UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

DEPARTAMENTO DE PSICOLOGIA

MESTRADO EM PSICOLOGIA COGNITIVA

RENATA PALHARES FERREIRA

ANÁLISE DE ERROS EM PROBLEMAS DE COMBINATÓRIA COM INVARIANTES IMPLÍCITOS E EXPLÍCITOS RESOLVIDOS POR CRIANÇAS

Recife

2022

RENATA PALHARES FERREIRA

ANÁLISE DE ERROS EM PROBLEMAS DE COMBINATÓRIA COM INVARIANTES IMPLÍCITOS E EXPLÍCITOS RESOLVIDOS POR CRIANÇAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Psicologia Cognitiva da Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico CFCH, como requisito para a obtenção do título de Mestra em Psicologia Cognitiva.

Área de concentração: Psicologia Cognitiva.

Orientadora: Profª. Drª. Juliana Ferreira Gomes da Silva

Recife
2022

Catalogação na fonte
Bibliotecária Maria Janeide Pereira da Silva, CRB4-1262

F383a Ferreira, Renata Palhares.

Análise de erros em problemas de combinatória com invariantes implícitos e explícitos resolvidos por crianças / Renata Palhares Ferreira. – 2022.

79 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora : Profª. Drª. Juliana Ferreira Gomes da Silva.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CFCH. Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, Recife, 2022.

Inclui referências.

1. Psicologia cognitiva. 2. Matemática – Estudo e ensino – Análise de erros. 3. Combinatória. 4. Invariantes. 5. Crianças. I. Silva, Juliana Ferreira Gomes da (Orientadora). II. Título.

153 CDD (22. ed.) UFPE (BCFCH2022-111)

RENATA PALHARES FERREIRA

ANÁLISE DE ERROS EM PROBLEMAS DE COMBINATÓRIA COM INVARIANTES IMPLÍCITOS E EXPLÍCITOS RESOLVIDOS POR CRIANÇAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Psicologia Cognitiva da Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico CFCH, como requisito para a obtenção do título de Mestra em Psicologia Cognitiva.

Aprovada em: 30/06/2022.

BANCA EXAMINADORA

____
Profa. Dra. Juliana Azevedo Montenegro (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

____
Profa. Dra.Lianny Milenna de Sá Melo (Examinadora Externa)
Centro Universitário Brasileiro

____
Profa. Dra. Neila Tonin Agranionih (Examinadora Externa)
Universidade Federal do Paraná

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, acima de tudo, pela graça da vida e de ter cursado o mestrado em psicologia cognitiva. Sei que este caminho foi possível graças ao Senhor.

Um agradecimento muito importante vai aos meus pais, que me proporcionaram estudar e desejaram o melhor através do conhecimento, desde criança. Aos meus filhos e toda família por estarem ao meu lado e serem uma razão para viver. Amo vocês.

Agradeço especialmente a minha orientadora, Juliana Ferreira, por sua gentileza, dedicação e companheirismo. Todo caminho foi possível porque ela estava ao meu lado, sempre trazendo motivação, cuidados, alegria e ensinamentos. Muitas reflexões e direcionamentos foram possíveis através da professora Juliana, a quem muito admiro e agradeço.

A professora Alina Spinillo, que me deu a oportunidade de conhecer a psicologia cognitiva, plantando em mim o desejo por descobertas; a admiração pelo desenvolvimento cognitivo e a vontade de estudar cada vez mais. Um segundo motivo para a gradecer à Alina, é por ter me indicado como orientanda da professora Juliana.

Muito obrigada, a todos os professores. Passamos um mestrado em meio a uma pandemia, que recrutou muita criatividade e adaptações, resultando no melhor de todos nós, alunos e professores. A boa vontade e sabedoria guiaram vocês, que muito superaram para nos proporcionar a continuidade do curso.

Obrigada, Timóteo e ao corpo administrativo do programa de pós-graduação em psicologia cognitiva, sempre presentes e receptivos.

A todos colegas e amigos de turma, especialmente à Adijane e a Marly. A turma do doutorado e do mestrado 2021. Todos tão presentes, fazendo do curso uma troca muito boa de conhecimento, amizade, companheirismo, como uma corrente do bem. Sempre havia te para uma troca, orientação e carinho.

Agradeço aos participantes de minha banca de qualificação e examinadora deste trabalho, as professoras, Juliana Azevedo Montenegro, Lianny Milenna de Sá Melo, Neila Tonin Agranionih e Candy Laurendon, pela gentileza de avaliarem e contribuírem para com a presente pesquisa.

Ao NUPPEM ao grupo GERAÇÃO pelas contribuições ao longo desta pesquisa e por proporcionarem e compartilharem o desenvolvimento de investigação sobre a psicologia da educação matemática e raciocínios combinatório e probabilístico.

Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), pela concessão da bolsa-auxílio à pesquisa, possibilitando maior dedicação ao Mestrado

RESUMO

O raciocínio combinatório desempenha um importante papel no desenvolvimento cognitivo de crianças e adolescentes. O presente estudo, fundamentado na teoria dos campos conceituais, investigou o efeito da explicitação dos invariantes nos erros empregados por crianças na resolução de problemas de arranjo, permutação e combinação em duas condições: com enunciados que explicitavam os invariantes ou com enunciados que deixavam os invariantes implícitos. O estudo foi construído a partir do banco de dados de Silva e colaboradores (2017), composto por 60 protocolos de crianças, de ambos os sexos, estudantes do 4º ano do ensino fundamental de uma escola pública da cidade de Maceió-AL, as quais foram divididas em três grupos com vinte crianças. Cada grupo respondeu a quatro problemas de um tipo de situação combinatória, sendo dois com invariantes implícitos e dois com invariantes explícitos. A análise qualitativa identificou cinco tipos de raciocínio envolvidos nas respostas inadequadas e comuns às três situações combinatórias. De maneira geral, os resultados indicam que a condição de explicitação dos invariantes denotou qualitativamente, respostas mais elaboradas, em razão da sofisticação cognitiva. A análise estatística confirmou as diferenças de distribuição dos tipos de erros em função da condição implícita e explícita. Esses resultados trazem contribuições para o campo da psicologia cognitiva, relativas à compreensão da organização intelectual de crianças dos anos iniciais no tocante aos mecanismos de aquisição do conhecimento combinatório, como também para o campo da educação matemática.

Palavras-chave: combinatória; erro; invariantes; crianças.

ABSTRACT

Combinatorial reasoning plays an important role in the cognitive development of children and adolescents. The present study, based on the theory of conceptual fields, investigated the effect of making the invariants explicit on the errors employed by children in solving problems of arrangement, permutation and combination in two conditions: with statements that made the invariants explicit or with statements that left the invariants implied. The study was built from the Silva et al. were divided into three groups with twenty children. Each group responded to four problems of a type of combinatorial situation, two with implicit invariants and two with explicit invariants. Qualitative analysis identified five types of reasoning involved in inappropriate and common responses to the three combinatorial situations. In general, the results indicate that the condition of explicitation of the invariants qualitatively denoted more elaborate responses, due to the cognitive sophistication. Statistical analysis confirmed the differences in the distribution of error types as a function of the implicit and explicit condition. These results bring contributions to the field of cognitive psychology, related to the understanding of the intellectual organization of children in the early years regarding the mechanisms of acquisition of combinatorial knowledge, as well as to the field of mathematics education.

Keywords: combinatorics; mistake; invariants; children.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O raciocínio combinatório é um domínio específico da matemática, que desempenha um papel importante no desenvolvimento cognitivo de crianças e adolescentes, por ser considerado um sistema operacional, ou seja, um modo de agir frente a situações cuja solução exige um pensamento hipotético dedutivo (INHELDER; PIAGET, 1976). A principal característica deste tipo de pensamento é a possibilidade de distinguir entre o que é real e o que é possível; ou seja, diante de uma determinada situação, considerar as possíveis relações pertinentes para aquela circunstância, por meio da combinação de procedimentos, experimentações e análise lógica. O desenvolvimento das operações combinatórias, descrito por Inhelder e Piaget (1976), aponta que os adolescentes adquirem a capacidade de utilizar, por meios sistemáticos, todas as variações e combinações possíveis, no estágio das operações formais.

Arranjo, combinação e permutação serão os tipos de problemas combinatórios abordados neste estudo, cujo tratamento tem em comum à formação de subconjuntos a partir de um conjunto. Ademais, relações quanto à escolha e à ordem dos elementos também são consideradas na formação de novas possibilidades (BARRETO; BORBA, 2011). Tais relações, como também propriedades distinguem e caracterizam cada tipo de problema combinatório, possibilitando seu reconhecimento e representação do significado de cada conceito. Essas relações e propriedades são denominadas invariantes operatórios, segundo a teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1990).

A teoria dos campos conceituais é considerada uma teoria cognitivista, cuja estrutura e princípios fundamentais atendem ao estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, bem como a fins didáticos. A teoria dos campos conceituais foi constituída com vistas ao entendimento dos processos de conceituação progressiva de estruturas aditivas, multiplicativas, de relações espaciais, numéricas e da álgebra (VERGNAUD, 1990). É no campo conceitual das estruturas multiplicativas que se encontram os problemas de combinatória.

Nesse sentido, é importante destacar a situação da educação matemática no país; avaliações nacionais e internacionais, bem como pesquisas na área, expressam dificuldades relacionadas à matemática. Como exemplo de avaliação de larga escala internacional tem-se o *Program for Internacional Student Assessment* (PISA), que apontou que o Brasil tem baixa proficiência em matemática se comparado com os outros 78 países que participaram da avaliação. A última edição, realizada em 2018, revelou que 68,1% dos estudantes brasileiros, com 15 anos de idade, não possuem nível básico em matemática, o mínimo para o exercício pleno da cidadania (BRASIL, 2019). Na literatura brasileira, encontram-se vários estudos que demonstram dificuldades relacionadas ao conhecimento matemático de crianças, especialmente ao raciocínio combinatório, considerado um problema complexo quando comparado com outros problemas do campo multiplicativo (BRITO; CORREA, 2003; KOUBA, 1989; MELO; SILVA; SPINILLO, 2016; MORO; SOARES, 2006; NUNES; BRYANT, 1997; PESSOA; BORBA, 2012; TAXA- AMARO, 2001; TAXA-AMARO, 2006).

A combinatória, portanto, demonstra ser um conteúdo complexo, sobretudo pela estrutura implícita dos invariantes que os problemas possuem (NUNES; BRYANT, 1997; SPINILLO *et al.*, 2016). Na resolução de problemas de combinatória, as crianças expressam diferentes raciocínios que podem levá-las ao acerto ou ao erro. Neste estudo, destaca-se, especialmente, o papel do erro no processo de aprendizagem e de desenvolvimento cognitivo. O erro para a psicologia cognitiva está associado a mecanismos de aquisição de conhecimentos que expressam lógicas da organização intelectual dos indivíduos (SPINILLO *et al.*, 2016). Assim, torna-se importante compreender o erro como uma forma de conhecer o raciocínio dos estudantes, considerando que essa é uma abordagem construtivista do erro. Os erros assim como os acertos são formas de raciocinar que revelam o pensamento frente a um dado objeto de conhecimento (SPINILLO *et al.*, 2014; SPINILLO *et al.*, 2016). Estudos anteriores investigaram estratégias de resolução empregadas por crianças em problemas de combinatória (ANDRADE, 2020; BRÄUNING, 2019; ENGLISH, 2005; 2007; HALANI, 2012; HÖVELER, 2018; MELO, 2012; MORO, SOARES, 2006; SANTOS; ANDRADE, 2020; SILVA, 2014; SILVA, 2010), contudo, não foram encontrados estudos que enfoquem o erro em problemas de arranjo, permutação e combinação, no que concerne à comparação da condição implícita ou explícita no enunciado dos problemas.

Portanto, a presente dissertação analisou o raciocínio empregado por crianças na resolução -*incorreta* - de problemas de combinatória em condições distintas: com invariantes explícitos e com invariantes implícitos. Partiu-se da hipótese de que a explicitação das propriedades e relações invariantes, que regem as situações combinatórias, poderia auxiliar as crianças em termos do raciocínio empregado. Poderia um erro demonstrar maior compreensão conceitual do que outro? Não obstante, a análise de erros pode expor a trajetória cognitiva do pensamento infantil.

Busca-se, com isso, responder as seguintes questões: há diferenças no raciocínio empregado em problemas que têm em seu enunciado invariantes implícitos e explícitos? É possível que exista diferenças qualitativas no(s) raciocínio(s) que levam ao erro? Como analisar o erro em problemas de combinatória e identificar sua possível natureza? Examina-se a possibilidade de que os erros nos problemas da condição explícita possam ser de natureza distinta e, ainda, refletirem diferentes níveis de compreensão da combinatória. Acredita-se que, além da relevância social de pesquisas sobre o conhecimento matemático de crianças, o presente estudo traz contribuições importantes para o campo da psicologia cognitiva, mais precisamente para a psicologia da educação matemática, e também implicações educacionais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

As considerações teóricas que fundamentam o presente estudo serão apresentadas em quatro seções. A primeira seção aborda a análise combinatória a partir da perspectiva matemática, especialmente os problemas de arranjo simples, combinação simples e permutação simples. A nomenclatura adotada a partir de agora para se referir a esses problemas será: arranjo, combinação e permutação. A segunda seção versa sobre o raciocínio combinatório na perspectiva da Psicologia Cognitiva, trazendo a concepção piagetiana e, em seguida, a concepção da formação de conceitos matemáticos presente na teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud. Na terceira seção, discute-se o erro na resolução de problemas matemáticos por crianças a partir de uma concepção cognitivista. A quarta e última seção apresenta revisão de estudos da literatura, conduzidos com crianças, que investigam o raciocínio combinatório, abordando, sobretudo, o(s) raciocínio(s)os que levam ao erro frente a esse tipo de raciocínio.

2.1 ANÁLISE COMBINATÓRIA NA PERSPECTIVA DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

A análise combinatória propõe desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto agrupados sob certas condições (HAZZAN, 1977). Como método de quantificação de elementos de um conjunto, Merayo (2015) aponta que não é necessário, para tanto, listá-los ou enumerá-los. A combinatória é destacada por Morgado et al (1991), como um tópico da matemática que analisa as estruturas e as relações discretas. A partir de procedimentos contemplados por este método é possível chegar aos resultados de forma mais rápida, tendo como base o princípio multiplicativo da contagem (PAIVA, 2009).

Os problemas de combinatória se apresentam sob distintas condições e propriedades, estabelecendo relações que os diferenciam e que permitem que sejam classificados. Observadas as construções clássicas da análise combinatória, Santos, Mello e Murari (1995) elencam três grupos de problemas: arranjo, combinação e permutação. Cada problema será descrito e exemplificado a seguir.

2.1.1 Problemas de Arranjo

Os problemas de Arranjo partem de um grupo maior de elementos para a formação de alguns subconjuntos, considerando a ordem dos elementos na composição de cada nova possibilidade (PESSOA; BORBA, 2010). Destaca-se também, para a construção de cada subconjuntos do grupo, não existir a repetição de elementos nos problemas de arranjo simples.

Paiva (2009) esclarece que dois arranjos simples quaisquer são diferentes tanto pela ordem, quanto pela natureza dos elementos que o compõem, vejamos: considerando os elementos do conjunto $I=\{a,b,c,d\}$, formar sequências de 3 elementos distintos (**P**), construindo uma matriz de possibilidades, de onde sejam extraídos alguns dos subconjuntos para formação do quadro abaixo, como exemplificação:

Quadro 1 - Possibilidades de combinação por arranjo a partir do conjunto I = {a,b,c,d}.

Subconjuntos	**Distinções**
$(a,b,c) \neq (b,c,a)$	Diferentes pela *ordem* dos elementos
$(a,b,c) \neq (a,b,d)$	Diferentes pela *natureza* dos elementos, ou seja, elementos diferentes

Fonte: A autora (2022)

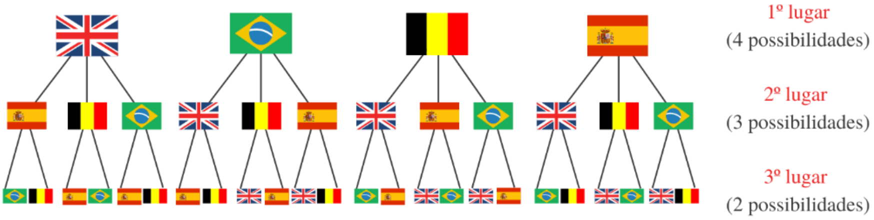
Nesse enquadre, o arranjo pode ser definido: "*Arranjos simples de **n** elementos tomados **p** a **p**, onde n > 1 e **p** é um número natural tal que **p** < **n**, são todos os grupos de **p** elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos **p** elementos que compõe cada grupo*" (SANTOS; MELLO; MURARI, 1995, p.42)

A fórmula matemática do Arranjo pode ser expressa da seguinte maneira:

$$A_{np} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo de problema de arranjo: o quadrangular final da Copa do Mundo será disputado pelas seguintes seleções: Inglaterra, Brasil, Alemanha e Espanha. De quantas maneiras distintas podemos ter os três primeiros colocados?

Figura 1- Problema de Arranjo



Fonte: A autora (2022).

Observa-se na Figura 1, que do grupo (Inglaterra, Brasil, Alemanha e Espanha), parte a formação de subconjuntos, em que a ordem e a natureza dos elementos cria novas possibilidades de combinação. No exemplo acima, pode-se constatar que é possível encontrar 24 maneiras distintas de ter os três primeiros colocados.

2.1.2 Problemas de Combinação

O tipo de problema Combinação é caracterizado de forma semelhante aos problemas de Arranjo, no sentido de que há formação de subconjuntos a partir dos elementos de um conjunto maior, no entanto, a ordem dos elementos na combinação não cria novas possibilidades (PESSOA; BORBA, 2010). Agrupar elementos pelo método da combinação simples é constituir subconjuntos, estando atento a não haver elementos repetidos.

De acordo com Paiva (2009), dado um conjunto *I*= {a,b,c,d}, formando subconjuntos de três elementos, teremos, então, a combinação simples dos 4 elementos do conjunto *I*, tomados 3 a 3, vejamos: {a,b,c}; {a,b,d}; {a,c,d} e {b,c,d}.

Quadro 2 - Possibilidades de combinação simples a partir do conjunto I= {a,b,c,d}.

Subconjuntos	**Distinção e Semelhança**
(a,b,c) ≠ (a,b,d)	Diferentes pela *natureza* dos elementos, ou seja, elementos diferentes.
(b,c,d) = (c,b,d)	A *ordem* dos elementos *não altera* a combinação

Fonte: A autora (2022)

Paiva (2009) observa que em duas combinações simples quaisquer a diferença se apresenta apenas pela natureza e não pela ordem dos elementos. Segundo Santos, Mello e Murari (1995, p. 46) a combinação é assim definida: "*A combinação de n elementos tomados p a p, a qualquer agrupamento não ordenado dos p elementos distintos escolhidos dos n elementos existentes*".

