



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE TECNOLOGIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

MATHEUS ARAÚJO CHAVES

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO VIA MÉTODOS
DE VOLUMES FINITOS UTILIZANDO DIFERENTES ESTRATÉGIAS DE
INTERPOLAÇÃO**

Caruaru

2022

MATHEUS ARAÚJO CHAVES

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO VIA MÉTODOS
DE VOLUMES FINITOS UTILIZANDO DIFERENTES ESTRATÉGIAS DE
INTERPOLAÇÃO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Engenharia Civil do Campus Agreste da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, na modalidade de artigo científico, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Civil.

Área de concentração: Simulação e Gerenciamento de Reservatórios de Petróleo

Orientador(a): Prof. Dr. Fernando Raul Licapa Contreras

Caruaru

2022

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela minha vida, e por me permitir ultrapassar todos os desafios e obstáculos vividos ao longo do curso.

Aos meus pais, Sérgio Ricardo e Mana Araújo, por toda confiança, apoio incondicional e incentivos, que muito contribuíram para a realização deste trabalho e para a conclusão de curso.

À minha namorada, Ágnes Sales, com qual pude compartilhar a jornada, por se fazer meu porto seguro em diversos momentos e sempre acreditar no meu potencial, me motivando a ser melhor a cada dia.

Aos amigos e colegas de curso, que sempre estiveram ao meu lado, tornando os dias mais leves, pela amizade incrível e pelo apoio demonstrado ao longo de todo esse período de tempo. Em especial, João Antônio, com o qual criei um vínculo ímpar de confiança e cumplicidade integral desde os primeiros períodos do curso.

Aos professores, por todos os ensinamentos, correções e competências com as quais guiaram o meu aprendizado. Em especial, ao professor José Moura, por todos os conselhos, ajudas, parcerias e incentivos ao longo da caminhada. Ao professor Washington de Lima, por todas as boas conversas e sua incrível capacidade de ilustrar e incentivar a busca pelo conhecimento. Ao professor Fernando Contreras, pela disposição e acolhimento de ter sido meu orientador em diversas esferas ao longo da graduação, desempenhando tal função com dedicação e amizade.

À Pórtis, empresa júnior de engenharia, na qual tive o privilégio de fazer parte ao longo da maior parte do curso, pela troca de experiências que me permitiram crescer não só como profissional, mas também como pessoa.

Aos companheiros da Prefeitura Municipal de Caruaru; Caixa Econômica Federal; MRV Engenharia e Participações e ABL Engenharia, com os quais pude ter oportunidade de vivenciar ensinamentos e conhecimentos técnicos dia após dia, me inspirando a ser um profissional de excelência.

À Universidade Federal de Pernambuco, que se tornou uma segunda casa, sendo essencial no meu processo de formação profissional, pela dedicação, e por tudo o que aprendi ao longo dos anos de curso em uma das melhores universidades do Brasil.

Às demais pessoas com as quais convivi ao longo desses anos de curso, que me incentivaram e que certamente tiveram impacto na minha formação acadêmica.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CS	Control Surface
CV	Control Volume
DMP	Discrete Maximum Principle
eLPEW2	Enriched Linearity Preserving Explicit Weights 2
eLSW	Extended Least Square Weights
LPEW1	Linearity Preserving Explicit Weights 1
LPEW2	Linearity Preserving Explicit Weights 2
LSW	Least Square Weights
MEF	Método dos Elementos Finitos
MDF	Método das Diferenças Finitas
MPFA	Multipoint Flux Approximation
MPFA-D	Multipoint Flux Approximation with Diamond Stencil
MPFA-QL	Multipoint Flux Approximation with Quasi-Local Stencil
MVF	Método dos Volumes Finitos
NL-TPFA	Non-linear Two Point Flux Approximation
SC	Superfície de Controle
TPFA	Two Point Flux Approximation
VC	Volume de Controle

LISTA DE SÍMBOLOS

i	Subíndice que representa o passo
Λ	Permeabilidade
R	Matriz de rotação
Ω	Domínio contínuo
Q	Termo de fonte ou sumidouro
Γ_D e Γ_N	Fronteira de Dirichlet e Neumann, respectivamente
p	Campo de pressão
∇p	Gradiente de pressão
F	Fluxo
ω	Pesos de interpolação

Simulação numérica de reservatórios de petróleo via métodos de volumes finitos utilizando diferentes estratégias de interpolação

Numerical simulation of oil reservoirs using finite volume methods with different interpolation strategies

Matheus Araújo Chaves¹

RESUMO

A simulação do escoamento de fluidos em reservatórios de petróleo compreende um conjunto de fenômenos físicos e químicos bastante complexos e de difícil modelagem física e matemática, assim como numérico-computacional. Para o analista numérico existem diversos fatores que fazem parte das formulações dos métodos numéricos existentes. Dentre esses fatores, ao se tratar de métodos de volumes finitos (MVF), as variáveis primárias são localizadas nos centros das células, enquanto as variáveis auxiliares podem estar situadas nos vértices e/ou nas faces da malha computacional. No MVF, comumente, as variáveis auxiliares são interpoladas em função das variáveis primárias. A escolha da estratégia de interpolação afeta fortemente a acurácia do método numérico utilizado na discretização do operador elíptico de pressão. De qualquer modo, sabe-se que a escolha do melhor método de interpolação depende fortemente do problema a ser tratado. Para o escopo deste trabalho, utiliza-se uma formulação via volumes finitos para equação de pressão, onde o meio poroso tem características geológicas complexas. Nesse contexto, detém-se interesse nos processos de interpolação pois percebe-se que influem diretamente tanto no estêncil quanto na construção do sistema matricial da simulação. Assim, através de experimentos numéricos conduzidos em meios altamente heterogêneos e anisotrópicos, adotando malhas poligonais distorcidas, é possível realizar uma análise categórica quanto à robustez e acurácia das soluções numéricas para a equação de pressão e como essas são influenciadas pelas diferentes estratégias de interpolação.

Palavras-chave: simulação de reservatórios de petróleo; escoamento monofásico; métodos interpoladores; métodos de volumes finitos.

¹Graduando em Engenharia Civil pela Universidade Federal de Pernambuco. E-mail: matheus.araujochaves@ufpe.br

ABSTRACT

The fluid flow simulation in oil reservoirs comprises a set of very complex physical and chemical phenomena that are difficult to model physically and mathematically, as well as numerically and computationally. For the numerical analyst there are several factors that are part of the formulations of the existing numerical methods. Among these factors, when dealing with finite volume methods (FVM), the primary variables are located at the centers of the cells, while the auxiliary variables can be located at the vertices and/or faces of the computational mesh. In FVM, commonly, auxiliary variables are interpolated as functions of primary variables. The choice of the interpolation strategy strongly affects the accuracy of the numerical method used in the elliptical pressure operator discretization. In any case, it is known that the choice of the best interpolation method strongly depends on the problem to be addressed. For the scope of this work, a finite volume formulation is used for the pressure equation, where the porous media has complex geologic characteristics. In this context, interest in the interpolation processes is held because it is noted that influences both the stencil and the construction of the matrix system of the simulation. The methods presented demonstrate a great numerical performance capability of the presented schemes in distorted meshes with strong anisotropy. Then, through numerical experiments conducted in highly heterogeneous and anisotropic media, adopting distorted polygonal meshes, it is possible to perform a categorical analysis regarding the robustness and accuracy of numerical solutions for the pressure equation and how these are influenced by the different interpolation strategies.

Keywords: oil resevoir simulation; mophasic flow; interpolation methods; finite volumes mehtods.

DATA DE APROVAÇÃO: 04 de Novembro de 2022.

1 INTRODUÇÃO

Os processos de difusão baseados em leis de conservação estão presentes em diversas aplicações da engenharia: a propagação de calor, o escoamento de fluidos em reservatórios de petróleo ou ainda a simulação de águas subterrâneas em aquíferos. Esses fenômenos físicos são matematicamente descritos por equações que possuem um operador elíptico com um chamado coeficiente de difusão ou tensor de difusão, que pode ser, em geral, descontínuo e representado por um tensor que geralmente pode apresentar uma alta razão de anisotropia.

A solução analítica destas equações muitas vezes pode não existir, devido à complexidade das equações governantes. Nesse sentido, a empregabilidade dos métodos numéricos nas soluções das equações é plausivelmente justificada. Assim, a modelagem numérica dos processos de difusão requer métodos numéricos cada vez mais sofisticados e robustos que sejam capazes de representar adequadamente os fenômenos físicos naturais estudados. Neste caso, modela-se numericamente a distribuição dos campos de pressão de reservatórios de petróleo ou aquíferos.

No método de volumes finitos, as variáveis primárias (incógnitas ou a solução numérica) são localizadas nos centros das células ou nos vértices, enquanto as variáveis auxiliares podem estar situadas nos vértices e/ou nas faces da malha computacional ou no centro da célula. Nota-se que a escolha da localização dos pontos de interpolação vai influenciar no estêncil do método numérico e, portanto, na acurácia e robustez.

Idealmente, deseja-se que o estêncil seja compacto, ou seja, que o fluxo discreto somente dependa de variáveis centradas nas células próximas a face em questão. As variáveis auxiliares devem ser interpoladas em função das variáveis primárias centradas na célula. Esse processo de interpolação será objeto de estudo no presente trabalho. Então, pretende-se explorar algumas das diferentes estratégias de interpolação existentes e a partir delas propor novas metodologias que ajudem a melhorar a robustez dos métodos numéricos propostos por Contreras (2016) e Contreras *et al.* (2019).

Nas últimas décadas, vários autores buscaram desenvolver diferentes técnicas para interpolar as variáveis auxiliares, como por exemplo: a interpolação da inversa distância proposta por Lipnikov *et al.* (2007); as metodologias baseadas em expansões em série de Taylor em Yuang e Sheng (2008); e as interpolações utilizadas nos métodos baseados no MPFA (Multipoint Flux Approximation Method) em Aavatsmark (2002) e Wu e Gao (2014).

Pensando nos trabalhos anteriores e suas limitações, Agélas *et al.* (2009) introduziu uma nova estratégia de interpolação bastante versátil baseada em pontos harmônicos. Para este

caso, os pontos de interpolação são localizados nas interfaces da malha computacional e são obtidos mediante uma ponderação que leva em conta as propriedades físico-geométricas. Esta estratégia fornece soluções exatas para problemas lineares, preserva a positividade dos pesos e não necessita do uso de matrizes locais. Porém, tem como limitação o fato de que os pontos harmônicos podem cair fora das interfaces quando analisados em meios porosos altamente heterogêneos e com tensores de permeabilidade anisotrópicos e de alta distorção de malha.

Em Gao e Wu (2011) dois métodos para interpolação dos vértices que preservam a linearidade foram propostos. O segundo deles, o chamado LPEW2 (Linearity Preserving Explicit Weights 2), tem certas vantagens, quando comparado com o LPEW1 (Linearity Preserving Explicit Weights 1), pelo fato de ser livre de parâmetros dinâmicos. Esta abordagem é bastante robusta mesmo para meios anisotrópicos e malhas ligeiramente distorcidas e tem sido bastante aplicado na simulação numérica do escoamento de fluidos em reservatórios de petróleo por Contreras *et al.* (2016), onde os autores nomearam essa metodologia como MPFA-D (Multipoint Flux Approximation Method with a Diamond Stencil). Entretanto, é difícil para o LPEW2 ser estendido para condições 3D já que sua derivação depende do fato de que células que compartilham o mesmo vértice interior possam ser ordenadas pela sua vizinhança como um loop fechado, uma propriedade que não é compartilhada por malhas poliédricas (LIRA FILHO *et al.*, 2021). Além disso, a presença de funções trigonométricas na derivação não permite a vetorização no cálculo dos pesos de interpolação. Um novo algoritmo interpolador que preserva linearidade foi proposto por Miao e Wu (2022), intitulado eLPEW2 (enriched LPEW2). Este novo algoritmo melhora o desempenho computacional do tempo de interações do método numérico MPFA-D e sua derivação revela que ele tem a possibilidade de ser estendido facilmente para o caso 3D e pode ser facilmente vetorizado.

Outro método de interpolação frequentemente utilizado é o proposto em Coudière *et al.* (1999) através de uma aproximação linear via mínimos quadrados, nomeada como LSW (Least Square Weights). Uma generalização dessa estratégia para uma reconstrução mais precisa das incógnitas localizadas nos vértices do contorno de Neumann foi desenvolvida em Manzini e Putti (2007). Esse método é de simples implementação e pode ser facilmente estendido para os casos 3D, entretanto ele não leva em consideração o efeito do tensor de difusão, o que causa certa perda de precisão quando o tensor é descontínuo e altamente anisotrópico. Os casos onde se existe necessidade de análise de tensores com descontinuidades podem ser abordados através do método intitulado eLSW (enriched LSW) (MIAO e WU, 2022).

