UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO MATEMÁTICA-LICENCIATURA

DÉRIC VINICÍUS DOS SANTOS

SITUAÇÕES DE FUNÇÃO EXPONENCIAL:
um mapeamento das estruturas à luz da Teoria dos Campos Conceituais

Caruaru
2022

DÉRIC VINICÍUS DOS SANTOS

SITUAÇÕES DE FUNÇÃO EXPONENCIAL:

um mapeamento das estruturas à luz da Teoria dos Campos Conceituais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada/o em Matemática.

Área de concentração: Ensino (Matemática)

Orientador: Profa. Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira

Caruaru

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Santos, Déric Vinicíus dos Santos.
Situações de Função Exponencial: um mapeamento das estruturas à luz da Teoria dos Campos Conceituais / Déric Vinicíus dos Santos Santos. - Caruaru, 2022.
105 : il., tab.

Orientador(a): Verônica Gitirana Gomes Ferreira Gitirana
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, , 2022.
Inclui referências, anexos.

1. Situações. 2. Conceito. 3. Teoria dos Campos Conceituais. 4. Função Exponencial. I. Gitirana, Verônica Gitirana Gomes Ferreira. (Orientação). II. Título.

370 CDD (22.ed.)

DÉRIC VINICÍUS DOS SANTOS

SITUAÇÕES DE FUNÇÃO EXPONENCIAL:

um mapeamento das estruturas à luz da Teoria dos Campos Conceituais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada/o em Matemática.

Aprovada em: 24/10/2022.

BANCA EXAMINADORA

____

Profa. Dra.Verônica Gitirana Gomes Ferreira (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Prof. Dr. Valdir Bezerra dos Santos Júnior (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Profa. Dra. Veridiana Rezende (Examinadora Externa)
Universidade Estadual do Paraná

Dedico esse trabalho à minha mãe, **Ana Maria dos Santos**, por todo apoio prestado durante minha trajetória educacional, desde o infantil até aqui. À senhora, minha mãe, meu muito obrigado! Obrigado por todos os sonhos sonhados ao meu lado e por me ajudar ou lutar minhas lutas por mim.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, provedor de todas as coisas, por toda saúde, paz e sabedoria que me proporcionou, não só durante a construção deste trabalho, mas em toda minha vida.

A toda minha família, por todo apoio e incentivo prestados durante a minha graduação e construção deste trabalho, em especial à minha noiva, **Jéssica Nívia**, pelo apoio durante todo o processo e à minha mãe, **Ana Maria**, por estar sempre ao meu lado durante toda minha vida.

À minha orientadora, Prof. Dra. **Verônica Gitirana**, primeiro por ter me aceitado como orientando; segundo, por todas as excelentes contribuições e orientações dadas durante o meu trabalho. Sem a senhora, professora, este trabalho não seria nem de longe o que é. Para além disso, agradeço pela amizade construída durante esse processo e, ainda, por incentivar-me a continuar na trajetória acadêmica. Enfim, muito obrigado por tudo, professora.

Ao Prof. Ms. **Luan Santos**, por sempre se fazer presente em minha vida, ajudando-me muitas vezes na busca dos melhores caminhos. Serei eternamente grato por todo apoio, amizade e trocas de conhecimentos, mestre.

Aos meus colegas de turma, por terem trilhado este caminho ao meu lado e por chegarem até aqui comigo. Em especial, agradeço à minha dupla, não só de estudos, como também de vida, **Júlio César**, por toda parceria e paciência de sempre. Agradeço a **Elyston**, **Davi, Maryanna, Mikaelly e Lhays**, por sempre estarem tão presentes e disponíveis para me ajudar e por tornarem esse processo mais fácil, a vocês, minha eterna gratidão.

A todo(as) professores(as) que contribuíram com minha formação, em especial àqueles(as) que foram além da ementa: a Dra. **Simone Queiroz**, a Dra. **Jaqueline Lixandrão**, a Ma. **Thathawanna Aires**, **Renata Villa Nova**, a Ma. **Lidiane Carvalho** e a Ma. **Luana Rafaela**, a todos(as), muito obrigado!

À Profa. Ma. **Yrailma Katharine**, porque apesar de não ter sido minha professora de graduação, sempre me incentivou na escrita e trajetória acadêmica. Esse incentivo foi de grande importância para o meu desenvolvimento enquanto estudante e, ainda, para a elaboração deste trabalho. Muito obrigado por tanto, **Yrailma.**

A todos que fazem o grupo FrameAGAP, pelas contribuições dadas para a melhoria deste trabalho; além disso, sou grato por mostrar possibilidades para a expansão deste para outros trabalhos. Em especial, gostaria ainda de agradecer ao Prof. **Dr. César Thiago**, pelas excelentes contribuições e por toda a ajuda prestada durante a construção desta pesquisa; muito obrigado, **César.**

Agradeço à minha banca, pelas boas orientações e sugestões dadas para a melhoria deste trabalho. E, por fim, agradeço a todos que, de forma direta ou indireta, ajudaram-me neste processo de formação, e que não foram citados aqui, a todos(as) meu muito obrigado.

Diferentes situações dão sentido a um conceito matemático (Vergnaud, 1994).
"Seja gentil, porque ninguém nunca sabe o que as outras pessoas enfrentam. E se quiser realmente ver como as pessoas são, basta apenas olhar." (O extraordinário).

RESUMO

As funções são fundamentais para descrever diversas situações do cotidiano, tendo em vista suas diversas aplicações. Portanto, seu estudo é fundamental para toda a sociedade. Com essa perspectiva, objetivamos gerar classes de situações que atribuem significado à função exponencial. Para o estabelecimento dessas classes, levaremos em consideração o estudo de explicações contextualizadas, exemplos, problemas propostos e exercícios em livro didático, tendo em vista que ele sempre foi forte aliado, não só do professor, como dos alunos durante os processos de ensino e aprendizagem. Tal fato se dá, porque nele os estudantes e professores podem consultar, não só os conceitos, mas também algumas estratégias de resolução de exercícios. A fim de atingir o objetivo de nossa pesquisa, buscamos responder à seguinte questão: Que tipos de situações envolvendo a função exponencial são trazidos por um livro didático do 1º ano do Ensino Médio? Para isso, pautamo-nos na Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida pelo Pesquisador Gérard Vergnaud, que defende a importância da variação nos tipos de situações a serem enfrentadas pelos estudantes. Para gerar tal classificação, os problemas contextualizados foram analisados segundo os seguintes critérios: significados, contextos, elementos dados, elementos solicitados. A partir desses critérios, foram geradas as classes e subclasses. Devido à limitação de tempo, conseguimos detalhar as seguintes classes: Taxa sobre Taxa, cisão e reprodução. Surgiram também quatro situações em que, apesar de a obra transformar em situações de Taxa sobre Taxa, elas apresentam uma característica diferente que precisa ser estudada posteriormente. Revelou-se ainda que a grande maioria de situações encontradas nos livros sobre função exponencial são mistas, incluindo composições da exponencial com situações de função linear e afim.

Palavras-chave: Situações; Conceito; Teoria dos Campos Conceituais; Função Exponencial.

ABSTRACT

Functions are essential to describe various everyday situations, considering their different applications. Therefore, its study is fundamental for the whole society. With this perspective, we aim to generate classes of situations that attribute means to exponential functions. To create these classes, we will consider the study of contextual explanations, examples, proposed problems and exercises in the textbooks, considering that it has always been a strong ally, not only for the teacher but also for the students during the teaching and learning processes. To achieve our objective, we seek to answer the following question: What types of situations involving the exponential function does a mathematics textbook involve for the 1st year of high school? Our theoretical background is the Theory of Conceptual Fields, developed by Gérard Vergnaud, who defends the importance of varying the situations type students face. We used the meanings, the contexts, the given elements, and the requested elements to analyse the situations. These criteria helped us create the classes and subclasses of the exponential function structure. Due to time constraints, we could detail the following classes: rate-on-rate, splitting and reproduction. There were also four situations in which, despite the textbook transforming it into a rate-on-rate situation, it presents a different characteristic that needs more study. The results revealed that most situations of exponential function have mixed structure, including composition with linear and affine function situations.

Keywords: Situations; Concept; Theory of Conceptual Fields; Exponential Function.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo de funções mostra-se fundamental na vida de todo e qualquer cidadão; isso, porque as funções estão muito presentes no dia a dia das pessoas. Ao comprar frutas na feira, ao usar um plano telefônico ou até mesmo ao delimitar a reprodução de bactérias no organismo, lida-se com relações funcionais. Nessas e em inúmeras outras situações, ligadas ao dia a dia, acontece, mesmo sem intenção, a relação entre grandezas e para que se gere uma modelagem matemática, muitas vezes fazemos uso das funções (ROQUE, 2012).

Nessa perspectiva, as pessoas, muitas vezes, fazem uso desse conhecimento espontaneamente, sem que haja uma formalização do conceito ou até mesmo das possibilidades de representações existentes. Estando as relações funcionais tão presentes no cotidiano, despertou-me o interesse em investigar como esse conteúdo é abordado no contexto escolar.

Esse interesse surgiu após uma experiência vivenciada, quando tive a oportunidade de fazer um estágio não obrigatório em uma escola de minha cidade. Na ocasião, estagiei em uma turma de 9° ano do Ensino Fundamental e pude notar que os estudantes demonstravam ter grande dificuldade em entender o conceito de função e, mais ainda, em resolver problemas envolvendo tal conceito e suas propriedades.

A dificuldade em repassar o conteúdo de forma teórica foi tamanha, que resolvi trazer situações do dia a dia que envolvessem o conceito de função afim para tentar mostrar que as funções não estavam tão distantes de nossa realidade. Naquele momento, pude notar que muitos estudantes conseguiam entender as situações e, até mesmo, resolvê-las. Porém havia ainda um enorme entrave em representar aquelas situações de forma algébrica.

Desde então, surgiu a curiosidade em pesquisas que investigassem o conceito de funções e em como proporcionar melhores situações para que houvesse melhor aprendizagem deste conceito. Isso porque os conhecimentos matemáticos se fazem necessários na vida do aluno em diversas ocasiões ligadas ao dia a dia; logo, entendê-los pode proporcionar a formação de cidadãos críticos e cientes de suas responsabilidades sociais (BRASIL, 2017).

Em razão de o conteúdo de funções ser tão extenso, cabe ressaltar que, em nossos estudos, nos ativemos às funções exponenciais. Essa decisão foi tomada devido à grande aplicação que este tipo de função possui, por exemplo, ela é usada para esquematizar o cálculo de meia-vida de medicamentos, o cálculo de radiação, o crescimento populacional, e tantas outras situações. Isso porque a função exponencial tem sua variável independente no expoente e, nesse sentido, diferencia-se das demais funções (STEWART, 2013).

Ao delimitarmos o tipo, notamos que este conteúdo é abordado no 1º ano do Ensino Médio (pelo menos antes da reforma do Ensino Médio); por isso, resolvemos analisar os livros desse ano escolar. Nesse viés, com o trabalho, buscamos responder à seguinte questão de pesquisa: Quais os tipos de situações envolvendo a função exponencial são trazidos pelos livros didáticos do 1º ano do Ensino Médio? Para que seja possível responder à questão de pesquisa, com este estudo, objetivamos classificar os tipos de situações envolvendo a função exponencial trazidos pelos livros didáticos do 1º ano do Ensino Médio à luz da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1994).

A escolha de realizar a pesquisa em livros deu-se por esse material se apresentar na sala de aula como forte aliado, não só do professor durante o processo de ensino, como também do aluno no processo aprendizagem (ANTUNES *et al*., 2019). Assim sendo, resolvemos investigar como se apresentava o conceito de função neste recurso tão usado na sala de aula. Isso porque, em muitas ocasiões, o livro se apresenta como principal recurso para as aulas de Matemática (CARVALHO *et al*., 2010).

Neste sentido, a classificação desses problemas permitirá maior clareza no que se refere aos processos de ensino e aprendizagem do Campo Conceitual de funções exponenciais. As situações que estão presentes no livro didático deveriam servir de base para que os estudantes compreendam as funções exponenciais em sua amplitude de significados, variedade de elementos desconhecidos e de invariantes envolvidos, assim como representações mobilizadas.

Trata-se de uma pesquisa bibliográfica descritiva, tendo em vista nosso propósito de analisar materiais já existentes (livros didáticos) e classificar as situações presentes. Cabe ressaltar que tivemos como principal aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud.

Consideramos que a classificação das situações de funções exponenciais nos auxiliará em pesquisas futuras no que concerne ao conceito de função exponencial e suas aplicações. Vergnaud (1991) aponta que um campo conceitual é um conjunto heterogêneo de situações, conceitos e invariantes que estão ligados e provavelmente interligados durante o processo de aquisição. Neste sentido, para que o aluno domine um conceito, como o de função exponencial, precisaria enfrentar inúmeras situações. Portanto, conhecer as diferentes classes de funções exponenciais possibilita ao professor, autor de livro didático, dentre outros atores educacionais, construir abordagens de ensino e aprendizagem efetivas.

Vergnaud afirma ainda que, por mais simples que seja uma situação, ela envolve mais de um único conceito matemático. Portanto, um mapeamento do campo conceitual de função exponencial permite ter ideia desses conceitos envolvidos.

Neste sentido, nosso trabalho se organiza da seguinte forma: Capítulo 1 - Introdução; Capítulo 2 - Objetivos e a questão de pesquisa; Capítulo 3 - Revisão de literatura; Capítulo 4 - Discussões sobre funções; Capítulo 5 - Discussões sobre o livro didático; Capítulo 6 - Discussões sobre a Teoria dos Campos Conceituais; Capítulo 7 - Metodologia; Capítulo 8 - Resultados e discussões e no Capítulo 9 - Considerações finais.

2 OBJETIVOS

2.1 GERAL

Classificar os tipos de situações envolvendo a função exponencial trazidos por um livro didático do 1º ano do Ensino Médio à luz da teoria dos Campos Conceituais.

2.2 ESPECÍFICOS

- Identificar classes de situações sobre função exponencial.
- Identificar conceitos e propriedades abordadas nos problemas propostos dos livros didáticos relativos à função exponencial.
- Identificar esquemas possíveis para a resolução das situações propostas em livros didáticos para introduzir o conceito de função exponencial.

2.3 QUESTÃO PROBLEMA

Que tipos de situações envolvendo a função exponencial são trazidos por um livro didático do 1º ano do Ensino Médio?

3 REVISÃO DE LITERATURA

No intuito de observarmos o que já havia sido produzido envolvendo nosso tema de pesquisa, resolvemos fazer um levantamento bibliográfico com as pesquisas já publicadas. A busca foi feita no Google acadêmico[1], onde tomamos como palavras-chave "função exponencial" e "teoria dos campos conceituais", assim obtivemos, de imediato, 112 publicações. No entanto essas publicações eram diversas e ainda de diferentes épocas. Com isso, foi necessária a aplicação de alguns filtros, utilizados com o intuito de reduzir esse número e melhor selecionar as obras que se alinhavam à nossa pesquisa.

O primeiro mecanismo utilizado foi o tempo. Na expectativa de melhor escolhermos as obras, optamos por selecionar apenas as publicadas entre 2018 e 2022. Com isso, foi possível passarmos de 112 obras para 40, as quais passaram por mais um filtro, por meio do qual analisamos o material partindo do título. Nessa nova filtragem, excluímos as obras que tratam de revisão de literatura, abordam outros tipos de função, ou ainda, de outras teorias. Após essa nova filtragem, restaram apenas dez obras.

