UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA

SAULO AUGUSTO COIMBRA SANTOS DA SILVA

REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DA FUNÇÃO AFIM EM LIVROS DIDÁTICOS DO 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Recife/PE
2022

SAULO AUGUSTO COIMBRA SANTOS DA SILVA

REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DA FUNÇÃO AFIM EM LIVROS DIDÁTICOS DO 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientadora: Profª. Dra. Rosinalda Aurora de Melo Teles

Recife/PE

2022

Catalogação na fonte
Bibliotecário Natália Nascimento, CRB-4/1543

S586r Silva, Saulo Augusto Coimbra Santos da.
Registros de representação semiótica da função afim em livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental. / Saulo Augusto Coimbra Santos da Silva. – Recife, 2022.
98 f.: il.

Orientadora: Rosinalda Aurora de Melo Teles.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2022.
Inclui Referências e Apêndices

1. Representação semiótica . 2. Função afim. 3. Livros didáticos. 4. Ensino fundamental. I. Teles, Rosinalda Aurora de Melo. (Orientadora). II. Título.

370 (23. ed.) UFPE (CE2022-084)

SAULO AUGUSTO COIMBRA SANTOS DA SILVA

REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DA FUNÇÃO AFIM EM LIVROS DIDÁTICOS DO 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

.

Aprovado em: 10/05/2022

BANCA EXAMINADORA

_____

Profª. Drª. Dra. Rosinalda Aurora de Melo Teles (Orientadora e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

_____

Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

_____

Profª. Dra. Fernanda Andréa Fernandes Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal da Paraíba - UFPB

Dedico este trabalho ao meu filho Benjamin que ao longo dessa jornada aprendeu a dividir a atenção do papai com toda demanda que o mestrado e o trabalho em sala de aula exigem. À minha esposa Kassiana por todo apoio e compreensão fundamentais para a realização desse sonho.

AGRADECIMENTOS

À minha família, meus pais Luiz Claudio e Érica Maria, minha vó Maria Áurea, meus irmãos Luiz, Victor e Thiago, minha irmã Rebeka, por todo incentivo e por estar ao meu lado em cada momento de dificuldade. Agradeço todo apoio e suporte das minhas tias Denise e Ângela.

Aos meus amigos Thiago Cavalcanti e Gabriel Brito, por todo incentivo para ingressar no mestrado. Às minhas colegas de trabalho Bianca da Hora, Richerleide Xavier e Natacha Guedes, pelas sugestões, correções, paciência e apoio.

À minha orientadora, professora Dra. Rosinalda Aurora de Melo Teles, pesquisadora que tem minha total admiração, seus ensinamentos me ajudaram a superar cada dificuldade e dar continuidade ao trabalho.

Aos professores Dr. Jadilson Ramos de Almeida e Dra. Fernanda Andréa Fernandes Silva, por todas colaborações na banca na qualificação.

Aos grupos de pesquisa GEPEDiMa e SEMEAR por oportunizar momentos e discussões que enriqueceram tanto minha jornada enquanto pesquisador.

A todo o programa de pós graduação em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC), em especial a professora Dra. Ana Beatriz.

Aos professores, Profa. Dra. Iranete Lima, Profa. Dra. Marilene Rosa, Profa. Dra. Paula Bellemain, Profa. Dra. Cristiane Pessoa, Prof. Dr. Carlos Eduardo, Profa. Dra. Liliane Maria, por todas discussões ao longo das disciplinas e todas as críticas e sugestões nos seminários.

Aos colegas, mestrandos e doutorandos, que mesmo durante esse período de pandemia podemos ter trocas tão produtivas, em especial, José Robson, Wellington Melo, Andreza Silva, Jessica Hayana, Samily Souza, Ernandes Rodrigues, Diana França, Anderson Rodrigo, Anailde Felix, Lemerton Matos, Marina Silva e Suelma Amorim.

RESUMO

O objetivo desse estudo foi analisar à luz da Teoria de Registros de Representação Semióticas a abordagem da função afim em livros didáticos do 9° ano do ensino fundamental. Para a análise estabelecemos categorias que contemplam elementos da TRRS, tais como, a diversidade de representações, transformações (tratamento e conversão), o fenômeno de congruência e não congruência semântica e a abordagem global de propriedades figurais. Os dados obtidos foram analisados por meio da metodologia de Análise de Conteúdo, proposta por Bardin (1977). A análise contemplou a diversidade de registros de representação semiótica da função afim, as transformações semióticas (tratamentos e conversões) e o fenômeno de congruência e não congruência semântica. Com relação à diversidade de registros, os resultados apontam a predominância do registro algébrico em detrimento dos demais. No que diz respeito às transformações semióticas entre registros, nos cinco livros didáticos analisados o número de conversões é superior ao de tratamentos. Especificamente sobre as conversões identificamos que alguns livros didáticos não trabalham os dois sentidos das conversões. Na conversão do registro algébrico para o gráfico, predomina a abordagem ponto a ponto, entretanto algumas atividades exploram elementos da abordagem global de propriedades figurais. Por fim, a análise do fenômeno de congruência e não congruência semântica, de acordo como os critérios estabelecidos por Duval (2009), demonstrou que predominam casos de congruência semântica nas conversões mais frequentes envolvendo os registros de representação semiótica da função afim.

Palavras-chave: Teoria dos registros de representação semiótica; Função Afim; Livros Didáticos; Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This study's objective was to analyze, in the light of the Theory of Registers of Semiotic Representation, the approach of the linear function in 9th grade elementary school textbooks. For the analysis, were established categories that include elements of the TRRS, such as, the diversity of representations, transformations (treatment and conversion), the semantic congruence and non-congruence phenomenon, and the global approach of the figural properties. The results were analyzed by the Content Analysis Methodology proposed by Bardin (1977). The analysis contemplated the diversity of registers of the affine functions's semiotic representation, the semiotic transformations (treatments and conversions) and the semantic congruence and non-congruence phenomenon. Regarding the diversity of records, the results pointed a algebraic register predominance over the others. About to semiotic's transformations between registers, in the five textbooks that were analyzed, the conversion number are higher than the numbers of treatments. Specifically about conversion, we identified that some textbooks do not work both ways of conversion. In the algebraic converting register to the graph, the point-to-point approach predominates, however some activities explore elements of the global approach of figural properties. Finally, the semantic congruence and non-congruence phenomenon analyzed, according to the Duval's (2009) standart, showed that cases of semantic congruence predominates with more frequency than the conversions involving the semiotic representation of the linear function's registers.

Keywords: Theory of Registers of Semiotic Representation; Linear Function; Textbook; Elementary School.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Gráfico da função f(x) = x + 1 28
Figura 2 – Pontos (1,2) e (2,3) no Plano Cartesiano 29
Figura 3 – Capa do livro A conquista da matemática 45
Figura 4 – Capa do Livro Teláris 47
Figura 5 – Capa do Livro Matemática Bianchini 49
Figura 6 – Capa do livro Araribá Mais 50
Figura 7 – Capa do livro Matemática realidade & tecnologia 52
Figura 8 – Exemplo de item classificado como Tratamento e Conversão 57
Figura 9 – Exemplo de tratamento do registro algébrico 58
Figura 10 – Esquema dupla conversão 59
Figura 11 – Exemplo de Tratamento no Registro Língua Natural 59
Figura 12 – Exemplo de Tratamento no Registro Língua Natural 59
Figura 13 – Conversão do registro algébrico → registro gráfico 62
Figura 14 – Conversão do registro gráfico → registro algébrico e registro algébrico → registro gráfico 63
Figura 15 – Conversão registro gráfico → registro algébrico 64
Figura 16 – Dupla conversão registro língua natural → registro gráfico e registro gráfico → registro língua natural 65
Figura 17 – Dupla conversão registro algébrico → registro gráfico e registro gráfico → registro algébrico 66
Figura 18 – Conversão entre o registro língua natural → registro algébrico 67
Figura 19 – Conversão entre registros língua natural e algébrico 67
Figura 20 – Conversão entre o registro gráfico → registro língua natural 68
Figura 21 – Atividade que explora diversas conversões 69
Figura 22 – Conversões entre os registros língua natural → registro tabular e registro tabular → registro algébrico 70
Figura 23 – Abordagem por extensão do traçado 71
Figura 24 – Abordagem por extensão do traçado 72
Figura 25 – Conversão do registro algébrico → registro gráfico 73
Figura 26 – Correlação entre coeficiente “a” e crescimento ou decrescimento da função 74

Figura 27 – Crescimento e decrescimento de uma função polinomial do 1° grau 74
Figura 28 – Atividade com o uso de software 75
Figura 29 – Atividade com uso de software 76
Figura 30 – Atividades com uso de software 77
Figura 31 – Continuação da atividade com uso de software 78
Figura 32 – Continuação de atividade com software 80
Figura 33 – Atividade de conversão do registro algébrico →registro gráfico 82
Figura 34 – Variáveis visuais e unidades simbólicas correspondentes 82
Figura 35 – Exemplo de conversão com a abordagem ponto a ponto 83
Figura 36 – Dupla conversão registro algébrico ↔ registro gráfico 84
Figura 37 – Localização de zero da função na reta 85
Figura 38 – Exemplo de estudo de sinal 85
Figura 39 – Conversão entre o registro gráfico → registro algébrico 86
Figura 40 – Conversão do registro língua natural → registro algébrico 87
Figura 41 – Conversão registro algébrico → registro língua natural 88
Figura 42 – Conversão registro algébrico → registro língua natural 89
Figura 43 – Conversões entre o registro algébrico → registro gráfico e registro gráfico → registro língua natural 90
Figura 44 – Gráfico e intervalos de valores de x 91
Figura 45 – Dupla conversão do registro língua natural→ registro gráfico e registro gráfico→ registro algébrico 92
Figura 46 – Gráfico da função afim que contém os pontos de coordenadas (1,2) e (-1,0) 92

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Representação tabular da função f(x)=x+1	29
Tabela 2 –	Distribuição das atividades em itens e questões	54
Tabela 3 –	Diversidade dos registros de representação semiótica nos livros didáticos analisados	54
Tabela 4 –	Quantitativo de atividades de tratamento e conversão por livro didático	56
Tabela 5 –	Tratamentos nos livros didáticos analisados	57
Tabela 6 –	Percentuais de atividades de conversão e seus respectivos sentidos	60

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 –	Diferentes Registros da função afim representando o mesmo objeto matemático	20
Quadro 2 –	Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática)	21
Quadro 3 –	Classificação para os diferentes registros de representação semiótica da função afim	22
Quadro 4 –	Exemplo de conversão entre registros algébrico e registro gráfico	24
Quadro 5 –	Critérios de não congruência semântica	25
Quadro 6 –	Conversão do registro algébrico para o registro gráfico recorrendo a um registro auxiliar e utilizando a abordagem ponto a ponto	26
Quadro 7 –	Unidades simbólicas significativas e variáveis visuais	28
Quadro 8 –	Resultado da busca no banco de teses da CAPES e BDTD	32
Quadro 9 –	Evolução da definição de função em três séculos	38
Quadro 10 –	Livros didáticos selecionados e sua codificação	43
Quadro 11 –	Categorias de análise e variáveis	44
Quadro 12 –	Organização da unidade referente ao conteúdo de funções no LD A Conquista da Matemática (9ºano)	46
Quadro 13 –	Organização do Capítulo referente ao conteúdo de funções no LD Teláris Matemática (9ºano)	48
Quadro 14 –	Organização do Capítulo referente ao conteúdo de funções no LD Matemática - Bianchini (9ºano)	49
Quadro 15 –	Organização do Capítulo referente ao conteúdo de funções no LD Araribá Mais - Matemática (9ºano)	51
Quadro 16 –	Organização do Capítulo referente ao conteúdo de funções no LD Matemática realidade & tecnologia (9ºano)	52

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	**13**
2	**FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**	**19**
2.1	TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA	19
2.1.1	**Tratamento**	**23**
2.1.2	**Conversão**	**23**
2.1.2.1	Conversão entre o registro algébrico e o registro gráfico	27
3	**BREVE OLHAR PARA A FUNÇÃO AFIM EM PESQUISAS CIENTÍFICAS E NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**	**31**
3.1	RESULTADOS DE PESQUISAS ANTERIORES	31
3.2	UM BREVE HISTÓRICO DAS FUNÇÕES E SUAS REPRESENTAÇÕES	35
3.3	A IMPORTÂNCIA DOS LIVROS DIDÁTICOS	38
4	**PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS**	**41**
5	**ANÁLISES DOS LIVROS DIDÁTICOS**	**45**
5.1	CARACTERIZAÇÃO DOS LIVROS DIDÁTICOS	45
5.1.1	**A conquista da matemática**	**45**
5.1.2	**Teláris**	**47**
5.1.3	**Matemática Bianchini**	**48**
5.1.4	**Araribá Mais**	**50**
5.1.5	**Matemática realidade & tecnologia**	**51**
5.2	DIVERSIDADE DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA	53
5.3	AS TRANSFORMAÇÕES DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS	55
5.3.1	**Tratamento**	**57**
5.3.2	**Conversão**	**60**
5.3.2.1	Conversão entre o registro algébrico e o registro gráfico	71
5.2	ANÁLISE DE CONGRUÊNCIA E NÃO CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA	81
6	**CONSIDERAÇÕES FINAIS**	**94**
	REFERÊNCIAS	**96**

1 INTRODUÇÃO

No ensino de matemática desde os anos iniciais do ensino fundamental nos deparamos com símbolos e representações dos objetos matemáticos (tabelas, gráficos, expressões algébricas). Cada uma delas tem sua importância e são complementares para o entendimento dos objetos matemáticos.

Este trabalho emerge da minha experiência como professor de matemática do ensino fundamental e de algumas reflexões a partir de minha formação inicial. Em minha prática docente percebi diversas dificuldades apresentadas pelos estudantes na aprendizagem do conteúdo de função, em turmas do 9°ano do ensino fundamental. Tais dificuldades estavam relacionadas à necessidade de transitar entre as diversas representações das funções, quais sejam, gráfica, algébrica, tabular.

Em minha formação inicial, discutimos o papel das representações no ensino-aprendizagem de matemática. Esse estudo influenciou nas reflexões que pude realizar na condição de professor de matemática dos anos finais do ensino fundamental, quando percebi as dificuldades dos meus alunos.

Segundo Silva (2020) a linguagem matemática abstrata pode ser um fator que leva as dificuldades dos alunos e o professor deve trabalhar com os alunos as diversas representações de modo consciente contribuindo para a compreensão dos objetos matemáticos. Ainda segundo a autora é importante considerar as características presentes nas diversas representações (gráfica, algébrica, tabular, língua natural) e pensar nas possibilidades de construção do conceito de função antes de partir para a formalização. Nessa perspectiva, o Currículo de Pernambuco expressa preocupação com a sistematização precoce

> O estabelecimento de relações entre grandezas deve ser tomado como ponto de partida para o estudo da noção de função. O aprofundamento dessa noção deve ter sua origem em atividades ligadas a situações do cotidiano do estudante, evitando-se a sistematização precoce. Situações que envolvam a proporcionalidade também podem ser aprofundadas nessa fase. Em particular, a articulação de problemas envolvendo proporcionalidade com o estudo da função linear constitui um tópico relevante. (PERNAMBUCO, 2018, p.382)

O documento propõe que o conteúdo deve ser abordado a partir de relações entre grandezas e situações do cotidiano e destaca o papel central das representações no ensino de matemática

> A língua natural, a linguagem simbólica, os desenhos, os gráficos, as tabelas, os diagramas, os ícones, entre outros, desempenham papel central, não só para representar conceitos, relações e procedimentos, como também para a própria formação deles. (PERNAMBUCO, 2018, p.352).

Esse documento propõe que o pensamento funcional deve ser valorizado desde os anos iniciais do fundamental: "Em particular, a noção de proporcionalidade pode ser introduzida por meio de situações ligadas ao cotidiano do estudante." (PERNAMBUCO, 2018, p.365).

No ensino fundamental apenas no nono ano há uma habilidade específica sobre função. A habilidade prevista propõe

> (EF09MA06PE) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar e resolver situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis, explorando diferentes tecnologias. (PERNAMBUCO, 2018, p.419)

Destacando a necessidade de trabalhar o conteúdo de forma dinâmica com ênfase nas representações numérica, algébrica e gráfica.

Em âmbito nacional, a BNCC (Base Nacional Curricular Comum) categoriza o conteúdo de funções na unidade temática Álgebra e esta tem por finalidade desenvolver o pensamento algébrico e justifica que para este objetivo ser alcançado:

> [...]é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. (BRASIL, 2017, p.274)

Apesar de não citar explicitamente o termo função, podemos inferir que “leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos” corresponde a lei de uma função. O trecho também faz referência às representações gráficas e simbólicas.

Desse modo vemos que nos documentos oficiais de orientação ao ensino (BNCC e Currículo de Pernambuco), para esta etapa de escolarização, tanto o pensamento funcional como as representações ocupam um papel de destaque no ensino de matemática.

Várias pesquisas acadêmicas também discutem o ensino e a aprendizagem de funções, entre elas a pesquisa de Warmbier et al. (2017), realizada com alunos do primeiro ano do ensino médio, sobre o conteúdo de função afim, buscou identificar as dificuldades apresentadas pelos alunos e as possíveis causas. As autoras concluem que a maioria dos erros está relacionada aos conteúdos anteriores ao estudo de funções tais como operações, números racionais, interpretação de gráficos.

Outro ponto que justifica nossa pesquisa é o fato de que os livros didáticos são amplamente utilizados no Brasil e se caracterizam como um recurso importante tanto para professores quanto para os alunos.

Pesquisas anteriores como as de Oliveira (2007) e Melo, Lopes e Oliveira (2017) ressaltam a importância do livro didático. Oliveira (2007) afirma que o livro didático "se constitui em um importante recurso, se não, o mais importante recurso utilizado por alunos e professores" (OLIVEIRA, 2007, p.28). O livro didático

> [...]é considerado um instrumento de articulação, visando a organização das ideias envolvendo o profissional docente e o estudante, compondo, dessa forma, as atividades diárias da sala de aula, bem como agindo como norteador de atividades educativas a serem desenvolvidas em ambiente externo escolar. (Melo, Lopes e Oliveira. 2017, p.101)

Temos no país o PNLD (Programa Nacional do Livro e do Material Didático) um importante programa que garante a qualidade e o acesso ao livro didático a todos os professores e estudantes das escolas públicas. A partir do ano de 1996, o PNLD passou a realizar avaliação pedagógica das obras, com o objetivo de garantir a qualidade dos livros didáticos. Essa análise é realizada com critérios estabelecidos em edital e a escolha é realizada pelos professores de três em três anos, através do Guia de Livros Didáticos[1] disponível no portal do FNDE[2] (Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação). O guia contém resenhas das obras aprovadas, além de critérios e princípios da avaliação, fichas avaliativas e informações da equipe responsável pela avaliação. Segundo dados estatísticos do programa, no ano de 2020, o custo de aquisição dos livros didáticos para os anos finais do ensino fundamental se aproxima de 700 milhões de reais. Nesse contexto, o programa se

[1] Guia com todas as obras aprovadas na avaliação pedagógica do PNLD.

[2] https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/guia-do-pnld/item/13410-guia-pnld-2020

configura como uma importante política de Estado que além de garantir o acesso ao livro didático atesta sua qualidade.

Diante do exposto, nesse estudo optamos pelo objeto matemático função afim por ser nesse ano escolar (9° ano do ensino fundamental) a primeira vez que o estudo de função deve ser formalizado, ou seja, são apresentadas: definições, notação própria e representações.

Assim, tendo como motivação as orientações curriculares que sugerem a abordagem de diferentes representações no ensino de função, resultados de pesquisas anteriores, a importância dos livros didáticos e também a minha prática profissional atuando como professor de Matemática na rede estadual de ensino nos anos finais do ensino fundamental propomos um estudo sobre os registros de representação semiótica da função afim nos livros didáticos do 9° ano do ensino fundamental.

Dentre as razões que justificam esta pesquisa destacamos a importância das funções como um modelo matemático que relaciona grandezas e possui diversas aplicações em outras áreas do conhecimento como na física, química, biologia entre outras. Entendemos que tais considerações reforçam a necessidade de ampliação do debate acerca do tema e cria um ambiente propício para investigação no ensino fundamental.

Registros de representação semiótica, discutidos na Teoria de Registros de Representação Semiótica, desenvolvida por Raymond Duval, são a forma de acesso aos objetos matemáticos, que devido à natureza abstrata não podem ser acessados de maneira direta. Para Duval (2009) é importante que o estudante saiba transitar entre os diferentes registros (gráfico, algébrico, língua natural).

Então, nesse estudo, queremos investigar se os livros didáticos de matemática contemplam a diversidade de registros, bem como exploraram conversões[3] que mobilizem diferentes registros, inclusive nos dois sentidos, por exemplo, atividades do objeto matemático função afim que proponham partir do registro gráfico para o registro algébrico e vice-versa.

Nesse sentido, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica subsidiará a análise das diversas representações semióticas da função afim utilizadas em livros

[3] Conversão: Atividade cognitiva descrita na Teoria de Registros de Representação Semiótica que consiste na transição entre registros de representação semiótica.

didáticos do 9°ano do ensino fundamental, pois defende que o ensino de matemática deve favorecer a coordenação entre registros de representação semiótica de um mesmo objeto matemático e nesse sentido contribuir para a apreensão do conceito de função, em particular da função afim.

Portanto, o objetivo desse estudo é analisar à luz da Teoria de Registros de Representação Semióticas a abordagem da função afim em livros didáticos do 9° ano do ensino fundamental.

Para tanto estabelecemos como objetivos específicos:

- Identificar a ocorrência dos diversos registros de representação semióticas da função afim em livros didáticos de matemática para o 9º ano;
- Analisar atividades de tratamento e conversão, em particular investigar as abordagens adotadas na conversão entre os registros algébrico e gráfico, em livros didáticos de matemática do 9 ano do ensino fundamental;
- Verificar fenômeno da não congruência semântica das conversões entre registros de representação semióticas em atividades envolvendo função afim propostas nos livros didáticos de matemática para o 9º ano.

Para dar forma a este estudo de modo a responder a esses objetivos organizamos a continuidade desse texto da seguinte forma:

O Capítulo 2 se destina a fundamentação teórica. Destacamos elementos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, que vão nortear nossa análise, tais como: atividades cognitivas de tratamento e conversão; fenômenos de congruência e não congruência semântica; fenômeno da heterogeneidade; e as abordagens nas conversões entre o registro algébrico e o registro gráfico.

O Capítulo 3 contempla resultados de pesquisas anteriores relacionados com analise de livros didáticos e função afim, tendo como referencial teórico a Teoria dos Registros de Representação Semiótica; um breve histórico do conceito de função e suas representações; e por fim uma discussão sobra a importância dos livros didáticos, sobretudo na educação brasileira.

O Capítulo 4, descreve os procedimentos metodológicos adotados neste estudo tais como a metodologia adotada, os critérios de análise e os livros didáticos selecionados.

O Capítulo 5 contém as análises de cinco livros didáticos que compõem o corpus deste estudo. A análise está dividida nos seguintes tópicos: caracterização do livro

didático; diversidade dos registros de representação semiótica; as transformações das representações semióticas (tratamentos e conversões), em particular, as abordagens da conversão entre os registros algébrico e gráfico; e análise de congruência e não congruência semântica nas conversões entre registros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse capítulo, apresentamos elementos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica que serão relevantes para alcançar os objetivos desta pesquisa.

2.1 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Realizar uma pesquisa adotando um determinado referencial teórico, requer reflexões que justifiquem a pertinência da mesma para se debruçar sob o objeto de estudo escolhido, nesse sentido, inicialmente, vamos definir o que são registros de representação semiótica. Segundo Duval (2011a, p.70) existem dois tipos heterogêneos de sistemas semióticos: os códigos e os registros. Os registros devem possuir três funções cognitivas: comunicação, objetivação e tratamento. Enquanto os códigos exercem exclusivamente a função de comunicação e cita, por exemplo, o alfabeto que permite passar da fala à escrita.

Segundo Flores e Moretti (2005, p. 3), a comunicação é responsável pela “transmissão de uma mensagem ou de uma informação entre indivíduos”, a objetivação “permite a um sujeito de tomar consciência daquilo que até então ainda não o tinha feito” e o tratamento “transforma uma representação em uma outra, utilizando unicamente as possibilidades de funcionamento do sistema de representação mobilizado”.

Segundo Duval (2003) o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio de diferentes registros de representação semiótica, devido à abstração típica dos objetos matemáticos que inviabilizam o acesso de maneira direta.

Podemos então considerar que, de acordo com Teoria de Registros de Representação Semióticas (TRRS) desenvolvida por Raymond Duval, é por meio das representações (gráficas, simbólicas, língua natural, figuras, etc.) que se dá o acesso aos objetos matemáticos.