Há ainda métodos que não utilizem variáveis auxiliares, por exemplo, o método de fluxo de dois pontos (Two-Point Flux Approximation – TPFA) é um exemplo típico dessa característica. No entanto, se determinada condição de ortogonalidade não for satisfeita, o esquema TPFA produzirá resultados completamente errados (AAVATSMARK, 2002). Em Lipnikov, Svyatskiy e Vassilevski (2009) foi proposto um método monótono livre de interpolação para problemas de difusão 2D, que é o primeiro esquema não linear livre de interpolação de aproximação de fluxo de dois pontos (NTPFA). Em seguida, foi estendido para o problema de difusão 3D em Danilov e Vassilevski (2009) e para a equação de difusão por advecção. Os algoritmos de aceleração iterativa não linear foram estudados em Vidović *et al.* (2011). Contudo, esses métodos são não lineares, podem ocasionar um custo computacional extra, pois o cálculo das soluções numéricas é obtido mediante um processo iterativo. Entretanto, eles podem entregar soluções com certas propriedades numéricas relevantes para a aplicação na engenharia.

Portanto, a maioria dos métodos de volumes finitos lineares ou não lineares têm incógnitas auxiliares de certos tipos. Assim, a interpolação relacionada e a análise teórica são duas questões importantes e que devem ser estudadas pois influem diretamente tanto no estêncil quanto na construção do sistema matricial do método numérico. Almeja-se implementar métodos numéricos baseados em métodos de volumes finitos e analisar categoricamente certos tipos de interpolação.

2 METODOLOGIA

No presente trabalho são utilizadas formulações de volumes finitos afim de modelar e discretizar o comportamento de processos de difusão baseados na equação da pressão para problemas de escoamento monofásico. Assim, primeiro construímos os fluxos unilaterais em cada superfície de controle e, em seguida, uma expressão de fluxo único é obtida por uma combinação convexa. As pressões nas faces são interpoladas utilizando diversas estratégias de interpolação.

2.1 Modelo Matemático

Nesta seção, descreve-se brevemente a equação que rege o problema de escoamento de fluidos monofásicos no interior de reservatórios de petróleo no estado estacionário, considerando meios porosos heterogêneos e anisotrópicos. Esse fenômeno pode ser descrito

pela seguinte equação de difusão, ou equação de pressão:

$$\nabla \cdot \vec{F} = Q(\vec{x}) \text{ com } \vec{F} = -\Lambda(\vec{x})\nabla p \text{ em } \vec{x} = (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

Onde Ω é um subconjunto limitado e aberto de \mathbb{R}^2 com $\partial\Omega$ sendo seu limite, p refere-se ao campo de pressão. O fluxo \vec{F} representa o fluxo de Darcy. O termo $Q(\vec{x})$ representa o termo fonte (ou sumidouro). Em coordenadas cartesianas, o tensor de difusão, ou tensor de permeabilidade, é geralmente representado na forma:

$$\Lambda(\vec{x}) = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Esta última sendo uma matriz simétrica positiva definida de forma que pode ser descontínua em todo o domínio aberto de Ω . O problema descrito na equação (1) apenas é completamente definido quando se utilizam as condições de contorno apropriadas. Condições de contorno tipicamente utilizadas são:

$$\begin{cases} p = g_D \text{ em } \Gamma_D \\ \vec{F} \cdot \vec{n} = g_N \text{ em } \Gamma_N \end{cases} \quad (3)$$

Onde $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, Γ_D e Γ_N representam os contornos de Dirichlet e Neumann, respectivamente. A função escalar g_D (variável escalar prescrita) é definida em Γ_D e g_N (fluxos prescritos) é definido em Γ_N . Além disso, \vec{n} é o vetor normal externo unitário.

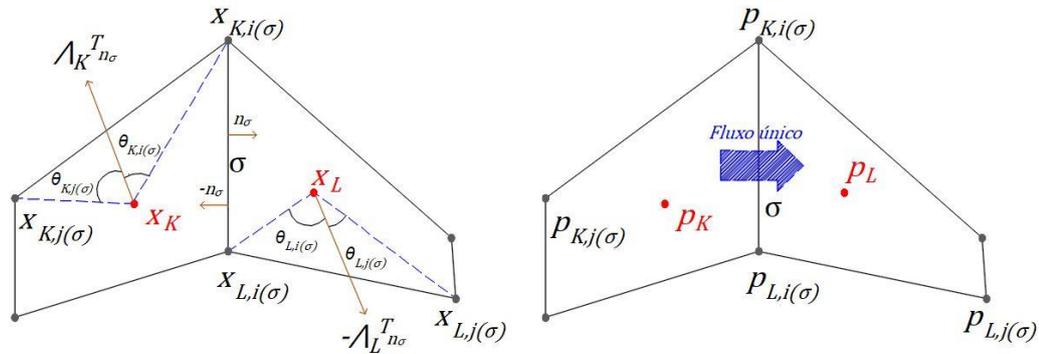
2.2 Método de discretização da equação de pressão

Ao longo deste trabalho, utilizam-se as seguintes notações para representações de variáveis:

- $M = \{K\}$ é o conjunto de células poligonais em forma de estrela e não sobrepostas, de tal forma que $\bar{\Omega} = \cup_{K \in M} \bar{K}$. A medida da célula genérica K é denotada por $|K|$. Seja $h = \max_{K \in M} h_K$ o tamanho da malha, onde h_K é o diâmetro de K . O volume de $K \in M$ é representado por V_K .

- $\mathcal{E} = \{\sigma\}$ é o conjunto de arestas (bordas) disjuntas de $\bar{\Omega}$. A medida da borda genérica σ é denotada por $|\sigma|$. Sejam $\mathcal{E}_{int} = \mathcal{E} \cap \Omega$ e $\mathcal{E}_{ext} = \mathcal{E} \cap \partial\Omega$ as representações dos conjuntos de bordas interiores e externas, respectivamente. Assume-se que para todo $K \in M$, existe um subconjunto \mathcal{E}_K de \mathcal{E} de forma que $\partial K = \cup_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \bar{\sigma}$. Para $\sigma \in \mathcal{E}_K$, $n_{K,\sigma}$ denota o vetor unitário normal a σ que aponta para fora de K .
- $x_K \in K$ é o centro da célula K , também representando o vetor posição do centro celular. Para $\sigma \in \mathcal{E}_K$, denota-se por $d_{K,\sigma}$ a distância ortogonal entre x_K e σ . Seja $d_\sigma = d_{K,\sigma} + d_{L,\sigma}$ se $\sigma = \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_L$ e $d_\sigma = d_{K,\sigma}$ se $\sigma = \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}$. A aproximação da solução u no centro da célula x_K é expressa como u_K e Λ_K representa $\Lambda(x_K)$.
- \mathcal{V} é o conjunto de todos os vértices e \mathcal{V}_{ext} denota o conjunto de vértices no contorno $\partial\Omega$.
- \simeq é utilizado para indicar que a aproximação relevante satisfaz o critério de preservação da linearidade, ou seja, quando a solução p é linear por partes e o tensor de difusão é constante em relação à malha, tem-se uma aproximação precisa.

Figura 1 – Caracterização dos parâmetros físico-geométricos



Fonte: Adaptado de Contreras *et al.* (2021).

Integrando a Eq. (1) sob todo o domínio de interesse e seguindo manipulações algébricas com a aplicação do teorema da divergência, considerando uma aproximação para cada volume de controle em que $K \in M$ é uma malha poligonal, podemos representar a equação de balanço de fluxo como:

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \vec{F}_\sigma \cdot \vec{N}_\sigma = \tilde{Q}_K, \quad \forall K \in M \quad (4)$$

Onde

$$\int_{\partial K} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \vec{F}_\sigma \cdot \vec{N}_\sigma \, e = \int_K Q \, dV = \tilde{Q}_K \quad (5)$$

Onde \vec{F}_σ e \tilde{Q}_K representam a densidade média de fluxo e o termo fonte ou sumidouro na borda σ , respectivamente. Sabendo que o fluxo numérico pode ser aproximado de diversas formas dentre esquemas lineares e não lineares de volumes finitos, a partir da Eq. (5), o fluxo unilateral através de σ em relação ao volume de controle genérico K pode ser expresso como:

$$\int_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}_\sigma \, ds = - \int_{\sigma} \Lambda_K \nabla_P \cdot \vec{n}_\sigma \, ds = - \int_{\sigma} \nabla_P \cdot \Lambda_K^T \vec{n}_\sigma \, ds, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_K \quad (6)$$

Sendo Λ_K^T o transposto do tensor de permeabilidade. Aproxima-se o termo $\nabla_P \cdot \Lambda_K^T \vec{n}_\sigma$ a partir da região triangular auxiliar ilustrada na Fig. 1. Considerando o triângulo $\Delta x_K x_{K,i(\sigma)} x_{K,j(\sigma)}$ para uma decomposição da co-normal $\Lambda_K^T \vec{n}_\sigma$ que é escrita como uma combinação linear dos segmentos $\overline{x_K x_{K,i(\sigma)}}$ e $\overline{x_K x_{K,j(\sigma)}}$. Assim, podemos expressar:

$$\Lambda_K^T \vec{n}_\sigma = \alpha_{K,i(\sigma)} \overline{x_K x_{K,i(\sigma)}} + \alpha_{K,j(\sigma)} \overline{x_K x_{K,j(\sigma)}} \quad (7)$$

Onde podemos definir os parâmetros $\alpha_{K,i(\sigma)}$ e $\alpha_{K,j(\sigma)}$ como:

$$\alpha_{i,r(\sigma)} = \frac{|\Lambda_i^T \vec{n}_\sigma| \sin(\theta_{i,\sigma}^1)}{|\overline{x_i x_{i,r(\sigma)}}| \sin(\theta_{i,\sigma}^1 + \theta_{i,\sigma}^2)}, \quad i = K, L; \quad r = i, j; \quad i \neq j \quad (8)$$

$\alpha_{K,i(\sigma)}$ e $\alpha_{K,j(\sigma)}$ são parâmetros positivos pois são sujeitos às restrições $\alpha_{K,i(\sigma)} > 0$, $\alpha_{K,j(\sigma)} > 0$ e $\alpha_{K,i(\sigma)} + \alpha_{K,j(\sigma)} > 0$ que devem ser aplicadas sob as condições $0 < \theta_{K,i(\sigma)}, \theta_{K,j(\sigma)} < \pi$ e $\theta_K = \theta_{K,i(\sigma)} + \theta_{K,j(\sigma)}$.

2.3 Construção do fluxo numérico

Aplicando a Eq. (7) na Eq. (6), é possível obter a seguinte expressão:

$$\int_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}_{\sigma} ds = - \int_{\sigma} (\alpha_{K,i(\sigma)} \nabla_P \cdot \overrightarrow{x_K x_{K,i(\sigma)}} + \alpha_{K,j(\sigma)} \nabla_P \cdot \overrightarrow{x_K x_{K,j(\sigma)}}) ds \quad (9)$$

Para construção do fluxo unilateral relacionado às superfícies de controle σ dos volumes de controle K e L utiliza-se um esquema de diferenças finitas local para aproximar as derivadas parciais de ∇_P ao longo das direções de $\overrightarrow{x_K x_{K,i(\sigma)}}$, $\overrightarrow{x_K x_{K,j(\sigma)}}$ e $\overrightarrow{x_L x_{L,i(\sigma)}}$, $\overrightarrow{x_L x_{L,j(\sigma)}}$. Expressa-se sua forma compacta como:

$$\vec{F}_{\sigma}^K \cdot \vec{N}_{\sigma} = |\sigma| (\psi_{K,\sigma} p_K - \sum_{\gamma=i,j} \alpha_{K,\gamma(\sigma)} p_{K,\gamma(\sigma)}) \quad (10)$$

$$\vec{F}_{\sigma}^L \cdot \vec{N}_{\sigma} = |\sigma| (\psi_{L,\sigma} p_L - \sum_{\gamma=i,j} \alpha_{L,\gamma(\sigma)} p_{L,\gamma(\sigma)}) \quad (11)$$

Onde $\psi_{K,\sigma} = \alpha_{K,i(\sigma)} + \alpha_{K,j(\sigma)}$ e $\psi_{K,\sigma} > 0$. De fôrma análoga, $\psi_{L,\sigma} = \alpha_{L,i(\sigma)} + \alpha_{L,j(\sigma)}$ e $\psi_{L,\sigma} > 0$. Agora, para construção de um fluxo único atuante sob σ , construindo um esquema a partir da seguinte combinação não linear:

$$\vec{F}_{\sigma} \cdot \vec{N}_{\sigma} = \vartheta_{K,\sigma} \vec{F}_{\sigma}^K \cdot \vec{N}_{\sigma} = -\vartheta_{L,\sigma} \vec{F}_{\sigma}^L \cdot \vec{N}_{\sigma} \quad (12)$$