Após esses filtros, passamos para a leitura dos resumos, isso porque, em algumas obras, ao lermos apenas o título, não conseguimos saber se realmente se adequavam a nossa pesquisa. Assim, das dez obras, foram excluídas oito. O principal fator que levou à exclusão foi por apenas induzirem o conceito de funções, não tratando diretamente da função investigada em nosso trabalho (a função exponencial), ou ainda, da Teoria dos Campos Conceituais. Ficamos então com apenas duas obras, as quais estão apresentadas e discutidas na sequência.

A primeira obra tem como título: **Aprendizagem Conceitual de Funções** (PIVA *et al.*, 2020) e trata-se de um resumo expandido. O trabalho buscou identificar as características da aprendizagem sobre o cálculo diferencial em uma turma de Ensino Superior de Matemática da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS) durante o primeiro semestre letivo de 2020.

Durante o desenvolvimento desta pesquisa, observou-se que a defasagem de aprendizagem no cálculo originava-se da falta de entendimento do conceito de função. Na tentativa de sanar a problemática, foram criadas as aulas de Pré-cálculo, que infelizmente não ajudaram a contornar as dificuldades encontradas, uma vez que eram

[1] "O Google Acadêmico é uma ferramenta do Google que possibilita a localização de artigos, teses, dissertações e outras publicações úteis para pesquisadores." Disponível em: https://rockcontent.com/br/blog/google-academico/ e acessado dia 30/08/2022 às 21:19.

dificuldades conceituais e não práticas. Neste sentido, o trabalho caracteriza-se como uma pesquisa-ação, uma vez que foram escolhidos voluntários para fazer entrevistas a respeito do conceito de função e suas aplicações, tendo como objetivo ampliar o entendimento dos participantes acerca do conceito de função e suas aplicações. Além disso, foram abordados diferentes tipos de funções na pesquisa, como a quadrática e a exponencial.

A presente pesquisa trouxe à tona a importância de se trabalhar bem o conceito matemático, explorando seu significado, suas representações e seus invariantes para que seja possível fazer com que o aluno compreenda o conceito matemático em sua plenitude e não apenas o decore. A falta de entendimento dos conceitos matemáticos, como o de função, pode ocasionar uma barreira na aprendizagem, como ressaltado pelos autores.

Os autores reforçam também a ideia de apresentar atividades em ciclos, fazendo com que o aluno possa enfrentar situações com diferentes níveis de complexidade e revisitar conceitos vistos anteriormente. Esse tipo de atividade reforça a ideia de Vergnaud (1994) sobre a importância de oportunizar ao aluno o enfrentamento de diversas situações durante os processos de ensino e aprendizagem; e ainda, que o processo de aprendizagem é temporal, ou seja, leva tempo para que o aluno domine um Campo Conceitual.

Sendo assim, com este estudo, podemos entender que se faz necessário trabalhar com o auxílio de diferentes situações que envolvam os conceitos matemáticos, assim como com as diferentes representações que o conceito apresenta. Com isso, é possível conduzir o aluno para o domínio conceitual, que, por sua vez, pode possibilitar que ele consiga construir mecanismos que o levem à construção de conhecimentos capazes de proporcionar um melhor enfrentamento de novas situações que envolvam um dado conceito.

Já a segunda obra tem como título: **Ensino De Funções Exponenciais a Partir De Problemas, Seguindo Uma Sequência Didática** (SPINELLI, 2018). Trata-se de uma pesquisa de conclusão de curso, na qual a autora buscou realizar uma sequência didática baseada em problemas para construir conhecimentos acerca de funções exponenciais.

A autora aplicou sua sequência didática em uma escola pública de Porto Alegre, com alunos do 1° ano do Ensino Médio. Na ocasião, buscou-se refletir sobre o conceito de funções exponenciais e suas propriedades, partindo de problemas. Esse tipo de abordagem vai ao encontro da Teoria dos Campos Conceituais, no que se refere a oportunizar ao aluno o enfrentamento de diferentes situações que envolvam o conceito matemático durante os processos de ensino e aprendizagem.

O principal mecanismo de resolução para os problemas foi a construção de tabelas; a autora afirma que buscou uma forma pela qual os alunos pudessem entender a lei de formação e também o conceito para que não apenas decorassem o comportamento e as propriedades da função. Por exemplo, entender por que na função exponencial, quando, ao dobrar uma quantidade, representamos por $f(x)= 2^x$ e não por $f(x)= 2x$, lembrando a função afim. A construção de tabelas, segundo a autora, evidencia o comportamento da função, conduzindo o estudante na visualização da lei de formação dessa e de diversas outras funções exponenciais encontradas em problemas, sem tantas dificuldades.

Cabe salientar que durante a sequência didática, a autora não partiu diretamente para a construção de tabelas. Inicialmente, buscou refletir com os estudantes sobre o conceito de função, isso porque a função exponencial é apenas um tipo de função visto no primeiro ano do Ensino Médio, isto é, existem outros tipos que antecedem a exponencial no tempo didático, como a do primeiro grau e a do segundo grau. Nesse sentido, a autora esperava que os estudantes dominassem o conceito de função, entendendo que a função é uma relação de dependência, onde se garante a unicidade na relação.

Sendo assim, a pesquisa parte de situações em que, inicialmente, é discutido o conceito de função no intuito de introduzir um novo tipo: a exponencial. Com isso, após as discussões, a autora introduz um mecanismo de resolução na tentativa de ajudar os estudantes no entendimento conceitual e também a compreenderem as representações, os invariantes e as aplicações implícitas na função exponencial. Nesse viés, a construção de tabelas, segundo a autora, pode favorecer um melhor aproveitamento no processo de aprendizagem.

Ao construir suas tabelas, o aluno estaria buscando ampliar seus esquemas de resolução, uma vez que não basta construir a tabela, faz-se preciso entender a função. Neste sentido, o trabalho reforça a importância de fazer o aluno refletir sobre a função, buscando construir seus próprios teoremas e esquemas de resolução. A construção de tabelas como mecanismo de resolução pode ajudar o aluno a entender o comportamento da função. Porém essa não pode ser a única maneira apresentada para resolver os problemas, tendo em vista que, na Matemática, podemos andar por caminhos distintos e chegar ao mesmo destino.

Por outro lado, é evidenciado também que os problemas de função exponencial apresentam pluralidade em dificuldade e contextos. Nessa perspectiva, a pesquisa mostra que o Campo Conceitual de funções exponenciais é um campo complexo, cujo domínio pode levar tempo, indo ao encontro da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud mais uma vez.

Esta revisão evidenciou a necessidade de se pesquisar sobre a função exponencial, tendo em vista que o Campo conceitual apresenta diversas aplicações dentro e fora da Matemática. Além disso, a segunda obra evidencia que há diferentes tipos de situações envolvendo a função exponencial. É importante classificar os tipos encontrados nos livros didáticos, uma vez que o livro é um recurso muito utilizado em sala de aula durante os processos de ensino e aprendizagem.

4 FUNÇÕES

Neste capítulo, resolvemos trazer algumas discussões acerca do conceito de funções. No primeiro momento, partimos da origem do conceito, tendo como base a ideia de contagem e a relação feita entre os instrumentos utilizados e as quantidades. Em seguida, conceituamos o que seria uma função exponencial e elencamos suas propriedades. Logo adiante, tratamos das composições de funções, para, por fim, abordarmos e conceituarmos isomorfismos.

4. 1 Abordagens históricas sobre o conceito de função

Há muitos relatos sobre a origem da Matemática enquanto ciência, os quais nos auxiliam a compreender o quão a Matemática passou, e ainda passa, por um processo de evolução constante, de modo que passou a auxiliar as pessoas a entenderem melhor o seu entorno. Com o surgimento da Matemática, pôde-se entender melhor a sociedade e também a natureza. Isso mostra que ela é uma ciência construída coletivamente e faz com que até hoje esteja ainda em construção (DA SILVA, 2022).

A história da Matemática mostra que o conhecimento matemático surge a partir da necessidade que se tinha de resolver situações simples ligadas ao dia a dia. Isso porque, desde os primórdios da sociedade, as pessoas sentiam a necessidade de entender os processos ligados à natureza (BOYER, 1946 apud GITIRANA, 1999).

O conhecimento acerca do conceito de função não foi diferente. Segundo Souza e Silva (2003, p. 1), "quando o homem, levado pela necessidade, passou a associar uma pedra a cada animal visando ao controle de seu rebanho, poderíamos encarar essa relação de dependência entre as pedras e os animais como uma relação funcional". Nesse sentido, mesmo que não houvesse de imediato a intenção, ele estava relacionando grandezas. E a ideia de função surge da necessidade de contagem que se tinha. Essa necessidade fez com que fosse descoberta uma relação, que mais adiante seria ampliada para a ideia função.

Ifrah (2005) reforça que tudo começou com esse artifício, conhecido como correspondência um a um, pois ele tornou possível comparar com facilidade duas coleções, sejam elas compostas por quaisquer elementos, sem que houvesse a necessidade de recorrer à contagem abstrata.

No que se refere ao conceito de função, Eves (1995, p. 661) ressalta que:

> A palavra função, na sua forma latina equivalente, parece ter sido introduzida por Leibniz em 1694, inicialmente para expressar qualquer quantidade associada a uma curva, como, por exemplo, as coordenadas de um ponto da curva, a inclinação de uma curva e o raio da curvatura de uma curva.

Percebe-se que o conceito de função foi introduzido de forma muito diferente do que encontramos hoje em nossos livros didáticos de Matemática. Segundo Eves (1995), o conceito de função sofreu muitas alterações no decorrer da história. Ele afirma ainda que muito tempo após a definição de Leibniz, em 1694, Euler modificou a definição inicial, quando afirmou que uma função se caracterizava como uma equação ou fórmula qualquer, que relaciona variáveis e constantes.

Contudo a ideia de variável era ainda uma ideia bastante complexa e um pouco distante do tempo. Porém,

> Lejeune Dirichlet (1805-1859) chegou à seguinte formulação: Uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é uma função (unívoca) de x. A variável x, à qual se atribuem valores à vontade, é chamada variável independente e a variável y, cujos valores depen-dem dos valores de x, é chamada variável dependente. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o campo de definição da função e os valores assumidos por y constituem o campo de valores da função (EVES, 1995 p. 662).

Essa definição apresentada por Lejeune Dirichlet mudou completamente o entendimento que antes se tinha sobre funções, assim como mudou a forma de se apresentar o conceito. A ideia de variável ampliou muito o conceito de função, tornando possível que, ao longo do tempo, fossem formuladas outras definições, próximas à que temos nos dias de hoje, uma definição mais clara e ampla sobre o conceito em questão.

4.2 Função no contexto escolar atual

Muitas pessoas defendem a ideia de que a Matemática possui uma linguagem própria; esse pensamento não surgiu nos dias de hoje. Isto é, desde o seu surgimento, muitas pessoas enxergam a Matemática não só como ciência, mas também como uma forma de comunicação, como indica Menezes (2000, p. 4).

> Sendo a matemática uma área do saber de enorme riqueza, é natural que seja pródiga em inúmeras facetas; uma delas é, precisamente, ser

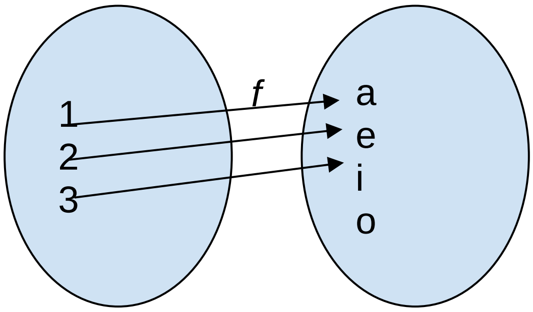
> possuidora de uma linguagem própria, que em alguns casos e em certos momentos históricos se confundiu com a própria matemática.

Nesse sentido, por um lado, a Matemática se apresenta como uma ciência que pode proporcionar aos indivíduos um melhor entendimento do mundo que o cerca. Por outro lado, temos a forma na qual os conhecimentos são apresentados aos estudantes no processo de ensino. Tais conhecimentos passaram por mudanças ao longo da história.

No que se refere ao conceito de função, nos dias atuais, a definição geral de função anunciada pelos livros didáticos, segundo Roque (2012, p. 295-296), assume a seguinte forma: "Dados dois conjuntos X e Y, uma função f : X → Y é uma regra ou que diz como associar a cada elemento x ∈ X um elemento y = f(x) ∈ Y. O conjunto X chama-se domínio e Y é o contradomínio da função".

A definição adotada nos dias atuais faz menção à transformação que associa elementos de um conjunto a elementos de um outro conjunto, distinto ou não, do primeiro. Essa transformação acontece por meio de uma função *f*. Tal definição foi criada por Nicolas Bourbaki em 1939. O diagrama a seguir ilustra uma função de X = {1, 2, 3} em Y = {a, e, i, o, u}.

Figura 1: Diagrama da função



Fonte: Autor, 2022.

O exemplo citado mostra claramente a representação de uma função, na qual estão representados dois conjuntos e ainda existe a transformação, que associa por meio de uma função *f*, os elementos do primeiro conjunto aos elementos do segundo conjunto.

Neste sentido, Eves (1995, p. 662) destaca que "a teoria dos conjuntos propiciou ampliar o conceito de função de maneira a abranger relações entre dois conjuntos de elementos quaisquer, sejam esses elementos números ou qualquer outra coisa".

Ainda sobre a função, Iezzi *et al.* (2004) acrescentam que:

> Em Matemática, se x e y são duas variáveis tais que para cada valor atribuído a x existe, em correspondência um único valor para y, dizemos que y é uma função de x. O conjunto D de valores que podem ser atribuídos a x é chamado de domínio da função. A variável x é chamada variável independente. O valor de y, correspondente a determinado valor atribuído a x, é chamado imagem de x pela função e é representado por *f*(x). A variável y é chamada variável dependente, porque y assume valores que dependem dos correspondentes valores de x. O conjunto Im formado pelos valores que y assume, em correspondência aos valores de x, é chamado conjunto imagem da função. (2004, p. 33).

Sendo assim, o conjunto que gera a função é chamado de conjunto domínio. O conjunto que contém os elementos de chegada dessa função forma o conjunto contradomínio; já os elementos do contradomínio que se relacionam com os do domínio compõem o conjunto imagem. Para cada x pertencente ao domínio, existe um único y pertencente ao contradomínio que se relaciona com x por meio de uma função *f*. Nesse viés, quando se tem uma função, o elemento y que se relaciona com o elemento x deixa de fazer parte apenas do conjunto contradomínio e passa a fazer parte do conjunto imagem.

Além disso, cabe ressaltar que, em Matemática, existem muitos tipos de funções, assim como muitas formas de representá-las. Sobre essas representações, Stewart (2013, p. 12) ressalta algumas formas de representar uma função.

> ■ verbalmente (descrevendo-a com palavras)
> ■ numericamente (por meio de uma tabela de valores)
> ■ visualmente (através de um gráfico ou diagramas)
> ■ algebricamente (utilizando-se uma fórmula explícita)

Isso mostra que as funções possuem representações muito diversas, assim como suas aplicações. De acordo com os PCNEM,

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria Matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções (BRASIL, 1999, p. 121).

Todavia, como são muitos os tipos de funções existentes, na escola, são nomeadas pelo tipo de equação que a representa, como função polinomial do 1° grau ou por propriedades da função, como função afim. Neste trabalho, estamos dando ênfase às funções exponenciais, um tipo específico de função que associa a adição à multiplicação.

