



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE  
NÚCLEO DE TECNOLOGIA  
CURSO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

MARIA VITÓRIA GOMES DA SILVA MOTA

**UTILIZAÇÃO DE MODELOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA MISTA PARA  
DETERMINAÇÃO DE NUCLEAÇÕES ESCOLARES NO MUNICÍPIO DE CARUARU  
– PE**

Caruaru  
2022

MARIA VITÓRIA GOMES DA SILVA MOTA

**UTILIZAÇÃO DE MODELOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA MISTA PARA  
DETERMINAÇÃO DE NUCLEAÇÕES ESCOLARES NO MUNICÍPIO DE CARUARU  
– PE**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia de Produção da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Produção.

**Área de concentração:** Pesquisa Operacional.

**Orientador:** Prof<sup>o</sup>. Dr. Luciano Carlos Azevedo da Costa.

Caruaru

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Mota, Maria Vitória Gomes da Silva.

Utilização de modelos de programação linear inteira mista para determinação de nucleações escolares no município de Caruaru - PE / Maria Vitória Gomes da Silva Mota. - Caruaru, 2022.

75 p. : il., tab.

Orientador(a): Luciano Carlos Azevedo da Costa  
(Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, , 2022.

Inclui referências, apêndices.

1. Pesquisa Operacional. 2. Localização de Facilidades. 3. Modelos Matemáticos. 4. Nucleações. 5. Programação Linear Inteira Mista. I. Costa, Luciano Carlos Azevedo da. (Orientação). II. Título.

620 CDD (22.ed.)

MARIA VITÓRIA GOMES DA SILVA MOTA

**UTILIZAÇÃO DE MODELOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA MISTA PARA  
DETERMINAÇÃO DE NUCLEAÇÕES ESCOLARES NO MUNICÍPIO DE CARUARU  
– PE**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Produção.

Aprovada em: 24/10/2022.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Profº. Dr. Luciano Carlos Azevedo da Costa (Orientador)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Profº. Dr. José Leão e Silva Filho (Examinador Interno)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Profº. Dr. Walton Pereira Coutinho (Examinador Interno)  
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico esse trabalho a minha mãe, Marizene, e a minha avó, Maria do Carmo, grandes colaboradoras e incentivadoras na minha vida. Sem vocês eu nada seria.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida, pela oportunidade de me desenvolver constantemente ao longo desses anos e me proporcionar forças para enfrentar as dificuldades que surgiram no caminho.

Agradeço aos meus pais, Sebastião e Marizene, por todo o esforço investido na minha educação. Agradeço em especial a minha mãe, por me ouvir e aconselhar durante a minha caminhada, me apoiando, me dando forças, me acalmando com suas sábias mensagens de incentivo e me mostrando que eu sou capaz de fazer tudo. À minha irmã Maria Letícia, por gostar de implicar comigo, mas ser sempre uma boa companheira e amiga quando preciso.

Agradeço à minha avó, Maria do Carmo, por todas as ligações preocupadas, por acreditar no meu potencial e por me colocar em todas as suas orações.

Agradeço ao meu namorado, Lineker Luiz, por ser um companheiro incrível e paciente, por me apoiar nas minhas decisões, por acreditar e torcer por mim e não me deixar desanimar quando tudo estava difícil.

Agradeço aos amigos que fiz durante esses anos de faculdade, em especial a Aline Alana, Elizama Samara, Jaine Muniz, Allan Bruno, William Gabriel, Marcos Antônio e Ernande de Mello, que estiveram comigo desde o começo dessa jornada, agradeço por todo apoio, amizade, conselhos, por sempre me ajudarem quando precisei, por tornarem esses anos mais divertidos e menos cansativos.

Agradeço a Sabrina Andrade, pela sua amizade, por todo apoio e suporte durante essa etapa de minha formação.

Agradeço ao meu Professor Orientador, Luciano Costa, por compartilhar seu conhecimento, pelas valiosas contribuições e dicas durante todo o processo, por todos os “calma, vai dar tudo certo”, por ter sido além de professor e orientador, um grande amigo.

Agradeço a Universidade Federal de Pernambuco – CAA e a todos os professores do meu curso, por todo aprendizado e contribuições para a minha formação profissional.

“É verdade que nem tudo que queremos virará realidade, mas o que precisamos fazer sempre deve começar como um desejo.” (Rock Lee).

## RESUMO

A educação é um assunto de primordial importância para a sociedade. Com a necessidade de ofertar uma educação de qualidade no setor campesino, o processo de nucleação das escolas tem sido aplicado pelas secretarias de educação de diversos municípios nos últimos anos. No município de Caruaru, em particular, a nucleação visa agrupar escolas com menos de 100 alunos e que sejam geograficamente próximas, formando um núcleo de gestão para cada nucleação que seja capaz de gerenciá-las. O processo de decisão é complexo, não só por causa do número de alunos e escolas pertencentes a uma nucleação, mas também, por precisar considerar fatores de localização, econômicos e gerenciais. Além do aspecto geográfico, isto é, determinar quais escolas devem ser agrupadas, visando a menor distância, outros aspectos também devem ser levados em consideração, tais como determinar uma distribuição balanceada do número de alunos e escolas por nucleação. Os Problemas de Localização de Facilidade, no campo educacional, necessitam de estudos, análises de critérios e fatores do cenário escolar abrangido. Este trabalho utiliza modelos de programação matemática para resolver problemas de localização, como o problema de  $p$ -medianas e de  $p$ -centros. Foram testados diversos cenários para a formação de possíveis nucleações, a fim de encontrar uma solução que minimize as distâncias entre as unidades escolares e uma distribuição balanceada de alunos e escolas. Os resultados encontrados mostram que os modelos propostos foram capazes de gerar soluções viáveis em tempos computacionais inferiores a 1 segundo. As soluções obtidas poderiam servir de base para melhorar o sistema organizacional atual das nucleações do município.

Palavras-chave: Nucleação; Problemas de Localização de Facilidade; Modelos Matemáticos; Pesquisa Operacional.

## ABSTRACT

Education is a matter of prime importance to society. With the need to offer a quality education in the rural sector, the school nucleation process has been applied by the education secretaries of several municipalities in the last years. In the municipality of Caruaru, in particular, nucleation aims at grouping together geographically close schools with less than 100 students, forming a management nucleus for each nucleation that is capable of managing them. The decision process is complex, not only because of the number of students and schools belonging to a nucleation, but also because it needs to consider location, economic and managerial factors. In addition to the geographic aspect, that is, determining which schools should be grouped, aiming at the shortest distance, other aspects must also be taken into account, such as determining a balanced distribution of the number of students and schools by nucleation. Facility Location Problems, in the educational field, require studies, analysis of criteria and factors of the school scenario covered. This work uses mathematical programming models to solve location problems, such as the p-median and p-center problem. Several scenarios for the formation of possible nucleations were tested, in order to find a solution that minimizes the distances between the school units and a balanced distribution of students and schools. The results found show that the proposed models were able to generate viable solutions in computational times less than 1 second. The solutions obtained could serve as a basis for improving the current organizational system of the municipality's nucleations.

Keywords: Nucleation; Facility Location Problems; Mathematical Models; Operations Research.

## LISTA DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| Figura 1 – Fluxograma Etapas da Metodologia.....                          | 29 |
| Figura 2 – Territórios de Gestão Sustentável de Caruaru.....              | 33 |
| Figura 3 – Escolas das Nucleações do 1º Distrito.....                     | 40 |
| Figura 4 – Escolas das Nucleações do 2º Distrito.....                     | 40 |
| Figura 5 – Escolas das Nucleações do 3º Distrito.....                     | 41 |
| Figura 6 – Escolas das Nucleações do 4º Distrito.....                     | 41 |
| Figura 7 – Nucleação Manoel Félix de Almeida - 2º Distrito (atual).....   | 42 |
| Figura 8 - Nucleação Nossa Senhora Aparecida - 1º Distrito (atual).....   | 43 |
| Figura 9 – Representação gráfica do cenário para $p = 8$ .....            | 47 |
| Figura 10 – Representação gráfica do cenário para $p = 10$ .....          | 48 |
| Figura 11 – Representação gráfica do cenário para $p = 12$ .....          | 50 |
| Figura 12 - Representação gráfica do cenário para $p = 14$ .....          | 51 |
| Figura 13 - Nucleação Manoel Félix de Almeida - Proposta pelo Modelo..... | 56 |

## LISTA DE QUADROS

|  |    |
|--|----|
| Quadro 1 – Panorama atual das nucleações.....                                | 62 |
| Quadro 2 – Endereços das Escolas.....  | 65 |
| Quadro 3 – Numerações e Coordenadas (Latitude e Longitude) das Escolas.....  | 67 |
| Quadro 4 – Escolas Candidatas a serem Escola Núcleo.....                     | 44 |
| Quadro 5 – Representação Geral do Algoritmo para Construção dos Modelos..... | 70 |
| Quadro 6 – Construção do Modelo $p$ -Medianas.....                           | 71 |
| Quadro 7 - Construção do Modelo $p$ -Centros.....                            | 73 |
| Quadro 8 – Algoritmo para Plotar Gráfico.....                                | 75 |

## LISTA DE TABELAS

|   |    |
|---|----|
| Tabela 1 – Configuração das nucleações para $p = 8$ .....                         | 46 |
| Tabela 2 – Configuração das nucleações para $p = 10$ .....                        | 47 |
| Tabela 3 – Configuração das nucleações para $p = 12$ .....                        | 49 |
| Tabela 4 - Configuração das nucleações para $p = 14$ .....                        | 50 |
| Tabela 5 – Resultados da Função Multiobjetivo nos Cenários para $p$ -Medianas.... | 52 |
| Tabela 6 - Resultados da Função Multiobjetivo nos Cenários para $p$ -Centros..... | 53 |
| Tabela 7 - Comparação do Cenário Atual X Cenário dos Modelos ( $p = 12$ ).....    | 55 |

## LISTA DE SIGLAS

|       |                                       |
|-------|---------------------------------------|
| API   | Application Programming Interface     |
| CMEI  | Centro Municipal de Educação Infantil |
| EJA   | Educação de Jovens e Adultos          |
| PB    | Programação Binária                   |
| PLIM  | Programação Linear Inteira Mista      |
| SEDUC | Secretaria de Educação de Caruaru     |
| TGS   | Território de Gestão Sustentável      |

## SUMÁRIO

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>   | <b>15</b> |
| 1.1      | OBJETIVOS   | 16        |
| 1.1.1    | <b>Objetivo Geral</b>   | <b>16</b> |
| 1.1.2    | <b>Objetivos Específicos</b>  | <b>17</b> |
| 1.2      | JUSTIFICATIVA   | 17        |
| 1.3      | ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO  | 18        |
| <b>2</b> | <b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>  | <b>20</b> |
| 2.1      | POLÍTICA DE NUCLEAÇÃO   | 20        |
| 2.2      | PESQUISA OPERACIONAL  | 22        |
| 2.3      | PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA MISTA  | 24        |
| 2.4      | PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO DE FACILIDADES  | 25        |
| 2.4.1    | <b>Problema das p-Medianas</b>  | <b>26</b> |
| 2.4.2    | <b>Problema de p-Centros</b>  | <b>27</b> |
| 2.5      | FÓRMULA DE HAVERSINE  | 28        |
| <b>3</b> | <b>METODOLOGIA</b>  | <b>29</b> |
| 3.1      | CLASSIFICAÇÃO DA PESQUISA   | 29        |
| 3.2      | ETAPAS DA PESQUISA  | 29        |
| <b>4</b> | <b>DESCRIÇÃO E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA</b>   | <b>32</b> |
| 4.1      | DESCRIÇÃO E DEFINIÇÃO DO PROBLEMA   | 32        |
| 4.2      | MODELOS DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA PARA DETERMINAÇÃO DE NUCLEAÇÕES ESCOLARES NO MUNICÍPIO DE CARUARU | 35        |
| <b>5</b> | <b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>  | <b>39</b> |
| 5.1      | CENÁRIO ATUAL   | 39        |
| 5.2      | EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS   | 43        |
| 5.3      | APLICAÇÃO DO MODELO   | 43        |

|              |  |           |
|--------------|--|-----------|
| <b>5.3.1</b> | <b>Cenários para o Modelo p-Mediana e p-Centros</b>        | <b>45</b> |
| 5.4          | ANÁLISE DE RESULTADOS                                      | 54        |
| <b>6</b>     | <b>CONCLUSÕES</b>  | <b>57</b> |
|              | <b>REFERÊNCIAS</b>   | <b>59</b> |
|              | <b>APÊNDICE A – PANORAMA GERAL DAS NUCLEAÇÕES ATUAIS</b>   | <b>62</b> |
|              | <b>APÊNDICE B - ALGORITMO DE IMPLEMENTAÇÃO DOS MODELOS</b> | <b>70</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

A educação é tema de muita discussão, sendo reconhecida como alicerce primordial no desenvolvimento de um país. O Brasil teve melhoras significativas no ensino, mas ainda precisa vencer problemas relacionados com a educação, como a evasão escolar, péssima infraestrutura de algumas escolas, falta de investimentos, despreparo dos professores, entre outros desafios. (RIBEIRO, 2020). Estes desafios se fazem ainda mais presentes quando nos referimos à Educação no Campo, pois, a mesma vem enfrentando diversas dificuldades no que diz respeito a: presença de classes multisseriadas, a uma má localização de escolas em relação a distribuição territorial da população e a uma educação contextualizada que venha atender as verdadeiras questões culturais dos estudantes que vivem no campo. Neste contexto, o processo de Nucleação Escolar surge como uma estratégia de solução para a organização do ensino no meio rural.

No município de Caruaru, a Secretaria de Educação (SEDUC), tem como uma de suas competências garantir o acesso da população à educação básica e manter a rede pública de ensino. Para isso, adota o conceito de Nucleação Escolar como modelo de gestão organizacional nos distritos da zona rural. A nucleação tem como finalidade atender da melhor maneira as condições do professor, do aluno e da comunidade. Uma ocorrência muito comum nas escolas da zona rural da cidade, é a existência de classes multisseriadas, isto é, classes nas quais um único professor é responsável por alunos de várias idades e com diferentes níveis de aprendizado. Isso ocorre, porque a realidade do setor rural de Caruaru é composta por diversas escolas com número reduzido de alunos. Sendo assim, quando o número de alunos para formar uma determinada classe seriada é insuficiente, tendo um número mínimo de alunos igual a 20, forma-se uma classe multisseriada. Entretanto, estas classes recebem fortes críticas pois não fornecem uma infraestrutura adequada, nem um ensino-aprendizado de qualidade para os alunos. Nesse contexto, o conceito de Nucleação Escolar passa a ser importante. Nucleação é um processo que consiste em desagregar classes multisseriadas. Nesse processo, unidades pequenas são fechadas e seus alunos e professores são transferidos para escolas agrupadas em centros urbanos. Pode ainda acontecer das escolas do campo se unificarem em uma

única escola onde cada turma estudará em seu ano específico com determinado professor.

A nucleação de Caruaru é composta por dois tipos de escolas. As que são denominadas Escolas Nucleadas (escolas com menos de 100 alunos) e as denominadas Escolas Núcleo, que são aquelas que possuem uma equipe de gestão responsável por gerenciar todas as escolas que compõem a nucleação. Além de ser uma escola com melhor estrutura física, a localização desta última precisa ser estratégica, ou seja, estar localizada perto de todas as escolas que estão sob sua responsabilidade. (CARUARU, 2022). Uma decisão importante durante o processo de nucleação diz respeito à determinação de quais escolas devem ser agrupadas, uma vez que esse processo deve considerar a distância entre as escolas e o número de estudantes que devem ser atendidos. Idealmente, escolas nucleadas deveriam estar localizadas próximas umas das outras. Além disso, cada nucleação deveria oferecer todos os níveis de séries, de forma que os estudantes de uma determinada região não precisem se locomover grandes distâncias.

Neste contexto, a fim de auxiliar no processo de tomada de decisão na determinação das nucleações, o trabalho em questão tem por objetivo utilizar técnicas de otimização, considerando modelos de localização como a  $p$ -medianas e  $p$ -centros (LAPORTE, NICKEL e GAMA, 2019), para determinar quais escolas deveriam ser consideradas como escolas núcleo e quais escolas deveriam ser alocadas a ela.

## 1.1 OBJETIVOS

Os objetivos deste trabalho são definidos em objetivo geral e detalhados em objetivos específicos, apresentados a seguir.

### 1.1.1 Objetivo Geral

Desenvolver modelos de programação linear inteira mista para auxiliar no processo de determinação de nucleações escolares no município de Caruaru-PE.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

- Entender o processo de determinação de nucleações escolares no município de Caruaru-PE;
- Realizar um levantamento acerca das informações relacionadas com a estrutura (capacidade, número de alunos) das escolas sob a responsabilidade de Secretaria de Educação da Prefeitura Municipal de Caruaru e coletar as coordenadas das escolas utilizando a API do Bing Maps;
- Desenvolver um modelo de programação linear inteira mista para resolução do problema de determinação de nucleações escolares;
- Implementar o modelo de programação e determinar as nucleações.

### 1.2 JUSTIFICATIVA

A educação escolar brasileira se mostra pouco modificada no decorrer da história do país, principalmente quando se trata das desigualdades entre a educação urbana e a educação do campo. Os indivíduos do campo são marcados por uma educação onde o processo de escolarização era vivenciado por poucos e em condições precárias. A fim de ofertar uma educação básica de qualidade e melhor eficiência na gestão escolar, sem promover o desenraizamento cultural do estudante campestre, o processo de nucleação das escolas rurais tem sido aplicado muito frequentemente pelos administradores municipais e estaduais nos últimos anos. As localizações dessas escolas dentro do setor campestre também são um fator importante para as comunidades rurais, já que uma boa localização pode gerar bons resultados como a melhoria dos serviços realizados, viabilidade de um melhor acompanhamento dos alunos, satisfação de alunos e funcionários, redução do tempo de locomoção dos diretores entre as unidades escolares, entre outros.

No município de Caruaru é possível encontrar um quantitativo expressivo de escolas na zona rural. Várias dessas escolas possuem um número reduzido de alunos. Analisando este fato e ao considerar aspectos econômicos, torna-se inviável para o município contratar um gestor para uma escola que possua apenas 5 alunos,

por exemplo. Neste sentido, a nucleação busca agrupar as unidades escolares de pequeno porte, atribuindo um único núcleo de gestão, composto por um gestor, um coordenador e um secretário, capaz de gerenciar todas as escolas pertencentes àquela nucleação.

Outro aspecto a ser considerado é a capacidade de supervisão e gerenciamento recebido pelas escolas que compõem uma nucleação. Escolas que estão geograficamente próximas, dentro de uma nucleação, facilitam o processo de gestão e acompanhamento do núcleo de gestão, que não precisarão se deslocar por grandes distâncias para supervisionar suas unidades escolares. Além disso, escolas geograficamente próximas tendem a estar dentro de uma mesma realidade cultural. Isto implica que os gestores não precisarão lidar com distintos aspectos culturais. Assim, podem focar num Projeto Político Pedagógico com poucas flexibilizações, que descreva como pretendem ensinar seus conteúdos, fixando na realidade sócio-cultural das escolas o que ajudará na estruturação das ações técnico-administrativo-pedagógicas.

Considerando os aspectos pontuados acima, e analisando atualmente a organização das unidades escolares das nucleações do município de Caruaru, é possível observar que as escolas estão mal distribuídas entre as nucleações. Em razão de que, escolas que estão geograficamente próximas, atualmente, pertencem a nucleações diferentes e distantes.

Como a decisão de localizar e agrupar as escolas das nucleações é um processo complexo e que demanda um grande esforço e tempo de análise, modelos matemáticos foram propostos para lidar com essa situação. Com o intuito de facilitar o processo de tomada de decisão, para que seja a mais viável possível, por meio de uma ferramenta matemática e informática, tem-se uma automatização, que poderá considerar vários cenários e testar variações do número de nucleações e analisar os impactos da questão, levando em consideração a proximidade geográfica e o balanceamento da quantidade de escolas e número de alunos.