Onde $\vartheta_{K,\sigma}$ e $\vartheta_{L,\sigma}$ são dois coeficientes positivos que dependem da variável de pressão. Substituindo a Eq. (10) e Eq. (11) na Eq. (12) e após algumas manipulações, obtém-se o fluxo único na superfície de controle σ :

$$\vec{F}_{\sigma} \cdot \vec{N}_{\sigma} = |\sigma| (\vartheta_{K,\sigma} \psi_{K,\sigma} p_K - \vartheta_{L,\sigma} \psi_{L,\sigma} p_L) + |\sigma| (\vartheta_{L,\sigma} a_{L,\sigma} - \vartheta_{K,\sigma} a_{K,\sigma}) \quad (13)$$

Onde $a_{K,\sigma} = \sum_{\gamma=i,j} \alpha_{K,\gamma(\sigma)} p_{K,\gamma(\sigma)}$ e $a_{L,\sigma} = \sum_{\gamma=i,j} \alpha_{L,\gamma(\sigma)} p_{L,\gamma(\sigma)}$. A fim de se obter um esquema de volumes finitos não linear monótono com uma aproximação de fluxo de dois pontos (NL-TPFA), os coeficientes não lineares $\vartheta_{K,\sigma}$ e $\vartheta_{L,\sigma}$ devem ser escolhidos satisfazendo os seguintes requisitos:

$$\begin{cases} \vartheta_{L,\sigma} a_{L,\sigma} - \vartheta_{K,\sigma} a_{K,\sigma} = 0 \\ \vartheta_{L,\sigma} - \vartheta_{K,\sigma} = 1 \\ \vartheta_{L,\sigma} \geq 0, \vartheta_{K,\sigma} \geq 0 \end{cases} \quad (14)$$

Seguindo o apresentado em Queiroz *et al.* (2014), sabe-se que o uso de estratégias de interpolação de segunda ordem em esquemas não lineares pode produzir campos de pressão oscilantes. Para a simulação de reservatórios de petróleo, isso pode ser considerado um fator prejudicial, possibilitando cálculo de velocidades de Darcy não físicas. Portanto, para garantir a positividade dos coeficientes mesmo quando os pesos de interpolação são negativos, podemos expressar:

$$\vartheta_{L,\sigma} = \frac{a_{K,\sigma} + e}{a_{K,\sigma} + a_{L,\sigma} + 2e}, \quad a_{K,\sigma} a_{L,\sigma} \geq 0; \quad \vartheta_{L,\sigma} = \frac{|a_{K,\sigma}| + e}{|a_{K,\sigma}| + |a_{L,\sigma}| + 2e}, \quad a_{K,\sigma} a_{L,\sigma} < 0 \quad (15)$$

$$\vartheta_{K,\sigma} = 1 - \vartheta_{L,\sigma} \quad (16)$$

Utiliza-se o fator $e = 10^{-16}$ para evitar divisões por zero. Quando $a_{K,\sigma} a_{L,\sigma} < 0$, os valores de $\vartheta_{L,\sigma}$ e $\vartheta_{K,\sigma}$ dados nas Eq. (15) e (16) não satisfazem o primeiro critério proposto na Eq. (15). Sendo assim, baseado em Wu e Gao (2014), introduzimos o seguinte termo na borda $\sigma \in \varepsilon_K \cap \varepsilon_L \subset \varepsilon_{int}$:

$$\beta_\sigma = \vartheta_{L,\sigma} a_{L,\sigma} - \vartheta_{K,\sigma} a_{K,\sigma} \quad (17)$$

Considerando $\beta_\sigma^+ = \frac{|\beta_\sigma| + \beta_\sigma}{2}$ e $\beta_\sigma^- = \frac{|\beta_\sigma| - \beta_\sigma}{2}$, a Eq. (13) pode ser reescrita como:

$$\vec{F}_\sigma \cdot \vec{N}_\sigma = |\sigma| (\vartheta_{K,\sigma} \psi_{K,\sigma} p_K - \vartheta_{L,\sigma} \psi_{L,\sigma} p_L + (\beta_\sigma^+ - \beta_\sigma^-)) \quad (18)$$

Após algumas manipulações algébricas, podemos expressar:

$$\vec{F}_\sigma \cdot \vec{N}_\sigma = w_{K,\sigma}(p) p_K - w_{L,\sigma}(p) p_L + |\sigma| \left(\frac{\beta_\sigma^+ e}{p_K + e} - \frac{\beta_\sigma^- e}{p_L + e} \right) \quad (19)$$

Onde

$$w_{K,\sigma}(p) = |\sigma| \left(\vartheta_{K,\sigma} \psi_{K,\sigma} + \frac{\beta_\sigma^+}{p_K + e} \right), \quad w_{L,\sigma}(p) = |\sigma| \left(\vartheta_{L,\sigma} \psi_{L,\sigma} + \frac{\beta_\sigma^-}{p_L + e} \right) \quad (20)$$

Como e é um número muito pequeno, o último termo na Eq. (19) é insignificante. Dessa forma, podemos reescrever essa equação na seguinte forma compacta:

$$\vec{F}_\sigma \cdot \vec{N}_\sigma = w_{K,\sigma}(p)p_K - w_{L,\sigma}(p)p_L \quad (21)$$

Finalmente, como os parâmetros $\vartheta_{K,\sigma}, \vartheta_{L,\sigma}, \psi_{K,\sigma}, \psi_{L,\sigma}, \beta_\sigma^+, \beta_\sigma^-$ tratados são positivos, então $w_{K,\sigma}(p)$ e $w_{L,\sigma}(p)$ também são positivos.

Assim, para uma borda genérica σ , o fluxo dado pela Eq. (21) é único, satisfazendo assim a equação de conservação local $\vec{F}_\sigma \cdot \vec{N}_\sigma + \vec{F}_{-\sigma} \cdot \vec{N}_{-\sigma} = 0$

2.4 Tratamento das condições de contorno

A partir das condições na Eq. (3) e das Eq. (10) e (11), uma expressão para o fluxo para as bordas σ contidas no contorno de Dirichlet $\Gamma_D \subset \varepsilon_K \cap \varepsilon_{ext}$, com pressões prescritas, é definida por:

$$\vec{F}_\sigma \cdot \vec{N}_\sigma = |\sigma|(\psi_{K,\sigma}p_K - \sum_{\gamma=i,j} \alpha_{K,\gamma(\sigma)}g_{D,K,\gamma(\sigma)}) \quad (22)$$

Onde as pressões nodais g_D são prescritas.

Agora, também a partir da Eq. (3), para bordas σ contidas no contorno de Neumann $\Gamma_N \subset \varepsilon_K \cap \varepsilon_{ext}$, com fluxos prescritos, podemos expressar:

$$\vec{F}_\sigma \cdot \vec{N}_\sigma = \bar{g}_{N_\sigma} \quad (23)$$

Onde o fluxo normal em Γ_N dado pelo valor médio \bar{g}_{N_σ}

2.5 Sistema discreto

Utilizando uma aproximação de fluxo para todas as células do domínio discreto, em que os fluxos são computados a partir do obtido pela Eq. (10), podemos obter um sistema não linear, na forma matricial que pode ser escrito como:

$$T(P)P = B(P) \quad (24)$$

$$\begin{cases} T_\sigma(P) = \begin{pmatrix} w_{K,\sigma}(p) & -w_{L,\sigma}(p) \\ -w_{K,\sigma}(p) & w_{L,\sigma}(p) \end{pmatrix}, \sigma \in \varepsilon_{int} \\ T_\sigma(P) = |\sigma|\psi_{K,\sigma} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma \in \Gamma_D \end{cases} \quad (25)$$

Onde T é chamada matriz de transmissibilidade, P é o vetor de pressão associado às células na malha computacional e B é o vetor que depende do termo fonte e das condições de contorno. A construção da matriz T depende da variável pressão, dos parâmetros físico-geométricos e dos pesos de interpolação. O sistema não-linear é resolvido utilizando o método iterativo de Picard juntamente ao acelerador de Anderson, pois quando se trata de meios altamente heterogêneos e anisotrópicos, utilizando malhas cada vez mais refinadas e distorcidas, as interações podem se tornar lentas e muito caras computacionalmente.

2.6 Estratégias de interpolação das incógnitas nos vértices

A partir de agora, descreveremos brevemente a lógica da metodologia de interpolação a ser formulada. Como já mencionado em seções anteriores, as variáveis auxiliares situadas nos vértices interiores precisam ser interpoladas em função de variáveis centradas nos volumes de controle.

Seja M_v o conjunto de células que compartilham o vértice interior x_v onde uma variável auxiliar p_v é definida. O algoritmo de interpolação que procuramos configura-se da seguinte forma:

$$u_v = \sum_{K \in M_v} \omega_k u_K \quad (26)$$

Onde ω_k são os devidos pesos de interpolação necessários para o cálculo de u_v . Essa fórmula de interpolação tem uma atribuição de preservação da linearidade, desde que:

$$u(x_v) \simeq \sum_{K \in M_v} \omega_k u(x_K) \quad (27)$$

A partir desse requisito, é possível observar que isso implica em:

$$\sum_{K \in M_v} \omega_k = 1 \quad (28)$$

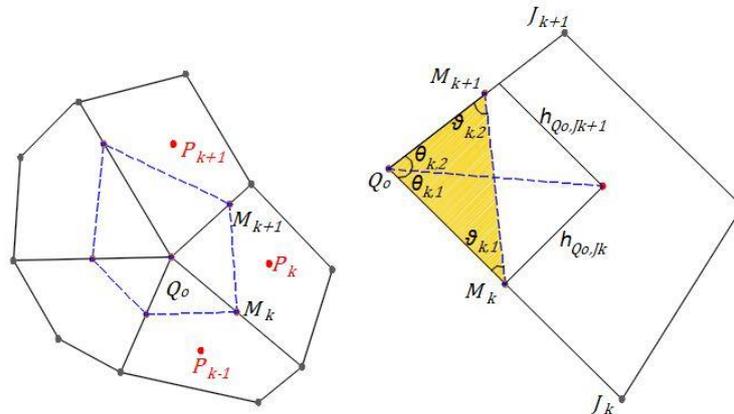
Para o caso de cálculo de variáveis de pressão, podemos reescrever a equação (26) na forma:

$$p_v = \sum_{K \in M_v} \omega_k p_K \quad (29)$$

2.6.1 Linearity Preserving Explicit Weights 2 (LPEW2)

Para essa estratégia de interpolação, escreve-se a pressão dos vértices como combinação de outras pressões centradas na sua vizinhança, onde os pesos de interpolação são obtidos de maneira explícita. Estes pesos são chamados de “explícitos” para indicar que são calculados sem a necessidade de resolver um sistema local de equações, como em outros métodos clássicos (AAVATSMARK, 2002).

Figura 2 – Representação do estêncil da estratégia LPEW2



Fonte: O autor (2022).

O cálculo dos pesos explícitos para a equação (29) é formulado utilizando a equação da continuidade através das regiões auxiliares construídas na vizinhança de cada vértice em questão. Seguindo Gao e Wu (2011), os pesos explícitos podem ser calculados como:

$$\omega_K = \frac{\bar{\omega}_K}{\sum_{K \in M_v} \bar{\omega}_K}, \quad \bar{\omega}_K = \Lambda_{K,1}^{(n)} \eta_{K,1} \zeta(K) + \Lambda_{K,2}^{(n)} \eta_{K,2} \zeta(K) \quad (30)$$

Os parâmetros $\zeta(K)$, $\eta_{K,1}$, $\eta_{K,2}$, $\Lambda_{K,1}^{(n)}$ e $\Lambda_{K,1}^{(t)}$ são dados pelas seguintes expressões:

$$\zeta(K) = \frac{\bar{\Lambda}_K^{(n)} \cot(\vartheta_{K,2}) - \bar{\Lambda}_K^{(t)} + \bar{\Lambda}_{K-1}^{(n)} \cot(\vartheta_{K-1,1}) - \bar{\Lambda}_{K-1}^{(t)}}{\Lambda_{K-1,2}^{(n)} \cot(\theta_{K-1,2}) + \Lambda_{K,1}^{(n)} \cot(\theta_{K,1}) - \Lambda_{K,2}^{(t)} + \Lambda_{K,1}^{(t)}} \quad (31)$$

$$\eta_{K,1} = \frac{\|\overrightarrow{Q_0 \bar{M}_K}\|}{h_{Q_0 J_K}^K} \quad e \quad \eta_{K,2} = \frac{\|\overrightarrow{Q_0 \bar{M}_{K+1}}\|}{h_{Q_0 J_{K+1}}^K} \quad (32)$$

Onde \bar{M} é ponto médio da face em questão e $\alpha = K + j - 1$; $j = 1, 2$.

$$\Lambda_{K,j}^{(n)} = \frac{[\vec{N}_{Q_0 \bar{M}_\alpha}^T \Lambda_k \vec{N}_{Q_0 \bar{M}_\alpha}]}{\|\overrightarrow{Q_0 \bar{M}_\alpha}\|^2} \quad e \quad \Lambda_{K,j}^{(t)} = \frac{[\vec{N}_{Q_0 \bar{M}_\alpha}^T \Lambda_k \overrightarrow{Q_0 \bar{M}_\alpha}]}{\|\overrightarrow{Q_0 \bar{M}_\alpha}\|^2} \quad (33)$$

Para esse caso, os coeficientes são dados por:

$$\bar{\Lambda}_{K,j}^{(n)} = \frac{[\vec{N}_{\bar{M}_k \bar{M}_{k+1}}^T \Lambda_k \vec{N}_{\bar{M}_k \bar{M}_{k+1}}]}{\|\overrightarrow{\bar{M}_k \bar{M}_{k+1}}\|^2} \quad e \quad \bar{\Lambda}_{K,j}^{(t)} = \frac{[\vec{N}_{\bar{M}_k \bar{M}_{k+1}}^T \Lambda_k \overrightarrow{\bar{M}_k \bar{M}_{k+1}}]}{\|\overrightarrow{\bar{M}_k \bar{M}_{k+1}}\|^2} \quad (34)$$

2.6.2 Enriched Linearity Preserving Explicit Weights 2 (eLPEW2)

Para essa estratégia de interpolação, escreve-se a pressão dos vértices como combinação de outras pressões centradas na sua vizinhança.