A função exponencial possui sua variável independente no expoente e, nesse sentido, diferencia-se das demais funções, como afirma Stewart (2013, p. 48),

> [...] a função *f*(x) = 2^x é chamada função exponencial, pois a variável, x, é o expoente. Ela não deve ser confundida com a função potência g(x) = x^2, na qual a variável é a base. Em geral, uma função exponencial é uma função da forma *f*(x) = a^x.

Ainda sobre as funções exponenciais, Elon *et al.* (1997) reforçam que:

> seja a um número real positivo, que suporemos sempre diferente de 1. A função exponencial de base a, *f*: $R \longrightarrow R^+$, indicada pela notação *f*(x) = a^x, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer x, y $\in R$:
>
> 1) $a^x . a^y = a^{x+y}$
> 2) $a^1 = a$
> 3) x < y ⇒ $a^x < a^y$ quando a > 1 e x < y ⇒ $a^y > a^x$ quando 0 < a < 1.
> 4) A função *f*: $R \longrightarrow R^+$, definida por *f*(x) = a^x, é ilimitada superiormente.
> 5) A função exponencial é contínua.
> 6) A função exponencial *f*:$R \longrightarrow R^+$, f(x) = a^x, a ≠ 1, é sobrejetiva.

Nesse sentido, a função exponencial mostra-se como um tipo particular de função, que possui aplicações muito diversas dentro e fora da Matemática, sendo importante seu estudo.

4.3 Composições de funções

Ao observarmos as funções exponenciais que modelam as situações em alguns problemas, notamos que elas se comportam, por vezes, como uma função composta; nesse sentido, sentimos a necessidade de conceituar o que seria uma composição de função.

Duas funções podem ser combinadas com o intuito de gerar outra função. Dada uma função *f*(x) de R em R e uma outra função *g*(x) de R em R, são garantidas as operações: *f* + *g*, *f* - *g*, *f* . *g*, ou ainda, *f*/*g*, neste último caso, para os valores em que g(x) ≠ 0. Essas relações se constituem "de forma similar àquela pela qual somamos, subtraímos, multiplicamos e dividimos números reais" (STEWART, 2013, p. 38).

Segundo Stewart (2013, p. 38), além dessas formas vistas anteriormente,

> [...] Existe outra maneira de combinar duas funções para obter uma nova função. Por exemplo, suponha que e *y* = *f(u)* =$\sqrt{u}$ *e* *u* = *g(x)* = x^2+ *1*. Como y é uma função de u e u, por sua vez, é uma

> função de x, segue que, afinal de contas, y é uma função de x. Computamos isso pela substituição:
> $y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{(x^2 + 1)}$

Essa forma de se encontrar uma nova função, partindo de duas outras funções já conhecidas, é chamada de composição de funções. Uma vez que a nova função é composta pelas outras duas funções já existentes. Neste sentido, Iezzi *et al*. (2004, p. 214) trazem maior precisão à definição, apontando as restrições relativas ao domínio e ao contradomínio.

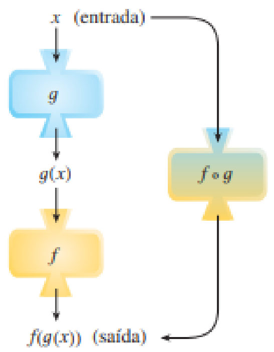
> Seja *f* uma função de um conjunto A em um conjunto B e seja *g* uma função de B em um conjunto C. Chama-se de *função composta* de *g e f* à função *h* de A em C em que a imagem de cada x é obtido pelo seguinte procedimento:
> 1) aplica-se a x a função *f*, obtendo-se *f(x)*
> 2) aplica-se a *f(x)* a função *g*, obtendo-se *g(f(x))*

Nessa perspectiva, Stewart (2013, p. 38) reforça que:

> [...] Em geral, dadas quaisquer duas funções *f* e *g*, começamos com um número x no domínio de *g* e encontramos sua imagem *g*(x). Se este número estiver no domínio de *f*, podemos calcular o valor de *f*(*g*(x)). Note que a saída de uma função é utilizada como entrada para a próxima função. O resultado é uma nova função *h*(x) = *f*(*g*(x)) obtida pela substituição de *g* em *f*. É chamada de composição (ou composta) de *f* e *g* e é denotada por *fog* ("*f* bola *g*").

Essa ideia de aplicarmos uma função em outra é muito bem definida na imagem a seguir.

Figura 2: Composição de funções



Fonte: Stewart (2013, p. 38)

Nessa perspectiva, cabe salientar que o processo para encontrar um valor para a imagem da função composta não é tão simples como o processo de encontrar a imagem de uma função que não seja composta. Isso porque, como dito por Iezzi *et al.* (2004), antes de encontrar a imagem da função composta, precisa-se encontrar a imagem de cada uma que compõe a lei de formação dessa função composta.

Iezzi *et al.* (2004) esclarecem ainda que a função composta pode ser representada de modos diversos, não se limitando apenas à representação algébrica. Nesse sentido, a função composta poderá ser representada em qualquer das representações de função já descritas neste texto.

4.4 Função exponencial: um isomorfismo de grupos

As funções exponenciais comportam-se como estruturas onde o isomorfismo é garantido. Entretanto, antes de entendermos a definição de isomorfismo de grupos, faz-se necessário entendermos o que seria um grupo. Em Matemática, existem diversas estruturas algébricas que se destinam a inúmeras aplicações, dentro e fora da própria Matemática. De acordo com Gonçalves (1979), chamamos de grupo o conjunto não vazio G, onde está definida uma operação entre pares de elementos do próprio conjunto.

Para um conjunto G se tornar um grupo, é necessário que ele possa ser expresso por um par, ele e uma operação. Além disso, precisa satisfazer três propriedades. Segundo Gonçalves (1979, p. 119), a operação entre um par de elementos do grupo é definida da seguinte forma:

$$*: G \times G \to G$$
$$(x, y) \to x * y$$

Neste sentido, se o conjunto G não for vazio e satisfizer a definição de grupo, apresentada inicialmente, ele precisa ainda satisfazer três propriedades para, de fato, se tornar um grupo que, conforme Gonçalves (1979, p. 119), consiste em:

G1) $a*(b*c)= (a*b)*c \ \ \forall\, a,b,c \in G$ - Associativa
G2) $\exists\, e \in G$ tal que $a*e = e*a, \ \ \forall\, a \in G$ - Elemento neutro
G3) $\forall\, a \in G, \exists\, b \in G$ tal que $a*b = b*a = e$. - Elemento inverso

A propriedade G1 refere-se à associatividade; ela garante que, ao pegar três elementos pertencentes a G, do tipo, a, b e c, ao operarmos a com b e em seguida com c, encontraremos o mesmo resultado de operarmos b com c e, em seguida, com a. Já a propriedade G2 nos garante a existência do elemento neutro, único à G, enquanto a propriedade G3 faz menção à existência de um elemento inverso na operação *.

Nesse viés, “sejam (G, *) e (H, ◊) grupos. Dizemos que uma função f: G → H é um homomorfismo de grupos se f (g1*g2) = f(g1) ◊ f(g2), para quaisquer g1 e g2 ∈ G” (COSTA, 2021, p. 0:27).

Cabe observar que, nessa função *f*, o grupo G atua como domínio da função; em contrapartida, o grupo H desenvolve o papel de contradomínio. Outra observação relevante é que, para encontrar a imagem de g1 operado com g2 dentro da operação do grupo G, isto é, quando se buscou a imagem de g1*g2, a operação de G foi substituída pela operação de H. Essa troca acontece com a finalidade de encontrarmos uma imagem, e como a imagem de *f* se encontra no grupo H, que atua como contradomínio da função, a operação de G foi substituída pela operação de H.

Nesse sentido, o homomorfismo de função serve para separar elementos de uma mesma operação. Todavia, como esses elementos geram imagens que fazem parte de um outro conjunto, talvez até diferente do primeiro, eles garantem a correspondência também entre as operações. Ela é trocada, garantindo assim que seja operada dentro do conjunto contradomínio de forma a manter a correspondência (COSTA, 2021).

Segundo Kardec (2017), quando os dois grupos satisfazem a definição de homomorfismo e, além disso, possuem a mesma quantidade de elementos, tem-se um isomorfismo. Isto é, além da garantia da troca de operações, tem-se a mesma quantidade de elementos em ambos os grupos, deixando de ser apenas um homomorfismo para ser objetivo, portanto, um isomorfismo.

Kardec (2017) afirma ainda que, quando não se tem a mesma quantidade de elementos nos grupos, podem não ser válidas as trocas de operações garantidas no homomorfismo ao excedente de elementos. Vai daí que a grande vantagem do isomorfismo seria a garantia de troca de operações entre os grupos para todos os elementos, uma vez que ambos os grupos possuem a mesma quantidade de elementos. Garante-se assim a mesma estrutura nos dois grupos; qualquer operação realizada em um grupo vai equivaler à operação do outro grupo feita entre as imagens dos elementos do primeiro grupo.

Os isomorfismos são estruturas algébricas onde são válidas as trocas de operações validadas no homomorfismo de funções, porém possuem a mesma quantidade de elementos, tanto no domínio, como no contradomínio, garantindo que sejam válidas para todo e qualquer elemento as trocas de operações. Essas estruturas serviram para entendermos melhor as diferentes situações encontradas sobre funções exponenciais e como acontece a transição de uma operação para outra. Sendo assim, a função exponencial comporta-se como um isomorfismo entre (R,+) e (R, x), tendo em vista que neles, por ser o mesmo conjunto R, além da garantia de mesma quantidade de elementos, é garantida a troca de operações, já que $f(x+y)=f(x) \times f(y)$.

5 CONSOLIDAÇÃO DO LIVRO DIDÁTICO

Neste capítulo, discutimos sobre o livro didático (LD), partindo da sua origem até a sua evolução a recurso didático. Isso porque muitos são os relatos sobre o surgimento do livro didático e sua consolidação como recurso na sala de aula. Cabe salientar que o LD passou por inúmeras transformações para chegar ao que é hoje e ter seu espaço garantido mesmo em meio tantas ferramentas tecnológicas, disponíveis para auxiliar os professores em suas aulas. Além disso, o LD é ainda hoje amplamente usado como recurso pedagógico na sala de aula das mais diversas disciplinas, inclusive, em Matemática.

Nesse viés, sendo o livro didático o instrumento para as análises de nossa pesquisa, é necessário discutir sobre sua consolidação, posto que, segundo Junior (2007), os livros didáticos se estabelecem como a forma de transmissão escrita do saber matemático na escola, transmitindo informações matemáticas entre gerações.

A consolidação do livro enquanto forma de registro e organização do conhecimento é de fato muito antiga. Aleixo (2021, p. 18) considera que "um grande exemplo desse fato é a obra Elementos de Euclides, escrita por volta de 300 a.C, que ainda exerce influência no pensamento matemático nos dias de hoje". Isso mostra que o livro se faz presente como fonte de registro do conhecimento muito antes das tecnologias.

No entanto, nem sempre o livro serviu como material didático, isto é, o livro era um instrumento usado como forma de organização e registro do conhecimento, mas não continha uma linguagem clara e finalidades pedagógicas como tem hoje. Isso porque "os registros históricos sobre o livro didático apontam o seu surgimento no início de 1930 por meio de decretos, leis e medidas que regiam o país neste período" (FREITAG, MOTTA e COSTA, 1987 apud ANTUNES *et al*., 2019, p. 4). Só após 1930, o livro deixa de ser um instrumento de registro e organização do conhecimento, passando a se tornar também um material didático, e desde então, está presente nas mais diversificadas salas de aulas como um material de possível apoio ao professor.

Quanto à definição do LD, temos que:

> o livro didático é uma literatura destinada a uma sala de aula, ou seja, um manual de uso, tanto por parte de professores, quanto por parte de alunos, apresentando os conteúdos de forma organizada, sugestões didáticas, com a finalidade de auxiliar o professor em sua prática docente e os alunos no desenvolvimento de sua aprendizagem. (ROSSINI, 2003 apud ANTUNES *et al*., 2019, p. 5).

Podemos então dizer que o livro didático serve nos dias atuais como um instrumento impresso, intencionalmente estruturado e com finalidade de melhorar o processo de aprendizagem.

Outro fato relevante é que o livro didático vem se mostrando muito presente na sala de aula desde sua implementação até os dias atuais, mesmo em meio a tantos avanços tecnológicos e implementação de tecnologias na sala de aula. Tal fato se dá, conforme Gonçalves (2007), porque a leitura vem se mostrando como principal fonte para se adquirir novos conhecimentos.

O LD apresenta, dentro da sala de aula, não só a função de registro de conhecimento, mas também, diversas outras. Choppin (2004) definiu quatro funções essenciais do livro didático, sendo elas: Função Referencial, Função Instrumental, Função Ideológica e Cultural e a Função Documental.

A função referencial, segundo Choppin (2004), é a mais lembrada quando nos referimos ao LD, por estar associada à organização curricular dos conteúdos, seja em tópicos ou mesmo em unidades, fazendo menção aos currículos e suas respectivas estruturas. Sobre isso, Choppin (2004) explica que "ele constitui o suporte privilegiado dos conteúdos educativos, o depositário dos conhecimentos, técnicas ou habilidades que um grupo social acredita que seja necessário transmitir às novas gerações" (CHOPPIN, 2004, p. 253).

A segunda função, a função estrutural, refere-se às metodologias, ou seja, como o LD articula seus problemas e/ou exercícios a fim de favorecer a aprendizagem. Para Choppin (2004, p. 253), as metodologias "visam a facilitar a memorização dos conhecimentos, favorecer a aquisição de competências disciplinares ou transversais, a apropriação de habilidades, de métodos de análise ou de resolução de problemas, etc."

Entretanto, em Matemática, não basta memorizar; o aluno precisa de fato aprender os conteúdos. A necessidade de aprendizagem intensifica-se à medida que os assuntos vão avançando, uma vez que um conteúdo necessita do outro, haja vista que todos estão interligados e se o aluno não conseguir compreender um, poderá não avançar em outros.

A terceira função do LD, a função ideológica e cultural, faz menção à estruturação política que o livro possui, sendo assim, a função mais antiga atribuída ao LD. Porém, nos dias atuais, essa função vem perdendo cada vez mais força, visto que cada governo estabelece suas ideologias e, além disso, no século XXI, o professor vem perdendo muito seu espaço de fala. Sobre isso, Aleixo (2021, p. 20) ressalta que: "No século XXI, essa capacidade vem diminuindo pela autonomia que o professor vem ganhando em sala de aula, porém é visível que a cada mudança de governo os ideais mudam e as abordagens nos livros favorecem a narrativa de quem está no poder”.

Já a quarta e última função do livro didático é a função documental, que possibilita que o aluno tenha oportunidade de desenvolver seu senso crítico, mesmo sem que haja uma leitura mediada, já que alguns livros podem fornecer ao aluno o acesso a documentos que tornem possível esse desenvolvimento. Essa função é nova e pode não ser encontrada em todos os livros. Convém salientar que essa função será melhor desenvolvida em locais que favoreçam ao aluno sua autonomia, o que exige um grau elevado na formação dos professores (CHOPPIN, 2004).