Para a combinação, temos a seguinte fórmula matemática:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemplo de problema de combinação: "*No pula-pula do parque podem entrar duas crianças de cada vez. Amanda, Lívia e Gisele estão aguardando a vez. De quantas maneiras diferentes elas podem formar grupos para brincar no pula -pula*?" (BRASIL, 2014, p.40)

No problema, as crianças devem ser agrupadas em duplas, formando subconjuntos a partir do grupo maior, composto por Amanda, Lívia e Gisele, para entrarem no pula-pula, sendo, portanto, duas meninas de cada vez. Assim a resposta ao problema seria as seguintes possibilidades: Amanda e Lívia, Lívia e Gisele e Gisele e Amanda, apenas. Ressaltando que subconjuntos como Lívia e Amanda, Gisele e Lívia, e Amanda e Gisele correspondem a formação de subconjuntos repetitivos

2.1.3 Problemas de Permutação

Na permutação todos os elementos do conjunto serão usados, mas apenas uma vez nos casos específicos de permutação sem repetição. Afirmam Pessoa e Borba (2010) que a característica desse tipo de combinatória é que todos os elementos do grupo são usados, mas em ordens diferentes, gerando novas possibilidades de subconjuntos, formando as permutações.

Paiva (2009, p. 278) exemplifica a permutação da seguinte forma: a partir dos algarismos 2, 7 e 9, formarmos números de 3 algarismos distintos e assim estaremos aqui construindo arranjos simples deles, tomados 3 a 3. Forma-se as seguintes possibilidades {279}, {297}, {729}, {792}, {927}, {972}.

Quadro 3 - Possibilidades de permutação a partir do conjunto I= {2, 7e 9}.

Subconjuntos	**Distinção e Semelhança**
(279) ≠ (297)	Diferentes pela *ordem* dos elementos.
(729) e (972)	Igual natureza dos elementos, ou seja, mesmos elementos.

Fonte: A autora (2022)

A permutação pode ser definida da seguinte forma: "*Dado um conjunto formado por n elementos, chama-se permutação desses **n** elementos quaisquer agrupamento ordenado de n elementos, no qual apareçam todos os elementos do conjunto*" (SANTOS; MELLO; MURARI, 1995, p. 32).

As Permutações simples são representadas pela seguinte fórmula:

$$P_n = n!$$

Exemplo de problema de Permutação: Em uma prateleira pode-se arrumar uma bola, um carro e uma boneca. De quantas maneiras diferentes podemos organizar esses objetos em uma prateleira?

Figura 2 - Representação da resolução do problema de permutação

Fonte: A autora (2022).

No exemplo de permutação acima, temos três objetos que podem ser dispostos numa prateleira, de modo que a ordem do agrupamento dos elementos forma diferentes possibilidades de organização, temos, assim, seis maneiras de organizar os três brinquedos na prateleira.

É importante destacar que as fórmulas utilizadas no ensino da combinatória devem ser uma consequência do raciocínio que os alunos desenvolvem, tendo elas a função de simplificar os cálculos, diante de problemas que tenham grande número de dados (BRASIL, 2002).

Portanto é fundamental para a aprendizagem de combinatória que a análise e o entendimento do problema sejam anteriores à aplicação de fórmulas.

Como integrante fundamental da matemática discreta, a combinatória tem um importante papel na matemática escolar; bem como no desenvolvimento do raciocínio de probabilidade (NAVARRO, BATANERO; GODINO, 1996). Os métodos combinatórios podem ser encontrados na estatística, na programação linear, na lógica, nas confecções de horários, assim como na matemática pura, na teoria dos grupos e representações e na geometria, sendo considerada um componente fundamental do pensamento formal. A respeito desse aspecto, na próxima sessão será apresentada a importância do raciocínio combinatório para a Psicologia.

2.2 A COMBINATÓRIA PARA A PSICOLOGIA

2.2.1 Piaget: a combinatória e o desenvolvimento cognitivo

Para a teoria piagetiana, a estrutura da análise combinatória constitui um dos modelos lógico-matemático característico das operações formais, desempenhando um importante papel no desenvolvimento cognitivo de crianças, adolescentes e adultos (INHELDER; PIAGET, 1976).

As operações formais, segundo Piaget e Inhelder (1976), surgem por volta dos 11-12 anos até 14-15 anos de idade com o pensamento operatório formal, estabelecendo o estado final de equilíbrio no desenvolvimento intelectual. A principal característica deste tipo de pensamento é a possibilidade de distinguir entre o real e o possível. Assim, o adolescente tenta imaginar, diante de um problema, as possíveis relações pertinentes para aquela circunstância, tentando em seguida alcançar quais são realmente verdadeiras, através da combinação de procedimentos, experimentações e análise lógica. Nessa perspectiva, o sujeito vai além do que lhe chega aos sentidos, para desenvolver a aptidão imaginativa de alternativas apropriadas, o que seria o pensamento lógico-formal.

Essencialmente o pensamento formal é considerado hipotético-dedutivo, considerando que para encontrar o real dentro do possível, é necessário que se considere o possível como um conjunto de hipóteses a serem testadas no intuito de confirmá-las ou rejeitá-las.

Consequentemente o pensamento formal é um recurso para encontrar a realidade dentro do contexto de possibilidades (INHELDER; PIAGET, 1976).

A capacidade de manipular e raciocinar sobre dados da realidade é também uma característica do pensamento formal, na medida em que transforma esses dados em afirmações/proposições, razão pela qual o pensamento formal é chamado inclusive de pensamento proposicional. Essa capacidade permite que o sujeito realize operações concretas e as transforme em proposições com as quais pode continuar operando por meio de relações lógicas. Este fenômeno foi chamado por Piaget de combinatória das proposições, porque é uma lógica das combinações possíveis de pensamento (SILVA, 2010).

Inhelder e Piaget (1976) conseguiram relacionar o pensamento operacional formal com a orientação para o possível e o hipotético. De acordo com os autores, o possível pode ser investigado através do método da análise combinatória. A partir desta técnica, o indivíduo pode isolar todas as variáveis envolvidas no problema e determinar as possíveis relações dessas variáveis, observando se todas as combinações possíveis foram notadas, proporcionando encontrar um número elevado de combinações, mesmo diante de poucas variáveis, portanto, o método combinatório é considerado uma atividade complexa.

Portanto, é através das operações combinatórias que o raciocínio hipotético-dedutivo atua, pela possibilidade de relacionar entre si, objetos, fatores e ideias, de todas as maneiras, (INHELDER; PIAGET, 1976). Nesta perspectiva, o raciocínio combinatório representa mais que um esquema matemático, uma organização operacional, uma maneira de proceder ou um método, adotado de maneira espontânea ou intencional, para solucionar situações que requerem este tipo de pensamento. A combinatória é um pré-requisito estrutural importante para o desenvolvimento do pensamento lógico (SILVA, 2010).

O desenvolvimento psicogenético das operações combinatórias foi descrito por Piaget e Inhelder (1976) a partir de experimentos com crianças e adolescentes por meio de observações, entrevistas e tarefas de combinatória. Os autores perceberam que as crianças utilizavam de métodos elementares de cálculo, como ensaio e erro e que não conseguiam completar todas as possibilidades de formação de pares, seguindo um método sistemático para contemplar todas as combinações possíveis. Sendo certo ainda que, as combinações eram mais bem desempenhadas, quanto menor fosse o número de elementos a se combinar, do contrário, o desempenho nas tarefas diminuía. Isso levou os pesquisadores a concluírem que apenas no estágio das operações formais se adquire a capacidade de utilizar, por meios sistemáticos, todas as variações e combinações possíveis de um determinado conjunto.

Como resultado dos experimentos foram encontradas diferentes abordagens entre sujeitos do nível operacional concreto e os do nível operacional formal. As crianças do operacional concreto apresentaram um comportamento assistemático e desorganizado, sem hipótese em relação ao problema, usando de associações causais, sem perceber o que essas associações permitem provar. No entanto, os sujeitos do operacional formal pensam em todas as possíveis combinações e demonstram ter um método ordenado e sistemático para produzir as combinações. Este nível surge como uma etapa de equilíbrio, em relação ao nível anterior (INHELDER; PIAGET, 1976).

Através desse estudo foi possível perceber que há uma correlação estreita entre a construção de conjuntos das operações combinatórias e as operações formais. (INHELDER; PIAGET, 1976). Essencial para o raciocínio hipotético-dedutivo, o pensamento combinatório é considerado um modo sofisticado de pensar e que se faz presente na solução de problemas práticos complexos, como também na compreensão de vários conceitos matemáticos (VERGNAUD, 2009). A próxima seção apresentará a concepção de Vergnaud acerca da formação de conceitos matemáticos, destacando em especial o conceito de combinatória.

2.2.2 Vergnaud: Teoria dos Campos Conceituais

Gerard Vergnaud, psicólogo francês, desenvolveu inúmeras pesquisas sobre o ensino da matemática, destacando a formulação de princípios da didática e a Teoria dos Campos Conceituais, que se fundamenta em pressupostos de Piaget e contribuições de Vygotsky (MORO, 2020). Dentre as proposições de Piaget para a construção da referida teoria, Moro (2020) destaca a atividade do sujeito na construção do conhecimento; a caracterização dos invariantes operatórios; o modelo de equilibração na dialética da interação e o lugar no processo de tomada de consciência da ação. Vergnaud (2017) ante as contribuições de Piaget, apresenta o conceito de esquema como fundamental para a Teoria dos Campos Conceituais, tendo como pedra angular para a investigação em didática das ciências e da matemática. No tocante as contribuições de Vygotsky, destaca-se a importância dispensada à interação social, à linguagem e à simbolização (representações) no domínio progressivo de um campo conceitual (VERGNAUD, 2017).

Trata-se de uma teoria cognitivista, considerada por fornecer além de uma estrutura coerente alguns princípios fundamentais para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, especialmente no campo da ciência e da tecnologia. Atende também a fins didáticos por fornecer uma estrutura de aprendizagem, permitindo compreender as afiliações e rupturas entre os saberes de crianças e de adolescentes, cujos efeitos da aprendizagem e do desenvolvimento cognitivo intervêm conjuntamente. Embora não seja específica da matemática, a teoria dos campos conceituais foi constituída com fulcro no entendimento dos processos de conceituação progressiva de estruturas aditivas, multiplicativas, bem como, de relações espaciais, numéricas e da álgebra (VERGNAUD, 1990).

Para a Teoria dos campos conceituais, a conceitualização é o aspecto essencial do desenvolvimento cognitivo, representando a evolução dos conceitos cotidianos para os conceitos científicos. A conceitualização vai além da definição ou mesmo descrição das propriedades de um conceito; ela trata de interrelações com outros conceitos, que foram estabelecidas progressivamente diante de diversas situações e representações simbólicas ou linguísticas (VERGNAUD, 1990).

Nessa perspectiva teórica, o conhecimento é concebido em campos conceituais e o seu domínio ocorre durante um longo período, levando em conta as experiências, a maturidade e a aprendizagem do sujeito. Sendo certo que, por campos conceituais entende-se um conjunto de situações cujo domínio requer o manejo simultâneo de conceitos e o uso de representações simbólicas, que podem operar de forma integrada no processo de aquisição (VERGNAUD, 2009).

A construção de um conceito, segundo Vergnaud (2009), ocorre quando o sujeito domina o conjunto de situações (S), que dá sentido ao conceito e o torna significativo; bem como, domina o conjunto de invariantes operatórios (I), que significa as propriedades que se preservam, permitindo o reconhecimento do conceito em diferentes situações e representam o significado do conceito; e domina suas representações (R), que permitem retratar os invariantes, as situações e os procedimentos, sendo identificado como o significante de um conceito. Temos assim, a formação das três instâncias estruturais de um conceito.

Entende-se, portanto, se tratar de uma complexa teoria, cuja formação de um conceito fala do domínio gradual de situações; de invariantes operatórios necessários para operacionalização eficaz das situações, e dos símbolos linguísticos que representam os conceitos e operações, de acordo com o desenvolvimento cognitivo do sujeito.

Consideramos Situação (S) como tarefa ou problema e que pode ser tomada por classes de situações. Para Vergnaud (1990), os tipos de situação relacionam-se com o conceito de “esquema”, que funciona de forma distinta. Em um primeiro caso, em que o sujeito dispõe de competência necessária para resolução da situação em seu repertório, encontramos organizados em um único esquema os comportamentos automatizados para a mesma classe de situações. No segundo caso, será observado o esboço sucessivo de vários esquemas, que podem entrar em competição e que devem ser acomodados, separados e recombinados, para alcançar a solução; este processo é seguido por descobertas. A relação entre as situações e os esquemas para o autor é a fonte da representação, em consequência, da conceitualização. Os esquemas representam a organização invariável do comportamento, diante de determinada classe de situações e podem fornecer os elementos cognitivos, que permitem que a ação do sujeito seja operatória, portanto, é nele que deve ser investigado o conhecimento em ação do sujeito (VERGNAUD, 1990).

A relação entre uma situação e um conceito é considerada complexa, posto que a aquisição de um determinado conceito ou conhecimento não pode estar atrelada a uma única situação, bem como uma mesma situação pode ter ligação com diversos outros conceitos. Essa perspectiva conduz ao entendimento de que o desenvolvimento do conhecimento se faz (é concebido) em rede e não em progressão linear (SPINILLO; LAUTERT, 2006), o que seria uma quebra de paradigma. Ademais, tais constatações justificam a exposição de crianças, pelo professor, às diversas situações que proporcionem conexões entre os conceitos e que permitam a percepção e compreensão do conhecimento apropriado.

Os conhecimentos contidos nos esquemas são os chamados Invariantes Operatórios (I), formados por uma relação dialética entre os designados ‘conceito em ação’ e ‘teorema em ação’. Observamos a dialética entre o ‘conceito em ação’ e ‘teorema em ação’, em razão dos conceitos serem considerados os ingredientes dos teoremas e estes serem propriedades que fornecem aos conceitos seus conteúdos, eles expressam uma teoria intuitiva das ações e operações realizadas pelo indivíduo. Também são considerados a base conceitual implícita dos indivíduos para a resolução de problemas em alguma situação, cujo conhecimento a ser utilizado necessita ser explicitado. Os ‘conceitos em ação’ e ‘teoremas em ação’ designados por Vergnaud não são científicos, porém podem ser considerados à medida que são explicitados, comunicados e discutidos (VERGNAUD, 1990). Como já dito anteriormente, as situações de combinação, arranjo e permutação apresentam em comum a formação de subconjuntos a partir de um conjunto, no entanto, observamos algumas peculiaridades que as distinguem e caracterizam, dando significado a cada uma. Nos casos de arranjo e combinação, os subconjuntos serão formados por alguns dos elementos do conjunto, já na permutação todos os elementos serão usados no agrupamento dos subconjuntos. Ademais, relações quanto a ordem e a escolha de elementos são também consideradas na formação de novas possibilidades (BARRETO; BORBA, 2011). Tendo como base a teoria dos campos conceituais de Vergnaud (2009), observamos os conjuntos de invariantes que formam os conceitos de combinação, arranjo e permutação, dando sentido a cada tipo de combinatória. A explicitação dessas propriedades invariantes, que regem as situações combinatórias, poderia auxiliar as crianças a raciocinar melhor sobre os problemas? Não obstante, a análise das respostas das crianças, por meio das representações gráficas e verbais, proporcionaria a análise do raciocínio, sobretudo os erros cometidos? Essas são questões levantadas na presente investigação. O sujeito tem dificuldade de expressar o conhecimento por esse ser implícito, no entanto, isto pode ocorrer através dos invariantes operatórios que possibilitam que os esquemas gerem ações, inclusive intelectuais, e formam, os invariantes, o núcleo da reapresentação, podendo ser explicitados. É nos Invariantes Operatórios que encontramos a articulação da teoria com a prática (VERGNAUD, 1985).

No tocante as representações (R), para Vergnaud (1985) sua função principal é a de conceitualizar o real para agir eficazmente, para isso é preciso considerar em seu conteúdo, os conhecimentos que a alimentam. É na interação do sujeito com o real, que ele forma e testa suas concepções e representações, que são responsáveis pela forma que o sujeito age e regula sua ação. O autor diz que o conceito de representação é essencial para a análise da formação de conhecimentos operatórios e dos processos de transmissão dos conhecimentos. Vergnaud (1985) atribui relevância às representações, para as pesquisas em psicologia cognitiva, em razão de considerá-las funcionais e indispensáveis ao tratamento de várias situações pelo sujeito. A representação importa à formação da experiência social ou privada, em seu conjunto, organizada ou aberta, discursiva ou não; havendo ainda a necessidade de dispor de elementos teóricos de análise, que possam não confundir ou não distinguir elementos que permitam compreender o funcionamento e os disfuncionamentos da representação (VERGNAUD, 1985). Elas podem nem ser corretas, vagas ou precisas, no entanto, as representações terão sempre a função de substitutos da realidade. Por seus diferentes sistemas de significantes, as representações podem ser entendidas como ferramentas, signos, gestos e materiais concretos, bem como, por recursos gráficos, como desenhos, listagens, fórmulas e tabelas, geralmente usados na resolução de problemas. Pessoa e Borba (2010) destacam entre as formas de representação utilizados na resolução de situações combinatórias, o desenho, a listagem, tabelas, fórmulas, árvore de possibilidades, dentre outras. Além disso, o uso de material manipulativo também é uma forma de representação, adequada ao ensino e aprendizagem de crianças. O uso de diferentes formas de representação auxilia o estudante a melhor expressar seus pensamentos relativos à resolução de problemas de combinatória. Neste cerne, representações desenvolvidas pela própria criança, de maneira espontânea, também são proveitosas, inclusive quando utilizadas na elaboração de intervenções de ensino, possibilitando que o conteúdo matemático seja trabalhado através de estratégias infantis (BRASIL,2014).

Na área da aritmética, Vergnaud (1990) considera dois grandes campos conceituais: o campo conceitual das estruturas aditivas e o campo conceitual das estruturas multiplicativas. O campo conceitual das estruturas aditivas é formado por um conjunto de situações cujo domínio requer a adição, a subtração, ou a combinação destas operações; além do tratamento de um conjunto de conceitos e teoremas que possibilitam a análise dessas situações como tarefas matemáticas.

Do mesmo modo, o campo conceitual das estruturas multiplicativas é constituído tanto pelo conjunto de situações, cujo tratamento envolve a multiplicação, a divisão, ou a combinação dessas duas operações, quanto pelo conjunto de conceitos e teoremas que analisam essas situações: proporção múltipla e simples, função linear e não linear, razão escalar direta e inversa, quociente e produto de dimensões, fração, entre outros (VERGNAUD, 1990). Segundo Nunes e Bryant (1997), embora a adição repetida seja um esquema utilizado para resolver algumas questões multiplicativas, pensar a multiplicação por este meio é parcialmente correto, porque entre esses dois tipos de operação há bases de raciocínio distintas. A adição repetida pode ser usada em alguns cálculos multiplicativos, pelo fato de a multiplicação ser distributiva em relação à adição.

