂W , o vetor unitário normal (exterior) por $\mathbf{n}$ e o elemento da área por dA temos que:

- a) A taxa do fluxo de volume através de ∂W por unidade de área é $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$. Portanto, a taxa do fluxo de massa por unidade de área é $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$.
- b) A taxa de aumento da massa em W é igual à taxa na qual a massa está cruzando ∂W na direção oposta (para o interior).

Lema 2.5.1 (Conservação de Massa, Forma Integral). Temos que:

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho dV = - \int_{\partial W} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (2.32)$$

Lembremos que o sinal negativo no lado direito da equação (2.32) é devido a que a massa se está movendo para o interior de W .

Para transformar a integral de superfície (2.32) em uma integral de volume precisamos do Teorema da divergência que estabelecemos a seguir.

Teorema 2.5.1 (Teorema da Divergência). Seja $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ uma região limitada por uma superfície fechada $\partial\Omega_1$ e seja $\mathbf{n}$ o vetor unitário normal exterior à $\partial\Omega_1$. Se F é uma função vetorial que tem primeiras derivadas parciais contínuas em Ω_1 , então

$$\int_{\partial\Omega_1} F \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega_1} \nabla \cdot F dV.$$

Usando este teorema na forma integral de conservação da massa (2.32) temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_W \rho dV &= - \int_{\partial W} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA. \\ &= - \int_W \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV. \end{aligned}$$

Teorema 2.5.2 (Conservação de massa). Temos que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.33)$$

A equação (2.33) é também chamada equação de continuidade na dinâmica dos fluidos. Se ρ e $\mathbf{u}$ não forem suficientemente regulares, então a forma integral é a única a ser usada.

3 O PROBLEMA ESTACIONÁRIO E A POSITIVIDADE DE CONCENTRAÇÃO

Neste capítulo descrevemos primeiro o modelo dinâmico do fluido e depois mostramos a existência de uma solução do problema estacionário com concentração total igual a $\alpha > 0$. Concluimos com a positividade pontual da concentração obtida.

3.1 MODELO DINÂMICO DO FLUIDO

Seja Ω um domínio limitado regular de $\mathbb{R}^3$ com fronteira denotada por $\partial\Omega$. Sejam $c(x, t)$ a concentração dos microrganismos no ponto $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ e instante $t \geq 0$, $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$ e $p = p(x, t)$ a velocidade e pressão do fluido do cultivo em $x \in \Omega$ e t . Estas funções, u, p e c , são regidas pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = g(1 + \gamma c) \chi + f & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} - \theta \Delta c + (u \cdot \nabla) c + U \frac{\partial c}{\partial x_3} = 0 & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

onde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ e $\Delta = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2$ denotam os operadores gradiente e laplaciano respectivamente. As outras variáveis são as seguintes:

- a) $f = (f_1, f_2, f_3)$ é a força externa dada, que por simplicidade será considerado independente de t .
- b) g é a gravidade.
- c) χ é o vetor unitário na direção vertical, isto é, $\chi = (0, 0, 1)$.
- d) ν é a viscosidade cinemática do fluido.
- e) θ (constante) é a taxa de difusão do microrganismo.
- f) A constante positiva $U > 0$, denota a velocidade media de nado do microrganismo.
- g) A constante positiva $\gamma > 0$ é dada por $\gamma = \frac{p_0}{p_m} - 1$, onde p_0 e p_m são a densidade de um organismo individual e do fluido do cultivo, respectivamente.

Defina $c = km(g\gamma)^{-1}$, onde $k > 0$ é uma constante especificada a seguir e $p = q - gx_3$. Então, a partir do sistema (3.1) obtemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p &= -g(1 + \gamma c) \chi + f, \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla (q - gx_3) &= -g \left(1 + \gamma \frac{k}{g\gamma} m \right) \chi + f, \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla q - g \nabla x_3 &= -g\chi - km\chi + f, \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla q &= -km\chi + f \quad (\nabla x_3 = \chi).\end{aligned}$$

De (3.3) também obtemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t} - \theta \Delta c + (u \cdot \nabla) c + U \frac{\partial c}{\partial x_3} &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \theta \Delta + (u \cdot \nabla) + U \frac{\partial}{\partial x_3} \right) c &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \theta \Delta + (u \cdot \nabla) + U \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \frac{k}{g\gamma} m &= 0 \\ \frac{\partial m}{\partial t} - \theta \Delta m + (u \cdot \nabla) m + U \frac{\partial m}{\partial x_3} &= 0 \quad \left(\frac{k}{g\gamma} \neq 0 \right).\end{aligned}$$

Logo o sistema de equações fica regido por

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla q = -km\chi + f & x \in \Omega, t > 0, \quad (3.4) \\ \operatorname{div} u = 0 & x \in \Omega, t > 0, \quad (3.5) \\ \frac{\partial m}{\partial t} - \theta \Delta m + (u \cdot \nabla) m + U \frac{\partial m}{\partial x_3} = 0 & x \in \Omega, t > 0. \quad (3.6) \end{array} \right.$$

Complementamos o sistema (3.4)-(3.6) com as seguintes condições iniciais e de contorno:

$$u(x, 0) = u_0(x, 0), \quad m(x, 0) = m_0(x) \quad x \in \Omega, \quad (3.7)$$

$$u(x, t) = 0 \quad x \in \partial\Omega, t > 0, \quad (3.8)$$

$$\theta \frac{\partial m}{\partial n} - U n_3(x) m = 0 \quad x \in \partial\Omega, t > 0. \quad (3.9)$$

O vetor $n(x) = (n_1, n_2, n_3)$ denota o vetor unitário normal exterior no ponto $x \in \partial\Omega$, e $\frac{\partial}{\partial n}$ denota a derivada normal.

Observação 3.1.1. Sendo $c(x, t)$ a concentração do microrganismo no ponto $x \in \Omega$ no momento $t \geq 0$ a equação (3.3) significa o equilíbrio de forças de acordo com a lei de Newton, isto é, a equação de conservação de massa. Com efeito, sabemos que $\frac{\partial c}{\partial t} + (u \cdot \nabla) c$

é aceleração total do microrganismo no fluido (SOHR, 2001), então fazendo alguns cálculos na equação (3.3) obtemos

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial c}{\partial t} + (u \cdot \nabla) c - \theta \Delta c + U \frac{\partial c}{\partial x_3} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \left(\frac{\partial}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \right) c - \theta \operatorname{div}(\nabla c) + U \nabla(c \cdot \chi) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \left(\frac{\partial}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \right) c - \theta \operatorname{div}(\nabla c) + U \operatorname{div}(c \cdot \chi) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \left(\frac{\partial}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \right) c + \operatorname{div}(-\theta \nabla c + U c \cdot \chi) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \frac{d}{dt} c + \operatorname{div} J = 0,
 \end{aligned}$$

onde $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u \cdot \nabla)$ e J é o fluxo do microrganismo através do fluido, dado por $J = -\theta \nabla c + U c \cdot \chi$.

Observação 3.1.2. A equação (3.9) estabelece que não há fluxo em cada ponto da fronteira de Ω .

3.2 PROBLEMA ESTACIONÁRIO

Definição 3.2.1. Sejam V e H os fechos de $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ em $(H^1(\Omega))^3$ e $(L^2(\Omega))^3$, respectivamente, ou seja,

$$V := \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|v\|_2 + \|\nabla v\|_2}, \quad H := \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|v\|_2},$$

onde $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ é o espaço dos campos de vetores solenoides suaves com suporte compacto em Ω , isto é,

$$C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) = \{u \in C_0^\infty(\Omega)^n; \operatorname{div} u = 0\}.$$

Denotamos por X o subespaço fechado de $L^2(\Omega)$ formados pelas funções ortogonais às constantes $((u, k) = 0, k \text{ constante})$ e $B = H^1(\Omega) \cap X$.

Da Definição 3.2.1, vemos que $V \subseteq W_0^{1,2}(\Omega)$. Então, para todo $v \in V$, usando a desigualdade de Poincaré (Teorema 2.2.3) temos que:

$$|v| \leq C_\Omega |\nabla v|. \quad (3.10)$$

Consequentemente, dado $\phi \in B$ e devido a que $\phi \in X$ vemos que satisfaz a propriedade

$$(\phi, 1) = \int_\Omega \phi \cdot 1 = 0.$$

Além disso, como $\phi \in H^1(\Omega)$ e Ω é um conjunto com fronteira Lipschitziana, pelo Teorema 2.2.2 temos que ϕ satisfaz a desigualdade (2.3), isto é,

$$|\phi| \leq C_\Omega |\nabla \phi|. \quad (3.11)$$

Lembremos que $|\cdot|$ denota a norma usual de $L^2(\Omega)$ e C_Ω é independente de v e ϕ .

Por definição, os espaços V e $H^1(\Omega)$ são espaços de Hilbert. Então é possível construir uma forma bilinear $[\cdot, \cdot] : (V \times H^1) \times (V \times H^1) \rightarrow \mathbb{R}$, definida da seguinte maneira: dado $(v, \phi), (w, \psi) \in V \times H^1(\Omega)$,

$$[(v, \phi), (w, \psi)] = \nu (\nabla v, \nabla w) + \theta (\nabla \phi, \nabla \psi), \quad (3.12)$$

onde $(\cdot, \cdot)$ é o produto interno de $L^2(\Omega)$.

Devido às desigualdades (3.10), (3.11) e $H^1(\Omega) \cap X \subseteq H^1(\Omega)$ a forma bilinear é um produto escalar em $V \times B$. A norma em $V \times B$ correspondente a (3.12) é denotada por $\|\cdot\|$.

A seguir escrevemos

$$\begin{aligned} b_0(u, v, w) &= ((u \cdot \nabla) v, w) = \sum_{j,k=1}^3 \int_{\Omega} u_j \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) w_k dx, \\ b_1(u, \phi, \psi) &= ((u \cdot \nabla) \phi, \psi) = \sum_{j,k=1}^3 \int_{\Omega} u_j \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \psi dx, \end{aligned}$$

onde u, v e $w \in V$, e $\phi, \psi \in H^1(\Omega)$. A forma trilinear b_0 definido acima pode ser estimada.

Para fazer isso, note que

$$|b_0(u, v, w)| \leq \sum_{j,k=1}^3 \int_{\Omega} \left| u_j \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) w_k \right| dx,$$

e pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| u_j \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) w_k \right| dx &= \int_{\Omega} |u_j w_k| \left| \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right| dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |u_j w_k|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\left(\int_{\Omega} |u_j|^4 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |w_j|^4 dx \right)^{1/2} \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Logo

$$|b_0(u, v, w)| \leq \sum_{j,k=1}^3 |u_j|_{L^4} \left| \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right|_{L^2} |w_k|_{L^4}.$$

Como $|u_j| \leq |u|$, $|w_k| \leq |w|$ e $\left| \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right| \leq |\nabla v|$, obtemos que

$$|b_0(u, v, w)| \leq c |u|_{L^4} |\nabla v|_{L^2} |w|_{L^4},$$

onde c é constante.

Como Ω é limitado, temos que $L^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ e $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c_1 \|u\|_{L^p(\Omega)}$, onde c_1 é uma constante e $p \geq q$. Portanto, para $p = 6$, $q = 4$ temos que

$$|b_0(u, v, w)| \leq c (|u|_{L^4} |\nabla v|_{L^2} |w|_{L^4}) \leq c_2 (|u|_{L^6} |\nabla v|_{L^2} |w|_{L^6}).$$

Além disso, pelo Teorema 2.2.4 (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg) e Observação 2.2.8, temos que

$$|b_0(u, v, w)| \leq |u|_{L^4} |\nabla v|_{L^2} |w|_{L^4} \leq C_0 |\nabla u|_{L^2} |\nabla v|_{L^2} |\nabla w|_{L^2}. \quad (3.13)$$

Da mesma forma, tomando $\psi \in B$, usando a desigualdade (3.11) b_1 pode ser estimada, seguindo os passos da estimativa de b_0 , da seguinte maneira

$$|b_1(u, \phi, \psi)| \leq |u|_{L^4} |\nabla \phi| |\psi|_{L^4} \leq C'_0 |\nabla u| |\nabla \phi| |\nabla \psi|. \quad (3.14)$$

Podemos supor que $C_0 = C'_0$ nas desigualdades (3.13) and (3.14), escolhendo o máximo se necessário.