### 1.3 ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO

O restante deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) está organizado como segue. Na Seção 2 é apresentada uma fundamentação teórica com ênfase nos conceitos de Nucleação e Problemas de Localização. Na Seção 3, é apresentada a

metodologia aplicada. Na Seção 4, são apresentados a descrição do problema e os modelos. Na Seção 5, são apresentadas as propostas e discutidos os resultados obtidos. Por fim, na Seção 6 são apresentadas as limitações e demais conclusões a respeito do trabalho como um todo.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção serão apresentados a revisão de textos, artigos, livros e todo material pertinente que contenha os fundamentos do assunto estudado, com o objetivo de explicar os temas que serão abordados, proporcionando um melhor entendimento do leitor sobre a pesquisa.

### 2.1 POLÍTICA DE NUCLEAÇÃO

A Política de Nucleação Escolar é um processo que consiste em desagregar as classes multisseriadas. Tais classes, possuem como característica o agrupamento de alunos de idades diversas e de vários níveis educacionais numa mesma sala de aula, sendo instruídos por um único professor. Muito presentes na zona rural, essas classes surgem como uma estratégia favorável do contexto de implantar a educação no setor campesino. Visam diminuir o êxodo rural e evasão escolar tendo, também, como alguns fatores para sua criação as dificuldades de locomoção, baixa densidade populacional e a falta de professores qualificados com nível superior. No entanto, as classes multisseriadas sofrem de intensas críticas, em relação a falta de infraestrutura adequada, falta de materiais pedagógicos e principalmente no que tange ao processo de ensino-aprendizagem. Diante disso, a nucleação de algumas escolas tem sido vista como uma alternativa de solução para organização do ensino no meio rural, possibilitando a serialização escolar. (SILVA E SILVA, 2012).

Sales (2013, p.6) explica que o modelo de nucleação escolar surgiu nos Estados Unidos e foi trazido para o Brasil por volta de 1976, no Paraná. Após o modelo ter sido implantado no Paraná, este se disseminou por Minas Gerais, Goiás, São Paulo, alcançando uma dimensão nacional. Sendo amplamente difundido na década de 1990, dado o contexto político e econômico, quando, induzidas pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB nº 9.394/1996), as reformas educacionais na educação básica priorizaram o ensino fundamental com a criação do Fundo de Manutenção e Desenvolvimento do Ensino Fundamental e Valorização do Magistério (FUNDEF), constituindo uma estratégia viável aos municípios, ao estabelecerem critérios para a transferência de recursos financeiros às escolas públicas do ensino fundamental e estimularam a municipalização de novas escolas, que resultou no fechamento de várias escolas multisseriadas. Sendo assim, os

estudantes destas unidades foram “nucleados” em centros urbanos e escolas maiores. (GONÇALES, 2010).

Tendo como base o método seriado de organização das classes no lugar das classes multisseriadas, o processo de nucleação escolar pode acontecer tanto no perímetro rural, em que as escolas do campo se unificam em uma única escola e onde cada turma estudará em seu ano específico com determinado professor, ou pode acontecer das escolas serem nucleadas na cidade, direcionando os professores e estudantes para escolas maiores nos centros urbanos. Segundo Abreu (2021), a nucleação compreende a centralização dos alunos em escolas-núcleo em comunidades maiores do campo, abrangendo alunos da mesma comunidade e/ou de comunidades próximas, ou entre campo e zona urbana, através do uso do transporte escolar, possibilitando a seriação escolar. Entretanto, Abreu (2021) também destaca que o processo de deslocamento dos alunos muitas vezes contribui para o desenraizamento cultural, de suas tradições e costumes, por serem imersos em contextualidades diferentes das suas. Além de, muitas vezes, o deslocamento não atender às medidas de segurança necessárias, seja pela má conservação dos ônibus, ou pela precariedade das estradas, os alunos também acabam por passar mais tempo nos ônibus do que propriamente nas salas de aula, devido às longas distâncias percorridas.

O Artigo 3º da Resolução N° 2º de 28 de abril de 2008, normatiza que a modalidade da educação infantil e dos anos iniciais do ensino fundamental “serão sempre oferecidos nas próprias comunidades rurais, evitando-se os processos de nucleação de escolas e de deslocamento das crianças.”, e ainda defende que caso haja demanda quanto à nucleação, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, deve existir a participação ativa das comunidades na definição do local, respeitando sua cultura e até a possibilidade do percurso à escola ser realizado a pé na menor distância a ser percorrida, ou transporte estudantil. “Quando se fizer necessária a adoção do transporte escolar, devem ser considerados o menor tempo possível no percurso residência-escola e a garantia de transporte das crianças do campo para o campo.” (BRASIL, 2008). Tendo como prioridade que haja o deslocamento entre o campo e o próprio campo, o Artigo 5º diz que:

Para os anos finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio, integrado ou não à Educação Profissional Técnica, a nucleação rural poderá constituir-se em melhor solução, mas deverá considerar o processo de diálogo com as comunidades atendidas, respeitados seus valores e sua cultura.

§ 1º Sempre que possível, o deslocamento dos alunos, como previsto no *caput*, deverá ser feito do campo para o campo, evitando-se, ao máximo, o deslocamento do campo para a cidade.

Segundo Abreu (2021), aderir o processo de nucleação ou não é uma medida que os municípios devem tomar com responsabilidade, planejar a educação do campo é uma proposta educacional e política, devendo ser implementada como forma de possibilitar meios educacionais de desenvolvimento humano possibilitando um futuro digno para a população, além do fato da educação ser um direito de todos. Para Veiga (2006, p. 27), para promover um ensino de qualidade se faz necessário analisar profundamente os sujeitos contemplados, visto que “o currículo não pode ser separado do contexto social, uma vez que ele é historicamente situado e culturalmente determinado”. Assim, o estudante do campo se torna protagonista do seu ensino-aprendizado, ao ter esse fortalecimento cultural.

## 2.2 PESQUISA OPERACIONAL

A Pesquisa Operacional é uma ciência multidisciplinar que engloba um conjunto de técnicas direcionadas a problemas complexos para auxiliar na tomada de decisões. Visa encontrar a melhor alternativa entre as opções disponíveis para determinado problema ou otimizar determinada situação. Para isso, faz uso de modelos matemáticos, estatísticos e eficientes algoritmos computacionais. (SOBRAPO – Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional).

As primeiras atividades de Pesquisa Operacional foram iniciadas durante a Segunda Guerra Mundial. Era preciso solucionar problemas de natureza logística e de estratégia militar de grande complexidade, como, por exemplo, alocar de eficiente os recursos escassos para as operações militares. Equipes de diversos cientistas foram convocados para lidar com este e outros vários problemas de natureza estratégica, de forma a tomar decisões com bases científicas. Essas equipes foram as primeiras a desenvolverem métodos eficientes, criando modelos matemáticos baseados nos fatos reais de guerra, e desempenhando papel fundamental na vitória. (HILLIER, 2006).

Ao fim da guerra, o sucesso da Pesquisa Operacional no empreendimento bélico despertou interesse na sua aplicação fora do ambiente militar. A credibilidade ganha foi tão grande que muitos dos especialistas envolvidos nos planejamentos das operações militares puderam dar prosseguimento em suas pesquisas, resultando em avanços importantes. As novas metodologias de abordagens dos problemas se transferiram para as empresas, que se viram confrontadas com problemas de alta complexidade de decisão. (HILLIER, 2006).

Para inúmeras organizações em todo o mundo, a pesquisa operacional teve um impacto impressionante na melhoria de sua eficiência, contribuindo significativamente no aumento da produtividade das economias de diversos países. (HILLIER, 2006). A sua utilização permitiu a avaliação de qualquer decisão, possibilitando a otimização de processos. Dentre exemplos de problemas onde a pesquisa operacional se mostra atrativa, podemos citar: determinação de custos mínimos de produção, maximização de lucros, redução de desperdícios, localização, transporte, rotas, entre diversos outros.

Segundo Taha (2008), as principais fases de implementação da pesquisa operacional na prática incluem:

1. Definição do problema
2. Construção do modelo
3. Solução do modelo
4. Validação do modelo
5. Implementação da solução

A fase 1, envolve a definição do escopo do problema em estudo, identificando as alternativas de decisão, determinando o objetivo do estudo e especificando as limitações sob as quais o sistema modelado funciona. A próxima fase (2), implica na tradução do problema e construção em relações matemáticas do modelo científico, que deve ser escolhido e ajustado com base na definição do problema, podendo utilizar de abordagens heurísticas ou considerar a utilização de simulação. A fase 3 tem como objetivo encontrar a solução para o modelo construído, se baseando na utilização de algoritmos de otimização bem definidos. Um dos aspectos importantes que deve ser considerado nesta fase é a análise de sensibilidade, que busca obter informações adicionais sobre o comportamento da solução ótima. Essa análise é necessária quando não se pode estimar os parâmetros do modelo com precisão. A fase (4) seguinte, verifica se o modelo proposto faz o que diz fazer, se é capaz de

fornecer uma previsão aceitável de seu comportamento. A fase 5, do modelo validado, envolve a tradução dos resultados em instruções operacionais, fornecendo conclusões positivas e inteligíveis.

Taha (2008), aponta que não existe apenas uma única técnica para resolver todos os modelos matemáticos. O tipo e a complexidade do modelo matemático determinarão qual o método de solução a ser utilizado. As técnicas mais usadas na pesquisa operacional são: Teoria das Filas, Teoria dos Grafos, Programação Linear, Programação não Linear, Programação Dinâmica, Teoria dos Jogos, entre outras.

### 2.3 PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA MISTA

Conforme Golbarg e Luna (2005), o campo da programação matemática é enorme, e as técnicas de solução acabam sendo agrupadas em várias sub-áreas como a Programação Linear, em que as variáveis são contínuas apresentando comportamento linear tanto na função objetivo quanto nas restrições. A Programação Não Linear, onde o modelo de otimização apresenta qualquer tipo de não linearidade, entre outras. Mais especificamente, a Programação Linear Inteira, em que uma variável não pode assumir valores contínuos, ficando condicionada a assumir valores discretos (inteiros), implicando em maior complexidade computacional. Hillier (2006) e Taha (2008), apresentam mais outra sub área, a Programação Linear Inteira Mista (PLIM), em que apenas algumas variáveis precisam ser inteiras, envolvem variáveis contínuas e discretas satisfazendo restrições lineares de igualdade e desigualdade.

Arenales et al. (2011), aponta que um problema PLIM, tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 z &= \max cx + dy \\
 \text{(PLIM)} \quad Ax + Dy &\leq b \\
 x &\in R_+^n, y \in Z_+^p
 \end{aligned}$$

tendo como os parâmetros dos problemas representados por **A**, uma matriz  $(m \times n)$ , **D**, uma matriz  $(m \times p)$ , **c**, um vetor  $(l \times n)$ , **d**, um vetor  $(l \times p)$ , e **b**, um vetor  $(m \times l)$ . Sendo **x** e **y** os vetores de variáveis, com dimensões  $(n \times l)$  e  $(p \times l)$ ,

respectivamente.  $R_+^n$  representa o espaço dos vetores com  $n$  componentes reais e  $Z_+^p$  representando o espaço dos vetores com  $p$  componentes inteiras não-negativas.

Quando todas as variáveis são inteiras, tem-se um problema de programação linear inteira. Já quando todas as variáveis assumem valores 0 ou 1, tem-se um problema de programação binária (PB), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} z &= \max cx \\ \text{(PB)} \quad Ax &\leq b \\ x &\in B^n \end{aligned}$$

em que  $B^n$  representa o espaço dos vetores com  $n$  componentes binárias.

## 2.4 PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO DE FACILIDADES

Segundo Pizzolato et al. (2012), os problemas de localização de facilidades estão, desde os primórdios, presentes na vida dos seres humanos. Tendo grande relevância na história humana, desde o homem primitivo, que lutava pela sua sobrevivência percorrendo grandes distâncias à procura de seu alimento. Por esse motivo, tinham que pensar estrategicamente onde localizar suas moradias. E para o homem moderno, que nos tempos atuais, utiliza dos problemas de localização para buscar vantagens econômicas e a ampliação de seu bem-estar.

Drezner et al. (2004, apud Pizzolato et al., 2012), aponta Fermat e Torricelli como os pioneiros no estudo de localização, com seus estudos sobre identificação de pontos no plano possuindo determinadas propriedades, tendo por base a geometria euclidiana. Enquanto que, no âmbito industrial, os estudos que incluíam elementos econômicos decorrentes dos desafios do mundo moderno, temos Weber como principal precursor. Examinando a localização de atividades industriais, Weber relaciona o beneficiamento de matérias primas e a distribuição ao mercado consumidor como pesos de influência para determinar a localização de instalações.

Para Daskin (1995, apud Rosário et al., 2002), os problemas de localização de facilidades têm como objetivo tratar de decisões sobre onde localizar e instalar determinadas facilidades (hospitais, escolas, lojas, indústrias, etc.), levando em consideração atender as necessidades dos clientes de forma a otimizar certos critérios

(lucro, distância, quantidade de chamadas de emergência, etc.). Lorena (2003), afirma que as aplicações e desenvolvimento relacionados a problemas de localização apresentam diferenças de objetivos nos setores privado e público. Nos setores privados, os fatores fundamentais que determinam a localização de instalações são os econômicos, em que o objetivo é maximizar os lucros ou minimizar os custos. Suas aplicações envolvem, no geral, fábricas, depósitos, lojas de franquias, entre outros. Já no setor público, o objetivo é maximizar o benefício oferecido à sociedade, fatores relacionados ao bem-estar dos usuários são primordiais.

De maneira geral, o problema de localização de facilidades envolve escolher onde instalar um determinado número de facilidades (por exemplo, escolas), para atender a um conjunto de clientes (por exemplo, alunos) distribuídos em um espaço geográfico e determinar a alocação dos clientes entre as facilidades. (Lorena, 2003). Garcia (2015) diz que a escolha de onde instalar facilidades envolve muito planejamento e recursos, pois se trata de uma atividade estratégica para as organizações. Um mau planejamento sobre a localização de uma facilidade poderá gerar muitos prejuízos para a organização. Por exemplo, unidades de saúde precisam estar bem localizadas para que atendam da melhor forma possível os usuários, sem que estes precisem percorrer longas distâncias. A má localização de uma escola, gerará prejuízos financeiros e pode dificultar a acessibilidade aos locais de ensino. Sabe-se que uma boa localização garante a redução de custos logísticos e garante um atendimento mais satisfatório para o cliente.

#### **2.4.1 Problema das $p$ -Medianas**

O problema de localização de  $p$ -medianas é considerado como um problema clássico na literatura. Segundo Reese (2006, apud Garcia, 2015), o problema das  $p$ -Medianas teve início no século XVII, com Fermat, em que sugeriu encontrar um ponto (mediana) no plano, dados os vértices de um triângulo, de modo que a soma das distâncias entre os vértices e a mediana fosse a menor possível. Já em 1929, Weber iniciava os estudos envolvendo a aplicação de medianas nos problemas de localização. Ele desejava minimizar a distância de uma fábrica aos consumidores e fornecedores de matéria-prima. Assim, inspirando-se no trabalho de Fermat, atribuiu pesos nos vértices do triângulo para representar os pedidos dos clientes com o

objetivo de encontrar a mediana que melhor atendesse a demanda dos consumidores. Tal trabalho deu início a metodologia das  $p$ -medianas.

Nos anos 60, Hakimi (1965), a fim de determinar medianas num grafo, mostrou que nem todas as medianas, que representam soluções ótimas, encontram-se nos vértices, porém, há sempre um conjunto de  $p$  vértices que minimizam a função objetivo. De modo geral, o problema das  $p$ -medianas tem como objetivo minimizar a soma de todas as distâncias a serem percorridas de cada ponto de demanda (cliente) até a facilidade (mediana) mais próxima. Busca determinar os melhores pontos de localização para instalar  $p$  facilidades. (Rosário, 2002). Para maiores detalhes acerca do problema, o leitor interessado pode consultar Laporte, Nickel e Gama, Capítulo 2, 2020).

Rosário (2002) verificou a necessidade da população sobre a implantação de unidades de Saúde 24 horas considerando o crescimento populacional, para isso, apresentou uma proposta de solução utilizando o problema das  $p$ -medianas para a localização dessas unidades. Com o objetivo de minimizar a distância média do deslocamento dos usuários, desde a residência até a unidade mais próxima, foi feita a distribuição espacial das unidades de saúde 24 horas. A metodologia aplicada neste estudo compreende algoritmos genéticos, o algoritmo de Teitz e Bart, e os diagramas de Voronoi. Assim que se sabe o número de unidades que devem ser implantadas, com as técnicas aplicadas ao problema das  $p$ -medianas, as melhores localizações podem ser encontradas para a implantação das Unidades de Saúde 24 horas.

Corrêa (2000) propôs um algoritmo para o problema das  $p$ -medianas buscando otimizar e designar os candidatos ao vestibular da Universidade Federal do Paraná, para os locais de prova mais próximos de suas residências.

#### **2.4.2 Problema de $p$ -Centros**

O problema de  $p$ -centros, também conhecido como '*minimax*', envolve localizar  $p$  facilidades e designar clientes a essas facilidades, de modo que se minimize a distância máxima entre um ponto de facilidade e um ponto de demanda. Este tipo de modelo é utilizado quando se precisa atender toda a demanda, tendo um orçamento limitado para a construção de instalações. (JUNIOR E SANTOS, 2010). Arenales et al. (2011) dizem que quando uma localização de uma facilidade está limitada ao nó da rede de clientes, temos o problema  $p$ -centros-nós. Por outro lado, o problema de

p-centros-absolutos permite que os nós de facilidades estejam localizados em qualquer lugar da rede que ligam os nós dos clientes. São modelos aplicados, principalmente, a serviços emergenciais. Para maiores detalhes acerca do problema, o leitor interessado pode consultar Laporte, Nickel e Gama, Capítulo 3, 2020).

Junior e Santos (2010), apresentaram um meio de suporte à decisão para determinar, através do problema de p-centros, a localização ótima de instalações e o número mínimo de facilidades a serem instaladas para combater o caso de epidemia de dengue, ocorrida em Salvador (BA).

## 2.5 FÓRMULA DE HAVERSINE

A fórmula de haversine é uma equação usada na navegação que calcula a distância mais curta entre dois pontos em uma esfera a partir de suas latitude e longitude. O haversine pode ser expresso pela função trigonométrica:

$$hav(\theta) = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Sendo um caso especial de uma fórmula mais geral de trigonometria esférica, a lei dos haversines, que relaciona os lados e ângulos de um triângulo contido em uma superfície esférica. O nome haversine foi criado em 1835 pelo astrônomo e matemático James Inman. (WIKIPÉDIA, 2021).

### **3 METODOLOGIA**

Nesta seção, encontra-se a descrição da metodologia utilizada no presente trabalho. Desde a identificação do problema até a análise de resultados, a fim de atender os objetivos estabelecidos.

#### **3.1 CLASSIFICAÇÃO DA PESQUISA**

A pesquisa pode ser classificada com caráter descritivo, exploratório e aplicado em relação aos seus objetivos. A pesquisa descritiva, segundo Gil (2002), busca a descrição das características de determinada população, ou o estabelecimento de relações entre variáveis. É a etapa inicial no processo de estudo de dados, auxiliando na organização e descrição de aspectos importantes. Faz utilização de técnicas padronizadas de coletas de dados, como observações sistemáticas e questionários, sendo essa uma de suas características mais relevantes. Já a pesquisa exploratória proporciona um melhor entendimento do problema e compreensão dos dados estudados. E a pesquisa aplicada busca a aplicação numa determinada realidade. Quanto à sua forma de abordagem, a pesquisa se classifica como quantitativa e qualitativa, com o intuito de relacionar os dados para a interpretação.

#### **3.2 ETAPAS DA PESQUISA**

Com o objetivo de organizar as etapas do presente trabalho, foi estruturado um fluxograma de processos, como mostra a Figura 1, composto pelas seguintes atividades:

Figura 1 – Fluxograma Etapas da Metodologia.



Fonte: A Autora (2022).