Essas funções delegadas ao LD “podem variar consideravelmente segundo o ambiente sociocultural, a época, as disciplinas, os níveis de ensino, os métodos e as formas de utilização” (CHOPPIN, 2004, p. 253). Tal variação se dá devido às muitas possibilidades de uso que o livro didático possui, isto é, cada povo abriga sua cultura, seu nível de escolarização e, por certo, um propósito particular para a utilização do LD.

5.1 O livro didático como recurso para a sala de aula de Matemática

Todos sabemos que cabe à escola, em especial ao professor, garantir o processo de ensino, como também acompanhar o processo de aprendizagem. “Nessa tarefa complexa, a grande maioria dos educadores atribui ao livro um papel destacado entre os recursos didáticos que podem ser utilizados.” (CARVALHO *et al.*, 2010, p. 15).

Esse fato se dá porque o LD pode propiciar ao professor maior segurança, tanto em conduzir suas aulas, como também ao elaborá-las, isso porque:

> O livro didático traz para o processo de ensino e aprendizagem mais um personagem, o seu autor, que passa a dialogar com o professor e com o aluno. Nesse diálogo, o livro é portador de escolhas sobre: o saber a ser estudado – no nosso caso, a Matemática –; os métodos adotados para que os alunos consigam aprendê-lo mais eficazmente; a organização curricular ao longo dos anos de escolaridade (CARVALHO *et al.*, 2010, p. 15).

Esse auxílio que o LD pode proporcionar ao professor é de fundamental importância, tendo em vista que na formação inicial de muitos professores, por vezes, não se tem tanta ênfase nos conteúdos abordados na educação básica. Acrescente-se o fato de que muitos professores apresentam dificuldades em trazer para a sala de aula novas metodologias de ensino e, neste sentido, o LD se torna um forte aliado do professor durante o desenvolvimento de seu trabalho (CARVALHO *et al*., 2010).

Enfatizamos que é necessário ter cuidado, quando se refere ao uso excessivo do LD como único recurso pedagógico na sala de aula, pois o livro deve ser usado como um dos possíveis recursos, porém não como único, conforme é corroborado pelo autor na sequência:

> [...] convém lembrar que, apesar de toda a sua importância, este livro não deve ser o único suporte do trabalho do professor. É sempre desejável buscar enriquecê-lo com outras fontes, a fim de ampliar ou aprimorar o conteúdo que ele traz e, acima de tudo, adequá-lo ao grupo de alunos que o utiliza CARVALHO *et al*., 2010, p. 16).

"Um bom livro didático é uma fonte para o conhecimento da matemática escolar. É nele que podemos nos familiarizar com a Matemática que devemos ensinar" (CARVALHO *et al*., 2010). Sendo assim, é de grande importância que os professores, juntamente com a escola, possam escolher livros que facilitem suas práticas, que possam ser de fato um recurso utilizado, podendo auxiliar, tanto o processo de ensino, como o de aprendizagem.

Outro fato importante, ao se falar em LD enquanto recurso, é que os livros didáticos, ao menos os nacionais, trazem os manuais do professor. Esses manuais servem de subsídio para os professores, visto que podem encontrar sugestões e dicas que podem contribuir na condução de suas aulas, como enfatizado por Carvalho *et al.* (2010, p. 30).

> [...] os manuais do professor evoluíram positivamente e alguns deles apresentam indicações detalhadas de como trabalhar as atividades do livro do aluno, além de trazerem boas sugestões didático-pedagógicas para o docente. Em particular, eles contribuem com considerações teóricas e práticas para a avaliação da aprendizagem do aluno [...].

Pode-se concluir que o LD se apresenta como um valioso recurso na sala de aula de Matemática, podendo auxiliar o professor de formas muito diversas em suas práticas. Contudo, assim como todo e qualquer recurso, cabe ao professor avaliar a melhor maneira de usá-lo. Isso porque, "seja qual for a disciplina abordada, o livro didático deve servir para a construção da ética necessária ao convívio social democrático" (VERCEZE; SILVINO, 2008, p. 3).

Nessa perspectiva, o papel do professor é indispensável no processo de ensino, visto que cada povo possui sua cultura e muitas vezes o LD não engloba situações e/ou problemas que satisfaçam o dia a dia daquele povo. O LD pode ser aplicado de formas muito diversas nas salas de aulas, principalmente nas de Matemática; o papel do professor enquanto mediador é de fundamental importância. O livro didático deve conter uma variedade de situações, tornando viável ao estudante o enfrentamento de situações diversas durante o processo de aprendizagem.

6 TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC), criada entre os anos de 1970 e 1980, foi desenvolvida pelo pesquisador francês Gérard Vergnaud, com o objetivo de explicar como crianças e adolescentes adquiriram conhecimentos matemáticos.

Vergnaud (1996) estudava o conhecimento matemático em Campos Conceituais; para ele, qualquer conceito é estudado em campos de conceitos, representações e invariantes. Ele acreditava que era praticamente impossível estudar as coisas separadamente e, por isso mesmo, é preciso fazer recortes. Nesse sentido, os Campos Conceituais são unidades de estudo frutíferas, capazes de dar sentido aos problemas e às observações feitas em relação à conceitualização (SANTANA, *et al*. 2015).

Para Gitirana *et al.* (2013), o conhecimento conceitual surge a partir da resolução de muitos problemas, fazendo com que um único conceito precise de inúmeras situações para ser entendido. Isto é, um conceito precisa de situações teóricas e práticas distintas para poder ser compreendido, pois cada uma traz consigo uma série de conceitos e significados diferentes para um mesmo conceito.

Vergnaud define um campo conceitual, como sendo:

> [...] um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, interligados durante o processo de aquisição (VERGNAUD, 1982, p. 40, apud SANTANA *et al.* 2015).

Moreira (2002) ressalta três argumentos principais que levaram Vergnaud ao conceito de Campo Conceitual:

> 1) um conceito não se forma dentro de um só tipo de situações; 2) uma situação não se analisa com um só conceito; 3) a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo de muito fôlego que se estende ao longo dos anos, às vezes uma dezena de anos, com analogias e mal-entendidos entre situações, entre concepções, entre procedimentos, entre significantes (VERGNAUD, 1983, p. 393 apud MOREIRA, 2002, p. 3).

A conceituação se mostra como pilar central para Vergnaud, quando se refere ao processo de construção do conhecimento, sendo assim, acreditamos pertinente apresentar o que seria um conceito para Vergnaud.

6.1 Conceito

Para Vergnaud, um conceito C é a união de três conjuntos, **S, I e R,** os quais dão sentido ao Campo Conceitual. Conforme Moreira (2002, p. 4),

> S é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito; I é um conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações) sobre os quais repousa a operacionalidade do conceito, ou o conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito, ou o conjunto de invariantes que podem ser reconhecidos e usados pelos sujeitos para analisar e dominar as situações do primeiro conjunto; R é um conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais, etc.) que podem ser usadas para indicar e representar esses invariantes e, consequentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas.

Moreira (2002) traz que o conjunto das situações é o referente do conceito, o conjunto de invariantes é o significado do conceito, enquanto o conjunto de representações simbólicas é o significante. O autor considera ainda que para estudar o desenvolvimento e o uso de um conceito, devem-se considerar os três conjuntos simultaneamente. De modo que (S) representa a realidade e (I e R) representam o que se pode considerar como dois conjuntos integrantes do pensamento, o significado (I) e o significante (R).

No que se refere à construção de um conceito, Vergnaud explica que um conceito, por mais simples que seja, precisa de várias situações, problemas e tarefas para ser compreendido. Uma situação apresenta a ligação entre inúmeros conceitos. Nenhum conceito ou situação podem ser vistos isoladamente e, por isso, é preciso apresentar situações diversas para que o conceito seja realmente adquirido (GITIRANA *et. al.*, 2013).

Segundo Gitirana *et al.* (2013, p. 22), “ao descrever-se e analisar-se os avanços e as conquistas do aluno no seu processo de aprendizagem e desenvolvimento é preciso considerar as duas ferramentas essenciais que, juntas, formam as faces de uma mesma moeda: a competência e a concepção”, ou seja, não se pode falar em aprendizagem sem considerar tais relações.

A competência pode ser entendida, em geral, como “uma forma operatória do conhecimento que permite ao sujeito agir e atingir determinado objetivo, ser bem-sucedido em uma dada situação” (SARMUÇAY; VERGNAUD, 2000 apud GITIRANA *et. al.*, 2013, p. 23). Já a concepção refere-se à capacidade do estudante mobilizar recursos para formular novos caminhos para a obtenção de êxito nas situações. Desse modo, a competência é vista na ação do aluno diante da situação, como por exemplo, ao resolver questões.

Por outro lado, segundo Gitirana *et al.* (2013), Vergnaud faz uso do conceito de esquema para melhor explicar o que seria a competência, que pode ser entendida como sendo combinações distintas de esquemas. Isso porque, quando o aluno depara com uma nova situação, ele precisa recombinar os seus esquemas a fim de encontrar um novo esquema que o ajude a resolver aquela dada situação.

"Vergnaud traz que esquema diz respeito à forma como a pessoa (o aluno) organiza seus invariantes de ação para lidar com uma classe de situações" (GITIRANA *e. al.*, 2013, p. 23). Reforçando essa ideia, Vergnaud diz que esquema é a organização invariante do comportamento para uma dada classe de situações (VERGNAUD, 1996 apud MOREIRA, 2002).

Os esquemas são unidades totalmente dinâmicas que podem ser sempre recombinadas pelo aluno com o intuito de encontrar um novo. Isso acontece porque, quando o estudante se defronta com uma nova situação, para a qual não possui esquemas disponíveis para solucioná-la, ele precisa se desdobrar e encontrar um novo esquema para poder resolver a situação. Nesse sentido, a "Teoria dos Campos Conceituais é uma herança do passado e uma preparação para o futuro" (GITIRANA *et al*., 2013 p. 25).

Para melhor entender a definição de esquema, Moreira (2002) apresenta o que Vergnaud chama de receita de um esquema:

> 1. metas e antecipações (um esquema se dirige sempre a uma classe de situações nas quais o sujeito pode descobrir uma possível finalidade de sua atividade e, eventualmente, submetas; pode também esperar certos efeitos ou certos eventos); 2. regras de ação do tipo "se ... então" que constituem a parte verdadeiramente geradora do esquema, aquela que permite a geração e a continuidade da sequência de ações do sujeito; são regras de busca de informação e controle dos resultados da ação; 3. invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) que dirigem o reconhecimento, por parte do indivíduo, dos elementos pertinentes à situação; são os conhecimentos contidos nos esquemas; são eles que constituem a base, implícita ou explícita, que permite obter a informação pertinente e dela inferir a meta a alcançar e as regras de ação adequadas; 4. possibilidades de inferência (ou raciocínios) que permitem "calcular", "aqui e agora", as regras e antecipações a partir das informações e invariantes operatórios de que dispõe o sujeito, ou

> seja, toda a atividade implicada nos três outros ingredientes requer cálculos "aqui e imediatamente" em situação (MOREIRA, 2002, p. 7).

Nesse sentido, os esquemas dizem respeito às classes de situações, que, conforme citado por Moreira (2002), Vergnaud distingue entre:

> 1. classes de situações em que o sujeito dispõe, no seu repertório, em dado momento de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação; 2. classes de situações em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas frustradas, levando-o eventualmente ao sucesso ou ao fracasso (VERGNAUD, 1993, p. 2 apud MOREIRA, 2002, p. 7).

A ideia de esquema nos mostra que, para que o aluno possa dominar o conceito, por vezes, ele precisará mobilizar-se e reorganizar o que já sabe, os esquemas que possui, com o intuito de encontrar outros novos esquemas, que o auxiliem nas suas estratégias de resolução para que ele, o aluno, possa dominar os conceitos que se relacionam em uma dada situação.

6.2 Situação

A ideia de situação, abordada na Teoria dos Campos Conceituais, difere da definição de situação didática. Para Vergnaud, o conceito de situação pode ser visto partindo da perspectiva psicológica. (VERGNAUD, 1990 apud MOREIRA, 2002).

Nesse sentido, faz-se necessário oportunizar aos estudantes situações diversas, para que eles possam ampliar seu repertório e dominar cada vez mais os diferentes significados de um mesmo conceito. Como já foi dito anteriormente, uma única situação envolve inúmeros conceitos e um único conceito precisa de inúmeras situações para ser dominado. Além disso, ao se referir às situações, Vergnaud destaca dois pontos essenciais: variedade e a história

Santana *et al.* (2015), ao se referirem à ideia de variedade, dizem que:

> [...] em cada Campo Conceitual, existe uma grande variedade de situações e os conhecimentos dos estudantes são moldados pelas situações que, progressivamente, vão dominando. Dessa forma, são as situações que dão sentido aos conceitos, tornando-se o ponto de entrada para um dado Campo Conceitual (VERGNAUD, 1982, p. 40 apud 2015, p. 4).

Já quando alude à ideia de história, Vergnaud nos diz que o conhecimento dos alunos é formado a partir do seu contato com as situações, e isso ocorre progressivamente (VERGNAUD, 1990 apud SANTANA *et al*. 2015).

As ideias de variedade e de história reforçam o fato de que um estudante leva tempo para adquirir um único conceito, e que um Campo Conceitual é formado pela união de muitos conceitos. Desse modo, é preciso apresentar situações diversas para que o aluno possa dominar um conceito e, por consequência, um Campo Conceitual.

Consoante Vergnaud, ao passo que o estudante vai se familiarizando com os conceitos e conseguindo resolver as situações, ele passa a dominar as classes de situações que envolvem aquele dado conceito, as quais variam de acordo com o seu grau de complexidade.

Vergnaud reforça ainda que, para o aluno dominar essas classes de situação, ele precisa passar por:

> [...] situações, palavras, algoritmos e esquemas, símbolos, diagramas e gráficos... e aprenderá, às vezes por descoberta, às vezes por repetição, às vezes representando e simbolizando, às vezes diferenciando, às vezes por redução de diferentes coisas para outras. Isso porque o panorama da aquisição do conhecimento é muito complexo [...] (VERGNAUD, 1994, p. 46, apud SANTANA *et al*., 2015, p. 116).

Sendo assim, nota-se que o processo de transição de uma classe para outra que seja mais complexa leva tempo. Isto é, para que o aluno possa avançar e conseguir resolver classes de situações diferentes, ele irá passar por uma série de etapas e amadurecimento para, de fato, adquirir os conceitos contemplados.

Vejamos onde chegamos: a ideia de Campo conceitual nos levou à definição de um conceito, como sendo a união de três conjuntos (referente, significado e significante). A ideia de um conceito nos conduziu à ideia de esquema que, como vimos, é essencial para os conceitos. No entanto, como são as situações que dão sentido aos conceitos, chegamos à definição de situação. Por outro lado, a ideia de esquema nos levará à definição de invariantes operatórios, a qual, veremos a seguir.

6.3 Invariantes operatórios

Designam-se pelas expressões "conceito-em-ação" e "teorema-em-ação" os invariantes contidos nos esquemas. Pode-se também designá-los pela expressão mais abrangente "invariantes operatórios" (VERGNAUD, 1993, p. 4 apud MOREIRA, 2002,

p. 8). “Esquema é a organização da conduta para uma certa classe de situações; teoremas-em-ação e conceitos-em-ação são invariantes operacionais, logo, são componentes essenciais dos esquemas” (VERGNAUD, 1998 apud MOREIRA, 2002, p. 8).

Nesse sentido, os conceitos-em-ação não são conceitos científicos, mas sim, conceitos construídos ou observados pelos alunos à medida que eles resolvem situações matemáticas.