Por outro lado, integrando por partes b_0 e b_1 obtemos que

$$\begin{aligned} b_0(u, v, w) &= ((u \cdot \nabla) v, w) \\ &= ((u_1 \partial_{x_1} v_1 + u_2 \partial_{x_2} v_1 + u_3 \partial_{x_3} v_1, u_1 \partial_{x_1} v_2 + u_2 \partial_{x_2} v_2 + u_3 \partial_{x_3} v_2, \\ &\quad u_1 \partial_{x_1} v_3 + u_2 \partial_{x_2} v_3 + u_3 \partial_{x_3} v_3), (w_1, w_2, w_3)) \\ &= \int_{\Omega} (u_1 \partial_{x_1} v_1 w_1 + u_2 \partial_{x_2} v_1 w_1 + u_3 \partial_{x_3} v_1 w_1 + u_1 \partial_{x_1} v_2 w_2 + \\ &\quad + u_2 \partial_{x_2} v_2 w_2 + u_3 \partial_{x_3} v_2 w_2 + u_1 \partial_{x_1} v_3 w_3 + u_2 \partial_{x_2} v_3 w_3 + \\ &\quad + u_3 \partial_{x_3} v_3 w_3) dx \end{aligned}$$

Sabemos que $u \in V$, então o traço de $u = 0$ na $\partial\Omega$, assim

$$\begin{aligned}
 b_0(u, v, w) &= \int_{\Omega} [\partial_{x_1} v_1 (u_1 w_1) + \partial_{x_2} v_1 (u_2 w_1) + \partial_{x_3} v_1 (u_3 w_1) + \partial_{x_1} v_2 (u_1 w_2) + \\
 &\quad \partial_{x_2} v_2 (u_2 w_2) + \partial_{x_3} v_2 (u_3 w_2) + \partial_{x_1} v_3 (u_1 w_3) + \partial_{x_2} v_3 (u_2 w_3) + \\
 &\quad \partial_{x_3} v_3 (u_3 w_3)] dx \\
 &= - \int_{\Omega} (v_1 (\partial_{x_1} u_1 w_1 + \partial_{x_2} u_2 w_1 + \partial_{x_3} u_3 w_1) + v_2 (\partial_{x_1} u_1 w_2 + \\
 &\quad \partial_{x_2} u_2 w_2 + \partial_{x_3} u_3 w_2) + v_3 (\partial_{x_1} u_1 w_3 + \partial_{x_2} u_2 w_3 + \partial_{x_3} u_3 w_3) + \\
 &\quad v_1 (u_1 \partial_{x_1} w_1 + u_2 \partial_{x_2} w_1 + u_3 \partial_{x_3} w_1) + v_2 (u_1 \partial_{x_1} w_2 + \\
 &\quad u_2 \partial_{x_2} w_2 + u_3 \partial_{x_3} w_2) + v_3 (u_1 \partial_{x_1} w_3 + u_2 \partial_{x_2} w_3 + u_3 \partial_{x_3} w_3)) dx \\
 &= - \int_{\Omega} (v_1 (\nabla \cdot u) w_1 + v_2 (\nabla \cdot u) w_2 + v_3 (\nabla \cdot u) w_3 + v_1 (u_1 \partial_{x_1} w_1 + \\
 &\quad u_2 \partial_{x_2} w_1 + u_3 \partial_{x_3} w_1) + v_2 (u_1 \partial_{x_1} w_2 + u_2 \partial_{x_2} w_2 + u_3 \partial_{x_3} w_2) + \\
 &\quad + v_3 (u_1 \partial_{x_1} w_3 + u_2 \partial_{x_2} w_3 + u_3 \partial_{x_3} w_3)) dx.
 \end{aligned}$$

Como $\operatorname{div} u = 0$, então

$$\begin{aligned}
 b_0(u, v, w) &= - \int_{\Omega} v_1 (u_1 \partial_{x_1} w_1 + u_2 \partial_{x_2} w_1 + u_3 \partial_{x_3} w_1) + v_2 (u_1 \partial_{x_1} w_2 + \\
 &\quad u_2 \partial_{x_2} w_2 + u_3 \partial_{x_3} w_2) + v_3 (u_1 \partial_{x_1} w_3 + u_2 \partial_{x_2} w_3 + u_3 \partial_{x_3} w_3)) dx \\
 &= - \int_{\Omega} (v_1 (u (\nabla w_1)) + v_2 (u (\nabla w_2)) + v_3 (u (\nabla w_3))) dx \\
 &= - (v_1, v_2, v_3) ((u \cdot \nabla) (w_1, w_2, w_3)) \\
 &= - ((u \cdot \nabla) w, v) \\
 &= -b_0(u, w, v).
 \end{aligned}$$

Da mesma forma, podemos concluir que $b_1(u, \phi, \psi) = -b_1(u, \psi, \phi)$. Portanto, temos que:

$$b_0(u, v, w) = -b_0(u, w, v) \quad \text{e} \quad b_1(u, \phi, \psi) = -b_1(u, \psi, \phi). \quad (3.15)$$

Conforme anunciado na introdução deste capítulo, o problema a ser considerado é o seguinte: dado um $\alpha > 0$ arbitrário, procuramos (u, m) tal que

$$\int_{\Omega} m dx = \alpha. \quad (3.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla q = -km\chi + f & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{em } \Omega, \\ -\theta \Delta m + (u \cdot \nabla) m + U \frac{\partial m}{\partial x_3} = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \\ \theta \frac{\partial m}{\partial n} - Un_3 m = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.17) \\ (3.18) \\ (3.19) \\ (3.20) \\ (3.21) \end{array}$$

Em outras palavras, existe $u = u_\alpha \in (H^2(\Omega))^3 \cap V$, $m = m_\alpha \in H^2(\Omega)$ e $q = q_\alpha \in H^1(\Omega)$ que satisfaz (3.16)-(3.21)?

Para a resposta dessa pergunta faremos alguns cálculos preliminares que nos ajudarão na resposta desejada.

Definimos $k = \left(\frac{2\nu U}{C_\Omega^3} \right)^{1/2}$ e assumimos que

$$\frac{U}{\theta} < (2C_\Omega)^{-1}. \quad (3.22)$$

Procuramos agora escrever m_α na forma $m_\alpha = \tilde{m} + E$ onde $E(x) = C_\alpha \exp\left(\frac{U}{\theta}x_3\right)$. A constante C_α é escolhida de modo que $\int_\Omega E(x) dx = \alpha$. Fazendo alguns cálculos temos que

$$\begin{aligned} -\theta \Delta E &= -\frac{U^2}{\theta} C_\alpha \exp\left(\frac{U}{\theta}x_3\right), & \theta \frac{\partial E}{\partial x_3} &= U C_\alpha \exp\left(\frac{U}{\theta}x_3\right), \\ U \frac{\partial E}{\partial x_3} &= \frac{U^2}{\theta} C_\alpha \exp\left(\frac{U}{\theta}x_3\right), & -Un_3 E &= -Un_3 C_\alpha \exp\left(\frac{U}{\theta}x_3\right). \end{aligned}$$

Somando as equações acima obtemos que

$$-\theta \Delta E + U \frac{\partial E}{\partial x_3} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad \theta \frac{\partial E}{\partial x_3} - Un_3 E = 0 \quad \text{em } \partial\Omega$$

Também, temos o seguinte $\nabla E = \left(0, 0, \frac{U}{\theta} C_\alpha \exp\left(\frac{U}{\theta}x_3\right)\right)$, isto é,

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow k\theta U^{-1} \nabla E = \left(0, 0, k C_\alpha \exp\left(\frac{U}{\theta}x_3\right)\right) \\ &\Leftrightarrow k\theta U^{-1} \nabla E = k C_\alpha \exp\left(\frac{U}{\theta}x_3\right) \chi \\ &\Leftrightarrow k\theta U^{-1} \nabla E = k E \chi. \end{aligned}$$

Das equações (3.16), (3.17), (3.19) e (3.21) obtemos que

$$\begin{aligned} &-\nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla q = -km_\alpha \chi + f \\ &\Leftrightarrow -\nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla q = -k(\tilde{m} + E) \chi + f \\ &\Leftrightarrow -\nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla q + k E \chi = -k \tilde{m} \chi + f \\ &\Leftrightarrow -\nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla (q + k\theta U^{-1} E) = -k \tilde{m} \chi + f, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\theta \Delta m_\alpha + (u \cdot \nabla) m_\alpha + U \frac{\partial m_\alpha}{\partial x_3} = 0 \\
& \Leftrightarrow -\theta \Delta (\widetilde{m} + E) + (u \cdot \nabla) (\widetilde{m} + E) + U \frac{\partial}{\partial x_3} (\widetilde{m} + E) = 0 \\
& \Leftrightarrow \left(U \frac{\partial E}{\partial x_3} - \theta \Delta E \right) - \theta \Delta \widetilde{m} + (u \cdot \nabla) (\widetilde{m} + E) + U \frac{\partial \widetilde{m}}{\partial x_3} = 0 \\
& \Leftrightarrow -\theta \Delta \widetilde{m} + (u \cdot \nabla) (\widetilde{m} + E) + U \frac{\partial \widetilde{m}}{\partial x_3} = 0, \\
& \theta \frac{\partial m_\alpha}{\partial n} - U n_3 m_\alpha = 0 \\
& \Leftrightarrow \theta \frac{\partial}{\partial n} (\widetilde{m} + E) - U n_3 (\widetilde{m} + E) = 0 \\
& \Leftrightarrow \left(\frac{\partial E}{\partial n} - U n_3 E \right) + \theta \frac{\partial}{\partial n} \widetilde{m} - U n_3 \widetilde{m} = 0,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} m_\alpha dx = \alpha \\
& \Leftrightarrow \int_{\Omega} \widetilde{m} dx + \int_{\Omega} E dx = \alpha \\
& \Leftrightarrow \int_{\Omega} \widetilde{m} dx = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, o problema para u, q e $\widetilde{m}$ torna-se

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla (q + k\theta U^{-1} E) = -k\widetilde{m}\chi + f & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{em } \Omega, \\ -\theta \Delta \widetilde{m} + (u \cdot \nabla) (\widetilde{m} + E) + U \frac{\partial \widetilde{m}}{\partial x_3} = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \\ \theta \frac{\partial \widetilde{m}}{\partial n} - U n_3 \widetilde{m} = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.23) \\ (3.24) \\ (3.25) \\ (3.26) \\ (3.27) \end{array}$$

com

$$\int_{\Omega} \widetilde{m}(x) dx = 0. \quad (3.28)$$

Como $(\nabla q, v) = -(q, \operatorname{div} v) = 0$ e $(\nabla k\theta U^{-1} E, v) = -(k\theta U^{-1} E, \operatorname{div} v) = 0$. Então da equação (3.23) temos que

$$\begin{aligned}
& (-\nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla (q + k\theta U^{-1} E), v) = (-k\widetilde{m}\chi + f, v) \\
& \Leftrightarrow \nu (-\Delta u, v) + b_0(u, u, v) + (\nabla q, v) + (\nabla k\theta U^{-1} E, v) = (-k\widetilde{m}\chi, v) + (f, v) \\
& \Leftrightarrow \nu((u, v)) - b_0(u, v, u) + k(\widetilde{m}, \chi \cdot v) = (f, v).
\end{aligned}$$

Sabemos, por integração por partes, que $\left(U \frac{\partial \widetilde{m}}{\partial x_3}, \phi\right) = -U \left(\widetilde{m}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right)$. Então da equação (3.25) temos

$$\begin{aligned} & \left(-\theta \Delta \widetilde{m} + (u \cdot \nabla)(\widetilde{m} + E) + U \frac{\partial \widetilde{m}}{\partial x_3}, \phi\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \theta(-\Delta \widetilde{m}, \phi) + b_1(u, \widetilde{m} + E, \phi) + \left(U \frac{\partial \widetilde{m}}{\partial x_3}, \phi\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \theta((\widetilde{m}, \phi)) - b_1(u, \phi, \widetilde{m} + E) - U \left(\widetilde{m}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right) = 0. \end{aligned}$$

Somando os resultados de acima obtemos

$$\begin{aligned} & \nu((u, v)) - b_0(u, v, u) + k(\widetilde{m}, \chi \cdot v) + \theta((\widetilde{m}, \phi)) - b_1(u, \phi, \widetilde{m} + E) - \\ & \quad U \left(\widetilde{m}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right) = (f, v) \\ \Leftrightarrow & \nu(\nabla u, \nabla v) - b_0(u, v, u) + k(\widetilde{m}, \chi \cdot v) + \theta(\nabla \widetilde{m}, \nabla \phi) - b_1(u, \phi, \widetilde{m} + E) - \\ & \quad U \left(\widetilde{m}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right) = (f, v) \\ \Leftrightarrow & [(u, \widetilde{m}), (v, \phi)] - b_0(u, v, u) + k(\widetilde{m}, \chi \cdot v) - b_1(u, \phi, \widetilde{m} + E) - \\ & \quad U \left(\widetilde{m}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right) = (f, v). \end{aligned}$$

Definição 3.2.2. Seja $f \in H$. Dizemos que $(u, \widetilde{m}) \in V \times B$ é uma solução fraca do sistema (3.23) - (3.28) se, e somente se, a seguinte identidade é satisfeita

$$\begin{aligned} & [(u, \widetilde{m}), (v, \phi)] - b_0(u, v, u) - b_1(u, \phi, \widetilde{m} + E) - U \left(\widetilde{m}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right) \\ & \quad + k(\widetilde{m}, \chi \cdot v) = (f, v), \end{aligned} \tag{3.29}$$

para qualquer $(v, \phi) \in V \times B$ ($\chi \cdot v$ é o terceiro componente v_3 de $v \in V$).