Inicialmente, foi abordado a identificação e definição do problema. Em seguida, realizou-se uma fundamentação teórica, apresentada na Seção 2, elaborada através da leitura de artigos, livros, TCC, entre outros que tinham assuntos ligados às temáticas que compõem o presente trabalho. Posteriormente, foi feita a modelagem do problema onde foi utilizado o modelo de localização de facilidades  $p$ -medianas e  $p$ -centros, como é detalhada na Seção 4.2. Após esta etapa, foi realizada a coleta de dados, seguida da estruturação e organização dos dados.

A coleta de dados teve apoio da gestão da Organização Escolar da Secretaria de Educação de Caruaru, a qual, disponibilizou as planilhas da Visão Geral de 2022

das unidades escolares do município, para que fossem coletadas as informações pertinentes e relevantes para a compreensão da problemática estudada. Foram coletados os dados acerca da organização atual das escolas do campo, nomes das unidades escolares, panorama das nucleações por distrito, número de alunos matriculados por escola e endereços. Tais dados, encontram-se discriminados na Seção 5.1, nos Quadros 1 e 2, respectivamente.

A fim de se obter as distâncias entre as escolas nucleadas, foram coletados de forma manual, com o auxílio da API (*Application Programming Interface*) Bing Maps da Microsoft, as coordenadas de latitude e longitude dos endereços das unidades escolares deste estudo. As distâncias entre as localidades foram armazenadas em um arquivo Excel, o qual é passado como entrada para o algoritmo usado na implementação do modelo. Os dados “brutos” foram tratados para evitar que ocorressem problemas de decodificação ao se executar o programa. As distâncias foram calculadas utilizando a fórmula de Haversine, que fornece, a partir da latitude e longitude, a distância entre dois pontos de uma esfera. Com os dados estruturados e organizados, foi possível passar para a etapa de desenvolvimento e implementação do modelo. Nesta etapa, foi usado o Pyomo, uma biblioteca de código aberto utilizada para implementar modelos matemáticos aplicando a linguagem Python.

Por fim, realizou-se a análise dos resultados obtidos, comparação com a situação atual e proposta de cenários futuros.

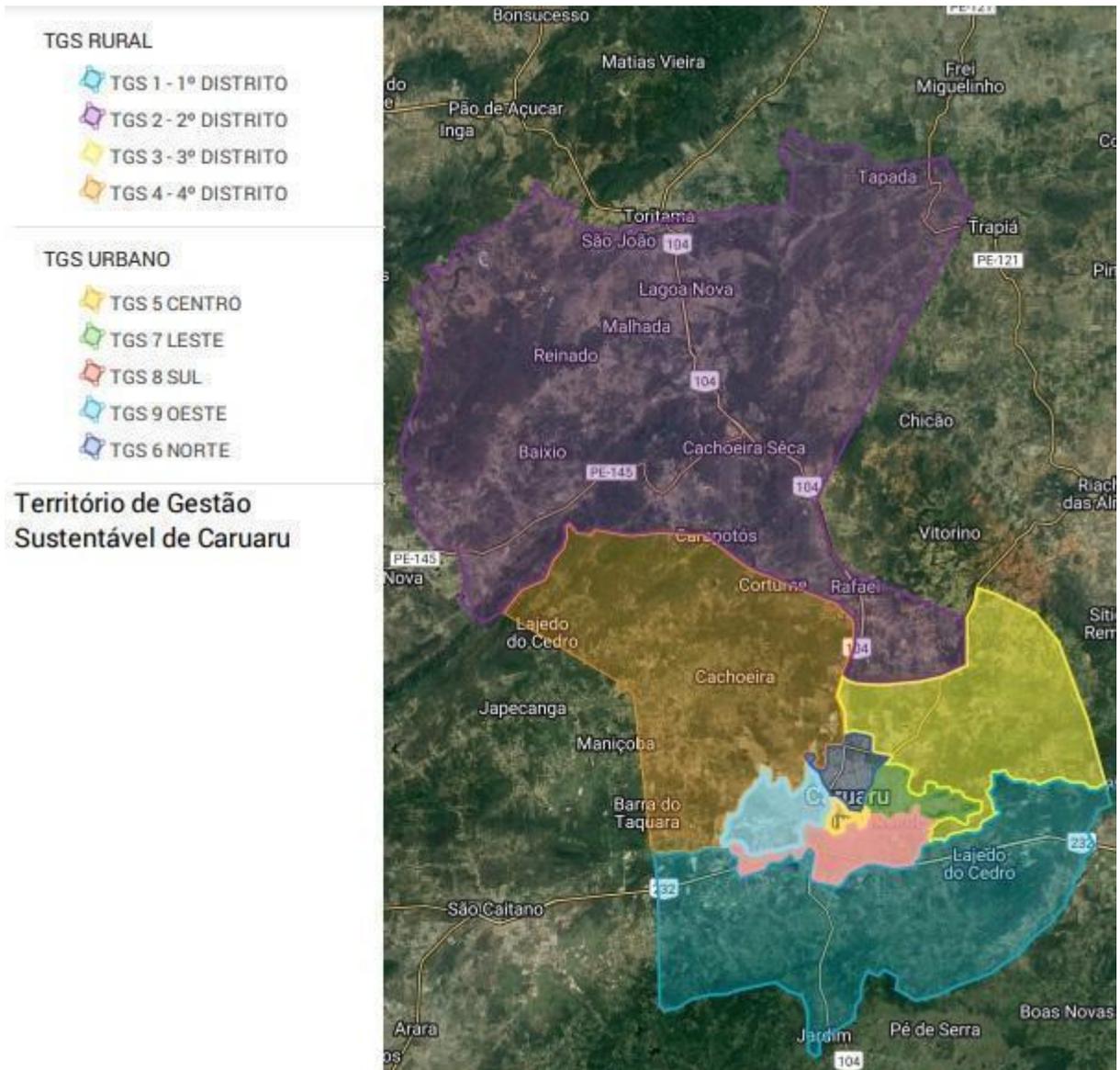
## **4 DESCRIÇÃO E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA**

Nesta seção será feita a apresentação do problema estudado e a proposição de modelos matemáticos para formulá-lo.

### **4.1 DESCRIÇÃO E DEFINIÇÃO DO PROBLEMA**

Situada no agreste pernambucano, a cidade de Caruaru tem seu território demarcado em 9 Territórios de Gestão Sustentáveis (TGS). TGSs são territórios administrativos, que dividem a cidade e que permitem ao governo municipal focar nas características de cada território, proporcionando um atendimento mais eficiente às demandas das diferentes comunidades de um município. Em Caruaru, os TGS de 1 ao 4, também conhecidos por Distritos, compõem a Zona Rural da cidade, enquanto que do 5 ao 9, a Zona Urbana. A Figura 2 mostra a divisão territorial da cidade de Caruaru.

Figura 2 – Territórios de Gestão Sustentável de Caruaru.



Fonte: A Autora (2022).

Tendo um quantitativo expressivo de escolas situadas nos territórios rurais, a Secretaria de Educação de Caruaru tem como uma de suas competências a de garantir o acesso da população à educação básica e manter a rede pública de ensino. Diante disso, a Secretaria adota a descentralização através do conceito de Nucleação Escolar como modelo de gestão organizacional nos distritos da Zona Rural, com a finalidade de melhor atender as condições do professor, do aluno e da comunidade. A nucleação de Caruaru consiste em considerar a realidade rural como ponto de partida e de chegada no processo educativo da criança do campo, sem afastá-la do seu meio. Para isso, as nucleações visam agrupar as unidades escolares que são geograficamente próximas, sendo compostas por escolas pequenas em comunidades

de difícil acesso da zona rural. De acordo com a Instrução Normativa nº 03/2022, que “define os critérios para nuclear as Unidades Escolares pequenas e isoladas da zona rural da Rede Municipal de Ensino de Caruaru”, as nucleações teriam como objetivos a contribuição para melhoria da gestão escolar, a eliminação gradativa das classes multisseriadas, incentivar os alunos a concluir seus estudos (CARUARU, 2002).

Embora um dos objetivos seja a eliminação das classes multisseriadas, estas ainda se fazem muito presentes nas escolas da zona rural da cidade. Isso ocorre quando o número de alunos para formar uma determinada classe seriada é insuficiente, sendo o número mínimo de alunos igual a 20. Assim, alunos de níveis de aprendizado diferentes são alocados em uma única classe. Todavia, por uma questão de escopo, esse aspecto não será considerado neste trabalho, e pode vir a ser explorado em um trabalho futuro.

As nucleações do município são formadas por dois tipos de escolas:

1. **Escolas Núcleo**: para ser considerada uma escola núcleo, é necessário que a quantidade de alunos seja igual ou inferior a 100. Que possua uma estrutura física mais adequada e disponha de um núcleo de gestão que ficará responsável por 2 ou mais unidades nucleadas;
2. **Escolas Nucleadas**: são as unidades escolares compostas por menos de 100 alunos, sendo consideradas de porte muito pequeno e com falta de uma boa estrutura. Estas escolas serão gerenciadas por apenas uma escola núcleo.

As Escolas Nucleadas são alocadas às Escolas Núcleo, preferencialmente, por proximidade, podendo pertencer a um mesmo distrito, ou distritos mais próximos. Entretanto, ao analisar as escolas no mapa, nota-se que algumas unidades, que são de diferentes nucleações, estão muito próximas e poderiam ser alocadas numa mesma nucleação. Em se tratando de quantas escolas podem fazer parte de uma única nucleação, não existem critérios que definem uma quantidade máxima ou mínima. As nucleações são fixas e não mudam ano após ano, sempre possuindo a mesma escola núcleo e nucleadas.

Uma decisão importante durante o processo de nucleação diz respeito à determinação de quais escolas devem ser agrupadas, uma vez que esse processo deve considerar a distância entre as escolas e o número de estudantes que devem

ser atendidos. As escolas que são nucleadas partem, também, da ideia de que não há necessidade de existir um núcleo de gestão para cada escola de pequeno porte, que possua apenas 5 ou 10 alunos. Por esse motivo, e a fim de conter gastos, as escolas pequenas são designadas às nucleações e, nessas nucleações, o núcleo gestor será responsável por mais outras escolas pequenas que foram nucleadas.

Atualmente, o Sistema Municipal de Ensino de Caruaru contempla três modalidades em sua rede, são elas a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e EJA (Educação de Jovens e Adultos). Sendo composto por aproximadamente 147 escolas que estão distribuídas geograficamente entre os 4 distritos da Zona Rural e na Zona Urbana, contemplando mais de 46 mil estudantes. Dentre as escolas da Zona Rural, existem 12 nucleações com 58 escolas nucleadas, 20 escolas independentes e 4 CMEIs (Centros Municipais de Educação Infantil). Um panorama mais detalhado das nucleações atuais do município de Caruaru, objeto deste estudo, será apresentado na Seção 5.1.

O presente trabalho aborda um problema de localização de facilidades e balanceamento do número de alunos e escolas nas nucleações. Para isso, levou em consideração as características do sistema atual e os aspectos relacionados às distâncias entre as escolas, número de alunos e também quais escolas são candidatas a serem consideradas Escolas Núcleo. De forma a encontrar soluções para o problema, foram utilizados modelos de programação matemática para determinar as nucleações escolares.

#### 4.2 MODELOS DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA PARA DETERMINAÇÃO DE NUCLEAÇÕES ESCOLARES NO MUNICÍPIO DE CARUARU

Deseja-se determinar as configurações de nucleação da cidade de Caruaru, definindo quais escolas serão as escolas núcleo (“facilidades” a serem localizadas) e quais escolas serão designadas escolas nucleadas (designadas às escolas núcleo). A seguir são apresentados os modelos matemáticos para resolver o problema de determinação de nucleações. Nesta seção são apresentados dois possíveis modelos para determinação de nucleações: um modelo de p-mediana e um modelo de p-centros. Espera-se que os modelos retornem soluções diferentes seguindo critérios

como a: soma das distâncias (distância total) entre as escolas núcleo e escolas nucleadas e a máxima distância entre escola núcleo e escola nucleada, permitindo ao decisor aceitar ou não as soluções de acordo com algum dos critérios. Abaixo apresentam-se os conjuntos, parâmetros e variáveis de decisão relacionados com ambos os modelos.

### Conjuntos

|                   |   |
|-------------------|---|
| $N$               | Conjunto de escolas que pode ser nucleadas (escolas com até 100 alunos) |
| $N_c \subseteq N$ | Conjuntos das escolas com melhor estrutura e pode ser Escolas Núcleo    |

### Parâmetros

|          |  |
|----------|--|
| $d_{ij}$ | Distância entre as escolas $i \in N_c$ e $j \in N$   |
| $n_i$    | Número de alunos na escola $j \in N$   |
| $p$      | Número de nucleações a serem definidas   |
| $\alpha$ | Parâmetro de ponderação do objetivo de minimização da soma das distâncias entre as escolas núcleo e as escolas nucleadas |
| $\beta$  | Parâmetro de ponderação do objetivo de balanceamento do número de alunos em cada núcleo                                  |
| $\gamma$ | Parâmetro de ponderação do objetivo de balanceamento do número de escolas em cada núcleo                                 |

### Variáveis de Decisão

|          |  |
|----------|--|
| $x_{ij}$ | Variável binária que assume valor 1 se a <b>Escola Nucleada</b> $j \in N$ é alocada à <b>Escola Núcleo</b> $i \in N_c$ |
| $y_i$    | Variável binária que assume valor 1 se a escola $i \in N_c$ é escolhida para ser núcleo                                |
| $r$      | Variável real para controlar a distância máxima que uma escola nucleada deve estar de uma escola núcleo                |
| $w$      | Variável real que controla o número máximo de alunos nucleadas alocadas a uma escola núcleo                            |
| $z$      | Variável real que controla o número máximo de escolas alocados a uma escola núcleo                                     |

### Problema de p-mediana com balanceamento do número de escolas e número de alunos em cada nucleação

$$\min (\alpha * \sum_{i \in N_c} \sum_{j \in N} d_{ij} x_{ij}) + (\beta * w) + (\gamma * z) \quad (1)$$

$$\text{Sujeito à:} \quad \sum_{j \in N} x_{ij} = 1 \quad j \in N \quad (2)$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad i \in N_c, j \in N \quad (3)$$

$$\sum_{i \in N_c} y_i = p \quad (4)$$

$$w \geq \sum_{j \in N} n_j x_{ij} \quad i \in N_c \quad (5)$$

$$z \geq \sum_{j \in N} x_{ij} \quad i \in N_c \quad (6)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i \in N_c, j \in N \quad (7)$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad i \in N_c \quad (8)$$

$$w, z \geq 0 \quad (9)$$

Este problema envolve a localização de  $p$  facilidades (escolas núcleo) e a designação de Escolas Nucleadas a Escolas Núcleo, de modo a minimizar a soma das distâncias de nucleadas e núcleos. Para isso, tem-se a Função Objetivo (1), que visa minimizar, conforme os parâmetros de ponderação, a soma das distâncias entre as escolas núcleo e as escolas nucleadas, o balanceamento do número de alunos de cada núcleo e o balanceamento da quantidade de escolas em cada núcleo. As Restrições (2) garantem que todas as escolas devam ser alocadas a apenas uma escola núcleo. As Restrições (3) asseguram que cada escola nucleada só será designada às escolas que foram escolhidas como escolas núcleo. A Restrição (4) limita a quantidade de escolas núcleo, garantindo que  $p$  escolas sejam escolhidas para atuarem como escolas núcleo. O valor de  $p$  é determinado à priori pela Secretaria de Educação. As Restrições (5) visam balancear o número de alunos alocados a cada núcleo. As Restrições (6) visam balancear o número de escolas alocadas a cada núcleo. Por fim, as Restrições (7) - (9), definem o domínio das variáveis no modelo.

### **Problema de p-centros com balanceamento do número de escolas e número de alunos em cada nucleação**

$$\min (\alpha * r) + (\beta * w) + (\gamma * z) \quad (10)$$

$$r \geq \sum_{i \in N_c} d_{ij} x_{ij} \quad j \in N \quad (11)$$

$$(2) - (9)$$

$$r \geq 0 \tag{12}$$

Neste modelo, as Restrições (2)-(9) possuem o mesmo significado apresentado anteriormente. Por sua vez, a Função Objetivo (10), visa minimizar, conforme os parâmetros de ponderação, a máxima distância de uma escola nucleada à escola núcleo, o balanceamento do número de alunos em cada núcleo e o balanceamento da quantidade de escolas em cada núcleo. As Restrições (11) visam minimizar a máxima distância de uma escola nucleada à escola núcleo a qual ela está alocada. A Restrição (12) define o domínio da variável.

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção serão apresentados resultados e análises relacionados com o processo de aplicação dos modelos propostos no âmbito da determinação de nucleações escolares na cidade de Caruaru.

### 5.1 CENÁRIO ATUAL

Para a realização do trabalho, a Organização Escolar da SEDUC, disponibilizou todos os dados pertinentes para o desenvolvimento da pesquisa. Para compreensão do sistema atual foram coletados os dados através da planilha Visão Geral 2022, que contém todas as informações das escolas. Atualmente, a rede de ensino de Caruaru contempla 12 de nucleações, com 58 escolas nucleadas, distribuídas entre os 4 Distritos do município. O Quadro 1, no Apêndice A, apresenta o panorama geral das nucleações atuais, assim como o número de alunos matriculados nas unidades escolares.

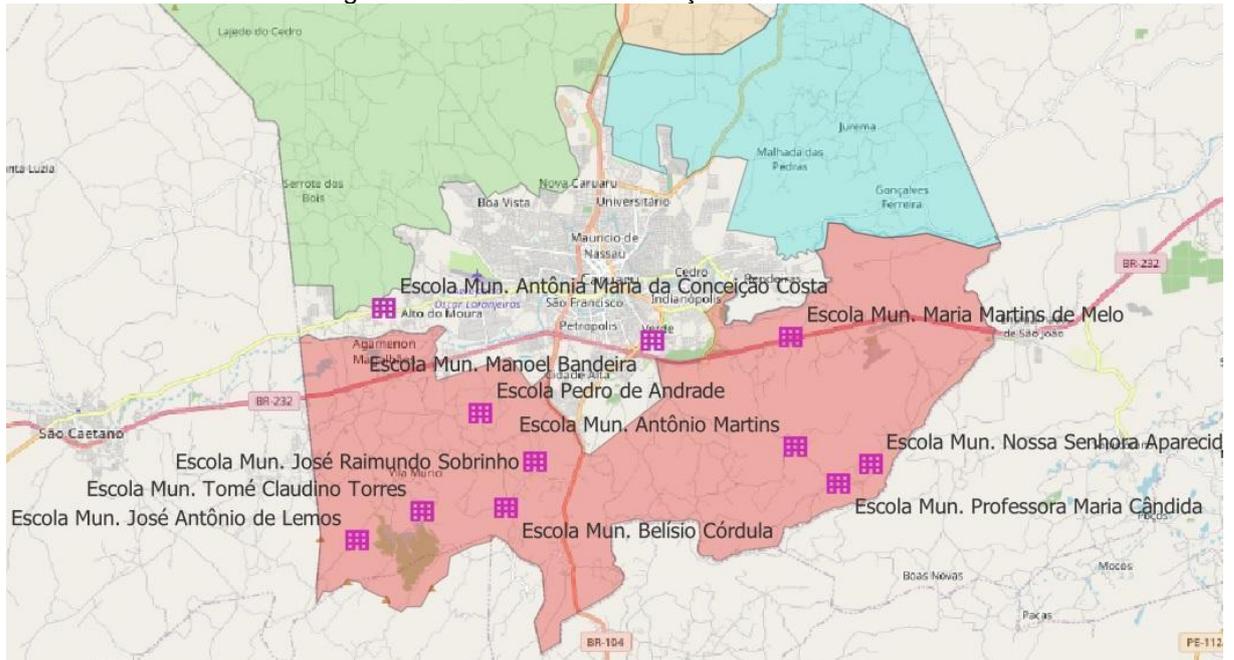
Uma das características das escolas das nucleações, é que, conforme apresentado na Seção 4.1, as mesmas devem ser compostas por até 100 alunos. Analisando as escolas do Quadro 1, percebe-se que duas escolas não atendem esse critério, são elas: Escola Municipal João Luiz Torres e Escola Municipal Dr. Oscar Barreto, com 137 e 127 alunos, respectivamente. Pode-se assumir que por não haver mudanças nas nucleações após os anos, ambas escolas podem ter se tornado mais estruturadas com isso mais alunos foram matriculados e as mesmas ainda continuaram pertencendo às suas nucleações. Outro ponto a ser discutido é em relação às Escolas Núcleo, visto que estas para serem consideradas núcleo, precisam ser escolas estruturalmente maiores, o que é observado não acontecer com a Escola Municipal Manoel Valdevino, já que a escola é de pequeno porte, possuindo apenas 10 alunos, que é uma quantidade consideravelmente inferior em relação às demais Escolas Núcleo.