Já no que se refere à ideia de teorema-em ação, Nunes *et al.* (2005, p. 47 apud GONÇALVES, 2008 p. 89) salientam que “Os teoremas-em-ação constituem o conhecimento matemático que as crianças desenvolvem em suas vidas diárias”, mostrando que tal conhecimento é construído à medida em que o aluno enfrenta as situações. Porém esses teoremas não são, necessariamente, teoremas matemáticos, que tenham sua aplicação ampla. Por exemplo, se tomarmos o conceito de multiplicação, ao pensarmos a multiplicação entre dois números naturais, pegando um número qualquer e multiplicando por segundo número, maior que o primeiro, encontramos um terceiro número, também natural, porém maior que os dois anteriores. Isto é, 2 x 3 = 6, ou ainda, 3 x 4 = 12.

Essa observação poderia levar o estudante a pensar que, ao multiplicar dois números quaisquer, sempre encontramos um número maior. Esse fato é um teorema-em-ação, mas não é um teorema matemático, pois não é uma verdade absoluta, indiscutível. Visto que, se considerarmos outro conjunto numérico, a afirmação se torna falsa.

Nesse sentido, Gitirana *et al.* (2013, p. 30) afirma que

> [...] os teoremas-em-ação não são teoremas no sentido convencional do termo, porque a maioria deles não é explícita e muitos não tem validade matemática. Eles estão subjacentes (implícitos) ao comportamento dos alunos, aparecem de modo intuitivo na ação destes. Algumas vezes, seu domínio de validade é considerado verdadeiro apenas para um conjunto de problemas [...].

Moreira (2002), ao mencionar os invariantes operatórios, ressalta que a relação entre os conceitos-em-ação e teorema-em-ação é uma relação dialética. Isto é, existe uma estreita sintonia entre o conceito-em-ação e teorema-em-ação, entretanto eles se apresentam de formas diferentes. Conceitos não podem ter sua veracidade matemática testada, enquanto os teoremas em ação são afirmações passíveis de teste de veracidade.

7 METODOLOGIA

Nossa investigação considera como principal aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) (VERGNAUD, 1994) para a investigação e criação de categorias de análises relacionadas às situações envolvendo o conceito e as propriedades de funções exponenciais. A escolha de investigarmos o conceito de função exponencial, por meio da TCC, foi feita por assumir que um conceito é dominado por meio do enfrentamento de várias situações com diferentes significados, como aponta Vergnaud (1994).

Nesse sentido, almejamos em nossa pesquisa entender como o conceito de função exponencial é abordado no livro didático de Matemática, uma vez que o LD vem se mostrando o principal recurso utilizado na sala de aula de Matemática. Nesse viés, desejamos, com essa pesquisa, responder à seguinte questão-problema: quais os tipos de situações envolvendo a função exponencial são trazidos pelos livros didáticos do 1º ano do Ensino Médio?

Com o intuito de responder à nossa questão-problema, tivemos como objetivo geral: classificar os tipos de situações envolvendo a função exponencial trazidos pelos livros didáticos do 1º ano do Ensino Médio à luz da teoria dos Campos Conceituais. Para atingir nosso objetivo geral e responder à questão de pesquisa, elencamos os seguintes objetivos específicos: I- Identificar classes de situações sobre função exponencial. II- Identificar conceitos e propriedades abordadas nos problemas propostos dos livros didáticos relativos à função exponencial. III- Identificar esquemas possíveis para a resolução das situações propostas em livros didáticos para introduzir o conceito de função exponencial. IV- Discutir as representações utilizadas nas situações propostas ou resolvidas.

Nossa pesquisa recebe uma abordagem qualitativa, por meio da qual "torna-se possível descrever com precisão fenômenos tais como atitudes, valores e representações e ideologias contidas nos textos analisados" (GIL, 2002, p. 90).

No que tange aos objetivos, nossa pesquisa se classifica em descritiva. Para Gil, "As pesquisas descritivas têm como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou, então, o estabelecimento de relações entre variáveis" (2002, p. 42). O autor reforça ainda que as pesquisas descritivas, "[...] vão além da simples identificação da existência de relações entre variáveis, e pretendem determinar a natureza dessa relação." (GIL, 2002, p. 42).

Com base nos procedimentos técnicos, nossa pesquisa se enquadra em uma pesquisa bibliográfica que, conforme Gil,

> A pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho dessa natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas (2002, p. 44).

Essa classificação é dada tendo em vista que as nossas análises foram feitas em livros didáticos. Essa classificação deve-se ao nosso referencial teórico, que foi construído não por meio de pesquisas já existentes, mas sim a partir do material que analisamos: o livro didático.

No que diz respeito à escolha dos livros que foram analisados nesta pesquisa, levamos em consideração dois critérios de escolha: o primeiro foi ter sido aprovado pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD[2]) do ano de 2022, e o segundo conter o conceito de função exponencial e/ou suas propriedades. Fora esses dois critérios, foi feita uma pré-análise nos problemas que envolviam função exponencial com o intuito de selecionarmos a coleção que mais se adequasse à nossa pesquisa. Nesse momento, buscamos por obras que trouxessem situações contextualizadas aplicadas à função exponencial. Neste contexto, a coleção que mais se adequou com os objetivos de nossa pesquisa foi a "Matemática ciência e aplicações" de Iezzi *et al.* (2022).

As obras selecionadas foram analisadas seguindo seis categorias de análise. Após a criação das categorias de análise, seguimos as seguintes etapas: leitura do guia e do livro didático, seleção das páginas e problemas que tratam sobre função exponencial e suas propriedades, quantificação e classificação desses problemas. Por fim, criamos uma tabela para exemplificar os problemas que se enquadram em cada classe de situação abordada nas classificações criadas. O Quadro 1 mostra as categorias de análise criadas.

[2] De acordo com o MEC, o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) é destinado a avaliar e a disponibilizar obras didáticas, tais como livros didáticos e outros recursos. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12391:pnld, acessado em 30/03/2022, às 09h48min.

Quadro 1: Critérios de análise

Ordem	Critério
1	Estrutura simples ou mista
2	Significado da relação
3	O contexto do problema
4	O elemento desconhecido
5	Os elementos dados

Fonte: Autor 2022.

Cabe salientar que as categorias criadas e listadas anteriormente são categorias teóricas, criadas tendo por base a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) e embasadas em trabalhos já existentes sobre estruturas aditivas e multiplicativas, criadas por Vergnaud. A definição destas estruturas está ligada à ideia de campo conceitual, definida por Vergnaud, segundo o qual, um campo conceitual envolve a união de inúmeros conceitos. Sendo assim, as estruturas aditivas envolveriam não só a soma e subtração, mas também inúmeros outros conceitos matemáticos. Por outro lado, as estruturas multiplicativas fazem menção ao campo multiplicativo, no entanto não se restringe apenas à multiplicação e divisão. A esse propósito, conforme Gitirana *et al.* (2013, p. 32), é "importante salientar, que para além das operações de multiplicação e divisão, essas estruturas envolvem muitos conceitos", como por exemplo, função, área e entre outros.

Além disso, é importante frisar que as classes de situações identificadas não levaram em consideração questões puramente matemáticas, sendo assim, questões que pediam a construção de gráficos, o encontro de uma lei de formação partindo do gráfico e entre outras situações puramente matemáticas não foram levadas em consideração em nossas análises. Selecionamos as situações contextualizadas que apresentassem algum significado para a função exponencial.

8 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Da coleção escolhida, separamos os problemas presentes na parte de funções que tratavam de função exponencial e que atendiam a nossa pesquisa; a partir desses, começamos a seleção de problemas para a discussão das classes e subclasses de situações encontradas. Os problemas selecionados e respectivas páginas do LD estão listados no Quadro 2, a seguir.

Quadro 2 - Situações a serem analisadas

Tipo de problema	Problema	Página
Problemas resolvidos	Censo populacional	187
	Exemplos 2 e 3	198
	Exemplo 4	199
	O número e	200
	Família e Introdução a equação exponencial	205
Problemas propostos	28, 30, 31 e 32.	202
	33, 34, 25, 36 e 37.	203
Testes	8 e 9	218
	11, 13, 14 e 15	215
	16,19 e 20	220
	21, 22 e 24	221
	26, 28,29 e 30	222
	33	222-223
	34, 35, 36, 37 e 38	223
Exercícios	42, 43, 46, 48, 49 e 51	207
	1, 3, 4, 5 e 7	214
	8, 10, 11, 13, 14, 19 e 20	215
	21	215-216
	24, 25 e 27	216
	28, 31 e 33	217

Fonte: Autor (2022).

O livro escolhido divide os problemas em três partes: os problemas propostos, os exercícios (que podem ser só exercícios ou exercícios complementares, que consideramos como só um grupo - os problemas da parte de exercício) e os problemas-teste, que acreditamos ser só uma forma de organizar os problemas. Convém esclarecer que todos os problemas que apresentem um significado para a função exponencial, presentes no livro, foram classificados, independentemente de em qual parte do livro estejam. Adiante, estão apresentadas as classes de situações criadas a partir dos problemas contidos no livro escolhido e embasadas na Teoria dos Campos Conceituais (TCC).

8.1 Classe I - Taxa sobre Taxa (Composição de Taxas)

A classe de situações "Taxa sobre Taxa" foi criada a fim de englobar as situações que tratam de acúmulo de taxas. Neste sentido, temos três subclasses: a Taxa sobre Taxa sendo uma valorização (taxa maior que 1); a Taxa sobre Taxa sendo uma depreciação (taxa entre 0 e 1); e a Taxa sobre Taxa sendo uma situação mista (que apresenta, tanto uma valorização, quanto uma desvalorização). A divisão desta classe foi feita pelo significado, a primeira está ligada a situações de valorização, a segunda à depreciação e a terceira, às situações que trazem, tanto a valorização, quanto a depreciação. Nas situações de valorização, a taxa é $0 < a > 1$, já nas situações de depreciação, temos taxas $a < 1$. A taxa aplicada corresponde à base da função exponencial

$$f(x) = a^x, com\ 0 < a \neq 1.$$

8.1.1 Taxa sobre Taxa com valorização/crescimento

A subclasse **valorização/crescimento** foi criada após analisarmos a situação encontrada no problema proposto de nº 34, em que é dito que uma população de algas cresce de modo que a área coberta por ela aumenta 75% ao ano. O problema apresenta uma taxa de crescimento exponencial, uma vez que a cada ano a população cresce 75%, como consta na Figura 3, localizada a seguir.

Figura 3 - Problema proposto 34.

34. Em uma região litorânea, a população de uma espécie de algas tem crescido de modo que a área da superfície coberta por elas aumenta 75% a cada ano, em relação à área coberta no ano anterior. Atualmente, a área da superfície coberta pelas algas é de, aproximadamente, 4 000 m^2. Suponha que esse crescimento seja mantido.

a) Faça uma tabela para representar a área coberta pelas algas daqui a um, dois, três, quatro e cinco anos, contados a partir desta data.

b) Qual é a lei da função que representa a área (y), em m^2, que a população de algas ocupará daqui a *x* anos?

c) Esboce o gráfico da função obtida no item b).

Fonte: Iezzi *et al*. (2022, p. 203).

O problema apresenta três questões; no item a, é pedido para se construir uma tabela que apresenta os valores de área coberta após 1, 2, 3, 4 e 5 anos. Já no item b, é pedida a lei de formação da função e, no item c, pede-se que seja construído o gráfico dessa função. Com o intuito de facilitar nossas discussões, criamos a tabela solicitada no item a, apresentada na sequência.

Figura 4 - Tabela de resolução da questão 34 do livro.

Temp (em anos)	Área coberta (m^2)	
x	h(x)	Dh
0	4000	75% a mais
1	4000 x 0,75 + 4000 = 4000 x 1,75	75% a mais
2	(4000 x 1,75) x 0,75 + (4000 x 1,75) = 4000 x $(1,75)^2$	75% a mais
3	$(4000 \text{ x } 1,75)^2$ x 0,75 + $(4000 \text{ x } 1,75)^2$ = 4000 x $(1,75)^3$	75% a mais
4	$(4000 \text{ x } 1,75)^3$ x 0,75 + $(4000 \text{ x } 1,75)^3$ = 4000 x $(1,75)^4$	75% a mais
5	$(4000 \text{ x } 1,75)^4$ x 0,75 + $(4000 \text{ x } 1,75)^4$ = 4000 x $(1,75)^5$	

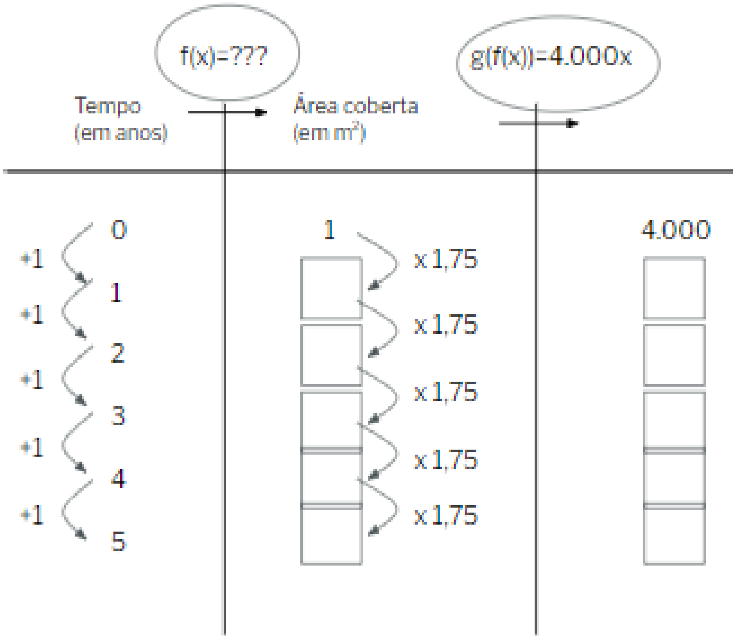
Fonte: Autor (2022).

Na tabela constante da Figura 4, é visível que a cada ano a população de algas cresce 75%, como consta na terceira coluna, em que se explicita a razão entre as duas imagens, quando se adiciona uma unidade no domínio. A referência para esse crescimento será sempre a população anterior, já que cada nova planta ou bulbo torna-se uma reprodutora. Isto é, o crescimento não será linear, baseado na população inicial, o crescimento será caracterizado como um crescimento exponencial, ou ainda, um crescimento baseado no estado anterior, algo iterativo, que é representado por uma taxa composta (taxa sobre taxa), caracterizando assim um crescimento exponencial. Nota-se que a taxa 75% a mais é transformada em 1,75, como base da exponencial.

Já no item b, a questão pede que seja encontrada a lei de formação da função que representa a área ocupada pela espécie de alga em relação ao tempo. Nesse viés, é pedida uma fórmula, ou regra matemática, a partir da qual se possa calcular a área ocupada pelas algas para qualquer que seja o tempo (expresso em anos). Na tabela da Figura 4, é perceptível que a cada ano que se passa, a nova área ocupada será a do ano anterior multiplicada por 1,75. Sendo assim, a função seria $y= 4000. (1,75)^x$, onde x representa o tempo (medido em anos).