O seguinte resultado mostra a existência de uma solução fraca para o problema (3.23)-(3.28).

Proposição 3.2.1. Para cada $f \in H$, existe uma solução fraca $(u, \widetilde{m})$ de (3.23)-(3.28).

Demonstração. Seja $(w, \psi) \in V \times B$. Então definamos o operador $T : V \times B \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} T(v, \phi) = & b_0(w, v, w) + b_1(w, \phi, \psi + E) + U \left(\psi, \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right) - \\ & k(\psi, \chi \cdot v), \end{aligned}$$

com (w, ψ) fixo. O operador T é linear y contínuo.

Para mostrar a linearidade, sejam $(v_1, \phi_1), (v_2, \phi_2) \in V \times B$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 T(v_1 + v_2, \phi_1 + \phi_2) &= b_0(w, v_1 + v_2, w) + b_1(w, \phi_1 + \phi_2, \psi + E) + \\
 &\quad U\left(\psi, \frac{\partial}{\partial x_3}(\phi_1 + \phi_2)\right) - k(\psi, \chi \cdot (v_1 + v_2)) + \\
 &\quad (f, v_1 + v_2) \\
 &= b_0(w, v_1, w) + b_1(w, \phi_1, \psi + E) + U\left(\psi, \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3}\right) - \\
 &\quad k(\psi, \chi \cdot v_1) + (f, v_1) + b_0(w, v_2, w) + b_1(w, \phi_2, \psi + E) \\
 &\quad + U\left(\psi, \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3}\right) - k(\psi, \chi \cdot v_2) + (f, v_2) \\
 &= T(v_1, \phi_1) + T(v_2, \phi_2).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T(\lambda v, \lambda \phi) &= b_0(w, \lambda v, w) + b_1(w, \lambda \phi, \psi + E) + U\left(\psi, \frac{\partial \lambda \phi}{\partial x_3}\right) - \\
 &\quad k(\psi, \chi \cdot \lambda v) + (f, \lambda v) \\
 &= \lambda T(v, \phi).
 \end{aligned}$$

Para mostrar a continuidade estimamos a parte direita, usando as desigualdades (3.10), (3.11), (3.13) e (3.14), junto com a desigualdade de Schwarz. Temos que

$$\begin{aligned}
& \left| b_0(w, v, w) + b_1(w, \phi, \psi + E) + U \left(\psi, \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right) - k(\psi, \chi \cdot v) \right| \\
& \leq |b_0(w, v, w)| + |b_1(w, \phi, \psi)| + |b_1(w, \phi, E)| + U \left| \left(\psi, \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right) \right| + k|(\psi, \chi \cdot v)| \\
& \leq C_0 |\nabla w|^2 |\nabla v| + C_0 |\nabla w| |\nabla \phi| |\nabla \psi| + C |w| |\nabla \phi| + U |\psi| |\nabla \phi| + k |\psi| |v| \\
& \leq C_0 |\nabla w|^2 |\nabla v| + C_0 |\nabla w| |\nabla \phi| |\nabla \psi| + C |w| |\nabla \phi| + U |\psi| |\nabla \phi| + k |\psi| |\nabla v| \\
& = (C_0 |\nabla w|^2 + k |\psi|) |\nabla v| + (C_0 |\nabla w| |\nabla \psi| + C |w| + U |\psi|) |\nabla \phi| \\
& \leq (C_0 |\nabla w|^2 + k |\psi|) \nu |\nabla v|^2 + (C_0 |\nabla w| |\nabla \psi| + C |w| + U |\psi|) \theta |\nabla \phi|^2 \\
& \quad + C_0 |\nabla w|^2 \theta |\nabla \phi|^2 + (C_0 |\nabla \psi| |\nabla w| + C |w|) \nu |\nabla v|^2 \\
& = C_0 |\nabla w|^2 \nu |\nabla v|^2 + (C_0 |\nabla w| |\nabla \psi| + C |w|) \theta |\nabla \phi|^2 + k |\psi| \nu |\nabla v|^2 \\
& \quad + U |\psi| \theta |\nabla \phi|^2 + C_0 |\nabla w|^2 \theta |\nabla \phi|^2 + (C_0 |\nabla \psi| |\nabla w| + C |w|) \nu |\nabla v|^2 \\
& = (C_0 |\nabla w|^2 + C_0 |\nabla \psi| |\nabla w| + C |w|) \nu |\nabla v|^2 + (C_0 |\nabla w|^2 + C_0 |\nabla \psi| |\nabla w| \\
& \quad + C |w|) \theta |\nabla \phi|^2 + (\nu |\nabla v|^2 + \theta |\nabla \phi|^2) k |\psi| \\
& = (C_0 |\nabla w|^2 + C_0 |\nabla \psi| |\nabla w| + C |w|) (\nu |\nabla v|^2 + \theta |\nabla \phi|^2) + (\nu |\nabla v|^2 \\
& \quad + \theta |\nabla \phi|^2) k |\psi| \\
& = (C_0 |\nabla w|^2 + C_0 |\nabla \psi| |\nabla w| + C |w| + k |\psi|) (\nu |\nabla v|^2 + \theta |\nabla \phi|^2).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \left| b_0(w, v, w) + b_1(w, \phi, \psi + E) + U \left(\psi, \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right) - k(\psi, \chi \cdot v) \right| \\
& \leq C (|\nabla w|^2 + |\nabla \psi| |\nabla w| + |w| + |\psi|) \|(v, \phi)\|
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|T(v, \phi)| \leq C (|\nabla w|^2 + |\nabla \psi| |\nabla w| + |w| + |\psi|) \|(v, \phi)\|,$$

e T é contínua para (w, ψ) fixo.

Vemos que $T(v, \phi) \in (V \times B)^*$. Então pelo Teorema 2.1.2 (Teorema de Riez), existe um elemento $A(w, \psi)$ em $V \times B$ tal que

$$\begin{aligned}
[A(w, \psi), (v, \phi)] &= [(w, \psi), (v, \phi)] \\
&= b_0(w, v, w) + b_1(w, \phi, \psi + E) + U \left(\psi, \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right) - k(\psi, \chi \cdot v)
\end{aligned}$$

para qualquer $(v, \phi) \in V \times B$.

Como $f \in H$, a aplicação $\Phi : V \times B \rightarrow (f, v)$, definida por $\Phi(v, \phi) = (f, v)$ onde $(v, \phi) \in V \times B$ define uma forma linear, e usando novamente o Teorema 2.1.2, existe um elemento $F \in V \times B$ tal que

$$[F, (u, \widetilde{m})] = (f, v).$$

Assim, usando o operador não linear A (graça aos termos não lineares) e o elemento F , reescrevemos a equação (3.29) da maneira seguinte

$$\begin{aligned} [(u, \widetilde{m}), (v, \phi)] - b_0(u, v, u) - b_1(u, \phi, \widetilde{m} + E) - U\left(\widetilde{m}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right) - \\ k(\widetilde{m}, \chi \cdot v) - (f, v) = 0 \\ [(u, \widetilde{m}), (v, \phi)] - [A(u, \widetilde{m}), (v, \phi)] - [F, (v, \phi)] = 0 \\ [(u, \widetilde{m}) - A(u, \widetilde{m}) - F, (v, \phi)] = 0. \end{aligned}$$

para todo $(v, \phi) \in V \times B$.

Portanto, nosso problema se resume a encontrar $(u, \widetilde{m}) \in V \times B$ tal que

$$(u, \widetilde{m}) - A(u, \widetilde{m}) - F = 0.$$

Para isso definimos a aplicação

$$\mathcal{I} : V \times B \rightarrow V \times B$$

$$(u, \widetilde{m}) \mapsto \mathcal{I}(u, \widetilde{m}) = A(u, \widetilde{m}) + F.$$

$\mathcal{I}$ é não linear por causa de A .

A aplicação $\mathcal{I}$ é completamente contínuo em $V \times B$. De fato, provar que $\mathcal{I}$ é completamente contínua, significa provar que $\mathcal{I}$ é um operador compacto (graça a que V e B são espaços reflexivos), isto é, usando a Proposição 2.1.1, consideramos uma sequência $(u_n, \widetilde{m}_n) \in V \times B$ tal que $(u_n, \widetilde{m}_n)$ converge fraco a $(u, \widetilde{m})$ e devemos mostrar que $\mathcal{I}(u_{n_k}, \widetilde{m}_{n_k})$ converge a $\mathcal{I}(u, \widetilde{m})$ (para alguma subsequência (u_{n_k}) e $(\widetilde{m}_{n_k})$). Note que

a)

$$\begin{aligned} [\mathcal{I}(u_n, \widetilde{m}_n), (v, \phi)] &= [A(u_n, \widetilde{m}_n) + F, (v, \phi)] \\ &= b_0(u_n, v, u_n) + b_1(u_n, \phi, \widetilde{m}_n + E) + U\left(\widetilde{m}_n, \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right) \\ &\quad - k(\widetilde{m}_n, \chi \cdot v) + (f, v). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} [\mathcal{I}(u, \widetilde{m}), (v, \phi)] &= [A(u, \widetilde{m}) + F, (v, \phi)] \\ &= b_0(u, v, u) + b_1(u, \phi, \widetilde{m} + E) + U\left(\widetilde{m}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right) \\ &\quad - k(\widetilde{m}, \chi \cdot v) + (f, v). \end{aligned}$$

Subtraindo b) de a) obtemos

$$\begin{aligned} [A(u_n, \widetilde{m}_n) - A(u, \widetilde{m}), (v, \phi)] &= b_0(u_n, v, u_n) + b_1(u_n, \phi, \widetilde{m}_n + E) \\ &\quad + U\left(\widetilde{m}_n, \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right) - k(\widetilde{m}_n, \chi \cdot v) - b_0(u, v, u) \\ &\quad - b_1(u, \phi, \widetilde{m} + E) - U\left(\widetilde{m}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right) + k(\widetilde{m}, \chi \cdot v). \end{aligned}$$

Faremos a seguir algumas estimativas na parte direita.