Para compreender a alocação geográfica das escolas em suas nucleações, foram coletados os endereços de todas as 58 unidades, que serão apresentados no Quadro 2, no Apêndice A.

Para melhor visualização das nucleações, um mapa no Qgis (um software de produção de mapas e geoprocessamento, de código aberto de Sistema de Informação

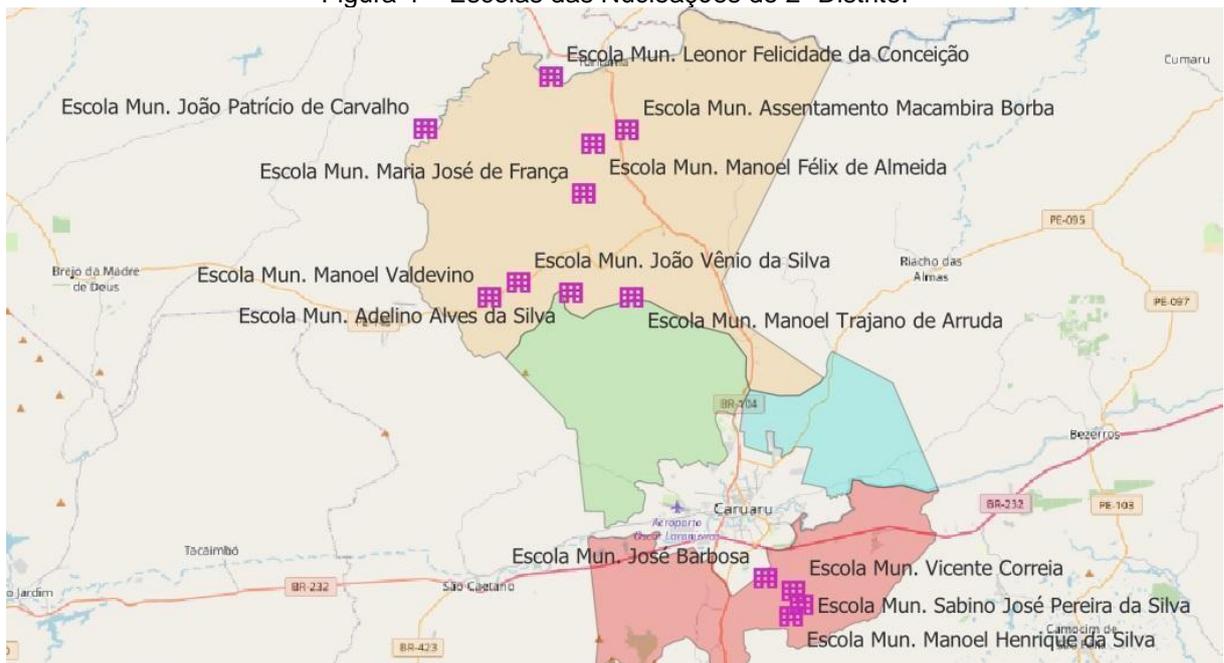
Geográfica - SIG -, disponível para download em <https://www.qgis.org/en/site/>, e que permite a visualização, análise e edição de dados geoespaciais), utilizado pela SEDUC foi disponibilizado. Assim, foi possível analisar visualmente a posição geográfica das nucleações individualmente e por distritos. As Figuras 3-6, mostram as nucleações presentes nos 1º, 2º, 3º e 4º Distritos.

Figura 3 – Escolas das Nucleações do 1º Distrito.



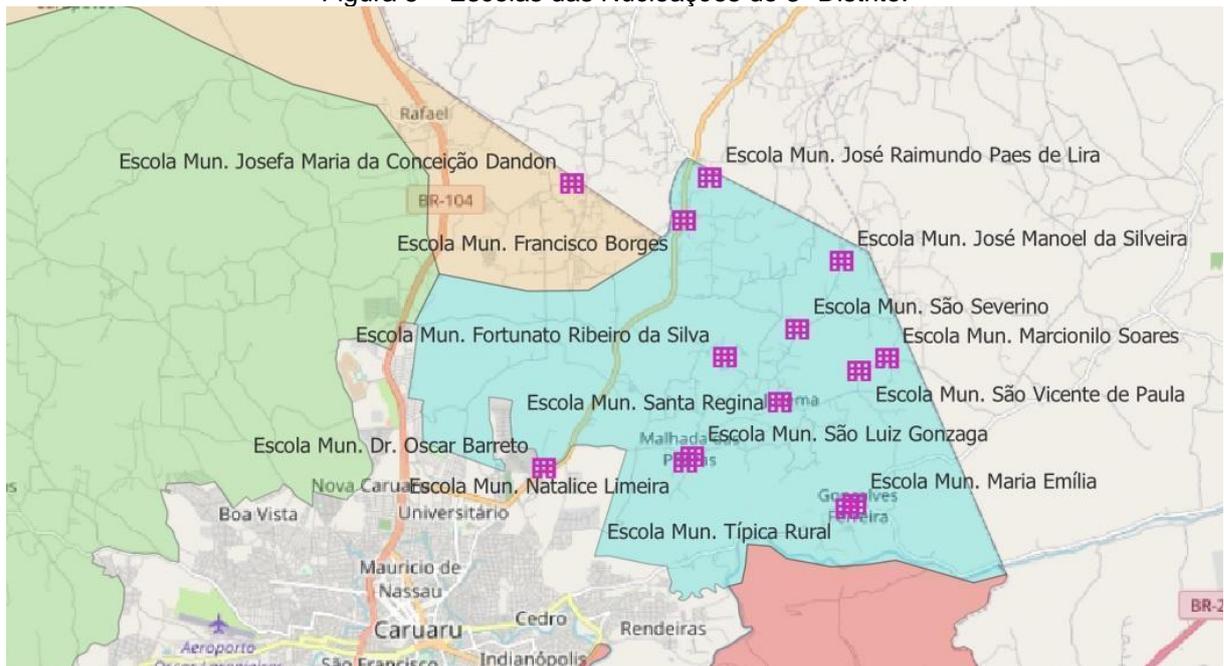
Fonte: Mapa Qgis da SEDUC (2022).

Figura 4 – Escolas das Nucleações do 2º Distrito.



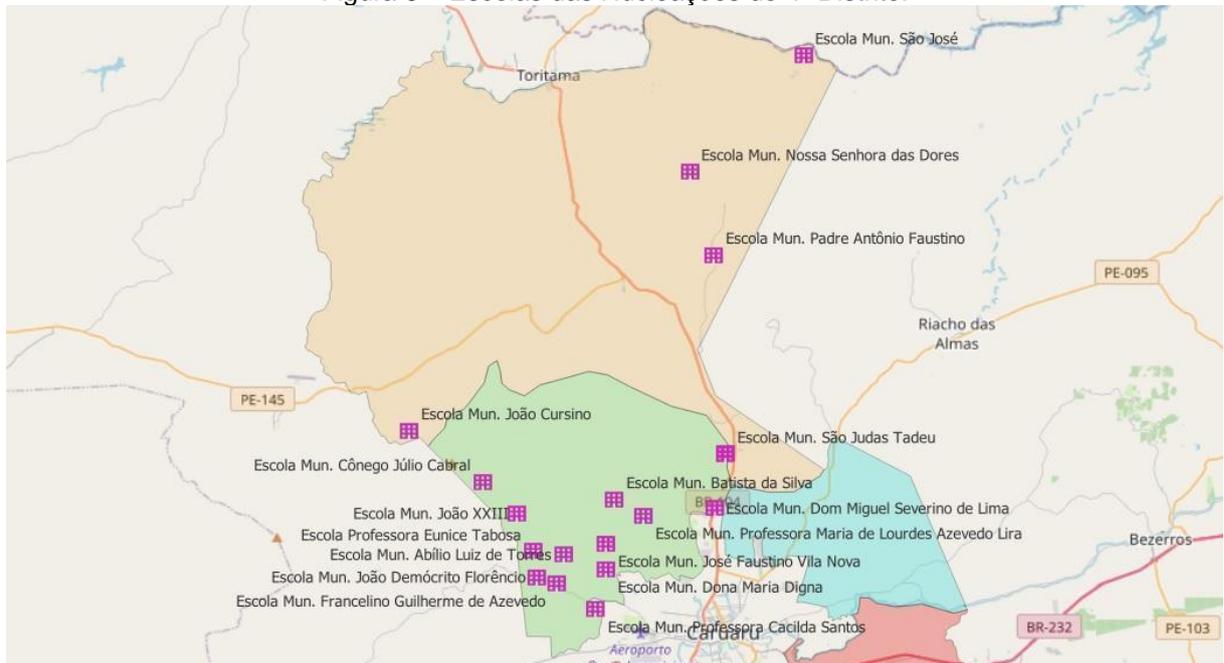
Fonte: Mapa Qgis da SEDUC (2022).

Figura 5 – Escolas das Nucleações do 3º Distrito.



Fonte: Mapa Qgis da SEDUC (2022).

Figura 6 – Escolas das Nucleações do 4º Distrito.



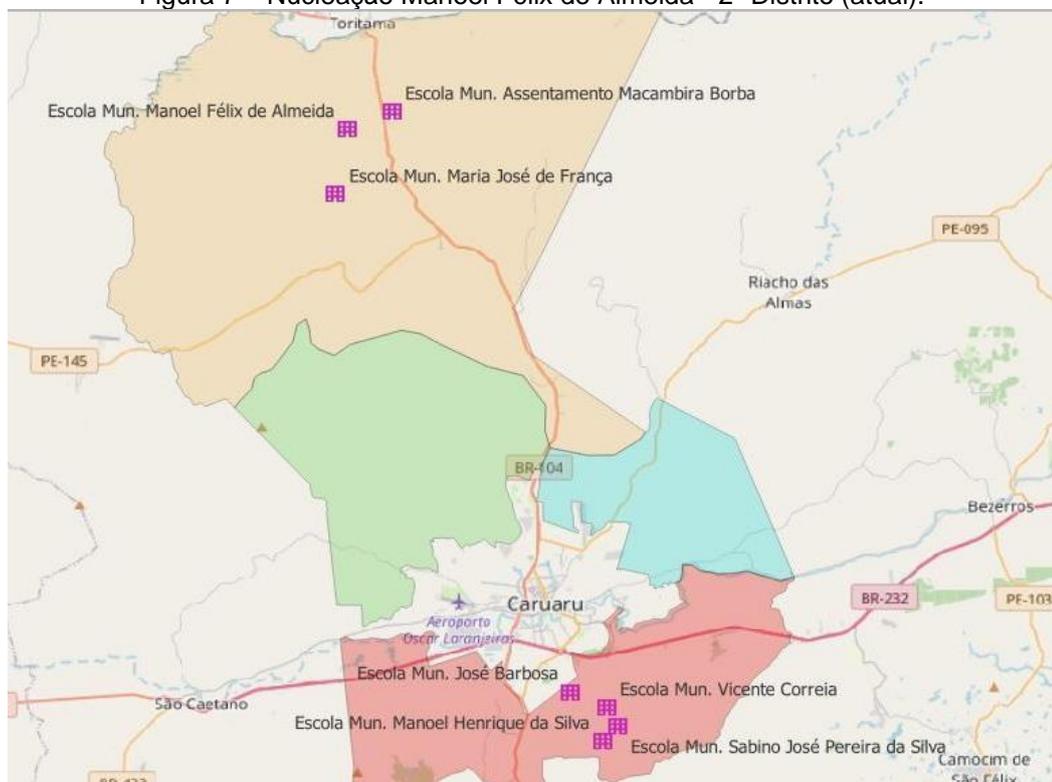
Fonte: Mapa Qgis da SEDUC (2022).

A partir das Figuras 4 e 6, nota-se que algumas escolas se encontram bem distantes das demais. Esta distância, obriga ao núcleo gestor responsável pela nucleação, percorrer um longo caminho para supervisionar todas as suas escolas, e isto, também dificulta o processo de gerenciamento das unidades, já que o gestor terá que lidar com diferentes questões culturais e sociais de cada região para elaborar os

Planos Político Pedagógicos. As escolas precisam de um Plano Político Pedagógico que descreva como pretendem ensinar seus conteúdos de acordo com o clima cultural, social e econômico que as cerca. Esse plano deve ser flexível e construído de acordo com as especificidades de cada escola, para atender às necessidades intrínsecas de cada corpo discente — sem perder o contato com os eventos atuais.

A Figura 7, mostra um exemplo de nucleação, a Nucleação Manoel Félix de Almeida, pertencente ao 2º Distrito, que é composta por escolas que são geograficamente muito distantes.

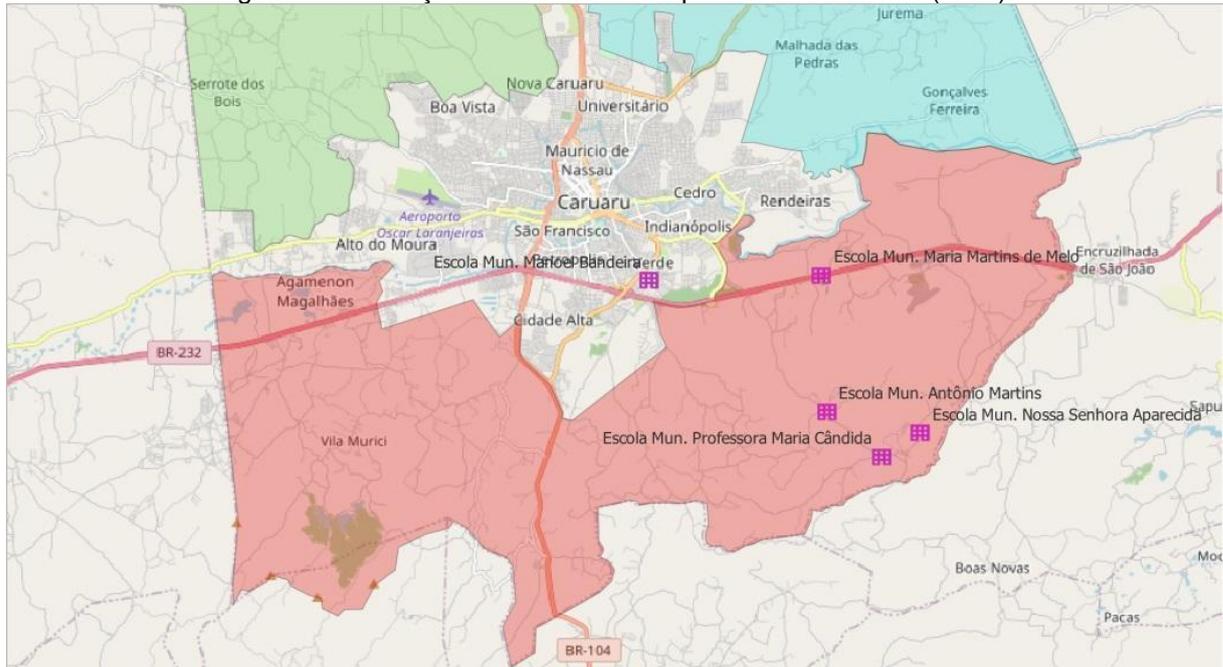
Figura 7 – Nucleação Manoel Félix de Almeida - 2º Distrito (atual).



Fonte: Mapa Qgis da SEDUC (2022).

Observando a Figura 7, as escolas presentes no 1º Distrito (setor em vermelho), poderiam ser alocadas a outra nucleação do mesmo Distrito, como por exemplo a Nucleação Nossa Senhora Aparecida, que é composta por escolas mais próximas destas observadas acima. Como mostra a Figura 8.

Figura 8 - Nucleação Nossa Senhora Aparecida - 1º Distrito (atual).



Fonte: Mapa Qgis da SEDUC (2022).

A fim de resolver estes problemas de localização e outros, e buscando balancear o número de alunos e escolas nas nucleações, foram desenvolvidos modelos de programação matemática.

## 5.2 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Os modelos apresentados na Seção 4.2.1, foram implementados em Python utilizando a biblioteca Pyomo. Os experimentos computacionais foram realizados em um computador Lenovo Ideapad S145, com processador Intel Core i5-8265U de 1.6 GHz com 8.0 GB de memória RAM, executando um sistema operacional Windows 10 de 64 bits. O solver utilizado para resolução do problema foi o GLPK 4.65.

## 5.3 APLICAÇÃO DO MODELO

Inicialmente, com o intuito de organização, as 58 escolas foram enumeradas, conforme posição vetorial, ou seja, enumeradas de 0 a 57, conforme mostra o Quadro 3, no Apêndice A. Em seguida, foram analisados os dados do Quadro 2, Seção 5.1,

referentes aos endereços das escolas. Para se obter as distâncias entre as unidades escolares, primeiramente foi preciso coletar de forma manual, com o auxílio do API Bing Maps da Microsoft, as coordenadas de latitude e longitude em graus e minutos decimais, também apresentados no Quadro 3. Posteriormente, com os pontos definidos, foi utilizada a fórmula de Haversine, que calcula, a partir da latitude e longitude, a distância entre dois pontos de uma esfera. Os dados “brutos” foram tratados para evitar problemas de decodificação no programa, e armazenados em um arquivo Excel que será passado como base de entrada para a implementação do algoritmo do modelo de programação.

Por último, para a implementação do modelo matemático, foi preciso definir quais escolas poderiam ser candidatas a serem Escolas Núcleo. Para isso, a partir do critério que define que uma Escola Núcleo precisa ser bem estruturada, partiu-se do pressuposto que essas escolas são aquelas que possuem uma quantidade maior de alunos matriculados. Sendo assim, foram selecionadas 20 escolas candidatas, dentre as quais estão as já atuais Escolas Núcleo, com exceção da Escola Municipal Manoel Valdevino, já que a mesma possui apenas 10 alunos matriculados, resultando um total de 11 escolas, e mais 9 escolas potenciais.

O Quadro 4 a seguir, traz detalhadamente as candidatas a serem escolhidas como Escola Núcleo pelo modelo matemático.

Quadro 4 – Escolas Candidatas a serem Escola Núcleo.

| <b>Numeração da Escola</b> | <b>Escolas Candidatas</b>         | <b>Número de alunos</b> |
|----------------------------|-----------------------------------|-------------------------|
| 3                          | EM João Luiz Torres               | 137                     |
| 8                          | EM Nossa Senhora Aparecida        | 41                      |
| 9                          | EM Pedro de Andrade               | 52                      |
| 11                         | EM Tomé Claudino Torres           | 70                      |
| 18                         | EM Leonor Felicidade da Conceição | 51                      |
| 19                         | EM Manoel Félix de Almeida        | 79                      |
| 23                         | EM Maria José de França           | 69                      |
| 26                         | EM Dr Oscar Barreto               | 127                     |
| 27                         | EM Fortunato Ribeiro da Silva     | 73                      |

|    |                                |    |
|----|--------------------------------|----|
| 28 | EM Francisco Borges            | 94 |
| 29 | EM José Manoel da Silveira     | 65 |
| 33 | EM Natalice Limeira            | 59 |
| 35 | EM Santa Regina                | 64 |
| 36 | EM São Luiz de Gonzaga         | 61 |
| 40 | EM Abílio Luís de Torres       | 62 |
| 43 | EM Dom Miguel Severino de Lima | 91 |
| 44 | EM Dona Maria Digna            | 78 |
| 45 | EM Francelino Guilherme        | 66 |
| 53 | EM Professora Cacilda Santos   | 66 |
| 57 | EM São Judas Tadeu             | 64 |

Fonte: A Autora (2022).