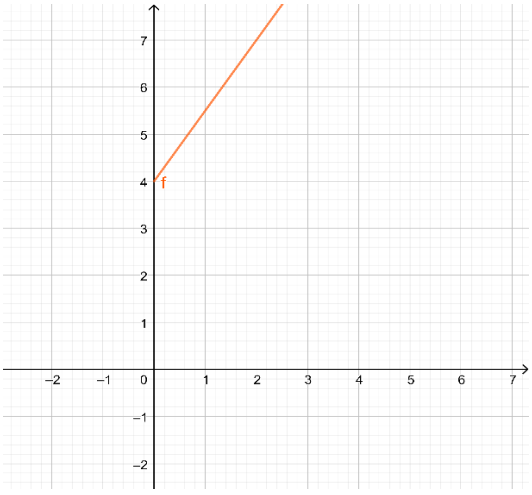
Duval (2011b) destaca a importância de não confundir o objeto com suas representações e aponta que essa confusão pode gerar problemas na aprendizagem, a partir do momento em que uma determinada representação pode não fazer sentido para o aluno e, assim, pode se tornar inútil. Duval expressa essa preocupação em:

> Isto quer dizer que os objetos matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz dele. De fato, toda confusão acarreta, em mais ou menos longo prazo, uma perda de compreensão e os conhecimentos adquiridos tornam-se rapidamente inutilizáveis ao longo de seu contexto de aprendizagem: seja por não lembrar ou porque permanecem como representações “inertes” que não sugerem nenhum tratamento. A distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico para a compreensão da matemática. (DUVAL, 2011b, p. 268)

Desta forma, a compreensão dos objetos matemáticos pressupõe a coordenação de ao menos dois registros de representação, pois desta maneira evita-se a confusão entre o objeto e sua representação. A coordenação de forma espontânea de distintos registros de representação semiótica é o ponto chave da aprendizagem matemática.

O quadro abaixo ilustra os principais registros de representação semióticas da função afim.

Quadro 1 – Diferentes Registros da função afim representando o mesmo objeto matemático

<table>
<tr><td>Registro Língua Natural</td><td>O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa R$ 4,00 e cada quilômetro rodado custa R$ 1,50. Qual o valor V a pagar em uma corrida de n quilômetros?</td></tr>
<tr><td>Registo Algébrico</td><td>$f(x) = 1{,}5x + 4$</td></tr>
<tr><td>Registro Gráfico</td><td> 
</td></tr>
<tr><td>Registro Tabular</td><td><table>
<tr><td>X</td><td>f(x)= 1,5x + 4</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1.1,5 +4 = 5,5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2.1,5 + 4 = 7</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3.1,5 +4 = 8,5</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4.1,5 + 4 = 10</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Um mesmo problema pode ser proposto a partir de diversas representações, e são possibilidades que o professor pode considerar na escolha das atividades. O Quadro 1 apresenta as diversas representações semióticas da função afim do problema descrito em língua natural na primeira linha. Este é um exemplo de um típico problema de função afim presente nos livros didáticos do 9°ano.

A resolução de um problema exigirá competências/estratégias específicas dependendo do registro adotado uma vez cada registro representa características particulares do objeto matemático.

O registro em língua natural permite, por exemplo, saber o valor do quilômetro rodado de maneira imediata, o que não ocorre no registro gráfico. Em contrapartida o registro gráfico permite a análise de crescimento e/ou decrescimento da função e encontrar os zeros ou raízes que não estão presentes no registro em língua natural.

Assim, podemos concluir que cada representação possui características próprias e a habilidade de transitar entre as diferentes representações nos leva a diferenciar o objeto matemático de sua representação semiótica.

Segundo a TRRS os registros podem ser caracterizados em quatro grupos: Os multifuncionais, monofuncionais, discursivos e não discursivos. Os registros multifuncionais são aqueles em que o tratamento não pode ser algoritmizáveis, são exemplos: a língua natural, as figuras geométricas planas ou em perspectivas. Enquanto que nos registros monofuncionais os tratamentos são principalmente algoritmos, por exemplo, sistema de escrita (numérica, algébrica, simbólica) e gráficos cartesianos. Entre os registros discursivos estão as línguas (oral ou escrita), representações auxiliares (de caráter provisório) e as escritas simbólicas (escrita). São classificados como registros não discursivos os registros gráfico e figural. Duval (2003) sistematiza a classificação dos registros de acordo com o Quadro 2.

Quadro 2 – Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática)

	Representação Discursiva	**Representação Não Discursiva**

REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua Natural Associações verbais (conceituais). Forma de racionar: • argumentação a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectiva (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébricas • simbólicas (línguas formais). • Cálculo	Gráficos cartesianos. • mudanças de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2003, p. 14)

Nesse estudo, consideramos: **registro algébrico** as expressões que utilizam símbolos alfanuméricos (variáveis, coeficientes,...) e símbolos relacionais (=,<,>) como, por exemplo, a *lei da função* dada por $y = ax + b$; **registro gráfico**, no caso da função afim, compreende a reta no plano cartesiano; **registro tabular**, quando os dados se apresentam dispostos em uma tabela; e o registro **língua natural**, compreende a escrita em língua natural (língua portuguesa).

Retomando o exemplo do Quadro 1 podemos organizar os registros de representação semiótica da função afim de acordo com o quadro abaixo

Quadro 3 – Classificação para os diferentes registros de representação semiótica da função afim

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	**REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA**
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS	**Registro Língua Natural** O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa R$ 4,00 e cada quilômetro rodado custa R$ 1,50. Qual o valor V a pagar em uma corrida de n quilômetros?	

REGISTROS MONOFUNCIONAIS

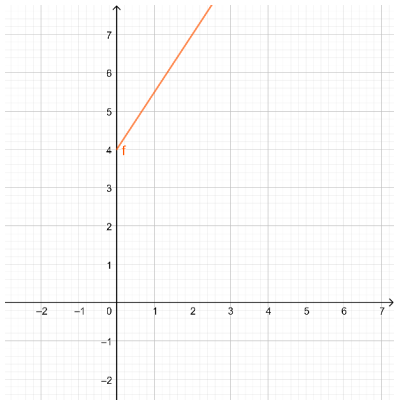
Registo Algébrico

$f(x) = 1{,}5x + 4$

Registro Tabular

x	$f(x) = 1{,}5x + 4$	f(x)
1	$f(1) = 1\,.\,1{,}5 + 4$	5,5
2	$f(2) = 2\,.\,1{,}5 + 4$	7
3	$f(3) = 3\,.\,1{,}5 + 4$	8,5
4	$f(4) = 4\,.\,1{,}5 + 4$	10

Registro Gráfico



Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

As funções, assim como outros objetos matemáticos, podem ser representadas a partir de diversos registros de representação semióticas. Segundo a TRRS a aprendizagem matemática ocorre quando trabalhamos ao menos dois registros, simultaneamente, favorecendo para que não haja confusão entre o objeto representado e sua representação.

Destacamos agora duas atividades cognitivas descritas na TRRS: o tratamento e a conversão.

2.1.1 Tratamento

O tratamento é uma transformação que ocorre dentro de um sistema semiótico, por exemplo, resolver uma equação ou um sistema de equações.

Na função afim calcular o valor de f(x) em um determinado valor de x é uma atividade de tratamento. Por exemplo, considere $f(x) = x + 3$ e calcule $f(3)$.

$$f(3) = 3 + 3$$

$$f(3) = 6$$

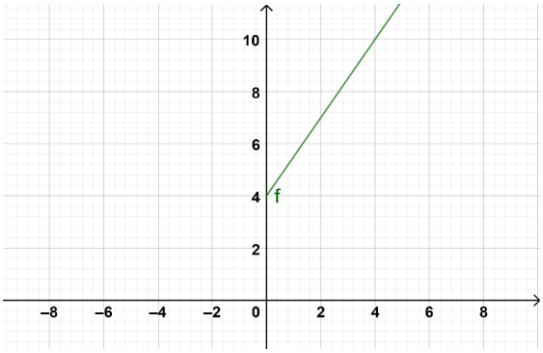
A atividade requer apenas o registro algébrico e, portanto, temos um tratamento.

2.1.2 Conversão

As conversões sugerem uma mudança de registro, ou seja, o registro de partida é diferente do registro de chegada. Nesse processo se conserva a referência aos

mesmos objetos, por exemplo, esboce o gráfico da função definida pela lei $f(x) = 3x + 4$.

Quadro 4 – Exemplo de conversão entre registros algébrico e registro gráfico

Registro de Partida	Registro de Chegada
$f(x) = 3x + 4$	

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Realizar conversões em diferentes sentidos, por exemplo, do registro gráfico para o algébrico e vice-versa, exige do estudante estratégias variadas e o custo cognitivo destas tarefas são distintos.

As atividades de conversão segundo Duval (2003) seriam as mais interessantes, pois exigem do estudante a mobilização de ao menos um par de registros. A partir das conversões o autor identifica o surgimento de dois fenômenos:

a) As variações de congruência e de não congruência semântica.
b) A heterogeneidade dos dois sentidos da conversão.

Esses fenômenos, segundo Duval (2003), estão principalmente relacionados com as dificuldades que os estudantes têm em colocar em correspondência duas representações semióticas de registros distintos.

a) Fenômeno de congruência e não congruência semântica

Uma conversão pode ser mais direta ou transparente do que outra, isso implica em ser mais fácil ou difícil identificar as unidades de significado dos registros que serão postas em correspondência. Quando uma representação transparece em outra, ou seja, a correlação entre as unidades de significado das representações está clara,

podemos dizer que existe congruência semântica nessa conversão. Por exemplo, localizar pontos no plano cartesiano a partir de alguns pontos dispostos numa tabela, podemos estabelecer uma correspondência direta entre o registro tabular e o registro gráfico e neste caso dizemos que existe congruência semântica.

A conversão pode ser não congruente, por exemplo, partindo do registro gráfico de uma função para o registro algébrico (lei da função) não encontramos de forma imediata uma correspondência semântica entre unidades de significado dos dois registros, caracterizando-se como um caso de conversão não congruente.

Segundo Duval (2003), existem conversões explícitas e implícitas, em outros termos conversões podem ser congruentes ou não congruentes. Para a análise de congruência ou não congruência semântica, Duval (2009) estabeleceu os seguintes critérios.

Quadro 5 – Critérios de não congruência semântica

I. Correspondência semântica dos elementos significantes	Cada unidade de significado simples de uma das representações, pode-se associar uma unidade significante elementar
II. Univocidade semântica terminal	Estabelece que cada elemento significante elementar da representação de partida corresponde a um mesmo significado na representação de chegada
III. Ordem dentro da organização das unidades compondo cada uma das duas representações	Se refere a ordens em que estas unidades se apresentam em cada uma das representações.

Fonte: Adaptado de Duval (2009, p.68-69)

O exemplo 1 a seguir propõe a conversão do registro língua natural para o registro algébrico:

(1) *Escreva a equação que representa a seguinte sentença: y é igual ao triplo de x mais oito.*

Resolvendo esta atividade encontramos a seguinte equação: $y = 3 \cdot x + 8$. Nessa atividade, temos um caso de congruência semântica, uma vez que todos os

critérios são satisfeitos. Cada palavra (registro em língua natural) se relaciona com apenas um símbolo (registro gráfico), o significado dos elementos significantes é preservado em ambos registros e a ordem é respeitada.

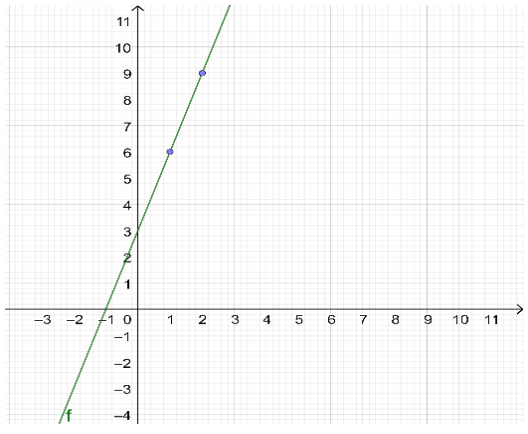
Cabe ressaltar que o critério III não é pertinente no caso de registros que possuem dimensões diferentes. Por exemplo, um gráfico em duas dimensões e um texto em uma dimensão.

Uma conversão é congruente quando satisfaz os três critérios. Se um ou mais critérios não são satisfeitos, temos um caso de não congruência semântica.

b) Fenômeno da Heterogeneidade

O fenômeno da heterogeneidade dos dois sentidos na conversão merece considerações. Esse fenômeno chama atenção pelo fato de que o custo cognitivo da conversão é diferente a depender do sentido. Por exemplo, considere a função f(x)=3x+3 e esboce seu gráfico, trata-se de uma conversão do registro algébrico para o registro gráfico. Podemos atribuir valores para x e encontrar valores de f(x) recorrendo ao registro tabular como uma representação auxiliar. E usando a abordagem ponto a ponto esboçar a função no plano cartesiano.

Quadro 6 – Conversão do registro algébrico para o registro gráfico recorrendo a um registro auxiliar e utilizando a abordagem ponto a ponto

<table>
<tr><th>Registro algébrico</th><th>Registro Tabular</th><th>Registro Gráfico</th></tr>
<tr>
<td>f(x)=3x+3</td>
<td>
<table>
<tr><td>X</td><td>f(x) = 3x+3</td><td>f(x)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3.1+3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3.2+3</td><td>9</td></tr>
</table>
</td>
<td> 
</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

O sentido oposto gera dificuldades, pela impossibilidade de realizar uma tarefa semelhante e assim estabelecer uma correlação entre elementos do registro gráfico e

registro algébrico. Não é claro, por exemplo, a relação entre a inclinação da reta no registro gráfico e o *coeficiente 3* que multiplica o *x* no registro algébrico. Neste caso precisaríamos recorrer a procedimentos que a abordagem ponto a ponto não contempla. Nesse sentido, a heterogeneidade no sentido da conversão está relacionada com o fenômeno da não congruência semântica entre registros.

Duval (2003) alerta que quando um sentido é privilegiado se tem a ideia de que o treinamento neste sentido automaticamente desenvolve o sentido oposto. O que de fato não é verdade, por esse motivo propõe uma abordagem alternativa para a conversão do registro gráfico para o registro algébrico, que leva em conta variáveis visuais próprias do registro gráfico e unidades simbólicas significativas presentes no registro algébrico.

2.1.2.1 Conversão entre o registro algébrico e o registro gráfico

Pesquisas anteriores, como as de Maggio, Soares e Nehring (2010) que utilizaram a TRRS como fundamentação teórica, apontam que alguns livros didáticos dão prioridade a algumas conversões em detrimento de outras. A pesquisa analisou atividades envolvendo função afim em dois livros didáticos e enquanto um deles propõe apenas duas atividades envolvendo a conversão entre o registro em língua natural para o registro algébrico o outro é um pouco mais distribuído, porém também privilegia uma determinada conversão, neste caso o registro em língua natural para registro algébrico. As autoras concluem que em ambos os livros didáticos o método adotado para a conversão do registro algébrico para o registro gráfico é a abordagem ponto a ponto.

Entretanto, Duval sugere que o mais adequado seria a abordagem global de propriedades figurais, destacando que aspectos de não congruência semântica entre essas representações são as causas das maiores dificuldades dos estudantes.

Segundo Duval (2011b) a construção de um gráfico a partir da lei de uma função pode ser feita a partir de três abordagens:

- A abordagem ponto a ponto – que consiste em atribuir alguns valores para x e encontrar os valores de f(x), correspondentes, e com os pontos encontrados traçar o gráfico no plano cartesiano. Esta abordagem favorece este sentido de conversão registro algébrico → registro gráfico.

- A abordagem de extensão do traçado – Esta abordagem, difere da abordagem ponto a ponto, por considerar uma quantidade infinita de pontos e corresponde a atividades de interpolação e extrapolação.
- A abordagem global de propriedades figurais permite que se estabeleçam relações entre as unidades simbólicas significativas (equações) e as variáveis visuais (gráfico).

Observando a expressão algébrica de uma função afim, da forma $f(x) = ax + b$, temos os coeficientes a e b. Alterações nestes coeficientes implicam em alterações na representação gráfica desta função.

Duval (2011b) destaca as unidades simbólicas significativas e as variáveis visuais, referentes ao registro algébrico e gráfico, respectivamente, de acordo com a quadro abaixo:

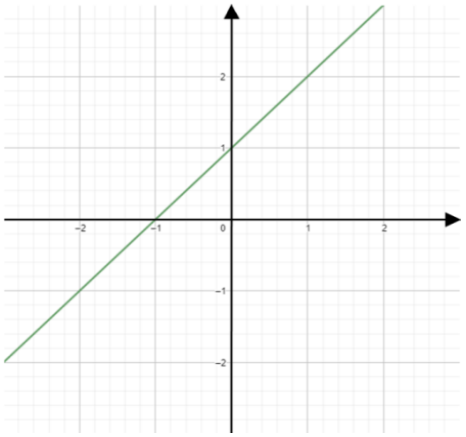
Quadro 7 – Unidades simbólicas significativas e variáveis visuais

Unidades Simbólicas Significativas	▪ Os símbolos relacionais (<, >, =, ...); ▪ Os símbolos de operações ou de sinais (+, –); ▪ Os símbolos de variável; e ▪ Os símbolos de expoente, coeficiente e de constante.
Variáveis Visuais	▪ Sentido da inclinação ascendente ou descendente; ▪ Ângulo com os eixos; e ▪ Posição sobre o eixo.

Fonte: Adaptado de Duval (2011b, p.100-101)

Por exemplo, a função $f(x) = x + 1$, o sentido da inclinação é ascendente (da esquerda para direita), o traçado passa acima da origem (0,0) e o ângulo formado com os eixos horizontal e vertical é igual.

Figura 1 – Gráfico da função f(x) = x + 1



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

O coeficiente a determina o ângulo de inclinação da reta com o eixo horizontal e o eixo vertical. O sinal + ou - define se a função é crescente ou decrescente.

O coeficiente b determina a posição em que a reta intercepta o eixo vertical, ou seja, se o traçado passa acima, abaixo ou intercepta a origem. Se b = 0 o traçado passa na origem (0,0), b>0 passa acima da origem e b<0 passa abaixo da origem.

Para Duval, a abordagem ponto a ponto, na conversão do registro gráfico para o registro algébrico, representa um alto custo cognitivo para o aluno devido a não congruência semântica entre essas representações. Retomando o exemplo anterior e recorrendo a representação tabular, temos:

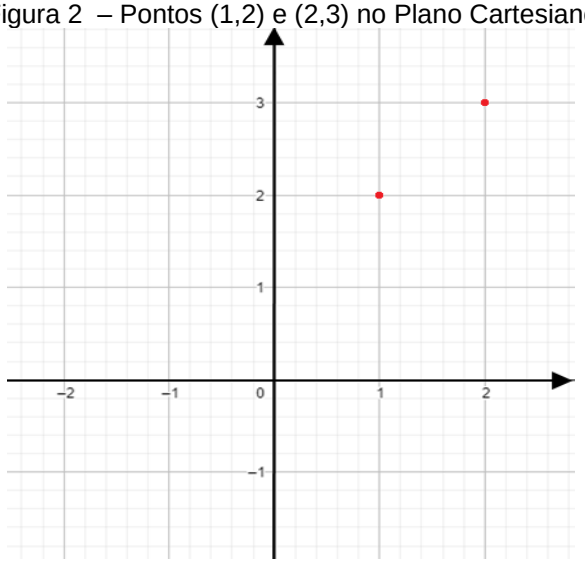
Tabela 1 – Representação tabular da função f(x)=x+1

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = x + 1}$	$\boldsymbol{f(x)}$
1	$f(1) = 1 + 1 = 2$	2
2	$f(2) = 2 + 1 = 3$	3

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Obtemos a representação dos pontos representados pelos pares ordenados (1,2) e (2,3). A partir deles localizamos no plano cartesiano.

Figura 2 – Pontos (1,2) e (2,3) no Plano Cartesiano



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Seguindo a abordagem ponto a ponto, o gráfico de $f(x) = x + 1$ é a reta que liga os pontos encontrados.

Entre a reta que contém os pontos representados pelos pares ordenados (1,2) e (2,3) e a função $f(x) = x + 1$, não é possível estabelecer uma correspondência

imediata dos elementos dos registros gráfico e algébrico, ou seja, neste caso podemos dizer que não existe congruência semântica entre estas representações.

A necessidade de se trabalhar a abordagem de interpretação global torna-se ainda mais evidente quando realizamos a conversão do registro gráfico → registro algébrico. Duval explica que:

> Quando se trata de partir da representação gráfica para encontrar, por exemplo, a equação correspondente ou para utilizar o conceito de inclinação ou de direção, é esta abordagem de interpretação global que se torna necessária. A razão disto se deve ao fato de que o recurso à abordagem ponto a ponto é totalmente inoperante uma vez que tira a atenção das variáveis visuais. A prática sistemática da abordagem ponto a ponto não favorece a abordagem de interpretação global que é em geral deixada de lado no ensino uma vez que depende de análise semiótica visual e algébrica. (DUVAL, 2011b, p. 99)

Dessa maneira, identificar as variáveis visuais pertinentes do registro gráfico contribui para estabelecer conexões com as unidades simbólicas significativas presentes no registro algébrico. Duval defende que:

> Para uma grande maioria de alunos, esta aprendizagem não se faz apenas por meio do treinamento com exercícios de construção no plano referencial, nem por meio de tarefas de leitura que envolve a associação ponto/coordenadas. A maioria dos alunos limita-se a uma abordagem sincrética e inoperante sem real valor intuitivo das representações gráficas. (DUVAL, 2011b, p.111)

Em nenhum momento se fala em não trabalhar a abordagem ponto a ponto, a crítica está sobre o uso, muitas vezes, exclusivo desta abordagem. De fato, a conversão do registro algébrico para o registro gráfico pode ser feita sem maiores problemas por meio desta abordagem. O que causa dificuldade é o sentido oposto desta conversão.

Assim, diante dos elementos da TRRS apresentados construímos os seguintes questionamentos: Na abordagem de função afim nos livros didáticos de matemática do 9° ano do ensino fundamental, os autores levam em conta, além da diversidade dos registros, os fenômenos de congruência e não congruência semântica nas conversões? As atividades propostas contemplam de maneira equilibrada os dois sentidos nas conversões ou privilegiam algum em específico? Quais as abordagens utilizadas nas conversões entre o registro algébrico e gráfico?

3 BREVE OLHAR PARA A FUNÇÃO AFIM EM PESQUISAS CIENTÍFICAS E NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Este capitulo está organizado da seguinte forma: primeiros apresentamos os principais resultados de pesquisas anteriores com as contribuições destes estudos para educação matemática, em particular, estudos que envolvem função afim, a TRRS e analise de livros didáticos; em seguida apresentamos um breve histórico das funções e suas representações; e por fim fazemos uma breve discussão sobre a importância dos livros didáticos.

3.1 RESULTADOS DE PESQUISAS ANTERIORES

Iniciamos a revisão de literatura com resultados de pesquisas anteriores (ALMEIDA, SILVA, 2018; PONTES, FLINK E NUNES, 2017) que realizaram pesquisas bibliográficas em educação matemática relacionadas com a TRRS, o objetivo foi compreender o panorama geral das pesquisas brasileiras com este aporte teórico. Em seguida, sentimos a necessidade de realizar nossa própria revisão com pesquisas mais especificas para nosso objeto de estudo, para tal estabelecemos que as mesmas deveriam estar relacionadas à função afim, livros didáticos de matemática e ter como aporte teórico a TRRS. Estes resultados foram fundamentais delimitar e definir as categorias de analises que serão apresentadas ao leitor no capitulo 4.

De acordo com Almeida e Silva (2018), que analisaram artigos de educação matemática, publicados no BOLEMA[4], sob a perspectiva da semiótica, parece haver um consenso entre educadores matemáticos de que as representações têm um papel relevante para o ensino e aprendizagem de matemática. Os artigos analisados destacam a importância da inclusão de enfoques semióticos nos programas de formação de professores.

Segundo Pontes, Finck e Nunes (2017), que analisaram pesquisas em educação matemática sob a ótica da Teoria de registros de representação semióticas, entre os anos de 2010 e 2015, do total de sessenta e três pesquisas analisadas, quatorze tinham como objeto de investigação o conteúdo função e destas apenas

[4]O Boletim de Educação Matemática é um periódico quadrimestral vinculado ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro

duas se dedicaram a análise de livros didáticos. As pesquisas supracitadas analisaram livros didáticos do ensino médio e ambas são de 2010.

Realizamos uma busca inicial no banco de teses e dissertações da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e da BDTD (Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações) utilizando as palavras chave “função”, “função afim”, “registros de representação semiótica”, “livro didático”.

Em seguida fizemos a leitura dos resumos e selecionamos as pesquisas que analisaram livros didáticos e função afim sob a perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. O resultado apontou apenas uma pesquisa que analisa livros didáticos do ensino fundamental e três pesquisas que analisaram livros didáticos do ensino médio, algumas com mais de 10 anos.

As pesquisas estão listadas no quadro abaixo

Quadro 8 – Resultado da busca no banco de teses da CAPES e BDTD

	AUTOR	**TÍTULO**	**INSTITUIÇÃO / NÍVEL / ANO**		
1	Claudia Schwartzbach	Análise de livros didáticos: Conceitos de relações e funções e suas múltiplas representações	UTFPR	MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT	2018
2	Lígia Maria Silva	O tratamento dado ao conceito de função em livros didáticos da educação básica	PUC-SP	MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA	2010
3	Maria José Almeida do Nascimento	Os contextos explorados no ensino da função afim nos livros didáticos de matemática do ensino médio.	UFPE	MESTRADO EM EDUCAÇÃO	2009
4	Luis Manuel Peliz Marques Bica	Funções em livros didáticos: relações entre aspectos visuais e textuais	PUC -SP	MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	2009

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Em sua pesquisa Schwartzbach (2018), investigou o conceito de relações e funções em livros do ensino fundamental e constatou que apenas um dos cinco livros didáticos analisados apresentou a transposição das múltiplas representações das funções de acordo com a Teoria de Duval. Em sua análise a pesquisadora destaca “a

forma fragmentada com que abordaram o conteúdo, não permitiu a transposição do conceito em suas variadas formas de representações dentro de um mesmo contexto.” (SCHWARTZBACH, 2018, p.144)

Concordamos com Schwartzbach (2018) que não é suficiente que o livro didático apenas apresente as múltiplas representações é necessário propor situações que estabeleçam conexões entre elementos de diferentes representações contribuindo para o entendimento dos conceitos abordados.