$$\begin{aligned} [A(u_n, \widetilde{m}_n) - A(u, \widetilde{m}), (v, \phi)] &= \left\{ b_0(u_n, v, u_n) - b_0(u, v, u_n) \right. \\ &\quad \left. + b_0(u, v, u_n) - b_0(u, v, u) \right\} + \left\{ b_1(u_n, \phi, \widetilde{m}_n + E) \right. \\ &\quad \left. - b_1(u, \phi, \widetilde{m}_n + E) + b_1(u, \phi, \widetilde{m}_n + E) - b_1(u, \phi, \widetilde{m} + E) \right\} \\ &\quad + U\left(\widetilde{m}_n - \widetilde{m}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right) + k(\widetilde{m} - \widetilde{m}_n, \chi \cdot v). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left| b_0(u_n - u, v, u_n) + b_0(u, v, u_n - u) + b_1(u_n - u, \phi, \widetilde{m}_n + E) + \right. \\ &\quad \left. b_1(u, \phi, \widetilde{m}_n - \widetilde{m}) + U\left(\widetilde{m}_n - \widetilde{m}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right) + k(\widetilde{m} - \widetilde{m}_n, \chi \cdot v) \right| \\ &\leq |b_0(u_n - u, v, u_n)| + |b_0(u, v, u_n - u)| + |b_1(u_n - u, \phi, \widetilde{m}_n + E)| + \\ &\quad |b_1(u, \phi, \widetilde{m}_n - \widetilde{m})| + \left| U\left(\widetilde{m}_n - \widetilde{m}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right) \right| + |k(\widetilde{m} - \widetilde{m}_n, \chi \cdot v)| \\ &\leq C_0 |(u_n - u)|_{L^4} |\nabla v|_{L^2} |u_n|_{L^4} + C_0 |u|_{L^4} |\nabla v|_{L^2} |u_n - u|_{L^2} + \\ &\quad C_0 |(u_n - u)|_{L^4} |\nabla \phi|_{L^2} |\widetilde{m}_n|_{L^4} + C_0 |u_n - u|_{L^2} |\nabla \phi|_{L^2} + \\ &\quad C_0 |u|_{L^4} |\nabla \phi|_{L^2} |\nabla(\widetilde{m}_n - \widetilde{m})|_{L^2} + U |\widetilde{m}_n - \widetilde{m}|_{L^2} |\nabla \phi|_{L^2} + \\ &\quad k |\widetilde{m}_n - \widetilde{m}|_{L^2} |\nabla v|_{L^2} \\ &\leq C_0 |(u_n - u)|_{L^6} |\nabla v|_{L^2} |u_n|_{L^4} + C_0 |u|_{L^4} |\nabla v|_{L^2} |u_n - u|_{L^2} + \\ &\quad C_0 |(u_n - u)|_{L^6} |\nabla \phi|_{L^2} |\widetilde{m}_n|_{L^4} + C_0 |u_n - u|_{L^2} |\nabla \phi|_{L^2} + \\ &\quad C_0 |u|_{L^4} |\nabla \phi|_{L^2} |\nabla(\widetilde{m}_n - \widetilde{m})|_{L^2} + U |\widetilde{m}_n - \widetilde{m}|_{L^2} |\nabla \phi|_{L^2} + \\ &\quad k |\widetilde{m}_n - \widetilde{m}|_{L^2} |\nabla v|_{L^2} \\ &\leq C_0 |\nabla(u_n - u)|_{L^2} |\nabla v|_{L^2} |u_n|_{L^4} + C_0 |u|_{L^4} |\nabla v|_{L^2} |u_n - u|_{L^2} + \\ &\quad C_0 |\nabla(u_n - u)|_{L^2} |\nabla \phi|_{L^2} |\widetilde{m}_n|_{L^4} + C_0 |u_n - u|_{L^2} |\nabla \phi|_{L^2} + \\ &\quad C_0 |u|_{L^4} |\nabla \phi|_{L^2} |\nabla(\widetilde{m}_n - \widetilde{m})|_{L^2} + U |\widetilde{m}_n - \widetilde{m}|_{L^2} |\nabla \phi|_{L^2} + \\ &\quad k |\widetilde{m}_n - \widetilde{m}|_{L^2} |\nabla v|_{L^2} \end{aligned}$$

Como $(u_n, \widetilde{m}_n)$ converge fraco para $(u, \widetilde{m})$, a sequência $(u_n, \widetilde{m}_n)$ é limitada. Usando os resultados de imersão compacta do Teorema 2.2.8, conclui-se que

$$[\mathcal{I}(u_n, \widetilde{m}_n) - \mathcal{I}(u, \widetilde{m}), (v, \phi)] = 0$$

$$\mathcal{I}(u_n, \widetilde{m}_n) \rightarrow \mathcal{I}(u, \widetilde{m})$$

Portanto, o operador $\mathcal{I}$ é um operador compacto.

Mostraremos que as normas de todas as soluções possíveis $(u^\sigma, m^\sigma) \in V \times B$ da equação.

$$(u^\sigma, m^\sigma) - \sigma \{A(u^\sigma, m^\sigma) + F\} = 0 \text{ para qualquer } 0 < \sigma \leq 1, \quad (3.30)$$

são uniformemente limitado. Tomando o produto escalar em $V \times B$ de (3.30) com $(u^\sigma, m^\sigma + E - \alpha) \in V \times B$, obtemos que:

$$\begin{aligned} & [(u^\sigma, m^\sigma), (u^\sigma, m^\sigma + E - \alpha)] = [\sigma(A(u^\sigma, m^\sigma) + F), (u^\sigma, m^\sigma + E - \alpha)] \\ \Leftrightarrow & [(u^\sigma, m^\sigma), (u^\sigma, m^\sigma)] + [(u^\sigma, m^\sigma), (u^\sigma, E)] - [(u^\sigma, m^\sigma), (u^\sigma, \alpha)] = \\ & \sigma \left\{ b_0(u^\sigma, u^\sigma, u^\sigma) + b_1(u^\sigma, m^\sigma + E - \alpha, m^\sigma + E) - k(m^\sigma, \chi \cdot u^\sigma) + \right. \\ & \left. (f, u^\sigma) + U \left(m^\sigma, \frac{\partial}{\partial x_3} (m^\sigma + E - \alpha) \right) \right\} \\ \Leftrightarrow & [(u^\sigma, m^\sigma), (u^\sigma, m^\sigma)] + [(u^\sigma, m^\sigma), (u^\sigma, E)] - [(u^\sigma, m^\sigma), (u^\sigma, \alpha)] = \\ & \sigma \left\{ b_0(u^\sigma, u^\sigma, u^\sigma) + b_1(u^\sigma, m^\sigma + E, m^\sigma + E) - b_1(u^\sigma, \alpha, m^\sigma + E) + \right. \\ & \left. U \left(m^\sigma, \frac{\partial (m^\sigma + E)}{\partial x_3} \right) - U \left(m^\sigma, \frac{\partial \alpha}{\partial x_3} \right) - k(m^\sigma, \chi \cdot u^\sigma) + (f, u^\sigma) \right\} \end{aligned}$$

Usando a definição da forma bilinear em (3.12) e as propriedades em (3.15), tem-se que

$$\begin{aligned} & [(u^\sigma, m^\sigma), (u^\sigma, m^\sigma)] + \theta(\nabla m^\sigma, \nabla E) = \sigma \left\{ U \left(m^\sigma, \frac{\partial (m^\sigma + E)}{\partial x_3} \right) - \right. \\ & \left. k(m^\sigma, \chi \cdot u^\sigma) + (f, u^\sigma) \right\}. \quad (3.31) \end{aligned}$$

Por (3.10), (3.11), e pelo fato de que $0 < \sigma \leq 1$, pode-se deduzir de (3.31) que

$$\begin{aligned} & \nu |\nabla u^\sigma|^2 + \theta |\nabla m^\sigma|^2 = \sigma \left| U \left(m^\sigma, \frac{\partial (m^\sigma + E)}{\partial x_3} \right) - k(m^\sigma, \chi \cdot u^\sigma) + \right. \\ & \left. (f, u^\sigma) - \theta(\nabla m^\sigma, \nabla E) \right| \\ \Leftrightarrow & \nu |\nabla u^\sigma|^2 + \theta |\nabla m^\sigma|^2 \leq UC_\Omega |\nabla m^\sigma|^2 + UC_\Omega |\nabla m^\sigma| |\nabla E| + \theta |\nabla E| |\nabla m^\sigma| + \\ & kC_\Omega^2 |\nabla m^\sigma| |\nabla u^\sigma| + C_\Omega |f| |\nabla u^\sigma| \\ \Leftrightarrow & \nu |\nabla u^\sigma|^2 + \theta |\nabla m^\sigma|^2 \leq UC_\Omega |\nabla m^\sigma|^2 + (UC_\Omega + \theta) |\nabla E| |\nabla m^\sigma| + \\ & kC_\Omega^2 |\nabla m^\sigma| |\nabla u^\sigma| + C_\Omega |f| |\nabla u^\sigma|. \end{aligned}$$

Além disso, de (3.22) sabemos que $0 < \theta - 2UC_\Omega$ e $k = \left(\frac{2\nu U}{C_\Omega^3}\right)^{1/2}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \nu |\nabla u^\sigma|^2 - \frac{\nu}{2} |\nabla u^\sigma|^2 + (\theta - 2UC_\Omega) |\nabla m^\sigma|^2 + UC_\Omega |\nabla m^\sigma|^2 - \\
&\quad kC_\Omega^2 |\nabla m^\sigma| |\nabla u^\sigma| + \frac{\nu}{2} |\nabla u^\sigma|^2 \leq (UC_\Omega + \theta) |\nabla E| |\nabla m^\sigma| + C_\Omega |f| |\nabla u^\sigma| \\
&\Leftrightarrow \frac{\nu}{2} |\nabla u^\sigma|^2 + (\theta - 2UC_\Omega) |\nabla m^\sigma|^2 + UC_\Omega \left(|\nabla m^\sigma|^2 - \frac{kC_\Omega}{U} |\nabla m^\sigma| |\nabla u^\sigma| + \right. \\
&\quad \left. \frac{\nu}{2UC_\Omega} |\nabla u^\sigma|^2 \right) \leq (UC_\Omega + \theta) |\nabla E| |\nabla m^\sigma| + C_\Omega |f| |\nabla u^\sigma| \\
&\Leftrightarrow \frac{\nu}{2} |\nabla u^\sigma|^2 + (\theta - 2UC_\Omega) |\nabla m^\sigma|^2 + UC_\Omega \left\{ \left(|\nabla m^\sigma| - \frac{kC_\Omega}{2U} |\nabla u^\sigma| \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\nu}{2UC_\Omega} - \frac{k^2 C_\Omega^2}{4U^2} \right) |\nabla u^\sigma|^2 \right\} \leq (UC_\Omega + \theta) |\nabla E| |\nabla m^\sigma| + C_\Omega |f| |\nabla u^\sigma|.
\end{aligned}$$

Substituindo o valor de k e $0 < UC_\Omega \left(|\nabla m^\sigma| - \frac{kC_\Omega}{2U} |\nabla u^\sigma| \right)^2$, obtemos

$$\frac{\nu}{2} |\nabla u^\sigma|^2 + (\theta - 2UC_\Omega) |\nabla m^\sigma|^2 \leq (UC_\Omega + \theta) |\nabla E| |\nabla m^\sigma| + C_\Omega |f| |\nabla u^\sigma|.$$

Como $u^\sigma \in V$, $m^\sigma \in B$, $f \in H$ então $|\nabla u^\sigma|$, $|\nabla m^\sigma|$, $|f|$ e $|\nabla E|$ são limitados. Logo a partir desta desigualdade, podemos obter a limitação uniforme de (u^σ, m^σ) em $V \times B$, isto é,

$$\|(u^\sigma, m^\sigma)\| \leq \rho \quad \text{para qualquer } (u^\sigma, m^\sigma) \in V \times B \text{ e } \rho \in \mathbb{R}.$$

Finalmente temos o seguinte:

- a) $\mathcal{I}$ é completamente contínuo em $V \times B$.
- b) As normas de todas as soluções $(u^\sigma, m^\sigma) \in V \times B$ são uniformemente limitado.

Portanto aplicando o Teorema 2.1.3 (O Princípio de Leray-Schawder), encontramos um $(u, \widetilde{m}) \in V \times B$ que satisfaz a equação

$$(u, \widetilde{m}) - A(u, \widetilde{m}) - F = 0.$$

Isso implica a existência de uma solução fraca $(u, \widetilde{m})$ de (3.23)-(3.28) o que mostra a Proposição 3.2.1. ■

Teorema 3.2.1. Sejam U e θ verificando a desigualdade (3.22). Para cada $f \in H$ existem $u_\alpha \in \left(H^2(\Omega)\right)^3 \cap V$, $m_\alpha \in H^2(\Omega)$ e $q_\alpha \in H^1(\Omega)$ satisfazendo o sistema (3.16)-(3.21).

Demonstração. Seja $(u, \widetilde{m})$, a solução fraca do sistema (3.23)-(3.28), obtida pela Proposição 3.2.1. Definimos $u_\alpha = u$ e $m_\alpha = \widetilde{m} + E$. Substituindo u_α , m_α junto com $\phi \equiv 0$ em (3.29) e usando (3.15), vemos que u_α satisfaz a identidade

$$\begin{aligned} & [(u_\alpha, m_\alpha), (v, 0)] - b_0(u_\alpha, v, u_\alpha) - b_1(u_\alpha, 0, m_\alpha) - U \left(m_\alpha - E, \frac{\partial 0}{\partial x_3} \right) + \\ & \quad k(m_\alpha - E, \chi \cdot v) = (f, v) \\ \Leftrightarrow & \nu(\nabla u_\alpha, \nabla v) + b_0(u_\alpha, u_\alpha, v) + k(m_\alpha, \chi \cdot v) - k(E, \chi \cdot v) - (f, v) = 0 \\ \Leftrightarrow & \nu(\nabla u_\alpha, \nabla v) + b_0(u_\alpha, u_\alpha, v) + k(m_\alpha, \chi \cdot v) - \frac{\theta}{U}(\nabla E, v) - (f, v) = 0 \\ \Leftrightarrow & \nu(\nabla u_\alpha, \nabla v) + b_0(u_\alpha, u_\alpha, v) + k(m_\alpha, \chi \cdot v) = (f, v). \end{aligned}$$

para qualquer $v \in V$. Assim, usando o resultados de regularidade Proposição 2.4.2, para $N = 3$, é possível concluir que $u_\alpha \in \left(H^2(\Omega)\right)^3 \cap V$.