Após reunir todos os dados necessários, pode-se então aplicar no modelo matemático utilizando a linguagem Python. A representação da implementação dos modelos, para ambos os modelos matemáticos, é apresentada no Apêndice B.

Na Seção 5.3.1 são apresentadas análises através de diferentes cenários, a fim de testar e compreender o impacto que o número de núcleos pode ter sobre as soluções obtidas, podendo interferir na estrutura das soluções. Para a realização dos cenários, foram levados em consideração a quantidade de nucleações a serem formadas e os parâmetros de ponderação da função objetivo: alfa, beta e gama. Foram testadas as seguintes combinações: para cada quantidade de nucleações escolhidas foram variados os parâmetros  $\alpha, \beta, \gamma$  (alfa, beta, gama) pelos valores: (1, 1, 1); (1, 0.5, 0.5); (0.5, 1, 0.5), (0.5, 0.5, 1).

### 5.3.1 Cenários para o Modelo $p$ -Medianas e $p$ -Centros

Após a implementação dos modelos de  $p$ -medianas e o modelo de  $p$ -centros terem sido realizadas, percebeu-se que ambos retornaram os mesmos resultados quanto às configurações de nucleações. Assume-se que esta ocorrência se deve ao fato de que ambos os modelos possuem objetivos muito semelhantes. Desse modo, os resultados obtidos dos cenários a seguir representam os dois modelos.

O primeiro cenário abordado no trabalho será para o número de nucleações igual a 8 ( $p = 8$ ), e variações dos parâmetros da função objetivo  $\alpha, \beta, \gamma$ . A Tabela 1, mostra os resultados obtidos com a implementação do modelo matemático para o cenário  $p\_nucleacoes = 8; \alpha = 1, \beta = 1$  e  $\gamma = 1$ . Os resultados obtidos pelas demais variações dos parâmetros em: (1, 0.5, 0.5); (0.5, 1, 0.5), (0.5, 0.5, 1), retornaram as mesmas distribuições entre as nucleações. Estes resultados não indicam que os diferentes objetivos não impactam na estrutura das soluções. Seria necessária a realização de outros experimentos para consideração de diferentes conjuntos de pesos. Portanto, por uma questão de concisão, serão apresentadas as soluções referentes a apenas uma variação de parâmetros.

Tabela 1 – Configuração das nucleações para  $p = 8$ .

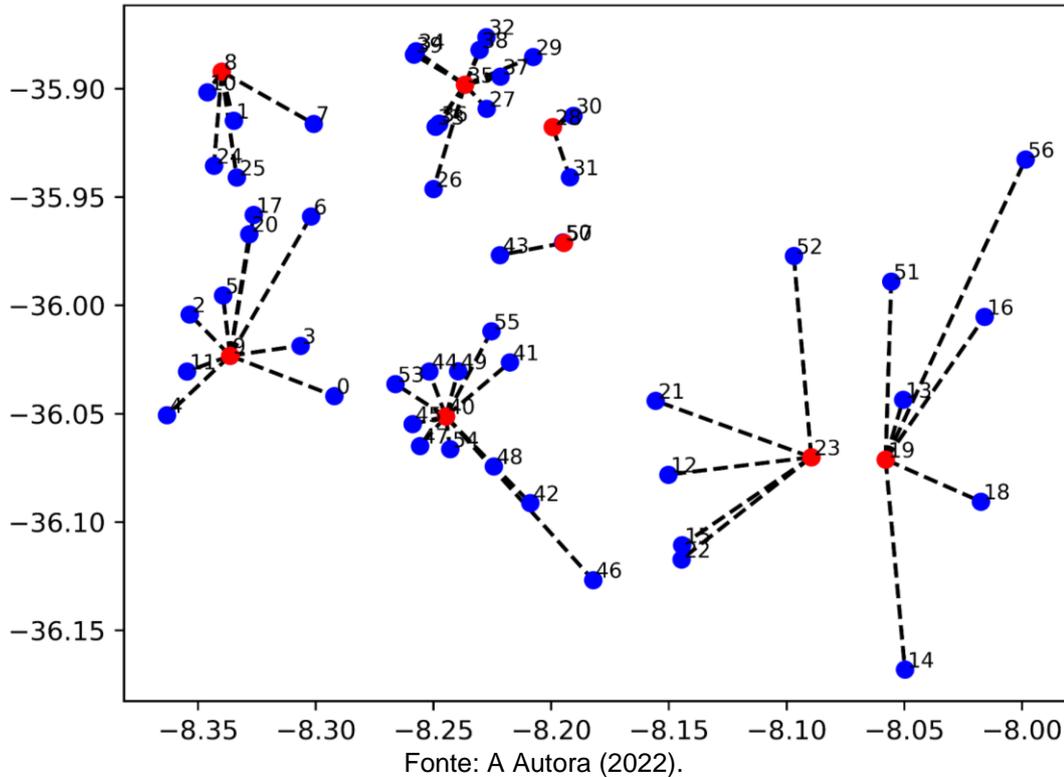
| <b>Configuração das nucleações para <math>p = 8</math></b> |              |              |               |  |                   |                            |
|--|--------------|--------------|---------------|--|-------------------|----------------------------|
| <b>alpha</b>   | <b>betha</b> | <b>gamma</b> | <b>Núcleo</b> | <b>Nucleadas</b>                           | <b>Nº Escolas</b> | <b>Nº Número de alunos</b> |
| 1  | 1            | 1            | <b>8</b>      | 1, 7, 10, 24, 25                           | 6                 | 144                        |
|  |              |              | <b>9</b>      | 0, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 17, 20               | 10                | 422                        |
|  |              |              | <b>19</b>     | 13, 14, 16, 18, 51, 56                     | 7                 | 326                        |
|  |              |              | <b>23</b>     | 12, 15, 21, 22, 52                         | 6                 | 180                        |
|  |              |              | <b>28</b>     | 30, 31                                     | 3                 | 173                        |
|  |              |              | <b>35</b>     | 26, 27, 29, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39     | 11                | 634                        |
|  |              |              | <b>40</b>     | 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 53, 54, 55 | 12                | 431                        |
|  |              |              | <b>57</b>     | 43, 50                                     | 3                 | 160                        |

Fonte: A Autora (2022).

Analisando as nucleações formadas por este cenário, nota-se que não aconteceu um balanceamento eficaz para o número de alunos de uma nucleação, visto que tem nucleações com 634 alunos e outras com apenas 144 alunos. Como também, não houve um balanceamento satisfatório para as quantidades de escolas de uma nucleação, já que resultou em nucleações com muitas escolas nucleadas, chegando até 12 escolas e outras com apenas 3 escolas. Esse problema poderia ter sido corrigido atribuindo-se um peso mais elevado aos objetivos relacionados com o balanceamento do número de escolas e alunos. Para que pudessem ficar ilustradas as nucleações formadas pelos resultados do cenário acima, foi plotado um gráfico onde os pontos vermelhos representam as Escolas Núcleo e os pontos azuis

representam as Escolas Nucleadas ligadas a suas respectivas Escola Núcleo, como mostra a Figura 9.

Figura 9 – Representação gráfica do cenário para  $p = 8$ .



O segundo cenário será para o número de nucleações igual a 10 ( $p = 10$ ), e as mesmas variações para os parâmetros da função objetivo: alpha, beta e gama. A Tabela 2, mostra os resultados obtidos com a implementação do modelo matemático para o cenário  $p_{nucleacoes} = 10$ ;  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$  e  $\gamma = 1$ . Semelhantemente ao que aconteceu para o cenário com 8 nucleações, os resultados obtidos pelas demais variações dos parâmetros em: (1, 0.5, 0.5); (0.5, 1, 0.5), (0.5, 0.5, 1), retornaram as mesmas distribuições entre as nucleações.

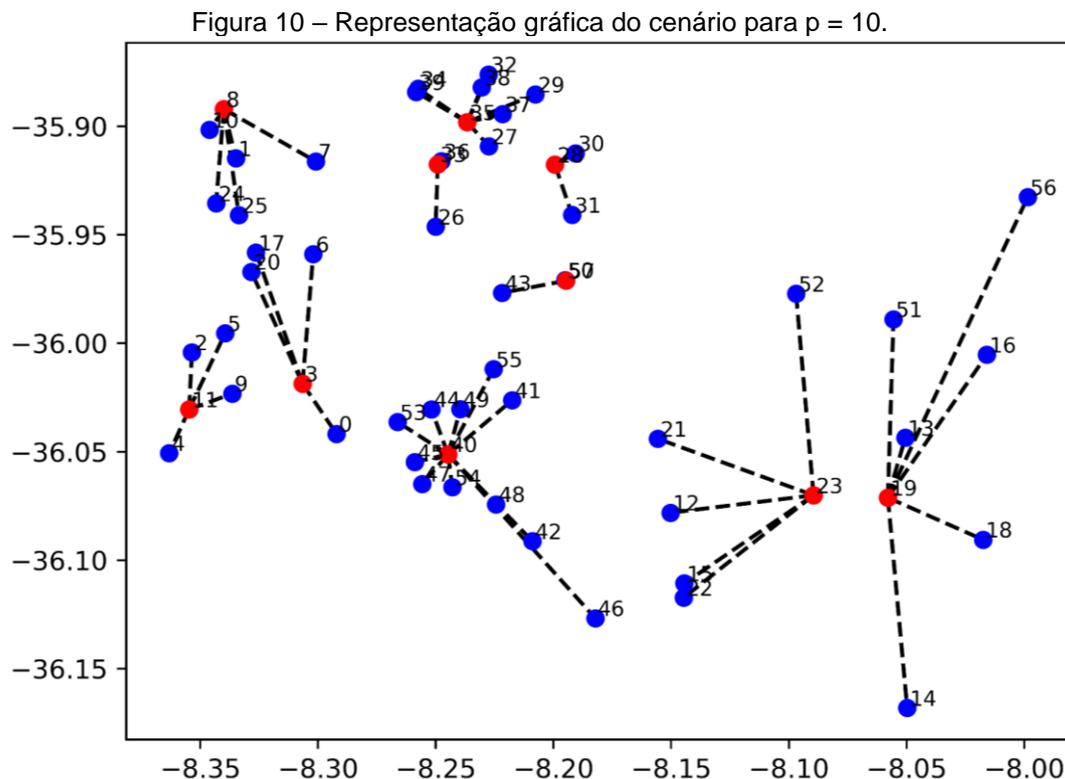
Tabela 2 – Configuração das nucleações para  $p = 10$ .

| Configuração das nucleações para $p = 10$ |       |       |        |                        |            |                     |
|---|-------|-------|--------|------------------------|------------|---------------------|
| alpha                                     | betha | gamma | Núcleo | Nucleadas              | Nº Escolas | Nº Número de alunos |
| 1   | 1     | 1     | 3      | 0, 6, 17, 20           | 5          | 246                 |
|   |       |       | 8      | 1, 7, 10, 24, 25       | 6          | 144                 |
|   |       |       | 11     | 2, 4, 5, 9             | 5          | 176                 |
|   |       |       | 19     | 13, 14, 16, 18, 51, 56 | 7          | 326                 |
|   |       |       | 23     | 12, 15, 21, 22, 52     | 6          | 180                 |
|   |       |       | 28     | 30, 31                 | 3          | 173                 |

|  |  |           |   |    |     |
|--|--|-----------|---|----|-----|
|  |  | <b>33</b> | 26, 36  | 3  | 247 |
|  |  | <b>35</b> | 27, 29, 32, 34, 37, 38, 39                    | 8  | 387 |
|  |  | <b>40</b> | 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48,<br>49, 53, 54, 55 | 12 | 431 |
|  |  | <b>57</b> | 43, 50  | 3  | 160 |

Fonte: A Autora (2022).

Neste segundo cenário já é possível notar uma maior distribuição das escolas entre as nucleações formadas em relação ao primeiro cenário. Entretanto ainda é possível encontrar uma nucleação com valor divergente comparada às demais, com 12 escolas. Consequentemente, também houve um maior balanceamento do número de alunos nas nucleações, tendo a maior quantidade de matriculados igual a 431 e a menor 144 alunos. Para que pudessem ficar ilustradas as nucleações formadas pelos resultados do cenário acima, foi plotado um gráfico onde os pontos vermelhos representam as Escolas Núcleo e os pontos azuis representam as Escolas Nucleadas ligadas a suas respectivas Escola Núcleo, como mostra a Figura 10.



Fonte: A Autora (2022).

Para o terceiro cenário o número de nucleações será igual a 12 ( $p = 12$ ), e serão usadas as mesmas variações para os parâmetros alfa, beta e gama. A Tabela

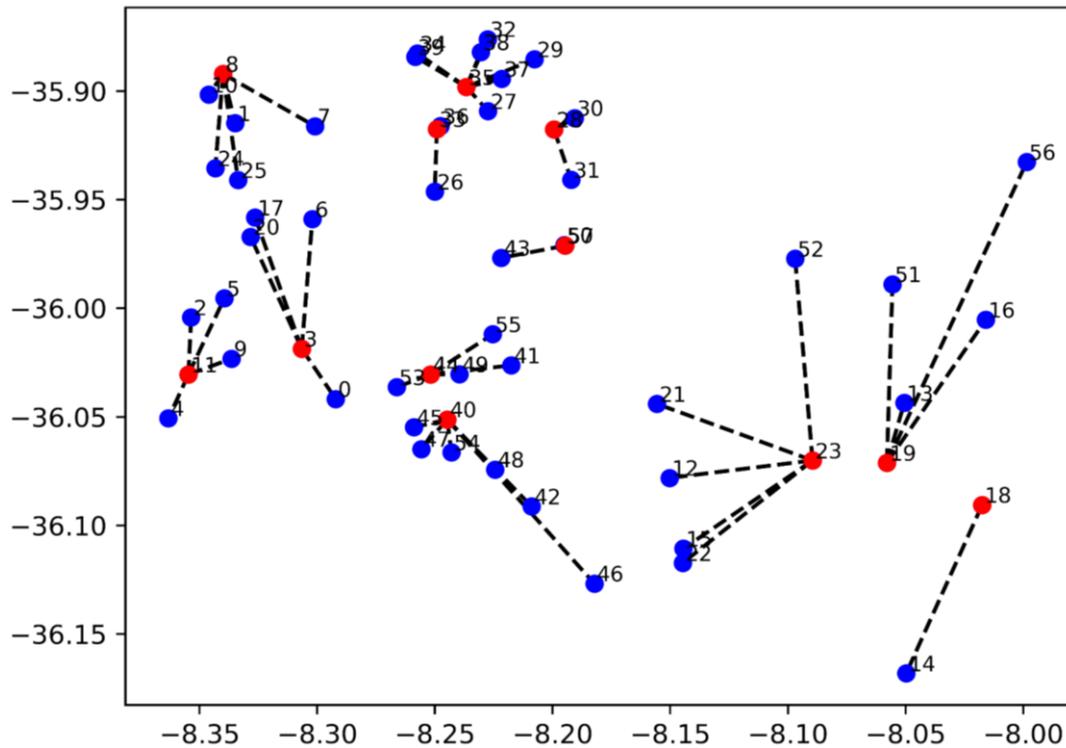
3, mostra os resultados obtidos com a implementação do modelo matemático para o cenário  $p\_nucleacoes = 12$ ;  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$  e  $\gamma = 1$ . Mais uma vez, as diferentes variações dos parâmetros em: (1, 0.5, 0.5); (0.5, 1, 0.5), (0.5, 0.5, 1), levaram às mesmas distribuições entre as nucleações.

Tabela 3 – Configuração das nucleações para  $p = 12$ .

| <b>Configuração das nucleações para <math>p = 12</math></b> |              |              |               |                            |                   |                            |
|---|--------------|--------------|---------------|----------------------------|-------------------|----------------------------|
| <b>alpha</b>  | <b>betha</b> | <b>gamma</b> | <b>Núcleo</b> | <b>Nucleadas</b>           | <b>Nº Escolas</b> | <b>Nº Número de alunos</b> |
| 1   | 1            | 1            | <b>3</b>      | 0, 6, 17, 20               | 5                 | 246                        |
|   |              |              | <b>8</b>      | 1, 7, 10, 24, 25           | 6                 | 144                        |
|   |              |              | <b>11</b>     | 2, 4, 5, 9                 | 5                 | 176                        |
|   |              |              | <b>18</b>     | 14                         | 2                 | 97                         |
|   |              |              | <b>19</b>     | 13, 16, 51, 56             | 5                 | 229                        |
|   |              |              | <b>23</b>     | 12, 15, 21, 22, 52         | 6                 | 180                        |
|   |              |              | <b>28</b>     | 30, 31                     | 3                 | 173                        |
|   |              |              | <b>33</b>     | 26, 36                     | 3                 | 247                        |
|   |              |              | <b>35</b>     | 27, 29, 32, 34, 37, 38, 39 | 8                 | 387                        |
|   |              |              | <b>40</b>     | 42, 45, 46, 47, 48, 54     | 7                 | 251                        |
|   |              |              | <b>44</b>     | 41, 49, 53, 55             | 5                 | 180                        |
|   |              |              | <b>57</b>     | 43, 50                     | 3                 | 160                        |

Fonte: A Autora (2022).

Analisando as nucleações formadas por este cenário 3, nota-se que há uma melhor distribuição da quantidade de escolas em cada nucleação, não existindo tanta divergência quanto os dois cenários anteriores. também é possível observar que o número de alunos ficou mais balanceado entre as nucleações. Para que pudessem ficar ilustradas as nucleações formadas pelos resultados do cenário acima, foi plotado um gráfico onde os pontos vermelhos representam as Escolas Núcleo e os pontos azuis representam as Escolas Nucleadas ligadas a suas respectivas Escola Núcleo, como mostra a Figura 11.

Figura 11 – Representação gráfica do cenário para  $p = 12$ .

Fonte: A Autora (2022).

Por último, foi testado um quarto cenário para um número de nucleações igual a 14 ( $p = 14$ ), e foram usadas as mesmas variações para os parâmetros alfa, beta e gama. A Tabela 4, mostra os resultados obtidos com a implementação do modelo matemático para o cenário  $p\_nucleacoes = 14$ ;  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$  e  $\gamma = 1$ , com mais uma vez os mesmos resultados tendo sido obtidos pelas demais variações dos parâmetros em: (1, 0.5, 0.5); (0.5, 1, 0.5), (0.5, 0.5, 1).

Tabela 4 - Configuração das nucleações para  $p = 14$ .