Silva (2010) fez uma análise comparativa com quatro coleções de livros didáticos, no intervalo compreendido entre os anos de 1984 e 2005, e buscou apresentar como o conceito de função é abordado por estes autores. Exibe um resumo comparativo das obras e conclui que existe uma ênfase maior no tratamento de registros tanto nos exemplos quanto nas atividades propostas e indica que as conversões são pouco exploradas. Outro aspecto que a autora destaca é a preocupação com o excesso de linguagem técnica na maioria das obras analisadas.

Nascimento (2009) realizou uma ampla discussão sobre os contextos das atividades de função afim, em 11 livros didáticos do 1° ano do ensino médio. Apesar de não utilizar a TRRS como referencial teórico da análise dos livros didáticos resolvemos manter em nossa revisão, pois a autora estabelece uma conexão entre os contextos e as representações semióticas em que reconhece que para além dos contextos estes “precisam explorar representações diversas e estimular as conversões entre os diferentes registros”. (NASCIMENTO, 2009, p.32)

Bica (2009) estava interessado em investigar principalmente a representação gráfica da função afim nos livros didáticos do 1°ano do ensino médio e como o livro articula os parâmetros algébricos e suas correspondentes unidades visuais, ou seja, verificar se os livros contemplavam a abordagem global proposta por Duval. Em sua análise destaca que dentre as três obras analisadas apenas uma não utiliza qualquer tipo de contextualização e alerta que o contexto é importante, pois é através do contexto que os alunos podem identificar situações do cotidiano e compreender a importância do tema. Esta mesma obra

> Perde a oportunidade de explorar a declividade, tratada algébrica e graficamente, para definir o coeficiente angular e articulá-lo com as variáveis visuais sentido de inclinação e ângulo com os eixos, já que fala em declividade positiva e negativa. (BICA, 2009, p.120)

Mesmo privilegiando uma linguagem “técnica” e deixando de contextualizar o conteúdo, alguns aspectos importantes para a compreensão do registro gráfico não são contemplados na obra.

Bica (2009) categorizou as atividades em tratamento e conversões, mas também analisou se as atividades possuem congruência semântica ou não. Um aspecto importante da TRRS que está diretamente relacionado com o custo cognitivo da atividade e que segundo Duval é uma das causas para as dificuldades dos alunos.

Diante das diferentes abordagens encontradas em sua análise de livros didáticos analisados Bica (2009) defende que é necessário que os professores consultem mais de um livro para explorar determinado conteúdo e a importância de ampliar os recursos didáticos “tirando proveito do avanço tecnológico para abordar e exercitar conceitos de diferentes formas”. (BICA, 2009, p. 142).

Importantes colaborações no estudo das funções e para educação matemática emerge dos grupos de pesquisa SEMEAR[5] e GEPEDiMa[6], do qual fazemos parte. Resultados de pesquisas como a de Silva (2020) que estava interessada em analisar a prática de um professor e como se relacionava a abordagem da função quadrática no livro didático sob a ótica da TRRS mostram a importância de investigações com abordagens semióticas. Em sua análise de livro didático a autora contemplou, entre outros elementos da TRRS, a categorização de atividades de conversão em congruentes e não congruentes de acordo com critérios estabelecidos por Duval. Fenômeno que implica diretamente nas dificuldades nos alunos e podem, por exemplo, contribuir para que um professor considere estes elementos no planejamento de suas aulas selecionando questões de modo a minimizar essas dificuldades.

Assim, cientes que todas as pesquisas citadas destacam a importância de trabalhar os diversos tipos de registros de representação semiótica propomos realizar uma análise da abordagem de função afim em livros didáticos de matemática que leve em conta elementos da TRRS, tais como a diversidade de registros, as atividades cognitivas de tratamento e conversão, os fenômenos de congruência e não congruência semântica e as abordagens nas conversões do registro algébrico para o

[5] Semear - Grupo de Pesquisa e Estudos em Ciências e Educação Matemática, coordenado pela orientadora dessa pesquisa, professora Rosinalda Teles.

[6] GEPEDiMa - Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática da Matemática

registro gráfico. Nesse sentido, para ratificar a pertinência desse estudo, passamos a discutir aspectos relacionados ao conceito de função e também à importância do livro didático.

3.2 UM BREVE HISTÓRICO DAS FUNÇÕES E SUAS REPRESENTAÇÕES

Nesta seção faremos um breve histórico das funções e suas representações. Para tanto, tomamos como referência os trabalhos de Flores (2006), Vázquez; Rey e Boubée (2006) e EVES (2011).

A definição de função, ao longo do tempo, passou por diversas reformulações e muito se deve ao desenvolvimento de novas formas de representar e mudanças na compreensão das representações. Antes das escritas algébricas, não existia uma notação definida para os objetos matemáticos e as letras e símbolos não significavam o que entendemos hoje. Segundo Flores (2006) desde antiguidade até a idade média a escrita matemática era baseada em geometria e retórica, em que os procedimentos geométricos, eram vistos como único caminho para resolução dos problemas. Com relação ao uso de símbolos considera:

> Se havia o uso de símbolos, entremeando a escrita, eles eram de característica individual, ou seja, criados momentaneamente para a elaboração rápida de um texto, sendo de compreensão exclusiva para aquele que os criara. (FLORES, 2006 p. 4-5)

As letras e símbolos serviam para situações pontuais e até então a ideia atual de representação ainda não estava presente. Nas civilizações da antiguidade não existia a ideia abstrata de variável, ainda assim nesse período se desenvolvem implicitamente as primeiras ideias relacionadas ao conceito de função (VÁZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008)

Povos babilônicos, por exemplo, apesar de não lidar diretamente com o conceito de função, este estava implícito nas tabuletas[7] astronômicas em que eram registradas as posições dos astros, uma vez que estes registros estavam ligados por operações aritméticas (VÁZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008)

[7] Placas de argila com escrita cuneiforme

Para Flores (2006) os sistemas de signos até meados do Renascimento[8] era baseado na ideia de imitação. Nesse sentido, a autora conclui que

> [...] o signo, a visibilidade do signo, está na própria coisa, não havendo nada de oculto. Portanto, a relação do signo com seu conteúdo era assegurada na ordem das próprias coisas. De modo que a operação de representação era baseada na imitação, mantendo uma correspondência analógica com o mundo estável preexistente. (FLORES, 2006, p.5)

É durante a segunda metade do Renascimento que o conceito de representação deixa de estar vinculado à ideia de imitação e semelhança passando a assumir uma ideia de relação binaria entre significado e o referente (objeto). Essa mudança foi fundamental para o surgimento de novas linguagens e a consolidação da escritura simbólica (Flores, 2006).

Nesse período, destacam-se matemáticos como Viète (1540-1603), Descartes (1596-1650) e Leibniz (1646-1716), que ajudaram a construir e desenvolver estas novas linguagens matemáticas. Viète, utilizava vogais e consoantes para representar incógnitas e constantes, respectivamente, e seus trabalhos nas áreas de trigonometria, geometria e álgebra são considerados um marco no desenvolvimento da linguagem matemática. Para Flores (2006) é somente com Descartes que de fato "ocorre uma verdadeira função da representação simbólica", uma vez que Viéte oscilava entre retorica e simbologia. Descartes em 1637, desenvolveu o sistema de coordenadas cartesianas e introduziu a convenção atual de utilizar as últimas letras do alfabeto para variáveis e as primeiras letras para constantes. Eves (2011) ressalta que as contribuições do matemático Oresme (1325-1382) podem ter influenciado no desenvolvimento do sistema de coordenadas cartesianas, proposto por Descartes.

No século XVII temos pela primeira vez a introdução da palavra função atribuída a Leibniz (1646-1716) em 1694, que inicialmente possuía uma definição geométrica associando qualquer quantidade que varia a um ponto em uma curva. As palavras coordenadas, ordenadas e abscissa, com o sentido que tem hoje também são contribuições de Leibniz. Para Flores (2006, p. 9) "será somente com Leibniz que ocorrerá uma real abstração do objeto". Para a autora as contribuições de Leibniz possibilitaram

> O desenvolvimento da matemática pura, que permitiu a construção, por exemplo, do edifício da teoria das funções, como também da geometria

[8] Renascimento ou renascença, foi um movimento na Europa que começou no final da idade média, no século XIV e terminou no século XVI dando inicio a idade moderna.

> diferencial. Criam-se, enfim, novos símbolos, novas técnicas, novas formas de representação.” (FLORES, 2006, p. 9)

No século XVIII temos o surgimento de outras definições para as funções. Segundo Eves (2011) em 1718, o matemático Bernoulli definiu uma função como uma expressão qualquer formada de uma variável e algumas constantes. Tempos depois Euler amplia a definição de Bernoulli dizendo que uma função é uma “equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes.” (EVES, 2011, p. 661). Euler também é responsável pela criação da notação f(x) utilizada até hoje.

Dos estudos que envolviam propagação de calor desenvolvidos por Fourier (1768-1830) surgiu a necessidade de uma nova definição que o levou a considerar uma função como uma relação mais geral do que as definições propostas anteriormente (EVES, 2011).

Nesse contexto, buscando uma definição mais ampla que contemple o que as anteriores não foram suficientes Dirichlet (1805 - 1859) propôs à seguinte formulação:

> Uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é uma função (unívoca) de x. A variável x, à qual se atribuem valores à vontade, é chamada variável independente e a variável y, cujos valores dependem dos valores de x, é chamada variável dependente. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o campo de definição da função e os valores assumidos por y constituem o campo de valores da função. (EVES, 2011 p. 661)

No final do século XIX, com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos[9] diversos conceitos matemáticos passaram por reformulações e segundo Eves (2011)

> As noções de espaço e geometria de um espaço, por exemplo, passaram por uma revolução completa com a teoria dos conjuntos. Os conceitos básicos da análise, como os de limite, função, continuidade, derivada e integral ganharam uma formulação muito mais conveniente em termos das ideias da teoria dos conjuntos. (EVES, 2011, p. 659)

Vásquez; Rey; e Boubée (2008) apresentam o seguinte quadro que sintetiza a evolução do conceito de função ao longo de três séculos.

[9] Desenvolvida pelo matemático alemão Georg Cantor (1845-1918)

Quadro 9 – Evolução da definição de função em três séculos

Século	**Definição**
XVII	Qualquer relação entre variáveis
	Uma quantidade obtida de outras quantidades por operações algébricas ou qualquer outra operação imaginável
	Qualquer quantidade que varia de um ponto a outro em uma curva
	Quantidades formadas usando expressões algébricas e variáveis transcendentais e constantes
XVIII	Quantidades que dependem de uma variável
	Função de uma certa variável como uma quantidade que é composto de variáveis e constantes de alguma forma
	Qualquer expressão útil para calcular
XIX	Correspondência entre variáveis
	Correspondência entre o conjunto A e os números Reais
	Correspondência entre os conjuntos

Fonte: Vásquez; Rey; e Boubée (2008, p.153)

Temos, a partir do quadro acima, que entre os séculos XVII e XVIII com o desenvolvimento da escrita algébrica a definição de função passou a incorporar a ideia de expressão algébrica. E conforme a linguagem matemática se desenvolvia a definição de função também passava por reformulações e, na teoria dos conjuntos, ganhou outros contornos que permanecem até os dias atuais.

Segundo a teoria dos conjuntos, uma função f, está definida como um conjunto qualquer de pares ordenados que satisfazem a seguinte condição:

> se $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$ e $a_1=a_2$, então $b_1=b_2$. O conjunto A dos primeiros elementos dos pares ordenados chama-se domínio da função e o conjunto B de todos os segundos elementos dos pares ordenados se diz imagem da função. (EVES, 2011, p. 661)

3.3 A IMPORTÂNCIA DOS LIVROS DIDÁTICOS

Atualmente, diante dos avanços tecnológicos, os professores dispõem de vários recursos para utilizar em suas aulas. Estes podem ser físicos (concretos) ou digitais, tais como: lousa digital, projetor, jogos, mapas, softwares, internet, entre outros. Ainda assim o livro didático permanece ocupando um papel central. Podemos fazer tal afirmação, pois diante de uma realidade tão desigual no nosso país, em

alguns casos, o livro didático é o recurso mais acessível tanto para professores quanto para os estudantes.

Lajolo (1996) faz uma distinção entre o que seria um livro didático e um livro não-didático, para a autora um livro não-didático destina-se apenas a leitura individual, mas não propõe qualquer gesto que ultrapasse esta leitura. Com relação aos livros didáticos faz as seguintes considerações

> é o livro que vai ser utilizado em aulas e cursos, que provavelmente foi escrito, editado, vendido e comprado, tendo em vista essa utilização escolar e sistemática. Sua importância aumenta ainda mais em países como o Brasil, onde uma precaríssima situação educacional faz com que ele acabe determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, marcando, pois, de forma decisiva, o que se ensina e como se ensina o que se ensina. (LAJOLO, 1996, pág. 2)

Entendemos o livro didático como um recurso que contribui para o aprendizado servindo de ponto de partida para as discussões e mais do que isso deve ser uma fonte confiável de informações, uma referência para estudantes e professores.

Para Carvalho e Lima (2010, p. 15) o livro didático de matemática é “o portador de escolhas sobre o saber a ser ensinado”, pois apresentam métodos que julgam mais eficazes para a aprendizagem dos estudantes, além da seleção e organização dos conteúdos. Reconhecendo a sua importância e papel que este recurso desempenha Carvalho e Lima (2010, p. 15) reforçam que “o livro não deve ser o único suporte do trabalho do professor” sendo desejável sempre que possível a utilização de outros recursos e a adequação “para o grupo de estudantes que o utilizam”.

Nessa perspectiva, diante da importância dos livros didáticos de matemática é necessário que a qualidade dessas obras seja submetida algum tipo de avaliação.

Segundo Valente (2004) antes do governo brasileiro atuar na avaliação e aprovação dos livros didáticos essa iniciativa era realizada de maneira particular em uma seção da Revista Brasileira de Matemática[10]. Somente em 1938 é criada a Comissão Nacional do Livro Didático, sendo responsável pela avaliação oficial de livros didáticos pelo governo brasileiro.

Atualmente, no Brasil o acesso ao livro didático nas escolas públicas é garantido por meio do Programa nacional do livro didático (PNLD), sendo responsável pela aquisição, avaliação e distribuição destas obras. O programa foi criado em 1985, mas somente a partir do ano de 1996 o PNLD começa a realizar a análise das

[10] Periódico brasileiro, publicado a partir de 1929, com temas especificamente de Matemática

coleções de livros didáticos e a cada edição produz o Guia do Livro Didático que reúne todas as obras aprovadas. Sem dúvidas se trata de uma política pública importante no país e sem ela o acesso ao livro didático o seria dificultado.

Para termos uma ideia do tamanho deste programa segundo dados disponíveis no portal do FNDE[11], entre 2019 e início de 2020, foram distribuídos mais de 172 milhões de exemplares de livros didáticos para estudantes e professores da educação básica do país, com custo de R$ 1,39 bilhão, estes números demonstram a importância dessa política pública e o papel de protagonista do livro didático nas políticas educacionais brasileiras.

Como dito anteriormente, o livro didático desempenha um importante papel no ensino-aprendizagem. Diante disso, é preciso que existam critérios sólidos que asseguram sua qualidade e devida aprovação. O Guia do Livro Didático estabelece que serão excluídas, por exemplo, obras que não apresentem

> 3. Coerência e adequação da abordagem teórico-metodológica
> 4. Correção e atualização de conceitos, informações e procedimentos;
> 5. Adequação e a pertinência das orientações prestadas ao professor; (BRASIL, 2019, p.11)

Acreditamos que de acordo com o que pretendemos analisar nos livros didáticos, em particular, as atividades (propostas e resolvidas), o manual do professor e a parte expositiva, os critérios destacados acima contribuem para nossa análise, uma vez que todas as obras analisadas passaram por este processo de avaliação.

Sendo assim, estamos interessados em analisar à luz da Teoria de Registros de Representação Semióticas a abordagem da função afim em livros didáticos do 9° ano do ensino fundamental. A opção pelo 9º ano deve-se ao fato de ser nesse ano escolar que os documentos curriculares sugerem a introdução desse conteúdo, e também em virtude da minha experiência profissional, como relatado na introdução deste trabalho.

[11] Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa propõe uma análise qualitativa e de aspectos quantitativos da introdução e das atividades referentes ao conteúdo função afim em livros didáticos de matemática para o 9° ano do Ensino Fundamental, à luz da Teoria dos Registros de Representações Semióticas. A análise será especificamente no capítulo referente ao conteúdo de função, com foco na função afim.

Adotamos o método da Análise de Conteúdo proposto por Bardin (1977). A autora organiza o método em três etapas:

I. Pré-análise
II. Exploração do material
III. Tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação

A Pré-análise é a fase de organização do material a ser analisado. Esta etapa compreende:

a) Leitura flutuante: o pesquisador está sujeito às primeiras impressões e estabelece contato com os documentos que vai analisar. O objetivo é aprofundar a leitura no tema e nos materiais a serem analisados de maneira que o processo se torne cada vez mais específico e preciso, em função de hipóteses emergentes da leitura (BARDIN, 1977, p.96). Nesta etapa, estamos interessados em conhecer o tema e começar a pensar em problemas de pesquisa para que depois seja realizada a escolha dos documentos.

b) Escolha de documentos: Uma vez estabelecido o contato com os documentos é necessário escolher quais documentos vão compor o corpus da pesquisa. Bardin (1977) cita as principais regras para a escolha de documentos: regra da exaustividade; regra da representatividade; regra da homogeneidade; e regra de pertinência.

c) Formulação de hipóteses e objetivos: Uma hipótese “trata-se de uma suposição cuja origem é a intuição e que permanece em suspenso enquanto não for submetida à prova de dados seguros”. (BARDIN, 1977, p.98). Enquanto o objetivo é a finalidade geral do estudo se refere ao que o pesquisador está propondo.

d) Referenciação dos índices e a elaboração de indicadores: Segundo Bardin (1977) estabelecer os índices é um trabalho preparatório para a análise. Os índices estão relacionados a elementos do texto que serão analisados, estes são estabelecidos de modo que ajudem na comprovação ou não das hipóteses. Os indicadores se constituem a partir da definição dos índices.

> Uma vez escolhidos os índices, procede-se à construção de indicadores precisos e seguros. Desde a pré-análise devem ser determinadas operações: de recorte do texto em unidades comparáveis de categorização para análise temática e de modalidade de codificação para o registo dos dados. (BARDIN, 1977, p.100).

e) preparação de material: é a etapa que precede a análise propriamente dita e consiste na separação do material, transcrições, classificação por equivalência.

A fase de exploração do material é “longa e fastidiosa e compreende as operações de codificação, desconto ou enumeração em função de regras previamente formuladas” (BARDIN, 1977, p. 101). Esta fase depende diretamente das diferentes operações estabelecidas na fase de pré-análise.

Por fim, o tratamento dos resultados obtidos e a interpretação. É a fase onde o pesquisador realiza o tratamento de dados de forma que sejam significativos e válidos.

Segundo Bardin (1977, p.101) “O analista tendo à sua disposição resultados significativos e fiéis, pode então propor inferências e adiantar interpretações a propósito dos objetivos previstos, ou que digam respeito a outras descobertas inesperadas.”

Em nossa pesquisa, a pré-análise compreende as leituras iniciais, a revisão bibliográfica, a escolha dos documentos e as categorias de análise que estabelecemos.

Observando as regras de pertinência, representatividade, homogeneidade e exaustividade, optamos por analisar cinco coleções de livros didáticos de matemática do 9° ano do ensino fundamental mais solicitadas em escolas públicas brasileiras, a partir dos dados do PNLD-2020. A escolha das coleções foi realizada por meio de uma consulta no site do FNDE (Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação), na área de dados estatísticos do PNLD, a partir da planilha “Valores de aquisição anos finais do ensino fundamental”. Na planilha, depois de identificar todos os livros de matemática, do 9º ano do ensino fundamental, selecionamos os cinco livros com maior

quantidade de solicitações pelas escolas públicas. O quantitativo representa cerca de 80% do total de solicitações de livros didáticos de matemática do 9º ano de todo país.

O Quadro 10 indica as obras selecionadas para este estudo e suas respectivas codificações.

Quadro 10 – Livros didáticos selecionados e sua codificação

Nome do livro didático	**Código**
A conquista da matemática, 9° ano, ensino fundamental, anos finais / José Ruy Giovanni Júnior, Benedito Castrucci – 4ª edição – São Paulo, FTD, 2018.	LD-1
Teláris matemática, 9° ano, ensino fundamental, anos finais / Luiz Roberto Dante – 3ª edição – São Paulo, Ática, 2018.	LD-2
Matemática – Bianchini, 9° ano, ensino fundamental, anos finais / Edwaldo Bianchini – 9ª edição – São Paulo, Moderna, 2018.	LD-3
Araribá mais – Matemática, 9° ano, ensino fundamental, anos finais / Organizadora Editora Moderna, obra coletiva, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna, editores responsáveis Maria Garcia Gay, Willian Raphael Silva – 1ª edição – São Paulo, Moderna, 2018	LD-4
Matemática realidade & tecnologia, 9° ano, ensino fundamental, anos finais / Joamir Roberto de Souza – 1ª edição – São Paulo, FTD, 2018.	LD-5

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Resultados de pesquisas anteriores, bem como a leitura de documentos de orientação ao professor como a BNCC e o Currículo de Pernambuco possibilitaram a formulação da hipótese de pesquisa e dos objetivos. Temos por hipótese que os registros de representação semiótica, da função afim, quando abordados nos livros didáticos de modo a favorecer a conversão entre registros (nos dois sentidos), podem contribuir para a devida distinção entre o objeto e suas representações, nesse sentindo, o objetivo desse estudo é analisar à luz da Teoria de Registros de Representação Semióticas a abordagem da função afim em livros didáticos do 9° ano do ensino fundamental.

Por fim, ainda nessa etapa, a partir de elementos da TRRS foram estabelecidas categorias e variáveis para refinamento dos dados qualitativos e quantitativos que foram coletados especificamente no capítulo que aborda função afim nos livros didáticos escolhidos que fornecerão os dados para posterior análise. O quadro abaixo apresenta tais categorias de análise e as variáveis:

Quadro 11 – Categorias de análise e variáveis

Categorias	**Variáveis**
Registros de representação semióticas da função afim em livros didáticos de matemática para o 9º ano.	● Registro Língua natural ● Registro Gráfico ● Registro Algébrico ● Registro Tabular
Transformações de representações semióticas em atividades de função afim em livros didáticos de matemática para o 9º ano.	● Tratamento ● Conversão
Abordagens na conversão entre registro gráfico ↔ registro algébrico	● Ponto a ponto ● Por extensão do traçado ● Interpretação global de propriedades figurais
Fenômenos de congruência semântica	● Congruência semântica ● Não congruência semântica

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

5 ANÁLISES DOS LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo apresentamos as análises dos cinco livros didáticos de matemática do 9°ano do ensino fundamental. A análise está dividida nos seguintes tópicos: caracterização do livro didático; diversidade dos registros de representação semiótica; as transformações das representações semióticas (tratamentos e conversões), em particular, as abordagens da conversão entre os registros algébrico e gráfico; e análise do fenômeno congruência e não congruência semântica nas conversões entre registros.

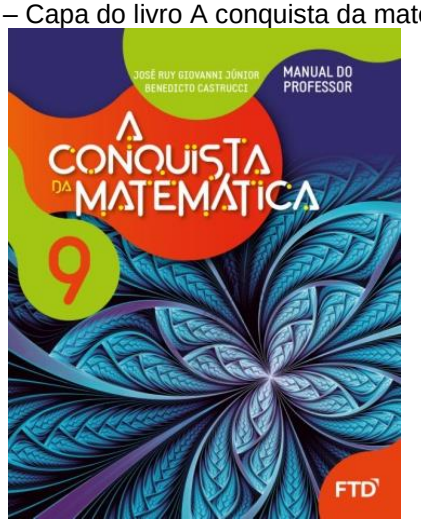
5.1 CARACTERIZAÇÃO DOS LIVROS DIDÁTICOS

Nesta seção faremos uma breve descrição das cinco obras analisadas neste estudo, incluindo informações gerais destas obras, tais como a organização dos capítulos, as seções e o capítulo específico que aborda função afim. Destacamos que todas foram aprovadas pelo PNLD 2019.

5.1.1 A conquista da matemática

O LD-1 de José Ruy Giovanni Júnior e Benedito Castrucci, do 9°ano do ensino fundamental, 4ª edição, publicado pela editora FTD no ano de 2018.

Figura 3 – Capa do livro A conquista da matemática



Fonte: Giovanni Júnior, Castrucci (2018)

A obra é constituída de 328 páginas e dividida em 9 unidades. Cada unidade é subdividida em capítulos, ao todo o livro didático possui 29 capítulos. Além da divisão em unidades e capítulos, o livro didático possui 15 seções: Abertura de unidade; Fórum, Atividades; Pense e Responda; Para quem quer mais; Sabia que...; Um novo olhar; Descubra mais; Nós; Por toda parte; Educação financeira; Tratamento da informação; Tecnologias; Atualidades em Foco; Retomando o que aprendeu; e Respostas.

Realizamos a análise da nona unidade deste livro didático. No Quadro 12, a seguir, sistematizamos como a nona unidade deste livro didático é organizada.