Fazendo $v \equiv 0$ em (3.29) temos que

$$\begin{aligned} & [(u_\alpha, m_\alpha), (0, \phi)] - b_0(u_\alpha, 0, u_\alpha) - b_1(u_\alpha, \phi, m_\alpha) - U \left(m_\alpha - E, \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right) + \\ & \quad k(m_\alpha - E, \chi \cdot 0) - (f, 0) = 0 \\ \Leftrightarrow & \theta(\nabla m_\alpha, \nabla \phi) + b_1(u_\alpha, m_\alpha, \phi) - U \left(m_\alpha, \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right) + U \left(E, \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \theta(\nabla m_\alpha, \nabla \phi) + b_1(u_\alpha, m_\alpha, \phi) - U \left(\frac{\partial m_\alpha}{\partial x_3}, \phi \right) - U \int_{\partial\Omega} m_\alpha \phi x_3 dS = 0 \end{aligned}$$

para qualquer $\phi \in H^1(\Omega)$. Então m_α é uma solução generalizada da equação (3.19) verificando (3.21). Aplicando resultados de regularidade Proposição 2.4.2, podemos mostrar que $m_\alpha \in H^2(\Omega)$ e satisfaz a equação (3.21).

Observemos que a existência de q_α , deve-se às equações (3.23) e (3.24), isto é, se $u_\alpha \in \left(H^2(\Omega)\right)^3 \cap V$ e $m_\alpha \in H^2(\Omega)$ tal que

$$\nu((u, v)) + b_0(u, u, v) + k(m_\alpha, \chi \cdot v) = (f, v)$$

é válido para cada $v \in V$, então existe $q_\alpha \in H^1(\Omega)$ de modo que

$$\nabla q_\alpha = \nu \Delta u_\alpha - (u_\alpha \cdot \nabla) u_\alpha - k m_\alpha \chi + f$$

■

3.3 POSITIVIDADE DE CONCENTRAÇÃO

Primeiramente consideramos o problema linear auxiliar

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} - \theta \Delta h + (u_\alpha \cdot \nabla) h + U \frac{\partial h}{\partial x_3} = 0 & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \theta \frac{\partial h}{\partial n} - U n_3 h = 0 & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \\ h(x, 0) = E(x) & x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.32)$$

$$\theta \frac{\partial h}{\partial n} - U n_3 h = 0 \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \quad (3.33)$$

$$h(x, 0) = E(x) \quad x \in \Omega, \quad (3.34)$$

onde $h \in C^1((0, \infty); L^2(\Omega)) \cap C([0, \infty]; H^2(\Omega))$ e $E(x) = C_\alpha \exp\left(\frac{U}{\theta} x_3\right)$ com $\int_{\Omega} E(x) dx = \alpha$.

A existência de uma solução para o problema linear (3.32)-(3.34) pode ser mostrada usando o método de Galerkin, usando a base dada na Observação 4.2.1.

Lema 3.3.1. Para qualquer $t \geq 0$, $\int_{\Omega} h(x, t) dx = \alpha$.

Demonstração. Derivando $\int_{\Omega} h(x, t) dx$ com relação a t e usando a igualdade (3.32), temos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} h(x, t) dx &= \int_{\Omega} \left(\theta \Delta h - U \frac{\partial h}{\partial x_3} \right) dx - \int_{\Omega} (u_\alpha \cdot \nabla) h dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(\theta \frac{\partial h}{\partial n} - U h n_3 \right) ds - \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u_i \frac{\partial h}{\partial x_i} dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(\theta \frac{\partial h}{\partial n} - U h n_3 \right) ds - \sum_{i=1}^3 \left(- \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} h dx + \int_{\partial\Omega} u_i h n_i ds \right) \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(\theta \frac{\partial h}{\partial n} - U h n_3 \right) ds + \int_{\Omega} (\operatorname{div} u) h dx - \sum_{i=1}^3 \int_{\partial\Omega} u_i h n_i ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\int_{\Omega} h(x, t) dx = \int_{\Omega} h(x, 0) dx = \alpha$. ■

Lema 3.3.2. Para qualquer $(x, t) \in \Omega \times [0, \infty)$, $h(x, t) > 0$

Demonstração. Para $t = 0$, têm-se que $h(x, 0) = E(x) > 0$.

Para $t > 0$ argumentamos por contradição, isto é, que $h(x, t) \leq 0$. Então existe um $y \in \overline{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega$ e $T > 0$ tal que

$$h(y, T) = 0 \quad \text{e} \quad h(x, T) > 0 \quad \text{para} \quad (x, t) \in \overline{\Omega} \times [0, T).$$

Sabemos pelo Princípio do Máximo que a solução h de uma desigualdade parabólica tem a propriedade de que sua derivada normal à fronteira não pode desaparecer em um ponto onde o máximo é atingido, então podemos dizer que y está no limite da $\partial\Omega$, e além disso temos que $\frac{\partial h}{\partial n}(y, T) < 0$.

Isto gera uma contradição, já que pela equação (3.33), temos que: $\frac{\partial h}{\partial n}(y, T) = 0$. ■

Teorema 3.3.1. Seja (u_α, m_α) , a solução de sistema (3.16)-(3.21) dada pelo Teorema 3.2.1. Então $m_\alpha(x) > 0$, para qualquer $x \in \Omega$.

Demonstração. Note que $h(x, t) - m_\alpha(x) \in B \cap H^2(\Omega)$ para todo $t > 0$, e satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h - m_\alpha)}{\partial t} - \theta \Delta(h - m_\alpha) + (u_\alpha \cdot \nabla)(h - m_\alpha) + U \frac{\partial(h - m_\alpha)}{\partial x_3} &= 0 \\ \text{em } \Omega \times (0, \infty), \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \theta \frac{\partial(h - m_\alpha)}{\partial n} - U n_3(h - m_\alpha) &= 0 \\ \text{em } \partial\Omega \times [0, \infty). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Então tomando o produto interno de (3.35) com $h - m_\alpha$ temos

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial(h - m_\alpha)}{\partial t} - \theta \Delta(h - m_\alpha) + (u_\alpha \cdot \nabla)(h - m_\alpha) + U \frac{\partial(h - m_\alpha)}{\partial x_3}, h - m_\alpha \right) = \\ &\quad (0, h - m_\alpha) \\ \Leftrightarrow &\left(\frac{\partial(h - m_\alpha)}{\partial t}, h - m_\alpha \right) - \theta (\Delta(h - m_\alpha), h - m_\alpha) + b(u_\alpha, h - m_\alpha, h - m_\alpha) \\ &\quad + \left(U \frac{\partial(h - m_\alpha)}{\partial x_3}, h - m_\alpha \right) = 0. \end{aligned}$$

Por (3.15) temos que $b_1(u_\alpha, h - m_\alpha, h - m_\alpha) = 0$. Integrando por partes e usando (3.36) obtemos que:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow &\frac{d}{dt} |h - m_\alpha|^2 - 2(\theta \Delta(h - m_\alpha), h - m_\alpha) + 2 \left(U \frac{\partial(h - m_\alpha)}{\partial x_3}, h - m_\alpha \right) = 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{d}{dt} |h - m_\alpha|^2 + 2\theta |\nabla(h - m_\alpha)|^2 - 2\theta \int_{\partial\Omega} (h - m_\alpha) \frac{\partial(h - m_\alpha)}{\partial n} dS - \\ &2U \int_{\Omega} (h - m_\alpha) \left(\frac{\partial(h - m_\alpha)}{\partial x_3} \right) dx + 2U \int_{\partial\Omega} n_3(h - m_\alpha)(h - m_\alpha) dS = 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{d}{dt} |h - m_\alpha|^2 + 2\theta |\nabla(h - m_\alpha)|^2 - 2U \int_{\Omega} (h - m_\alpha) \left(\frac{\partial(h - m_\alpha)}{\partial x_3} \right) dx - \\ &\int_{\partial\Omega} \left(2\theta \frac{\partial(h - m_\alpha)}{\partial n} - 2U n_3(h - m_\alpha) \right) (h - m_\alpha) dS = 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{d}{dt} |h - m_\alpha|^2 + 2\theta |\nabla(h - m_\alpha)|^2 - 2U \left(h - m_\alpha, \frac{\partial(h - m_\alpha)}{\partial x_3} \right) = 0. \end{aligned}$$

Logo, pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e (3.11), têm-se que:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{d}{dt} |h - m_\alpha|^2 + 2\theta |\nabla (h - m_\alpha)|^2 = 2U \left(h - m_\alpha, \frac{\partial (h - m_\alpha)}{\partial x_3} \right) \\
&\Leftrightarrow \frac{d}{dt} |h - m_\alpha|^2 + 2\theta |\nabla (h - m_\alpha)|^2 \leq 2U |(h - m_\alpha)| |\nabla (h - m_\alpha)| \\
&\Leftrightarrow \frac{d}{dt} |h - m_\alpha|^2 + 2\theta |(h - m_\alpha)|^2 - 2U |(h - m_\alpha)| |\nabla (h - m_\alpha)| \leq \\
&\quad \frac{d}{dt} |h - m_\alpha|^2 + 2\theta |\nabla (h - m_\alpha)|^2 - \frac{2U}{C_\Omega^2} |(h - m_\alpha)|^2 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{d}{dt} |h - m_\alpha|^2 + \frac{2\theta}{C_\Omega^2} |(h - m_\alpha)|^2 - \frac{2U}{C_\Omega^2} |(h - m_\alpha)|^2 \leq \\
&\quad \frac{d}{dt} |h - m_\alpha|^2 + 2\theta |(h - m_\alpha)|^2 - \frac{2U}{C_\Omega^2} |(h - m_\alpha)|^2 \leq 0
\end{aligned}$$

De (3.22) torna-se que $C \equiv 2C_\Omega^{-2} (\theta - UC_\Omega) > 0$ de modo que

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{d}{dt} |h - m_\alpha|^2 + \left(\frac{2\theta}{C_\Omega^2} - \frac{2U}{C_\Omega} \right) |(h - m_\alpha)|^2 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{d}{dt} \right) |h - m_\alpha|^2 + C |h - m_\alpha|^2 \leq 0. \\
&\Leftrightarrow \frac{du}{dt} \leq -Cu, \quad \text{onde } u = |h(x, t) - m_\alpha|^2 > 0 \\
&\Leftrightarrow \int_0^t \frac{u_s}{u} dt \leq - \int_0^t C dt \\
&\Leftrightarrow \ln |u(t)| - \ln |u(0)| \leq -Ct \\
&\Leftrightarrow u(x, t) \leq u(0) e^{-Ct}
\end{aligned}$$

Como a constante $C > 0$, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |h(x, t) - m_\alpha|^2 = 0$$

Disto segue que $|h - m_\alpha|$ tende a zero em $L^2(\Omega)$, quando $t \rightarrow \infty$.

Como $h(x, t) > 0$ para $(x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$ pelo Lema 3.3.2 vemos que

$$m_\alpha(x) \geq 0 \quad \text{para } x \in \Omega.$$

Agora, assumimos que $m_\alpha(y) = 0$ para algum $y \in \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, então pelo Princípio do Máximo sabemos m_α assume um máximo em um ponto de $\partial\Omega$, de modo que

$$y \in \partial\Omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial m_\alpha}{\partial n}(y) < 0.$$

Por outro lado, da equação (3.21), isto é,

$$\left(\frac{\partial m_\alpha}{\partial n} \right)(y) = \left(\frac{U}{\theta} \right) n_3(y) m_\alpha(y) = 0, \quad \text{para } y \in \partial\Omega$$

o qual nos leva a uma contradição. Assim fica provado o teorema. ■

4 O PROBLEMA NÃO ESTACIONÁRIO E O OPERADOR AUTOADJUNTO

$$P_1(-\theta\Delta)$$

Neste capítulo formulamos o problema de decaimento para as equações que governam a perturbação da solução estacionária cuja concentração total é igual à dos dados iniciais e definimos uma solução global fraca para este problema usando o Método de Galerkin. Concluimos mostrando que o operador $P_1(-\theta\Delta)$ é auto-adjunto.