Diante dos problemas do tipo multiplicativo, Vergnaud (2009) apresenta três classes de problemas que envolvem relações ternárias e quaternárias, quais sejam: (1) isomorfismo de medidas, (2) produto de medidas e (3) proporções múltiplas; cada uma dessas classes apresenta subclasses de problemas. Cada tipo de problema apresenta níveis distintos de complexidade, determinado por sua estrutura e serão solucionados pela multiplicação ou divisão, ou ainda pela combinação de ambos.

A classe de Isomorfismo de medidas cuida de uma relação quaternária entre as 4 medidas, sendo duas delas medidas de um tipo e as outras duas de outro tipo (A x B = C x D) compondo entre esses dois tipos, uma proposição direta simples. Para a resolução destes tipos de problemas, diversos procedimentos podem utilizados, como isso diferentes níveis de dificuldade podem ser enfrentados. Nesta classe de problemas encontram-se a multiplicação simples, a divisão por cotas e por partição e a regra de três.

Os problemas de produto de medidas implicam uma relação ternária, isto é, entre três variáveis, onde uma delas é o produto das outras duas (A x B = C), isto para o plano numérico e dimensional. Sua estrutura representativa comum é a tabela cartesiana, que compõe a duas medidas de forma cartesiana, para compor a terceira e resultante medida. Isto ocorre em situações de área, volume e na combinatória. Vergnaud considera este tipo de problema de difícil compreensão para crianças, em razão de serem complexos seus conceitos e relações funcionais.

No que diz respeito aos problemas de proporções múltiplas, estes compreendem também uma relação ternária entre as medidas, sendo esta a razão da confusão que há entre esse tipo de problemas com os produtos de medida. Contudo, os problemas de proporções múltiplas não podem ser resolvidos através do produto das outras medidas, já que envolvem uma relação intrínseca de significados, sendo, portanto, mais complexos do que os problemas de produto de medidas.

É no campo conceitual das estruturas multiplicativas que encontramos os problemas de combinatória, mais especificamente nos problemas de produto de medidas. Por terem uma estrutura mais complexa, são de difícil compreensão para crianças dos anos iniciais do ensino fundamental, o que as leva a cometer muitos erros. A seguir, será apresentada a compreensão do raciocínio envolvido no erro para a psicologia cognitiva.

2.3 DIFERENTES CONCEPÇÕES SOBRE O ERRO NO RACIOCÍNIO INFANTIL

Vergnaud (2009) defende que mesmo não sendo exitosa a resposta da criança à resolução de problemas, esta não deve ser rejeitada, pois, nela existem elementos que possibilitam ver a compreensão ou não da questão; assim, o raciocínio empregado por elas, servirá de subsídio (fundamento) para que o professor possa fornecer as explicações necessárias. O entendimento de Vergnaud (2009), fala de uma das diferentes concepções sobre a forma de tratar do erro, especificamente diante do ensino e aprendizagem da matemática. Segundo Spinillo *et al* (2014) o erro é inevitável no processo educacional e passível de ser produtivo didaticamente. Concordando com esse posicionamento, passamos a entender melhor a questão, observando e analisando as diferentes concepções acerca do tratamento do erro no processo educacional, além de sua possível função e utilização enquanto recurso didático no processo de aprendizagem.

Para tal, foram identificadas sete concepções sobre o papel e a função do erro na prática escolar, que serão apresentadas e detalhadas a seguir.

2.3.1 O erro como algo a ser corrigido

Acertar significa ter sucesso e esse é o resultado esperado pela escola, sendo assim, o erro, representaria o fracasso do aluno e um problema a ser revertido. Carraher, Carraher e Schiliemann (1991) pontuam que esse entendimento, correspondente ao sucesso escolar, independe de ter havido a compreensão dos conceitos ou mesmo a aplicação do que foi aprendido em situações da vida cotidiana. Abordar o erro como um resultado a ser revertido pela correção é uma prática didática infelizmente comum no ensino da matemática, motivada na ideia de que apontar os erros e corrigi-los seria a prática pedagógica adequada. Além disso, há a crença equivocada de que a correção do erro levaria a correção do raciocínio; ideia esta que se vê replicada muitas vezes pelos próprios alunos. Esta concepção apoia suas ações didáticas, fazendo da correção do erro sua principal e talvez única alternativa, o que se traduz para Alro e Skovsmose (2018) em um absolutismo pedagógico.

Esta prática pedagógica, que considera a substituição de um procedimento inadequado por um apropriado, embora seja comum de acordo com Pacheco e Medeiros (2009), também desconsidera a forma de pensar do aluno; assim como julga corretos os procedimentos usuais de resoluções de problemas, em oposição a diferentes formas de operar. Assumir a posição didática que estabelece o que é certo e errado, expressa ações consideradas por Alro e Skovsmose (2018) como absolutismo pedagógico, que moldam a comunicação em sala de aula em que o professor tem como principal função a de corrigir erros.

Nesta concepção, o erro sinaliza a falta de conhecimento matemático e o fracasso diante dos problemas, devendo, portanto, ser eliminado. De acordo com Spinillo e colaboradores (2014) tal entendimento pouco contribui para a aprendizagem e se apoia em formação de hábitos, através de reforço ao comportamento, na pretensão de estabelecer acertos e diminuir o aparecimento de erros, não favorecendo assim, a aquisição de conhecimentos matemáticos.

Além disso, é equivocado pensar que o erro não pode ser corrigido (SPINILLO, 1995). A não correção das atividades em sala de aula, de acordo com Pinto (2000) legitima o fracasso escolar de forma sutil e afasta o professor deste cenário. Portanto, o erro precisa ser trabalhado em sala de aula, o que se discute é como fazer isso.

2.3.2 O erro como forma de conhecer o raciocínio dos alunos

Para Casávola *et al* (1988) os erros cometidos por crianças na aquisição de novos conhecimentos é tanto uma questão pedagógica, diante da postura do professor e a forma de corrigi-los; quanto psicológica, no sentido de saber se os erros são aleatórios à aprendizagem ou consequentes dos mecanismos de aquisição do conhecimento. Esta concepção está fundamentada na psicologia cognitiva, posto que aqui o erro está associado a mecanismos de aquisição de conhecimento, que especificam e revelam uma lógica na organização intelectual.

Numa abordagem construtivista, segundo ressaltam Spinillo e colaboradores (2014), os erros, assim como os acertos, são formas de raciocinar que revelam os limites e as possibilidades do pensamento frente a um dado objeto de conhecimento. Nesta linha, Radatz, (1979), defende que o erro, como resultado do conhecimento matemático, precisa ser interpretado. Ao admitirmos que os erros indicam formas de raciocinar, interpretá-los torna-se essencial para a compreensão de como o aluno pensou em determinada situação; buscar a origem daquele entendimento, que algumas vezes surge pela interferência de conhecimentos anteriores, como salientam Spinillo *et al* (2014), servindo também de suporte para planejamentos didáticos que levem o aluno ao raciocínio mais próximo do correto ou que os afaste do entendimento equivocado.

2.3.3 O erro como recurso didático

O erro pode ser tomado como algo produtivo para a aprendizagem matemática quando utilizado como uma “estratégia didática” (PINTO, 2000). Considerado por Borasi (1996) um “trampolim para a aprendizagem”, esta concepção sobre o erro é compartilhada por alguns autores, que entendem, teoricamente ou por dados empíricos que o erro pode estar a serviço da aprendizagem matemática (ASTOLFI, 1999; TORRE, 2007; GÓMEZ, 1995; MOREN, DAVID, MACHADO, 1992). Como propósito de servir à aprendizagem, o erro deve assumir um papel de destaque no planejamento das aulas e na dinâmica da sala.

A respeito da dinâmica de sala de aula, Borasi (1996) propõe que determinado tipo de erro poderia ser usado para a reflexão de outras formas apropriadas de resolução junto aos estudantes. Neste intuito, prevendo a frequência de certos equívocos, comumente ocorrido diante de certos conteúdos matemáticos, o professor poderia criar um banco de dados e apresentá-los para a reflexão ou provocar situações em que os erros fossem emersos, principalmente os advindos de conhecimentos prévios, posto que são obstáculos à aquisição de novos conceitos matemáticos (SPINILLO *et al*, 2014).

Erros advindos de conhecimentos anteriores são citados por Brousseau (2006) como obstáculos didáticos, cujas origens interferem ou impedem o conhecimento matemático. Para Vergnaud (1990) o conhecimento prévio pode funcionar como obstáculo epistemológico, portanto, nesses casos a ação mediadora do professor é fundamental, posto que certos conceitos apenas poderão ser construídos mediante o abandono de prévias concepções.

Ao admitirmos o erro como ferramenta didática, assumimos também a necessidade de conhecer o raciocínio do aluno e isto incide sobre o significado do erro para o professor. Neste ponto, a psicologia e a educação se comunicam, buscando compreender a natureza do erro e padrões no modo de errar, favorecendo repercussões sobre propostas educacionais que levem à superação de dificuldades, reorganizando o pensamento do aluno sobre certos conceitos ou conteúdos matemáticos (SPINILLO *et al*, 2014).

Com respaldo na teoria de Piaget, essa perspectiva construtiva do erro como ferramenta do ensino e aprendizagem matemática, conduz o aluno à tomada de consciência através da reflexão proporcionada, servindo de base para mudanças quanto ao entendimento dos indivíduos.

2.3.4 O erro como instrumento de reflexão e análise

Não obstante ao uso do erro como ferramenta didática, suas consequências podem proporcionar a reflexão e análise do próprio raciocínio e a forma de proceder do aluno, frente à determinada situação. Spinillo *et al* (2014) apresentam duas situações que permitem observar essa ocorrência, quais sejam: através da explicitação verbal de como o aluno pensou ao resolver um problema e o retorno dado pelo professor no tocante a este entendimento; sendo este tipo de abordagem adotado pelo método clínico Piagetiano, em investigações de psicologia cognitiva. As autoras pontuam que adotar este posicionamento é levar o erro à teorização.

Promover atividades que questionem, e levem o aluno a refletir e analisar sobre o próprio raciocínio é essencial para a tomada de consciência; bem como, segundo Flavel (1987) para desenvolver a capacidade de resolver problemas, sejam da matemática ou da vida cotidiana. Convergindo com esta linha de pensamento, Ribeiro (2003) e Spinillo (1999) acrescentam como consequente ao entendimento pela tomada de consciência, à aprendizagem do aluno.

Procedimentos que levem o indivíduo a refletir, analisar e tomar consciência de sua forma de raciocinar são considerados metacognitivos e representam grandes mudanças no desenvolvimento cognitivo, não apenas no tocante ao conhecimento matemático, sobre o qual o erro recai, mas, sobretudo potencializando o uso das capacidades cognitivas de forma ampla.

A prática didática sustentada na construção do conhecimento e no desenvolvimento cognitivo, abrange a discussão e compreensão sobre os erros, como também concede aos alunos a oportunidade de rever sua forma de raciocinar e de proceder, podendo conduzi-lo às possíveis fontes de dificuldades, a superação do erro e de acordo com Rosso e Berti, (2010) à autonomia.

2.3.5 O erro como forma promover autonomia dos alunos

Ao compreender a própria forma de raciocinar, poder rever e corrigir seu entendimento, o aluno exerce uma atitude autônoma, que se desenvolve pelas práticas educacionais e pela interação do sujeito com suas estruturas internas, com outras pessoas e com objetos de conhecimento (ROSSO; BERTI, 2010). Ainda de acordo com os autores, a relação existente entre a autonomia e a conscientização do próprio raciocínio, encontra-se no processo de operação e de cooperação, fundantes na construção do conhecimento e no desenvolvimento cognitivo, numa perspectiva piagetiana. A operação se refere a processos individuais do pensamento; que para Rosso, Becker e Taglieber (1998) incorpora e modifica significados de forma mais abrangente e profunda, sendo, portanto, transformadora. Partindo dos processos operacionais concretos, observa-se a um progresso quanto à ocorrência da cooperação, da socialização, como a troca e coordenação de entendimentos distintos, que se passa por meio da ação e do pensamento. A cooperação está relacionada aos processos de interação entre os alunos, e entre estes e o professor, favorecendo argumentação, debates e entendimento do raciocínio implicado.

A autonomia, conforme Kamii e Declark, (2003), está associada a aspectos morais e intelectuais. É possível favorecer a autonomia do aluno, quando ele demonstra sua forma de raciocinar, ou seja, seu erro pode ser corrigido na cooperação entre seu professor e colegas. Neste contexto La Taille, Souza e Vizioli (2004) percebem o sentido de complementaridade entre a autonomia intelectual, encontrada no pensar e no conhecer do aluno e a autonomia moral, prevista no decidir bem por si.

O erro pode ser considerado, portanto, uma expressão histórica do conhecimento e da lógica humana, em progressiva construção, que encontra em circunstâncias didáticas um campo de manifestação onde o sujeito pode expressar sua autonomia. No âmbito do conhecimento lógico matemático, investir em ações pedagógicas que incidam sobre o pensamento e a interação do aluno diante de problemas, faz com que ele possa analisar e buscar superá-los por meio de processos operativos e cooperativos, favorecendo que ele se aventure rumo ao desconhecido, pensando e operando sobre as questões dispostas.

2.3.6 O erro como expressão da criatividade

Entender o erro como uma demonstração da forma de raciocinar do sujeito em construção permanente, é estimar que esse pode ser moldado progressivamente. Para De La Torre (2009) tomar o erro como uma estratégia de mudança e inovação, que se inscreve numa perspectiva cognitiva da educação, é conceber o erro como uma expressão de criatividade. Para tanto, o autor propõe uma visão didática e pedagógica do erro pautada não apenas na descrição de processos cognitivos, mas numa ação orientada, que leva a mudanças em relação ao conhecimento, as habilidades e atitudes; sendo estas de alcance multidisciplinar, incluindo a matemática.

Vislumbrando as mudanças que o erro pode proporcionar e tendo em vista seus efeitos construtivos e criativos, De La Torre (2009) o associa às descobertas científicas, as criações artísticas e literárias, e como estratégia didática da ideação, aliando-o ao acaso. Demonstra, o autor, que o erro tem um potencial transformador que pode ser revelado, valendo-se da falha ou do efeito como um instrumento produtivo, resultado que pode ser convertido em processo, adquirindo uma dimensão construtiva e criativa, que se insere numa perspectiva didática, mas também filosófica e epistemológica.

O argumento do avanço da ciência mediante processos de tentativa e erro, assim como o das criações literárias e artísticas é posto de maneira a considerar o erro como expressão construtiva do conhecimento; uma vez que este ocorre de forma não linear, entre entendimentos aparentemente consolidados, que se tornam inconsistentes em outro momento e que podem assim, ser reconstruídos. Inclusive nesta linha, quando assim admitimos em procedimentos didáticos, permitimos que o aluno recrie conteúdos culturais a partir de suas possibilidades.

2.3.7 O erro como objeto de análise

Como visto, o erro no processo de ensino e aprendizagem é abordado frequentemente no processo didático, seja no intuito de corrigir aquilo que está inadequado, procurando simplesmente substituir pelo certo, seja como uma ferramenta didática ou como método de ensino e pesquisa. Observa-se que ele é revelador para o entendimento das formas de raciocinar dos estudantes; permitindo explorar a capacidade criativa e estimular a autonomia, reflexão e capacidade de análise do aluno. Pode ser, então, abordado em diversas áreas do conhecimento e para além da sala de aula, servindo como objeto de estudo na pesquisa, inclusive em psicologia cognitiva.

Diante das distintas perspectivas acerca do erro, sobretudo no processo de ensino e aprendizagem matemática, acreditamos que é fundamental analisar os erros cometidos por crianças, com vistas a entender o raciocínio por elas empregado diante dos problemas.

Curry (2007) argumenta que o erro pode se prestar tanto como uma abordagem de pesquisa, quanto uma metodologia de ensino, se empregada com o objetivo de levar os alunos, em sala de aula, a questionarem suas próprias soluções.

Investigações voltadas para a abordagem dos erros cometidos por alunos, em questões de matemática, iniciaram na primeira metade do século XX. Aspectos técnicos dos erros, teorias psicológicas de ensino e aprendizagem que faziam parte da teoria educacional da época, conduziram pesquisadores nesse campo de estudo; a exemplo de Bruner (1966) que se voltou para os resultados da aprendizagem. Essas pesquisas, segundo Barichelo (2008), também partiram com ênfase na proposição de sistemas de classificação para erros em diversos níveis. Ainda de acordo com o autor, esse tipo de investigação tem como destaque as maneiras com as quais classificam os erros cometidos, elas promovem discussões sobre a natureza deles e destacam aspectos gerais do erro e do pensamento matemático do aluno.

Adotar a análise de erros cometidos por crianças na resolução de problemas matemáticos do tipo combinatório, no intuito de entender o desenvolvimento do raciocínio combinatório empregado por elas, pode expor a trajetória cognitiva do pensamento infantil.

2.4 ESTUDOS COM CRIANÇAS ACERCA DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

Inhelder e Piaget (1976) realizaram um estudo clássico, descrito no livro “da lógica da criança à lógica do adolescente”. Nos experimentos realizados, os pesquisadores observaram que entre os 11-12 anos até os 14-15 anos iniciava uma transição na lógica que rege o pensamento da criança, anteriormente considerado operatório concreto, para o operatório formal. Ao contrário do pensamento operatório concreto, em que a criança se preocupa predominantemente com o que lhe toca os sentidos, no pensamento formal, o adolescente por meio de experimentações e de uma combinação de procedimentos desenvolve a capacidade de pensar sobre as possibilidades apropriadas frente aos problemas, caracterizando assim um raciocínio essencialmente hipotético dedutivo.

Relacionado, assim, o pensamento operacional formal com a orientação ao possível e hipotético, Inhelder e Piaget (1976) apontaram a análise combinatória como um método que garante que o possível seja investigado de maneira exaustiva. O desenvolvimento psicogenético das operações combinatórias foi descrito por Inhelder e Piaget (1976), através de observações e entrevistas, onde tarefas de combinatória realizadas com uso de material concreto eram propostas às crianças participantes. A partir dos experimentos, foi observado que crianças menores de 12 anos não tentam identificar (descobrir) uma maneira de alcançar as possíveis combinações de forma exaustiva. As crianças não chegavam a esgotar as possibilidades de combinações, ou seja, não contemplavam todos os pares possíveis, por meio de um método sistemático; ao invés disso, elas faziam uso de procedimentos elementares de cálculo, como ensaio e erro, para formar pares de objetos entre si. Outra observação importante foi quanto ao número de elementos a serem combinados e o desempenho da criança, sendo assim, quando o número de elementos a ser combinado era pequeno, as tarefas eram mais bem realizadas, do contrário, quando o número de elementos aumentava o desempenho diminuía. A partir desses dados, Inhelder e Piaget (1976) concluíram que a criança só é capaz de usar de procedimentos sistemáticos, para realizar todas as variações e combinações de um conjunto determinado de elementos, no estágio das operações formais, quando a compreensão das operações combinatórias ocorre.