Quadro 12 – Organização da unidade referente ao conteúdo de funções no LD A Conquista da Matemática (9ºano)

Capítulos	**Número de Páginas**	**Tópicos**	**Seções**
Introdução	2	-	● ABERTURA DA UNIDADE
1. A noção de função	4	▪ Domínio e conjunto imagem de ▪ uma função	● ATIVIDADES ● EDUCAÇÃO FINANCEIRA
2. Função Afim	8	▪ Função linear ▪ Gráfico da função afim ▪ Zero da função afim	● ATIVIDADES ● NÓS ● POR TODA PARTE ● TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO
3. Função quadrática	18	▪ Gráfico da função quadrática ▪ Zeros da função quadrática ▪ Concavidade da parábola ▪ Traçando o gráfico de uma função ▪ quadrática no plano cartesiano ▪ Ponto de mínimo e ponto de máximo da função quadrática	● ATIVIDADES ● FÓRUM ● TECNOLOGIAS ● RETOMANDO O QUE APRENDEU ● UM NOVO OLHAR ● ATUALIDADES EM FOCO

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Na abertura da unidade, o livro didático opta por iniciar a explicação dizendo que os modelos matemáticos são utilizados em diversas situações do cotidiano e contextualiza o conteúdo de função com a disciplina de Física. Traz o exemplo do

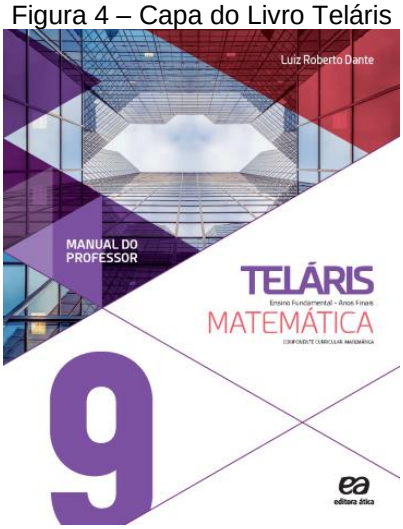
movimento retilíneo uniforme que relaciona a posição de um corpo em função da passagem de tempo.

Ainda na abertura relaciona o movimento o lançamento de projéteis, através de ilustrações (representações figurais), com a representação gráfica de uma função quadrática com as variáveis tempo e espaço e a trajetória remetendo a uma parábola.

5.1.2 Teláris

O LD-2 de Luiz Roberto Dante, do 9°ano do ensino fundamental, 3ª edição, publicado pela editora Ática no ano de 2018.

Figura 4 – Capa do Livro Teláris



Fonte: Dante (2018)

A obra possui 312 páginas e contém 9 capítulos que se dividem em 30 tópicos. Este livro didático possui 13 seções: Atividades, Explorar e descobrir, jogos, leitura, matemática e tecnologia, revisando seus conhecimentos, verifique o que estudou, testes oficiais, raciocínio lógico, você sabia?, bate-papo, um pouco de história, atividade resolvida passo a passo.

A análise concentra-se no “Capítulo 4 - Explorando a ideia de função”, especificamente no terceiro tópico intitulado “Representação gráfica de uma função” em que o livro didático aborda o conteúdo de função afim. O capítulo está organizado da seguinte forma.

Quadro 13 – Organização do Capítulo referente ao conteúdo de funções no LD Teláris Matemática (9ºano)

Tópicos	Número de Páginas	Subtópicos	Seções
1 A ideia intuitiva de função	6	• Função: uma relação de dependência unívoca entre 2 variáveis	• Atividades • Explorar e descobrir
2 A noção de função por meio de conjuntos	8	• Definição e notação • Valor de uma função • Domínio, contradomínio e conjunto imagem	• Atividades • Atividade resolvida passo a passo Leitura
3 Representação gráfica de uma função	17	• Construção do gráfico de uma função • Zeros de uma função • Reconhecendo se um gráfico é de uma função • Resolução de problemas que envolvem o conceito de função • Função afim • Gráfico de uma função afim • Funções e sistemas de 2 equações do 1o grau	• Atividades • Explorar e descobrir • Leitura • Bate-papo • Revisando seus conhecimentos • Testes oficiais • Verifique o que estudou

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

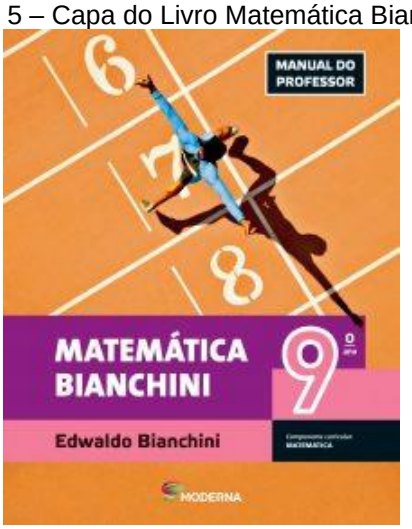
Destacamos que neste livro os autores apresentam formalmente a função afim depois das ideias iniciais de função e apresentar conceitos importantes, tais como, domínio, contradomínio e imagem.

Também apresentam a construção dos gráficos, utilizando a abordagem ponto a ponto, bem como o reconhecimento se é função ou não a partir do registro gráfico para só então formalizar a função afim como um caso particular de função com a seguinte definição "*Uma função* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é chamada de função afim quando pode ser escrita na forma* $y = ax + b$*, com a e b números reais.*"

5.1.3 Matemática Bianchini

O LD-3 de Edwaldo Bianchini, do 9°ano do ensino fundamental, 9ª edição, publicado pela editora Moderna no ano de 2018.

Figura 5 – Capa do Livro Matemática Bianchini



Fonte: Bianchini (2018)

A obra, aprovada pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) 2020, possui 312 páginas e contém 12 capítulos que se dividem em 48 tópicos. Este livro didático possui 9 seções: Pagina de abertura; Apresentação dos conteúdos; Exercícios propostos; Exercícios complementares; Para saber mais, Diversificando; Pense mais um pouco; e Trabalhando a informação.

A análise concentra-se no “Capítulo 10- Estudo das funções”, especificamente no segundo tópico intitulado “Função polinomial do 1° grau” em que o livro didático aborda o conteúdo de função afim. O capítulo está organizado da seguinte forma.

Quadro 14 – Organização do Capítulo referente ao conteúdo de funções no LD Matemática - Bianchini (9ºano)

Tópicos	**Número de Páginas**	**Subtópicos**	**Seções**
1. Conceito de função	12	• Função, um longo caminho na história da matemática • Gráfico de uma função • Como reconhecer o gráfico de uma função	• Pagina de abertura • Apresentação dos conteúdos • Para saber mais • Exercícios propostos • Pense mais um pouco
2. Função polinomial do 1° grau	9	• Gráfico de uma função polinomial do 1° grau • Variação de uma função polinomial do 1° grau • Uso de computador: retas • Estudo do sinal de uma função polinomial do 1° grau • Proporcionalidade na função linear	• Apresentação dos conteúdos • Para saber mais • Exercícios propostos • Pense mais um pouco • Exercícios complementares

3. Função polinomial do 2° grau	20	• Gráfico de uma função polinomial do 1° grau • Zeros de uma função polinomial do 2° grau • Coordenadas do vértice da parábola • Valor máximo e valor mínimo de uma função polinomial do 2° grau • Construção do gráfico de uma função polinomial do 2° grau • Uso do computador: parábolas • Estudo do sinal de uma função polinomial do 2° grau • Sistema de equações do 2° grau	• Apresentação dos conteúdos • Para saber mais • Exercícios propostos • Exercícios complementares • Diversificando

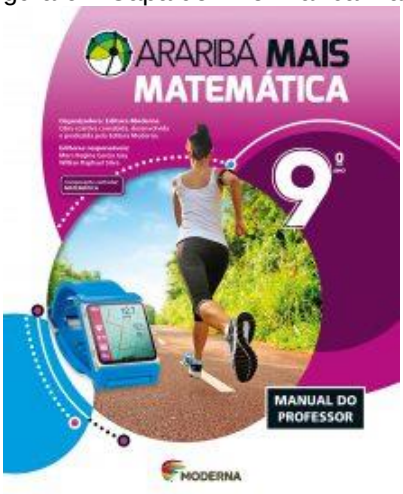
Fonte: Elaborado pelo autor 2021

Os autores adotam o termo “função polinomial do 1° grau” e não há nenhuma referência ao termo “função afim”. Iniciam o capitulo apresentando “situações” no registro língua natural, em que é realizada a conversão para o registro algébrico, passando pelo registro tabular.

5.1.4 Araribá Mais

O LD-4 de Mara Regina Garcia Gay e Willian Raphael Silva, do 9°ano do ensino fundamental, 1ª edição, publicado pela editora Moderna no ano de 2018.

Figura 6 – Capa do livro Araribá Mais



Fonte: Gay e Silva (2018)

A obra contém 4 unidades que se dividem em 10 capítulos. Este livro didático possui 12 seções: Página de abertura; Apresentação dos conteúdos; Vamos aplicar; Estatística e probabilidade; Informática e matemática; Atividades complementares; Compreender um texto; Educação financeira; Problemas para resolver; Trabalho em equipe; Para finalizar: organize suas ideias; e Para conhecer mais.

A análise concentra-se no “Capítulo 9- Função afim”, onde o livro didático aborda o conteúdo de função afim. O capítulo está organizado da seguinte forma.

Quadro 15 – Organização do Capítulo referente ao conteúdo de funções no LD Araribá Mais - Matemática (9ºano)

Tópicos	**Número de Páginas**	**Subtópicos**	**Seções**
1 Função afim	10	• Gráfico da função afim • Zero da função afim • Analise do gráfico de uma função afim	• Apresentação dos conteúdos • Vamos aplicar • Informática e matemática
2. Função linear e proporcionalidade	7		• Apresentação do conteúdo • Vamos aplicar • Estatística e probabilidade • Atividades complementares

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Este livro didático introduz o conteúdo de função afim a partir de uma situação em língua natural, utiliza um contexto do cotidiano, e apresenta as representações tabular, algébrica e gráfica.

5.1.5 Matemática realidade & tecnologia

O LD-5 de Joamir Roberto de Souza, do 9°ano do ensino fundamental, 1ª edição, publicado pela editora FTD no ano de 2018.

Figura 7 – Capa do livro Matemática realidade & tecnologia

Fonte: Souza (2018)

A obra contém 8 unidades que se dividem em 21 tópicos. Este livro didático possui 10 seções: Abertura de unidade; Conteúdo; Para pensar; Atividades; Fique ligado; Integrando com; Você cidadão; Você conectado; Dica; e O que estudei.

A análise concentra-se na “Unidade 4- Proporcionalidade e funções”, em que o livro didático aborda o conteúdo de função afim. A unidade está organizada da seguinte forma.

Quadro 16 – Organização do Capítulo referente ao conteúdo de funções no LD Matemática realidade & tecnologia (9ºano)

Tópicos	**Número de Páginas**	**Subtópicos**	**Seções**
Proporcionalidade	10	• Razão • Proporção • Grandezas diretamente proporcionais • Grandezas inversamente proporcionais	Apresentação do conteúdo Atividades
Noção de função	16	• Gráfico de uma função	• Apresentação do conteúdo • Atividades • Você cidadão • Você conectado • Mãos a obra • O que estudei

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

O livro didático não define função afim ou quadrática e aborda esses conteúdos juntos. Na parte do aluno não encontramos, por exemplo, os termos “função afim” ou “função polinomial do 1° grau”, há apenas uma ocorrência no manual do professor que sugere que o professor pode comentar que esses conteúdos serão aprofundados no ensino médio.

No início do tópico “noção de função” é apresentada a lei da função a partir de da conversão do registro língua natural passando pelo registro tabular. A parte de exposição do conteúdo não contempla alguns conceitos importantes como crescimento e decrescimento da função.

Em todos os livros didáticos analisados as orientações para os professores estão presentes nas margens de cada página[12] ao longo das obras. O momento em que o conteúdo de função é abordado em cada obra é semelhante nos LD-2 e LD-5, situado na metade dos livros didáticos e precedidos pelo capítulo que aborda razão e proporção. Os demais livros didáticos (LD-1, LD-3 e LD-4) propõem o estudo das funções nos últimos capítulos. Em relação ao quantitativo de páginas dedicadas ao capítulo aborda o conteúdo de função[13] é maior no LD-2 com 31 páginas, seguido do LD-3 com 21 páginas ao passo que é menor no LD-1 com 12 páginas.

Destacamos que cada livro didático parte de perspectivas diferentes e cabe ressaltar que este estudo não tem a intenção de qualificar ou desqualificar as obras analisadas, o que fizemos foi uma análise a partir de elementos da TRRS identificando se as obras os contemplavam ou não. A partir de outros referenciais teóricos os resultados podem ser distintos do que o que encontramos.

5.2 DIVERSIDADE DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Para a TRRS, trabalhar múltiplas representações evita que o estudante confunda o objeto matemático com sua representação. A fim de responder ao nosso primeiro objetivo específico, que consiste em *identificar a ocorrência dos diversos registros de representação semióticas da função afim em livros didáticos de matemática para o 9º ano,* analisamos a diversidade dos registros em 470 itens

[12] Manual em formato U.
[13] Consideramos o quantitativo de páginas desde a introdução a função (ideias iniciais, noções) até a apresentação da função afim.

distribuídos em 191 questões de acordo com o quadro abaixo. Nos referimos a itens como as solicitações das questões, tais como a,b,c,d etc.

Tabela 2 – Distribuição das atividades em itens e questões

Livros didáticos analisados	Itens	Questões
LD-1	54	28
LD-2	101	43
LD-3	116	39
LD-4	143	60
LD-5	56	21

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Os dados da Tabela 2 apontam que o quantitativo de itens e questões, nos livros didáticos analisados, tem uma variação significativa. Temos que o LD-4 possui quase o triplo de itens que os LD-1 e LD-5. Diante deste fato optamos por utilizar os valores percentuais para possibilitar a comparação entre as obras, pois dessa forma estabelecemos uma relação proporcional. A Tabela 3 sintetiza a diversidade de registros de representação semiótica nos cinco livros analisados em que contabilizamos os registros de partida de cada item.

Tabela 3 – Diversidade dos registros de representação semiótica nos livros didáticos analisados

Livros didáticos analisados	Registro algébrico	Registro língua natural	Registro gráfico	Registro tabular
LD-1	48,98%	17,35%	22,45%	11,22%
LD-2	48,07%	37,02%	12,71%	2,20%
LD-3	47,06%	25,98%	23,53%	3,43%
LD-4	45,63%	24,33%	22,43%	7,61%
LD-5	46,67%	18,89%	23,33%	11,11%

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

O registro algébrico se aproxima de 50% em todas as obras analisadas, os registros língua natural e gráfico se alternam entre segundo e terceiro lugar. Apesar do registro tabular aparecer de modo explícito menos vezes nos livros analisados, salientamos que podem surgir nas resoluções de atividades, uma vez que é um dos

procedimentos sugeridos nos os livros didáticos analisados. Optamos por não contabilizar registros intermediários por entender que dependem da estratégia de resolução do estudante. O quantitativo maior do registro algébrico decorre do fato deste registro estar presente na maior parte dos tratamentos e conversões, como veremos mais adiante.

Apontamos como inadequada a ênfase no registro algébrico, principalmente para este ano escolar, uma vez que vai de encontro ao que preconizam os documentos oficiais, tais como, o Currículo de Pernambuco, que sugere evitar a sistematização precoce, inclusive sendo indicado como um dos fatores que geram dificuldades nos estudantes (SILVA, 2020; SILVA, 2010; BICA, 2009). Em termos da TRRS, Duval (2003) destaca que os estudantes têm mais sucesso em atividades monorregistros (tratamentos), mas desenvolver apenas um registro de representação pode causar o que ele define como enclausuramento de registro, que é a incapacidade do estudante “reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes”. (DUVAL, 2003, p.21).

5.3 AS TRANSFORMAÇÕES DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Nesta seção, vamos analisar as atividades de tratamento e conversão, em particular, as abordagens da conversão entre os registros algébrico e gráfico, que corresponde ao nosso segundo objetivo específico.

Para isso, classificamos as atividades resolvidas e as atividades propostas em tratamentos e conversões. Consideramos 470 itens para análise, dos quais 202 são atividades de tratamento e 337 atividades de conversão. Salientamos que o total de tratamentos e conversões é superior ao quantitativo de itens pois em alguns casos o item solicitava mais de uma conversão ou simultaneamente exploravam tanto tratamento como conversão. Desconsideramos um dos itens por se tratar de uma questão aberta que solicitava a elaboração de um problema o que impedia de ser classificado. Por outro lado, essa impossibilidade de categorizar, nos levou a refletir sobre as possibilidades de mobilização das transformações pelos estudantes e a sinalização para possibilidades de estudos futuros que tenham como foco a ação dos estudantes.

A tabela 3 ilustra a distribuição das atividades entre tratamentos, conversões e os itens que solicitavam, simultaneamente, as duas transformações de representações semióticas.

Tabela 4 – Quantitativo de atividades de tratamento e conversão por livro didático

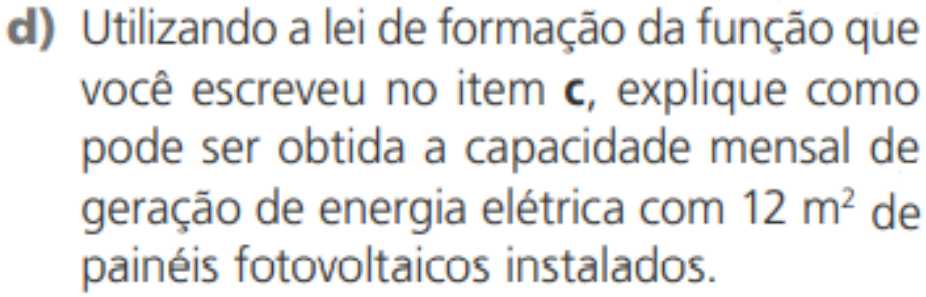
Livro didáticos analisados	Tratamento	Conversão	Tratamento e conversão
LD-1	44,83%	51,72%	3,45%
LD-2	32,33%	61,65%	6,02%
LD-3	30,61%	65,31%	4,08%
LD-4	38,27%	59,26%	2,47%
LD-5	41,27%	52,38%	6,35%

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Em todas as obras o quantitativo de atividades de conversão é superior ao número de atividades de tratamentos. O quantitativo maior de conversões está de acordo com o que defende a TRRS, Duval (2003, p.30) diz que “uma das características mais importantes da atividade matemática é a diversidade de registros de representação que ela mobiliza obrigatoriamente” e conclui que para entender as dificuldades de aprendizagem em matemática “é preciso estudar prioritariamente a conversão das representações e não os tratamentos”. As conversões mobilizam ao menos dois registros de representação semiótica e, segundo a TRRS, contribuem para que não haja confusão entre objeto e representação, sendo também responsável por desenvolver no estudante a coordenação entre registros, que é fundamental para aprendizagem em matemática.

Destacamos que o LD-3, possui mais que o dobro de conversões do que tratamentos, enquanto LD-1 e LD5 a distribuição é mais equilibrada. Os LD-2 e LD-5 possuem a maior quantidade de itens que propõem tratamentos e conversões simultaneamente. O item da Figura 8 é um exemplo de item que solicita tratamento e conversão.

Figura 8 – Exemplo de item classificado como Tratamento e Conversão



Fonte: Souza (2018, p. 131)

Classificamos como tratamento no registro algébrico o cálculo da “capacidade mensal de geração de energia elétrica com 12m²” a partir da lei da função. Enquanto que o termo "explique" sugere a conversão do registro algébrico para o registro língua natural, pois o estudante devera argumentar em língua natural o resultado encontrado.

5.3.1 Tratamento

Nas atividades classificadas como tratamento foram identificados tratamentos no registro algébrico e no registro língua natural. A Tabela 5 ilustra a distribuição dos tratamentos contemplados nos livros didáticos analisados.

Tabela 5 – Tratamentos nos livros didáticos analisados

Livros didáticos analisados	Tratamento algébrico	Tratamento em língua natural
LD-1	100%	0%
LD-2	95%	5%
LD-3	93%	7%
LD-4	90%	10%
LD-5	85%	15%

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

De 202 atividades classificadas como tratamento, apenas 15 eram no registro língua natural sendo o restante no registro algébrico. O LD-1 não apresenta nenhuma questão envolvendo tratamentos no registro língua natural. A maior frequência de tratamentos em língua natural foi observada no LD-4, entretanto, proporcionalmente o maior quantitativo é do LD-5.

Os tratamentos no registro algébrico consistiam, em grande parte das atividades, em determinar o valor da função para um determinado valor de x ou dado um valor da função encontrar o valor de x correspondente. A Figura 9 a seguir ilustra uma atividade classificada como tratamento presente no LD-1.

Figura 9 – Exemplo de tratamento do registro algébrico

2 Há algum tempo, quando Márcia ligava seu computador à rede internacional de computadores, internet, ela pagava uma mensalidade fixa de R$ 30,00, mais 15 centavos de real (R$ 0,15) por minuto de uso. O valor a ser pago por Márcia ao final do mês dependia, então, do tempo que ela gastava acessando a internet.

Observe o quadro que relaciona o valor a ser pago com o tempo de acesso à rede.

Tempo de acesso (em min)	Valor a ser pago (em reais)
1	$30 + 0{,}15 = 30{,}15$
2	$30 + 0{,}15 \cdot 2 = 30{,}30$
⋮	⋮
t	$30 + 0{,}15 \cdot t$

Podemos, então, estabelecer uma relação entre as grandezas por meio da sentença $V = 30 + 0{,}15 \cdot t$, em que V é o valor a ser pago (em reais), e t é o tempo de utilização (em minutos). Nessa relação, dizemos que t é a variável independente e que V é a variável que depende de t, ou seja, a variável V é dada em função da variável t.

Estabelecida a relação entre as grandezas, podemos responder às questões:

a) Quanto gastava Márcia quando, durante um mês, utilizava a internet por 10h20min?

$10\text{h}20\text{min} = 10 \cdot 60 \text{ min} + 20 \text{ min} = 620 \text{ min}$

$V = 30 + 0{,}15 \cdot 620 = 123{,}00$

Márcia gastava R$ 123,00.

b) Quantas horas ela poderia utilizar a internet se quisesse gastar, no máximo, R$ 90,00 no mês?

Para $V = 90$, temos:

$$90 = 30 + 0{,}15 \cdot t \Rightarrow 60 = 0{,}15 \cdot t \Rightarrow t = \frac{60}{0{,}15} = 400 \Rightarrow t = 400 \text{ min} = 6\text{h}40 \text{ min}$$

Nesse caso, ela poderia utilizar a internet por 6h40min.

Fonte: Giovanni Júnior, Castrucci (2018, p.249)

Na atividade resolvida, da Figura 9, os autores descrevem a conversão entre o registro língua natural (registro de partida) e registro algébrico (registro de chegada), em um contexto do cotidiano. Ainda que a análise seja, neste momento, sobre os tratamentos destacamos que o procedimento adotado na conversão sugere uma dupla conversão. A Figura 10 a seguir ilustra essa situação.

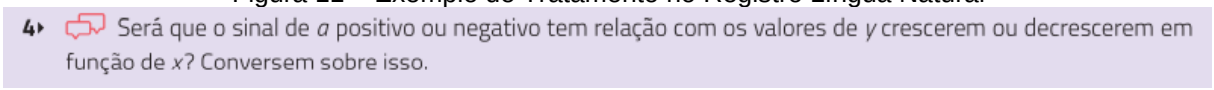
Figura 10 – Esquema dupla conversão

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

A conversão entre o registro língua natural (registro de partida) → registro algébrico (registro de chegada), ficou dividida nas seguintes conversões: registro língua natural → registro tabular e registro tabular → registro algébrico. Desse modo, consideramos, nesses casos, o registro tabular como um registro auxiliar ou intermediário.

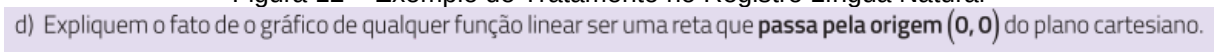
Ainda na atividade da Figura 9, os itens a e b, foram classificados como tratamentos, uma vez que a resolução permanece no registro algébrico. No item a é dado um valor de t para que seja calculado o valor da função neste ponto, enquanto que no item b é dado o valor da função para que se encontre o valor de t. As figuras 11 e 12 são exemplos de tratamento no registro língua natural.

Figura 11 – Exemplo de Tratamento no Registro Língua Natural



Fonte: Dante (2018, p. 133)

Figura 12 – Exemplo de Tratamento no Registro Língua Natural



Fonte: Dante (2018, p.134)

Classificamos os itens como tratamento no registro língua natural, pois para sua resolução não é necessário a mudança de registro de representação semiótica.

Na Figura 11, o estudante deve argumentar em língua natural qual a relação entre o sinal do coeficiente “a” e o crescimento ou decrescimento da função. Destacamos que a atividade contribui para que o estudante estabeleça uma relação de correspondência entre a unidade simbólica “a” do registro algébrico com a variável visual “sentido da inclinação” do registro gráfico. Estabelecer a correlação entre estes registros, segundo a TRRS, atribui significado para a conversão.

Na atividade da Figura 12, é esperado que o estudante explique em língua natural o que é uma função linear, em tempo salientamos que na resolução o estudante pode mobilizar o registro algébrico (y=ax) e nesse caso o item poderia ser classificado como uma conversão do registro língua natural para o registro algébrico.

Para Duval (2009) é fundamental conhecer as regras de funcionamento próprias de cada registros de representação semiótica, e nesse sentido atividades de tratamento podem contribuir nesse processo.

5.3.2 Conversão

Nas atividades de conversão, estamos interessados em observar quais conversões o livro contempla, ou seja, queremos observar quais registros estão presentes nas conversões propostas nos livros didáticos, bem como se os livros didáticos propõem atividades que contemplam os dois sentidos da conversão. Em particular, também investigamos as abordagens adotadas na conversão entre o registro algébrico e o registro gráfico.