Destaca-se que essa função encontrada no item (b) do problema não se configura uma função exponencial simples, trata-se de uma composição de funções, isto é, o que acontece em 1 m^2 pode ser generalizado para quaisquer valores de área que se tenham inicialmente, como os 4.000 m^2 dados no problema, por uma função linear do tipo proporção simples (MIRANDA, 2019). Portanto, se encontrarmos inicialmente uma função f(x), que associa o tempo com a área coberta, partindo de 1 m^2, encontraremos em seguida uma nova função, que vai generalizar o crescimento que ocorre em 1 m^2 para os quaisquer valores de áreas desejados. Essa nova função seria a composição da função $f(x)$com a função g(x) que poderia ser expressa por $g(f(x))$= 4000 x 1,75x, como podemos observar na Figura 5, onde $h(x)$, que é descrita na tabela anterior, refere-se à $g(f(x))$.

Figura 5 - Composição de função.



Fonte: Autor (2022).

Esse olhar da função como função composta foi necessário aqui para podermos olhar a função exponencial a partir de sua definição que é expressa somente por $f(x)=a^x$, com 0 < a e a diferente de 1. Não cabe na sua expressão um coeficiente multiplicando a expressão. Com tal coeficiente, suas propriedades são inválidas, a saber $f(x+y)=ba^{x+y}=ba^xa^y=f(x)\times\frac{f(y)}{b}$.

Além disso, é importante salientar que, para se encontrar um novo valor dentro da função *f*, o tempo está sempre sendo somado, porém a área é sempre multiplicada (por 1,75), caracterizando, além do crescimento de 75%, um isomorfismo entre os reais munidos da soma com os reais munidos da multiplicação. Nesse sentido, esses dois itens foram geradores desta subcategoria.

Já o item c do problema pede que seja construído o gráfico da função; a pura construção do gráfico é algo que não incluiremos em nossas discussões, tendo em vista que é uma forma de representar a função e não um novo significado para ela.

Pensando em pesquisas futuras, como também na melhor visualização de nossas discussões, resolvemos construir o Quadro 3, na sequência, que traz os elementos dados no problema e ainda os elementos pedidos da situação analisada nesta parte das discussões.

Quadro 3 - Elementos dados e solicitados no problema 34.

Estrutura/subestrutura	Elementos dados	Elementos solicitados
Taxa sobre taxa composta com função de proporção simples Valorização - taxa maior que 1	• Tempo de um ciclo • Imagem do zero • Taxa aplicada a cada ciclo	• Valores intermediários • Representação algébrica da função

Fonte: Autor (2022).

O Quadro 3 apresenta, de forma sucinta, os elementos dados e os solicitados, na situação analisada durante a discussão da subclasse. Vejam que a imagem do zero passa a fazer sentido dado estarmos em uma estrutura mista.

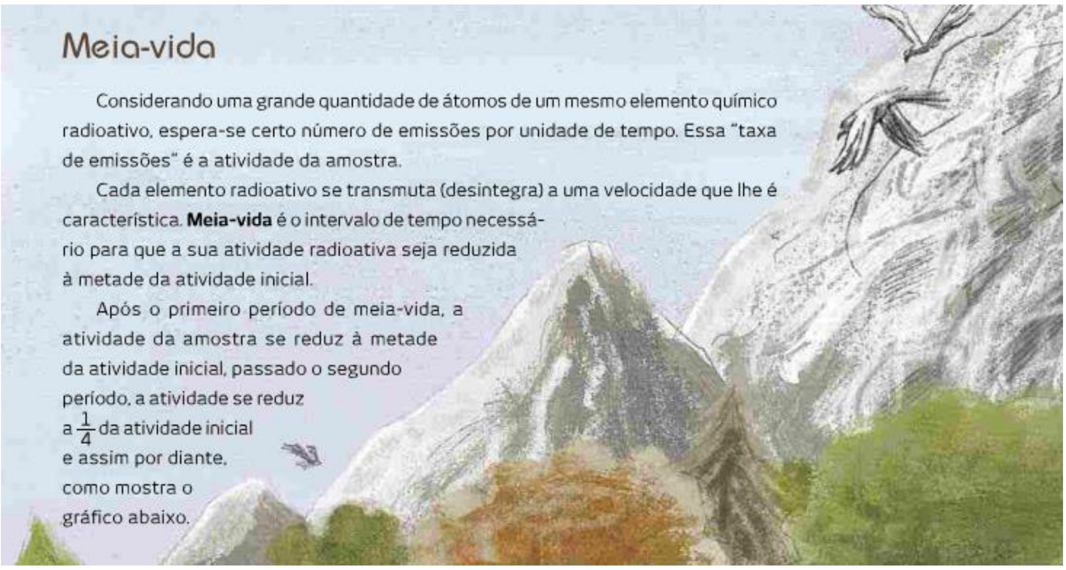
8.1.2 Taxa sobre Taxa com depreciação/desvalorização

Após a criação da subclasse de valorização/crescimento, durante a análise do problema 34, encontramos duas situações que trazem uma nova subclasse, a depreciação/desvalorização. A primeira situação é uma discussão sobre o conceito de Meia-vida; já a segunda situação encontra-se no problema proposto 36, que discute sobre a desvalorização que sofre o valor de um conjunto de sofás em relação ao tempo. Sendo assim, ambas as situações nos darão base para a discussão dessa nova subclasse.

A primeira situação traz o conceito químico de meia-vida em elementos radioativos. Embora seja uma discussão promovida pela ciência Química, esse tipo de problema também é comumente encontrado nos livros didáticos de Matemática, ao ser estudada a função exponencial. Por esse motivo, a levamos em consideração para análise.

Em nosso caso, a situação destacada está na página 209 do livro analisado. Na situação, é apresentada a definição de Meia-vida, que, de maneira geral, representa o intervalo de tempo necessário para que uma amostra de uma substância tenha sua concentração reduzida pela metade, mas nos elementos radioativos, o tempo de meia-vida se associa ao decaimento da atividade radioativa por meio da desintegração do núcleo de seus átomos. Para os elementos radioativos, o decaimento também envolve a propriedade de emissão de energia (OLIVEIRA, 2014). A Figura 6 exibe a situação supracitada.

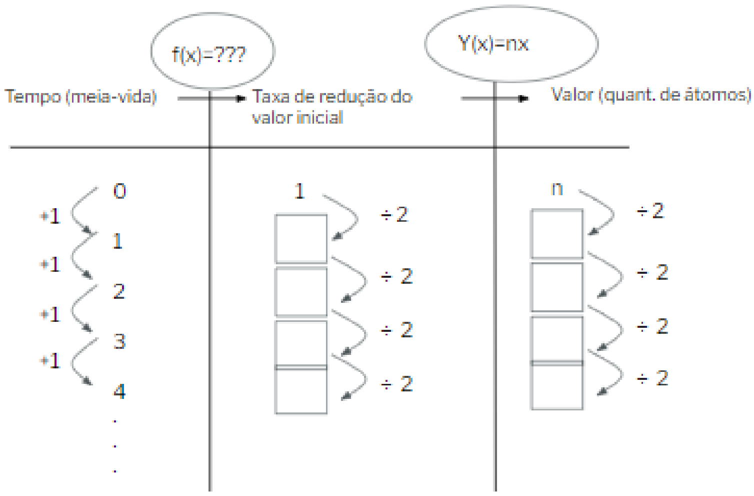
Figura 6 - Discussão sobre Meia-vida.



Fonte: Iezzi *et al*. (2022, p. 209).

Com o intuito de esclarecer nossas discussões, resolvemos trazer, antes do gráfico que é utilizado pelo LD para representar o fenômeno descrito na Figura 6, outra representação da situação, como pode ser visto na Figura 7, exposta a seguir.

Figura 7 - Organização da situação sobre Meia-vida.



Fonte: Autor (2022).

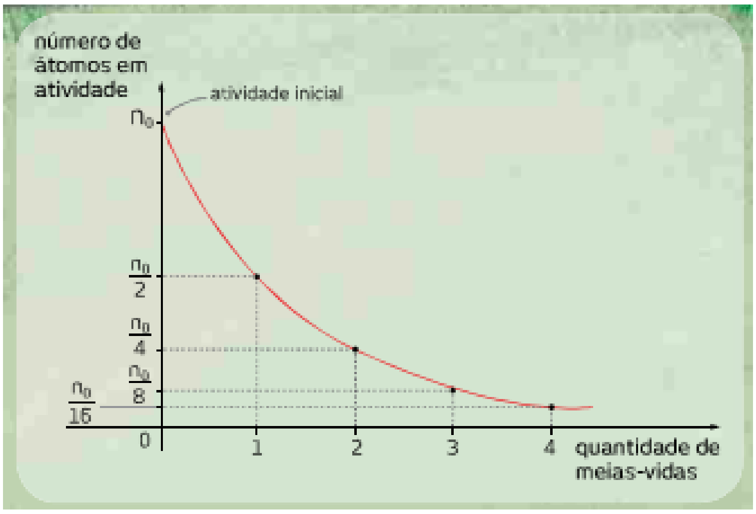
Na Figura 7, a situação presente no livro analisado está organizada de uma forma diferente da situação apresentada no LD analisado. Nela, podemos observar que o tempo, que é expresso em Meia-vida, aumenta de forma constante (neste caso, aumenta sempre 1); já a quantidade de átomos do elemento radioativo decai pela metade, ou seja, diminui multiplicativamente. Neste sentido, a situação apresenta uma composição entre funções;

a função exponencial como taxa sobre taxa é composta com a função linear do tipo proporção simples.

Para que o aluno entenda o que acontece com a taxa de decaimento radioativo de uma determinada substância após *B* meia-vida, é importante que ele entenda o conceito químico sobre a meia-vida, relacionado a esses elementos e o conceito matemático que está por trás dele. Sendo assim, a quantidade da atividade radioativa obtida após o intervalo de tempo de meia vida é relacionada de forma exponencial ao número de átomos presentes no elemento antes da aplicação dessa taxa. O elemento radioativo pode passar por diversos períodos de desintegração, como representado na Figura 7.

Ao entender o que acontece na situação supracitada, o aluno está trabalhando com uma função composta, que na Figura 7 está denotada por *Y*(x)= nx. Cabe ressaltar que *Y* representa a função linear e Y(f(x)) a composta da função *f*(x) com Y(x), que permite a ampliação para uma quantidade qualquer de átomos em atividade. Para reforçar esse pensamento, como também o conceito de Meia-vida, o livro traz, junto à situação, um gráfico na tentativa de mostrar o que acontece com a amostra após passar por alguns períodos de desintegração, como podemos ver na Figura 8, subsequente.

Figura 8 - Gráfico sobre Meia-vida.



Fonte: Iezzi *et al*. (2022, p. 209).

No gráfico da Figura 8, observa-se que o livro destaca uma situação em que cada intervalo de Tempo Meia-Vida, a quantidade de átomos em atividade radioativa se desintegra pela metade, o que garante que tenhamos uma função exponencial do tipo *f*(x)= $\frac{N}{2^x}$, onde N representa a quantidade inicial de átomos, já o x representa a quantidade de desintegrações sofridas. Apresenta-se como uma situação de Taxa sobre Taxa de depreciação/desvalorização, tendo em vista que, na situação, expõe-se a taxa de decaimento. Não se espera, nessa fase de escolaridade, que o estudante tenha a compreensão da radioatividade para modelar a situação. O Quadro 4, próximo, apresenta os dados solicitados e os pedidos no problema.

Quadro 4 - Elementos dados no problema de Meia-Vida

Estrutura/Subestrutura	Elementos dados
Taxa sobre taxa composta com função de proporção simples; Desvalorização - taxa maior que 0 e menor que 1	• Tempo de Meia-Vida • Imagem pela função composta do zero • Taxa aplicada a cada ciclo de decrescimento

Fonte: Autor (2022).

No Quadro 4, vemos que apesar de o problema tratar de Meia-Vida, o tempo nem sempre é expresso em Meia-Vida; nesse caso, foi simplificado um pouco o problema. Em geral, esse tipo de situação ainda envolve uma terceira função na composição, a saber: a função entre o tempo expresso em anos e o tempo expresso em Meia-Vidas.

Já o problema proposto, de nº 36, traz a situação de um conjunto de sofás que tem seu preço desvalorizado em 10% a cada ano após a compra. No item a do problema, é pedido que seja construída uma tabela com os valores do conjunto de sofás após 1, 2, 3 e 4 anos. No item b, o problema pede que seja calculado o valor após sete anos de uso e, por fim, no item c, pede a lei de formação da função que associe o valor do conjunto de sofás com o tempo, como podemos ver na Figura 9, a seguir.

Figura 9 - Problema posposto 36.

36. Um conjunto de sofás foi comprado por R$ 2 000,00. Com o tempo, por descuido do comprador, o sol foi queimando o tecido do sofá, que perdeu a cor original. Um comerciante do ramo informou ao comprador que em uma situação desse tipo, a cada ano o sofá perde 10% do valor que tinha no ano anterior.

a) Faça uma tabela para representar o valor do sofá depois de 1, 2, 3 e 4 anos da data de sua aquisição.

b) Sabendo que o comprador se informou com o comerciante 7 anos depois da compra, que valor o sofá teria nesta data, segundo o comerciante?

c) Qual é a lei da função que relaciona o valor (y), em reais, do conjunto de sofás e o tempo *t*, expresso em anos após a sua aquisição?

Fonte: Iezzi *et al*. (2022, p. 203).

Com a intenção de melhorar nossas discussões, resolvemos construir a tabela solicitada no item a do problema, a qual está apresentada a seguir na Figura 10.

Figura 10 - Tabela de resolução do problema proposto 36

Temp (em anos)	valor (reais)	Dh
x	h(x)	
0	2000	
1	2000 - 2000 x 0,1= 2000 x 0,9	10% a menos
2	(2000 x 0,9) - (2000 x 0,9) x 0,9 = 2000 x $(0,9)^2$	10% a menos
3	(2000 x $(0,9)^2$) - (2000 x $(0,9)^2$) x 0,9 = 2000 x $(0,9)^3$	10% a menos
4	(2000 x $(0,9)^3$) - (2000 x $(0,9)^3$) x 0,9 = 2000 x $(0,9)^4$	10% a menos

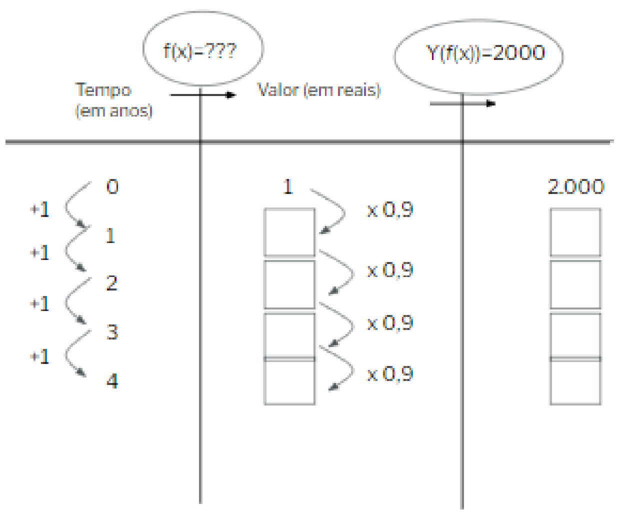
Fonte: Autor (2022).

Na Figura 10, é apresentada a desvalorização no valor inicial do conjunto de sofás, algo ressaltado na terceira coluna da tabela. Nesse sentido, cabe salientar que a desvalorização não ocorre de forma linear, isto é, com base apenas no valor inicial do conjunto de sofás, ela acontece sempre com base no valor anterior, como está discriminado na segunda coluna da tabela. Sendo assim, essa desvalorização se caracteriza como uma desvalorização composta ou acumulada.