4.1 REDUÇÃO A UM PROBLEMA DE DECAIMENTO

Consideremos o problema dado no capítulo anterior

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla q = -km\chi + f & x \in \Omega, t > 0, \quad (3.4) \\ \operatorname{div} u = 0 & x \in \Omega, t > 0, \quad (3.5) \\ \frac{\partial m}{\partial t} - \theta \Delta m + (u \cdot \nabla) m + U \frac{\partial m}{\partial x_3} = 0 & x \in \Omega, t > 0, \quad (3.6) \end{array} \right.$$

junto com as seguintes condições iniciais e de contorno

$$u(x, 0) = u_0(x, 0), \quad m(x, 0) = m_0(x) \quad x \in \Omega, \quad (3.7)$$

$$u(x, t) = 0 \quad x \in \partial\Omega, t > 0, \quad (3.8)$$

$$\theta \frac{\partial m}{\partial n} - U n_3(x) m = 0 \quad x \in \partial\Omega, t > 0, \quad (3.9)$$

e com valor de concentração inicial m_0 tal que $\int_{\Omega} m_0 dx = \alpha$, $\alpha > 0$.

Sejam u_α , p_α e m_α a solução do problema estacionário

$$\int_{\Omega} m dx = \alpha. \quad (3.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla q = -km\chi + f & \text{em } \Omega, \quad (3.17) \end{array} \right.$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (3.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\theta \Delta m + (u \cdot \nabla) m + U \frac{\partial m}{\partial x_3} = 0 & \text{em } \Omega, \quad (3.19) \end{array} \right.$$

$$u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \quad (3.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta \frac{\partial m}{\partial n} - U n_3 m = 0 & \text{na } \partial\Omega, \quad (3.21) \end{array} \right.$$

obtido no Teorema 3.2.1. Pelo mesmo argumento do Lema 3.3.1, podemos mostrar que se houver uma solução uniforme de (3.4)-(3.9), sua concentração m satisfaz $\int_{\Omega} m(x, t) dx = \alpha$,

para qualquer $t \geq 0$. A partir de essa observação nos leva ao seguinte problema.

Definamos $v = u - u_\alpha$ e $\mu = m - m_\alpha$, e substituído nas equações (3.4) e (3.6), isto é,

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t}(v + u_\alpha) - \nu \Delta(v + u_\alpha) + ((v + u_\alpha) \cdot \nabla)(v + u_\alpha) + \nabla q = -k(\mu + m_\alpha)\chi + f \\
 \Leftrightarrow & \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} - \nu \Delta v - \nu \Delta u_\alpha + ((v + u_\alpha) \cdot \nabla)v + ((v + u_\alpha) \cdot \nabla)u_\alpha + \\
 & \nabla(q - p_\alpha) + \nabla p_\alpha = -k(\mu + m_\alpha)\chi + f \\
 \Leftrightarrow & \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p_\alpha + (u_\alpha \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)u_\alpha + (u_\alpha \cdot \nabla)u_\alpha + \\
 & \nabla(q - p_\alpha) = -k(\mu + m_\alpha)\chi + f \\
 \Leftrightarrow & \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (u_\alpha \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)u_\alpha + (v \cdot \nabla)v + \nabla(q - p_\alpha) = -k\mu\chi
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t}(\mu - m_\alpha) - \theta \Delta(\mu - m_\alpha) + ((v + u_\alpha) \cdot \nabla)(\mu - m_\alpha) + U \frac{\partial}{\partial x_3}(\mu - m_\alpha) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{\partial \mu}{\partial t} - \theta \Delta \mu + (v \cdot \nabla)\mu + (u_\alpha \cdot \nabla)\mu + (v \cdot \nabla)m_\alpha + U \frac{\partial \mu}{\partial x_3} + \frac{\partial m_\alpha}{\partial t} - \\
 & \theta \Delta m_\alpha - (u \cdot \nabla)m_\alpha + U \frac{\partial m_\alpha}{\partial x_3} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{\partial \mu}{\partial t} - \theta \Delta \mu + (v \cdot \nabla)\mu + (u_\alpha \cdot \nabla)\mu + (v \cdot \nabla)m_\alpha + U \frac{\partial \mu}{\partial x_3} = 0
 \end{aligned}$$

Portanto, consideremos as equações que governam as perturbações de (u_α, m_α) :

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (u_\alpha \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)u_\alpha + (v \cdot \nabla)v + \nabla(q - p_\alpha) = -k\mu\chi, & (4.1) \\
 & \operatorname{div} v = 0, & (4.2) \\
 & \frac{\partial \mu}{\partial t} - \theta \Delta \mu + (u_\alpha \cdot \nabla)\mu + (v \cdot \nabla)m_\alpha + (v \cdot \nabla)\mu + U \frac{\partial \mu}{\partial x_3} = 0, & (4.3) \\
 & v = 0, & (4.4) \\
 & \theta \frac{\partial \mu}{\partial n} - U n_3 \mu = 0, & (4.5) \\
 & v(x, 0) = a(x), \quad \mu(x, 0) = b(x), \quad x \in \Omega, & (4.6)
 \end{aligned} \right.$$

onde $(a, b) \in H \times X$. As equações (4.1)-(4.3) são definidas em $\Omega \times (0, T)$, e as equações (4.4)-(4.5) definidas na $\partial\Omega \times (0, T)$.

Definição 4.1.1. Dizemos que (v, μ) é uma solução fraca de (4.1)-(4.6) se as seguintes condições são satisfeitas:

$$\text{i) } v \in L^2(0, \infty; V) \cap L^\infty(0, \infty; H), \quad \mu \in L^2(0, \infty; B) \cap L^\infty(0, \infty; X).$$

ii) A identidade

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^\infty \{(v(t), w'(t)) + (\mu(t), \phi'(t))\} dt + \int_0^\infty [(v(t), \mu(t)), (w(t), \\
 & \quad \phi(t))] dt + \int_0^\infty \left\{ b_0(u_\alpha, v(\tau), w(\tau)) + b_0(v(\tau), u_\alpha, w(\tau)) + \right. \\
 & \quad b_0(v(\tau), v(\tau), w(\tau)) + b_1(u_\alpha, \mu(\tau), \phi(\tau)) + b_1(v(\tau), \mu(\tau), \\
 & \quad \phi(\tau)) + b_1(v(\tau), m_\alpha, \phi(\tau)) + k(\mu(\tau), \chi \cdot w(\tau)) - \\
 & \quad \left. U\left(\mu(\tau), \frac{\partial \phi(\tau)}{\partial x_3}\right) \right\} d\tau = (w(0), a) + (\phi(0), b), \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

é válida para qualquer $(w, \phi) \in L^2(0, \infty; V \times B) \cap H^1(0, \infty; H \times X)$

iii) A desigualdade de Energia

$$\begin{aligned}
 & |v(t)|^2 + |\mu(t)|^2 + 2 \int_0^t \|v(\tau), \mu(\tau)\|^2 d\tau + 2 \int_0^t \left\{ b_0(v(\tau), u_\alpha, \right. \\
 & \quad v(\tau)) + b_1(v(\tau), m_\alpha, \mu(\tau)) + k(\mu(\tau), \chi \cdot v(\tau)) - \\
 & \quad \left. U\left(\mu(\tau), \frac{\partial \mu(\tau)}{\partial x_3}\right) \right\} d\tau \leq |a|^2 + |b|^2, \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

vale para quase todo $t > 0$.

Teorema 4.1.1. Seja (u_α, m_α) a solução do problema (3.17)-(3.21). Se $|\nabla u_\alpha|$ e $|\nabla m_\alpha|$ são suficientemente pequeno de modo que

$$|\nabla m_\alpha| < 2 \frac{\theta - 2UC_\Omega}{C_0}, \quad 2|\nabla u_\alpha| + |\nabla m_\alpha| < \frac{\nu}{C_0}, \quad (4.9)$$

onde C_0 é a constante de (3.13)-(3.14), então dado $(a, b) \in H \times X$ arbitrários, existe uma solução fraca (v, μ) de problema (4.1)-(4.6).

Demonstração. O argumento usado na prova é a aproximação usual de Galerkin.

Assuma por enquanto que existe uma base ortonormal completa $\{(w_j, \phi_j)\}_{j=1}^\infty$ em $H \times X$ tal que $w_j \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ e $\phi_j \in C^\infty(\overline{\Omega}) \cap X$, e verificam a equação

$$\theta \frac{\partial \phi_j}{\partial n} - Un_3 \phi_j = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \quad j = 1, 2, \dots$$

A existência desta base será mostrada na Seção 4.2, veja Observação 4.2.1.

Dado um inteiro $l \geq 1$ definimos as soluções aproximadas de (4.1) e (4.3) da seguinte maneira:

$$(v_l, \mu_l) = \sum_{j=1}^l h_{jl}(w_j, \phi_j),$$

ou seja, $v_l = \sum_{j=1}^l h_{jl}(t)w_j$ e $\mu_l = \sum_{j=1}^l h_{jl}(t)\phi_j$. Tomando o produto interno com w_j e substituindo v por v_l na equação (4.1) obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v_l}{\partial t}, w_j \right) &= -\nu((v_l, w_j)) - b_0(u_\alpha, v_l, w_j) - b_0(v_l, u_\alpha, w_j) - \\ &\quad b_0(v_l, v_l, w_j) - (k\mu_l \cdot \chi, w_j) \\ &= -\nu(\nabla v_l, \nabla w_j) - b_0(u_\alpha, v_l, w_j) - b_0(v_l, u_\alpha, w_j) - \\ &\quad b_0(v_l, v_l, w_j) - k(\mu_l \cdot \chi, w_j). \end{aligned}$$

Fazemos o mesmo com equação (4.3) tomando o produto interno com ϕ_j e substituindo μ por μ_l

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mu_l}{\partial t}, \phi_j \right) &= -\theta((\mu_l, \phi_j)) - b_1(u_\alpha, \mu_l, \phi_j) - b_1(v_l, m_\alpha, \phi_j) - b_1(v_l, \mu_l, \phi_j) - \\ &\quad \left(U \frac{\partial \mu_l}{\partial x_3}, \phi_j \right) \\ &= -\theta(\nabla \mu_l, \nabla \phi_j) - b_1(u_\alpha, \mu_l, \phi_j) - b_1(v_l, m_\alpha, \phi_j) - b_1(v_l, \mu_l, \phi_j) - \\ &\quad U \left(\frac{\partial \mu_l}{\partial x_3}, \phi_j \right). \end{aligned}$$

Somando os resultados acima obtemos um sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ (v_l, w_j) + (\mu_l, \phi_j) \right\} &= -[(v_l, \mu_l), (w_j, \phi_j)] - \\ &\quad b_0(u_\alpha, v_l, w_j) - b_0(v_l, u_\alpha, w_j) - b_0(v_l, v_l, w_j) - \\ &\quad b_1(u_\alpha, \mu_l, \phi_j) - b_1(v_l, m_\alpha, \phi_j) - b_1(v_l, \mu_l, \phi_j) - \\ &\quad k(\mu_l, \chi \cdot w_j) + U \left(\mu_l, \frac{\partial \phi_j}{\partial x_3} \right), \end{aligned} \quad (4.10)$$

com condições iniciais

$$h_{j,l}(0) = (a, w_j) + (b, \phi_j) \quad j = 1, \dots, l. \quad (4.11)$$

A existência de uma solução local para o problema de Cauchy (4.10)-(4.11) é dada pelo Teorema da existência de Peano.