A Tabela 6 reúne todas as possíveis conversões entre registros da função afim, a partir dos dados obtidos nas análises dos livros didáticos deste estudo. É importante destacar que para contabilizar as conversões, e seus respectivos sentidos, consideramos os principais registros de representação semiótica presentes nas atividades, embora que em alguns casos o problema se apresente em mais de um registro.

Tabela 6 – Percentuais de atividades de conversão e seus respectivos sentidos

Registro de partida	Registro de chegada	LD-1	LD-2	LD-3	LD-4	LD-5
Algébrico	Língua natural	6,67%	41,46%	16,30%	10,42%	13,51%
Algébrico	Gráfico	50,00%	15,85%	23,91%	21,88%	13,51%
Algébrico	Tabular	3,33%	0,00%	0,00%	3,13%	0,00%
Língua natural	Gráfico	0,00%	3,66%	3,26%	7,29%	0,00%
Língua natural	Algébrico	23,33%	20,73%	16,30%	20,83%	13,51%
Língua natural	Tabular	0,00%	0,00%	1,09%	2,08%	2,70%
Gráfico	Língua natural	3,33%	8,54%	13,04%	16,67%	2,70%

Gráfico	Algébrico	10,00%	7,32%	25,00%	13,54%	40,54%
Gráfico	Tabular	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Tabular	Algébrico	3,33%	1,22%	1,09%	4,17%	10,81%
Tabular	Língua natural	0,00%	1,22%	0,00%	0,00%	2,70%
Tabular	Gráfico	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

A partir dos dados da Tabela 6, podemos inferir que as conversões mais frequentes envolvem os registros algébrico, gráfico e língua natural, com destaque para os sentidos: algébrico → gráfico; língua natural → algébrico; gráfico → algébrico; e algébrico → língua natural. O LD-3 e LD-4 possuem a distribuição mais equilibrada, dentre os livros didáticos analisados, e contemplam os dois sentidos nestas conversões. Por outro lado, LD-1, LD-2 e LD5, priorizam as conversões registro algébrico → registro gráfico, registro algébrico → registro língua natural e registro gráfico → registro algébrico, respectivamente. Não há ocorrências de atividades que solicitam a conversão direta envolvendo os registros gráfico e tabular. O registro tabular se apresenta, em todos os livros didáticos analisados, como um registro intermediário nas conversões do registro algébrico para o registro gráfico (abordagem ponto a ponto) bem como na conversão do registro língua natural para o registro algébrico.

Destacamos algumas atividades de conversão apresentadas nos livros didáticos analisados. A questão da Figura 13 é uma atividade resolvida, que propõe a conversão entre o registro algébrico e o registro gráfico.

Figura 13 – Conversão do registro algébrico → registro gráfico

2 Vamos representar, no plano cartesiano, o gráfico da função $y = 2x - 3$, considerando x um número real qualquer. Inicialmente, vamos organizar os valores e obter os pares ordenados:

- $x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot (0) - 3 = -3$
- $x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot (1) - 3 = -1$
- $x = -1 \Rightarrow y = 2 \cdot (-1) - 3 = -5$
- $x = 2 \Rightarrow y = 2 \cdot (2) - 3 = 1$

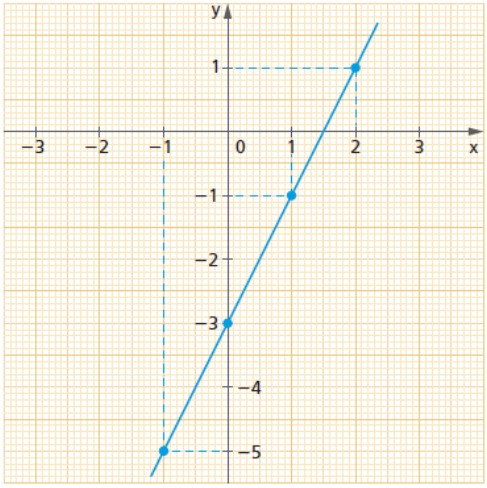
x	y	(x, y)
0	−3	(0, −3)
1	−1	(1, −1)
−1	−5	(−1, −5)
2	1	(2, 1)

No plano cartesiano ao lado, a cada par (x, y) associamos um ponto. O conjunto de todos os pontos (x, y), com x real e $y = 2x - 3$, é o gráfico da função que, nesse caso, também é uma reta.

De modo geral, dizemos que:

O gráfico de uma função afim, no plano cartesiano, com $x \in \mathbb{R}$, é sempre uma **reta**.

Como o gráfico de uma função afim é uma reta, e uma reta fica determinada por dois pontos, basta definir dois pares (x, y).



Fonte: Giovanni Júnior, Castrucci (2018, p.255)

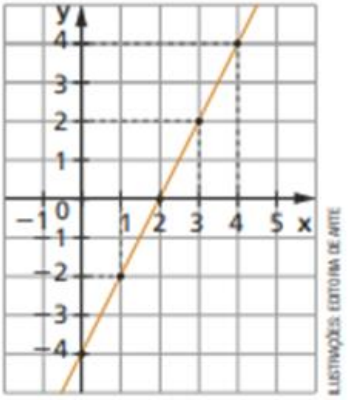
A questão resolvida da Figura 13, adota a abordagem ponto a ponto na conversão do registro algébrico para o registro gráfico. Esta abordagem consiste em atribuir valores para x e encontrar valores de y, construir uma tabela com pares ordenados (x, y), localizar os pontos no plano cartesiano e por fim traçar a reta que contém estes pontos. Essa abordagem favorece a conversão apenas neste sentido (registro algébrico→ registro gráfico), entretanto segundo a TRRS não contribuí para o sentido oposto (registro gráfico→ registro algébrico). Todos os livros didáticos adotam esta abordagem e dedicamos uma seção para tratar desta conversão específica.

A questão da Figura 14 explora a conversão entre o registro gráfico e o registro algébrico no item a e explora o sentido oposto no item c a partir de outra função afim.

Figura 14 – Conversão do registro gráfico → registro algébrico e registro algébrico → registro gráfico

5. Para resolver esta atividade, junte-se a um colega.

Isabel construiu o gráfico de uma função do tipo f(x) = ax + b, em que **a** e **b** são número reais diferentes de zero e **x** um número real. Observe.



a) Nessa função, qual é o valor de f(0)? E de f(2)?

b) Escrevam a lei de formação da função cujo gráfico Isabel construiu.

c) Agora, em uma malha quadriculada, representem um plano cartesiano e construam o gráfico da função g(x) = 3x + 1, em que **x** é um número real.

Fonte: Souza (2018, p. 130)

O item “a” solicita a conversão entre o registro gráfico e algébrico, a partir do gráfico o estudante deve encontrar os valores de $f(0)$ e $f(2)$. O item “b” solicita a lei de formação da função a partir do gráfico, a sugestão no manual do professor recomenda o seguinte procedimento: utilizar os valores obtidos no item a, ou seja, os pontos (2,0) e (0,-4) e a partir de $f(x) = ax + b$ encontrar os valores de “a” e “b”. Neste caso os estudantes deveriam realizar os seguintes tratamentos.

Para $x = 0$

$$f(0) = a.0 + b = -4 \quad \rightarrow \quad b = -4$$

Para $x = 2$

$$f(2) = a.2 - 4 = 0$$

$$f(2) = 2a = 4 \quad \rightarrow \quad a = 2$$

Assim, a lei da função é $f(x) = 2x - 4$. Salientamos que esta estratégia não consta no livro do aluno. O item “c” propõe a conversão entre o registro algébrico, a

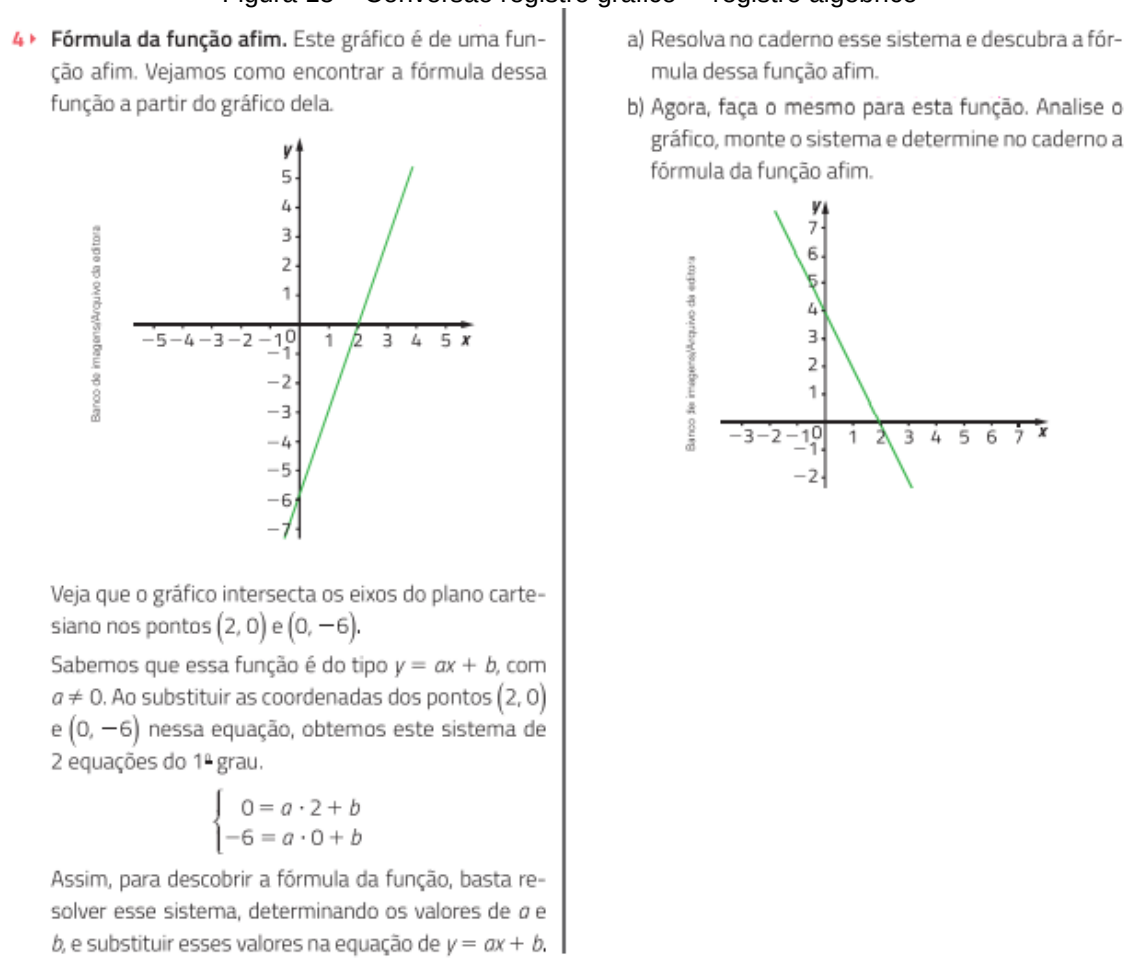
partir da lei da função, para o registro gráfico. As orientações para o professor, em relação ao item c, sugerem

> [...] reproduzir e entregar aos alunos malha quadriculada, disponível no Material de apoio. Uma estratégia para a construção do gráfico é utilizar a lei de formação da função para calcular as coordenadas de alguns pontos do gráfico, indicar esses pontos no plano cartesiano representado na malha e traçar a reta. (SOUZA, 2018, pag.130)

Em termos da TRRS a estratégia sugerida é a abordagem ponto a ponto na conversão do registro algébrico (lei da função) para o registro gráfico (reta no plano).

Em uma atividade do LD-2 a conversão do registro gráfico → registro algébrico é realizada através de sistema de duas equações do 1° grau. A atividade da Figura 10 exibe um “passo a passo” para encontrar a “fórmula da função afim” a partir do registro gráfico utilizando sistema de duas equações do 1° grau. Este procedimento se caracteriza como um tratamento no registro algébrico.

Figura 15 – Conversão registro gráfico → registro algébrico



4 **Fórmula da função afim.** Este gráfico é de uma função afim. Vejamos como encontrar a fórmula dessa função a partir do gráfico dela.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Veja que o gráfico intersecta os eixos do plano cartesiano nos pontos $(2, 0)$ e $(0, -6)$.

Sabemos que essa função é do tipo $y = ax + b$, com $a \neq 0$. Ao substituir as coordenadas dos pontos $(2, 0)$ e $(0, -6)$ nessa equação, obtemos este sistema de 2 equações do 1º grau.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 2 + b \\ -6 = a \cdot 0 + b \end{cases}$$

Assim, para descobrir a fórmula da função, basta resolver esse sistema, determinando os valores de a e b, e substituir esses valores na equação de $y = ax + b$.

a) Resolva no caderno esse sistema e descubra a fórmula dessa função afim.

b) Agora, faça o mesmo para esta função. Analise o gráfico, monte o sistema e determine no caderno a fórmula da função afim.

Banco de imagens/Arquivo da editora

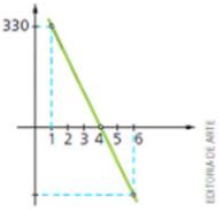
Fonte: Dante (2018, p.139)

Esse tipo de abordagem aproxima uma conversão de um tratamento e não considera a correlação das unidades simbólicas com as variáveis visuais o que pode gerar um esvaziamento de significado. Com este procedimento se o estudante cometer algum erro nos cálculos ele não tem a possibilidade de validar sua resposta. Por outro lado, a abordagem global de propriedades figurais, defendida por Duval (2011b), aplicada nesse exemplo possibilita que a partir do gráfico o estudante encontre o valor do coeficiente “b” (o ponto em que a reta intercepta o eixo y) e o sinal do coeficiente “a” (positivo ou negativo) se relaciona com a variável visual sentido da inclinação (ascendente ou descendente). Encontrar o valor de “a” pode gerar dificuldades, uma vez que estabelecer uma correspondência entre a variável visual “ângulo com os eixos” e o valor do coeficiente a não é uma tarefa simples, com exceção do a=1 (em que temos uma partição simétrica), mas é importante salientar que, do ponto de vista da TRRS, perceber a relação entre os elementos significantes nas duas representações atribui sentido ao procedimento de conversão.

Na Figura 16, temos uma atividade de conversão do registro gráfico para o registro língua natural. O enunciado descreve o lucro de um artesão relacionando a venda de tapetes e o período de tempo, dado em meses.

Figura 16 – Dupla conversão registro língua natural → registro gráfico e registro gráfico → registro língua natural

2. A venda dos tapetes produzidos por um artesão no primeiro semestre deste ano teve o desempenho representado no gráfico ao lado. Se no final do 1º mês o artesão teve um lucro de 330 reais, responda de acordo com o gráfico:



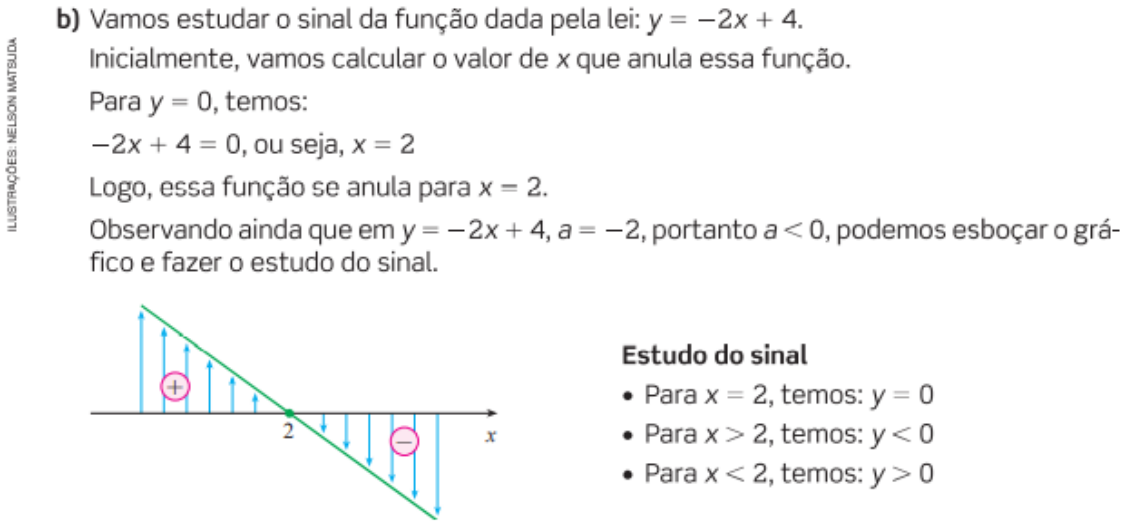
a) Em que período esse artesão não teve lucro nem prejuízo?

Fonte: Giovanni Júnior, Castrucci (2018, p.257)

O *item a* quer saber em qual período o artesão “não teve lucro nem prejuízo” a questão parte do registro em língua natural e sugere inicialmente a conversão para o registro gráfico, o estudante precisa estabelecer uma correlação entre enunciado em língua natural e as unidades significativas do registro gráfico. Pressupõe que o estudante saiba, por exemplo, que o zero da função é o ponto em que a reta cruza o eixo x. Depois que o estudante identificar no gráfico o ponto (4,0) que corresponde ao zero da função, deverá realizar uma outra conversão desta vez do registro gráfico para o registro em língua natural e responder o mês correspondente neste caso, no 4º mês.

Na atividade da Figura 17 temos um exemplo de dupla conversão envolvendo os registros algébrico e gráfico explorando os dois sentidos.

Figura 17 – Dupla conversão registro algébrico → registro gráfico e registro gráfico → registro algébrico



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

b) Vamos estudar o sinal da função dada pela lei: $y = -2x + 4$.

Inicialmente, vamos calcular o valor de x que anula essa função.

Para $y = 0$, temos:

$-2x + 4 = 0$, ou seja, $x = 2$

Logo, essa função se anula para $x = 2$.

Observando ainda que em $y = -2x + 4$, $a = -2$, portanto $a < 0$, podemos esboçar o gráfico e fazer o estudo do sinal.

Estudo do sinal

- Para $x = 2$, temos: $y = 0$
- Para $x > 2$, temos: $y < 0$
- Para $x < 2$, temos: $y > 0$

Fonte: Bianchini (2018, p. 230)

Neste exemplo do LD-3 é apresentado este procedimento para estudo de sinal de uma função afim. A partir da lei da função, é realizado um tratamento no registro algébrico para encontrar “o valor de x que anula essa função” (zero ou raiz da função). Em seguida temos a conversão entre o registro algébrico e gráfico. Nesse exemplo, ainda que de maneira implícita o autor recorre a relação entre o sinal do coeficiente “a” (unidade simbólica) e sentido da inclinação da reta (variável visual). Por fim, consideramos uma segunda conversão do registro gráfico para o registro algébrico. Em que o estudante deve relacionar o traçado da reta no gráfico com os intervalos y=0, y>0 e y<0. Vamos aprofundar a discussão desta questão na análise do fenômeno de congruência e não congruência semântica.

A Figura 18 exemplifica uma conversão do registro língua natural para o registro algébrico.

Figura 18- Conversão entre o registro língua natural → registro algébrico

2 Um motorista de táxi cobra um valor fixo de R$ 4,10 mais R$ 2,50 por quilômetro rodado. O preço da viagem (y) é função do número (x) de quilômetros rodados.

MONITO MAN

a) Qual é a lei da função que relaciona x e y?

b) O preço da viagem é diretamente proporcional ao número de quilômetros rodados? E inversamente proporcional? Justifique suas respostas.

Fonte: Gay e Silva (2018, p.228)

O item “a” solicita a lei da função (registro algébrico) a partir do enunciado (língua natural), o estudante precisa associar o valor fixo ao coeficiente “b” e o valor por quilometro rodado ao coeficiente “a”. Classificamos como uma conversão do registro língua natural para registro algébrico. O item “b” classificamos como um tratamento em língua natural, em que o estudante deve argumentar se a relação entre x e y é proporcional ou inversamente proporcional, é esperado que o estudante conclua que não, pois não se trata de uma função linear.

Na questão da Figura 19 temos um exemplo de conversão entre os registros língua natural e algébrico nos dois sentidos.

Figura 19 – Conversão entre registros língua natural e algébrico

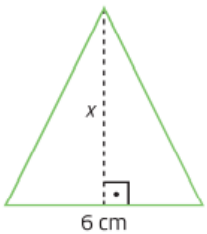
50 Escreva no caderno a fórmula matemática que expressa a função descrita em cada situação.

Depois, identifique se cada lei define uma função afim e, nelas, as que são lineares.

a) Uma empresa de transportes particulares cobra uma taxa fixa de R$ 8,00 mais R$ 1,30 por quilômetro percorrido. O preço y que essa empresa cobra é dado em função do número x de quilômetros percorridos.

b) A soma S das medidas de abertura dos ângulos internos de um polígono convexo é dada em função do número n de lados desse polígono.

c) Um triângulo tem base com medida de comprimento de 6 cm e altura com medida de comprimento de x cm. A medida de área y, em cm², é dada em função de x.



Banco de imagens/Arquivo da editora

d) A medida de comprimento C de uma circunferência é dada em função da medida de comprimento r do raio, usando a aproximação $\pi = 3{,}1$.

e) A medida de volume V de um cubo é dada em função da medida de comprimento a da aresta dele.

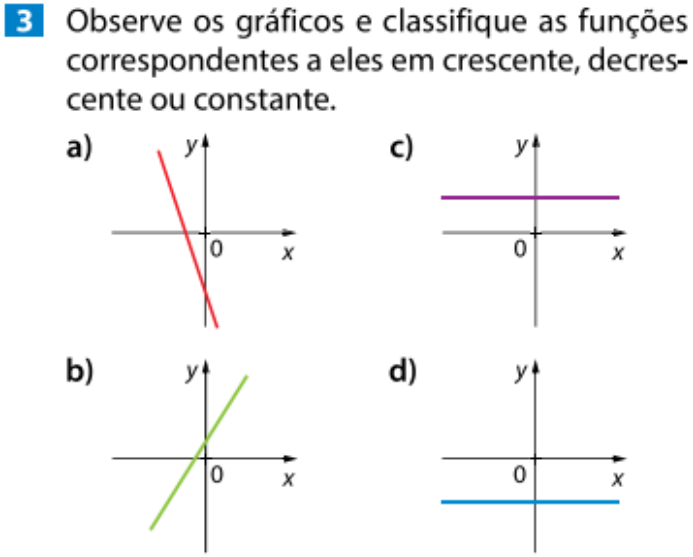
Fonte: Dante (2018, p.134)

A partir do enunciado em língua natural o estudante deve “escrever a fórmula matemática que expressa a função descrita”, ou seja, escrever a lei da função (registro

algébrico) a partir das situações descritas (registro língua natural) em cada item. Em seguida a partir da lei da função devem avaliar se a função corresponde a uma função linear ou não, nesta etapa temos a conversão registro algébrico → registro língua natural. O item “c”, em particular, traz além do registro em língua natural a representação figural para auxiliar na interpretação da questão, salientamos que não se trata de um registro uma vez que isoladamente não permite tratamentos e conversões.

Na figura 20 temos um exemplo de atividade que explora a conversão entre o registro língua natural e o registro gráfico.

Figura 20 – Conversão entre o registro gráfico → registro língua natural



Fonte: Gay e Silva (2018, p.218)

O enunciado em língua natural solicita que o estudante “classifique as funções” realizando a conversão entre o registro gráfico e o registro língua natural (crescente, decrescente ou constante). A questão explora a variável visual sentido da inclinação que assume os valores ascendente ou descendente e sua correlação com os termos em língua natural crescente ou decrescente. No caso da função constante “não é necessário levar em conta os valores das variáveis precedentes, basta ler o valor do ponto de intersecção da reta com o eixo” (Duval, 2011b, p. 101).

A questão da Figura 21 possui quatro itens e contempla mais de uma conversão.

Figura 21 – Atividade que explora diversas conversões

23 Uma caixa-d'água de 1.000 ℓ de capacidade é alimentada por um registro que, totalmente aberto, despeja 25 ℓ de água a cada 3 minutos.

CLÁUDIO CHIYO

a) Considerando que a caixa-d'água esteja vazia, em quanto tempo ela ficará cheia depois que o registro for aberto?

b) Se o registro permanecer aberto por 15 minutos, quantos litros de água serão despejados na caixa durante esse tempo?

c) Faça um quadro indicando o volume de água que haverá na caixa de 15 em 15 minutos até ela ficar cheia.

d) Qual é a lei da função que representa o volume de água v em função do tempo t do registro totalmente aberto?

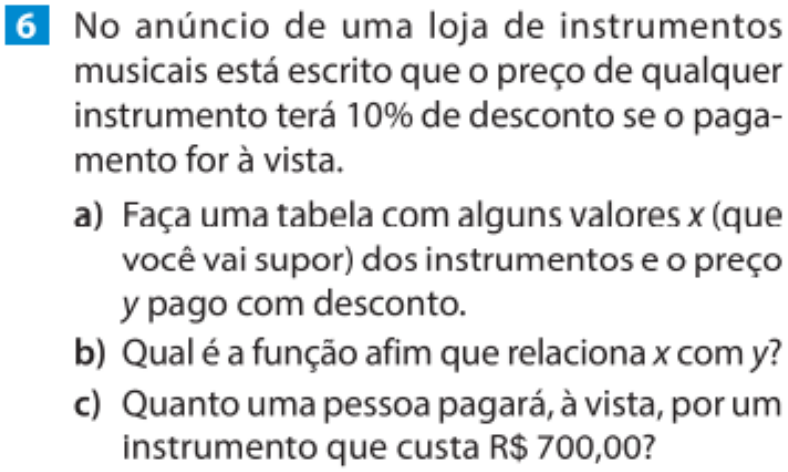
Fonte: Bianchini (2018, p. 230)

O enunciado em língua natural descreve uma função afim, o item “a” classificamos como uma conversão do registro língua natural → registro algébrico. O estudante deve calcular o tempo que leva pra caixa d’água encher a partir do enunciado em língua natural. O item “b” também é uma conversão registro língua natural → registro algébrico, o estudante deve interpretar o enunciado e calcular quantos litros tem na caixa d´água “se o registro permanecer aberto por 15 minutos”. O item “c” propõe a conversão do registro língua natural para o registro tabular, quando solicita que o estudante “faça um quadro indicando o volume de água”. Por fim o item “d” solicita a “lei da função” considerando a questão de forma integral, ou seja, levando em conta os itens anteriormente respondidos, temos duas possibilidades de conversão: registro língua natural → registro algébrico ou registro tabular → registro algébrico.