Já no item b do problema, é solicitado que se calcule qual o valor do conjunto de sofás após sete anos de compra. Para que se possa calcular o que se pede nesse item, poderíamos analisar o que acontece de um ano para o outro na tabela construída no item a, e é notório que o que está mudando sempre é o expoente que eleva o 0,9. Cabe esclarecer que o 0,9, que aparece repetidamente na tabela da Figura 10, representa uma desvalorização de 10% sobre o valor original, indicando que, a cada ano que se passa, o objeto valerá 90% do que valia no ano anterior. Nesse viés, o valor após sete anos seria igual à 2.000 x $(0,9)^7$, o que seria aproximadamente R$ 956,60. Esse item, apesar de ser de cálculo de uma imagem da função em um valor específico, aponta para a necessidade de se modelar uma função de forma generalizada.

Por fim, no item c, pede-se uma função que modele o valor Y do conjunto de sofás em função do tempo. Para encontrarmos essa função Y, buscamos primeiro encontrar uma função $f(x)$ que mostrasse o que acontece com 1 real, nas condições dadas pelo problema. Essa função f poderia ser escrita por $f(x)$= 1 x $(0,9)x$, mas essa ainda não seria a função Y, solicitada no item c. Para encontrar a função Y, precisamos expandir a função f que estuda o que acontece com o valor de 1 real sob as condições do problema para um valor genérico, ou até mesmo o valor que custou o conjunto de sofás, como ilustrado na figura 11, apresentada na sequência.

Figura 11- Composição de funções - Depreciação.



Fonte: Autor (2022).

Na Figura 11, além da função *f(x)*, é apresentada uma função $Y(x)$ que estuda o que acontece com o valor de 2.000, solicitado no problema. Podemos observar, portanto, que essa função poderia ser expressa por $Y(f(x)) = 2000 \text{ x } (0,9)^x$, onde seria x o tempo. Cabe aqui salientar que essa função também poderia ser encontrada analisando apenas a tabela construída no item a, apresentada na Figura 10. Lá, a função $Y(f(x))$ é expressa como sendo $h(x)$, que representa uma função composta, de modo que $h(x)$ nada mais seria que a função $Y(x)$ composta com a função $f(x)$.

Além disso, é importante observar que na função acontece uma troca de operações, isto é, o tempo que é expresso por anos e representado por x aumenta sempre por meio de uma soma (1, 2= 1+1, 3= 2+1, 4= 3+1…). Em contrapartida, a função $f(x)$ que representa o valor de desvalorização de cada real em função do tempo varia por meio de uma multiplicação. Isto é, a cada ano que se passa, o valor será expresso pelo valor anterior multiplicado por 0,9, ou seja, a operação realizada no domínio é a soma, já na imagem, é a multiplicação, o que é demonstrado na Figura 11.

Essa troca de operação é chamada de isomorfismo, e é garantida por haver uma correspondência entre as duas operações, e por termos a mesma quantidade de elementos, tanto no conjunto domínio, quanto no conjunto imagem.

Neste sentido, cabe reforçar que dentro da classe de situações, Taxa sobre Taxa com proporção, temos subclasses de situações, como por exemplos, as duas já apresentadas, onde, em uma há a valorização e, em outra, há uma desvalorização, porém as duas subclasses apresentam características comuns da classe e características próprias da subclasse, como visto. O Quadro 5, consecutivo, resume os elementos presentes e solicitados no problema 36.

Quadro 5 - Elementos dados e solicitados no problema 36.

Depreciação/Desvalorização	Elementos dados	Elementos solicitados
Valorização, taxa maior que 0 e menor que 1	• Tempos • Imagem do zero • Taxa aplicada a cada ciclo	• Valores intermediários • Lei de formação da função

Fonte: Autor (2022).

O Quadro 5 apresenta, de forma sucinta, os elementos dados e os solicitados na situação analisada durante a discussão da subclasse.

8.1.3 Composição de duas situações de Taxa sobre Taxa (taxa composta) com proporcionalidade simples

Para embasar nossas discussões e apresentarmos essa subclasse, passamos a discutir o problema 34, localizado na seção teste do referido livro. O problema apresenta a situação de um jogo pedagógico, no qual inicialmente o aluno recebe 256 pontos e jogará 8 partidas; cada partida consiste em um problema a ser resolvido pelo aluno. Se acertar, ele ganha 50% dos pontos que possuía e, em caso de erro, perde 50% dos pontos que possuía antes do erro. Além disso, ao final das 8 rodadas, o aluno deverá devolver os 256 pontos que ganhou inicialmente, sendo assim, sua pontuação seria os pontos restantes.

O problema 34 traz a situação de um aluno que participou do referido jogo e, ao término, ficou devendo 13 pontos. O problema pede que seja determinado o número de erros que o aluno cometeu ao participar do jogo, como podemos observar na Figura 12, localizada a seguir.

Figura 12 - Problema teste 34.

34. (Aman-RJ) Um jogo pedagógico foi desenvolvido com as seguintes regras:

- Os alunos iniciam a primeira rodada com 256 pontos;
- Faz-se uma pergunta a um aluno. Se acertar, ele ganha a metade dos pontos que tem. Se errar, perde metade dos pontos que tem;
- Ao final de 8 rodadas, cada aluno subtrai dos pontos que tem os 256 iniciais, para ver se "lucrou" ou "ficou devendo".

O desempenho de um aluno que, ao final dessas oito rodadas, ficou devendo 13 pontos foi de

a) 6 acertos e 2 erros.

b) 5 acertos e 3 erros.

c) 4 acertos e 4 erros.

d) 3 acertos e 5 erros.

e) 2 acertos e 6 erros.

Fonte: Iezzi *et al*. (2022, p. 223).

Com o intuito de melhorar a discussão acerca da situação descrita anteriormente, resolvemos trazer na Figura 13, apresentada a seguir, uma tabela que nos ajudará a modelar a situação abordada no problema 34.

Figura 13 - Tabela com a resolução parcial do problema teste 34.

Temp (em partidas)	Ganho	Perca	
x	f(n)	g(x)	Dx
0	256	256	50% a mais
1	$256 + 256 \times ½ = 256\,(3/2)^1$		50% a menos
2		$256\,(3/2)^1 - 256\,(3/2)^1\,(1/2)^1 = 256\,(3/2)^1\,(1/2)^1$	50% a mais
3	$256\,(3/2)^1\,(1/2)^1 + 256\,(3/2)^1\,(1/2)^1\,(1/2)^1 = 256\,(3/2)^1\,(1/2)^1(1+1/2)^1 = 256\,(3/2)^2\,(1/2)^1$		50% a menos
4		$256\,(3/2)^2\,(1/2)^1 - 256\,(3/2)^2\,(1/2)^1\,(1/2)^1 = 256\,(3/2)^2\,(1/2)^1(1/2)^1 = 256\,(3/2)^2\,(1/2)^2$	50% a mais
5	$256\,(3/2)^2\,(1/2)^2 + 256\,(3/2)^2\,(1/2)^2\,(1/2)^1 = 256\,(3/2)^2\,(1/2)^2(1+1/2)^1 = 256\,(3/2)^3\,(1/2)^2$		

Fonte: Autor (2022).

A tabela presente na Figura 13 mostra apenas uma combinação qualquer das muitas existentes (que combina acertos e erros). Além disso, apresenta apenas as cinco primeiras rodas para que se possa observar como o acerto e o erro podem ser expressos matematicamente. Isso porque, como visto na tabela, tanto o acerto como o erro se comportam como uma função exponencial, onde o acerto pode ser expresso por $f(x)=(3/2)x$ e o erro pode ser por $g(x)=(½)^{8-x}$. A junção dessas duas funções formará uma nova função, que representa a pontuação final após x partidas, função essa que pode ser expressa por $f(x)=(3/2)^x\,(½)^{8-x}$, onde o x representaria os acertos.

Por outro lado, é importante observar que mesmo considerando alternância entre ganhos e perdas, a ordem não afeta a fórmula geral da composição de funções encontrada, uma vez que a quantidade de acertos e de erros é que irá compor a pontuação final do estudante, isto é, para a pontuação, não importa quais ele errou ou acertou, mas sim a quantidade de acertos ou erros.

Como é dito que no fim de oito partidas, o aluno ficou com um déficit de 13 pontos, podemos entender que ele, na verdade, fez 243 pontos durante o jogo (isso após os ganhos e perdas). Como encontramos uma função que modela a pontuação final, teremos que $243 = f(x) = (\frac{3}{2})^x \times (\frac{1}{2})^{8-x}$, o que podemos reescrever como sendo: $3^5 = (\frac{3}{2})^x \times (\frac{1}{2})^{8-x}$, onde o 3^5 representa a fatoração do 243 na base 3. Com isso, utilizando as propriedades de potenciação, encontraremos que x é igual a 5, como foram oito rodadas, obrigatoriamente a quantidade de erro foi três, o que reforça a nossa afirmação inicial: o que garante a pontuação no jogo não é a ordem de acertos ou erro, mas sim a quantidade.

Nessa situação, a taxa de valorização são os acertos e, em contrapartida, os erros representam a taxa de depreciação, por apresentarem ambas as classificações de taxa sobre taxa com proporção simples (valorização - taxa maior que 1 - e, depreciação - taxa entre 0 e 1). Essa situação pode ser classificada como uma situação mista, que por sua vez, trata-se de uma situação que é formada, tanto por depreciação, quanto por valorização.

Por outro lado, a situação encontrada no problema teste de número 34 expressa uma situação totalmente nova, na qual após se dominar, tanto a subclasse de valorização, quanto a de depreciação, o aluno precisaria mobilizar seus esquemas com a finalidade de encontrar e/ou criar outros novos esquemas que o ajudassem a encarar essa nova situação. Cabe ainda salientar que a dificuldade em resolver toda a situação, ou seja, descobrir o total de erros, não pode ser analisada simplesmente pela dificuldade de analisar separadamente a valorização ou a depreciação, encontradas nesta nova situação. Sendo assim, a classe de situações mistas, que envolvem Taxa sobre Taxa, pode ser considerada como a junção das subclasses anteriores.

O Quadro 6, na sequência, apresenta os valores conhecidos e os desconhecidos do problema.

Quadro 6 - Elementos dados e solicitados no problema 34

Situação mista	Elementos dados	Elementos solicitados
Apresenta desvalorização, taxa maior que 0 e menor que 1 e valorização taxa maior que 1.	• Tempos • Imagem do zero pela função composta • Taxa de desvalorização aplicada ao ciclo • Taxa de valorização aplicada ao ciclo	• Valores intermediários

Fonte: Autor (2022).

O Quadro 6 apresenta, de forma sucinta, os elementos dados e os solicitados na situação analisada durante a discussão dessa nova classe de situações.

8.2 Classe II - Cisão

Para discutirmos essa nova classe de situações, tomaremos como situação norteadora a situação contida no problema 30, presente na seção "testes" do LD analisado. O problema contém uma situação que fala sobre a reprodução da Salmonella, bactéria encontrada em alimentos que pode causar diversas doenças e levar à morte do ser humano, como podemos observar na Figura 14, a seguir.

Figura 14 - Problema 30 da seção testes.

30. (Acafe-SC) Um dos perigos da alimentação humana são os microrganismos, que podem causar diversas doenças e até levar a óbito. Entre eles, podemos destacar a *Salmonella*. Atitudes simples como lavar as mãos, armazenar os alimentos em locais apropriados, ajudam a prevenir a contaminação pelos mesmos. Sabendo que certo microrganismo se prolifera rapidamente, dobrando sua população a cada 20 minutos, pode-se concluir que o tempo que a população de 100 microrganismos passará a ser composta de 3 200 indivíduos é:

a) 1 h e 35 min.

b) 1 h e 40 min.

c) 1 h e 50 min.

d) 1 h e 55 min.

Fonte: Iezzi *et al*. (2022, p. 222).

Na situação apresentada anteriormente, é dito que a Salmonella se prolifera rapidamente, dobrando sua população a cada 20 minutos. O problema pede que seja determinado o tempo para que uma população de 100 microrganismos atinja a marca de 3.200. Com o intuito de melhorar nossas discussões, apresentamos uma tabela, reproduzida na Figura 15, a qual representa essa situação.

Figura 15 -Tabela de resolução do problema teste 30.

Temp (em min)	Quantidade de microrganismos	Ciclos de reprodução
x	h(x)	
0	100	
20	100 x 2 = 200	1°
40	(100 x 2) x 2 = 100 x $(2)^2$ = 400	2°
60	100 x $(2)^3$ = 800	3°
80	100 x $(2)^4$ = 1600	4°
100	100 x $(2)^5$ = 3200	5°

Fonte: Autor (2022).

Na tabela da Figura 15, é notório que a quantidade de microrganismos dobra a cada ciclo de reprodução (que corresponde a 20 minutos), tornando evidente que essa situação pode ser modelada por uma função exponencial, do tipo $f(x)$= 100 x $2^{\frac{x}{20}}$, onde x é o tempo, se levarmos em consideração o tempo, e só o tempo. Ou, $f(x)$= 100 x $2x$, onde x seria a quantidade de ciclos de reprodução; claro que deve ser considerado que cada ciclo de reprodução corresponde a 20 minutos. Essa última representação talvez seja a primeira a vir na cabeça, quando se tenta modelar por meio de uma função a situação contida no problema. Contudo é preciso muito cuidado para não confundir os ciclos de reprodução com o tempo correspondente a cada ciclo.

Nesse sentido, para que a população de 100 microrganismos possa tornar-se 3.200, são necessários cinco ciclos (de 20 minutos), o que corresponde a 100 minutos, como mostrado na Figura 15. No entanto, essa ainda não é a resposta para o problema. Contudo, se levarmos em consideração que 60 minutos correspondem a 1 hora, teremos que o tempo, de 100 minutos, pode ser expresso por 1 hora mais 40 minutos, sendo assim, a resposta para o problema seria 1 hora e 40 minutos.

O problema foi escrito no LD apresentando a reprodução da Salmonella como uma situação de Taxa sobre Taxa, algo que não é. O que garante que a população dobre, a cada 20 minutos, é a forma pela qual esse microrganismo se reproduz (por cisão). Isto é, na reprodução, cada microrganismo se divide em dois, e cada um desses dois se dividirão em outros dois e assim por diante. Sendo assim, os microrganismos não geram dois novos a cada reprodução, eles se dividem em dois. Essa divisão, além de garantir que a população dobre a cada reprodução, assegura que a situação não se enquadre na primeira classe de situações. Todavia, ao escrever o problema, o processo é sintetizado, explicitando-se a taxa.

Além disso, a situação contida neste problema traz à tona a ideia de Vergnaud ao se referir ao conceito e sua formação e também a ideia de situação, isso porque um único conceito matemático, segundo Vergnaud (1994), precisa de diversas situações para ser compreendido, assim como uma única situação pode envolver mais de um único conceito matemático. Fica evidente a ideia de Vergnaud, porque de nada adiantaria ao aluno, nesta situação, saber resolver a exponencial, se não conseguisse representar os 100 minutos em hora para finalizar o problema.

Nesse viés, o Campo Conceitual de funções exponenciais se apresenta com uma ligação entre muitos conceitos matemáticos, corroborando a ideia de Vergnaud ao dizer que um campo conceitual é um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações e conceitos relacionados uns com os outros e possivelmente interligados durante o processo de aquisição (VERGNAUD, 1982, p. 40, apud SANTANA *et al.*, 2015).