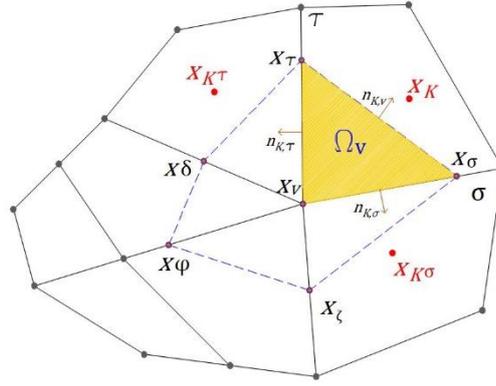
Para uma célula $K \in M_v$, onde M_v representa o conjunto de células, define-se $\sigma, \tau \in \mathcal{E}_K$ como sendo as duas arestas que compartilham um certo centro x_v pertencente à célula K_v . Considerando x_σ como um ponto na aresta σ e x_τ como um ponto na aresta τ , pode-se definir:

$$x_\alpha = x_v + \epsilon t_\alpha, \quad \alpha = \sigma, \tau. \quad (35)$$

Onde t_α é o vetor tangencial ao longo de α com x_v e comprimento $|\alpha|$. Onde $\epsilon \in (0, 1)$.

Primeiramente, define-se no domínio triangular $x_v x_\sigma x_\tau$ o tensor de difusão, que é um dos principais ingredientes da nova metodologia de interpolação. Em segunda instância, de posse da região triangular, obtém-se um domínio poligonal em torno do centro x_v , nomeado como Ω_v , conforme ilustrado na Figura 3. A partir disso, a derivação das formulações está sujeita ao critério de preservação da linearidade, ou seja, cada passo da derivação é exato sempre que a solução é linear por partes e o tensor de difusão é constante por partes.

Figura 3 – Representação do estêncil da estratégia eLPEW2



Fonte: O autor (2022).

Neste contexto, para derivar o eLPEW2, basta resolver a equação do problema de difusão em Ω_v por meio de uma abordagem via método dos volumes finitos. Expressa-se por $n_{K,v}$ o vetor normal a aresta definida por $x_\sigma x_\tau$ com comprimento $|x_\sigma x_\tau|$ e em direção externa de Ω_v . Considera-se $F_{K,v}$ como sendo uma aproximação que preserva a linearidade da expressão:

$$\int_{x_\sigma x_\tau} (-\Lambda(\vec{x})\nabla p) \cdot \left(\frac{n_{K,v}}{|x_\sigma x_\tau|} \right) ds \quad (36)$$

Dado por:

$$F_{K,v} = (-\Lambda(\vec{x})\nabla p) \cdot n_{K,v}, \quad p_{K,v} = \sum_{\alpha=v,\sigma,\tau} p_\alpha \phi_\alpha \quad (37)$$

Onde p_α é uma incógnita definida em x_α , enquanto ϕ_α é a função de base nodal de elemento finito padrão P1 no triângulo $x_v x_\sigma x_\tau$ em respeito a x_α . Sendo assim, integrando em os lados da expressão $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ e utilizando o teorema da divergência e aproximando a integral de linha por $F_{K,v}$, é possível obter a seguinte equação de volume finito:

$$\sum_{K \in M_v} F_{K,v} = 0 \quad (38)$$

Sabendo que:

$$\sum_{\alpha=v,\sigma,\tau} \phi_\alpha = 1, \quad \nabla \phi_\sigma = \frac{n_{K,v} + \epsilon|\sigma|n_{K,\sigma}}{2S_{K,v}}, \quad \nabla \phi_\tau = \frac{n_{K,v} + \epsilon|\tau|n_{K,\tau}}{2S_{K,v}} \quad (39)$$

Onde $S_{K,v}$ expressa a área da região triangular $x_v x_\sigma x_\tau$. Então:

$$\nabla p_{K,v} = \frac{n_{K,v} + \epsilon|\sigma|n_{K,\sigma}}{2S_{K,v}} (p_\sigma - p_v) + \frac{n_{K,v} + \epsilon|\tau|n_{K,\tau}}{2S_{K,v}} (p_\tau - p_v) \quad (40)$$

Então, baseado na simetria do tensor e das equações (37) e (38), tem-se que:

$$\sum_{K \in M_v} [\eta_{K,\sigma} (p_\sigma - p_v) + \eta_{K,\tau} (p_\tau - p_v)] = 0 \quad (41)$$

Onde define-se o parâmetro $\eta_{K,\beta}$ como sendo:

$$\eta_{K,\beta} = \frac{(\Lambda_{K,v} n_{K,v}) \cdot (n_{K,v} + \epsilon|\beta|n_{K,\beta})}{2S_{K,v}}, \quad \beta = \sigma, \tau. \quad (42)$$

Agora, trabalhando para eliminar p_σ e p_τ na equação (41). Seja $K_\sigma \in M_v$ e $K_\tau \in M_v$ as células que compartilham as arestas σ, τ , respectivamente, com K_v . De forma semelhante à equação (37), constrói-se 2 fluxos discretos através das arestas $x_v x_\sigma$ e $x_v x_\tau$, com base na aproximação linear de p nos triângulos $x_v x_\sigma x_K$ e $x_v x_\tau x_K$, respectivamente. Então, reforçando a continuidade do fluxo nas arestas σ, τ e através de alguns cálculos, tem-se que:

$$p_\beta - p_v = \frac{\epsilon \bar{\xi}_{K,\beta}}{\bar{\xi}_{K,\beta} + \bar{\xi}_{K_\beta,\beta}} (p_{K_\beta} - p_v) + \frac{\epsilon \bar{\xi}_{K_\beta,\beta}}{\bar{\xi}_{K,\beta} + \bar{\xi}_{K_\beta,\beta}} (p_{K_\beta} - p_v), \quad \beta = \sigma, \tau. \quad (43)$$

Onde

$$\bar{\xi}_{\alpha,\beta} = \frac{(\Lambda_{\alpha,v} \mathcal{R}t_\beta) \cdot \mathcal{R}t_\beta}{d_{\alpha,\beta}}, \quad \bar{\xi}_{\alpha,\beta} = \frac{(\Lambda_{\alpha,v} \mathcal{R}t_\beta) \cdot \mathcal{R}(x_\alpha - x_v)}{d_{\alpha,\beta}}, \quad \alpha = K, K_\beta, \beta = \sigma, \tau. \quad (44)$$

Substituindo a equação (43) na equação (41) e rearranjando o somatório resultante, tem-se:

$$\sum_{K \in M_v} \left[\frac{(\eta_{K,\sigma} + \eta_{K_\beta,\sigma}) \bar{\xi}_{K,\sigma}}{\bar{\xi}_{K,\sigma} + \bar{\xi}_{K_\beta,\sigma}} + \frac{(\eta_{K,\tau} + \eta_{K_\beta,\tau}) \bar{\xi}_{K,\tau}}{\bar{\xi}_{K,\tau} + \bar{\xi}_{K_\beta,\tau}} \right] (p_{K_\beta} - p_v) = 0 \quad (45)$$

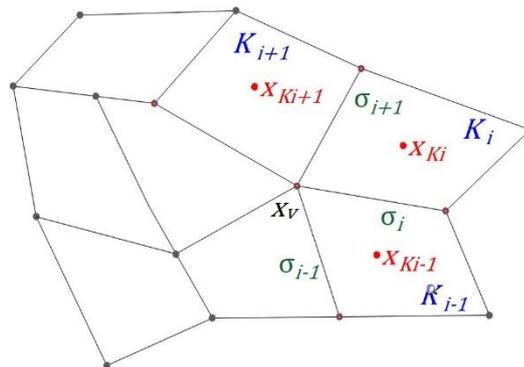
O que leva à seguinte fórmula de interpolação:

$$\omega_K = \frac{\bar{\omega}_K}{\sum_{K \in M_v} \bar{\omega}_K}, \quad \bar{\omega}_K = \frac{(\eta_{K,\sigma} + \eta_{K_\beta,\sigma}) \bar{\xi}_{K,\sigma}}{\bar{\xi}_{K,\sigma} + \bar{\xi}_{K_\beta,\sigma}} + \frac{(\eta_{K,\tau} + \eta_{K_\beta,\tau}) \bar{\xi}_{K,\tau}}{\bar{\xi}_{K,\tau} + \bar{\xi}_{K_\beta,\tau}} \quad (46)$$

2.6.3 Least Square Weights (LSW)

Seguindo o apresentado em Coudière *et al.* (1999), nessa estratégia de interpolação, assumindo que as células que compartilham o vértice interior x_v são $K_i (1 \leq i \leq n)$, ordenadas no sentido anti-horário, em que σ_i é a borda comum a K_i e K_{i+1} , conforme ilustrado na Figura (4).

Figura 4 – Representação do estêncil da estratégia LSW



Fonte: O autor (2022).

É possível construir uma aproximação linear para a pressão da forma:

$$p_h(x) = p_v + g_i \cdot (x - x_v), \quad x \in k_i \quad (47)$$

Onde $g_i = (g_{i1}, g_{i2})^T$ expressa o gradiente constante de p_h . Definindo $x = x_{K_i}$ e $y_i = x_{K_i} - x_v = (x_i, y_i)^T$ configura-se a Eq. (47) como:

$$p_h(x_{K_i}) = p_v + (g_{i1}, g_{i2})^T \cdot (x_i, y_i)^T \quad (48)$$

Desenvolvendo a expressão, chegamos na forma:

$$p_h(x_{K_i}) = p_v + g_{i1}x_i + g_{i2}y_i \quad (49)$$

A interpolação LSW consiste em escolher p_v, g_{i1}, g_{i2} de forma a minimizar a seguinte expressão quadrática:

$$L_P(p_h) = \sum_{i=1}^n (p_{K_i} - p_h(x_{K_i}))^2 \quad (50)$$

Ou seja:

$$\sum_{i=1}^n \left(p_{K_i} - p_h(x_{K_i}) \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} p_h(x_{K_i}) = 0, \quad \alpha = p_v, g_{i1}, g_{i2} \quad (51)$$

Dessa forma $\nabla_{p_v, g_{i1}, g_{i2}} p_h(x_{K_i}) = [1 \quad x_i \quad y_i]^T$, produzindo assim:

$$\begin{pmatrix} n & R_x & R_y \\ R_x & I_{xx} & I_{xy} \\ R_y & I_{xy} & I_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_v \\ g_{i1} \\ g_{i2} \end{pmatrix} = \left[\sum_{i=1}^n p_{K_i} \quad \sum_{i=1}^n x_i p_{K_i} \quad \sum_{i=1}^n y_i p_{K_i} \right]^T \quad (52)$$

Onde expressa-se:

$$R_x = \sum_{i=1}^n x_i, \quad R_y = \sum_{i=1}^n y_i, \quad I_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad I_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad I_{yy} = \sum_{i=1}^n y_i^2$$

Resolvendo o indicado na Eq. (52) pode-se configurar os pesos de interpolação como:

$$p_v = \sum_{i=1}^n \omega_i p_{K_i}, \quad \omega_i = \frac{1 + \lambda_x x_i + \lambda_y y_i}{n + \lambda_x R_x + \lambda_y R_y} \quad (53)$$

Os parâmetros λ_x, λ_y são dados pelas seguintes expressões:

$$\lambda_x = \frac{I_{xy} R_y - I_{yy} R_x}{D}, \quad \lambda_y = \frac{I_{xy} R_x - I_{xx} R_y}{D}, \quad D = I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2 \quad (54)$$

2.7. Modelo Numérico

A modelagem do sistema e compatibilização do método apresentado foi feita através de algoritmos computacionais interligados ao simulador matemático MATLAB (MATrix LABoratory). Sua escolha se deu graças a ele ser um simulador interativo de alta performance voltado para o cálculo numérico, bem como pelo fato de ser compatível com outras ferramentas computacionais amplamente aceitas pela comunidade internacional.