Note que tanto o item “a” quanto o item “b” poderiam ser classificados como tratamentos no registro algébrico se o estudante tivesse a lei da função. Este fato demonstra que a ordem em que os itens são dispostos influenciam no custo cognitivo, inclusive na categorização da atividade em tratamento ou conversão.

A questão da figura 22 contempla as conversões entre registro língua natural → registro tabular e registro tabular → registro algébrico.

Figura 22 – Conversões entre os registros língua natural → registro tabular e registro tabular → registro algébrico



6 No anúncio de uma loja de instrumentos musicais está escrito que o preço de qualquer instrumento terá 10% de desconto se o pagamento for à vista.

a) Faça uma tabela com alguns valores *x* (que você vai supor) dos instrumentos e o preço *y* pago com desconto.

b) Qual é a função afim que relaciona *x* com *y*?

c) Quanto uma pessoa pagará, à vista, por um instrumento que custa R$ 700,00?

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 216)

O item “a” propõe a conversão entre o registro língua natural e o registro tabular, quando solicita “faça uma tabela com alguns valores de x”. No item b é esperado que o estudante faça a conversão entre o registro tabular → registro algébrico, outra resolução possível seria a conversão a partir do enunciado (língua natural) para o registro algébrico. Do ponto de vista da TRRS, cabe uma ressalva em relação a redação do item “b”, pois no enunciado “qual é a função afim que relaciona x com y” não deixa claro que o estudante deve encontrar a lei da função e soa como se a função afim (o objeto matemático) fosse a lei da função (registro algébrico) o que pode gerar confusão entre representação e objeto matemático.

Esta análise das atividades de conversão demonstra que, por exemplo, a ordem dos itens pode influenciar na categorização da atividade de tratamento ou conversão, mais que isso explicita que existem mais de uma possibilidade de resolução. Destacamos também que pequenas alterações no enunciado podem gerar a perda de sentido, como no exemplo da Figura 22, em que o item “b” omite a palavra “lei” e pergunta “qual a função afim que relaciona” diferente do que acontece na questão da Figura 21, que pergunta “qual é a lei da função” e isso faz toda diferença do ponto de vista da TRRS, pois não confundir objeto e representação é um dos pressupostos da teoria os registros de representação semiótica e, neste caso, a omissão do termo “lei” significa dizer que a expressão algébrica é a própria função afim.

5.3.2.1 Conversão entre o registro algébrico e o registro gráfico

Nesta seção vamos investigar as abordagens adotadas pelos livros didáticos analisados na conversão entre o registro algébrico e gráfico. Tomamos como referência para esta análise Duval (2011b) e sua categorização das abordagens desta conversão, são elas: abordagem ponto a ponto; por extensão do traçado; e abordagem global de propriedades figurais.

Em todos os livros didáticos a abordagem adotada nos exercícios resolvidos é a abordagem ponto a ponto. Os livros LD-2, LD-3 e LD-4 contemplam atividades que apresentam alguns elementos da abordagem global de propriedades figurais.

Encontramos atividades que exploram a abordagem por extensão do traçado, nos livros didáticos LD-1 e LD-3, e segundo Duval (2011b) é uma abordagem que se mantem puramente mental e considera uma infinidade de pontos, diferentemente da abordagem ponto a ponto, mas também não relaciona as unidades significantes dos registros gráfico e algébrico. Essa abordagem é explorada em poucas atividades e não há menção na parte expositiva de nenhum dos livros didáticos objetos deste estudo. Destacamos duas atividades para exemplificar a abordagem por extensão do traçado. A questão da Figura 23 propõe a conversão do registro algébrico para o gráfico.

Figura 23 – Abordagem por extensão do traçado

29 Ainda no papel quadriculado, construa o gráfico, em um mesmo plano cartesiano, das funções polinomiais do 1º grau dadas pelas leis: $h(x) = -3x + 1$ e $i(x) = -3x + 6$.

Em seguida, responda:

a) Quais são as coordenadas do ponto em que o gráfico de h corta o eixo dos x? E o eixo dos y?

b) Quais são as coordenadas do ponto em que o gráfico de i corta o eixo dos x? E o eixo dos y?

c) Os gráficos de h e de i têm ponto comum?

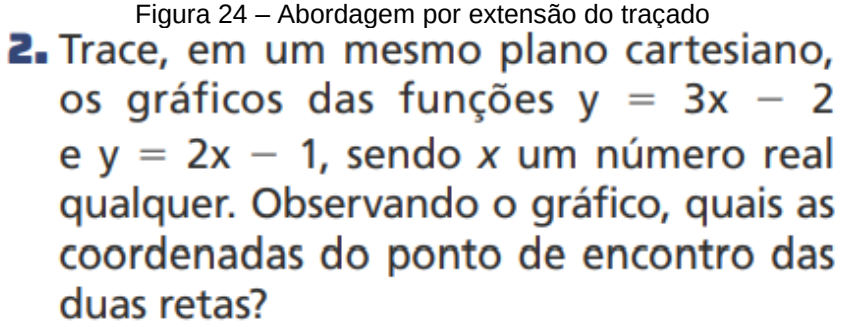
d) Para que valor de x temos $h(x) = i(x)$?

Fonte: Bianchini (2008, 232)

Consideramos que esta atividade contempla a abordagem por extensão do traçado, pois depois de construir o gráfico das funções $h(x)$ e $i(x)$, os estudantes devem, eventualmente, encontrar os pontos em que estas funções cruzam o eixo x e o eixo y, ou seja, estender o traçado para encontrar esses pontos no papel quadriculado. No Item “c” devem prolongar as retas para verificar se possui algum ponto em comum e no Item “d” concluir que esse ponto de interseção é dado por $h(x) = f(x)$.

A atividade da Figura 24 também solicita a conversão do registro algébrico para o gráfico e posteriormente as coordenadas do ponto de encontro de duas funções.

Figura 24 – Abordagem por extensão do traçado



Fonte: Giovanni Júnior, Castrucci (2008, 255)

Da mesma forma da questão anterior, o estudante deve realizar a conversão do registro algébrico para o registro gráfico e depois, eventualmente, deve estender o traçado para encontrar o ponto de encontro das retas das funções. A depender estratégia adotada na conversão pode não ser necessário estender o traçado. Se, por exemplo, o esboço realizado contemplar o ponto de encontro. Ainda assim o estudante deve considerar que a função contém infinitos pontos para determinar o ponto de interseção.

Com relação a abordagem ponto a ponto, salientamos que é um procedimento presente em todas as obras analisadas. A Figura 25 ilustra a construção de gráficos a partir da lei da função, utilizando a abordagem ponto a ponto.

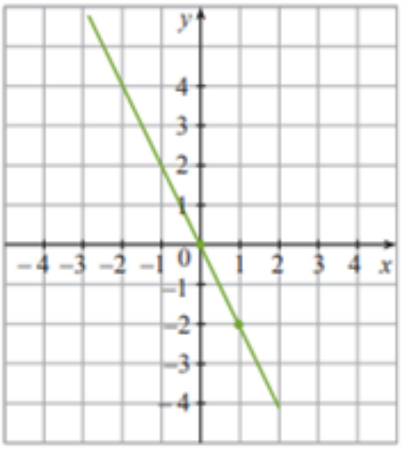
Figura 25 – Conversão do registro algébrico → registro gráfico

b) Vamos representar graficamente a função polinomial do 1º grau definida pela lei $y = -2x$.

Quadro com dois pontos do gráfico da função

x	$y = -2x$	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	−2	(1, −2)

Gráfico da função



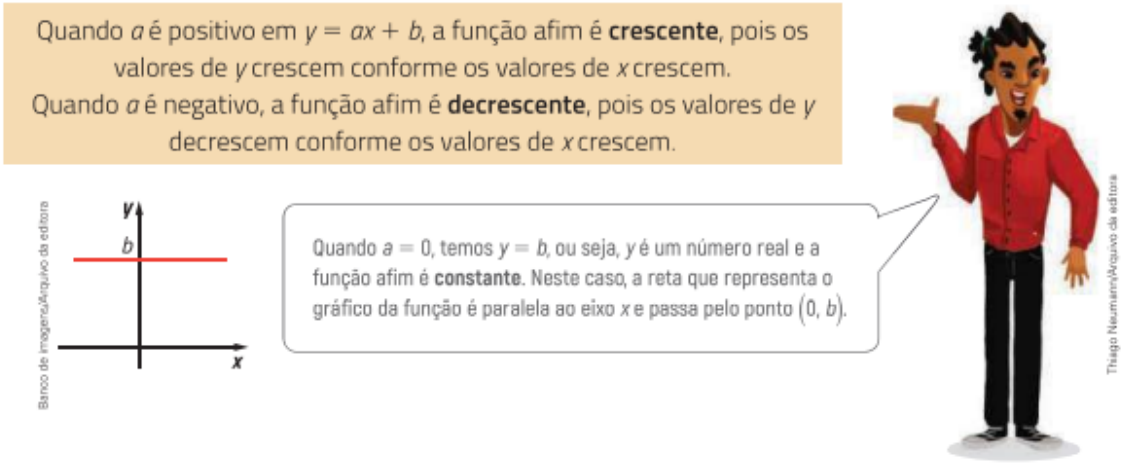
Fonte: Bianchini (2018, p. 231)

Neste exemplo resolvido, o enunciado da questão apresenta a lei da função (registro algébrico), em seguida é construída uma tabela atribuindo valores para x e são encontradas as coordenadas dos pontos (x,y) através de um tratamento algébrico realizado na lei da função. Depois de encontrar pelo menos um par de pontos e localizá-los no plano cartesiano é traçada a reta que contém estes pontos. Duval (2011b) faz duras críticas a esta abordagem e inclusive diz que contribui para as dificuldades dos estudantes alegando que este procedimento esvazia o sentido da conversão e não leva em conta a correlação entre as unidades simbólicas e as variáveis visuais.

O LD-2 apresenta a abordagem ponto a ponto assim como os demais, entretanto é possível perceber elementos da abordagem global de propriedades figurais quando, por exemplo, o livro didático explicita a relação entre crescimento ou decrescimento da função com o sinal do coeficiente “a”.

Na Figura 26 o autor formaliza a relação do coeficiente “a” e o crescimento ou decrescimento da função a partir do sinal de “a” (positivo ou negativo).

Figura 26 – Correlação entre coeficiente “a” e crescimento ou decrescimento da função

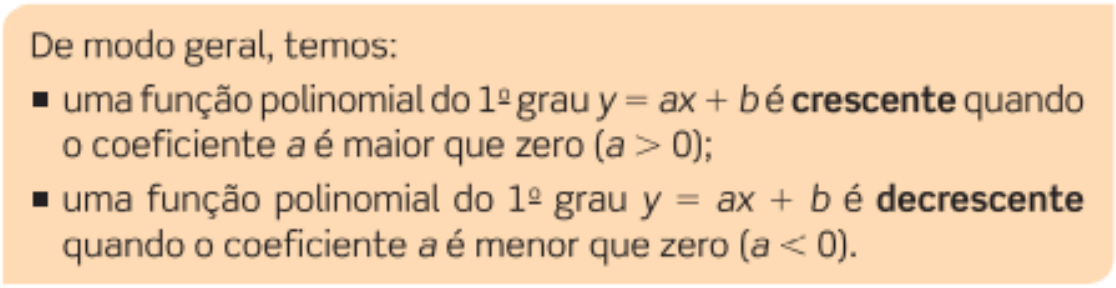


Fonte: Dante (2018, p. 133)

A Figura 26 também traz o coeficiente “b” (registro gráfico) e define que quando a=0 a função é constante, e o “gráfico é uma reta paralela ao eixo x passando pelo ponto (0,b)”, entretanto o livro não explora de maneira geral, apenas no caso pontual da função constante, a relação entre o coeficiente “b” e o ponto em que a reta intercepta o eixo x.

O LD-3 apresenta elementos da abordagem global de propriedades figurais em um quadro resumo ilustrado na Figura 27.

Figura 27 – Crescimento e decrescimento de uma função polinomial do 1° grau

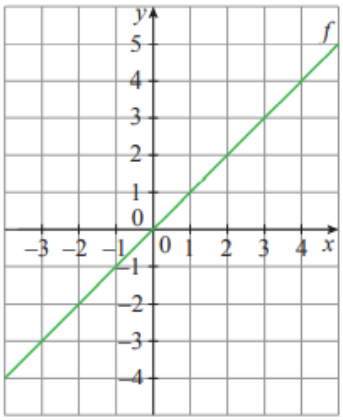


Fonte: Bianchini (2018, p. 231)

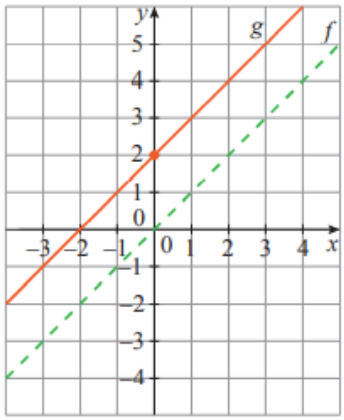
Neste quadro o LD-3 sintetiza a relação entre o coeficiente “a” e o crescimento ou decrescimento da função polinomial do 1°grau. Temos elementos da abordagem global de propriedades figurais, entretanto não é abordado até esse momento todas as relações entre unidades simbólicas e variáveis visuais. Nesse sentido destacamos uma sequência de atividades da Figura 28.

Figura 28 – Atividade com o uso de software

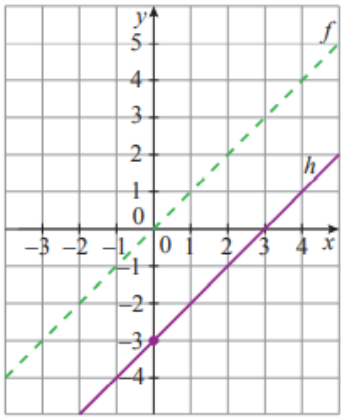
1 Veja como é o gráfico das funções $f(x) = x$, $g(x) = x + 2$ e $h(x) = x - 3$.



Bissetriz dos quadrantes ímpares.



Reta paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares deslocada de modo a passar pelo ponto (0, 2).



Reta paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares deslocada de modo a passar pelo ponto (0, −3).

Agora, responda: como seria o gráfico das funções $p(x) = -x$, $q(x) = -x + 4$ e $t(x) = -x - 5$? Se for possível, construa esses gráficos usando um *software* matemático e confira suas respostas.

2 Imagine o que acontece se modificarmos o coeficiente a. Qual o papel do coeficiente a no gráfico de $f(x) = ax + b$?

3 Imagine se modificarmos o coeficiente b. Em seguida, responda:

a) Qual o papel do coeficiente b no gráfico de $f(x) = ax + b$?

b) Podemos associar esse coeficiente à ordenada de um ponto. Que ponto é esse?

Fonte: Bianchini (2018, p. 235)

É uma sequência de atividades que explora a correlação entre os registros algébrico e gráfico, que contribui para a interpretação global defendida por Duval. O LD-3 propõe a realização destas atividades com o uso de um software matemático, sem especificar um software específico.

Na primeira questão temos alguns exemplos de gráficos gerados a partir da lei das funções, bem como sua descrição em língua natural. É solicitado que o estudante construa, usando um software, o gráfico de três funções e os descrevam em língua natural como no exemplo. Temos uma conversão do registro algébrico para o registro gráfico, realizada via software, e depois a conversão do registro gráfico para o registro língua natural.

A segunda questão solicita “o papel do coeficiente a” no seu gráfico, a partir da lei da função $y = ax + b$. É esperado que o estudante explore, com o uso do software, e chegue à conclusão de que o “a” está relacionado com a inclinação da reta e além disso o sinal tem relação direta com o crescimento e decrescimento da função

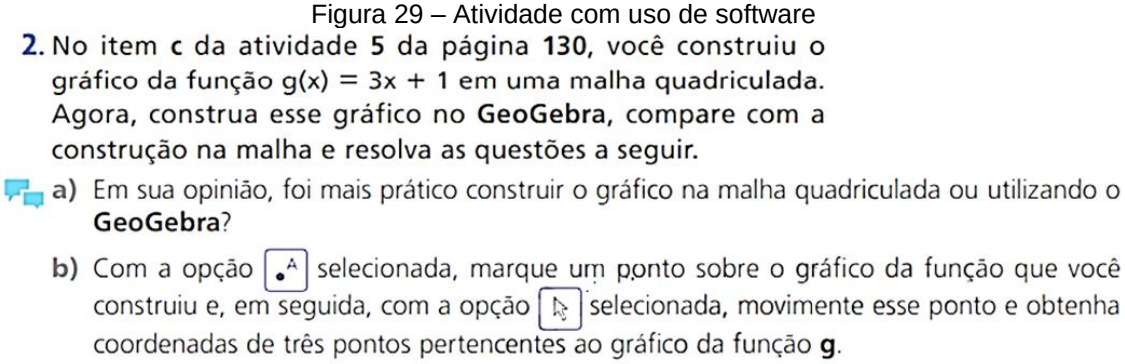
polinomial do 1° grau. Consideramos esta atividade como uma dupla conversão do registro algébrico → registro gráfico e registro gráfico → registro língua natural.

A terceira e última questão está relacionada ao papel coeficiente “b”. É esperado que o estudante perceba que alterando o valor do coeficiente b teremos como consequência no gráfico uma translação vertical e que o ponto em que a reta cruza o eixo y tem coordenada $(0, b)$. Sendo o item “a” uma dupla conversão registro algébrico → registro gráfico e registro gráfico → registro língua natural e o item “b” um tratamento em língua natural.

Esta sequência de atividades pode auxiliar o estudante a correlacionar as unidades simbólicas e as variáveis visuais, como está estabelecido na abordagem global de propriedades figurais. O uso de softwares é mais uma possibilidade para o trabalho com funções e deve ser utilizado com propósitos claros tais como nesta sequência de atividades.

No LD-5 também temos uma atividade para ser realizada através do software, sendo indicado o uso do Geogebra[14].

Figura 29 – Atividade com uso de software



2. No item **c** da atividade **5** da página **130**, você construiu o gráfico da função g(x) = 3x + 1 em uma malha quadriculada. Agora, construa esse gráfico no **GeoGebra**, compare com a construção na malha e resolva as questões a seguir.

a) Em sua opinião, foi mais prático construir o gráfico na malha quadriculada ou utilizando o **GeoGebra**?

b) Com a opção selecionada, marque um ponto sobre o gráfico da função que você construiu e, em seguida, com a opção selecionada, movimente esse ponto e obtenha coordenadas de três pontos pertencentes ao gráfico da função **g**.

Fonte: Souza (2018, p. 135)

A atividade da Figura 29 propõe a conversão entre o registro algébrico → registro gráfico com o uso do software Geogebra. O item “a” consideramos como um tratamento em língua natural, o estudante deve refletir se a construção de gráficos é mais “prática” na malha quadriculada ou utilizando o software. O item “b” solicita que o estudante identifique “três pontos pertencentes ao gráfico da função g” classificamos como conversão entre o registro gráfico → registro algébrico.

[14] aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra.

O uso de softwares possibilita explorar a correlação entre as unidades simbólicas e variáveis visuais. A proposta da atividade da Figura 29 não explora as possibilidades do software se limitando a valorizar o aspecto de praticidade.

Ainda sobre o uso de softwares destacamos a atividade das Figuras 30, 31 e 32 do LD-4.

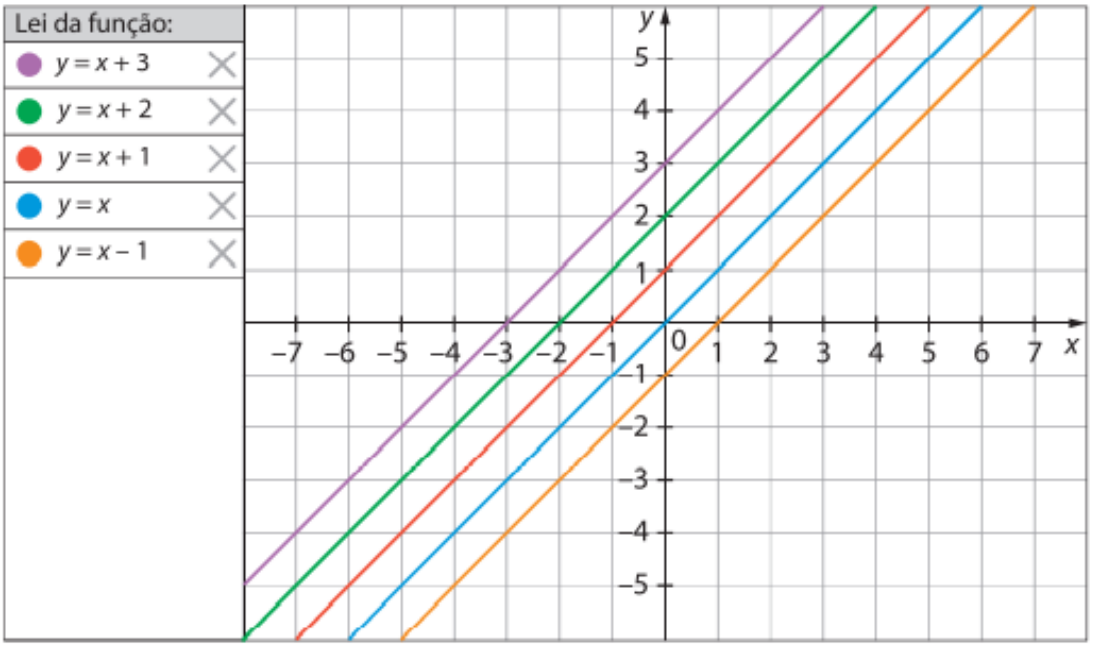
Figura 30 – Atividades com uso de software

INVESTIGUE

Vamos começar investigando o que ocorre com o gráfico de uma função afim do tipo $y = x + b$, conforme a variação do valor de b.

a) Em um mesmo plano cartesiano construa o gráfico das funções $y = x$ e $y = x + 1$. O que você observou?

b) No mesmo plano cartesiano do item **a**, construa o gráfico das funções $y = x - 1$, $y = x + 2$ e $y = x + 3$. Depois, compare o gráfico dessas funções com o gráfico de $y = x$. O que você observou?



Fonte: Gay e Silva (2018, p.219)

No item “a” o enunciado solicita a construção de dois gráficos de $y = x$ e $y = x + 1$ e espera que o estudante perceba a relação entre o coeficiente “b” e a translação vertical que ocorre com a variação do coeficiente “b”, neste caso classificamos esta atividade como uma dupla conversão, primeiro do registro algébrico para o gráfico através do software, em seguida do registro gráfico para o registro língua natural.

O item b solicita que o estudante construa o gráfico de outras três funções $f(x) = x + 2$, $f(x) = x + 3$ e $f(x) = x - 1$ no mesmo plano do item anterior. O objetivo é demonstrar que a variação do coeficiente b gera a translação vertical para cima quando “b” aumenta e para baixo conforme o “b” diminui quando comparado com a função linear $f(x) = x$. A questão aborda a variável visual “posição sobre o eixo”, que assume os valores acima da origem, na origem e abaixo da origem. É esperado que o estudante conclua que a variação do coeficiente “b” gera retas paralelas ao gráfico da função $f(x) = x$. Este item classificamos como a dupla conversão entre o registro algébrico → registro gráfico e registro gráfico → registro língua natural.

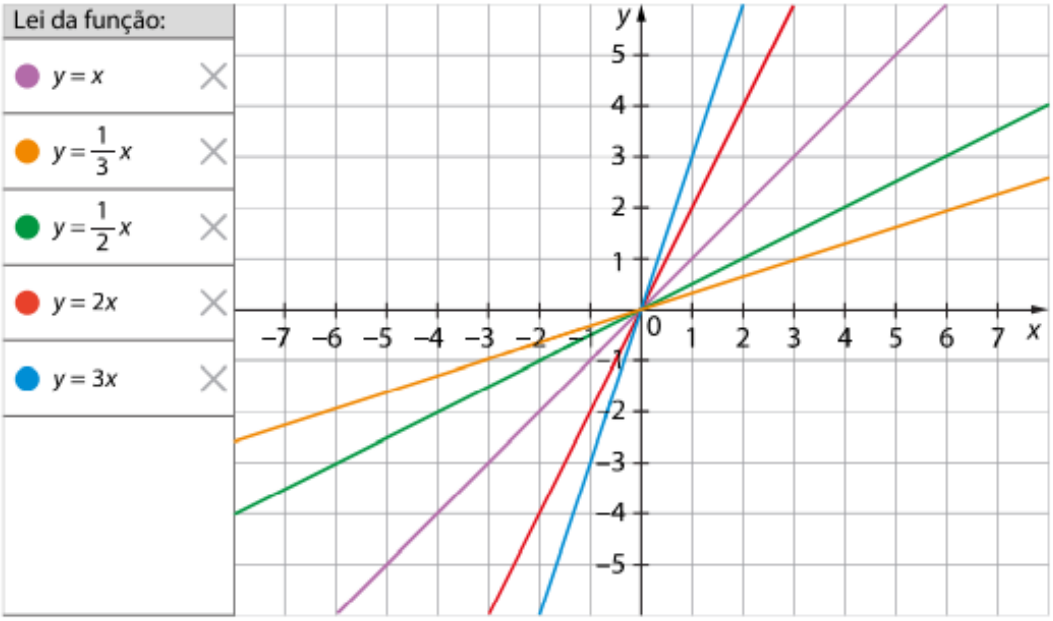
Figura 31 – Continuação da atividade com uso de software

c) O que a investigação anterior sugere em relação à posição da reta que é gráfico de uma função afim do tipo $y = x + b$, em que b é qualquer número real e a reta que é gráfico de $y = x$?