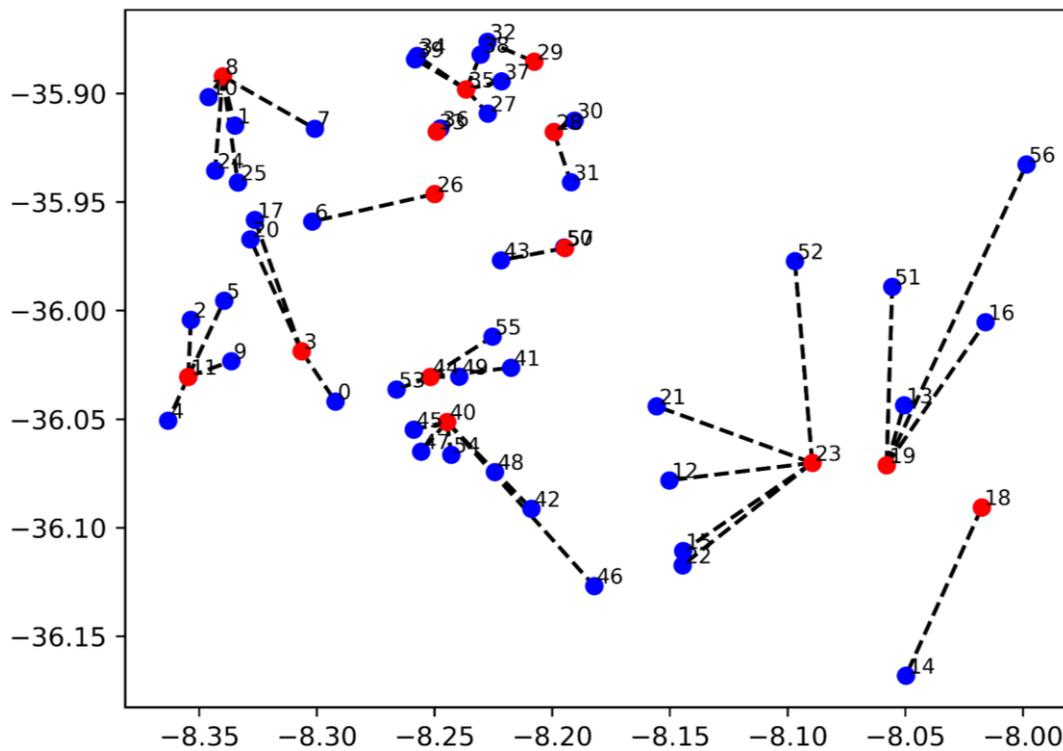
| Configuração das nucleações para $p = 14$ |       |       |        |                    |            |                     |
|---|-------|-------|--------|--------------------|------------|---------------------|
| alpha                                     | betha | gamma | Núcleo | Nucleadas          | Nº Escolas | Nº Número de alunos |
| 1   | 1     | 1     | 3      | 0, 17, 20          | 4          | 219                 |
|   |       |       | 8      | 1, 7, 10, 24, 25   | 6          | 144                 |
|   |       |       | 11     | 2, 4, 5, 9         | 5          | 176                 |
|   |       |       | 18     | 14                 | 2          | 97                  |
|   |       |       | 19     | 13, 16, 51, 56     | 5          | 229                 |
|   |       |       | 23     | 12, 15, 21, 22, 52 | 6          | 180                 |
|   |       |       | 26     | 6                  | 2          | 154                 |
|   |       |       | 28     | 30, 31             | 3          | 173                 |
|   |       |       | 29     | 32                 | 2          | 75                  |
|   |       |       | 33     | 36                 | 2          | 120                 |

|  |  |           |                        |   |     |
|--|--|-----------|------------------------|---|-----|
|  |  | <b>35</b> | 27, 34, 37, 38, 39     | 6 | 312 |
|  |  | <b>40</b> | 42, 45, 46, 47, 48, 54 | 7 | 251 |
|  |  | <b>44</b> | 41, 49, 53, 55         | 5 | 180 |
|  |  | <b>57</b> | 43, 50                 | 3 | 160 |

Fonte: A Autora (2022).

Analisando as nucleações formadas pelo quarto cenário, uma distribuição ainda maior é observada. Entretanto, foram formadas diversas nucleações com apenas 2 escolas, enquanto que são apresentadas outras com 6 ou 7 escolas. Em contrapartida, o número de alunos se mostrou bastante equilibrado entre as nucleações. Para que pudessem ficar ilustradas as nucleações formadas pelos resultados do cenário acima, foi plotado um gráfico onde os pontos vermelhos representam as Escolas Núcleo e os pontos azuis representam as Escolas Nucleadas ligadas a suas respectivas Escola Núcleo, como mostra a Figura 12.

Figura 12 - Representação gráfica do cenário para  $p = 14$ .



Fonte: A Autora (2022).

Por fim, na Tabela 5, são reportados os tempos computacionais e valores da função objetivo, para o modelo de  $p$ -medianas, obtidos a partir da resolução dos problemas relacionados com cada um dos cenários considerados.

Tabela 5 – Resultados da Função Multiobjetivo nos Cenários para  $p$ -Medianas.

| <b>Modelo <math>p</math>-Medianas</b> |             |             |             |                             |              |
|---------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-----------------------------|--------------|
| <b>p_nucleacoes</b>                   | <b>alfa</b> | <b>beta</b> | <b>gama</b> | <b>Função Multiobjetivo</b> | <b>tempo</b> |
| 8                                     | 1           | 1           | 1           | 296,83                      | 0,988        |
|                                       | 1           | 0,5         | 0,5         | 264,33                      | 0,917        |
|                                       | 0,5         | 1           | 0,5         | 180,42                      | 0,09         |
|                                       | 0,5         | 0,5         | 1           | 148,92                      | 0,0937       |
| 10                                    | 1           | 1           | 1           | 281,78                      | 0,0853       |
|                                       | 1           | 0,5         | 0,5         | 249,28                      | 0,1053       |
|                                       | 0,5         | 1           | 0,5         | 172,89                      | 0,11         |
|                                       | 0,5         | 0,5         | 1           | 141,39                      | 0,1117       |
| 12                                    | 1           | 1           | 1           | 269,25                      | 0,0989       |
|                                       | 1           | 0,5         | 0,5         | 236,75                      | 0,0852       |
|                                       | 0,5         | 1           | 0,5         | 166,63                      | 0,0817       |
|                                       | 0,5         | 0,5         | 1           | 135,13                      | 0,0898       |
| 14                                    | 1           | 1           | 1           | 261,74                      | 0,0825       |
|                                       | 1           | 0,5         | 0,5         | 229,24                      | 0,0825       |
|                                       | 0,5         | 1           | 0,5         | 162,87                      | 0,0907       |
|                                       | 0,5         | 0,5         | 1           | 131,37                      | 0,0986       |

Fonte: A Autora (2022).

Analisando os resultados da função objetivo agregada, nota-se que, à medida que foi aumentada a quantidade de nucleações a serem formadas, o valor da função diminuiu gradativamente. Acontece que, conforme mais nucleações são formadas, menores serão as distâncias entre as escolas núcleo e as escolas nucleadas, visto que haverá mais possibilidades de alocação por proximidade. Ou seja, uma Escola Nucleada poderá ser alocada àquela Escola Núcleo que for mais próxima a ela.

Em relação às variações dos parâmetros, percebe-se que quando os fatores de ponderação são maiores nos objetivos de balanceamento de escolas e de alunos, o valor da função objetivo tende a diminuir. Todavia, para se chegar a uma solução ideal, não se pode levar apenas em consideração o resultado da função objetivo, mas sim, devem ser analisados todos os fatores ponderantes e variáveis que compõem a estrutura da solução, como por exemplo a quantidade de escolas nucleadas de uma nucleação formada.

Como as distribuições das escolas foi a mesma para ambos os modelos, no caso do modelo de  $p$ -centros, apenas resultados relacionados com os tempos de

cálculo e valores da função objetivo serão apresentados, os quais são apresentados na Tabela 6.

Tabela 6 - Resultados da Função Multiobjetivo nos Cenários para  $p$ -Centros.

| <b>Modelo <math>p</math>-Centros</b> |             |             |             |                             |              |
|--------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-----------------------------|--------------|
| <b>p_nucleacoes</b>                  | <b>alfa</b> | <b>beta</b> | <b>gama</b> | <b>Função Multiobjetivo</b> | <b>tempo</b> |
| 8                                    | 1           | 1           | 1           | 296,83                      | 31,8146      |
|                                      | 1           | 0,5         | 0,5         | 264,33                      | 31,117       |
|                                      | 0,5         | 1           | 0,5         | 180,42                      | 31,0808      |
|                                      | 0,5         | 0,5         | 1           | 148,92                      | 31,1206      |
| 10                                   | 1           | 1           | 1           | 281,78                      | 30,9331      |
|                                      | 1           | 0,5         | 0,5         | 249,28                      | 30,6133      |
|                                      | 0,5         | 1           | 0,5         | 172,89                      | 30,8149      |
|                                      | 0,5         | 0,5         | 1           | 141,39                      | 30,6805      |
| 12                                   | 1           | 1           | 1           | 269,25                      | 30,8144      |
|                                      | 1           | 0,5         | 0,5         | 236,75                      | 30,5663      |
|                                      | 0,5         | 1           | 0,5         | 166,63                      | 30,6013      |
|                                      | 0,5         | 0,5         | 1           | 135,13                      | 30,7265      |
| 14                                   | 1           | 1           | 1           | 261,74                      | 30,6763      |
|                                      | 1           | 0,5         | 0,5         | 229,24                      | 30,5585      |
|                                      | 0,5         | 1           | 0,5         | 162,87                      | 31,0004      |
|                                      | 0,5         | 0,5         | 1           | 131,37                      | 30,5069      |

Fonte: A Autora (2022).

Semelhante ao que foi observado para o modelo de  $p$ -medianas, observa-se que com o aumento do número de nucleações a serem formadas, o valor da função diminuiu gradativamente. Esse comportamento é esperado uma vez que será mais fácil alocar uma escola nucleada a um núcleo mais próximo. Vale destacar um comportamento específico do modelo  $p$ -centros que diz respeito aos tempos de cálculo. Estes foram muito mais elevados do que aquelas obtidas para o modelo de  $p$ -medianas. Esse comportamento pode ser explicado pela estrutura simétrica induzida pelos objetivos de min-max considerados no modelo de  $p$ -centros. No modelo de  $p$ -medianas, essa simetria é quebrada pelo objetivo que visa a minimização das distâncias totais de alocação.

## 5.4 ANÁLISE DE RESULTADOS

Após a implementação dos modelos, nota-se que ambos retornaram os mesmos resultados nos diferentes cenários propostos. Isso se deve ao fato de que tanto o modelo  $p$ -medianas, quanto o modelo  $p$ -centros, abordam objetivos semelhantes e, por este motivo, os resultados vieram a ser iguais. Entretanto, para confirmação de tal afirmativa, outros cenários devem ser estudados. Neste sentido, o que irá definir qual melhor modelo a ser utilizado, será o tempo levado pelo algoritmo para a resolução do problema. Enquanto o modelo  $p$ -centros leva aproximadamente 30s em quase todos os cenários, o modelo  $p$ -medianas leva sempre menos de 1s. Para uma tomada de decisão rápida, o modelo de  $p$ -medianas seria o ideal, especialmente caso outros valores elevados para os números de escolas fossem considerados. Porém, como se trata de uma decisão estratégica, que leva tempo e estudo para ser tomada, a escolha do modelo fica a critério da Organização Escolar.

A partir dos resultados obtidos pelos modelos, pode-se perceber os benefícios oferecidos ao setor da Organização Escolar da SEDUC no que se refere à tomada de decisão sobre o processo de estruturação das nucleações. O quarto cenário, com  $p\_nucleacoes$  igual a 14,  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\gamma = 1$ , apresentou maiores benefícios quanto a minimização da função multiobjetivo. Entretanto, apesar de ser um cenário ideal, analisando sob o ponto de vista da minimização das distâncias percorridas entre as escolas, a solução não é completamente factível para a organização. Outros aspectos ponderantes também devem ser levados em consideração, como por exemplo a quantidade de escolas por nucleação. Outro ponto, seria a viabilidade econômica do cenário, já que o mesmo apresenta mais nucleações e muitas delas com apenas duas escolas, o que implica em mais contratações de funcionários.

No terceiro cenário, é utilizado para  $p\_nucleacoes$  um valor igual a 12. Os resultados obtidos a partir deste, mostram-se melhores distribuídos, tanto nas questões de quantidade de escolas por nucleações, quanto na questão da quantidade de alunos. Em relação aos valores obtidos da função multiobjetivo, estes possuem pouca diferença de variação quando comparados aos valores do cenário considerado "ótimo" (com 14 núcleos). Assim, o terceiro cenário se torna um candidato ideal para ser aplicado no sistema organizacional das nucleações do município. Em relação aos parâmetros, a variação que apresenta melhor resultado neste cenário é para alfa, beta

e gama, iguais a 0.5, 0.5 e 1, respectivamente. Porém, fica a critério da Organização Escolar escolher os parâmetros que melhor se adequem a sua realidade e objetivos.

Com os resultados do terceiro cenário, ainda é possível realizar uma comparação com o panorama atual das nucleações do município, já que ambos apresentam 12 nucleações formadas. Assim, a Tabela 7, traz uma comparação entre as quantidades de escolas e a quantidade de alunos em cada nucleação.

Tabela 7 - Comparação do Cenário Atual X Cenário dos Modelos (p = 12).

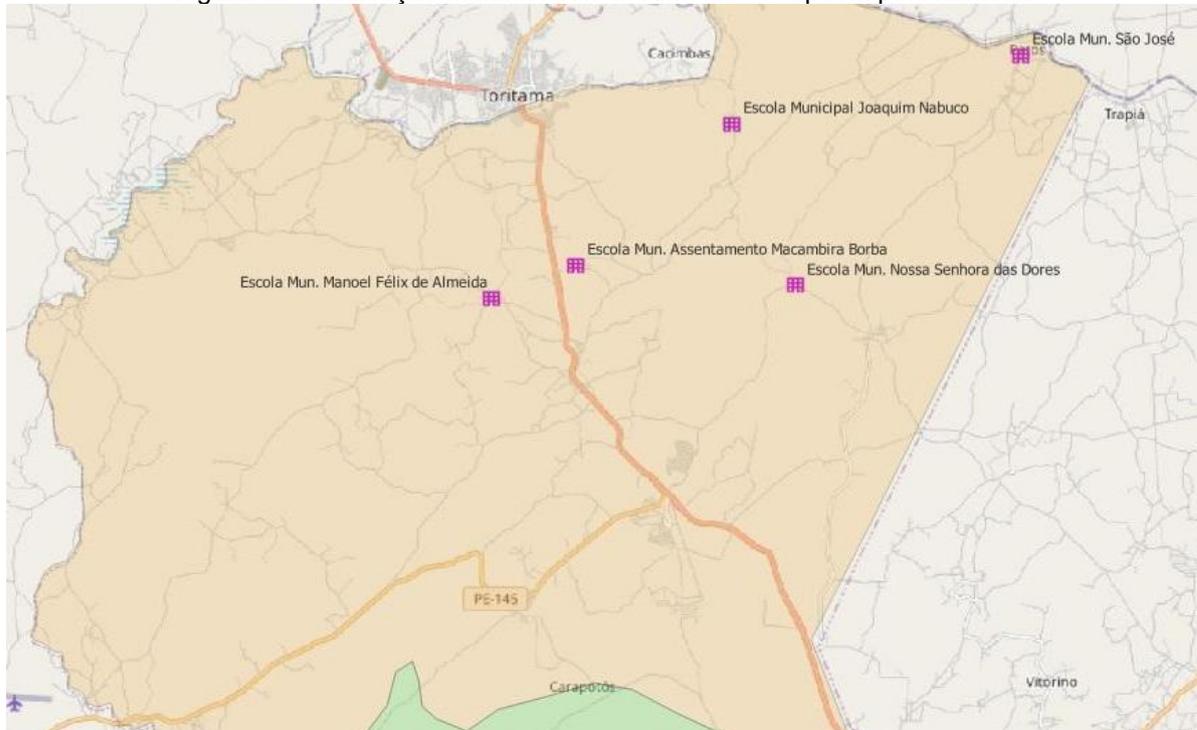
| Nucleação nº | Cenário Atual do Município |                      | Cenário Proposto pelos Modelos |                      |
|--------------|----------------------------|----------------------|--------------------------------|----------------------|
|              | Quantidade de escolas      | Quantidade de alunos | Quantidade de escolas          | Quantidade de alunos |
| 1            | 3                          | 138                  | 5                              | 246                  |
| 2            | 5                          | 136                  | 6                              | 144                  |
| 3            | 3                          | 215                  | 5                              | 176                  |
| 4            | 2                          | 97                   | 2                              | 97                   |
| 5            | 5                          | 111                  | 5                              | 229                  |
| 6            | 7                          | 230                  | 6                              | 180                  |
| 7            | 5                          | 334                  | 3                              | 173                  |
| 8            | 5                          | 216                  | 3                              | 247                  |
| 9            | 4                          | 257                  | 8                              | 387                  |
| 10           | 5                          | 169                  | 7                              | 251                  |
| 11           | 7                          | 214                  | 5                              | 180                  |
| 12           | 6                          | 305                  | 3                              | 160                  |

Fonte: A Autora (2022).

Comparando os dados da tabela, é perceptível que o cenário proposto possui valores próximos ao que já ocorre atualmente. Mas, ao analisarmos as distâncias entre algumas escolas de uma mesma nucleação no cenário atual, comparadas ao cenário proposto, percebe-se que o cenário proposto apresenta melhores resultados. Por exemplo, ao compararmos a Figura 7, da Seção 5.1, que mostra a Nucleação Manoel Félix de Almeida atualmente, com a Figura 13 que mostra a mesma nucleação no cenário proposto, nota-se que o cenário do modelo agrupa apenas as escolas

geograficamente próximas, resultando numa menor distância. A solução do modelo também respeita a escolha das escolas mais estruturadas como candidatas a serem escolas núcleos.

Figura 13 - Nucleação Manoel Félix de Almeida - Proposta pelo Modelo.



Fonte: A Autora (2022).

A utilização dos modelos matemáticos traz facilidade na tomada de decisão quanto a formação das nucleações, oferecendo aos coordenadores responsáveis pela Organização Escolar da SEDUC a possibilidade de testar diferentes cenários e atribuir pesos de acordo com os seus objetivos. Todavia, é importante ressaltar que a comparação entre os resultados gerados propostos pelo modelo e o cenário atual pode não ser justa, visto que, existem várias limitações impostas à SEDUC que não foram consideradas no modelo.

## 6 CONCLUSÕES

O presente trabalho abordou a problemática de localização de facilidades, referentes às unidades escolares que compõem as nucleações do município de Caruaru. Com isso, após realizar uma pesquisa teórica sobre a temática e entrevistar os responsáveis pela Organização Escolar da SEDUC, pôde-se compreender mais a fundo sobre o conceito e panorama atual das nucleações do município. Assim, foi possível determinar modelos matemáticos, através de algoritmos na linguagem Python, que fossem capazes de oferecer soluções ótimas para o problema. Para isso, foram coletados e armazenados os dados relacionados às escolas que fazem parte das nucleações, como seus endereços e quantidade de alunos matriculados, que foram utilizados como entrada para a implementação dos modelos matemáticos, de forma a encontrar soluções para o problema.

Os modelos implementados utilizaram a biblioteca Pyomo, que é capaz de formular, resolver e analisar modelos de otimização, e foram capazes de gerar bons resultados em um curto tempo, o que culmina num fator positivo no processo rápido de tomada de decisões. Além disso, os cenários propostos apresentam soluções viáveis, no que diz respeito a minimização das distâncias e balanceamento da quantidade de escolas e alunos, proporcionando uma oportunidade de melhorar o sistema organizacional atual das nucleações. A depender dos objetivos que se deseja alcançar, o modelo se mostrou eficaz para rodar diferentes cenários com fatores de ponderação distintos.

Durante o estudo surgiram algumas limitações, como a falta de informações mais concretas e detalhadas sobre as atuais nucleações, bem como o seu processo de formação no município. A não determinação explicada sobre quais escolas são melhor estruturadas para serem consideradas Escolas Núcleo, assim, teve-se que se partir de um pressuposto sobre quais seriam mais estruturadas. Falta de informação acerca da localização específica de algumas unidades escolares, já que os endereços encontrados na planilha de Visão Geral 2022, eram mais gerais, sem ruas e/ou números dos prédios, e nem todas as escolas estavam pontuadas no mapa Qgis disponibilizado. Desse modo, as localizações tiveram que ser encontradas de maneira geral e manualmente no mapa por meio do conhecimento dos funcionários de onde estaria localizada determinadas unidades escolares. Outra limitação do trabalho se deve ao fato que as distâncias são obtidas através de uma linha reta, sem levar em

consideração os diferentes caminhos e distâncias reais que podem ser percorridas para ir de uma escola a outra.

Para a realização de trabalhos futuros, sugere-se coletar dados mais apurados quanto à localização das escolas, número de classes em cada unidade, explorar os aspectos das classes multisseriadas, visando sua eliminação gradativa. Também, sugere-se considerar mais cenários, outras definições de parâmetros, estudar outros conjuntos de escolas candidatas a núcleo e outros fatores que sejam julgados como importantes para se obter a solução mais viável para o problema. Além disso, poderiam ser desenvolvidos modelos matemáticos que lidassem com o aspecto de classes multisseriadas. Desta forma, estes modelos poderiam determinar nucleações considerando não apenas os aspectos considerados neste trabalho (isto é, minimização das distâncias entre escolas, e balanceamento do número de escolas e alunos), mas também a eliminação de classes multisseriadas.