O MATLAB integra análise numérica, cálculo com matrizes, processamento de sinais e construção de gráficos em ambiente de fácil utilização, onde problemas e soluções podem ser

expressos de forma muito similar à como são escritos matematicamente, ao contrário de certos tipos de programação mais tradicionais.

A partir dos algoritmos trabalhados é possível se verificar e testar diversas situações características no gerenciamento de reservatórios de petróleo.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Ao longo dessa seção serão abordados os resultados das simulações de campos de pressão de reservatórios de petróleo com características geológicas adversas, utilizando malhas poligonais em geral, e suas respectivas análises em função do objetivo de categorizar a influência das estratégias de interpolação para as devidas metodologias de volumes finitos utilizadas.

3.1 Esquemas comparativos

A fim de realizar uma análise comparativa quanto a robustez e acurácia da abordagem numérica utilizada, adota-se a metodologia linear MPFA-D (Multipoint Flux Approximation with Diamond Stencil) proposta por Contreras *et al.* (2016). Associado a isso, iremos comparar também simulações utilizando a metodologia MPFA-QL (Multipoint Flux Approximation with Quasi-Local Stencil) proposta por Contreras *et al.* (2019). Os interpoladores ilustrados em seções anteriores serão utilizados nas múltiplas estratégias de volumes finitos dentre lineares e não lineares para uma análise categórica e comparativa.

3.2 Experimentos numéricos

Para o cálculo dos erros adotamos a norma discreta L2. Para o caso de solução de campos de pressão, adotamos a seguinte norma:

$$\mathfrak{E}_p = \left(\frac{\sum_{K \in M} (p(x_K) - p_K)^2 V_K}{\sum_{K \in M} V_K} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (55)$$

Onde $p(x_K)$ configura a solução obtida no baricentro x_K do volume de controle K , enquanto que para o fluxo, adotamos:

$$\mathfrak{E}_F = \left(\frac{\sum_{\sigma \in \varepsilon} ((F_n(x_\sigma) - F_\sigma) \cdot n_\sigma)^2 A_\sigma}{\sum_{\sigma \in \varepsilon} A_\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (56)$$

Sendo, na SC (Superfície de Controle) ou face σ , o fluxo analítico no ponto médio x_σ definido por $F_n(x_\sigma) = -\Lambda \nabla p(x_\sigma)$ e A_σ uma área representativa como a soma das áreas dos CVs que compartilham σ . As taxas de convergência numérica R_γ , onde $\gamma = p, F$ representam a pressão e o fluxo, respectivamente, são obtidas pela seguinte expressão:

$$R_\gamma = \frac{\log(\varepsilon_\gamma(h_2)/\varepsilon_\gamma(h_1))}{\log(h_2/h_1)} \quad (57)$$

onde h_1 e h_2 representam o tamanho de duas malhas sucessivas e $\varepsilon_\gamma(h_1)$ e $\varepsilon_\gamma(h_2)$ as respectivas normas L2 correspondentes dos erros. Os valores máximo e mínimo do campo de pressão são calculados usando as seguintes relações $p_{max} = \max\{p_K\}$ e $p_{min} = \min\{p_K\}$ $\forall K \in M$, respectivamente.

3.3 Teste de Acurácia: preservação da linearidade em dreno oblíquo

Este problema foi adaptado a partir de Herbin e Hubert (2008) e é utilizado para mostrar como os métodos produzem soluções lineares por partes em meios heterogêneos e anisotrópicos. Esse problema representa uma situação encontrada na engenharia de fluxo subterrâneo, onde um dreno oblíquo consistindo em uma camada muito permeável concentra a maior parte do fluxo. O domínio do problema é definido como:

$$\begin{cases} \Omega_1 = \{\vec{x} \in \Omega, \psi_1(\vec{x}) < 0\} \\ \Omega_2 = \{\vec{x} \in \Omega, \psi_1(\vec{x}) > 0, \psi_2(\vec{x}) < 0\}, \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \\ \Omega_3 = \{\vec{x} \in \Omega, \psi_2(\vec{x}) < 0\} \end{cases} \quad (58)$$

Onde $\psi_1(\vec{x}) = y - 0,2(x - 0,5) - 0,475$; $\psi_2(\vec{x}) = \psi_1(\vec{x}) - 0,05$ e $\vec{x} = (x, y) \in \Omega$. Para esse problema, utiliza-se uma malha oblíqua e a solução analítica pode ser representada como $p(\vec{x}) = 2 - x - 0,2y$ e o tensor de permeabilidade é dado por:

$$\Lambda(\vec{x}) = \mathcal{R}_\theta \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \mathcal{R}_{-\theta}, \quad \theta = \arctan(0,2) \quad (59)$$

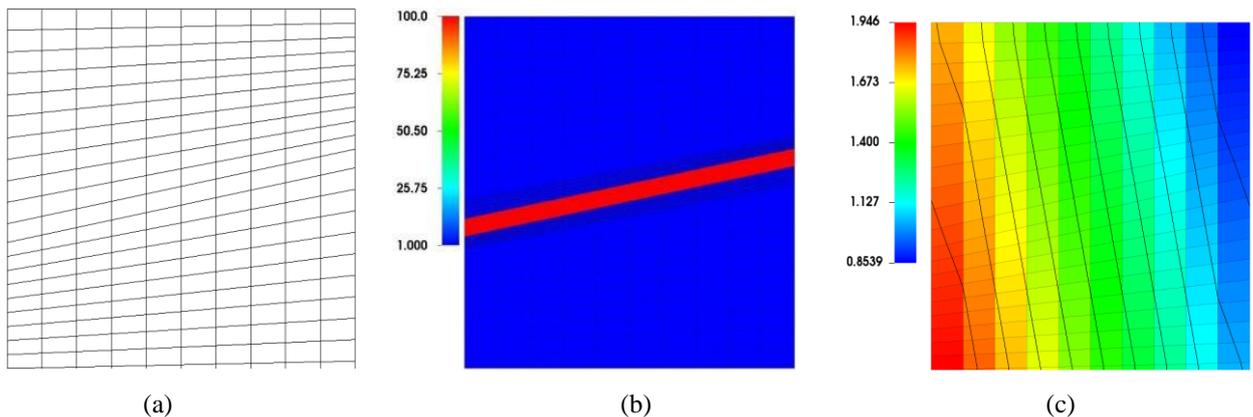
Onde $\alpha = 100, \beta = 10$ em Ω_2 e $\alpha = 1, \beta = 0,1$ em $\Omega_1 \cup \Omega_3$. A Tabela 1 ilustra a preservação da linearidade através dos resultados obtidos ao longo das simulações.

Tabela 1 – Erros encontrados sobre malha oblíqua

		NL-TPFA	MPFA-QL	MPFA-D
Malha	$m \times n$	10x21	10x21	10x21
CVs		210	210	210
LPEW2	\mathcal{E}_p	1,90E-12	8,31E-16	7,09E-16
	\mathcal{E}_f	1,20E-11	8,18E-14	5,91E-14
LSW	\mathcal{E}_p	1,69E-12	1,45E-14	1,45E-14
	\mathcal{E}_f	1,55E-11	1,03E-11	1,03E-11
eLPEW2	\mathcal{E}_p	1,90E-12	1,13E-16	5,46E-16
	\mathcal{E}_f	1,20E-11	1,59E-13	5,68E-14

Fonte: O autor (2022).

Figura 5 – (a) Malha oblíqua. (b) Domínio do problema. (c) Campo de pressão obtido com método NL-TPFA



Fonte: O autor (2022).

3.4 Teste de Acurácia: preservação da linearidade em meio homogêneo e heterogêneo

Este problema detém o enfoque em analisar como as estratégias LPEW2 e eLPEW2 se comportam em uma região $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ mediante malhas genéricas em meios diferenciados com diferentes graus de refinamento e como o determinado tempo de interação t é afetado.

3.4.1 Caso I: meio homogêneo

Considera-se um determinado tensor de permeabilidade definido como:

$$\Lambda(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (60)$$

Para o meio homogêneo considerado, pode-se definir a solução analítica como $p(\vec{x}) = x$.

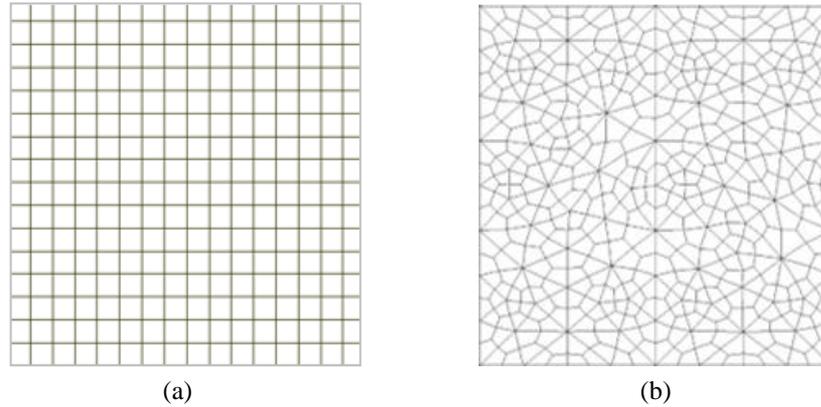
3.4.2 Caso II: meio heterogêneo

Para o meio heterogêneo, definimos um tensor de permeabilidade e uma solução analítica por partes, respectivamente, na forma:

$$\Lambda(\vec{x}) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & x \leq 0,5 \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, & x > 0,5 \end{cases} \quad (61)$$

$$\begin{cases} p(\vec{x}) = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}, & x \leq 0,5 \\ p(\vec{x}) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, & x > 0,5 \end{cases} \quad (62)$$

Figura 6 – (a) Malha estruturada quadrilateral. (b) Malha não estruturada quadrilateral



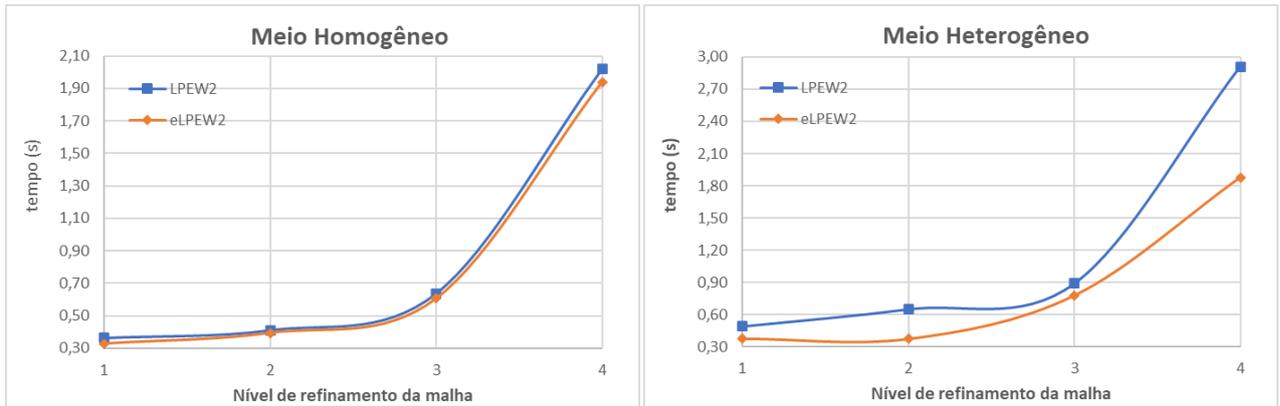
Fonte: O autor (2022).

Tabela 2 – Erros e tempos de interação para o método NL-TPFA

Homogêneo					Heterogêneo						
Malha	$m \times n$	8x8	16x16	32x32	64x64	Malha	$m \times n$	8x8	16x16	32x32	64x64
	h	1,25E-01	6,25E-02	3,13E-02	1,56E-02		h	1,25E-01	6,25E-02	3,13E-02	1,56E-02
CVs		64	256	1.024	4.096	CVs		64	256	1.024	4.096
LPEW2	\mathcal{E}_p	7,43E-14	2,88E-12	3,72E-10	1,34E-11	LPEW2	\mathcal{E}_p	2,01E-13	3,42E-12	4,18E-10	2,73E-11
	\mathcal{E}_f	5,14E-13	1,64E-11	1,75E-09	9,84E-11		\mathcal{E}_f	1,29E-12	2,22E-11	2,56E-09	4,08E-10
	tempo (s)	0,36	0,41	0,64	2,02		tempo (s)	0,49	0,65	0,89	2,91
eLPEW2	\mathcal{E}_p	7,46E-14	2,88E-12	3,72E-10	1,34E-11	eLPEW2	\mathcal{E}_p	2,00E-13	3,42E-12	4,18E-10	2,73E-11
	\mathcal{E}_f	5,14E-13	1,64E-11	1,75E-09	9,84E-11		\mathcal{E}_f	1,29E-12	2,22E-11	2,56E-09	4,08E-10
	tempo (s)	0,33	0,39	0,61	1,94		tempo (s)	0,38	0,37	0,78	1,88

Fonte: O autor (2022).