Assim, Inhelder e Piaget (1976) evidenciaram existir uma estreita correlação entre a construção das operações combinatórias e a estrutura das operações formais, uma vez que a criança combina elementos em um contexto experimental (físico) ao mesmo tempo em que relaciona enunciados proposicionais (mentais).

Desde então, vários estudos foram realizados com intuito de compreender o desenvolvimento do raciocínio combinatório na infância até níveis mais elaborados na adolescência. Serão apresentadas, inicialmente, pesquisas que abordam o raciocínio combinatório infantil, suas limitações e possibilidades de desenvolvimento (PESSOA; BORBA, 2007; 2008; 2009; SANTANA; OLIVEIRA, 2015; SANTOS; DINIZ; MONTENEGRO, 2019; VEGA; BORBA, 2014); em seguida, estudos que contemplam de maneira mais específica a explicitação dos invariantes combinatórios em problemas resolvidos por crianças (BORBA; LAUTERT; SILVA, 2021; MELO, 2012; MELO; SILVA; SPINILLO, 2016; SILVA, 2014; SILVA; SPINILLO, 2010; SILVA *et al*, 2017).

2.4.1 O raciocínio combinatório em crianças: limites e possibilidades

O estudo realizado por Vega e Borba (2014), fundamentado na teoria dos Campos conceituais de Gérard Vergnaud, analisou a influência do número de etapas de escolha na resolução de problemas de combinatória (arranjo, permutação, combinação e produto de medidas) por estudantes do 6º ano do ensino fundamental. Os resultados encontrados foram categorizados conforme o desempenho dos alunos, com respostas que partiam do erro até o acerto total, com pontuações de zero à quatro, sendo estas: (0) erro - *o aluno deixava a questão em branco ou não conseguia apresentar nenhuma possibilidade válida, o que indicava não haver ter compreendido a relação combinatória da situação;* (1) Acerto parcial 1 - *O aluno respondia com apenas uma possibilidade de situação combinatória;* (2) Acerto parcial 2 – *O aluno respondia com duas situações combinatórias ou mais, podendo chegar até a metade das possibilidades*; (3) Acerto parcial 3 - *O aluno respondia com mais da metade das possibilidades, indicando perceber a necessidade de esgotar o todo, embora não conseguisse ainda sistematicamente apresentar todas as possibilidades*; (4) Acerto total - T*odas as possibilidades corretas eram apresentadas.* Os resultados evidenciaram que problemas com quatro etapas são mais difíceis do que os com duas e três etapas. Das diferentes situações, verificou-se que a de permutação com quatro etapas de escolha foi a que apresentou um melhor nível de facilidade, comparado, inclusive, aos problemas de produto cartesiano. As autoras destacam que nas investigações, em geral, os problemas de produto cartesiano envolvem apenas duas etapas de escolha, enquanto as outras situações combinatórias que eram a eles comparados eram de três ou quatro etapas. Além disso, há indícios de que, o tipo de situação combinatória é um fator que também influencia o desempenho dos alunos, em razão de seus invariantes, que influenciam na compreensão da situação e no procedimento usado na resolução.

Santana e Oliveira (2015) procuraram identificar e classificar os raciocínios apresentados por estudantes do ensino fundamental ao resolverem problemas de combinatória. A pesquisa foi realizada com crianças do 3º e do 5 º ano do ensino fundamental. Os resultados demonstraram a existência de três níveis de raciocínio combinatório, a saber: (R1) *ausência de raciocínio combinatório*, respostas como adição ou subtração de dados contidos na situação; repetição de dados como resposta; desenhos das informações da situação sem sistematização com as mesmas, e desenhos os quais os pesquisadores não conseguiram identificar a relação com a situação proposta. (R2) *indício de raciocínio combinatório* esquemas apresentados, com possibilidade de determinado evento combinatório ocorrer, sem esgotamento das possibilidades e tendo como tipo de representação a listagem e a árvores de possibilidades, e (R3) *presença de raciocínio combinatório,* respostas em que os esquemas explicitavam todas as possibilidades de ocorrência de um evento; esquemas que apresentavam alguma operação, especificamente multiplicação e divisão. As autoras observaram que há relação entre o nível de escolaridade e o nível de raciocínio combinatório, isto porque os estudantes do 5º ano apresentaram maior frequência de respostas que demonstravam todas as possibilidades de ocorrência (combinações) de um evento.

Santos, Diniz e Montenegro (2019) verificaram em estudo de intervenção as contribuições do livro de literatura infantil *Problematizando Poemas* para a compreensão de problemas de Combinatória do tipo produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação. O estudo foi realizado com estudantes do 4º ano do ensino fundamental. A análise quantitativa ocorreu por meio da verificação de acertos e erros, que foram assim categorizados: *AT (Acerto Total) Acerta esgotando todas as possibilidades; AP1 (Acerto Parcial 1) Enumera alguns casos, ou seja, percebe que pode haver mais de um caso sem se limitar ao número de elementos dados no enunciado, mas não consegue esgotar todas as possibilidades; AP2 (Acerto Parcial 2) Escolhe apenas um caso, ou se limita ao número de elementos citados no problema, indica não perceber a existência de outras possibilidades; E (Erro) Não apresenta relação com a Combinatória, ou seja, na sua resolução não aponta indícios de compreensão do problema proposto.* Os resultados apontam para um melhor desempenho no pós-teste, sendo os problemas de produto cartesiano aqueles que obtiveram maior quantidade de acertos. Em relação as estratégias, a listagem foi a mais utilizada, provavelmente em razão de seu uso durante a intervenção, sendo certo ainda que essa estratégia foi mais sistematizada no pós-teste, o que facilitou o esgotamento de possibilidades na resolução das questões combinatórias. As autoras concluem que a as intervenções com o uso da literatura infantil foram importantes para obtenção dos resultados, agregando à organização do pensamento combinatório, auxiliando os alunos na identificação dos elementos que compõem os conjuntos e das possibilidades geradas a partir deles. Destacam, ainda, o lúdico como uma forma de despertar o interesse e auxílio na resolução dos problemas de combinatória junto às crianças.

Estudos desenvolvidos por Pessoa e Borba (2007; 2008; 2009) investigaram as estratégias empregadas por crianças do 2º ao 5º ano do Ensino Fundamental. Os resultados indicaram que os alunos das séries mais avançadas apresentaram um desempenho melhor do que os alunos das séries iniciais, bem como, que os problemas do tipo produto cartesiano foram os que tiveram mais acertos. As autoras identificaram os tipos de respostas mais frequentes: 1. *Em branco*: nesse caso, não é possível saber o motivo do aluno não ter respondido ao problema (se foi falta de interesse, ou por não saber responder, por considerar o problema de difícil resolução ou simplesmente porque não quis fazer); 2. *Apenas resposta incorreta*: o aluno fornece apenas a resposta incorreta ao problema proposto, embora, algumas vezes, fosse possível inferir a operação por ele adotada; 3. *Apenas resposta correta*, sem explicitação da estratégia: a criança fornece apenas a resposta correta ao problema proposto, embora, algumas vezes, fosse possível inferir a operação por ele realizada; 4. *Resposta incorreta, sem o estabelecimento de relação*: o aluno apresenta uma resposta incorreta e na sua resolução não há indícios com a questão proposta; 5. *Resposta incorreta, com o estabelecimento de relação*: o aluno erra a resposta, porém mantém uma relação com a lógica do problema. Na maioria das vezes, o aluno não consegue esgotar todas as possibilidades para o problema proposto; 6. *Resposta correta com explicitação de estratégia*: o aluno é capaz de compreender a lógica do problema e chegar à resposta correta. Foram identificadas também as formas de resolução que os alunos apresentaram: a. Realiza adição, subtração ou divisão utilizando os valores apresentados no enunciado e a resposta, geralmente, é incorreta sem relação. b. Desenha ou escreve possibilidades, podendo a resposta ser correta ou incorreta, havendo, ou não, o esgotamento de todas as possibilidades. c. Relaciona o problema a um produto, podendo a multiplicação ser adequada ou não. A identificação dos tipos de respostas mais frequentes dos alunos em relação às tarefas propostas, desde respostas em branco, chegando a compreensão da lógica do problema e à resposta correta, assim como de formas de resolução apresentadas pelos alunos, são outras contribuições deste estudo; indicando que crianças das séries iniciais são capazes de desenvolver estratégias e compreensões sobre os problemas de raciocínio combinatório, influenciadas tanto pela escola como pelas experiências extra escolares.

Observa-se, portanto, que problemas de raciocínio combinatório são considerados difíceis por alunos de diferentes idades e níveis escolares. Compreender as relações e resolver os problemas de maneira adequada parece ser uma tarefa bastante complexa para criança. Embora haja indícios de raciocínio combinatório em crianças pequenas, da educação infantil, este ainda é um grande desafio, especialmente quando se trata de problemas mais complexos, combinação, arranjo e permutação. Estudos apontam que a explicitação dos invariantes pode gerar maior compreensão das propriedades que regem a combinatória, como também, que o uso de recursos variados, em especial, recursos lúdicos, podem beneficiar a aprendizagem de crianças. A seguir, discutiremos alguns estudos que tiverem como objeto de análise a explicitação dos invariantes e seu efeito no desempenho e raciocínio das crianças.

2.4.2 Estudos que abordam a explicitação dos invariantes em problemas de combinatória resolvidos por crianças

Silva e Spinillo (2010) investigaram o efeito da explicitação dos princípios invariantes na resolução de problemas de produto cartesiano direto (resolvidos através da multiplicação) por crianças do 3º ano do ensino fundamental. No estudo, as crianças resolveram problemas na condição de enunciados com invariantes implícitos, usualmente encontrados em livros didáticos e avaliações, e na condição de enunciados com invariantes explícitos. Os resultados demonstraram diferenças significativas no desempenho das crianças, evidenciando que a condição explícita se tornou mais facilmente compreendida e resolvida pelas crianças, ou seja, a condição explícita apresentava maior número de acertos e alto desempenho infantil quando comparada com a condição implícita. Outro dado relevante, neste estudo, diz respeito ao efeito de ordem; quando os problemas da condição explícita eram apresentados primeiramente, auxiliavam a compreensão e resolução dos problemas na condição implícita. O mesmo efeito não foi observado na ordem inversa, uma vez que ao apresentar os problemas implícitos primeiramente, o desempenho das crianças era consideravelmente baixo em ambas as condições.

Em outro estudo, Silva (2014) examinou se o efeito facilitador observado nos problemas de produto cartesiano diretos também poderia ser alcançado pela explicitação dos invariantes nos enunciados dos problemas de produto cartesiano inverso (resolvidos pela divisão). O estudo foi realizado com crianças do 3º ano do ensino fundamental, e os resultados mostraram que os problemas diretos são mais facilmente resolvidos do que os inversos. Indicaram também que o invariante da correspondência um para muitos e o invariante da não repetição

Melo (2012) por sua vez, examinou o efeito da explicitação dos princípios invariantes sobre o desempenho e as estratégias adotadas por crianças na resolução de problemas de combinação. O estudo foi realizado com crianças do 3º, 4 º e 5º ano do ensino fundamental e os resultados mostraram que problemas de produto cartesiano são mais facilmente resolvidos do que os problemas de combinação. Além disso, a explicitação dos princípios invariantes nos problemas de combinação não favoreceu o desempenho das crianças, como observado no estudo de Silva e Spinillo (2010). Observou-se também que os problemas com pares numéricos que geravam grupos de tamanho pequeno eram mais facilmente resolvidos e promoviam o uso de estratégias mais elaboradas.

Melo, Silva e Spinillo (2016) discutem a influência da explicitação dos princípios invariantes nos enunciados de problemas combinatórios de produto cartesiano e de combinação. Através de diferentes estudos realizados pelas autoras foi possível perceber que a explicitação dos invariantes nos problemas de combinação não é suficiente para promover a compreensão e boa resolução deste tipo de problema. As autoras apontam que uma possível razão para este dado seja a escassa presença de problemas de combinação nos livros didáticos, além do fato de que os invariantes dos problemas de combinação seriam mais complexos e de natureza distinta dos invariantes dos problemas de produto cartesiano. Apesar de pertencerem ao campo das estruturas multiplicativas e compor as situações de raciocínio combinatório, parece haver uma hierarquia em relação aos esquemas necessários para a compreensão adequada deste conceito, refletindo níveis distintos de dificuldade nas diferentes situações.

Na mesma direção, Silva *et al* (2017) analisaram o efeito da explicitação dos invariantes no enunciado de problemas de combinação, arranjo e permutação em crianças do 4º ano do ensino fundamental. Corroborando com os resultados de Melo (2012), os resultados deste estudo demonstraram baixo desempenho tanto na condição implícita como na condição explícita. Segundo os autores, a explicitação não foi capaz de promover um efeito sobre o desempenho das crianças em problemas mais complexos como observado em problemas mais simples, que podem ser resolvidos pelo princípio da contagem. Analisando as três situações, combinação demonstrou ser mais fácil para as crianças do que arranjo e permutação, sendo este último o mais difícil.

Pessoa e Borba (2012) realizaram entrevistas clínicas com crianças da educação infantil, com idades entre 5 e 6 anos, por meio de uso de figuras. As crianças eram questionadas sobre quatro situações, uma de cada tipo de problema combinatório. As autoras observaram que algumas crianças já entendem o invariante da escolha de elementos, sendo os invariantes de ordem e de esgotamento de possibilidades, os que apresentam maior desafio. O estudo, portanto, aponta na direção de um desenvolvimento conceitual no qual o invariante de escolha parece ser primeiramente compreendido pelas crianças. As autoras incentivam que situações combinatórias sejam trabalhadas de modo concreto ainda na educação infantil.

Borba, Lautert e Silva (2021) realizaram um estudo de intervenção e investigaram como crianças da educação infantil refletem sobre as relações envolvidas nos problemas de combinatória, por meio da manipulação de cartões ilustrativos e produção de desenhos. O estudo analisou se as crianças percebiam os invariantes de escolha, ordem e esgotamento de possibilidades nas situações de arranjo, combinação e permutação, através de duas representações simbólicas, a manipulação de cartões ilustrativos e a produção de desenhos. Os resultados foram categorizados conforme o número de possibilidades enumeradas pelas crianças, variando de 0 (zero) a 5 (cinco) pontos, ou seja, sem possibilidades enumeradas até esgotamento de possibilidades, sem considerar possibilidades repetidas. Os resultados também apontaram que dada as variadas situações e seus invariantes, a maioria das crianças percebeu, após a intervenção, as maneiras diferentes de escolher os elementos de forma adequada e o número correto de elementos. Algumas crianças, no entanto, ao invés de considerar os conjuntos de elementos que formavam cada possibilidade, contavam cada elemento como se fosse ele uma possibilidade, ou seja um subconjunto, equívoco que foi superado com a sessão de intervenção, não sendo mais observado no teste final. Já a ordem de elementos, também identificada como uma dificuldade inicial, por não terem a certeza de quando a ordem dos elementos constituía diferentes possibilidades, presentes nos problemas de arranjo e permutação, não foi superada por todas as crianças após uma única sessão de intervenção. Quanto ao esgotamento de possibilidades, este invariante permaneceu como uma dificuldade para a maioria das crianças, mesmo com o impacto da intervenção que promoveu que as crianças listassem mais da metade das possibilidades solicitadas nos problemas e com menos repetições. Essa melhora foi atribuída, pelas pesquisadoras, pela sistematização alcançada através dos questionamentos do entrevistador, levando as crianças a perceberem como poderiam chegar a todas as possibilidades, a partir da escolha de um dos elementos, depois com um segundo elemento e assim por diante.

Observa-se, portanto, que a explicitação dos invariantes no enunciado dos problemas é um recurso eficiente para gerar compreensão e adequada resolução em problemas de produto cartesiano, especialmente nos problemas diretos com estrutura simples – duas etapas. Entretanto, em problemas mais complexos, e também naqueles que dispõem de várias etapas em sua resolução, a condição explícita não demonstrou facilitar a compreensão e o desempenho de crianças.

Na literatura são encontrados estudos que investigam erros na resolução de problemas de combinatória em adultos (VIDOTTI; KATO, 2016; USRY; ROSLI; MAAT, 2016), contudo, apesar dos baixos desempenhos descritos, não se encontram estudos que enfoquem a análise de erros cometidos por crianças. A presente investigação tem esse objetivo.

3 MÉTODO

3.1. OBJETIVOS E HIPÓTESE

Tomando como base a teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud (1990) a respeito da formação de conceitos matemáticos é possível considerar o quanto os princípios invariantes são importantes para a compreensão e desenvolvimento de competências que permitam a resolução adequada de problemas. Partindo deste fundamento, estudos anteriores, Silva e Spinillo (2010) e Silva (2016) indicam que a explicitação dos invariantes no enunciado da situação combinatória de produto cartesiano melhora o desempenho e a elaboração de estratégias usadas pelas crianças. Por outro lado, os estudos realizados por Melo (2012) e por Silva *et al* (2017) demonstraram que a explicitação dos invariantes no enunciado dos problemas não melhorou o desempenho das crianças na resolução de situações de combinação, arranjo e permutação.

A presente investigação parte do banco de dados do estudo realizado por Silva *et al* (2017) e busca responder as seguintes questões: há diferenças no raciocínio empregado em problemas que têm em seu enunciado invariantes implícitos e explícitos? É possível que exista diferenças qualitativas no(s) raciocínio(s) que levam ao erro? Como analisar o erro em problemas de combinatória e identificar sua possível natureza? Há relação entre o raciocínio empregado pela criança e a situação combinatória (combinação, arranjo e permutação)?

Os questionamentos levantados conduziram o presente estudo aos seguintes objetivos:

Objetivo Geral

- ✓ Investigar o efeito da explicitação dos invariantes nos erros empregados pelas crianças na resolução de problemas combinatórios.

Objetivos Específicos

- ✓ Analisar o raciocínio empregado em função da situação: arranjo, combinação e permutação.
- ✓ Compreender se há diferenças qualitativas no raciocínio infantil em função da condição implícita ou explícita dos invariantes.

Hipótese

Parte-se da hipótese de que os erros cometidos pelas crianças na resolução dos problemas na condição implícita serão diferentes dos erros cometidos na condição explícita. Acredita-se que a explicitação das propriedades e relações invariantes no enunciado dos problemas poderia auxiliar o raciocínio empregado.

Relevância do estudo

O valor do presente estudo está em contribuir para a literatura da área, fornecendo conhecimentos sobre o desenvolvimento cognitivo matemático de crianças na aprendizagem conceitual da combinatória. Acredita-se que é possível trazer contribuições para o campo da psicologia cognitiva, quando da compreensão da lógica da organização intelectual das crianças nos anos iniciais, como também, contribuições para o campo da educação matemática, fomentando propostas mais adequadas para o ensino e a aprendizagem da combinatória. Por fim, espera-se que este estudo proporcione reflexões e questionamentos, e consequentemente novas investigações a respeito.