## REFERÊNCIAS

ABREU, Airan Celina Sepúlveda Dos Santos Rocha De. **Educação do campo em classes multisseriadas: uma prática docente multifacetada**. E-book VII CONEDU 2021 - Vol 02... Campina Grande: Realize Editora, 2022. Disponível em: <<https://editorarealize.com.br/index.php/artigo/visualizar/82143>>

ARENALES, Marcos et al. **Pesquisa Operacional: para cursos de Engenharia**. 2 ed. Rio de Janeiro. Elsevier: ABEPRO, 2011.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CEB n. 02/2008. **Diretrizes complementares, normas e princípios para o desenvolvimento de políticas públicas de atendimento da Educação Básica do Campo**. Brasília, DF: [2008]. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/secad/arquivos/pdf/resolucao0208.pdf>>

CARUARU, Prefeitura Municipal de. Secretaria de Educação. **Instrução Normativa 03/2002**. (2002)

CARUARU, Prefeitura Municipal de. Secretaria de Educação. **Ressignificação das Escolas do Campo**. (2022).

CORRÊA, E. S. **Algoritmo Genético e Busca Tabu aplicados ao problema das p-medianas**. 2000. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2000.

DASKIN, M. **Network and Discrete Location: Models, Algorithms, and Applications**. New York: Wiley Interscience, 1995.

DREZNER, Z. (editor) (1995). **Facility Location: A Survey of Applications and Methods**. Springer, New York.

GARCIA, A. E. N. **Aplicação da p-mediana na Localização da Coordenadoria de Educação da regional do Médio Paraíba do Estado do Rio de Janeiro**. Orientador: Luís Alberto Duncan Rangel. 2015. 92 f. Dissertação (Mestrado) - Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia, Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, 2015.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4 ed. São Paulo: Editora Atlas, 2002.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. **Otimização Combinatória e Programação Linear**. 2 ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

GONÇALVES, G.B.B. **Nucleação das escolas rurais**. In: OLIVEIRA, D.A.; DUARTE, A.M.C.; VIEIRA, L.M.F. DICIONÁRIO: trabalho, profissão e condição docente. Belo Horizonte: UFMG/Faculdade de Educação, 2010.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. São Paulo: McGraw – Hill, 2006.

JUNIOR, R. R.; SANTOS, L. B. L. **Análise Iterativa dos Problemas de p-centros e p-medianas para um Crescente Número de Facilidades: Estudo de caso na epidemia de dengue, Salvador, 1995**. 9th Brazilian Conference on Dynamics Control and their Applications, 2010.

LAPORTE, G.; NICKEL, S.; GAMA, F. S. da. **Location Science**. 2 ed. Springer, 2019.

LORENA, L. A. N. **Análise Espacial de Redes com Aplicações em Sistemas de Informações Geográficas**. Revista Produção Online, v. 3, n. 2, 2003. Disponível em: <<https://producaoonline.org.br/rpo/article/view/623>>

PIZZOLATO, N. D.; RAUPP, F. M. P.; ALZAMORA, G. S. **Revisão de Desafios Aplicados em Localização com Base em Modelos da p-Mediana e suas Variantes**. Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento, v. 4, n. 1, p. 13–42, 2012. Disponível em: <<https://www.podesenvolvimento.org.br/podesenvolvimento/article/view/174>>

RAKIMI, S. L. **Optimal locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph**. Operations Research (1995), 462-475.

REESE, J. **Solution methods for the p-median problem: An annotated bibliography**. Networks (2006).

RIBEIRO, Clara. **Educação no Brasil: 5 principais obstáculos enfrentados pelo sistema educacional. 2020**. Disponível em: <<https://noticiasconcursos.com.br/educacao-no-brasil-5-principais-obstaculos-do-sistema-educacional/>>

ROSÁRIO, R. R.L.; CARNIERI, C.; STEINER, M. T. A. **Proposta de solução para o problema das p-medianas na localização de unidades de saúde 24 horas**. XXII Encontro Nacional de Engenharia de Produção. Curitiba – PR, 23 a 25 de outubro de 2002.

SALES, Suze da Silva. **Análise de um processo consolidado: histórico do percurso da nucleação de escolas rurais brasileiras (1989-1999)**. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE HISTÓRIA. Natal, 2013.

SILVA, J. L. M. da; SILVA, F. G. P. da. **Organização das Escolas do Campo do Município de Caruaru - PE: Focando a organização dos alunos**. IV EPEPE, 2012.

SOBRAPO – **Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional**. Disponível em: <<https://www.sobrapo.org.br/o-que-e-pesquisa-operacional>>. Acessado em 15 de setembro de 2022.

TAHA, H. A. **Pesquisa Operacional**. 8 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

VEIGA, Ilma Passos Alencar. **O Projeto Político Pedagógico da Escola: uma construção possível**. 22 ed. Campinas: Papirus, 2006.

WIKIPÉDIA. **Fórmula de haversine**. 2021. Disponível em:  
<[https://pt.wikipedia.org/wiki/F%C3%B3rmula\\_de\\_haversine](https://pt.wikipedia.org/wiki/F%C3%B3rmula_de_haversine) >

## APÊNDICE A – PANORAMA GERAL DAS NUCLEAÇÕES ATUAIS

O Quadro 1 apresenta o panorama das nucleações atuais. A coluna ‘Nucleação’ representa as nucleações do município, que recebem o nome da escola núcleo, que se encontra na coluna ‘Escola’ em negrito, seguidas das escolas nucleadas.

Quadro 1 – Panorama atual das nucleações.

| TGS/<br>Distrito | Nucleação                                | Escola                                       | Modalidade                              | Número<br>de<br>alunos | Total de<br>Alunos na<br>Nucleação |
|------------------|--|--|---|------------------------|------------------------------------|
| 1                | <b>Reunidas<br/>Pedro de<br/>Andrade</b> | <b>EM Pedro de<br/>Andrade</b>               | Educação<br>Infantil /<br>Fundamental I | 52                     | 138                                |
|                  |  | EM Antônia<br>Maria da<br>Conceição<br>Costa | Educação<br>Infantil /<br>Fundamental I | 40                     |                                    |
|                  |  | EM Belísio<br>Córdula                        | Educação<br>Infantil /<br>Fundamental I | 23                     |                                    |
|                  |  | EM José<br>Raimundo<br>Sobrinho              | Educação<br>Infantil /<br>Fundamental I | 23                     |                                    |
|                  | <b>Nossa<br/>Senhora<br/>Aparecida</b>   | <b>EM Nossa<br/>Senhora<br/>Aparecida</b>    | Educação<br>Infantil /<br>Fundamental I | 41                     | 136                                |
|                  |  | EM Antônio<br>Martins                        | Educação<br>Infantil /<br>Fundamental I | 21                     |                                    |
|                  |  | EM Manoel<br>Bandeira                        | Educação<br>Infantil /<br>Fundamental I | 27                     |                                    |
|                  |  | EM Maria<br>Martins de<br>Melo               | Educação<br>Infantil /<br>Fundamental I | 20                     |                                    |
|                  |  | EM Professora<br>Maria Cândida               | Fundamental I                           | 27                     |                                    |
|                  | <b>Tomé<br/>Claudino<br/>Torres</b>      | <b>EM Tomé<br/>Claudino<br/>Torres</b>       | Educação<br>Infantil /<br>Fundamental I | 70                     | 215                                |
|                  |  | EM João Luiz<br>Torres                       | Educação<br>Infantil /<br>Fundamental I | 137                    |                                    |
|                  |  | EM José<br>Antônio de<br>Lemos               | Fundamental I                           | 8                      |                                    |

|   |                                       |  |                                   |     |     |
|---|---------------------------------------|--|-----------------------------------|-----|-----|
| 2 | <b>Leonor Felicidade da Conceição</b> | <b>EM Leonor Felicidade da Conceição</b> | Educação Infantil / Fundamental I | 51  | 97  |
|   |                                       | EM João Patrício de Carvalho             | Educação Infantil / Fundamental I | 46  |     |
|   | <b>Manoel Valdevino</b>               | <b>EM Manoel Valdevino</b>               | Fundamental I                     | 10  | 111 |
|   |                                       | EM Adelino Alves                         | Educação Infantil / Fundamental I | 23  |     |
|   |                                       | EM João Vênio da Silva                   | Fundamental I                     | 19  |     |
|   |                                       | EM Joaquim Nabuco                        | Educação Infantil / Fundamental I | 46  |     |
|   |                                       | EM Manoel Trajano                        | Educação Infantil / Fundamental I | 13  |     |
|   | <b>Manoel Félix de Almeida</b>        | <b>EM Manoel Félix de Almeida</b>        | Educação Infantil / Fundamental I | 79  | 230 |
|   |                                       | EM Assentamento Macambira Borba          | Fundamental I                     | 5   |     |
|   |                                       | EM José Barbosa                          | Fundamental I                     | 16  |     |
|   |                                       | EM Manoel Henrique da Silva              | Fundamental I                     | 26  |     |
|   |                                       | EM Maria José de França                  | Educação Infantil / Fundamental I | 69  |     |
|   |                                       | EM Sabino José Pereira da Silva          | Educação Infantil / Fundamental I | 23  |     |
|   |                                       | EM Vicente Correia                       | Fundamental I                     | 12  |     |
|   |                                       |  |                                   |     |     |
| 3 | <b>Francisco Borges</b>               | <b>EM Francisco Borges</b>               | Educação Infantil / Fundamental I | 94  | 334 |
|   |                                       | EM Dr Oscar Barreto                      | Educação Infantil / Fundamental I | 127 |     |
|   |                                       | EM Josefa Maria da Conceição Dandon      | Educação Infantil / Fundamental I | 50  |     |

|   |                             |                                   |                                   |                                   |     |     |
|---|-----------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----|-----|
| 4   |                             | EM José Raimundo Paes de Lira     | Educação Infantil / Fundamental I | 29                                |     |     |
|   |                             | EM São Vicente de Paula           | Educação Infantil / Fundamental I | 34                                |     |     |
|   | <b>José Manoel Silveira</b> | <b>EM José Manoel da Silveira</b> | Educação Infantil / Fundamental I | 65                                | 216 |     |
|   |                             | EM Marcionilo Soares              | Fundamental I                     | 10                                |     |     |
|   |                             | EM Professora Maria Emília        | Educação Infantil / Fundamental I | 51                                |     |     |
|   |                             | EM São Severino                   | Educação Infantil / Fundamental I | 31                                |     |     |
|   |                             | EM Típica Rural                   | Fundamental I                     | 59                                |     |     |
|   | <b>Natalice Limeira</b>     | <b>EM Natalice Limeira</b>        | Educação Infantil / Fundamental I | 59                                | 257 |     |
|   |                             | EM Fortunato Ribeiro da Silva     | Educação Infantil / Fundamental I | 73                                |     |     |
|   |                             | EM Santa Regina                   | Educação Infantil / Fundamental I | 64                                |     |     |
|   |                             | EM São Luiz de Gonzaga            | Fundamental I                     | 61                                |     |     |
|   |                             | <b>Dona Maria Digna</b>           | <b>EM Dona Maria Digna</b>        | Educação Infantil / Fundamental I | 78  | 169 |
|   |                             |                                   | EM Abílio Luís de Torres          | Educação Infantil / Fundamental I | 62  |     |
|   |                             |                                   | EM Batista da Silva               | Fundamental I                     | 14  |     |
| EM João Cursino                             |                             |                                   | Fundamental I                     | 9                                 |     |     |
| EM Professora Maria de Lourdes Azevedo Lira |                             |                                   | Fundamental I                     | 6                                 |     |     |
| <b>Francelin o Guilherme</b>                |                             | <b>EM Francelino Guilherme</b>    | Educação Infantil / Fundamental I | 66                                | 214 |     |
|   |                             | EM João Demócrito Florêncio       | Fundamental I                     | 48                                |     |     |

|  |                        |                                |                                   |    |     |
|--|------------------------|--------------------------------|-----------------------------------|----|-----|
|  |                        | EM Cônego Júlio Cabral         | Fundamental I                     | 9  | 305 |
|  |                        | EM João XXIII                  | Fundamental I                     | 9  |     |
|  |                        | EM José Faustino Vila Nova     | Educação Infantil / Fundamental I | 16 |     |
|  |                        | EM Professora Cacilda Santos   | Fundamental I                     | 66 |     |
|  |                        | EM Professora Eunice Tabosa    | Educação Infantil / Fundamental I | 48 |     |
|  | <b>São Judas Tadeu</b> | <b>EM São Judas Tadeu</b>      | Educação Infantil / Fundamental I | 64 |     |
|  |                        | EM Dom Miguel Severino de Lima | Educação Infantil / Fundamental I | 91 |     |
|  |                        | EM José Severino de Amorim     | Fundamental I                     | 5  |     |
|  |                        | EM Nossa Senhora das Dores     | Educação Infantil / Fundamental I | 52 |     |
|  |                        | EM Padre Antônio Faustino      | Educação Infantil / Fundamental I | 46 |     |
|  |                        | EM São José                    | Fundamental I                     | 47 |     |
|  |                        |                                |                                   |    |     |

Fonte: A Autora (2022).

O Quadro 2, apresenta os endereços de todas as escolas das nucleações.

Quadro 2 – Endereços das Escolas.

| TGS/<br>Distrito | Escola Municipal                 | Endereço   |
|------------------|----------------------------------|--|
| 1                | Antonia Maria da Conceição Costa | Sítio Taquara de Cima - 1º Distrito - CEP 55.099-899 |
|                  | Antônio Martins                  | 1º Distrito - CEP 55.099-899                         |
|                  | Belísio Córdula                  | Sítio Vertentes - 1º Distrito - CEP 55.099-899       |
|                  | João Luiz Torres                 | BR 232 – Sítio Cipó - CEP 55099-899                  |
|                  | José Antonio de Lemos            | Sítio Capoeirão - 1º Distrito - CEP 55099-899        |
|                  | José Raimundo Sobrinho           | Sítio Pitombeiras - 1º Distrito - CEP 55.099-899     |
|                  | Manoel Bandeira                  | Sítio Campo Novo - 1º Distrito - CEP 55.099-899      |
|                  | Maria Martins de Melo            | Sítio Vasco - 1º Distrito - CEP 55.099-899           |
|                  | Nossa Senhora Aparecida          | Povoado de Pau Santo - 1º Distrito - CEP 55.099-899  |
|                  | Pedro de Andrade                 | Sítio Lagoa do Paulista - 1º Distrito - CEP 55.099-  |

|   |                                  |   |
|---|----------------------------------|---|
|   |                                  | 899   |
|   | Professora Maria Cândida         | Povoado de Pau Santo - 1º Distrito - CEP 55.099-899   |
|   | Tomé Claudino Torres             | Sítio Serra dos Cavalos - 1º Distrito CEP 55.099-899/Vila Murici - 1º Distrito CEP – 55.099-899 |
| 2 | Adelino Alves da Silva           | Sítio Carneirinho - 2º Distrito - CEP 55.099-899  |
|   | Assentamento Macambira Borba     | Sítio Lajes - 2º Distrito - CEP 55.099-899  |
|   | João Patrício de Carvalho        | Sítio Pitombeira de Tabocas - 2º Distrito - CEP 55.099-899                                      |
|   | João Vênio da Silva              | Sítio Dois Riachos - 2º Distrito - CEP 55.099-899   |
|   | Joaquim Nabuco                   | Povoado de Jacaré Grande - 2º Distrito - CEP 55.099-899   |
|   | José Barbosa                     | Sítio Lajes - 1º Distrito - CEP 55.099-899  |
|   | Leonor Felicidade da Conceição   | Sítio Santa Maria - 2º Distrito - CEP 55.099-899  |
|   | Manoel Félix de Almeida          | Malhada de Barreiras Queimadas - 2º Distrito - CEP 55.099-899                                   |
|   | Manoel Henrique da Silva         | Sítio Brejo da Palmeira I Distrito CEP 55.099-899   |
|   | Manoel Trajano de Arruda         | Sítio Carapotós - 2º Distrito - CEP 55.099-899  |
|   | Manoel Valdevino                 | Sítio Caraibeira - 2º Distrito -- CEP 55.099-899  |
|   | Maria José de França             | Sítio Caldeirão - 2º Distrito - CEP 55.099-899  |
|   | Sabino José Pereira da Silva     | Sítio Olho D'água da Cana - 1º Distrito - CEP 55.099-899  |
|   | Vicente Correia                  | Sítio Olho D'água da Cana - 1º Distrito - CEP 55.099-899  |
| 3 | Dr. Oscar Barreto                | Fazenda Gravatá Açú - 1º Distrito - CEP 55.099-899  |
|   | Fortunato Ribeiro da Silva       | Sítio Riachão - 3º Distrito - CEP 55.099-899  |
|   | Francisco Borges                 | Sítio Serra Verde - 3º Distrito - CEP 55.099-899  |
|   | José Manoel da Silveira          | Sítio Sagüim - 3º Distrito - CEP 55.099-899   |
|   | José Raimundo Paes de Lira       | Sítio Antas - 3º Distrito - CEP 55.099-899  |
|   | Josefa Maria da Conceição Dandon | Sítio Lagoa Salgada - 3º Distrito - CEP 55.099-899  |
|   | Marcionilo Soares                | Sítio Guaribas - 3º Distrito - CEP 55.099-899   |
|   | Natalice Limeira                 | Malhada de Pedra - 3º Distrito - CEP 55.099-899   |
|   | Professora Maria Emília          | Sítio Jacaré de Gonçalves Ferreira - 3º Distrito - CEP 55.099-899                               |
|   | Santa Regina                     | Sítio Jurema - 3º Distrito - CEP 55.099-899   |
|   | São Luiz de Gonzaga              | Malhada de Pedra - 3º Distrito - CEP 55.099-899   |
|   | São Severino                     | Sítio Barreiras de Guaribas - 3º Distrito - CEP 55.099-899                                      |
|   | São Vicente de Paula             | Sítio Riacho do Veado - 3º Distrito - CEP 55.099-899  |

|                 |  |  |
|-----------------|--|--|
|                 | Típica Rural                                     | Gonçalves Ferreira - 3º Distrito -- CEP 55.099-899         |
| 4               | Abílio Luís de Torres                            | Sítio Serrote dos Bois - 4º Distrito - CEP 55.102-500      |
|                 | Batista da Silva                                 | Sítio Jiquiri - 4º Distrito - CEP 55.108-500               |
|                 | Cônego Júlio Cabral                              | Sítio Firmeza - 4º Distrito - CEP 55.099-899               |
|                 | Dom Miguel Severino de Lima                      | Sítio Juriti - 4º Distrito - CEP 55.099-899                |
|                 | Dona Maria Digna                                 | Povoado de Xique-Xique - 4º Distrito -- CEP 55.103-000     |
|                 | Francelino Guilherme de Azevedo                  | Sítio Lagoa de Pedra - 4º Distrito - CEP 55.099-899        |
|                 | João Cursino                                     | Sítio Serra de São Bento - 4º Distrito - CEP 55.108-000    |
|                 | João Demócrito Florêncio                         | Sítio Serrote dos Bois - 4º Distrito - CEP 55.099-899      |
|                 | João XXIII                                       | Sítio Marimbondo - 4º Distrito - CEP 55.099-899            |
|                 | José Faustino Vila Nova                          | Sítio Japecanga - 4º Distrito - CEP 55.099-899             |
|                 | José Severino de Amorim                          | Assentamento Normandia - 4º Distrito - CEP 55.099-899      |
|                 | Nossa Senhora das Dores                          | Sítio Lagoa Roçada - 2º Distrito - CEP 55.099-899          |
|                 | Padre Antonio Faustino                           | Sítio Palmatória - 2º Distrito - CEP 55.099-899            |
|                 | Professora Cacilda Santos                        | Sítio Lagoa de Pedra de Cima - 4º Distrito- CEP 55.099-899 |
|                 | Professora Eunice Tabosa                         | Sítio Cajazeiras - 1º Distrito - CEP 55.099-899            |
|                 | Professora Maria de Lourdes Azevedo Lira         | Sítio Lajedo do Baixio - 4º Distrito - CEP 55.099-899      |
|                 | São José   | Sítio Patos - 2º Distrito - CEP 55.099-899                 |
| São Judas Tadeu | Fazenda Normandia - 4º Distrito - CEP 55.099-899 |  |

Fonte: A Autora (2022).