Vamos agora investigar o que ocorre com o gráfico de uma função afim do tipo $y = ax$ conforme variamos o valor de a.

d) Em um mesmo plano cartesiano, construa o gráfico das funções $y = x$ e $y = 2x$. O que você observou?

e) No mesmo plano cartesiano do item **d**, construa o gráfico das funções $y = \frac{1}{3}x$, $y = \frac{1}{2}x$ e $y = 3x$. Depois, compare o gráfico dessas funções com o gráfico de $y = x$. O que você observou?



Fonte: Gay e Silva (2018, p.220)

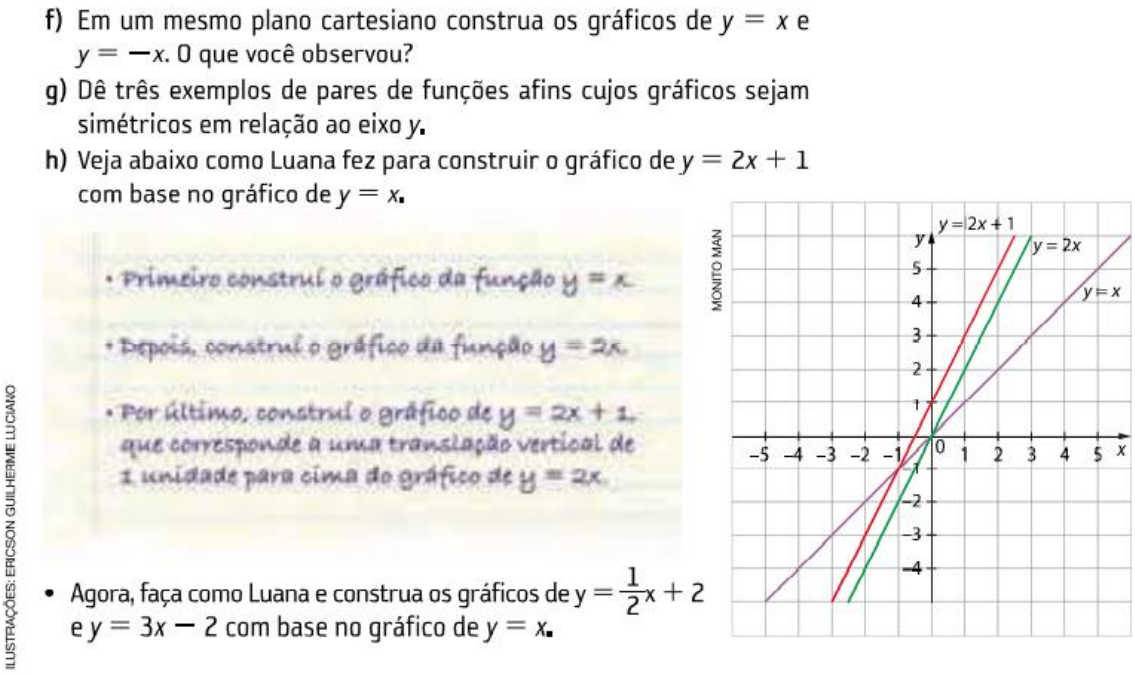
O item “c” tem a mesma classificação do item anterior, é esperado que os alunos concluam que o coeficiente “b” determina o ponto em que a reta intercepta o eixo y, sendo uma reta paralela ao gráfico de $f(x) = x$ que intercepta o eixo y na coordenada (0,b).

Os itens “d” e “e” relacionam o coeficiente “a” com a variável visual “ângulo com os eixos” solicitando a construção de gráficos, via software, para valores de 0<a<1, a=1 e a>1. Essa primeira tarefa consiste em uma série de conversões do registro algébrico para o registro gráfico com a ajuda do software.

O item “d” explora a variação entre os gráficos de $f(x) = x$ e $f(x) = 2x$ e se espera que o estudante perceba que a ordenada de $f(x) = 2x$ é o dobro da ordenada de $f(x) = x$ para uma mesma abscissa e que o ângulo formado entre a reta e o eixo x aumenta conforme o valor de “a” aumenta. Enquanto que o item “e” explora a variação entre os gráficos de $f(x) = x$, $f(x) = \frac{1}{2}x$, $f(x) = \frac{1}{3}x$ e $f(x) = 3x$, considerando também os gráficos das funções do item anterior. Segundo o manual do professor é esperado que “observem que cada ponto de $y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{3}x$ e $y = 3x$ tem ordenada igual à metate, à terça parte e ao triplo, respectivamente, daquela do ponto de mesma abscissa no gráfico de $y = x$.” Do ponto de vista da TRRS, a correlação entre o coeficiente “a” e o ângulo com os eixos significa mais que a relação de proporcionalidade[15]. É possível associar a=1 com a reta formando uma partição simétrica, 0<a<1 a reta forma um ângulo menor que 45° em relação ao eixo x, e a>1 a reta forma um ângulo maior que 45° em relação ao eixo x.

[15] Podemos falar em proporcionalidade apenas para a função linear, caso particular de função afim.

Figura 32 – Continuação de atividade com software



f) Em um mesmo plano cartesiano construa os gráficos de $y = x$ e $y = -x$. O que você observou?

g) Dê três exemplos de pares de funções afins cujos gráficos sejam simétricos em relação ao eixo y.

h) Veja abaixo como Luana fez para construir o gráfico de $y = 2x + 1$ com base no gráfico de $y = x$.

- Primeiro construí o gráfico da função $y = x$.
- Depois, construí o gráfico da função $y = 2x$.
- Por último, construí o gráfico de $y = 2x + 1$, que corresponde a uma translação vertical de 1 unidade para cima do gráfico de $y = 2x$.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

MONITO MAN

- Agora, faça como Luana e construa os gráficos de $y = \frac{1}{2}x + 2$ e $y = 3x - 2$ com base no gráfico de $y = x$.

Fonte: Gay e Silva (2018, p.220)

O item “f” explora outra variável visual o sentido da inclinação, quando solicita “construa os gráficos de $y = x$ e $y = -x$” e descreva o que observou. Consideramos esta atividade como uma dupla conversão, primeiro do registro algébrico para o gráfico, via software, em seguida do registro gráfico → registro língua natural.

O item “g” consideramos como a conversão do registro língua natural para registro gráfico, o estudante deve construir o gráfico de “três pares de funções” que sejam simétricos em relação ao eixo y. Também explora a variável visual sentido da inclinação, uma vez que a relação de simetria em relação ao eixo y se relaciona diretamente com o sinal do coeficiente “a” são exemplos de resposta: $y = 3x$ e $y = -3x$; $y = 2x$ e $y = -2x$; e $y = \frac{1}{2}x$ e $y = -\frac{1}{2}x$.

No item “h” o estudante deve construir os “gráficos de $y = \frac{1}{2}x + 2$ e $y = 3x - 2$ com base no gráfico de $y = x$”, seguindo o procedimento adotado por “Luana”, consideramos esta conversão como do registro algébrico para o gráfico.

Esta sequência de itens analisados contempla a abordagem global de propriedades figurais e contribui para que o estudante estabeleça uma relação entre as variáveis visuais e as unidades simbólicas, percebendo que variações em um registro implicam em variações no outro.

A partir da análise destas atividades, podemos inferir que apesar dos livros didáticos adotarem a abordagem ponto a ponto, com exceção do LD-1 e LD-5, temos elementos da abordagem global de propriedades figurais que são trabalhados tanto na parte expositiva quanto nessas atividades que utilizam softwares de geometria dinâmica. Cabe ressaltar que o uso do software não significa o trabalho de acordo como que propõe a TRRS, a atividade da Figura 29 é um exemplo de tarefa que não correlaciona as variáveis visuais com as unidades simbólicas e se detém apenas no aspecto prático do uso de softwares.

5.2 ANÁLISE DE CONGRUÊNCIA E NÃO CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA

Nesta seção faremos a análise de congruência e não congruência semântica nas atividades de conversão segundos os critérios estabelecidos por Duval, o que corresponde ao nosso terceiro objetivo específico.

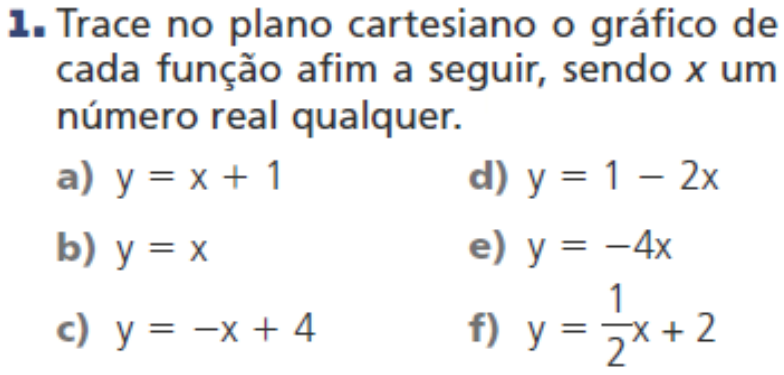
O fenômeno de congruência e não congruência semântica, nas conversões, significa o quanto um registro transparece no outro, em outras palavras e de maneira simplificada podemos relacionar com a facilidade ou não de realizar a conversão.

Uma conversão é congruente se todos os critérios são satisfeitos. É necessário que exista: Correspondência semântica dos elementos significantes (I); Univocidade semântica terminal (II); e Ordem dentro da organização das unidades compondo cada uma das representações (III). Dessa forma, a análise irá categorizar as conversões congruentes e não congruentes.

Destacamos para esta análise atividades de conversão envolvendo os registros de representação semiótica da função afim com maior frequência nos livros didáticos analisados, bem como também investigamos a conversão no sentido oposto.

A Figura 33 é uma conversão do registro algébrico para o registro gráfico. Esta conversão neste sentido (registro algébrico → registro gráfico) está entre as mais exploradas em todos os livros didáticos analisados, sendo a mais frequente do LD-1. A análise busca identificar quais critérios são satisfeitos e, posteriormente, avaliar se existe congruência ou não congruência semântica entre os registros envolvidos nesta conversão.

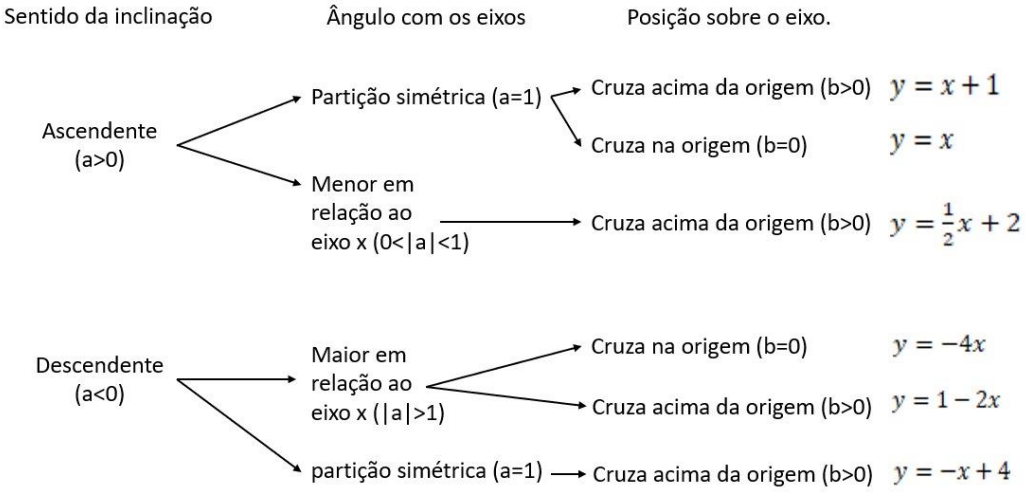
Figura 33 – Atividade de conversão do registro algébrico →registro gráfico



Fonte: Giovanni Júnior, Castrucci (2018, p.255)

Podemos dizer que o critério (I) é satisfeito, uma vez que é possível estabelecer uma correspondência entre os elementos significativos do registro algébrico e as variáveis visuais do registro gráfico. A Figura 34, ilustra essa relação.

Figura 34 – Variáveis visuais e unidades simbólicas correspondentes



Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

O segundo critério, a univocidade semântica terminal (II), não é satisfeito, pois para cada unidade significante no registro de partida existe mais de um significado no registro de chegada, por exemplo, o *coeficiente a* se relaciona com o sentido da inclinação e com o ângulo com os eixos. Para Duval, “o conceito de inclinação, algebricamente traduzido pelo coeficiente, recobre duas unidades significativas diferentes: uma definida em relação ao sinal e a outra em relação ao inteiro 1”. (DUVAL, 2011b, p.101-102)

Com relação ao terceiro critério, a ordem dentro da organização das unidades compondo cada uma das representações (III), Duval (2009) destaca que não se aplica

a casos em que as dimensões dos registros são diferentes, neste caso especificamente, o registro algébrico possui uma dimensão enquanto que o registro gráfico é bidimensional. Desse modo, como não satisfaz o critério (II), temos caso de não congruência semântica.

Se considerarmos a conversão do registro algébrico para o registro gráfico, usando a abordagem ponto a ponto, adotada em todos os livros didáticos, teremos uma dupla conversão, a primeira do registro algébrico para registro tabular seguida da conversão do registro tabular para registro gráfico. Vamos considerar o item a, da Figura 15, $y = x + 1$ para analisar, em detalhes, esta situação.

Figura 35 – Exemplo de conversão com a abordagem ponto a ponto

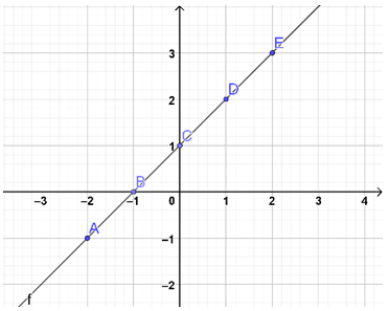
Registro simbólico

$$y = x + 1$$

Registro tabular

x	$y = x + 1$	(x, y)
-2	$y = -2 + 1 = -1$	$(-2, -1)$
-1	$y = -1 + 1 = 0$	$(-1,0)$
0	$y = 0 + 1 = 1$	$(0,1)$
1	$y = 1 + 1 = 2$	$(1,2)$
2	$y = 2 + 1 = 3$	$(2,3)$

Registro gráfico



Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

A primeira conversão do registro algébrico para o registro tabular, consiste em uma série de tratamentos no registro algébrico e posterior organização em uma tabela, neste caso, vamos considerar essa conversão como congruente por se aproximar de uma tarefa de codificação, seguindo o entendimento de Silva (2020), mas deixando claro que no procedimento foram realizados apenas tratamentos no registro algébrico.

Na segunda conversão, do registro tabular para o registro gráfico, é necessário associar cada par ordenado encontrado com um ponto no plano e traçar a reta que os contém. Nesta conversão temos congruência semântica entre os registros, uma vez que existe correspondência, entre os pares ordenados e os pontos no plano, e é única, satisfazendo os critérios (I) e (II). A ordem que se lê a tabela é a mesma que os pontos aparecem no plano (III).

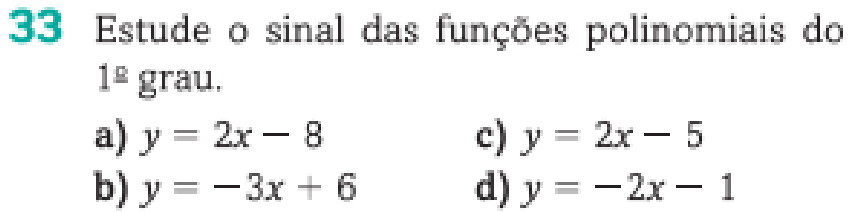
De fato, a abordagem ponto a ponto colabora com a conversão do registro algébrico para o registro gráfico, mas podemos perceber a dificuldade no sentido inverso diante da impossibilidade de realizar a “dupla conversão” no sentido oposto.

Segundo Duval (2011b) a abordagem ponto a ponto não leva em consideração as variáveis visuais e as unidades simbólicas sendo, para a maioria dos estudantes, uma abordagem sincrética e inoperante. Este fato, impossibilita a compreensão dos estudantes sobre o real valor intuitivo das representações gráficas e transforma a conversão em um conjunto de procedimentos que ao longo do tempo podem perder o sentido.

Desta forma, a conversão do registro algébrico para o registro gráfico, passando pelo registro tabular as conversões são congruentes, no sentido oposto (registro gráfico → registro algébrico) é não congruente, uma vez que o critério (II) da univocidade semântica terminal não é satisfeito, pois as variáveis visuais sentido da inclinação e ângulo com os eixos se relacionam com coeficiente a.

A questão da Figura 36 contempla a conversão entre os registros algébrico e gráfico nos dois sentidos.

Figura 36 – Dupla conversão registro algébrico ↔ registro gráfico



33 Estude o sinal das funções polinomiais do 1º grau.

a) $y = 2x - 8$ **c)** $y = 2x - 5$

b) $y = -3x + 6$ **d)** $y = -2x - 1$

Fonte: Bianchini (2018, p. 230)

Nesta questão precisamos considerar duas conversões, seguindo o procedimento adotado no LD-03, primeiro a conversão entre o registro algébrico para o registro gráfico e depois o sentido oposto. Antes da conversão é necessário encontrar o zero da função, ou seja, realizar um tratamento no registro algébrico.

Faremos a análise do item “a” e os outros itens seguem de maneira análoga. Inicialmente encontramos o zero da função através de um tratamento algébrico que consiste em calcular o valor de x para y=0, temos:

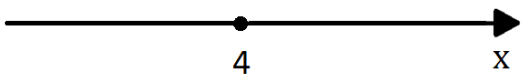
$$0 = 2x - 8$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

Em seguida, para realizar o estudo de sinal é necessário traçar apenas o eixo x e identificar o zero da função.

Figura 37 – Localização de zero da função na reta

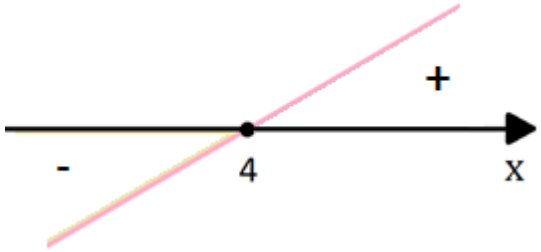


Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Depois observar o sinal do coeficiente “a” para determinar se a função é crescente ou decrescente, no caso do item “a”, temos a = 4 (função crescente).

Finalmente traçar a reta que passa pelo ponto x=4, com sentido da inclinação ascendente por se tratar de uma função crescente.

Figura 38 – Exemplo de estudo de sinal



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

A segunda conversão segue no sentido oposto. A partir do registro gráfico o estudante deve identificar os intervalos de x onde y>0, y=0 e y<0.

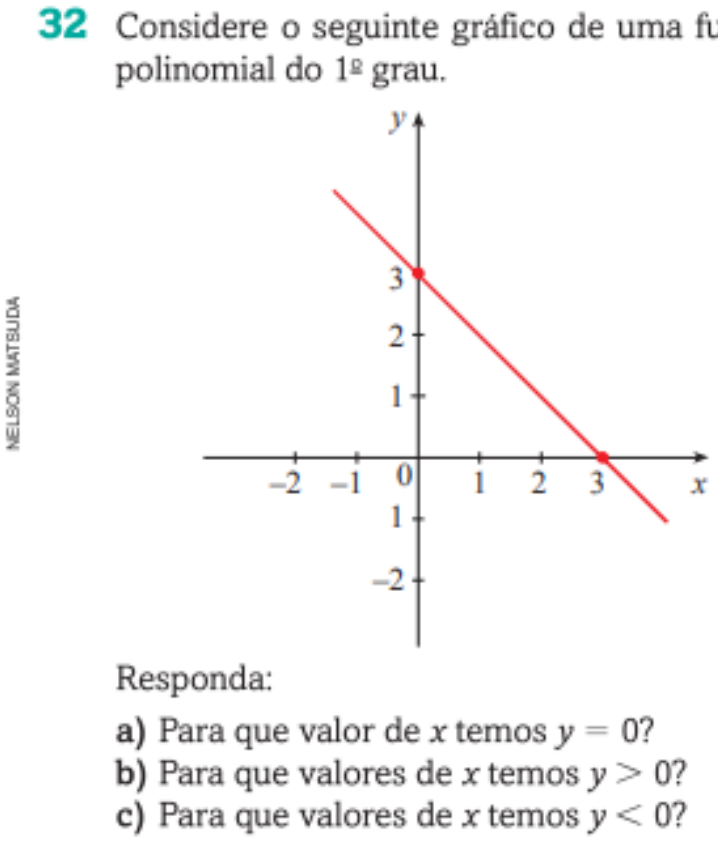
Vamos analisar o fenômeno de congruência semântica nestas conversões. Na primeira conversão, podemos estabelecer a relação entre o sinal do confidente “a” e o sentido da inclinação, mas o zero da função não está expresso na lei da função. Dessa forma o primeiro critério não é satisfeito, pois não há correspondência semântica entre os elementos significantes na lei da função e no gráfico. Sem essa correspondência não é pertinente avaliar a univocidade semântica terminal e a ordem dos elementos. Logo consideramos esta conversão não congruente.

Agora vamos analisar a segunda conversão, que parte do registro gráfico para o registro algébrico. É possível estabelecer a correspondência entre os elementos nos dois registros, por exemplo, o traçado da reta em que a reta está acima do eixo x (y>0) com o intervalo x>4. Existe univocidade semântica terminal, pois existe uma relação biunívoca entre as regiões (registro gráfico) e os intervalos (registro algébrico). Por

fim, podemos dizer que a ordem dos intervalos x<4, x=4 e x>4 correspondem a mesma ordem em que são representados no gráfico. Dessa forma consideramos a segunda conversão como um caso de congruência semântica.

Ainda com relação a conversão entre os registros gráfico e algébrico a questão da Figura 39 é um exemplo de conversão entre o registro gráfico e o registro algébrico.

Figura 39 – Conversão entre o registro gráfico → registro algébrico



32 Considere o seguinte gráfico de uma função polinomial do 1º grau.

NEILSON MATSUDA

Responda:

a) Para que valor de x temos $y = 0$?
b) Para que valores de x temos $y > 0$?
c) Para que valores de x temos $y < 0$?

Fonte: Bianchini (2018, p. 236)

Classificamos os três itens como conversão do registro gráfico para o registro algébrico. No item “a” podemos estabelecer uma relação entre y=0 (registro algébrico) com o ponto (3,0) (no registro gráfico), neste caso, o zero da função e encontrar x=3. No o item “b” podemos estabelecer uma relação entre o traçado da reta em que a reta está acima do eixo x (y>0), com o intervalo em que x é menor que o zero da função (x<3). No item “c” estabelecemos a relação entre o traçado da reta em que a reta está abaixo do eixo x (y<0) com o intervalo x>3. Dessa forma, conseguimos estabelecer uma correspondência entre elementos dos registros algébrico e gráfico satisfazendo o primeiro critério. O segundo critério da univocidade semântica terminal, nestes

casos, é satisfeito por se tratar de intervalos disjuntos, ou seja, o traçado da reta no registro gráfico se relaciona com apenas uma expressão no registro algébrico. A ordem também é verificada, os intervalos e as regiões do gráfico possuem a mesma disposição. Dessa forma, consideramos estas conversões congruentes.

A partir dessa análise podemos perceber que atividades que envolvem tratamentos e conversões podem interferir em relação ao fenômeno de congruência semântica. É preciso que o estudante tenha conhecimento prévio dos registros, ou seja, conheça as regras próprias de funcionamento e sejam capazes de realizar tratamentos. Nas palavras de Duval (2009, p. 78) “as dificuldades ligadas à não-congruência da conversão podem ainda ser agravadas pelo desconhecimento de um dos registros de representação”. Esse desconhecimento nos gráficos cartesianos é proveniente da abordagem ponto a ponto que não relaciona os elementos significantes dos dois registros e inviabiliza a conversão do registro algébrico para o registro gráfico (DUVAL, 2009).

A Figura 40 é uma atividade de conversão do registro língua natural para o registro algébrico. Esta atividade utiliza o registro em língua natural e o registro figural (auxiliar) e propõe a conversão para o registro algébrico (lei da função).

Figura 40 – Conversão do registro língua natural → registro algébrico

1. Em maio de 2014, uma empresa de Alagoas publicou na internet a oferta ao lado. Naquela data, um comerciante de Manaus encomendou várias peças do anúncio, que foram enviadas por correio, que cobrou R$ 50,00 pelo envio da encomenda. Chamando de *x* a quantidade de toalhas encomendadas e de *y* a despesa que esse comerciante teve ao adquirir essa encomenda, determine:

a) a lei de formação da função que descreve a dependência da despesa total com o número de toalhas encomendadas.

Toalha bordada na Ilha do Ferro, AL.