3.2 MÉTODO

Em razão da Pandemia COVID- 19 e da necessidade de isolamento social, optou-se no presente estudo por fazer uso de um banco de dados,[1] constituído em pesquisa anterior, composto por 60 protocolos de crianças, de ambos os sexos, estudantes do 4º ano do ensino fundamental de uma escola pública da cidade de Maceió- AL.

3.2.1 Participantes

60 crianças de ambos os sexos, entre 8 e 10 anos de idade, estudantes do 4º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de Maceió – Alagoas. Não participaram do estudo crianças com alguma limitação sensorial ou intelectual. As crianças foram divididas em três grupos em função dos problemas resolvidos, a saber:

---

[1] O projeto foi submetido e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Alagoas e seguiu suas devidas recomendações (CAAE: 55091116.4.0000.5013). Os pais/responsáveis assinaram termo de consentimento e as crianças termo de assentimento, antes da participação na coleta de dados.

Grupo A: 20 crianças que resolveram problemas de arranjo, sendo duas das questões sem a explicitação dos invariantes conceituais em seus enunciados e as duas últimas questões com a explicitação dos invariantes em seus enunciados.

Grupo B: 20 crianças que resolveram problemas de permutação, sendo duas das questões sem a explicitação dos invariantes conceituais em seus enunciados e as duas últimas questões com a explicitação dos invariantes em seus enunciados.

Grupo C: 20 crianças que resolveram problemas de combinação, sendo duas das questões sem a explicitação dos invariantes conceituais em seus enunciados e as duas últimas questões com a explicitação dos invariantes em seus enunciados.

3.2.2 Procedimentos adotados na coleta dos dados

A coleta de dados ocorreu na própria escola, a qual as crianças participantes eram alunas, e foi conduzida no segundo semestre do ano de 2016. Foi disponibilizada uma sala onde a examinadora pôde realizar todas as entrevistas sem que houvesse interrupções. As crianças foram entrevistadas individualmente, em uma única sessão, onde cada criança era solicitada a resolver quatro problemas de combinatória, a depender do grupo ao qual a criança pertencia. Dentre os quatro problemas propostos, os dois primeiros eram na condição implícita, isto é, problemas prototípicos nos quais as propriedades não estão claramente apresentadas no enunciado, os outros dois problemas eram na condição explícita, ou seja, apresentavam em seu enunciado os invariantes de escolha e ordem. Cada problema foi apresentado por escrito em uma cartela, um por vez, e lido em voz alta pela examinadora. Após a leitura, a cartela ficou disponível para ser consultada caso a criança achasse necessário. A examinadora solicitou que a criança resolvesse o problema da maneira que desejasse, indicando não haver resposta certa ou errada, e por meio do modelo de entrevista clínica piagetiana, solicitou que após cada resolução, a criança explicasse as ações realizadas para chegar ao resultado apresentado. As crianças tiveram tempo livre para resolver os problemas. As entrevistas foram gravadas em áudio e posteriormente transcritas, o que originou os protocolos individuais que compõem o banco de dados utilizado em nossa análise.

Problemas apresentados às crianças

Grupo A: Problemas de Arranjo

Problema de Arranjo 1, condição implícita (PA01): Três alunos (Rafael, Nicole e Vinícius) participam da eleição para representante e vice representante de turma. De quantas maneiras diferentes podemos ter o resultado dessa eleição? (Resposta: 6)

Problema de Arranjo 2, condição implícita (PA02): Quatro crianças (Fernanda, Antônio, João e Bianca) estão disputando a corrida da Escola Pontual. De quantas maneiras diferentes podemos ter a distribuição das medalhes de ouro, prata e bronze? (Resposta: 24)

Problema de Arranjo 3, condição explícita (PA03): Três crianças (Júlio, Ana e Paulo) estão participando do concurso de poesia da escola. O primeiro lugar e o segundo lugar ganharão um prêmio. Ou seja, das três crianças que estão participando, apenas duas serão premiadas com o primeiro e o segundo lugar. Por exemplo, Julio pode ficar com o primeiro lugar e Ana com o segundo. Outra opção diferente seria trocar a ordem: Ana ficar com o primeiro lugar e Júlio com o segundo. Esse já seria um resultado diferente, não é? De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro e o segundo lugar nesse concurso de poesia? (Resposta: 6)

Problema de Arranjo 4, condição explícita (PA04): A semifinal da Copa do Mundo será disputada pelas seguintes seleções: Portugal, Estados Unidos, Alemanha e Argentina, mas apenas três seleções subirão ao pódio para ganhar o primeiro, o segundo e o terceiro lugar. O resultado final pode ser, por exemplo: Brasil – primeiro lugar; Estados Unidos – segundo lugar; e Alemanha – terceiro lugar. Outra opção diferente de resultado seria mudar a ordem da classificação: Estados Unidos – primeiro lugar; Alemanha – segundo lugar e Brasil – terceiro lugar. Esse já seria um resultado diferente, não é? De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, o segundo e o terceiro lugar na semifinal da Copa? (Resposta: 24)

Grupo B: Problemas de Permutação

Problema de Permutação 1, condição implícita (PP01): Bia precisa levar o caderno, a agenda e o livro para a escola. Ela comprou uma mochila com três divisórias para colocar seu material. De quantas maneiras diferentes ele pode organizar o material nas divisórias da mochila? (Resposta: 6)

Problema de Permutação 2, condição implícita (PP02): Elis, Pedro, Fran e Juliana adoram tomar sorvete. Eles ficaram sabendo que a sorveteria da cidade está com uma grande promoção aos sábados. De quantas maneiras diferentes podemos organizar as crianças (Elis, Pedro, Fran e Juliana) na fila da sorveteria? (Resposta: 24)

Problema de Permutação 3, condição explícita (PP03): Mateus quer arrumar as fotos da mãe, do pai e da irmã na estante, de modo que elas fiquem lado a lado. Ele percebeu que pode fazer essa arrumação de várias maneiras. Por exemplo, ele pode colocar as fotos na ordem: mãe, pai e irmã. Outra maneira diferente seria ele trocar a ordem das fotos e colocar, por exemplo: pai, mãe e irmã. Essa já seria uma arrumação diferente, não é? De quantas maneiras diferentes Mateus pode arrumar as fotos? (Resposta: 6)

Problema de Permutação 4, condição explícita (PP04): Quatro crianças (Amanda, Vinícius, Luan e Gabi) precisarão formar uma fila para receber lembrancinhas do dia das crianças. Elas podem fazer isso de várias maneiras. Por exemplo, a ordem da fila pode ser: Amanda, Vinícius, Luan e Gabi. Outra opção diferente seria trocar a ordem das crianças e colocar por exemplo: Vinícius, Luan, Amanda e Gabi. Essa já seria uma fila diferente, não é? De quantas maneiras diferentes essas quatro crianças podem posicionar-se na fila? (Resposta: 24)

Grupo C: Problemas de Combinação

Problema de Combinação1, condição implícita (PC01): Na gincana da escola, a equipe amarela é formada por três alunos: Clara, Ivo e Ana. Cada equipe deve escolher duas crianças para participar da competição. De quantas maneiras diferentes podemos escolher as duas crianças? (Resposta: 3)

Problema de Combinação 2, condição implícita (PC02): A lanchonete da cidade vende quatro opções de lanche: pizza, sanduíche, coxinha e pastel. De quantas maneiras diferentes podemos escolher duas opções de lanche? (Resposta: 6)

Problema de Combinação 3, condição explícita (PC03): A loja de animais vende três animais diferentes (gato, cachorro e coelho). Igor adora animais e seus pais o deixaram comprar dois animais na loja. Então, existem três animais, mas Igor não poderá levar todos porque ele só pode levar dois, não é? Ele pode formar várias combinações de dois animais, por exemplo, ele pode escolher o gato e o cachorro. Outra combinação diferente seria o gato e o coelho, não é mesmo? Com todos esses animais, quantas combinações diferentes de dois animais Igor pode formar? (Resposta: 3)

Problema de Combinação 4, condição explícita (PC04): Julia quer fazer uma sobremesa com duas frutas. Em sua casa, ela tem banana, abacaxi, maçã e uva. Nem todas as frutas serão usadas para fazer a sobremesa, por que ela tem quatro tipos de frutas e só quer usar dois tipos não é mesmo? Mas podem ser formadas várias combinações diferentes de duas frutas, por exemplo, ela pode escolher banana e abacaxi. Outra opção diferente seria escolher banana e maçã, não é mesmo? Com todas essas frutas quantas combinações diferentes de duas frutas Julia pode formar? (Resposta: 6)

É importante destacar que, como dito anteriormente, o presente estudo foi realizado a partir de um banco de dados, o que trouxe algumas limitações, por exemplo, constatamos que nem todos os invariantes estão presentes em todos os enunciados. O invariante de escolha e ordem é mais facilmente explicitado enquanto o invariante de esgotamento de possibilidades não pode ser explicitado ou se revelaria à criança o resultado do problema. Buscou-se equilibrar a quantidade de possibilidades em cada grupo, isso foi possível nos problemas de arranjo e permutação, contudo não ocorreu com os problemas de combinação. Como o foco da presente investigação não é o desempenho, esse dado se torna irrelevante, uma vez que as análises serão conduzidas exclusivamente com as resoluções inadequadas.

3.2.3 Material

O material utilizado constou de 12 cartelas, contendo em cada, um único problema de combinatória, sendo quatro preenchidas por problemas de arranjo, quatro por problemas de combinação e mais quatro por problemas de permutação. Foram utilizados também gravador de áudio para registro das entrevistas, lápis, borracha, folhas de papel.

É importante ressaltar que nem todas as crianças utilizaram a folha de papel e o lápis, apesar de terem esse material a sua disposição; por esta razão não houve análise específica de representações. Os registros escritos no papel serviram de auxílio à análise do material transcrito, auxiliando na compreensão do raciocínio empregado pelas crianças.

O próximo capítulo apresenta o sistema de análise construído no decorrer deste estudo a partir da análise dos protocolos pertencentes aos três grupos de participantes.

4 SISTEMA DE ANÁLISE DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

No presente estudo, a análise dos dados ocorre exclusivamente com as respostas inadequadas, ou seja, respostas que levaram a criança a errar a resolução do problema. Embora o índice de respostas erradas tenha sido alto, algumas crianças conseguiram acertar a resolução do(s) problema(s) e, por esse motivo, suas respostas foram desconsideradas na análise. Partindo do banco de dados construído na pesquisa de Silva et al (2017), tivemos 60 crianças respondendo a quatro problemas, sendo 20 crianças pertencentes a cada grupo. Logo, em cada situação – arranjo, combinação e permutação – o total de respostas foi de 80 (20 crianças x 4 problemas), sendo 40 respostas na condição implícita e 40 respostas na condição explícita, em cada grupo. Além de desconsiderar as respostas corretas, também foram desconsiderados os casos nos quais a criança não respondeu (“não sei responder”, “posso pular esse?”, “não entendi e não sei responder”, “ah, de qualquer maneira”, “não sei explicar”) uma vez que o objetivo da pesquisa e investigar o raciocínio infantil envolvido nas resoluções inadequadas de situações combinatórias e tais respostas não expressam nenhum raciocínio. Assim, o Quadro 4 apresenta a quantidade de acertos e a quantidade de “ausência de respostas” em função da situação e da condição dos invariantes no enunciado dos problemas. Ambas foram desconsideradas na análise do presente estudo.

Quadro 4 - Respostas desconsideradas – acertos e ausência de resposta - em função da situação e da condição dos invariantes no enunciado dos problemas.

ARRANJO				**COMBINAÇÃO**				**PERMUTAÇÃO**			
Implícito		**Explícito**		**Implícito**		**Explícito**		**Implícito**		**Explícito**	
Acerto	Ausência de resposta	Acerto	Ausência de resposta	Acerto	Ausência de resposta	Acerto	Ausência de resposta	Acerto	Ausência de resposta	Acerto	Ausência de resposta
1	7	1	1	0	7	8	0	0	7	0	5

Fonte: A autora (2022)

O Quadro 5 apresenta, portanto, a quantidade de respostas efetivamente analisadas em função do grupo – arranjo, combinação e permutação – e em função dos invariantes no enunciado: condição implícita ou condição explícita.

Quadro 5 - Quantidade de respostas inadequadas avaliadas em função da situação e da condição dos invariantes no enunciado dos problemas.

ARRANJO		COMBINAÇÃO		PERMUTAÇÃO	
Implícito	**Explícito**	**Implícito**	**Explícito**	**Implícito**	**Explícito**
32	38	33	32	33	35

Fonte: A autora (2022)

Os protocolos transcritos foram analisados em conjunto com o material escrito pelas crianças na folha de papel disponibilizada. Um número pequeno de crianças optou por usar o papel como apoio para resolução dos problemas, a maioria resolveu as questões mentalmente. A partir dessa análise inicial foi possível observar padrões de respostas que constituíram as categorias abaixo descritas. Como o estudo está fundamentado na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, as categorias de análise tiveram os invariantes conceituais de escolha de elementos, ordem e esgotamento de possibilidades como foco. Assim, observamos dois blocos de categorias que variavam em função da sofisticação cognitiva, expressando níveis de maior ou menor elaboração. O primeiro bloco é relativo às respostas que expressam distanciamento de uma solução combinatória que considera os princípios invariantes. O segundo bloco refere-se aos primeiros indícios de soluções que consideram os invariantes da combinatória, nas quais a criança demonstra compreender um pouco mais sobre a natureza dos problemas e os aspectos que precisam ser considerados em sua resolução. Abaixo encontra-se o Quadro 6 que sintetiza as estratégias identificadas.

Quadro 6 - Síntese das estratégias identificadas no presente estudo.

Repostas que expressam distanciamento de solução combinatória	Primeiros indícios de soluções que consideram os invariantes da combinatória
Resposta baseada nos dados do enunciado do problema Resposta baseada em repertório de escolha da vida cotidiana Resposta baseada na quantidade de elementos escolhidos	Consideração de UM invariante (escolha de elementos ou ordem) Consideração de DOIS invariantes: escolha de elementos e ordem

Fonte: A autora (2022)

A classificação das respostas foi realizada por dois juízes independentes e os casos de discordância foram analisados por discussão entre os juízes. Percentual de concordância entre juízes nos problemas de arranjo (85,2%), combinação (91,25%) e permutação (90%). As categorias de respostas serão descritas e exemplificadas a seguir a partir dos protocolos da situação de combinação.

4.1 RESPOSTAS QUE EXPRESSAM DISTANCIAMENTO DE SOLUÇÃO COMBINATÓRIA

As respostas categorizadas neste grupo possuem a característica de revelar limites, maiores ou menores, de compreensão ou interpretação acerca da natureza do problema matemático. Esses limites resultam em repetição de dados do enunciado do problema, uso de cálculos aritméticos sem relação com a combinatória ou com a formação de combinações e, ainda, respostas baseadas em situações do cotidiano que podem estar atreladas a algum conhecimento matemático ou não.

Tipo 1 – Resposta baseada nos dados do enunciado do problema. A criança realiza alguma operação (adição, subtração ou multiplicação) com os números presentes no enunciado do problema, demonstrando que reconhece que se trata de um problema matemático, que deve ser respondido com procedimentos matemáticos, mas sem expressar entendimento sobre a formação de combinações. Em geral, a resposta é dada através de um número, sem relacioná-lo com combinações formadas a partir dos elementos fornecidos. Quando solicitada a exemplificar quais seriam as combinações, a criança responde que não sabe ou repete o valor numérico encontrado.

Ex. Na gincana da escola, a equipe amarela é formada por três alunos: Clara, Ivo e Ana. Cada equipe deve escolher duas crianças para participar da competição. De quantas maneiras diferentes podemos escolher as duas crianças? (Resposta: 3)

Cr08: "*Cinco. Porque três mais dois é cinco. Tem três né, três é: duas moças e Ivo, daí ele escolhe mais duas pessoas, aí vai ficar com quatro mais uma que é cinco.*

Cr01: A criança escreve no papel as continhas "3 x 2" e "3 x 3", mas não as resolve. Quando questionada sobre de quantas maneiras diferentes podemos escolher as duas crianças, ela aponta para o papel.

Tipo 2 – Resposta baseada em repertório de escolha da vida cotidiana. A criança adota um critério baseado nas suas experiências sociais em situações de escolha. Por exemplo, escolhe a partir de 'zerinho ou um', 'par ou ímpar', 'pelo tamanho', 'por quem é mais inteligente', 'por quem chegar primeiro'. As respostas expressam uma solução que se afasta da compreensão de que é necessário formar combinações entre os elementos dispostos no enunciado.

Ex. Na gincana da escola, a equipe amarela é formada por três alunos: Clara, Ivo e Ana. Cada equipe deve escolher duas crianças para participar da competição. De quantas maneiras diferentes podemos escolher as duas crianças? (Resposta: 3)

Cr13pc01: "*Sorteando. É só colocar o nome das três crianças dentro de alguma coisa e aí você puxa. Outro jeito é tirando zerinho ou um*".

Cr01pc01: *"Eu só conheço duas que é o par ou ímpar ou pedra, papel e tesoura."*

Tipo 3 – Resposta baseada na quantidade de elementos escolhidos. A criança confunde a quantidade de elementos escolhidos com a quantidade de combinações possíveis. Assim, sem demonstrar compreensão dos invariantes de escolha ou de ordem, responde citando os elementos e associando a resposta à quantidade de elementos citados.

Ex. A lanchonete da cidade vende quatro opções de lanche: pizza, sanduíche, coxinha e pastel. De quantas maneiras diferentes podemos escolher duas opções de lanche? (Resposta: 6)

Cr08pc02: "*Uma maneira: a pizza ou três maneiras: coxinha, pizza e sanduíche*".

Cr14pc02: "*Quatro maneiras: pizza, coxinha, sanduíche e pastel*".

4.2 SOLUÇÕES QUE CONSIDERAM OS INVARIANTES DA COMBINATÓRIA

As respostas categorizadas neste grupo possuem a característica de revelar a compreensão da natureza do problema matemático em questão, uma vez que expressam a consideração dos invariantes na formação de combinações. Em todas as respostas temos a formação de combinações com os elementos indicados no enunciado, contudo, são combinações sem consideração do invariante de esgotamento das possibilidades.

Tipo 4 – Consideração de apenas UM invariante: escolha ou ordem. A criança demonstra indícios de solução combinatória ao considerar um dos invariantes na resolução do problema, contudo, comete erros que expressam a frágil compreensão conceitual que possui, isto é, erros por não considerar os demais invariantes.