Figura 7 – Comportamento das interações no método NL-TPFA



Fonte: O autor (2022).

A partir desta análise gráfica para os tempos de interação, nota-se que para os casos mais simples em meio homogêneo, o método eLPEW2 demonstra ter um comportamento de resultados muito semelhantes ao método LPEW2. Isso se deve ao fato de que em meios homogêneos, o tensor de permeabilidade $\Lambda(\vec{x})$ é constante por partes em relação à malha, então o chamado termo $\Lambda_{K,v}$ reduz-se à Λ_K . Assim, comprova-se, como já esperado, que para esses casos o método eLPEW2 se reduz ao LPEW2 tradicional. Em meios heterogêneos, a proximidade entre resultados comprova uma melhor eficiência perceptível em relação ao comportamento dos métodos durante as simulações para casos distorcidos mais refinados.

3.5 Teste de Convergência: meio poroso heterogêneo e anisotrópico

Este problema, adaptado de Sheng e Yuan (2016), consiste em um domínio quadrado de dimensão $\Omega = [0,1]^2$ com um tensor de permeabilidade que varia em função da posição, definido por:

$$\Lambda(\vec{x}) = \mathcal{R}_\theta \begin{pmatrix} 1 + 2x^2 + y^2 & 0 \\ 0 & 1 + x^2 + 2y^2 \end{pmatrix} \mathcal{R}_{-\theta}, \quad \theta = 5\pi/12 \quad (63)$$

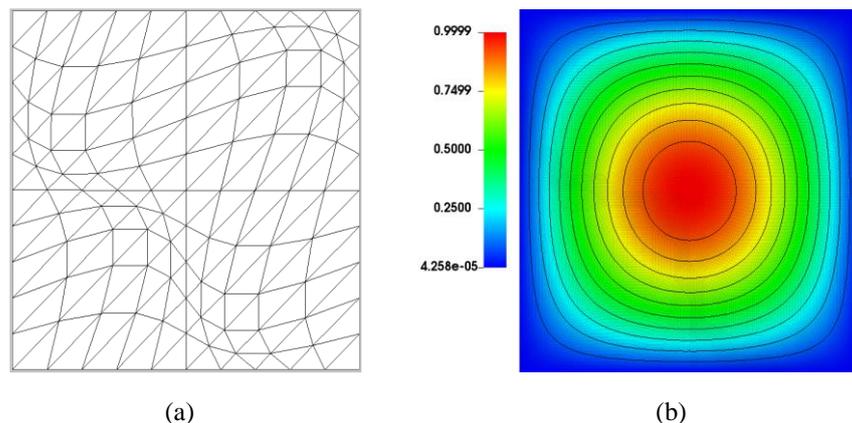
A solução analítica para esse problema é expressa por: $p(\vec{x}) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. As condições de contorno são obtidas diretamente da solução analítica. Para avaliar a robustez e a precisão do método, através das taxas de convergência, consideramos um conjunto de malhas triangulares e quadrilaterais distorcidas sucessivamente refinadas. A partir dos resultados, ilustrados na Tabela 3, é possível observar como os métodos associados aos diferentes interpoladores obtêm uma acurácia aproximada de segunda ordem para a solução.

Tabela 3 – Erros e taxas de convergência sobre malhas simuladas

Malha triangular levemente distorcida							Malha quadrilateral de Kershaw						
NL-TPFA							NL-TPFA						
Malha	$m \times n$	10x10	20x20	40x40	80x80	160x160	Malha	$m \times n$	12x12	24x24	48x48	96x96	192x192
	h	0,1	0,05	0,025	1,25E-02	6,25E-03		h	0,08333	0,04167	0,02083	0,01042	5,21E-03
	CVs	200	800	3.200	12.800	51.200		CVs	144	576	2.304	9.216	36.864
LPEW2	\mathcal{E}_p	0,0137	0,0039	0,0011	3,20E-04	8,74E-05	LPEW2	\mathcal{E}_p	0,0326	0,0209	0,0095	3,20E-03	8,96E-04
	R_p	-	1,81	1,83	1,78	1,87		R_p	-	0,64	1,14	1,57	1,84
	\mathcal{E}_f	0,1125	0,0400	0,0140	0,0049	0,0017		\mathcal{E}_f	0,5195	0,2998	0,1341	0,0484	0,0159
	R_f	-	1,49	1,51	1,51	1,53		R_f	-	0,79	1,16	1,47	1,61
LSW	\mathcal{E}_p	0,0132	0,0038	0,0011	3,27E-04	4,65E-05	LSW	\mathcal{E}_p	0,0335	0,0197	0,0087	0,0028	7,91E-04
	R_p	-	1,80	1,79	1,75	2,81		R_p	-	0,77	1,18	1,64	1,82
	\mathcal{E}_f	0,1134	0,0413	0,0146	0,0052	0,0019		\mathcal{E}_f	0,4746	0,2684	0,1193	0,0433	0,0145
	R_f	-	1,46	1,50	1,49	1,45		R_f	-	0,82	1,17	1,46	1,58
eLPEW2	\mathcal{E}_p	0,0137	0,0039	0,0011	3,20E-04	8,74E-05	eLPEW2	\mathcal{E}_p	0,0326	0,0209	0,0095	0,0032	8,96E-04
	R_p	-	1,81	1,83	1,78	1,87		R_p	-	0,64	1,14	1,57	1,84
	\mathcal{E}_f	0,1125	0,0400	0,0140	0,0049	0,0017		\mathcal{E}_f	0,5195	0,2998	0,1341	0,0484	0,0159
	R_f	-	1,49	1,51	1,51	1,53		R_f	-	0,79	1,16	1,47	1,61
MPFA-QL							MPFA-QL						
Malha	$m \times n$	10x10	20x20	40x40	80x80	160x160	Malha	$m \times n$	12x12	24x24	48x48	96x96	192x192
	h	0,1	0,05	0,025	1,25E-02	6,25E-03		h	0,083333	0,041667	0,020833	0,010417	5,21E-03
	CVs	200	800	3.200	12.800	51.200		CVs	144	576	2.304	9.216	36.864
LPEW2	\mathcal{E}_p	0,0093	0,0022	5,52E-04	1,38E-04	3,77E-05	LPEW2	\mathcal{E}_p	0,0495	0,0291	0,0126	0,0042	1,20E-03
	R_p	-	2,08	1,99	2,00	1,87		R_p	-	0,77	1,21	1,58	1,81
	\mathcal{E}_f	0,0694	0,0188	0,0049	0,0013	3,43E-04		\mathcal{E}_f	0,7275	0,3983	0,171	0,0607	1,97E-02
	R_f	-	1,88	1,94	1,91	1,92		R_f	-	0,87	1,22	1,49	1,62
LSW	\mathcal{E}_p	0,0091	0,0022	5,39E-04	1,38E-04	4,02E-05	LSW	\mathcal{E}_p	0,0489	0,027	0,0112	0,0036	1,09E-03
	R_p	-	2,05	2,03	1,97	1,78		R_p	-	0,86	1,27	1,64	1,73
	\mathcal{E}_f	0,0758	0,0218	0,006	0,0017	5,45E-04		\mathcal{E}_f	0,6698	0,3508	0,1482	0,0526	1,73E-02
	R_f	-	1,80	1,86	1,82	1,64		R_f	-	0,93	1,24	1,49	1,60
eLPEW2	\mathcal{E}_p	0,0093	0,0022	5,52E-04	1,38E-04	3,77E-05	eLPEW2	\mathcal{E}_p	0,0495	0,0291	0,0126	0,0042	1,20E-03
	R_p	-	2,08	1,99	2,00	1,87		R_p	-	0,77	1,21	1,58	1,81
	\mathcal{E}_f	0,0694	0,0188	0,0049	0,0013	3,43E-04		\mathcal{E}_f	0,7275	0,3983	0,171	0,0607	1,97E-02
	R_f	-	1,88	1,94	1,91	1,92		R_f	-	0,87	1,22	1,49	1,62
MPFA-D							MPFA-D						
Malha	$m \times n$	10x10	20x20	40x40	80x80	160x160	Malha	$m \times n$	12x12	24x24	48x48	96x96	192x192
	h	0,1	0,05	0,025	1,25E-02	6,25E-03		h	0,08333	0,04167	0,02083	0,01042	5,21E-03
	CVs	200	800	3.200	12.800	51.200		CVs	144	576	2.304	9.216	36.864
LPEW2	\mathcal{E}_p	0,0093	0,0022	5,52E-04	1,38E-04	3,77E-05	LPEW2	\mathcal{E}_p	0,032	0,0156	0,0055	0,0016	4,21E-04
	R_p	-	2,08	1,99	2,00	1,87		R_p	-	1,04	1,50	1,78	1,93
	\mathcal{E}_f	0,0694	0,0188	0,0049	0,0013	3,44E-04		\mathcal{E}_f	0,4076	0,1872	0,0702	0,0223	6,80E-03
	R_f	-	1,88	1,94	1,91	1,92		R_f	-	1,12	1,42	1,65	1,71
LSW	\mathcal{E}_p	0,0091	0,0022	5,39E-04	1,38E-04	4,02E-05	LSW	\mathcal{E}_p	0,0309	0,013	0,0042	0,0012	3,16E-04
	R_p	-	2,05	2,03	1,97	1,78		R_p	-	1,25	1,63	1,81	1,93
	\mathcal{E}_f	0,0759	0,0218	0,006	0,0017	5,45E-04		\mathcal{E}_f	0,3817	0,1686	0,0648	0,0222	7,40E-03
	R_f	-	1,80	1,86	1,82	1,64		R_f	-	1,18	1,38	1,55	1,58
eLPEW2	\mathcal{E}_p	0,0093	0,0022	5,52E-04	1,38E-04	3,77E-05	eLPEW2	\mathcal{E}_p	0,032	0,0156	0,0055	0,0016	4,21E-04
	R_p	-	2,08	1,99	2,00	1,87		R_p	-	1,04	1,50	1,78	1,93
	\mathcal{E}_f	0,0694	0,0188	0,0049	0,0013	3,43E-04		\mathcal{E}_f	0,4076	0,1872	0,0702	0,0223	6,80E-03
	R_f	-	1,88	1,94	1,91	1,92		R_f	-	1,12	1,42	1,65	1,71

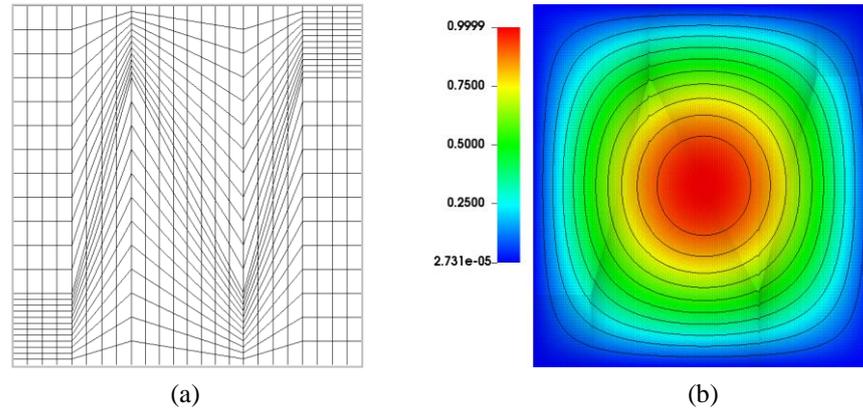
Fonte: O autor. (2022)

Figura 8 – (a) Malha triangular levemente distorcida. (b) Campo de pressão obtido pelo NL-TPFA



Fonte: O autor (2022).