Multiplicando ambos resultados por $h_{jl}(t)$ e aplicando somatória em j tem-se que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^l \frac{d}{dt} (v_l, w_j) h_{jl}(t) &= \sum_{j=1}^l \left\{ -\nu(\nabla v_l, \nabla w_j) h_{jl}(t) - b_0(u_\alpha, v_l, w_j) h_{jl}(t) - \right. \\ &\quad b_0(v_l, u_\alpha, w_j) h_{jl}(t) - b_0(v_l, v_l, w_j) h_{jl}(t) - \\ &\quad \left. k(\mu_l \cdot \chi, w_j) h_{jl}(t) \right\} \\ \frac{d}{dt} (v_l, v_l) &= -\nu(\nabla v_l, \nabla v_l) - b_0(u_\alpha, v_l, v_l) - b_0(v_l, u_\alpha, v_l) - \\ &\quad b_0(v_l, v_l, v_l) - k(\mu_l \cdot \chi, v_l) \\ \frac{d}{dt} |v_l|^2 &= 2 \left(-\nu |v_l|^2 - b_0(v_l, u_\alpha, v_l) - k(\mu_l, \chi \cdot v_l) \right), \\ \sum_{j=1}^l \frac{d}{dt} (\mu_l, \phi_j) h_{jl}(t) &= \sum_{j=1}^l \left\{ -\theta(\nabla \mu_l, \nabla \phi_j) h_{jl}(t) - b_1(u_\alpha, \mu_l, \phi_j) h_{jl}(t) - \right. \\ &\quad b_1(v_l, m_\alpha, \phi_j) h_{jl}(t) - b_1(v_l, \mu_l, \phi_j) h_{jl}(t) - \\ &\quad \left. U \left(\frac{\partial \mu_l}{\partial x_3}, \phi_j \right) h_{jl}(t) \right\} \\ \frac{d}{dt} (\mu_l, \mu_l) &= -\theta(\nabla \mu_l, \nabla \mu_l) - b_1(u_\alpha, \mu_l, \mu_l) - b_1(v_l, m_\alpha, \mu_l) - \\ &\quad b_1(v_l, \mu_l, \mu_l) - U \left(\frac{\partial \mu_l}{\partial x_3}, \mu_l \right) \\ \frac{d}{dt} |\mu_l|^2 &= 2 \left(-\theta |\nabla \mu_l|^2 - b_1(v_l, m_\alpha, \mu_l) - U \left(\frac{\partial \mu_l}{\partial x_3}, \mu_l \right) \right). \end{aligned}$$

Somando obtemos o seguinte

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (|v_l|^2 + |\mu_l|^2) + 2(\nu |\nabla v_l|^2 + \theta |\nabla \mu_l|^2) &= 2 \left\{ -b_0(v_l, u_\alpha, v_l) - \right. \\ &\quad \left. b_1(v_l, m_\alpha, \mu_l) - k(\mu_l, \chi \cdot v_l) - U \left(\mu_l, \frac{\partial \mu_l}{\partial x_3} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Estimando a parte direita, usando (3.13)-(3.14), (3.10)-(3.11) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, tem se

$$\begin{aligned} \left| -b_0(v_l, u_\alpha, v_l) - b_1(v_l, m_\alpha, \mu_l) - k(\mu_l, \chi \cdot v_l) - U \left(\mu_l, \frac{\partial \mu_l}{\partial x_3} \right) \right| &\leq \\ C_0 |\nabla u_\alpha| |\nabla v_l|^2 + C_0 |\nabla m_\alpha| |\nabla v_l| |\nabla \mu_l| + k C_\Omega^2 |\nabla \mu_l| |\nabla v_l| + U C_\Omega |\nabla \mu_l|^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (|v_l|^2 + |\mu_l|^2) + 2(\nu |\nabla v_l|^2 + \theta |\nabla \mu_l|^2) &\leq 2 \left\{ C_0 |\nabla u_\alpha| |\nabla v_l|^2 + \right. \\ &\quad \left. C_0 |\nabla m_\alpha| |\nabla v_l| |\nabla \mu_l| + k C_\Omega^2 |\nabla \mu_l| |\nabla v_l| + U C_\Omega |\nabla \mu_l|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Logo, pela definição de k , (3.22), (4.9) e a propriedade $2xy \leq x^2 + y^2$ onde $x, y \in \mathbb{R}$, segue-se que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(|v_l|^2 + |\mu_l|^2) + \left(2\nu |\nabla v_l|^2 + 2\theta |\nabla \mu_l|^2 - 2C_0 |\nabla u_\alpha| |\nabla v_l|^2 - \right. \\ & \quad \left. 2C_0 |\nabla m_\alpha| |\nabla v_l| |\nabla \mu_l| - 2kC_\Omega^2 |\nabla \mu_l| |\nabla v_l| - 2UC_\Omega |\nabla \mu_l|^2 \right) \leq 0 \\ & \frac{d}{dt}(|v_l|^2 + |\mu_l|^2) + \left((2\nu - 2C_0 |\nabla u_\alpha|) |\nabla v_l|^2 - 2(C_0 |\nabla m_\alpha| + kC_\Omega^2) |\nabla v_l| |\nabla \mu_l| \right. \\ & \quad \left. + (2\theta - 2UC_\Omega) |\nabla \mu_l|^2 \right) \leq 0 \\ & \frac{d}{dt}(|v_l|^2 + |\mu_l|^2) + \left((2\nu - 2C_0 |\nabla u_\alpha| - C_0 |\nabla m_\alpha| - kC_\Omega^2) |\nabla v_l|^2 + \right. \\ & \quad \left. (2\theta - 2UC_\Omega - C_0 |\nabla m_\alpha| - kC_\Omega^2) |\nabla \mu_l|^2 \right) \leq 0 \\ & \frac{d}{dt}(|v_l|^2 + |\mu_l|^2) + \left(\frac{\nu - C_0(2|\mu_l| + |\nabla m_\alpha|)}{\nu} \right) \nu |\nabla v_l|^2 + \left(\frac{\nu - kC_\Omega^2}{\nu} \right) \nu |\nabla v_l|^2 + \\ & \quad \left(\frac{2\theta - (4UC_\Omega + C_0 |\nabla m_\alpha|)}{\theta} \right) \theta |\nabla \mu_l|^2 + \left(\frac{2UC_\Omega - kC_\Omega^2}{\theta} \right) \theta |\nabla \mu_l|^2 \leq 0 \\ & \frac{d}{dt}(|v_l|^2 + |\mu_l|^2) + \left(\frac{\nu - C_0(2|\mu_l| + |\nabla m_\alpha|)}{\nu} \right) \nu |\nabla v_l|^2 + \left(1 - \frac{kC_\Omega^2}{\nu} \right) \nu |\nabla v_l|^2 + \\ & \quad \left(\frac{2\theta - (4UC_\Omega + C_0 |\nabla m_\alpha|)}{\theta} \right) \theta |\nabla \mu_l|^2 + \left(1 - \frac{kC_\Omega^2}{\theta} \right) \theta |\nabla \mu_l|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Como $\left(1 - \frac{kC_\Omega^2}{\theta}\right) > 0$ e $\left(1 - \frac{kC_\Omega^2}{\nu}\right) > 0$, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(|v_l|^2 + |\mu_l|^2) + \left(\frac{\nu - C_0(2|\mu_l| + |\nabla m_\alpha|)}{\nu} \right) \nu |\nabla v_l|^2 + \\ & \quad \left(\frac{2\theta - (4UC_\Omega + C_0 |\nabla m_\alpha|)}{\theta} \right) \theta |\nabla \mu_l|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Tomando

$$C = \min \left\{ 1 - \frac{C_0}{\nu} (2|\nabla u_\alpha| + |\nabla m_\alpha|), 2 - \frac{1}{\theta} (4UC_\Omega + C_0 |\nabla m_\alpha|) \right\} > 0.$$

Obtemos que

$$\frac{d}{dt} (|v_l|^2 + |\mu_l|^2) + C \|(v_l, \mu_l)\|^2 \leq 0. \quad (4.12)$$

Integrando de 0 ate t e substituindo os valores $v(x, 0) = a(x)$, $\mu(x, 0) = b(x)$, obtemos que:

$$\int_0^t \frac{d}{ds} (|v_l(s)|^2 + |\mu_l(s)|^2) ds + C \int_0^t \|(v_l(s), \mu_l(s))\|^2 ds \leq 0$$

$$\begin{aligned}
& \left(|v_l(t)|^2 + |\mu_l(t)|^2 \right) - \left(|v_l(0)|^2 + |\mu_l(0)|^2 \right) + C \int_0^t \|(v_l(s), \mu_l(s))\|^2 ds \leq 0 \\
& |v_l(t)|^2 + |\mu_l(t)|^2 + C \int_0^t \|(v_l(s), \mu_l(s))\|^2 ds \leq |a|^2 + |b|^2, \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Essa estimativa nos permite dizer que:

i) Para a norma $\|\cdot\|_{H \times X}$ temos que

$$\sup_{t \in [0, \infty]} \left\{ |v_l(t)|^2 + |\mu_l(t)|^2 \right\} \leq |a|^2 + |b|^2$$

Portanto: a sequência (v_l, μ_l) permanece em um conjunto limitado de $L^\infty(0, \infty; H \times X)$

ii) Para a norma $\|\cdot\|_{V \times B}$ temos que:

$$\sup_{t \in [0, \infty]} \left\{ \|(v_l(t), \mu_l(t))\|^2 \right\} \leq |a|^2 + |b|^2$$

Portanto: a sequência (v_l, μ_l) permanece em um conjunto limitado de $L^\infty(0, \infty; V \times B)$

Por outro lado de

$$C \int_0^t \|(v_l(s), \mu_l(s))\|^2 ds \leq |a|^2 + |b|^2, \quad (4.14)$$

quando $t \rightarrow \infty$ temos que: a sequência (v_l, μ_l) permanece em um conjunto limitado de $L^2(0, \infty; H \times X)$.

De item i) e ii) concluímos que

$$(v_l(t), \mu_l(t)) \in L^2(0, \infty; V \times B) \cap L^\infty(0, \infty; H \times X) \quad (4.15)$$

sempre e quando $(v_l(t), \mu_l(t))$ estejam definidos e $l = 1, 2, \dots$

De equação (4.15) temos que a sequência $\{(v_l, \mu_l)\}_{l=1}^\infty$ forma uma sequência limitada em $L^2(0, \infty; V \times B) \cap L^\infty(0, \infty; H \times X)$. Então pelo Teorema 2.1.4 nos permite afirmar a existência de um elemento $(v, \mu) \in L^2_{loc}(0, \infty; V \times B) \cap L^\infty(0, \infty; H \times X)$ e uma subsequência $\{(v_{l_h}, \mu_{l_h})\}_{h=1}^\infty$ tal que

$$\begin{aligned}
(v_{l_h}, \mu_{l_h}) & \rightarrow (v, \mu) \text{ na topologia fraca de } L^2(0, T; V \times B) \text{ e} \\
& \text{na topologia fraca estrela de } L^\infty(0, T; H \times x); \quad (4.16) \\
(v_{l_h}, \mu_{l_h}) & \rightarrow (v, \mu) \text{ em } L^2(0, T; H \times X) \text{ fortemente.}
\end{aligned}$$

Além disso, (v, μ) satisfaz a desigualdade de energia (4.8). Em efeito: substituindo $v = v_l$, $\mu = \mu_l$ nas equações (4.1)-(4.6) e tomamos produto interno com v_l e μ_l obtemos o seguinte

a)

$$\frac{d}{dt} |v_l|^2 + \nu((v_l, v_l)) + b_0(v_l, u_\alpha, v_l) + (k\mu_l \cdot \chi, v_l) = 0$$

b)

$$\frac{d}{dt} |\mu_l|^2 + \theta((\mu_l, \mu_l)) + b_1(v, m_\alpha, \mu_l) + U\left(\frac{\partial \mu_l}{\partial x_3}, \mu_l\right) = 0$$

Somando ambos resultados de acima tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left\{ |v_l|^2 + |\mu_l|^2 \right\} + 2 \|(v_l, \mu_l)\|^2 + \\ & 2 \left\{ b_0(v_l, u_\alpha, v_l) + (k\mu_l, v_l \cdot \chi) + b_1(v, m_\alpha, \mu_l) + U\left(\frac{\partial \mu_l}{\partial x_3}, \mu_l\right) \right\} = 0 \end{aligned}$$

integrando de 0 ate t obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^t \frac{d}{dt} \left\{ |v_l(s)|^2 + |\mu_l(s)|^2 \right\} dt + 2 \int_0^t \|(v_l(s), \mu_l(s))\|^2 ds + 2 \int_0^t \left\{ b_0(v_l(s), u_\alpha(s), v_l(s)) + \right. \\ & \left. (k\mu_l(s), v_l(s) \cdot \chi) + b_1(v_l(s), m_\alpha(s), \mu_l(s)) + U\left(\frac{\partial \mu_l}{\partial x_3}, \mu_l(s)\right) \right\} dt = 0 \\ \Leftrightarrow & |v_t(s)|^2 + |\mu_l(t)|^2 + 2 \int_0^t \|(v_l(s), \mu_l(s))\|^2 ds + 2 \int_0^t \left\{ b_0(v_l(s), u_\alpha(s), v_l(s)) + \right. \\ & \left. (k\mu_l(s), v_l(s) \cdot \chi) + b_1(v_l(s), m_\alpha(s), \mu_l(s)) + U\left(\frac{\partial \mu_l}{\partial x_3}, \mu_l(s)\right) \right\} ds = |a|^2 + |b|^2. \end{aligned}$$