Ex. A loja de animais vende três animais diferentes (gato, cachorro e coelho). Igor adora animais e seus pais o deixaram comprar dois animais na loja. Então, existem três animais, mas Igor não poderá levar todos porque ele só pode levar dois, não é? Ele pode formar várias combinações de dois animais, por exemplo, ele pode escolher o gato e o cachorro. Outra combinação diferente seria o gato e o coelho, não é mesmo? Com todos esses animais, quantas combinações diferentes de dois animais Igor pode formar? (Resposta: 3)

Cr03pc03: *"cachorro e o gato. O* ***cachorro e o coelho****. Agora coelho e gato.* ***Coelho e cachorro.*** *Agora coelho ficou faltando, né?"*

Ex. Na gincana da escola, a equipe amarela é formada por três alunos: Clara, Ivo e Ana. Cada equipe deve escolher duas crianças para participar da competição. De quantas maneiras diferentes podemos escolher as duas crianças? (Resposta: 3)

Cr19pc01: *"****Clara e Ana****. Clara e Ivo.* ***Ana e Ivo****.* **Ivo e Ana**. ***Clara e Ana****."*

Tipo 5 – Consideração de DOIS invariantes: escolha e ordem. A criança demonstra indícios de solução combinatória ao considerar dois invariantes na resolução do problema; escolha de elementos e ordem.

Ex. Julia quer fazer uma sobremesa com duas frutas. Em sua casa, ela tem banana, abacaxi, maçã e uva. Nem todas as frutas serão usadas para fazer a sobremesa, por que ela tem quatro tipos de frutas e só quer usar dois tipos não é mesmo? Mas podem ser formadas várias combinações diferentes de duas frutas, por exemplo, ela pode escolher banana e abacaxi. Outra opção diferente seria escolher banana e maçã, não é mesmo? Com todas essas frutas quantas combinações diferentes de duas frutas Julia pode formar? (Resposta: 6)

Cr19: *"uva e Banana. Abacaxi e maçã. Banana e maçã. Banana e abacaxi. Abacaxi e uva."*

Ex. A lanchonete da cidade vende quatro opções de lanche: pizza, sanduíche, coxinha e pastel. De quantas maneiras diferentes podemos escolher duas opções de lanche? (Resposta: 6)

Cr12: *"pizza com o pastel, coxinha com o pastel, o sanduíche com a coxinha, a pizza com o sanduíche e o pastel com o sanduíche"*

Um dado interessante, observado na classificação e análise das respostas, foi a falta de sistematização na formação das combinações. As crianças não utilizavam a estratégia de escolher um elemento e fazer tantas combinações quanto possível até o seu esgotamento; para, em seguida, escolher outro elemento e repetir o mesmo processo. O fato da maioria das crianças responderem mentalmente, sem uso do material oferecido (lápis e papel), pode ter influenciado neste aspecto.

O próximo capítulo apresenta os principais resultados deste estudo.

5 PRINCIPAIS RESULTADOS DO ESTUDO

Conforme mencionado no Capítulo 2, que trata do método, em virtude da Pandemia COVID- 19 e da necessidade de isolamento social, o presente estudo fez uso de um banco de dados de pesquisa anterior de Silva e colaboradores (2017), constituído por 60 protocolos de crianças que resolveram quatro problemas de combinatória (grupo A – problemas de arranjo, grupo B – problemas de permutação e grupo C – problemas de combinação) em duas condições distintas: com invariantes implícitos e com invariantes explícitos no enunciado dos problemas.

A análise de desempenho foi realizada por Silva e colaborados (2017) que verificou que a explicitação dos invariantes não obteve efeito facilitador sobre o desempenho em nenhuma das situações. Esse resultado é semelhante ao encontrado por Melo (2012), que investigou problemas de combinação nas duas condições, não identificando efeito facilitador na condição explícita. Assim, diante dos resultados encontrados nos estudos anteriores, optou-se por realizar, neste estudo, uma análise qualitativa dos erros considerando o raciocínio empregado pelas crianças. Acredita-se que a análise mais detalhada dos diferentes raciocínios nas respostas inadequadas poderá auxiliar a compreensão acerca do desenvolvimento combinatória em crianças.

Os resultados serão apresentados a seguir em tabelas acompanhadas de discussões.

5.1 RESULTADO POR GRUPO EM FUNÇÃO DAS CONDIÇÕES IMPLÍCITA E EXPLÍCITA

5.1.1 Resultados do Grupo A: situação de Arranjo

A Tabela 1 apresenta os resultados referentes ao Grupo A – crianças que responderam problemas de arranjo nas duas condições.

Tabela 1 - Percentual de respostas em função da condição implícita e explícita nos problemas de arranjo.

Tipo de respostas	Condição Implícita	Condição Explícita
T1	3%	3%
T2	28%	0
T3	3%	0
T4	38%	18%
T5	28%	79%

Nota 1: Tipo 1 – Resposta baseada nos dados do enunciado do problema; Tipo2 – Resposta baseada em repertório de escolha da vida cotidiana; T3 – resposta baseada na quantidade de elementos escolhidos; T4 - Resposta que considera apenas um invariante; T5 – Resposta que considera dois invariantes: escolha e ordem.
Nota 2: máximo de 32 respostas erradas nos problemas implícitos e de 38 respostas erradas nos problemas explícitos.

Como pode ser observado, a resposta do tipo T4 foi a mais frequente (38%) na condição implícita. Esse tipo de raciocínio evidencia o entendimento da necessidade de formar subconjuntos levando em consideração apenas um dos invariantes. Os tipos T2 e T5 (ambos com 28%) representaram a segunda maior frequência nos problemas implícitos. Os pensamentos que se enquadram em T2 retratam soluções embasadas em experiências cotidianas das crianças, mas que não demonstram ainda esquemas combinatórios, nem articulação com a formação de subconjuntos ou quantificação de elementos. Quanto às respostas T5, estas tratam de soluções fundamentadas em pensamento combinatório, levando em conta dois invariantes conceituais, o de escolha e o de ordem, sendo, portanto, um tipo de resolução mais elaborada.

Ao analisarmos as respostas nos problemas com invariantes explícitos, notamos a ausência de resoluções classificadas em T2 (0%) e T3 (0%). O que é um dado interessante, visto que a resposta T2 corresponde a segunda maior frequência na condição implícita. Nota-se também que o raciocínio expresso na categoria T1, resposta baseada nos dados do enunciado do problema, é pouco frequente tanto nos problemas implícitos (3%) quanto nos problemas explícitos (3%).

O raciocínio de maior expressão nos problemas explícitos é o T5 (79%) que denota a formação de combinações, a partir do entendimento dos invariantes de escolha e de ordem em suas constituições, porém sem esgotamento das possibilidades. Comparando a frequência de T4 nos problemas implícitos (28%), primeiramente aplicados, com a frequência nos problemas explícitos (18%), é possível pensar na ocorrência de uma migração de respostas T4, da condição implícita, para respostas T5, na condição explícita.

Para avaliar a distribuição das respostas nas duas condições foi aplicado o teste Qui-quadrado de independência, que identificou diferenças significativas entre as condições implícita e explícita ($X^2 = 22{,}27$; $p < 0{,}00$). A análise dos resíduos padronizados ajustados mostrou que há mais casos de erro T2 no arranjo implícito e menos erros T2 no arranjo explícito, como, também, menos erros T5 em arranjo implícito e mais erros T5 em arranjo explícito.

5.1.2 Resultados do Grupo B: situação de Permutação

A Tabela 2, a seguir, apresenta os resultados referentes ao grupo B – crianças que responderam problemas de permutação nas duas condições.

Tabela 2 - Percentual de respostas em função da condição implícita e explícita nos problemas de permutação.

Tipo de resposta	Condição Implícita	Condição Explícita
T1	7%	6%
T2	30%	3%
T3	15%	3%
T4	24%	6%
T5	24%	82%

Nota 1: Tipo 1 – Resposta baseada nos dados do enunciado do problema; Tipo2 – Resposta baseada em repertório de escolha da vida cotidiana; T3 – resposta baseada na quantidade de elementos escolhidos; T4 - Resposta que considera apenas um invariante (escolha ou ordem); T5– Resposta que considera dois invariantes (escolha e ordem).
Nota 2: Máximo de 33 respostas erradas na condição implícita e de 35 respostas erradas na condição explícita.

Observando os percentuais da condição implícita, observa-se que a maior frequência se encontra nas respostas T2 (30%), que denotam um raciocínio embasado em experiências culturais cotidianas da criança nas quais se depara com a necessidade de fazer escolhas. Já na condição explícita, a resposta com maior frequência foi a T5 (82%), enquanto a resposta T2 configura a menor frequência (3%) neste grupo de problemas. A resposta T2 faz parte do grupo de erros que se distancia do pensamento combinatório, enquanto as respostas T5 configuram tipos de raciocínios mais elaborados e próximos da solução combinatória. Foi aplicado o teste Qui-quadrado de independência que demonstrou haver uma associação entre o tipo de erro e a condição dos invariantes nos problemas de permutação ($X^2 = 26,28$; $p <0,00$). A análise mostrou diferença significativa entre a distribuição dos erros T2 e T5 nas condições investigadas. Um dado interessante é que diferente das outras duas situações, na situação de permutação, não tivemos ocorrência de acerto, ou seja, resposta que considera os três invariantes (escolha, ordem e esgotamento de possibilidades). As respostas desconsideradas da análise foram pelo critério de 'ausência de resposta'. Os demais tipos de erros não tiveram diferença de distribuição expressiva entre as condições.

5.1.3 Resultados do Grupo C: situação de Combinação

A Tabela 3 apresenta os resultados referentes ao grupo C – crianças que responderam problemas de combinação nas duas condições.

Tabela 3 - Percentual de respostas em função da condição implícita e explícita nos problemas de combinação.

Tipo de resposta	Condição Implícita	Condição Explícita
T1	9%	16%
T2	46%	0
T3	12%	12%
T4	21%	22%
T5	12%	50%

Nota 1: Tipo 1 – Resposta baseada nos dados do enunciado do problema; Tipo2 – Resposta baseada em repertório de escolha da vida cotidiana; T3 – resposta baseada na quantidade de elementos escolhidos; T4- Resposta que considera apenas um invariante; T5 – Resposta que considera dois invariantes: escolha e ordem.
Nota 2: Máximo de 33 respostas erradas nos problemas implícitos e 32 respostas erradas nos problemas explícitos.

Embora sejam grupos de crianças diferentes, o grupo C (combinação) teve um resultado semelhante ao do grupo B (permutação). Na situação de combinação implícita, o tipo de resposta com maior frequência foi o T2 (46%), expressando soluções baseadas em experiências cotidianas nas quais a criança precisa fazer escolhas ou organizar elementos de acordo com algum critério; são respostas que não demonstram a associação do problema com o pensamento combinatório. Embora na situação implícita o percentual tenha sido alto, esse tipo de resposta não teve nenhuma ocorrência na condição explícita. O raciocínio do T5, que expressa a consideração de dois invariantes na formação das combinações, foi o mais empregado (50%) na condição explícita. Assim, observamos certa inversão entre as condições investigadas, isto é, a resposta T2 tem a maior frequência na condição implícita e a menor frequência na condição explícita, enquanto o oposto ocorre com T5, que tem maior frequência na condição explícita e menor na implícita. Foi aplicado o teste Qui-quadrado de independência, que mostrou que há relação significativa entre o tipo de erro e a condição ($X^2 = 22{,}69$; $p < 0{,}00$). A análise mostrou que há diferença na distribuição entre os casos de erro T2 e T5 nas duas condições. Os demais tipos de erro têm distribuição mais equilibrada na situação de combinação.

5.2 RESULTADO COMPARATIVO ENTRE GRUPOS EM FUNÇÃO DAS CONDIÇÕES IMPLÍCITA E EXPLÍCITA

Comparar os tipos de erros cometidos pelas crianças nas situações de arranjo, permutação e combinação é um dos objetivos do presente estudo. Há diferença no raciocínio em razão das situações? Há diferença entre as situações no tocante a dificuldades? Há diferenças qualitativas entre os erros quando se compara as condições implícita e explícita de apresentação dos invariantes? Algum invariante se fez mais presente nos resultados? Algum invariante denotou maior dificuldade de compreensão?

A Tabela 4 permite refletir sobre tais questões, apresentando os resultados de forma comparativa.

Tabela 4 - Percentual de respostas nos grupos em função da condição implícita e explícita.

Tipo de respostas	Grupo A Arranjo		Grupo B Permutação		Grupo C Combinação	
	Implícita	**Explícita**	**Implícita**	**Explícita**	**Implícita**	**Explícita**
T1	3%	3%	7%	5%	9%	16%
T2	28%	0	30%	3%	46%	0
T3	3%	0	15%	3%	12%	12%
T4	38%	18%	24%	5%	21%	22%
T5	28%	79%	24%	84%	12%	50%

Nota 1: Tipo 1 – Resposta baseada nos dados do enunciado do problema; Tipo2 – Resposta baseada em repertório de escolha da vida cotidiana; T3 – resposta baseada na quantidade de elementos escolhidos; T4 - Resposta que considera apenas um invariante; T5 – Resposta que considera dois invariantes: escolha e ordem.
Nota 2: Máximo de respostas: Arranjo-implícita 32; Arranjo-explícita 38; Permutação-implícita 33; Permutação-explícita 35; Combinação-implícita 33; Combinação-explícita 32.

De modo geral, observa-se que, na condição implícita, a resposta T2 foi mais frequentemente utilizada pelas crianças nos três grupos (arranjo – 28%; permutação – 30%; combinação – 46%). O que demonstra que as crianças do 4º ano, participantes do presente estudo, tiveram a tendência inicial de responder a um problema matemático multiplicativo através de estratégias advindas de experiências culturais, não necessariamente relacionadas com a matemática. Diferente das respostas T1 (baseada em dados do enunciado do problema) e das respostas T3 (baseada na quantidade de elementos escolhidos), nas quais a criança reconhece o problema como matemático e busca através de cálculos ou de elementos do enunciado fornecer a resposta e indicar a quantidade de combinações; na categoria T2, a criança sai da esfera da matemática e trata o problema como algo do seu cotidiano, sem fornecer uma resposta matemática no sentido de número de combinações. Como os problemas na condição implícita foram os primeiros a serem apresentados, esse tipo de raciocínio se destaca no presente estudo, especialmente por não ter sido relatado em outros estudos da área com crianças nesta idade.

Ainda na condição implícita, comparando os grupos, outro dado observado é que a variação entre as frequências de um mesmo tipo de resposta foi pequena. A diferença maior fica por conta da resposta T2 na situação de combinação, em comparação com as situações de arranjo e permutação. Entretanto, não chega a ser uma diferença expressiva.

Avaliando a condição explícita, de modo geral, observa-se que a maior frequência de respostas, para as três situações combinatórias, encontra-se no raciocínio do tipo T5 (arranjo – 79%; permutação – 84%; combinação – 50%). Esse é um dado bem interessante, visto que o presente estudo não se trata de uma intervenção, revelando que a mudança no enunciado dos problemas influencia na maneira como a criança compreende e responde às situações propostas. O raciocínio expresso no T5 revela a consideração de dois invariantes do conceito: escolha e ordem. Comparando a condição implícita com a condição explícita, vemos uma mudança na tendência de resposta das crianças; de um raciocínio distante da solução combinatória (T2) para um raciocínio mais sofisticado (T5). Porém, essas crianças não chegam ao acerto por não esgotarem as combinações possíveis para a situação. Outro dado de destaque é o (quase) desaparecimento do raciocínio T2 nas três situações (arranjo – 0%, permutação – 3% e combinação – 0%) nos problemas da condição explícita; ou seja, o raciocínio de maior expressividade em termos de frequência na condição implícita desaparece quando se apresentam problemas que contém informações sobre invariantes conceituais. As referidas considerações demonstram uma aparente tendência a determinado nível de raciocínio em razão da condição implícita ou explícita, questão importante e posta como objetivo do presente estudo. Sendo assim, os resultados confirmam a hipótese de que a explicitação das propriedades e relações invariantes no enunciado dos problemas poderia auxiliar o raciocínio empregado.

5.3 AVALIANDO OS TIPOS DE RESPOSTA EM FUNÇÃO DOS BLOCOS: SOLUÇÕES COMBINATÓRIAS E SOLUÇÕES NÃO COMBINATÓRIAS

Seguimos agora, para a comparação entre os dois blocos de respostas, descritos no capítulo do sistema de análise, a saber: (1). Bloco das soluções não combinatórias, composto por respostas T1 – baseada nos dados do enunciado do problema; T2 – baseada em repertório de escolha da vida cotidiana e T3 – baseada na quantidade de elementos escolhidos; e (2). Bloco das soluções combinatórias, composto por respostas T4 – considera apenas um invariante: escolha ou ordem e T5 – considera dois invariantes: escolha e ordem.

A Tabela 5 apresenta a frequência em cada bloco de respostas em função da situação (arranjo, permutação e combinação) e da condição implícita e explícita.

Tabela 5 - Percentual de respostas por bloco em função da situação e da condição implícita e explícita.

	Arranjo		**Permutação**		**Combinação**	
Blocos de respostas	**Implícito**	**Explícito**	**Implícito**	**Explícito**	**Implícito**	**Explícito**
Bloco 1 (T1; T2 e T3)	34%	3%	52%	11%	67%	28%
Bloco 2 (T4 e T5)	66%	97%	48%	89%	33%	72%

Fonte: A autora (2022)

Nota 1: Tipo 1 – Resposta baseada nos dados do enunciado do problema; Tipo2 – Resposta baseada em repertório de escolha da vida cotidiana; T3 – resposta baseada na quantidade de elementos escolhidos; T4 - Resposta que considera apenas um invariante: escolha ou ordem; T5 – Resposta que considera dois invariantes: escolha e ordem.

Verifica-se na Tabela 5, que a situação de arranjo foi a que apresentou mais respostas categorizadas no Bloco 2 e isso ocorreu tanto na condição implícita (66%) como na condição explícita (97%). Esta é uma tendência diferente da observada nas situações de permutação e de combinação que tiveram maior frequência de respostas categorizadas no Bloco 1 na condição implícita (permutação: 52%; combinação 67%). Pode ser entendido, diante de tal configuração, que na condição implícita a maior frequência de raciocínios empregados é de natureza mais elementar, ou seja, correspondente a raciocínios mais distantes do combinatório, nas situações de permutação e combinação.

Algumas questões podem ser pensadas diante desses dados. A primeira é que a situação de arranjo levou a raciocínios mais sofisticados em ambas as condições, evidenciando que mesmo nos problemas implícitos, as crianças conseguiram empregar respostas que considerassem ao menos um dos invariantes da combinatória. Teria, portanto, a situação de arranjo maior potencialidade de reconhecimento enquanto problema de natureza combinatória? A quantidade de combinações totais nos dois problemas de arranjo é a mesma dos dois problemas de permutação (6 combinações e 24 combinações) de modo que esse aspecto foi descartado enquanto possível influenciador neste resultado. De modo semelhante, os dois problemas de combinação tiveram quantidade total de combinações menor (3 combinações e 6 combinações) e isso não interferiu no uso de raciocínio que expressasse maior compreensão dos invariantes da combinatória na condição implícita. A segunda questão constatada é que nas três situações, as crianças tiveram uma mudança expressiva no uso de estratégias combinatórias T4 e T5 (Bloco 2) na condição de explicitação dos invariantes no enunciado dos problemas.