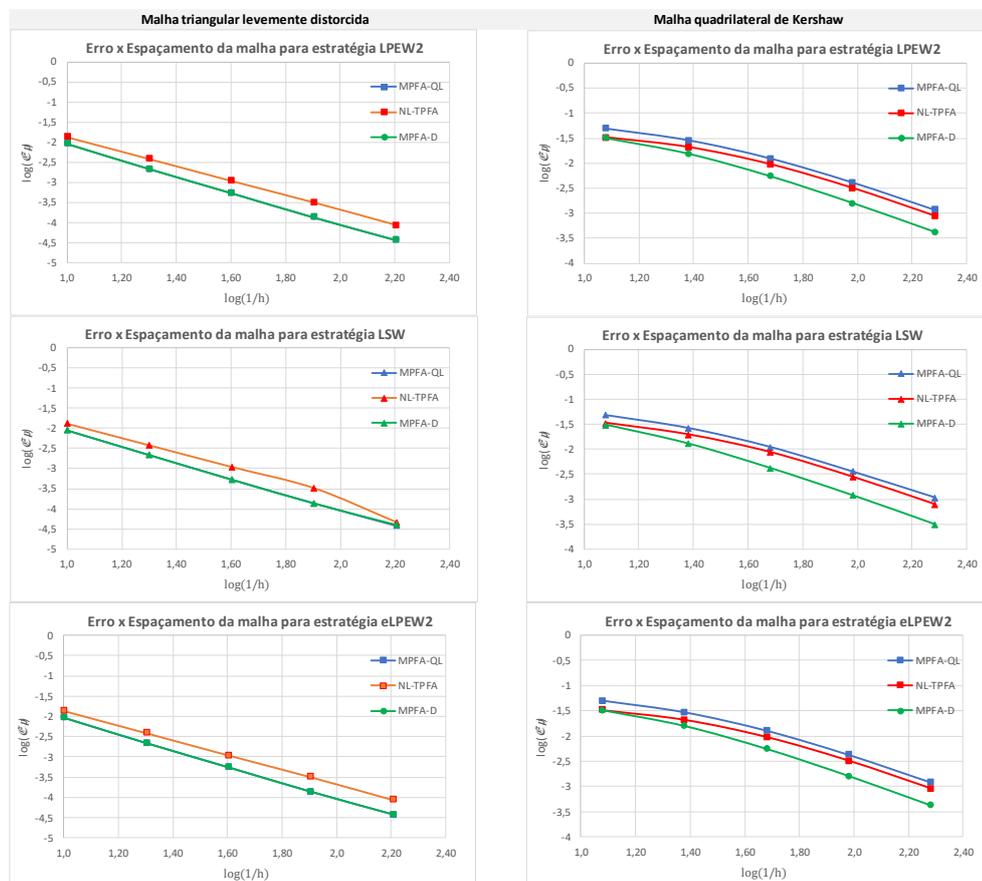
Figura 9 – (a) Malha quadrangular de Kershaw. (b) Campo de pressão obtido pelo NL-TPFA



Fonte: O autor (2022).

Ainda é possível analisar o comportamento da convergência da solução de forma isolada para cada interpolador. Para a malhas mais simples, como o caso da triangular levemente distorcida, é possível observar uma similaridade dos resultados nos métodos de aproximação por múltiplos pontos, enquanto que para a malha quadrilateral de Kershaw é possível ver uma tendência no comportamento dos métodos para todos os interpoladores adotados.

Figura 10 – Comportamento na convergência dos métodos analisados



Fonte: O autor (2022).

3.6 Teste de monotonicidade: meio poroso heterogêneo e anisotrópico

Esse problema foi adaptado de Gao e Wu (2013) e tem objetivo de verificar a positividade dos métodos utilizados. Consideramos um domínio quadrado unitário com pressão prescrita $p = 0$ nas bordas e termo fonte dado por:

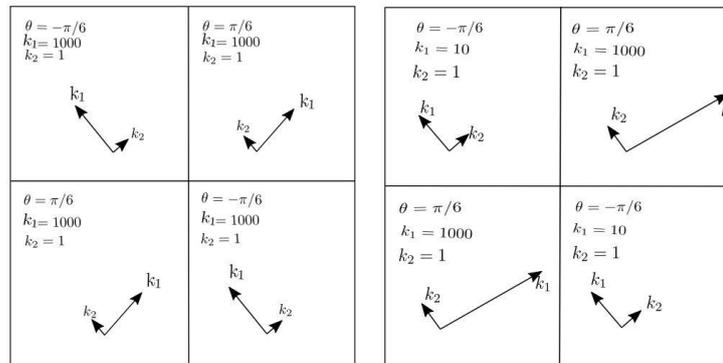
$$Q(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{81}{4}, & \vec{x} \in \left[\frac{7}{18}, \frac{11}{18}\right]^2 \\ 0, & \vec{x} \notin \left[\frac{7}{18}, \frac{11}{18}\right]^2 \end{cases} \quad (64)$$

O tensor de permeabilidade é dado por:

$$\Lambda(\vec{x}) = \mathcal{R}_\theta \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \mathcal{R}_{-\theta} \quad (65)$$

O domínio computacional para o problema é particionado em quatro subdomínios quadrados, conforme ilustrado na Figura 11:

Figura 11 – Subdomínios com (a) Caso I - Principais direções do tensor de permeabilidade com autovalores fixos. (b) Caso II – Padrão *chessboard*.



Fonte: Contreras *et al.* (2021).

O caso I consiste detém a seguinte configuração: $k_1 = 1000$ e $k_2 = 1$ com o ângulo θ sendo modificado em cada subdomínio. Para o caso II, existe uma distribuição chessboard para k_1 e k_2 com diferentes ângulos de rotação, conforme ilustrado na Figura 11.b. A discretização do domínio computacional é realizada utilizando duas malhas 72×72 aleatoriamente perturbadas ilustradas na Figuras 12.a e 12.a, que são construídas a partir de malhas uniformes estruturadas triangulares e quadrangulares com uma distorção aleatória das coordenadas (x, y) na forma:

$$x = x + 0,3\xi_x h; \quad y = y + 0,3\xi_y h; \quad \xi_x, \xi_y \in [-1,1] \quad (66)$$

Onde representa h o espaçamento original da malha. A partir dos resultados dispostos nas Tabelas 4 e 5, é possível observar que o método NL-TPFA garante a positividade, ou monotonicidade, da solução, enquanto os métodos MPFA-QL e MPFA-D, não conseguem manter a monotonicidade.

Tabela 4 – Comparativo para valores de pressão para o Caso I

Método		NL-TPFA		MPFA-QL		MPFA-D	
Malha	72x72	Triangular	Quadrilateral	Triangular	Quadrilateral	Triangular	Quadrilateral
CVs		10.368	5.184	10.368	5.184	10.368	5.184
LPEW2	p_{min}	1,93E-11	1,47E-11	-2,71E-05	-2,74E-05	-2,72E-05	-2,60E-05
	p_{max}	9,50E-03	9,30E-03	9,50E-03	9,30E-03	9,60E-03	9,40E-03
LSW	p_{min}	1,52E-11	1,36E-10	-2,91E-05	-6,46E-05	-2,49E-05	-8,18E-05
	p_{max}	9,50E-03	9,50E-03	9,50E-03	9,50E-03	9,60E-03	9,50E-03
eLPEW2	p_{min}	1,93E-11	1,47E-11	-2,71E-05	-2,74E-05	-2,72E-05	-2,60E-05
	p_{max}	9,50E-03	9,30E-03	9,50E-03	9,30E-03	9,60E-03	9,40E-03

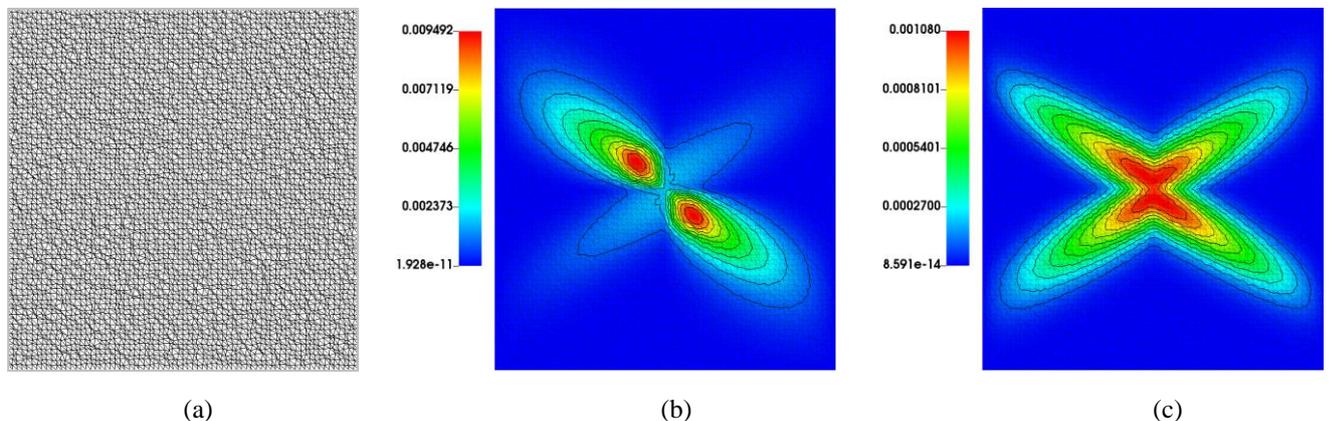
Fonte: O autor (2022).

Tabela 5 – Comparativo para valores de pressão para o Caso II

Método		NL-TPFA		MPFA-QL		MPFA-D	
Malha	72x72	Triangular	Quadrilateral	Triangular	Quadrilateral	Triangular	Quadrilateral
CVs		10.368	5.184	10.368	5.184	10.368	5.184
LPEW2	p_{min}	8,59E-14	1,36E-12	-1,95E-05	-2,38E-05	-1,94E-05	-2,66E-05
	p_{max}	1,10E-03	9,94E-04	1,10E-03	1,00E-03	1,10E-03	1,10E-03
LSW	p_{min}	7,64E-14	4,10E-15	-2,02E-05	-2,60E-05	-2,39E-05	-3,21E-05
	p_{max}	1,10E-03	1,00E-03	1,10E-03	1,00E-03	1,10E-03	1,10E-03
eLPEW2	p_{min}	8,59E-14	1,36E-12	-1,95E-05	-2,38E-05	-1,94E-05	-2,66E-05
	p_{max}	1,10E-03	9,94E-04	1,10E-03	1,00E-03	1,10E-03	1,10E-03

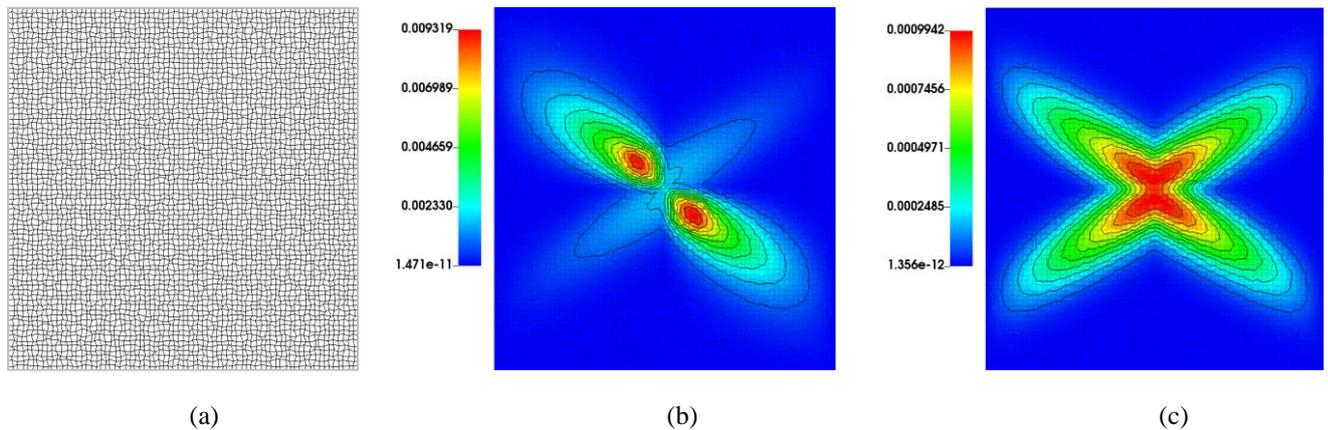
Fonte: O autor (2022).

Figura 12 – (a) Malha triangular utilizada. Campos de pressão obtidos via NL-TPFA para casos (b) I e (c) II



Fonte: O autor (2022).

Figura 13 – (a) Malha quadrilateral utilizada. Campos de pressão obtidos via NL-TPFA para casos (b) I e (c) II



Fonte: O autor (2022).

Então, é possível concluir que o NL-TPFA pode lidar com fortes discontinuidades no tensor de permeabilidade através das bordas da malha, como mostrado neste experimento numérico.