Multiplicando esta igualdade por $\Psi(t) \in D((0, \infty))$ e integrando 0 ate ∞ obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left\{ |v_l(t)|^2 + |\mu_l(t)|^2 + 2 \int_0^t \|(v_l(s), \mu_l(s))\|^2 ds + 2 \int_0^t \left\{ b_0(v_l(s), u_\alpha(s), v_l(s)) + \right. \right. \\ & \left. \left. (k\mu_l(s), v_l(s) \cdot \chi) + b_1(v_l(s), m_\alpha(s), \mu_l(s)) + U\left(\frac{\partial \mu_l}{\partial x_3}, \mu_l(s)\right) \right\} ds \right\} \Psi(t) dt = \\ & \int_0^\infty (|a|^2 + |b|^2) \Psi(t) dt, \end{aligned}$$

de (4.16): $(v_{l_h}, \mu_{l_h}) \rightharpoonup (v, \mu)$ em $L^2(0, T; V \times B)$, então pela Proposição 2.1.2 obtém-se

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left\{ |v(t)|^2 + |\mu(t)|^2 + 2 \int_0^t \|(v(s), \mu(s))\|^2 ds + 2 \int_0^t \left\{ b_0(v(s), u_\alpha(s), v(s)) + \right. \right. \\ & \left. \left. (k\mu(s), v(s) \cdot \chi) + b_1(v(s), m_\alpha(s), \mu(s)) + U\left(\frac{\partial \mu}{\partial x_3}, \mu(s)\right) \right\} ds \right\} \Psi(t) dt \leq \\ & \int_0^\infty (|a|^2 + |b|^2) \Psi(t) dt. \end{aligned}$$

Logo temos que para todo $\Psi(t) \in D((0, \infty))$ e $\Psi \geq 0$ a desigualdade de energia

$$\begin{aligned} & |v(t)|^2 + |\mu(t)|^2 + 2 \int_0^t \|(v(\tau), \mu(\tau))\|^2 d\tau + 2 \int_0^t \left\{ b_0(v(\tau), u_\alpha, v(\tau)) + \right. \\ & \left. b_1(v(\tau), m_\alpha, \mu(\tau)) + k(\mu(\tau), \chi \cdot v(\tau)) - U\left(\mu(\tau), \frac{\partial \mu(\tau)}{\partial x_3}\right) \right\} d\tau \leq |a|^2 + |b|^2, \end{aligned}$$

para quase todo $t > 0$.

Finalmente, fazendo que $h \rightarrow \infty$ em (4.13) com l substituído por l_h , vemos que $(v, \mu) \in L^2(0, \infty; V \times B)$. Portanto (v, μ) é nossa solução fraca desejada. ■

4.2 O AUTO-ADJUNTO DO OPERADOR $P_1(-\theta\Delta)$

Sejam X o subespaço fechado de $L^2(\Omega)$ formado pelas funções ortogonais às constantes, $P_1 : L^2(\Omega) \rightarrow X$ a projeção ortogonal e A_1 a extensão de Friedrichs do operador simétrico $P_1(-\theta\Delta)$ definido para $\phi \in X \cap H^2(\Omega)$ verificando

$$\theta \frac{\partial \phi}{\partial n_3} - U n_3 \phi = 0 \quad \text{em } \partial\Omega.$$

Proposição 4.2.1. O operador A_1 definido em X com domínio

$$D(A_1) \equiv \left\{ \psi \in H^2(\Omega) \cap X : \theta \frac{\partial \psi}{\partial n} - U n_3 \psi = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \right\}$$

é um operador monótono, isto é, $(A_1\phi, \phi) \geq 0$ para $\phi \in D(A_1)$.

Demonstração. Seja $\phi \in D(A_1)$. Pelo Teorema da divergência

$$(A_1\phi, \phi) = \theta |\nabla \phi|^2 - 2U \int_{\Omega} \phi(x) \frac{\partial}{\partial x_3} \phi(x) dx.$$

De (3.11) temos

$$\left(\phi, \frac{\partial}{\partial x_3} \phi \right) \leq |\phi| |\nabla \phi| \leq C_{\Omega} |\nabla \phi|^2,$$

e de (3.22)

$$(A_1\phi, \phi) \geq (\theta - 2UC_{\Omega}) |\nabla \phi(x)|^2 \geq 0.$$

Portanto temos a positividade de A . ■

Proposição 4.2.2. O operador A_1 é auto-adjunto.

Demonstração. Mostramos primeiro que $D(A_1) = D(A_1^*)$.

Para mostrar que $D(A_1) \subset D(A_1^*)$, seja $\psi \in D(A_1)$. Então,

$$\begin{aligned} (\psi, A_1\phi) &= - \int_{\Omega} \psi \Delta \phi \\ &= - \int_{\Omega} \Delta \psi \phi + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial n} \phi - \int_{\partial\Omega} \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \\ &= - \int_{\Omega} \Delta \psi \phi + \frac{U}{\theta} \int_{\partial\Omega} n_3 \psi \phi - \frac{U}{\theta} \int_{\partial\Omega} \psi n_3 \phi \\ &= - \int_{\Omega} \Delta \psi \phi. \end{aligned}$$

para todo $\phi \in D(A_1)$. Logo, $|(\psi, A_1\phi)| \leq \|\Delta\psi\| \|\phi\|$ para todo $\phi \in D(A_1)$, ou seja, $\psi \in D(A_1^*)$.

Para mostrar que $D(A_1^*) \subset D(A_1)$, seja $\psi \in D(A_1^*)$, então pela definição de A_1^* , existe um elemento $f \in X$ tal que

$$(A_1\phi, \psi) = (\phi, f) \quad \text{para qualquer } \phi \in D(A_1). \quad (4.17)$$

De modo que, no sentido das distribuições, temos que

$$\begin{aligned} (\phi, f) &= (A_1\phi, \psi) = (P_1(-\theta\Delta)\phi, \psi) \\ &= (-\theta\Delta\phi, \psi) \\ &= -\theta \int_{\Omega} \Delta\phi\psi dx \\ &= -\theta \int_{\Omega} \phi\Delta\psi dx \\ &= (\phi, -\theta\Delta\psi), \end{aligned}$$

para $\phi \in C_0^\infty(\Omega) \cap X$.

Coloquemos $[\phi] = \int_{\Omega} \phi dx$, para $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\psi_0 \in C_0^\infty$ de modo que $[\psi_0] = \int_{\Omega} \psi_0 dx = 1$. Então $\phi - [\phi]\psi_0 \in C_0^\infty(\Omega) \cap X$ temos que $\langle \phi - [\phi]\psi_0, -\theta\Delta\psi \rangle = (\phi - [\phi]\psi_0, f)$. Logo,

$$\begin{aligned} \langle \phi - [\phi]\psi_0, -\theta\Delta\psi - f \rangle &= 0 \\ \langle \phi, -\theta\Delta\psi - f \rangle - \langle [\phi]\psi_0, -\theta\Delta\psi - f \rangle &= 0 \\ \langle \phi, -\theta\Delta\psi - f \rangle &= \langle [\phi]\psi_0, -\theta\Delta\psi - f \rangle \\ \langle \phi, -\theta\Delta\psi - f \rangle &= \langle \psi_0, -\theta\Delta\psi - f \rangle \int_{\Omega} \phi dx, \end{aligned} \quad (4.18)$$

para qualquer $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. De (4.18), no sentido das distribuições, temos que para $\psi_0 \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \langle \psi_0, -\theta\Delta\psi - f \rangle &= \langle \psi_0, -\theta\Delta\psi - f \rangle [\psi_0] \\ -\theta\Delta\psi - f &= \langle \psi_0, -\theta\Delta\psi - f \rangle 1. \end{aligned}$$

Como $f \in L^2(\Omega)$ e o lado direito desta igualdade é uma função constante, então $-\Delta\psi$ pertence a $L^2(\Omega)$. Portanto $\langle \psi_0, -\theta\Delta\psi - f \rangle$ pode ser reescrito da forma

$$\langle \psi_0, -\theta\Delta\psi - f \rangle = (\psi_0, -\theta\Delta\psi - f).$$

Nesta expressão, aproximemos em $L^2(\Omega)$, a função constante $|\Omega|^{-1} \equiv \left(\int_{\Omega} 1 dx \right)^{-1}$, por $\psi_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ com $\int_{\Omega} \psi_0 dx \equiv 1$. Então

$$-\theta\Delta\psi - f = f - |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \theta\Delta\psi dx, \quad \text{em } L^2(\Omega). \quad (4.19)$$

Fazendo o produto interno de (4.19) com $\phi \in D(A_1)$, e uma vez que $\phi \in X$, obtemos que

$$(-\theta\Delta\psi, \phi) = (f, \phi) \quad (4.20)$$

Usando a fórmula de Green, podemos reescrever o lado esquerdo como

$$(-\theta\Delta\psi, \phi) = (\psi, -\theta\Delta\phi) - \left\langle \theta \frac{\partial\psi}{\partial n}, \phi \right\rangle + \left\langle \psi, \theta \frac{\partial\phi}{\partial n} \right\rangle, \quad (4.21)$$

onde o primeiro parêntese $\langle, \rangle$ denota a dualidade entre $H^{-3/2}(\partial\Omega)$ e $H^{3/2}(\partial\Omega)$, e o segundo denota a dualidade entre $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ e $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Por outro lado, uma vez que $\psi \in D(A_1^*) \subseteq X$ e $\phi \in D(A_1)$, e por (4.17)

$$(\psi, -\theta\Delta\phi) = (P_1\psi, -\theta\Delta\phi) = (\psi, A_1\phi) = (f, \phi).$$

Além disso, usando a condição de contorno de ϕ , obtemos de (4.20) e (4.21)

$$\left\langle \theta \frac{\partial\psi}{\partial n} - Un_3\psi, \phi \right\rangle = 0.$$

Para um $\zeta \in C^\infty(\partial\Omega)$ arbitrário, podemos facilmente construir um $\phi \in D(A_1)$ tal que $\phi|_{\partial\Omega} = \zeta$. Portanto, $\theta \frac{\partial\psi}{\partial n} - Un_3\psi = 0$ em $\partial\Omega$.

A partir da igualdade, (4.19) e usando o resultado de regularidade em [6, Chapter 2], vemos que $\psi \in H^2(\Omega) \cap X$ e satisfaz a condição de contorno, que afirma que $\psi \in D(A_1)$.

Finalmente, a igualdade $A_1 = A_1^*$ segue do fato que

$$\begin{aligned} (A_1\psi, \phi) &= - \int_{\Omega} \Delta\psi_1\phi \\ &= \int_{\Omega} \nabla\psi \nabla\phi + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\psi}{\partial n} \phi \\ &= \int_{\Omega} \nabla\psi \nabla\phi + \frac{U}{\theta} \int_{\partial\Omega} \psi n_3 \phi \\ &= (\psi, A_1\phi). \end{aligned}$$

■

Observação 4.2.1. Usando o fato que A_1 é auto-adjunto, monótono e A_1 é o laplaciano, pode-se mostrar a existência de uma base $\{w_j\}_{j=1}^\infty$, formada por os autovetores de A_1 , os quais formam um sistema ortonormal completo em X . Esta base junto com a base de autovetores do operador de Stokes A_0 são usadas na Seção 4.1.

REFERÊNCIAS

- BREZIS, H.; BRÉZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. [S.l.]: Springer, 2011. v. 2.
- KAN-ON, Y.; NARUKAWA, K.; TERAMOTO, Y. On the equations of bioconvective flow. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, Duke University Press, v. 32, n. 1, p. 135–153, 1992.
- LERAY, J.; SCHAUDER, J. Topologie et équations fonctionnelles. In: *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*. [S.l.: s.n.], 1934. v. 51, p. 45–78.
- LEVANDOWSKY, M.; CHILDRESS, W. S.; SPIEGEL, E. A.; HUTNER, S. H. A mathematical model of pattern formation by swimming microorganisms*. *The Journal of Protozoology*, v. 22, n. 2, p. 296–306, 1975. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1550-7408.1975.tb05871.x>>.
- MORIBE, Y. *On the bioconvection of Tetrahymena pyriformis, Master's thesis (in Japanese)*. [S.l.]: Osaka University, 1973.
- SOHR, H. *The Navier-Stokes Equations: An Elementary Functional Analytic Approach*. Springer Basel, 2001. (Birkhäuser advanced texts). ISBN 9783764365455. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=KGvvAAAAMAAJ>>.
- TEMAM, R. *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2001. v. 343.