O Quadro 3, apresenta as coordenadas de latitude e longitude das escolas.

Quadro 3 – Numerações e Coordenadas (Latitude e Longitude) das Escolas.

| Numeração da Escola | Escola Municipal                 | Latitude  | Longitude  |
|---------------------|----------------------------------|-----------|------------|
| 0                   | Antonia Maria da Conceição Costa | -8,292142 | -36,041815 |
| 1                   | Antônio Martins                  | -8,334883 | -35,914755 |
| 2                   | Belísio Córdula                  | -8,353552 | -36,004173 |
| 3                   | João Luiz Torres                 | -8,306589 | -36,018621 |

|    |                                  |           |            |
|----|----------------------------------|-----------|------------|
| 4  | José Antonio de Lemos            | -8,363231 | -36,050708 |
| 5  | José Raimundo Sobrinho           | -8,339454 | -35,995394 |
| 6  | Manoel Bandeira                  | -8,302037 | -35,958944 |
| 7  | Maria Martins de Melo            | -8,300931 | -35,916142 |
| 8  | Nossa Senhora Aparecida          | -8,340010 | -35,892066 |
| 9  | Pedro de Andrade                 | -8,336399 | -36,023232 |
| 10 | Professora Maria Cândida         | -8,346029 | -35,901617 |
| 11 | Tomé Claudino Torres             | -8,354732 | -36,030490 |
| 12 | Adelino Alves da Silva           | -8,150328 | -36,078141 |
| 13 | Assentamento Macambira Borba     | -8,050551 | -36,043521 |
| 14 | João Patrício de Carvalho        | -8,049729 | -36,168091 |
| 15 | João Vênio da Silva              | -8,144442 | -36,110698 |
| 16 | Joaquim Nabuco                   | -8,015894 | -36,005319 |
| 17 | José Barbosa                     | -8,326372 | -35,958224 |
| 18 | Leonor Felicidade da Conceição   | -8,017456 | -36,090576 |
| 19 | Manoel Félix de Almeida          | -8,057942 | -36,071179 |
| 20 | Manoel Henrique da Silva         | -8,328308 | -35,967092 |
| 21 | Manoel Trajano de Arruda         | -8,155632 | -36,044051 |
| 22 | Manoel Valdevino                 | -8,144685 | -36,117280 |
| 23 | Maria José de França             | -8,089514 | -36,070071 |
| 24 | Sabino José Pereira da Silva     | -8,343318 | -35,935541 |
| 25 | Vicente Correia                  | -8,333634 | -35,940917 |
| 26 | Dr. Oscar Barreto                | -8,250062 | -35,946276 |
| 27 | Fortunato Ribeiro da Silva       | -8,227439 | -35,909180 |
| 28 | Francisco Borges                 | -8,199397 | -35,917666 |
| 29 | José Manoel da Silveira          | -8,207697 | -35,885327 |
| 30 | José Raimundo Paes de Lira       | -8,190558 | -35,912392 |
| 31 | Josefa Maria da Conceição Dandon | -8,192073 | -35,940848 |

|    |  |           |            |
|----|--|-----------|------------|
| 32 | Marcionilo Soares                        | -8,227573 | -35,876080 |
| 33 | Natalice Limeira                         | -8,249119 | -35,917462 |
| 34 | Professora Maria Emília                  | -8,257405 | -35,882651 |
| 35 | Santa Regina                             | -8,236644 | -35,898084 |
| 36 | São Luiz de Gonzaga                      | -8,247671 | -35,916078 |
| 37 | São Severino                             | -8,221556 | -35,894348 |
| 38 | São Vicente de Paula                     | -8,230486 | -35,882047 |
| 39 | Típica Rural                             | -8,258394 | -35,884202 |
| 40 | Abílio Luís de Torres                    | -8,244761 | -36,051236 |
| 41 | Batista da Silva                         | -8,217557 | -36,026302 |
| 42 | Cônego Julio Cabral                      | -8,208880 | -36,091274 |
| 43 | Dom Miguel Severino de Lima              | -8,221867 | -35,976787 |
| 44 | Dona Maria Digna                         | -8,251867 | -36,030452 |
| 45 | Francelino Guilherme de Azevedo          | -8,258925 | -36,054799 |
| 46 | João Cursino                             | -8,182219 | -36,126790 |
| 47 | João Demócrito Florêncio                 | -8,255812 | -36,064846 |
| 48 | João XXIII                               | -8,224373 | -36,074271 |
| 49 | José Faustino Vila Nova                  | -8,239570 | -36,030381 |
| 50 | José Severino de Amorim                  | -8,194987 | -35,970925 |
| 51 | Nossa Senhora das Dores                  | -8,055559 | -35,988950 |
| 52 | Padre Antonio Faustino                   | -8,096939 | -35,977150 |
| 53 | Professora Cacilda Santos                | -8,266176 | -36,036314 |
| 54 | Professora Eunice Tabosa                 | -8,242955 | -36,066383 |
| 55 | Professora Maria de Lourdes Azevedo Lira | -8,225436 | -36,011972 |
| 56 | São José                                 | -7,998518 | -35,932599 |
| 57 | São Judas Tadeu                          | -8,194665 | -35,971173 |

Fonte: A Autora (2022).

## APÊNDICE B - ALGORITMO DE IMPLEMENTAÇÃO DOS MODELOS

Inicialmente são importadas as bibliotecas usadas na resolução do problema, como a *Pyomo* (Linha 1) e a *Openpyxl* (Linha 2) que permite a leitura de arquivos Excel usando um código fácil. Em seguida, são definidos os modelos concretos de otimização no *Pyomo* (Linha 3), feito isso, pode-se determinar os índices das Escolas Núcleo e Escolas Nucleadas (Linhas 4 - 5) e seus respectivos conjuntos definindo uma lista de sequência simples (Linhas 6 - 7).

Como descrito anteriormente, os dados das distâncias que foram coletados, foram armazenados num arquivo Excel. Assim, foi possível fazer a leitura do arquivo (Linhas 8 - 9) e armazenar os dados numa matriz (Linhas 10 - 19), e os dados do número de alunos matriculados, discriminados na linha 63 do arquivo Excel (Linha 21), foram armazenados num vetor (Linhas 22 - 26). Como mostra o Quadro 5.

Quadro 5 – Representação Geral do Algoritmo para Construção dos Modelos.

| <i>ConstrucaoDoModelo()</i> |   |
|-----------------------------|---|
| 1.                          | <i>from pyomo.environ import *</i>  |
| 2.                          | <i>import openpyxl</i>  |
| 3.                          | <i>model = ConcreteModel()</i>  |
| 4.                          | <i>e_nucleos = 58</i>   |
| 5.                          | <i>e_nucleadas = 58</i>   |
| 6.                          | <i>nucleos = list(range(e_nucleos))</i>   |
| 7.                          | <i>nucleadas = list(range(e_nucleadas))</i>   |
| 8.                          | <i>planilha = openpyxl.load_workbook("distancias_escolas.xlsx")</i>   |
| 9.                          | <i>aba = planilha.worksheets[0]</i>   |
| 10.                         | <i>colunas = ["A", "B", "C", "D", "E", "F", "G", "H", "I", "J", "K", "L", "M", "N", "O", "P", "Q", "R", "S", "T", "U", "V", "W", "X", "Y", "Z", "AA", "AB", "AC", "AD", "AE", "AF", "AG", "AH", "AI", "AJ", "AK", "AL", "AM", "AN", "AO", "AP", "AQ", "AR", "AS", "AT", "AU", "AV", "AW", "AX", "AY", "AZ", "BA", "BB", "BC", "BD", "BE", "BF"]</i> |
| 11.                         | <i>linhas = list(range(1,59))</i>   |
| 12.                         | <i>matriz_dist = [ ]</i>  |
| 13.                         | <i>for l in linhas:</i>   |
| 14.                         | <i>linha = [ ]</i>  |
| 15.                         | <i>for c in colunas:</i>  |
| 16.                         | <i>cl = c + str(l)</i>  |
| 17.                         | <i>valor = aba[cl].value</i>  |
| 18.                         | <i>linha.append(valor)</i>  |
| 19.                         | <i>matriz_dist.append(linha)</i>  |
| 20.                         | <i>print(matriz_dist)</i>   |
| 21.                         | <i>vetor_num_alunos = [ ]</i>   |
| 22.                         | <i>l = 63</i>   |

```

23. for c in colunas:
24.     cl = c + str(l)
25.     valor = aba[cl].value
26.     vetor_num_alunos.append(valor)
    print(vetor_num_alunos)

```

Fonte: A Autora (2022).

Após a construção geral do modelo, o Quadro 6, apresenta o algoritmo para o problema de p-medianas. Nesta etapa, as variáveis de decisão, apresentadas na Seção 4.2, e os seus domínios são definidos (Linhas 27 - 30), é determinado o número de nucleações (Linha 31) e os parâmetros utilizados como fatores de ponderação (Linhas 32 - 34), que serão definidos a partir de diferentes cenários apresentados na Seção 5.3. Após estas determinações, pode-se declarar a função multiobjetivo (Linhas 35 - 37), que visa minimizar a soma do produto entre as distâncias e as escolas nucleadas, como também visa o balanceamento do número de escolas e de alunos de cada nucleação.

Com a função multiobjetivo definida, são declaradas as restrições do problema. Para isso, são criadas listas para armazenar cada tipo de restrições. A primeira lista de restrições limita a quantidade de escolas escolhidas para serem escolas núcleo (Linha 38 - 39). A segunda lista diz que todas as escolas têm que pertencer a apenas uma nucleação, sendo alocadas a uma única Escola Núcleo (Linhas 40 - 42). A terceira lista garante que as nucleadas apenas sejam alocadas às escolas escolhidas como núcleo, aos nós escolhidos como medianas (Linhas 43 - 46). A quarta lista visa balancear o número de alunos nas nucleações (Linhas 47 - 50), enquanto que a quinta lista visa balancear o número de escolas em cada nucleação (Linha 51 - 53). Por fim, temos a lista de restrições que determina quais escolas não podem ser consideradas Escolas Núcleo (Linhas 55 - 58), a partir de um vetor (Linha 54) que enumera quais as candidatas a núcleo.

Uma vez que tudo tenha sido definido, é possível resolver o problema (Linhas 59 - 61), e retornar o novo panorama das nucleações (Linhas 62 - 69), resultado da função multiobjetivo e tempo gasto para resolução do problema (Linhas 70 - 71).

Quadro 6 – Construção do Modelo p-Medianas.

```

Modelo_p_Medianas()

```

```

27. model.x = Var(nucleos, nucleadas, domain = Binary)

```

```

28. model.y = Var(nucleos, nucleadas, domain = Binary)
29. model.w = Var( domain = NonNegativeReals)
30. model.z = Var( domain = NonNegativeReals)
31. p_nucleacoes = 12
32. alpha = 1
33. beta = 1
34. gamma = 1
35. model.f_obj = Objective(expr = alpha * sum(matriz_dist[i][j] * for i in nucleos
36. for in nucleadas)
37.     + beta * model.w
38.     + gamma * model.z, sense = minimize)
39. model.qntd_nucleos = ConstraintList()
40. model.qnts_nucleos.add(expr = sum(model.y[i] for i in nucleos)
41. model.def_nucleadas = ConstraintList()
42. for j in nucleadas:
43.     model.def_nucleadas.add(expr = sum(model.x[i, j] for i in nucleos) == 1)
44. model.n_aloca = ConstraintList()
45. for i in nucleos:
46.     for j in nucleadas:
47.         model.n_aloca.add(expr = model.x[i, j] <= model.y[i])
48. model.balan_num_alunos = ConstraintList()
49. for i in nucleos:
50.     model.balan_num_alunos.add(expr = model.w >=
51.     sum(vetor_num_alunos[j] * model.x[i,j] for i in nucleadas))
52. model.balan_num_escolas = ConstraintList()
53. for i in nucleos:
54.     model.balan_num_escolas.add(expr = model.z >= sum(model.x[i, j] for i
55.     in nucleadas))
56. pode_ser_nucleo = [3, 8, 9, 11, 18, 19, 23, 26, 27, 28, 29, 33, 35, 36, 40, 43,
57. 44, 45, 53, 57]
58. model.nao_nucleo = ConstraintList()
59. for i in nucleos:
60.     if i not in pode_ser_nucleo:
61.         model.nao_nucleo.add(expr = model.y[i] == 0)
62. optimizer = SolverFactory('glpk')
63. results = optimizer.solve(model, tee = True)
64. temp = results.solver.time
65. for i in nucleos:
66.     if model.y[i].value > 0.1:
67.         print(f"Nucleo na escola {i}")
68.         print("Escolas nucleadas: ")
69.         for j in nucleadas:
70.             if model.x[i, j].value > 0.1:
71.                 print(j, end = ",")
        print()
print("Obj = ", model.f_obj.expr())
print("Tempo igual a = ", temp)

```

Após a construção geral, no Quadro 5, pode-se construir o algoritmo para o problema de p-centros, como mostra o Quadro 7. Para este modelo, as variáveis de decisão, apresentadas na Seção 4.2, e os seus domínios são definidos (Linhas 27 - 31), é determinado o número de nucleações (Linha 32) e os parâmetros utilizados como fatores de ponderação (Linhas 33 - 35), que serão definidos a partir de diferentes cenários apresentados na Seção 5.3. Após estas determinações, pode-se declarar a função multiobjetivo (Linhas 36 - 38), que visa minimizar a máxima distância de uma Escola Nucleada a Escola Núcleo a qual ela está alocada, como também visa o balanceamento do número de escolas e de alunos de cada nucleação.

Com a função multiobjetivo definida, são declaradas as restrições do problema. Para isso, são criadas listas para armazenar cada tipo de restrições. A primeira lista de restrições limita a quantidade de escolas escolhidas para serem escolas núcleo (Linha 39 - 40). A segunda lista diz que todas as escolas têm que pertencer a apenas uma nucleação, sendo alocadas a uma única Escola Núcleo (Linhas 41 - 43). A terceira lista garante que as nucleadas apenas sejam alocadas às escolas escolhidas como núcleo, aos nós escolhidos como medianas (Linhas 44 - 47). A quarta lista visa balancear o número de alunos nas nucleações (Linhas 48 - 51), enquanto que a quinta lista visa balancear o número de escolas em cada nucleação (Linha 52 - 54). A sexta lista visa balancear as distâncias que cada escola nucleada vai estar da escola núcleo (Linhas 55 - 58). Por fim, temos a lista de restrições que determina quais escolas não podem ser consideradas Escolas Núcleo (Linhas 60 - 63), a partir de um vetor (Linha 59) que enumera quais as candidatas a núcleo.

Uma vez que tudo tenha sido definido, é possível resolver o problema (Linhas 64 - 66), e retornar o novo panorama das nucleações (Linhas 67 - 74), resultado da função multiobjetivo e tempo gasto para resolução do problema (Linhas 75 - 76).

Quadro 7 - Construção do Modelo p-Centros.

| <i>Modelo_p_Centros()</i> |   |
|---------------------------|---|
| 27.                       | <i>model.x = Var(nucleos, nucleadas, domain = Binary)</i> |
| 28.                       | <i>model.y = Var(nucleos, nucleadas, domain = Binary)</i> |
| 29.                       | <i>model.r = Var( domain = NonNegativeReals)</i>          |
| 30.                       | <i>model.w = Var( domain = NonNegativeReals)</i>          |
| 31.                       | <i>model.z = Var( domain = NonNegativeReals)</i>          |
| 32.                       | <i>p_nucleacoes = 12</i>                                  |
| 33.                       | <i>alpha = 1</i>  |

```

34. beta = 1
35. gamma = 1
36. model.f_obj = Objective(expr = alpha * model.r
37.     + beta * model.w
38.     + gamma * model.z, sense = minimize)
39. model.qntd_nucleos = ConstraintList()
40. model.qnts_nucleos.add(expr = sum(model.y[i] for i in nucleos)
41. model.def_nucleadas = ConstraintList()
42. for j in nucleadas:
43.     model.def_nucleadas.add(expr = sum(model.x[i, j] for i in nucleos) == 1)
44. model.n_aloca = ConstraintList()
45. for i in nucleos:
46.     for j in nucleadas:
47.         model.n_aloca.add(expr = model.x[i, j] <= model.y[i])
48. model.balan_num_alunos = ConstraintList()
49. for i in nucleos:
50.     model.balan_num_alunos.add(expr = model.w >=
51.         sum(vetor_num_alunos[j] * model.x[i, j] for i in nucleadas))
52. model.balan_num_escolas = ConstraintList()
53. for i in nucleos:
54.     model.balan_num_escolas.add(expr = model.z >= sum(model.x[i, j] for i
55.         in nucleadas))
56. model.balan_dist = ConstraintList()
57. for j in nucleadas:
58.     model.balan_dist.add(expr = model.r >= sum(matriz_dist[i][j] * model.x[i,
59.         j]
60.         for i in nucleos for j in nucleadas))
61. pode_ser_nucleo = [3, 8, 9, 11, 18, 19, 23, 26, 27, 28, 29, 33, 35, 36, 40, 43,
62. 44, 45, 53, 57]
63. model.nao_nucleo = ConstraintList()
64. for i in nucleos:
65.     if i not in pode_ser_nucleo:
66.         model.nao_nucleo.add(expr = model.y[i] == 0)
67. optimizer = SolverFactory('glpk')
68. results = optimizer.solve(model, tee = True)
69. temp = results.solver.time
70. for i in nucleos:
71.     if model.y[i].value > 0.1:
72.         print(f"Nucleo na escola {i}")
73.         print("Escolas nucleadas: ")
74.         for j in nucleadas:
75.             if model.x[i, j].value > 0.1:
76.                 print(j, end = ",")
77.         print()
78. print("Obj = ", model.f_obj.expr())
79. print("Tempo igual a = ", temp)

```

Fonte: A Autora (2022).

A fim de melhor visualizar a distribuição das escolas nas nucleações, foi utilizado um algoritmo para plotar um gráfico, através das coordenadas de latitude e longitude, para ambos modelos matemáticos, como mostra o Quadro 8. O algoritmo irá abrir e ler os dados de latitude e longitude armazenados num arquivo texto (Linhas 1 - 3). Após a leitura do arquivo, os dados são armazenados em vetores X e Y, que são as coordenadas do gráfico cartesiano plotado (Linhas 4 - 9). Em seguida, são plotadas as ligações existentes entre as escolas nucleadas para a escola núcleo (Linhas 10 - 16) e posteriormente, plotados os pontos de onde estão localizadas as nucleadas e as núcleos (Linhas 17 - 24). Por fim, são definidas as legendas do gráfico, tamanho da fonte, resolução da imagem, nome e tipo de formato do arquivo 'image.png' (Linhas 25 - 28).

Quadro 8 – Algoritmo para Plotar Gráfico.

*PlotandoGrafico()*

```

1.  import matplotlib.pyplot as plt
2.  f = open("latitude_longitude.txt", "r")
3.  lines = f.readlines()
4.  x = []
5.  y = []
6.  for l in lines:
7.      sl = l.strip().split()
8.      x.append(float(sl[0]))
9.      y.append(float(sl[1]))
10. for i in nucleus:
11.     if model.y[i].value > 0.1:
12.         for j in nucleadas:
13.             if model.x[i, j].value > 0.1:
14.                 xp = [x[i], x[j]]
15.                 yp = [y[i], y[j]]
16.                 plt.plot(xp, yp, 'black', linestyle = '--')
17. plt.plot(x, y, 'bo')
18. xn = []
19. yn = []
20. for i in nucleos:
21.     if model.y[i].value > 0.1:
22.         xn.append(x[i])
23.         yn.append(y[i])
24. plt.plot(xn, yn, 'ro')
25. annotations = [str(i) for i in nucleadas]
26. for i, label in enumerate(annotations):
27.     plt.annotate(label, (x[i] + 0.001, y[i] + 0.001, fontsize = 8))
28. plt.savefig("image.png", dpi = 720)

```

Fonte: A Autora (2022).