3.6 Teste de DMP: meio poroso extremamente heterogêneo e anisotrópico

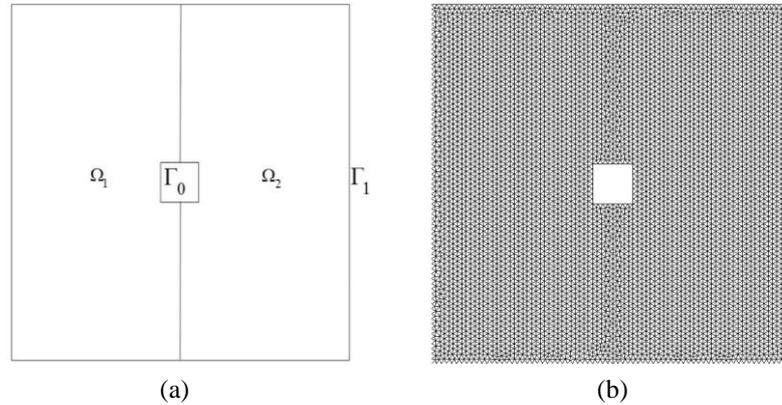
Esse teste tem o propósito de verificar possíveis violações para o DMP (Discrete Maximum Principle) nas soluções numéricas obtidas. Para isso, utilizando um problema adaptado de Queiroz *et al.* (2014), consideramos um domínio computacional quadrado unitário com um furo no interior, definido como $\Omega = [0,1]^2/[4/9,5/9]^2$ tal que o limite é a união disjunta de Γ_0 e Γ_1 . Além disso, é definido $g_D = 0$ em Γ_1 e $g_D = 2$ em Γ_0 e $Q(\vec{x}) = 0$. O tensor de permeabilidade é dado por:

$$\begin{cases} \Lambda(\vec{x}) = \mathcal{R}_\theta \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix} \mathcal{R}_{-\theta}, \vec{x} \in \Omega_1, x \leq 0.5 \\ \Lambda(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 10^3 x_1^2 + y_1^2 & -(1 - 10^3)x_1 y_1 \\ -(1 - 10^3)x_1 y_1 & x_1^2 + 10^3 y_1^2 \end{pmatrix}, \vec{x} \in \Omega_2, x > 0.5 \end{cases} \quad (67)$$

Onde $\theta = \frac{\pi}{2}$, $x_1 = x + 10^{-3}$ e $y_1 = y + 10^{-3}$. Nesse teste, utilizamos três níveis de refinamento para ilustrar o comparativo de soluções simuladas. Os resultados obtidos são expressos na Tabela 6 e é possível observar que o MPFA-QL e MPFA-D, assim como em outros métodos lineares, falha em satisfazer o DMP com todas as estratégias de interpolação verificadas, enquanto que ao se utilizar o NL-TPFA associado ao eLPEW2, é possível

verificar resultados próximos à solução de referência, conforme ilustrado na Fig. 15. Podemos ainda representar o domínio do problema como:

Figura 14 – (a) Domínio computacional. (b) Malha triangular não estruturada



Fonte: O autor (2022).

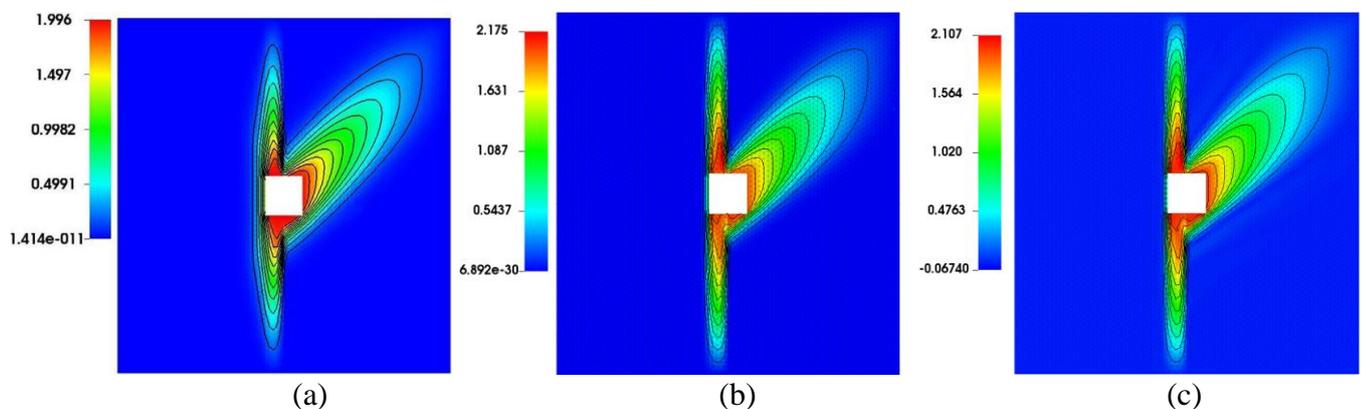
Ainda é possível avaliar e comparar o comportamento dos campos de pressão obtidos por métodos lineares e não lineares com a solução de referência obtida pelo método SSEPS.

Tabela 6 – Comparativo para valores de pressão

NL-TPFA					MPFA-QL					MPFA-D				
Malha	$m \times n$	18x18	36x36	72x72	Malha	$m \times n$	18x18	36x36	72x72	Malha	$m \times n$	18x18	36x36	72x72
CVs		734	2.730	12.008	CVs		734	2.730	12.008	CVs		734	2.730	12.008
LPEW2	p_{min}	1,86E-13	2,11E-21	6,89E-30	LPEW2	p_{min}	-0,2462	-0,0944	-0,0674	LPEW2	p_{min}	-1,0556	-0,4923	-1,0822
	p_{max}	2,1776	2,4419	2,1748		p_{max}	2,0067	2,176	2,1072		p_{max}	2,2814	2,4133	2,2914
LSW	p_{min}	2,15E-12	3,18E-14	5,33E-18	LSW	p_{min}	-0,3055	-1,948	-0,0913	LSW	p_{min}	-0,4238	-2,2823	-0,1070
	p_{max}	2,2535	2,553	2,141		p_{max}	2,0316	3,5286	2,0746		p_{max}	2,2333	3,8789	2,2806
eLPEW2	p_{min}	1,86E-13	2,11E-21	6,89E-30	eLPEW2	p_{min}	-0,2462	-0,0944	-0,0674	eLPEW2	p_{min}	-1,0556	-0,4923	-1,0822
	p_{max}	2,1776	2,4419	2,1748		p_{max}	2,0067	2,1796	2,1072		p_{max}	2,2814	2,4133	2,2914

Fonte: O autor (2022).

Figura 15 – (a) Solução de referência obtida com o método SSPES. Campos de pressão obtidos por (b) NL-TPFA e (c) MPFA-QL associados ao interpolador eLPEW2



Fonte: O autor (2022).

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho detém uma apresentação teórica, de maneira concisa e objetiva de métodos interpoladores que são utilizados para simulação da dinâmica dos fluidos em reservatórios de petróleo. Esses métodos utilizam metodologias baseadas nos métodos de volumes finitos centrados nas células. Os problemas abordados caracterizam situações de difusão dos fluidos em meios com características fortemente heterogêneas e com alto grau de anisotropia sobre malhas distorcidas. Para essa aproximação numérica da equação elíptica da pressão, propomos o uso de métodos que utilizam o procedimento de iteração de Picard, cuja eficiência computacional é melhorada através o método de aceleração de Anderson. Alguns exemplos representativos de modelos monofásicos foram resolvidos para ilustrar a acurácia e robustez dos métodos estudados para lidar com diversos problemas. Destaca-se a versão enriquecida do LPEW2, que para casos de malhas distorcidas combinadas com tensores de difusão fortemente anisotrópicos e heterogêneos, prova ser levemente mais robusto do que seu antecessor. Através de simulações e experimentos numéricos foi possível avaliar situações pertinentes para contribuição e validação das formulações propostas, fornecendo resultados que possibilitam analisar e facilitar a tomada de decisão adequada diante de várias situações existentes. Destaca-se que a estratégia de interpolação eLPEW2 demonstrou uma taxa de convergência relativamente maior quando comparada ao LSW. Esse fato deve-se a tendência do LSW de possuir perda de precisão em casos de tensores anisotrópicos e descontínuos. Ao comparar o eLPEW2 com o LPEW2, mesmo com resultados consistentes e similares nos métodos analisados, a concepção e simplicidade de implementação computacional do eLPEW2, bem como o fato de que sua derivação não depende de funções trigonométricas, contribuiu na eficiência computacional dos resultados. Para contribuições futuras, almeja-se buscar entender e desenvolver métodos não lineares livres de interpoladores, bem como continuar aperfeiçoando as estratégias de interpolação para que sejam cada vez mais robustos para a construção de métodos não lineares.

REFERÊNCIAS

AAVATSMARK, I. **An introduction to multipoint flux approximations for quadrilateral grids**. Computational Geosciences, Springer, v. 6, n. 3-4, p. 405–432, 2002.

- AGÉLAS, L.; EYMARD, R.; HERBIN, R. **A nine-point finite volume scheme for the simulation of diffusion in heterogeneous media**. *Comptes Rendus Mathématique*, Elsevier, v. 347, n. 11, p. 673–676, 2009.
- CONTRERAS, F.; LYRA, P.; SOUZA, M.; CARVALHO, D. **A cell-centered multipoint flux approximation method with a diamond stencil coupled with a higher order finite volume method for the simulation of oil–water displacements in heterogeneous and anisotropic petroleum reservoirs**. *Computers & Fluids*, Elsevier, v. 127, p. 1–16, 2016.
- CONTRERAS F. R. L. **Métodos de volumes finitos robustos para a simulação de escoamentos bifásicos de água e óleo em reservatórios de petróleo**. Tese de doutorado. Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), 2016.
- CONTRERAS F. R. L., LYRA P. R. e CARVALHO D. K. E. de. **A new multipoint flux approximation method with a quasi-local stencil (MPFA-QL) for the simulation of diffusion problems in anisotropic and heterogeneous media**. Em: *Applied Mathematical Modelling*, v.70, p. 659–676, 2019.
- COUDIÈRE, Y.; VILA, J. P.; VILLEDIEU, P. **Convergence rate of a finite volume scheme for a two dimensional convection-diffusion problem**. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, v. 33(3), p. 493-516, 1999.
- DANILOV, A. A.; VASSILEVSKI, Yu. V. **A monotone nonlinear finite volume method for diffusion equations on conformal polyhedral meshes**. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, vol. 24, no. 3, p. 207-227. 2009.
- GAO, Z.; WU, J. **A linearity-preserving cell-centered scheme for the heterogeneous and anisotropic diffusion equations on general meshes**. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley Online Library, v. 67, n. 12, p. 2157–2183, 2011.
- GAO, Z.; WU, J. **A small stencil and extremum-preserving scheme for anisotropic diffusion problems on arbitrary 2D and 3D meshes**. *Journal of Computational Physics*, v. 250, p. 308–331, 2013.
- HERBIN, R.; HUBERT, F. **Benchmark on discretization schemes for anisotropic diffusion problems on general grids**. In: WILEY. *Finite volumes for complex applications V*. [S.l.], p. 659–692, 2008.
- LIPNIKOV, K.; SHASHKOV, M.; SVYATSKIY, D.; VASSILEVSKI, Y. **Monotone finite volume schemes for diffusion equations on unstructured triangular and shape-regular polygonal meshes**. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 227, n. 1, p. 492–512, 2007.
- LIPNIKOV, K.; SVYATSKIY, D.; VASSILEVSKI, Y. **Interpolation-free monotone finite volume method for diffusion equations on polygonal meshes**. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 228, n. 3, p. 703–716, 2009.
- LIRA FILHO, R. J. M. de; SANTOS, S. R. dos; CAVALCANTE, T. M.; CONTRERAS, F. R. L.; LYRA P. R. e CARVALHO D. K. E. de. **A linearity-preserving finite volume scheme with a diamond stencil for the simulation of anisotropic and highly**

heterogeneous diffusion problems using tetrahedral meshes. Computers & Structures, v. 250, 2021.

MANZINI, G.; PUTTI, M. **Mesh locking effects in the finite volume solution of 2-D anisotropic diffusion equations.** Journal of Computational Physics, v. 220, p. 751-771, 2007.

MIAO, S.; WU, J. **A nonlinear correction scheme for the heterogeneous and anisotropic diffusion problems on polygonal meshes.** Journal of Computational Physics, v.448, 2022.

QUEIROZ, L.; SOUZA, M.; CONTRERAS, F.; LYRA, P.; CARVALHO, D. **On the accuracy of a nonlinear finite volume method for the solution of diffusion problems using different interpolations strategies.** International Journal for Numerical Methods in Fluids, Wiley Online Library, v. 74, n. 4, p. 270–291, 2014.

SHENG, Z.; YUAN, G. **A cell-centered nonlinear finite volume scheme preserving fully positivity for diffusion equation.** Journal of Scientific Computing, Springer, p. 1–25, 2015.

VIDOVIĆ, D.; DIMKIĆ, M.; PUŠIĆ, M. **Accelerated non-linear finite volume method for diffusion.** Journal of computational physics, Elsevier, v. 230, n. 7, p. 2722–2735, 2011.

WU, J.; GAO, Z. **Interpolation-based second-order monotone finite volume schemes for anisotropic diffusion equations on general grids.** Journal of Computational Physics, Elsevier, v. 275, p. 569–588, 2014.

YUAN, G.; SHENG, Z. **Monotone finite volume schemes for diffusion equations on polygonal meshes.** Journal of computational physics, Elsevier, v. 227, n. 12, p. 6288–6312, 2008.

MATHEUS ARAÚJO CHAVES

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO VIA MÉTODOS
DE VOLUMES FINITOS UTILIZANDO DIFERENTES ESTRATÉGIAS DE
INTERPOLAÇÃO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Engenharia Civil do Campus Agreste da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, na modalidade de artigo científico, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Civil. Defesa realizada por videoconferência.

Área de concentração: Simulação e Gerenciamento de Reservatórios de Petróleo

Aprovado em 04 de novembro de 2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fernando Raul Licapa Contreras (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Mariana Fernandes dos Santos Villela (Avaliadora)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Alessandro Romário Echevarria Antunes (Avaliador)
Universidade Federal de Pernambuco