Fonte: Giovanni Júnior, Castrucci (2018, p.257)

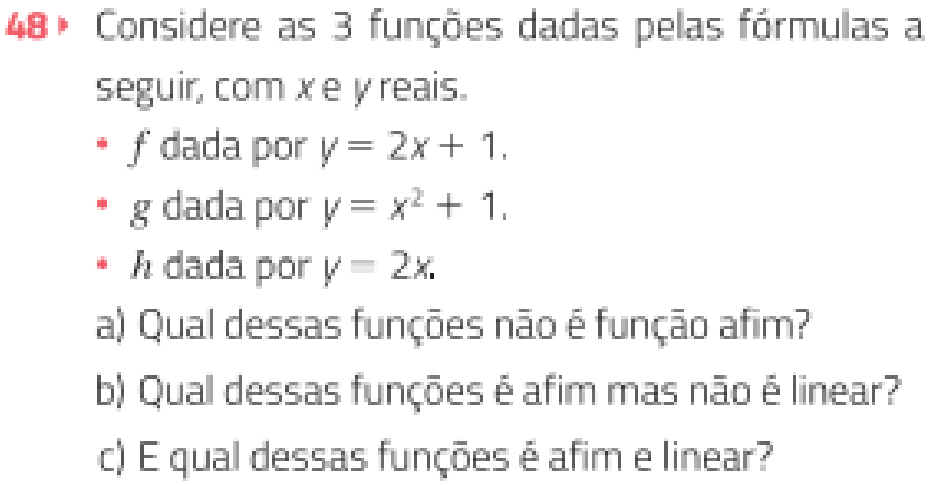
O estudante deve identificar, no enunciado em língua natural (registro de partida), elementos significantes e estabelecer uma correspondência com as unidades simbólicas (registro de chegada). É possível estabelecer uma correspondência semântica dos elementos significantes (I): O preço de cada toalha é R$ 275,00; x é a quantidade de toalhas; e o envio custou R$ 50,00 (valor fixo).

A univocidade semântica terminal (II) também é satisfeita, para cada unidade significante, no registro de partida, temos apenas uma correspondente no registro de chegada.

Neste exemplo, a ordem dentro da organização das unidades compondo cada uma das representações (III) não se verifica, inclusive o valor da mercadoria se apresenta na representação figural. Dessa forma, como não satisfaz um dos critérios, classificamos a conversão como não congruente.

A próxima atividade analisada, Figura 41, contempla a conversão entre o registro algébrico e registro língua natural, sendo explorados os dois sentidos. Esse tipo de conversão é o mais frequente no LD-2.

Figura 41 – Conversão registro algébrico → registro língua natural


48 Considere as 3 funções dadas pelas fórmulas a seguir, com x e y reais.

- f dada por $y = 2x + 1$.
- g dada por $y = x^2 + 1$.
- h dada por $y = 2x$.

a) Qual dessas funções não é função afim?

b) Qual dessas funções é afim mas não é linear?

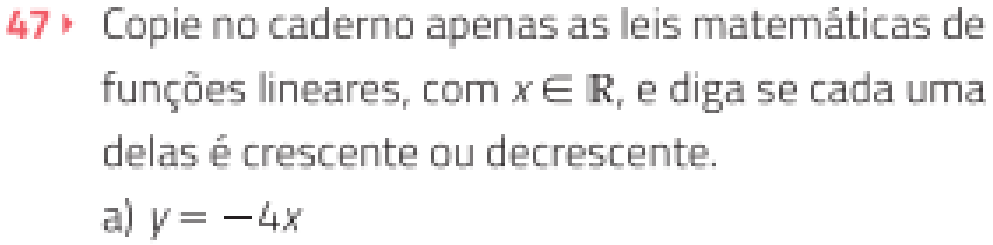
c) E qual dessas funções é afim e linear?

Fonte: Dante (2018, p. 141)

Nesta atividade o estudante deve saber identificar uma função afim a partir do registro algébrico (lei da função), além disso saber a forma algébrica (y=ax) de uma função linear, um caso particular de função afim. A correspondência semântica não se verifica, nesse caso é necessário que o estudante conheça antecipadamente a forma algébrica de uma função afim, $y = ax + b$, para só então categorizar as leis disponibilizadas no enunciado, o mesmo ocorre nos demais itens. A univocidade semântica terminal também não se verifica, o termo “função afim”, por exemplo, se relaciona com o conjunto de elementos significantes do registro algébrico. Neste caso a ordem também não é contemplada. De modo que caracterizamos como um caso de não congruência semântica.

Uma conversão envolvendo os mesmos registros (algébrico e língua natural) e mesmo sentido pode ter custo cognitivo diferente para exemplificar este fato destacamos atividade da Figura 42.

Figura 42 – Conversão registro algébrico → registro língua natural


47 Copie no caderno apenas as leis matemáticas de funções lineares, com $x \in \mathbb{R}$, e diga se cada uma delas é crescente ou decrescente.
a) $y = -4x$

Fonte: Dante (2018, p. 134)

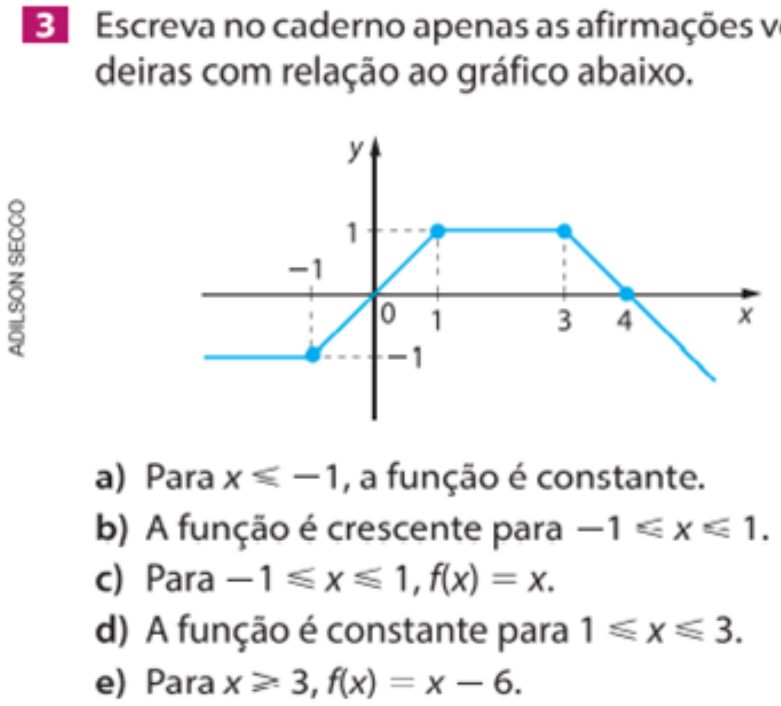
Neste caso vamos considerar nessa análise apenas a classificação em crescente e decrescente, a categorização em linear ou não foi contemplada no exemplo anterior. Podemos estabelecer a correspondência entre os elementos significantes nos dois registros, a>0 corresponde ao termo “crescente”, a<0 corresponde ao termo “decrescente”. Neste exemplo especifico, para a<0, o critério dois da univocidade semântica terminal é respeitado, uma vez que a relação entre sinal de negativo (-) e o termo “decrescente” (registro língua natural) é única. A ordem dos elementos também é verificada. Dessa forma classificamos como um caso de congruência semântica por satisfazer todos os critérios.

A partir dos exemplos das Figuras 41 e 42 a análise do fenômeno de congruência e não congruência semântica demonstra que uma conversão ainda que envolva os mesmos registros pode ter custo cognitivo diferente. O registro língua natural é um registro multifuncional e permite um número elevado de variações, enquanto o registro algébrico é monofuncional. Segundo Duval (2003) as conversões que envolvem registros de naturezas diferentes são mais complexas. A categorização do que é função afim ou não, na atividade da Figura 41, é não congruente, porque o registro língua natural naquele exemplo[16] não descreve a função, fato que impossibilita estabelecer a correspondência entre os elementos significantes. Nestes exemplos podemos ver as variações que o registro língua natural permite.

A questão da Figura 43 é um exemplo dupla conversão registro algébrico → registro gráfico e registro gráfico → registro língua natural.

[16] A expressão “função afim” (língua natural) corresponde a “$y = ax + b$” (registro algébrico)

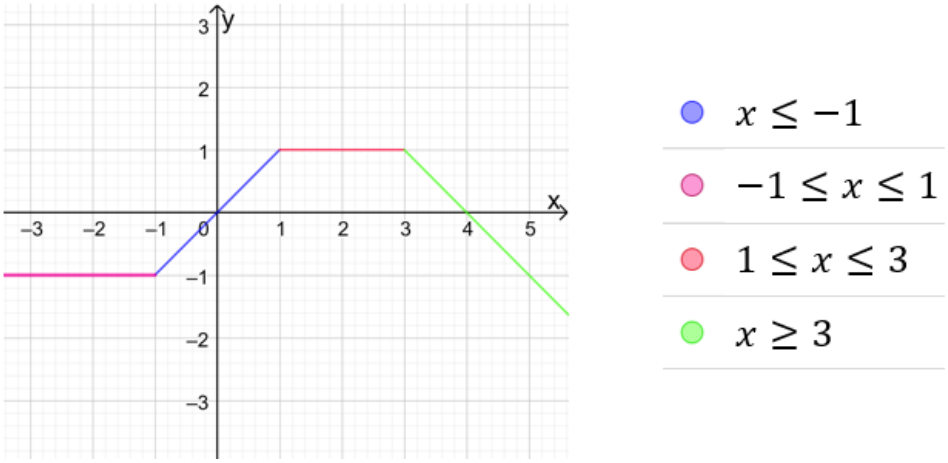
Figura 43 – Conversões entre o registro algébrico → registro gráfico e registro gráfico → registro língua natural



Fonte: Gay e Silva (2018, p.232)

O estudante deve julgar a partir das alternativas quais itens são verdadeiros ou não. O item “a” é verdadeiro, pois relaciona o intervalo $x \leq -1$ (registro algébrico) e o termo “constante” (registro língua natural) que no gráfico significa paralelo ao eixo x. Os itens “b” e “d” seguem de maneira análoga e são verdadeiros. O item “c” tem uma particularidade, pois fornece a lei da função $f(x) = x$ e neste caso é preciso relacionar as variáveis visuais com as unidades simbólicas, ou seja, a partir da lei temos a=1 isso corresponde no registro gráfico a uma reta ascendente que forma uma partição simétrica com os eixos para só então concluir que é verdadeiro. Apenas o item “e” é falso, pois associa o intervalo $x \geq 3$ com lei $f(x) = x - 6$, a partir do registro gráfico vemos que para este intervalo a função é decrescente e, na lei da função, o coeficiente “a” é positivo. A Figura 44 ilustra a correspondência entre os intervalos de valores de x e as regiões no gráfico.

Figura 44 – Gráfico e intervalos de valores de x



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Esta atividade contempla as relações entre variáveis visuais e unidades simbólicas, e mais que isso também mobiliza o registro língua natural.

A classificação das conversões para a análise do fenômeno de congruência foi feita da seguinte forma: Consideramos duas conversões: do registro algébrico → registro gráfico e registro gráfico → registro língua natural, com exceção do item “c” que consiste na conversão do registro algébrico → registro gráfico. O item “e” julgado como falso não foi considerado nesta análise.

Primeiro o estudante realiza a conversão entre os intervalos de x no registro algébrico e seu correspondente no registro gráfico. A segunda conversão é do registro gráfico para o registro língua natural quando o estudante precisa associar o gráfico com os termos em língua natural “constante” e “crescente”.

A primeira conversão é congruente, pois é possível relacionar os intervalos $x \leq -1$, $-1 \leq x \leq 1$ e $1 \leq x \leq 3$ e as regiões correspondentes no gráfico conforme a Figura 39, esta relação é única e, nesse caso, a ordem também é respeitada.

A segunda conversão associa a variável visual sentido da inclinação com os termos crescente e decrescente em língua natural. No caso da função constante o gráfico é paralelo ao eixo x e intercepta o eixo y no ponto (0, b). Dessa forma existe uma correspondência entre o gráfico nos intervalos $x \leq -1$ (item a) e $1 \leq x \leq 3$ (item d) e o termo “constante”. Também podemos relacionar o sentido da inclinação (ascendente) no gráfico do intervalo $-1 \leq x \leq 1$ (item b) e o termo “crescente”. Estas relações são únicas e a ordem é respeitada. Classificamos estas conversões como congruentes.

A conversão do item “c” é não congruente, pois o coeficiente “a” se relaciona com duas variáveis visuais “sentido da inclinação” e ao “ângulo com os eixos” de modo que a univocidade semântica terminal não é verificada.

A próxima questão analisada, da Figura 45, explora as conversões entre os registros língua natural → registro gráfico e registro gráfico → registro algébrico.

Figura 45 – Dupla conversão do registro língua natural→ registro gráfico e registro gráfico→ registro algébrico

6 Considere a lei de uma função $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais e x pode ser qualquer número real. Se os pontos $(1, 2)$ e $(-1, 0)$ pertencem ao gráfico de f, então $f(x) > 0$ para:

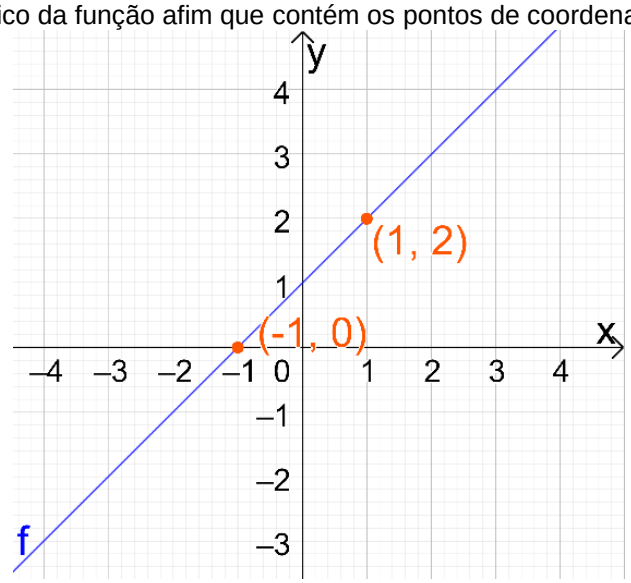
a) $x > 0$ **c)** $x > 1$

b) $x > -\frac{1}{2}$ **d)** $x > -1$

Fonte: Gay e Silva (2018, p.224)

A atividade propõe uma dupla conversão. Primeiro a conversão entre o registro língua natural e gráfico. O enunciado em língua natural diz “Se os pontos (1,2) e (-1,0) pertencem ao gráfico de f”, que é suficiente para esboçar o gráfico dessa função sabendo que ela tem a forma “$f(x) = ax + b$”.

Figura 46 – Gráfico da função afim que contém os pontos de coordenadas (1,2) e (-1,0)



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

A segunda conversão do registro gráfico para o registro algébrico solicita que o estudante identifique para quais valores de x temos $f(x) > 0$. O registro gráfico fornece essa informação, a partir do ponto (-1,0) que é o zero dessa função temos $f(x) > 0$, ou seja, para todo $x > -1 \rightarrow f(x) > 0$.

Outra possibilidade para essa questão seria a conversão direta do registro língua natural para o registro algébrico, para isso o estudante deve ser capaz de perceber que a função é crescente, a partir do par de pontos e saber que o ponto de coordenadas (-1,0) é zero da função. De fato, a conversão direta é mais complexa, uma vez que o registro de partida não colabora para que o estudante chegue a essas conclusões. Para Duval "toda representação é cognitivamente parcial quanto ao que ela representa e que representações de registros diferentes não apresentam os mesmos aspectos de um mesmo conteúdo conceitual" (Duval, 2009, p. 91). Em outras palavras cada registro representa parcialmente um objeto matemático e as limitações de cada registro reforçam a necessidade de transformações semióticas.

Para a análise do fenômeno de congruência vamos considerar a dupla conversão. Inicialmente a conversão do registro língua natural para o registro gráfico.

Podemos estabelecer uma correspondência entre os pontos e o plano cartesiano satisfazendo o primeiro critério. A univocidade semântica terminal também é satisfeita, pois a correspondência é única. A ordem, neste caso, não influencia na tarefa de localizar dos pontos no plano cartesiano. Classificamos essa conversão como congruente.

A segunda conversão do registro gráfico para o algébrico também é congruente. Existe uma correspondência entre o traçado da reta no gráfico em que a reta está acima do eixo x e $f(x) > 0$, esta relação é única e a ordem nesse caso também é satisfeita.

Em síntese, podemos inferir que as conversões analisadas nestes livros didáticos foram em sua maioria classificadas como casos de congruência semântica. Cabe ressaltar que diante da impossibilidade de analisar todas as 202 conversões, optamos por selecionar as mais frequentes, tais como, as conversões entre o registro algébrico ↔ registro gráfico e registro algébrico ↔ registro língua natural. Salientamos também que pequenas alterações nas atividades podem elevar o custo cognitivo e tornar as conversões não congruentes. Podemos citar, por exemplo, as variações na redação que o enunciado em língua natural permite.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao analisarmos a abordagem de função afim em cinco livros didáticos de Matemática pra o 9º ano do Ensino Fundamental, ratificamos a necessidade do trabalho com as diversas representações e em atividades que tenham tratamentos e conversões, sendo importante nas conversões o desenvolvimento nos dois sentidos, pois conforme Duval (2003) os resultados demonstram que ao contrário do que se pensa explorar de apenas um dos sentidos da conversão não desenvolve automaticamente o sentido oposto. Consideramos que este estudo contribui significativamente para a Educação Matemática, especialmente pelos aspectos que passamos a destacar a seguir.

Quando comparamos com estudos anteriores (SILVA, 2010; MAGGIO, SOARES E NEHRING, 2010), ainda que estes tenham foco no ensino médio[17], em que o número de tratamentos era superior ao de conversões, nossos dados apontam para uma mudança. Em todos os livros analisados, neste estudo, o quantitativo de conversões superou o quantitativo de tratamentos o que do ponto de vista da TRRS é positivo. Salientamos que nos LD-1 e LD-5 a distribuição de tratamentos e conversões é mais equilibrada, ainda assim as conversões apresentam maior quantitativo. Este resultado levanta questionamentos, tais como, o nível de escolaridade influencia diretamente nesses resultados? Os livros didáticos estão priorizando atividades de conversão? Temos indícios de uma possível resposta, na primeira questão é preciso considerar que o conteúdo função afim é introduzido no ensino fundamental sendo retomado e aprofundado (formalizado) no ensino médio, a mudança no número de tratamentos e conversões pode sofrer influência do que se espera dos estudantes nos diferentes níveis de escolaridade. A segunda questão fica em aberto diante da falta de resultados de pesquisa em livros do ensino fundamental.

Destacamos a importância das atividades de tratamento, para o desenvolvimento e apreensão das regras de funcionamento de cada registro. Os tratamentos identificados foram nos registros algébrico e língua natural. O quantitativo de tratamentos em língua natural é bem inferior ao número de tratamentos no registro algébrico.

[17] Encontramos apenas uma pesquisa em que o estudo era voltado para função afim no ensino fundamental e analise de livros didáticos, tendo como referencial teórico a TRRS e esta não tinha por objetivo quantificar as transformações semióticas de tratamento e conversão.

Nas análises das conversões não consideramos os registros intermediários pois estes iriam depender da estratégia de resolução, identificamos no enunciado o registro de partida e as respostas esperadas como registro de chegada. Cabe um estudo aprofundado sobre o papel dos registros intermediários nas conversões entre registros e deixamos como sugestão para pesquisas futuras.

Consideramos que LD-3 e LD-4 são os livros didáticos que contemplam as conversões entre registros de representação semiótica da função afim de maneira mais equilibrada e exploram os dois sentidos. Enquanto que LD-1, LD-2 e LD-5 privilegiam alguns registros (e sentidos) em detrimento dos demais.

A partir das análises do fenômeno de congruência semântica podemos inferir que as atividades de conversão são, em sua maioria, casos de congruência semântica. Constatamos também que conversões envolvendo os mesmos registros podem ter custo cognitivo diferente.

Este estudo, lançou o olhar sobre as funções, em particular a função afim, em livros do ensino fundamental, etapa escolar em que este conteúdo deve ser formalizado e por entender que é importante ampliar o debate sobre o estudo de funções. Os documentos oficiais (BNCC, Currículo de Pernambuco) não deixam claro para os professores quais conceitos devem ser trabalhados. O trabalho com as diversas representações, ainda no ensino fundamental, pode contribuir para reduzir as dificuldades dos estudantes no ensino médio.

Do ponto de vista profissional, uma das motivações deste estudo, enquanto professor de matemática da educação básica, considero que esta pesquisa contribuiu para a minha pratica docente, principalmente na compreensão da importância do trabalho com as diversas representações. Auxiliou a entender, por exemplo, que uma representação contempla parcialmente um objeto matemático e pode favorecer a compreensão de determinadas características que outras representações não contemplam. No caso das funções, o registro gráfico favorece a visualização do comportamento da função em relação ao crescimento ou decrescimento. Nesse sentido, compreender a conversão entre registros e sua importância, na perspectiva da TRRS, contribui para romper com adoção exclusiva da abordagem ponto a ponto na construção de gráficos e utilizar a abordagem global de propriedades figurais que prioriza a correlação entre os elementos dos dois registros (algébrico e gráfico) contribuindo para atribuir significado a atividade cognitiva de conversão.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; SILVA, Karina Alessandra Pessoa da. **Abordagens Semióticas em Educação Matemática**. Bolema, Rio Claro, v. 32, n. 61, p. 696-726, agosto de 2018.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática - Bianchini, 9º ano**. 9º edição. São Paulo: Moderna, 2018.

BICA, Luis Manuel Peliz Marques. **Funções em livros didáticos: relações entre aspectos visuais e textuais**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2009.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Educação é a base. Ministério da Educação, Brasília, 2017.

BRASIL, Ministério da Educação. **PNLD 2020:** matemática – guia de livros didáticos/ Ministério da Educação – Secretaria de Educação Básica – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, 2019.

CARVALHO, J. B. P.,LIMA, P. F. **Escolha e uso do livro didático**. Volume 17, p.15-30. Brasília, 2010.

DANTE, Luiz Roberto. **Teláris matemática**, 9º ano. 3º edição. São Paulo: Ática, 2018.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A.(org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano**. Editora: Livraria da Física. C. contextos da ciência. Edição: 1/2009. Tradução: Lênio Abreu Farias e Marisa Rosâni Abreu da Silveira

DUVAL, Raymond. **Ver e Ensinar a Matemática de Outra Forma:** Entrar no modo de pensar: os registros de representações semióticas. (Org.) Tânia M. M. Campos; trad. Marlene Alves Dias. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2011a.

DUVAL, Raymond; MORETTI, Trad. Méricles Thadeu. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Graphiques et équations: L'articulation de deux registres. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 96-112, maio 2011b.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FLORES, C.; MORETTI, M. **O funcionamento cognitivo e semiótico das representações gráficas:** Ponto de análise para aprendizagem Matemática. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, GT19: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 28., 2005, Caxambu. Anais... Caxambu: ANPED. p. 1-13. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_28/funcionamento.pdf> Acesso:10/01/2021

FLORES, Cláudia Regina. **Registros de representação semiótica em Matemática:** história, epistemologia, aprendizagem. Bolema, Rio Claro (SP), Ano 19, nº 26, 2006, p.77 a 102.

GAY, Maria Regina Garcia; SILVA, Willian Raphael. **Araribá mais: Matemática, 9º ano**. 1º edição. São Paulo: Moderna, 2018.

GIOVANNI JR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática, 9º ano**. 4º edição. São Paulo: FTD, 2018.

LAJOLO, Marisa. **Livro Didático:** um (quase) manual de usuário. Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. 1996.

MAGGIO, Deise Pedroso; SOARES, Maria Arlita da Silveira; NEHRING, Cátia Maria. Registros de Representação Semiótica da Função Afim: Análise de livros didáticos de matemática do ensino médio. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 5, n. 1, p. 38-47, mar. 2011.

MELO, Carlos Ian Bezerra de; LOPES, Tânia Maria Rodrigues; OLIVEIRA. João Luzeilton de. **Análise crítica do processo de escolha do livro didático de Matemática na EEF José Jucá, no município de Quixadá-CE**. In: Revista Thema. v. 14. n.4. p. 100-113. 2017.

NASCIMENTO, Maria José Almeida do. **Os contextos explorados no ensino da função afim nos livros didáticos de matemática do ensino médio**. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

OLIVEIRA, Esmeralda Maria Queiroz de. **O uso do livro didático de Matemática por professores do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação). UFPE. Recife, 2007.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação e Esportes. **Currículo de Pernambuco**. 2018.

PONTES, Helaine Maria de Souza; BRANDT, Celia FIinck; NUNES, Ana Luiza Ruschel. O estado da arte da teoria dos registros de representação semiótica na educação matemática. Educação Matemática Pesquisa :**Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [S.l.], v. 19, n. 1, abr. 2017.

SCHWARTZBACH, Claudia. **Análise de livros didáticos:** conceitos de relações e funções e suas múltiplas representações. 166 f. Dissertação (Mestrado Profissional

em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2018.

SILVA, Andreza Santana da. **Registros de representação semiótica e função quadrática:** um olhar sobre o ensino e a abordagem no livro didático. 160 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnologica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020.

SILVA, Ligia Maria da. **O tratamento dado ao conceito de função em livros didáticos da educação básica**. 125 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Matemática realidade & tecnologia, 9º ano**. 1º edição. São Paulo: FTD, 2018.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Mello e Souza e a crítica aos livros didáticos de Matemática:** demolindo concorrentes, construindo Malba Tahan. Revista Brasileira de História da Matemática, Rio Claro, SP, v. 8, n.1, p. 171-187, 2004.

VÁZQUEZ, S. P.; REY, G.; BOUBÉE, C. El concepto de función a traves de la Historia. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática – UNIÓN**. n. 16, p. 141-155. 2008.

WARMBIER, Eduarda et al. **Dificuldades na Aprendizagem Da Matemática Com Vista À Função De Primeiro Grau**. IV CIECITEC.Santo Ângelo, RS, Brasil. 2017.