Esta constatação foi confirmada pelo teste Qui-quadrado de independência, que demonstrou haver diferença de distribuição significativa entre os dois blocos de respostas (Bloco 1 e 2) em função da condição implícita e explícita ($X^2 = 47,04$; $p < 0,00$). O aumento considerável do Bloco 2 possivelmente ocorre pela modificação do raciocínio infantil ao se deparar com os invariantes conceituais presentes no enunciado dos problemas. Esse dado responde mais uma questão levantada nesse estudo. A discussão desses resultados, levando em consideração a fundamentação teórica e os estudos anteriores será realizada no próximo capítulo.

6 DISCUSSÃO

Os resultados serão discutidos nesta seção seguindo a mesma ordem dos objetivos que guiam o presente estudo. Inicialmente serão explorados os achados concernentes ao efeito da explicitação dos invariantes nos erros cometidos pelas crianças. Já a discussão em torno do raciocínio adotado em função das situações combinatórias será feita logo em seguida. As diferenças qualitativas no raciocínio infantil em função da condição implícita ou explícita dos invariantes será alvo de reflexões. Pontos relevantes como possíveis implicações educacionais e pesquisas futuras também serão desenvolvidos ao fim.

6.1 O EFEITO DA EXPLICITAÇÃO DOS INVARIANTES NOS ERROS COMETIDOS PELAS CRIANÇAS

Os invariantes correspondem, segundo Vergnaud (1990), às relações e propriedades de um conceito, que se preservam, permitindo seu reconhecimento em diferentes situações. Usualmente em livros didáticos e avaliações, os problemas de combinatória são apresentados sem a explicitação dos invariantes conceituais em seus enunciados. Quando se compara o desempenho de crianças e adolescentes em diferentes situações do campo multiplicativo, as situações combinatórias se destacam pela complexidade e dificuldade na resolução. Esse ponto de reflexão levou algumas pesquisas a questionar a importância da compreensão dos invariantes na resolução correta dos problemas. Silva e Spinillo (2010) constataram que a explicitação dos invariantes no enunciado de problemas de produto cartesiano facilitou de maneira significativa a resolução de tais problemas, provocando não só um melhor desempenho, mas o uso de estratégias mais sofisticadas. Melo (2012), na mesma direção, investigou o efeito da explicitação dos invariantes no enunciado de problemas de combinação, constatando que não houve melhora no desempenho das crianças, sendo reforçada a dificuldade presente neste tipo de situação combinatória. Diante dos resultados anteriores, Silva e colaboradores (2017) analisaram se a dificuldade enfrentada pelas crianças, na condição explícita, era algo particular à situação de combinação ou se também atingia as situações de arranjo e de permutação. Para tal, realizaram um estudo com crianças do quarto ano do ensino fundamental que resolveram problemas das três situações combinatórias nas duas condições de enunciado. Os dados confirmaram o resultado de Melo (2012) referente aos problemas de combinação e demonstraram que a dificuldade também é enfrentada nos problemas de arranjo e permutação. Assim, com resultados de desempenho muito baixos, a pesquisa de Silva e colaboradores (2017) indicou não haver mudança significativa entre apresentar os invariantes no enunciado ou apresentar problemas prototípicos, com invariantes implícitos.

O presente estudo levantou a hipótese de que embora não se tenham observado mudanças de desempenho entre as duas condições, a alta frequência de erros poderia ser analisada de maneira mais qualitativa, a fim de compreender melhor o raciocínio empregado pelas crianças nessas distintas condições. Partindo de uma compreensão cognitivista do erro, acredita-se que as respostas, embora erradas, possam expressar raciocínios qualitativamente diferentes com relação a formação do conceito. Portanto, a concepção que se adotou é de que o erro está associado a mecanismos de aquisição de conhecimentos, que expressam lógicas da organização intelectual do indivíduo. Assim, torna-se importante compreender o erro como uma forma de conhecer o raciocínio dos estudantes.

Refletindo sobre formação de conceitos com base na teoria de Vergnaud, é importante esclarecer que a presente pesquisa considerou apenas os invariantes como variável de investigação, além das situações combinatórias que foram avaliadas em função destes. As representações infantis não foram objeto de estudo, sendo usadas apenas como auxiliar na compreensão do raciocínio empregado pela criança durante a resolução do problema.

Assim, o invariante de escolha dos elementos, relativo à seleção da quantidade de elementos adequada foi trazido no enunciado dos problemas de arranjo (PA03: *três crianças estão participando, mas apenas duas serão premiadas em primeiro e segundo lugar*), de permutação (PP03: *Mateus quer arrumar as fotos da mãe, do pai e da irmã, ele percebeu que pode arrumar na ordem: pai, mãe e irmã*) e combinação (PC04: *Nem todas as frutas serão usadas porque ela tem quatro frutas, mas só quer usar duas frutas*); o invariante de ordem foi apresentado nos problemas de arranjo (PA03: *outra opção diferente seria trocar a ordem*) e nos problemas de permutação (PP03: *ele poderia trocar a ordem das fotos*). Observamos que esse invariante não ficou claro no enunciado dos problemas de combinação. Esta, sem dúvida, é uma limitação deste estudo. E por fim, o invariante de esgotamento de possibilidades, nos problemas de arranjo (PA03: *de quantas maneiras diferentes*), nos de permutação (*de quantas maneiras diferentes*) e de combinação (*quantas combinações diferentes*). Diferente dos outros invariantes, escolha e ordem, que podem ser explicitados através de um exemplo, o invariante de esgotamento não pode ser explicitado, uma vez que já seria a resposta do problema.

Diante do exposto, retomamos o objetivo "*qual o efeito da explicitação dos invariantes nos erros empregados pelas crianças na resolução de problemas combinatórios*?"

Após essas considerações, podemos trazer que no presente estudo a explicitação dos invariantes no enunciado dos problemas teve efeito sobre os erros cometidos, uma vez que os dados mostram que na condição explícita há maior índice de respostas T4 e T5, que expressam maior compreensão acerca do conceito, bem como a consideração de um ou dois invariantes na resolução dos problemas. Qualitativamente, uma pequena modificação relativa à estrutura da questão influencia no raciocínio das crianças, no sentido de aproximar do raciocínio esperado para a situação. Numa recente investigação, Borba, Lautert e Silva (2021) analisaram como as crianças do jardim de infância refletiam sobre os invariantes conceituais, de escolha de elementos, ordenação e esgotamento de possibilidades, em problemas de produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação, a partir de um estudo de intervenção. De acordo com as autoras, o invariante de escolha foi melhor entendido depois da intervenção, o de ordem foi compreendido por algumas das crianças e o de esgotamento foi a maior dificuldade pela falta de sistematização na formação das combinações. Os dados do presente estudo também identificaram o invariante de escolha como sendo mais facilmente reconhecido e utilizado pelas crianças e de maneira semelhante, ocorreu, em alguns casos, da criança confundir a quantidade de elementos escolhidos com a quantidade de combinações (T3). O invariante de ordem, especialmente dos problemas de arranjo, foi evidenciado na condição de explicitação na maioria dos casos. Um dado interessante, é a quantidade de erros na combinação pela repetição de pares, seja por falha na memória, seja por contabilizar o mesmo par na ordem inversa, o que pode ser explicado pelo fato desse invariante não ficar tão claro no enunciado dos problemas de combinação, como exposto anteriormente. Corroborando o que posto por Borba, Lautert e Silva (2021), a falta de sistematização pode ser um grande obstáculo para o esgotamento. No presente estudo, além disso, as crianças usaram poucas representações escritas, o que poderia ter facilitado a memória e compreensão do problema. Portanto, apesar de constatar uma melhora qualitativa no raciocínio infantil a partir da condição explícita dos invariantes, não podemos inferir que houve aprendizado dos conceitos combinatórios em questão, sem considerarmos o tripé conceitual que dispõe a fundante teoria. Não obstante, o próprio Vergnaud trata de pontuar que o domínio do conhecimento é um processo que ocorre ao longo do tempo, levando em conta as experiências, a maturidade e a aprendizagem do sujeito.

6.2 O RACIOCÍNIO ADOTADO NAS DIFERENTES SITUAÇÕES COMBINATÓRIAS

Outro ponto levantado na presente investigação diz respeito ao raciocínio utilizado pelas crianças diante das diferentes situações combinatórias. Lembrando que o raciocínio aqui analisado é exclusivamente aquele que leva a respostas inadequadas na resolução do problema. Assim, questionou-se se o raciocínio adotado em uma determinada situação combinatória seria semelhante ou diferente às demais situações, a saber: "*analisar o raciocínio empregado pelas crianças em função da situação: arranjo, permutação e combinação*".

Como já antecipado no Capítulo 3, sistema de análise, foram identificados e classificados os mesmos tipos de raciocínio nos problemas de arranjo, permutação e combinação, independente da condição implícita ou explícita. Este resultado também foi encontrado em pesquisas anteriores, a exemplo de Fischbein e Gazit (1988) e de Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997), que ao examinarem o efeito da instrução específica sobre a resolução de problemas combinatórios, contemplaram erros em comum entre os problemas de combinação, arranjo e permutação, cometidos por crianças e adolescentes. Outro estudo mais recente, realizado por Borba, Lautert e Silva (2021) também confirmou esse dado, indicando que as diferentes situações combinatórias não impactam no tipo de erro cometido pelas crianças. A distinção desses resultados para o resultado do presente estudo é que verificamos que isso acontece independente da explicitação, ou seja, o raciocínio envolvido no erro é exatamente o mesmo. O que irá diferir de uma situação para a outra é a frequência de distribuição de respostas por tipo de erro. Com isso, foram identificados cinco tipos de raciocínio, os quais serão alvo de reflexão e discussão, levando em consideração o que trazem outros estudos.

O primeiro erro (T1) trata de uma resposta baseada em dados do enunciado do problema, com os quais a criança realiza operações aritméticas, sendo muito frequente, em nossa amostra, o uso da multiplicação. Isso pode ocorrer pelo fato de já terem sido apresentadas, na escola, à multiplicação ou por experiências extraescolares que conduzem ao entendimento de que se trata de um problema do campo multiplicativo. Esse tipo de resolução também foi percebido por Fischbein e Gazit (1988), Silva e Spinillo (2010) e Melo (2012). Pondera-se que os esquemas utilizados pelas crianças demonstram que ela entende tratar-se de um problema matemático do campo multiplicativo, supostamente resolvido por esta operação. No entanto, as respostas parecem ainda distante do raciocínio ou conceito combinatório, o que as torna insuficientes para corresponder corretamente à situação.

O segundo erro (T2) trata de respostas baseadas em repertório de escolha da vida cotidiana, indicam raciocínios fundamentados em experiências sociais, em contextos de escolha, onde as crianças apontam um método ou forma de proceder para chegar a uma solução, sem formação de subconjuntos. Neste tipo de erro, as crianças indicam maneiras de atender a questão contextual, como por exemplo, através do “zerinho ou um” ou “par ou ímpar”, e ou por critérios como, o “merecimento”, a “beleza”, a “inteligência”, a “altura”, entre outros, através do qual torna-se possível solucionar o cenário apresentado, por exemplo: “distribuição de medalhas”, “resultado da eleição” e “organizar o material nas três divisórias da mochila”. Esse tipo de erro correspondeu a maior parte das respostas dos problemas em condições implícitas. A palavra “maneiras” pareceu objeto de reflexão ou ancora para justificar as respostas do tipo: “*Eu só conheço duas que é o par ou ímpar ou a pedra, papel e tesoura*” (Cr.01pc01). “*Quantas maneiras? Eita! De qualquer maneira” (Cr. 07pc01); “Fazendo um teste” (Cr.15pc01).* Na condição implícita, a compreensão demonstrada é de um sentido prático de resolução de problemas. Segundo Vergnaud (1990), o sentido é construído na relação entre a situação colocada, o sujeito e as representações envolvidas. Portanto, as crianças entendem o problema a partir do sentido prático, evocando esquemas que assim o respondem. Os esquemas, para o autor, representam a formação dialética entre uma hipótese (teorema em ação) levantada pela criança, diante de uma situação e uma categoria de pensamento (conceito em ação) tida como importante. A partir deles, os esquemas geram ações, neste caso intelectuais, sendo estas as respostas construídas pelas crianças. Lembrando que os livros de matemática e as avaliações apresentam comumente situações combinatórias em condições implícitas, o que pode favorecer um raciocínio do tipo T2. Importante pensar que as crianças ao responderem sobre a proposta de escolha e organização de elementos, parecem indicar a operação de seriação de elementos, mas ainda sem correspondência à situação combinatória, observadas em respostas como: *“Ficar na fila...um atrás do outro”* (Cr.04pp01). Para Inhelder e Piaget (1976) é necessário coordenar as operações de seriação e de correspondência em uma única operação para que se possa construir o sistema combinatório.

O terceiro erro (T3) versa sobre respostas que são baseadas na quantidade de elementos escolhidos, a criança confunde a quantidade de combinações com a quantidade de elementos. A criança demonstra não entender a formação de subconjuntos, apontando elementos seriados de forma aleatória, sem corresponder aqueles elementos à agrupamentos, ou seja, entende que é necessário apontar elementos juntos, de forma seriada, mas não se dá conta de que isto corresponde a combinações e que a quantificação solicitada corresponde a esse agrupamento e não à quantidade de elementos. As respostas indicam esquemas ainda basilares na formação de combinações, sem correspondência necessária à situação. Esse tipo de raciocínio também foi encontrado por Borba, Lautert e Silva (2021) em crianças do jardim da infância.

O quarto erro (T4) ocorre quando a criança leva em conta apenas um dos invariantes, escolha ou ordem. Percebe-se a seriação de elementos, na quantidade de elementos indicada no problema, porém as resoluções ocorrem de forma assistemática e desorganizada, muitas vezes por tentativa e erro ou de maneira aleatória. Por exemplo, a criança pode levar em consideração o invariante de escolha, selecionando a quantidade correta de elementos para formação dos subconjuntos, contudo não demonstra ter entendido o critério de ordem, nem tampouco o de esgotamento de possibilidades. Batanero, Navarro-Pelayo e Gondino (1997) também identificaram um tipo de erro semelhante a este raciocínio, o qual chamaram *erro de ordem*, que consiste em distinguir a ordem dos elementos quando for irrelevante ou, ao contrário, não considerar a ordem quando for essencial. Isso ocorreu na presente pesquisa. Por exemplo, a criança tratar uma situação de combinação como sendo de arranjo.

O quinto erro (T5) consiste no raciocínio mais sofisticado dentre aqueles relacionados a resoluções inadequadas. Aqui, a criança demonstra compreender tanto o invariante de escolha como o de ordem. Aparentemente a criança recorre a esquemas de seriação e a correspondência entre os elementos, contudo, não chega a formar todas as combinações possíveis. Este tipo de raciocínio foi o de maior frequência nas condições explicitas. A falta de esgotamento de possibilidades foi uma das dificuldades identificadas por Borba, Lautert e Silva (2021), que permaneceu para a maioria das crianças, mesmo após sessão de intervenção. Embora as respostas T5 representem um erro, especialmente pela falta de sistematização e esgotamento, elas apontam um raciocínio mais elaborado que o expresso no tipo T4 e mais próximo ao combinatório. Afinal, o raciocínio empregado em T5 requer articular esquemas distintos: o de selecionar elementos na quantidade correspondente ao enunciado do problema; ordená-los conforme a situação combinatória, além disso controlar a possibilidade ou não de repetição dos subconjuntos, necessitando de recursividade e sistematização, para poder se chegar ao número total de possibilidades.

Para as três situações, o invariante de esgotamento foi o de maior dificuldade de compreensão ou operacionalização. Erros desse tipo podem refletir uma dificuldade maior em coordenar esquemas mais complexos que necessitam ser recrutados para se chegar ao número total de combinações. Seguindo uma escala crescente, o invariante de escolha pode ser percebido de forma isolada e independente de qualquer outro invariante. O de ordem, na maioria dos casos, foi considerado quando a criança já tinha consciência do invariante de escolha. Salientando que as diferentes situações combinatórias requerem ordenações distintas dos elementos escolhidos, o que pode significar um maior requinte. O esgotamento demonstrou ser o último invariante, numa escala hierárquica, da construção combinatória.

Nessa linha, é viável questionar se o esgotamento é uma consequência das articulações aludidas ou de fato um invariante? Entendendo o esgotamento como invariante, será que antes de se chegar ao esgotamento haveria outro(s) invariantes a serem incorporados na trajetória de construção do conceito combinatório? Seria a sistematização um invariante a ser considerado?

Considerando o desenvolvimento psicogenético descrito por Inhelder e Piaget (1976), crianças menores de 12 anos não esgotavam as possibilidades de combinações, ou seja, não contemplavam todos os pares possíveis por meio de um método sistemático. Os autores concluíram que a criança só conseguiria usar de métodos sistemáticos para realizar todas as variações e combinações possíveis no estágio das operações formais, quando ocorreria a compreensão das operações combinatórias. Julgamos importante levantar tais considerações, uma vez que a nossa amostra de participantes foi composta por crianças do 4º ano do ensino fundamental, que nesses termos estariam no estágio operatório concreto em possível transição para o estágio formal.

6.3 DIFERENÇAS QUALITATIVAS DE RACIOCÍNIO EM RAZÃO DA CONDIÇÃO IMPLÍCITA E EXPLÍCITA

Como já exposto no Capítulo 3, sistema de análise, os cinco tipos de erros foram agrupados em dois blocos a partir da natureza do tipo de raciocínio, a saber: (i) soluções que indicam recursos de natureza mais elementar em termos de raciocínio combinatório, composto por T1, T2 e T3; e (ii) soluções que assinalam esquemas mais elaborados e próximos do raciocínio combinatório, composto por T4 e T5. Esse tipo de divisão indica uma ordem entre as categorias de análise, e expressam também, diferentes níveis de desenvolvimento cognitivo quanto a este conceito.

A categorização dos erros por natureza, mais distantes e mais próximas do raciocínio combinatório, segue de maneira semelhante ao entendimento posto por Moro e Soares (2006), Silva e Spinillo (2010), Silva (2010, 2014) e Melo (2012). Embora os três primeiros versem apenas sobre situações de produto cartesiano e o estudo de Melo (2012) aborde a situação de combinação. Moro e Soares (2006) categorizaram as respostas em cinco níveis de construção do raciocínio combinatório, que vão desde o nível 0, relativo a respostas alheia ao contexto; passando pelo nível I, de resposta contextualizada sem indício de combinação, até a presença do nível IV, Da presença de solução combinatória, quando estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis. Entre os mencionados níveis, também foram descritos subníveis, numa construção lógica do raciocínio combinatório. Já os estudos de Silva e Spinillo (2010), Silva (2010, 2014) e Melo (2012), versam sobre o efeito da explicitação dos invariantes sobre o desempenho e as estratégias utilizadas pelas crianças na resolução dos problemas; sendo possível distinguir entre as estratégias dos três blocos de naturezas distintas, quais sejam: o relativo às estratégias de resolução não combinatórias; o dos primeiros indícios de soluções combinatórias e o das estratégias combinatórias.

Portanto, diante do objetivo "*compreender se há diferenças qualitativas no raciocínio infantil em função da condição implícita ou explícita dos invariantes*" observou-se que partimos de raciocínios mais elementares até os mais sofisticados, indicando uma progressão qualitativa. Tal constatação denota haver uma organização da elaboração do raciocínio combinatório, como trazido pelos estudos citados acima.

Além disso, os resultados do presente estudo indicam que essa diferença qualitativa é marcada pelas condições implícita e explícita, sendo a última propiciadora de raciocínios mais elaborados.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do exposto, o projeto de pesquisa desenvolvido ao longo deste mestrado trouxe contribuições para área da psicologia cognitiva, especialmente à psicologia da educação matemática no que concerne ao raciocínio combinatório infantil, como também teceu algumas implicações educacionais. Resgataremos aqui os principais pontos de contribuição deste estudo.

Os resultados revelaram de certo que a explicitação dos invariantes no enunciado de problemas de arranjo, permutação e combinação não levou as crianças ao acerto, mas repercutiu qualitativamente sobre o raciocínio das crianças que demonstraram um pensamento mais elaborado, relacionado aos invariantes.

Foi constatado que os erros eram de natureza distinta, sendo reveladas duas classes de soluções, uma mais distante e outra mais próxima da combinatória. A primeira classe revela pensamentos mais elementares, sem articulação ou construção de combinações, enquanto a segunda demonstra um raciocínio mais elaborado, com construções de combinações parciais, que levavam em conta um ou dois invariantes, o de escolha e ordem.

A análise indicou haver cinco tipos de erros comuns entre as diferentes situações combinatórias investigadas, com frequências e distribuições distintas tanto em relação à situação combinatória quanto à condição de explicitação ou não dos invariantes. A classificação do erro permitiu visualizar ou constatar uma progressão cognitiva do raciocínio combinatório, levando em consideração esquemas evocados para resolução das situações e invariantes conceituais. Optar por analisar os erros cometidos por crianças ao tentarem resolver problemas combinatórios, proporcionou conhecer o raciocínio por elas empregado. Essa postura em relação aos erros é fundamentada na psicologia cognitiva, por entender que o erro está relacionado a mecanismos de aquisição do conhecimento. Sendo assim, esses resultados são de interesse tanto da psicologia da educação matemática quanto da pedagogia.

7.1 POSSÍVEIS IMPLICAÇÕES EDUCACIONAIS

Um dos aspectos relevantes acerca dos erros identificados no presente estudo é a própria consideração que estes devem ter para a psicologia e para a educação, enquanto forma de raciocínio infantil. As discussões trazidas nesta investigação podem levar a reflexões sobre a abordagem do erro no ensino e na pesquisa, apontando para um olhar cuidadoso no processo de construção do conhecimento, que pode ser determinante numa avaliação sobre o sucesso e o fracasso escolar.

Especificamente sobre o raciocínio combinatório em crianças do quarto ano do ensino fundamental, os resultados deste estudo reforçam o que outras pesquisas na área indicam, a de que elas são capazes de raciocinar sobre os princípios combinatórios. Portanto, considera-se importante trabalhar as diferentes situações combinatórias nos anos iniciais do ensino fundamental, sendo indicada a explicitação dos invariantes conceituais no enunciado dos problemas a fim de auxiliar a compreensão do conceito.

Pensar sobre os invariantes conceituais nas distintas situações combinatórias também é essencial para o entendimento das diferenças e semelhanças entre cada situação, observando suas propriedades e relações. Além dos invariantes, importante que a este se somem as representações acerca do conceito e as diversas situações em que eles são encontrados, formando o tripé conceitual.

Refletir junto às crianças sobre seus erros é uma estratégia didática indicada, que auxilia a compreensão dos esquemas que guiam suas ações. Atitudes como questionamento e retorno quanto ao seu entendimento, levam à conscientização da criança, sendo consideradas ações metacognitivas, que convergem para a aprendizagem, não apenas da matemática, mais em diversos aspectos. Nessa linha, Vergnaud (2003) trata do *saber fazer* e do *saber explicar*, isso requer entender que, para o ensino é preciso desenvolver de maneira simultânea a forma *operatória*, que é o saber fazer e a forma *predicativa* do conhecimento, que é saber explicar ou enunciar sobre relações entre objetos e propriedades envolvidas.

Tomar os erros como objeto de análise é validar a maneira de pensar do sujeito, entendendo o erro como um passo na trajetória do conhecimento. É uma atitude que pode ser tomada para motivar descobertas e direcionar a compreensão da criança para o entendimento cada vez mais próximo do esperado. Cury (2019) pontua que não basta analisar os erros dos alunos, mas fazer com eles percebam e a partir deles possam crescer. Esse olhar aponta para uma construção do conhecimento, ou seja, para um processo que leva em conta o raciocínio empregado, mesmo o considerado errado, sem o objetivo de apenas eliminá-lo.

Podemos salientar que há erros pontuais na trajetória de construção dos conceitos combinatórios, que podem servir como ferramentas para a reflexão do aluno e de professores. Estes podem constituir um banco de dados, mas com intuito de empregar tais raciocínios a situações e formas de representação, que façam sentido para as crianças, contribuindo com a diferenciação e o reconhecimento dos invariantes combinatórios envolvidos, de forma prática.

Buscar entender a trajetória cognitiva na construção do pensamento combinatório, para o campo educacional, se faz importante no sentido de elaborar estratégias pedagógicas com base no desenvolvimento desse raciocínio, favorecendo a formação de tal conceito matemático, ainda nas séries iniciais do ensino fundamental, avançando assim na compreensão desses tipos de problemas, no intuito de minimizar dificuldades e promover o desenvolvimento do raciocínio lógico, precursor de outros conceitos como o de probabilidade.

7.2 PESQUISAS FUTURAS

Acreditamos que os resultados e conclusões, aqui apresentados, possam também motivar pesquisas futuras. Um ponto importante a ser investigado é quanto ao invariante de esgotamento de possibilidades, identificado como a maior dificuldade apresentada pelas crianças para resolução completa das situações combinatórias. Seria importante entender o que poderia contribuir para se chegar a soluções completas. Aspectos não abordados nesta pesquisa podem ser explorados, como o entendimento e uso da sistematização, inclusive como meio de se alcançar o esgotamento de possibilidades.

Outro aspecto que poderia ser investigado, seria observar os raciocínios empregados diante dos invariantes explicitados nos problemas e de representações simbólicas de forma conjunta, uma vez que as representações não foram variáveis observadas nesta investigação, mas em que pese são consideradas na teoria dos campos conceituais de Vergnaud.

Da mesma forma, poderia ser explorada a investigação sobre os tipos de raciocínios empregados por crianças com desenvolvimento atípico, diante das situações combinatórias e das condições implícita e explícita. Entender os esquemas que possam ser recrutados por crianças com, por exemplo, deficiência de ordem sensorial, síndrome de Down ou Transtorno do espectro Autista, para levantar possíveis obstáculos e novos caminhos ao entendimento do conhecimento combinatório.

Um outro ponto seria estudar os erros cometidos por adultos da Educação de Jovens e Adultos (EJA), de classe equivalente à das crianças desta pesquisa, ou seja, do quarto ano do ensino fundamental, para avaliar se pertencem a erros de mesma natureza e dos mesmos tipos.

Espera-se, ao final, que esta investigação favoreça a compreensão da construção do conceito matemático combinatório de forma a refletir novas práticas pedagógicas, propostas teóricas e o desenvolvimento de pesquisas futuras.

REFERÊNCIAS

ALRO, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática**. Autêntica, 2018.

BARICHELLO, Leonardo. **Análise de resoluções de problemas de cálculo diferencial em um ambiente de interação escrita**. 2008.

BARRETO, Fernanda Sá; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. **Intervenções de combinatória na educação de jovens e adultos** (CO). In: XIII Conferência Interamericana De Educação Matemática. 2011.

BATANERO, Carmen; NAVARRO-PELAYO, Virginia; GODINO, Juan D. **Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils**. Educational Studies in Mathematics, v. 32, n. 2, p. 181-199, 1997.

BORASI, Raffaella. **Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors**. Greenwood Publishing Group, 1996.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; LAUTERT, Síntria Labres; SILVA, Ariedja de Carvalho. How Do Kindergarten Children Deal with Possibilities in Combinatorial Problems?. In: **Mathematical Reasoning of Children and Adults**. Springer, Cham, 2021. p. 141-167.**arly years**, v. 41, n. 2-3, p. 218-231, 2021.

BRÄUNING, Kerstin. **Development of strategies for a combinatorial task by a 5 year old child.** In: Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11). Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME, 2019.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. BoletimBrasília: MEC/SEF,2019.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Educação Estatística / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. – Brasília: MEC, SEB, 2014. 80 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Orientações Educacionais Complementares Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2002. 135 p.

BRITO, Márcia RF de; CORREA, Jane. **O significado do conceito de divisão em crianças de escola elementar**. In: III Conferencia Argentina de Educación Matemática. Libro de Resúmenes. Salta: SOAREM/UNSa. 2003. p. 150.

BROUSSEAU, Guy. **Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990**. Springer Science & Business Media, 2006.

Bruner, Jerome.S.. **The process of Education**. HArward University press Cambridge: 1966. 10ª Impressão. 1966.

CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David William; SCHLIEMANN, Analúcia Dias. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1991

CASÁVOLA, H. M. et al. **O papel construtivo dos erros na aquisição dos conhecimentos.** Psicologia Genética: aspectos metodológicos e implicações pedagógicas, p. 32-44, 1988.

CRUZ, Maria Soraia; SPINILLO, Alina. Resolvendo adição de fracções através do simbolismo matemático e através de âncoras. **Quadrante**, v. 13, n. 2, p. 3-29, 2004.

CURY, Helena Noronha. **Análises de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

DE LA TORRE, Saturnino. **Aprender com os erros**. Artmed Editora, 2009.

ENGLISH, Lyn D. **Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning**. In: Exploring probability in school. Springer, Boston, MA, 2005. p. 121-141.

ENGLISH, Lyn D. **Children's strategies for solving two-and three-dimensional combinatorial problems**. In: Stepping Stones for the 21st Century. Brill Sense, 2007. p. 139-158.

FISCHBEIN, Efraim; GAZIT, Avikan. The combinatorial solving capacity in children and adolescents. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, v. 5, p. 193-198, 1988.

FLAVELL, John H. **Speculations about the nature and development of metacognition.** Metacognition, motivation and understanding, 1987.

HALANI, Aviva. **Students' ways of thinking about enumerative combinatorics solution sets: The odometer category.** In: Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education. 2012. p. 231-245.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar: Combinatória**. **Probabilidade.** São Paulo: Editora Atual, v. 5. 1977.

HÖVELER, Karina. **Children's combinatorial counting strategies and their relationship to conventional mathematical counting principles.** In: Teaching and learning discrete mathematics Worldwide: Curriculum and research. Springer, Cham, 2018. p. 81-92.

INHELDER, Bãrbel; PIAGET, Jean. **Da lógica da criança à lógica do adolescente: ensaios sobre a construção das estruturas operatórias formais**. São Paulo: Pioneira, 1976.

KAMII, Constance; DECLARK, Georgia. **Reinventando a aritmética: implicações da teoria de Piaget**. Papirus, 2003.

KOUBA, Vicky L. **Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems.** Journal for research in Mathematics Education, v. 20, n. 2, p. 147-158, 1989.

LA TAILLE, Yves de; SOUZA, Lucimara Silva de; VIZIOLI, Letícia. Ética e educação: uma revisão da literatura educacional de 1990 a 2003. **Educação e pesquisa**, v. 30, n. 1, p. 91-108, 2004.

MELO, Lianny Milenna de Sá. **O efeito da explicitação dos princípios invariantes na resolução de problemas de combinação por crianças**. 2012. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco.

MELO, Lianny Milenna de Sá; SILVA, Juliana Ferreira Gome da; SPINILLO, Alina Galvão. **OS Princípios Invariantes e A Resolução De Problemas De Raciocínio Combinatório**. Em Teia| Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v. 7, n. 1, 2016.

MERAYO, Félix García. **Matemática discreta**. Universidad Nac. del Litoral, 2005.

MORGADO, A.; PITOMBEIRA DE CARVALHO, J.; PINTO DE CARVALHO, P.;FERNANDEZ, P. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

MORO, Maria Lúcia Faria; SOARES, Maria Thereza Carneiro. **Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental**. Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, v. 8, n. 1, 2006.

MORO, Maria Lúcia Faria. Gérard Vergnaud: Dados Biográficos. "Gérard Vergnaud - coletânea de textos traduzidos". acessado em www.vergnaudbrasil.com.

NAVARRO, V., BATANERO, C., GODINO, J. D. **Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria.**Educación matemática,8(01), 26-39, 1996.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PACHECO, A.B.; MEDEIROS, C.F. **Uma investigação sobre as dificuldades no uso de estratégias para a resolução de problemas verbais no campo da análise combinatória.** In: MARANHÃO, Cristina. Educação matemática nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio. Musa Ed., 2009.

PAIVA, M. R. (2009). **Matemática.** Volume 2. 1*Ed. Rio de Janeiro: Moderna*.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. **Estratégias de resolução de problemas de raciocínio combinatório por alunos de 1ª a 4ª série**. Em: Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. **Como crianças de 1ª a 4ª série resolvem problemas de raciocínio combinatório?** Em*:* Anais do II Simpósio Internacional de Educação Matemática, Recife, PE, 2008.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série.** Zetetike, v.17, p.105-150, jan/jun, 2009.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. O **Desenvolvimento Do Raciocínio Combinatório Na Escolarização Básica.** Em Teia| Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v. 1, n. 1, 2010.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. **Do young children notice what combinatorial situations require?** *Proceedings 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME36), Taiwan, 2012.

PINTO, Neuza Bertoni. **O erro como estratégia didática: estudo do erro na matemática elementar**. Editora Papirus, 2000.

RADATZ, Hendrik. **Error analysis in mathematics education**. Journal for Research in mathematics Education, v. 10, n. 3, p. 163-172, 1979.

RIBEIRO, Célia. Metacognição: um apoio ao processo de aprendizagem. **Psicologia: reflexão e crítica**, v. 16, n. 1, p. 109-116, 2003.

ROSSO, Ademir José; BERTI, Nívia Martins. O erro e o ensino-aprendizagem de matemática na perspectiva do desenvolvimento da autonomia do aluno. **Boletim de Educação Matemática**, v. 23, n. 37, p. 1005-1035, 2010.

ROSSO, Ademir José; BECKER, Fernando; TAGLIEBER, José Erno. A produção do conhecimento e a ação pedagógica. **Educação e Realidade**, v. 23, n. 2, p. 63-82, jul./dez. 1998.

SANTANA, Eurivalda; OLIVEIRA, Tamiles. O raciocínio combinatório revelado ao longo da educação básica. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 8, n. 3, 2015.

SANTOS, Emily Vasconcelos; ANDRADE, Silvanio de. Resolução, Exploração e Proposição de Problemas nos anos iniciais do ensino fundamental: contribuições para o ensino e aprendizagem da combinatória. **Revista De Educação Matemática**, n. 17, p. 32, 2020.

SANTOS, Emilly Rayane Moura Diniz; DINIZ, Waleska Stefany Moura; MONTENEGRO, Juliana Azevedo. **Problematizando Poemas: Uma Proposta de Ensino de Combinatória por meio do uso da Literatura Infantil**. Semanticscholar.2019.

SANTOS, J. P. O., MELLO, M. P., MURARI, I. T. **Introdução à análise combinatória**. Unicamp, 1995.

SILVA, Juliana Ferreira Gomes da. **O efeito da explicitação da correspondência um-para-muitos na resolução de problemas de produto cartesiano por crianças**. 2010. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco.

SILVA, Juliana Ferreira Gomes da. **A compreensão de crianças sobre problemas de raciocínio combinatório.** 2014. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Pernambuco.

SILVA, J. F.; SPINILLO, A. G. **Making explicit the principles governing combinatorial reasoning: does it help children to solve cartesian product problems?** In Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Belo Horizonte, Brasil, 2010.

SILVA, Juliana Ferreira Gomes da; SILVA, Elis Jayane dos Santos; SILVA, Francielle Alves da; ALEIXO, Pedro Soares. **A Explicitação Dos Princípios Invariantes Em Problemas De Combinação, Arranjo E Permutação**. VII EPEM. 2017.

SPINILLO, Alina Galvão. Avaliação da aprendizagem numa perspectiva cognitiva. **Psychologica**, v. 14, p. 83-99, 1995.

SPINILLO, Alina Galväo. As relações entre aprendizagem e desenvolvimento discutidas a partir de pesquisas de intervençäo. **Arq. bras. psicol.(Rio J. 1979)**, p. 55-74, 1999.

SPINILLO, A. G. et al. **O erro no processo de ensino-aprendizagem da matemática: errar é preciso?** *Boletim Gepem*, n. 64, p. 1-15, jan./jun. 2014.

SPINILLO, A. G. et al. **Como professores e futuros professores interpretam erros de alunos ao resolverem problemas de estrutura multiplicativa?** *Bolema,* Rio Claro (SP), v. 30, n. 56, p. 1188-1206, dez. 2016.

TAXA-AMARO, Fernanda de Oliveira Soares. **Problemas multiplicativos e processo de abstração em crianças na 3ª série do Ensino Fundamental. 2001. 255f**. 2001. Tese de Doutorado. Tese (Doutorado)–Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

______. **Solução de Problemas com Operações Combinatórias**. In: BRITO, M. R. F. (Org.). *Solução de Problemas e a Matemática Escolar.* Campinas: Editora Alínea, 2006.

USRY, Rusydah; ROSLI, Roslinda; MAAT, Siti Mistima. **An error analysis of matriculation students' permutations and combinations.** Indian Journal of Science and Technology, v. 9, n. 4, p. 1-6, 2016.

VEGA, Danielle Avanço; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. **Etapas de escolha na resolução de produtos cartesianos, arranjos, combinações e permutações.** Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, v. 7, n. 3, 2014.

VERGNAUD, Gerard. **Conceitos e esquemas numa teoria operatória da representação.** Psychologie Française, v. 30, n. 3-4, 1985.

______.Gérard. **La teoría de los campos conceptuales**. Recherches en didactique des mathématiques, v. 10, n. 2, p. 3, 1990.

______.Gérard. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar**. Curitiba: UFPR, 2009.

______.Gérard. **O que é aprender? O iceberg da conceitualização.** Porto Alegre, 2017.

VIDOTTI, Daniela Barbieri; KATO, Lilian Akemi. **Análise de erros em questões Matemáticas a partir dos anais do encontro nacional de educação matemática** (Enem). XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016.