No intuito de sistematizar a análise, construímos o Quadro 7, no qual se organizam os dados que foram pedidos e os que foram dados na situação analisada para a criação dessa classe situações.

Quadro 7 - Elementos dados e solicitados no problema teste 30.

Cisão	Elementos dados	Elementos solicitados
Tem-se algo se dividindo, gerando dois, lembrando a reprodução de bactérias e microorganismos.	• Tempos; • Imagem do zero; • Modelo de reprodução.	• Valores intermediários.

Fonte: Autor (2022).

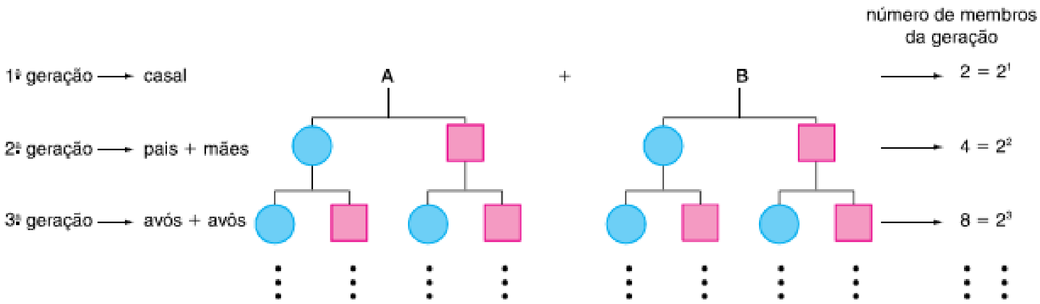
O Quadro 7 apresenta, de forma sucinta, os elementos dados e os solicitados na situação analisada durante a discussão dessa nova classe de situações.

8.3 Classe III - Corrente/Reprodução

A terceira classe de situação, a classe de Corrente/Reprodução, surgiu após analisarmos um problema resolvido, em que o livro usa uma função exponencial para apresentar as equações exponenciais. O problema traz uma espécie de árvore genealógica, na qual o casal Abel e Beatriz apresentam seus ascendentes (familiares em linha reta, pais, avós, bisavós, tataravós etc.); como pode ser visto na Figura 16 próxima.

Figura 16 - Introdução à equação exponencial.

O casal Abel (A) e Beatriz (B) queria saber uma maneira de calcular o número de ascendentes que tinham conjuntamente. Primeiro contaram seus pais/mães (2ª geração), num total de 4 pessoas: 2 de (A) e 2 de (B). Depois contaram os avôs/avós (3ª geração) que eram 8: 4 de (A) e 4 de (B). Então construíram o seguinte esquema:



Eles perceberam que, a cada geração anterior, o número de ascendentes dobrava e concluíram que a lei da função que relaciona o número de membros (y) e a geração (x) ($x = 1, 2, 3, \ldots$) era: $y = 2^x$.

Em certo momento, Beatriz, que é craque em Matemática, desafiou o marido a responder a pergunta: "Em qual geração o número de ascendentes que tivemos corresponde a 4 096?".

Era preciso determinar x tal que $2^x = 4\,096$.

Fonte: Iezzi *et al*. (2022, p. 205).

No problema, é apresentada uma representação que lista e quantifica os ascendentes do casal Abel (A) e Beatriz (B), assim como o número total de familiares de cada geração. Na primeira geração, existia apenas o casal, ou seja, dois membros. Na segunda geração, existiam os pais e as mães do casal, ou seja, quatro membros. Na terceira geração, seus avôs e suas avós, totalizando oito membros. Na situação, não são considerados os demais familiares (irmãos, primos, tias etc.). Essa decisão de não incluir os demais membros garante que seja possível modelar a situação por meio de uma função exponencial; função esta que o livro já enuncia como sendo $Y= 2^x$. Com o intuito de melhorar nossas discussões, representamos a situação em uma tabela, conforme a Figura 17, a seguir.

Figura 17 - Tabela de familiares.

Temp (em geração)	Quantidade de familiares	
x	*f*(x)	
1	Abel + Beatriz = 2	
2	(Pais de Abel) + (Pais de Beatriz) = 2 x 2 = 4	O dobro
3	(Avós de abel) + (Avós Beatriz) = (2 x 2) x 2 = 2 x $(2)^2$ = 8	O dobro
4	2 x $(2)^3$ = 16	O dobro
5	2x $(2)^4$ = 32	O dobro
6	2 x $(2)^5$ = 64	O dobro

Fonte: Autor (2022).

Na tabela da Figura 17, fica evidente que a cada geração, a quantidade de membros cresce, algo curioso é que, a cada geração, o número total de membros é o dobro do número total da geração anterior, como se vê na terceira coluna da tabela. Esse comportamento se caracteriza devido à quantidade de ascendentes seguir uma forma única de crescimento, isto é, exponencial. Na terceira geração, por exemplo, teremos os avós que, tanto Abel, como Beatriz possuem: quatro (dois paternos e dois maternos), totalizando oito familiares, que não coincidem (Observe que em caso de casamento entre primos, ou demais membros de uma mesma família, essa relação é quebrada). Esse comportamento segue para todas as gerações, garantindo assim que a situação seja modelada por uma função do tipo $f(x)= 2^x$, onde x seria o número de gerações e *f(x)* o número de familiares.

Na discussão apresentada no LD, Beatriz desafia Abel a responder em que geração o número de ascendentes total que tiveram foi igual a 4.096. No LD, é dito que bastaria Abel calcular x para que 2^x fosse igual a 4.096. Nesse sentido, Abel precisaria decompor 4.096 na base 2, encontrando 2^{12}. Além disso, precisaria lembrar da propriedade de potenciação, que garante que, para bases iguais com o mesmo resultado (neste caso, indicado pela igualdade), os expoentes precisam ser iguais. Sendo assim, seria x igual a 12, isso significa que na décima segunda geração, o total de ascendentes de Abel e Beatriz foi de 4.096.

Sendo assim, fica evidente que esta classe de situação difere das demais classes apresentadas neste trabalho, principalmente da classe de Composição Taxa sobre Taxa (Taxa Composta), tendo em vista que, nas situações que compõem a referida classe, a taxa (de crescimento/valorização ou decrescimento/desvalorização) já é dada, em contrapartida, aqui é dada uma situação que possibilita a descoberta de uma taxa. Neste viés, as situações exigem do aluno a descoberta ou criação de novos teoremas-em-ação que possibilitem a ele caminhos para a resolução das situações que compõem essa nova classe.

Cabe salientar que o nome dessa nova classe é um nome provisório, podendo mudar em pesquisas futuras, isso porque não conseguimos encontrar outra nomenclatura durante a construção deste trabalho. No intuito de sistematizar a análise, construímos o Quadro 8, consecutivo, onde estão organizados os dados que foram pedidos e os que foram dados na situação analisada para a criação dessa classe de situações.

Quadro 8 - Elementos dados e solicitados no problema

Corrente/Reprodução	Elementos dados	Elementos solicitados
Tem-se um fenômeno de compartilhamento ou forma de reprodução padrão, na qual, sempre se gera ou é gerada uma nova quantidade a partir de uma quantidade padronizada.	• Tempos • Imagem do um ou a base • Modelo de reprodução	• Valores intermediários

Fonte: Autor (2022).

O Quadro 8 apresenta, de forma sucinta, os elementos dados e os solicitados na situação analisada durante a discussão da classe de situações.

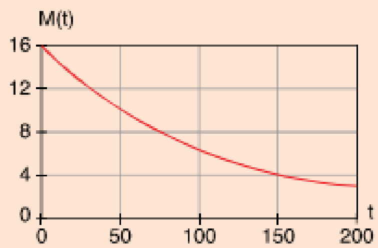
8.4 Situações que podem gerar uma nova classe de situações

Nesse tópico, resolvemos discutir as situações contidas no LD analisado, para as quais, ainda não conseguimos com a nossa pesquisa encontrar classificações ou mesmo classificá-las, seja por envolverem conceitos de outras áreas do conhecimento ou pela estruturação do problema. Dessa forma, apresentamos as situações e discutimos o que as exclui das classes já encontradas em nossa pesquisa.

A primeira situação encontra-se no problema teste 9, localizado na página 218 do LD analisado, no qual que existe dentro de uma xícara uma certa quantidade de açúcar onde será despejado café, o qual será dissolvido sem que ninguém agite a mistura (algo incomum de acontecer no dia a dia). Para auxiliar no entendimento, a situação traz um gráfico que associa a quantidade de açúcar disponível e o tempo. No gráfico, notamos que apesar de um contexto bem atípico para a função exponencial e possivelmente distante do entendimento de estudantes do 1° ano do Ensino Médio, a questão sugere que seja possível modelar dada situação por uma função do tipo exponencial, tendo em vista que é apresentado o gráfico que representa esse comportamento, como podemos observar na Figura 18.

Figura 18 - Questão 9 - seção testes.

9. (Unicamp-SP) Em uma xícara que já contém certa quantidade de açúcar, despeja-se café. A curva a seguir representa a função exponencial M(t), que fornece a quantidade de açúcar não dissolvido (em gramas), *t* minutos após o café ser despejado. Pelo gráfico, podemos concluir que



a) $M(t) = 2^{4-\frac{t}{75}}$

b) $M(t) = 2^{4-\frac{t}{50}}$

c) $M(t) = 2^{5-\frac{t}{50}}$

d) $M(t) = 2^{5-\frac{t}{150}}$

Fonte: Iezzi *et al*, (2022, p. 218).

A questão pede que seja encontrada a lei de formação que modela essa situação; nesse momento, poderia o estudante ter dificuldade em associar o gráfico a uma regra, tendo em vista que o contexto não favorece muito o entendimento do fenômeno ocorrido na situação. Sendo assim, o estudante deveria mobilizar seus esquemas com o intuito de conseguir transitar entre as representações contidas no problema.

Uma saída seria lembrar que a função parte da relação dois a dois, ou seja, que ela associa dois valores pertencentes a dois conjuntos, distintos ou não, formando pares ordenados e a ligação desses pares é que dá origem à representação gráfica da função. Ao lembrar, o estudante poderia encontrar pares ordenados, como por exemplo: (0, 16) e (150, 4). Após encontrar esses pontos, bastaria substituí-los nas alternativas e encontrar a função que modela a situação que se encontra na alternativa A, onde, $M(t)=2^{4-t/75}$. Para melhor visualizar o que acontece nesta situação, na Figura 19, a seguir, apresentamos uma tabela que associa a quantidade de açúcar disponível e o tempo.

Figura 19 -Tabela absorção do açúcar pelo café.

	Temp (em min)	Quantidade de açúcar disponível	
	t	M(t)=2^(4-t/75)	
+50	0	2^4- 0/75= 16	
+50	50	2^4-50/75 ■ 10, 07	x 0,63
+50	100	2^4-100/75■ 6,4	x 0,63
	150	2^4-150/75■ 4	x 0,63

Fonte: Autor (2022).

Na Tabela da Figura 19, podemos observar que a quantidade inicial diminui, tendo em vista que à medida que o tempo passa, o açúcar é absorvido; no entanto, essa redução pode não se consolidar como uma taxa, tendo em vista os fenômenos físico-químicos existentes. Neste sentido, apesar de a quantidade estar diminuindo a uma mesma razão, nesta situação, não podemos generalizar esse comportamento. Sendo assim, a situação não se enquadra em Taxa sobre Taxa com depreciação. Nesse sentido, não conseguimos encontrar uma classificação, tendo em vista que, nesta situação, a função exponencial modela uma situação totalmente atípica e, ainda, na questão, o que mais é explorado é a representação da função exponencial e não um novo significado. O Quadro 9, na sequência, reúne os elementos dados e os solicitados no problema.

Quadro 9 - Elementos dados e solicitados no problema

Elementos dados	Elementos solicitados
• Tempos • Imagem do zero • Representação gráfica • Lista de Leis de formação para seleção	• Lei de formação da função

Fonte: Autor (2022).

Nesse viés, o Quadro 9 apresenta de forma sucinta os elementos dados e os solicitados na situação analisada.

A segunda situação encontra-se no problema 20, constante na página 215 da seção de exercícios do LD analisado. Na questão, é apresentada uma situação na qual a quantidade de creme que forma uma camada no café expresso pode ser modelada por meio de uma função do tipo exponencial. No problema, é dito que a função que modela a situação é $E(t) = a2^{bt}$, e ainda que a camada inicial possui 6 milímetros de espessura e que após 5 segundos, se reduz à metade. A questão pede que seja determinado que espessura terá a camada de creme após dez minutos do café feito, como mostra a Figura 20, a seguir.

Figura 20 - Questão 20 da seção de exercícios.

20. (U.E. Londrina-PR) A espessura da camada de creme formada sobre um café expresso na xícara, servido na cafeteria A, no decorrer do tempo, é descrita pela função $E(t) = a2^{bt}$, onde $t \geqslant 0$ é o tempo (em segundos) e *a* e *b* são números reais. Sabendo que inicialmente a espessura do creme é de 6 milímetros e que, depois de 5 segundos, se reduziu em 50%, qual a espessura depois de 10 segundos?

Apresente os cálculos realizados na resolução da questão.

Fonte: Iezzi *et al.*, (2022, p. 215).

Para que seja possível determinar a espessura do creme após dez segundos, faz-se preciso determinar os valores de a e b, que aparecem na função como constantes. Nesse sentido, deveremos adotar pares ordenados para que seja possível fazer a descoberta, os pares possíveis são (0, 6), tendo em vista que, no momento inicial, ou seja, quanto o tempo valia zero, a camada tinha espessura de 6 milímetros e (5, 3), levando-se em consideração que após cinco segundos, a camada de creme se reduziria em 50%. O modelo algébrico da função é dado, deixando ao estudante identificar alguns parâmetros. Após a descoberta desses pontos, o aluno deveria substituí-los, na fórmula dada, no intuito de encontrar os valores de a e b, que valem respectivamente 6 e $-\frac{1}{5}$. Após a descoberta de a e b, seria possível, por meio da fórmula, descobrir que a camada de creme após dez segundos teria uma espessura de 1,5 milímetros.

A fim de melhorar nossas discussões, apresentamos, na Figura 21, uma tabela que relaciona a espessura do creme com o tempo.

Figura 21- Tabela de resolução.

	Temp (em seg)	Espessura (em mm)	
	t	$E(t)=a2^{bt}$	
+5	0	6	x 0,5
+5	5	3	x 0,5
+5	10	1,5	x 0,5
	15	0,75	

Fonte: Autor (2022).

A tabela evidencia que, à medida que o tempo aumenta por meio de uma soma, a espessura do creme diminui multiplicativamente, como está registrado na terceira coluna. Contudo, se considerarmos a variação de tempo de cinco segundos, notamos que a camada de creme corresponderá sempre à metade da que havia anteriormente, como evidenciado pela segunda coluna da tabela. Apesar disso, a situação diferencia-se das demais já classificadas. Tendo em vista os fenômenos físico-químicos inerentes à situação, apesar de ser apresentada no LD como uma situação de Taxa sobre Taxa com depreciação (devido à forma que foi escrita), a situação em si não se enquadra nas classificações já encontradas.

Acreditamos que o LD reduz esse tipo de situação à Taxa sobre Taxa com o intuito de facilitar o entendimento do seu público alvo, estudantes do primeiro ano do Ensino Médio. O Quadro 10, na sequência, apresenta os elementos dados e os solicitados no problema analisado.

Quadro 10 - Elementos dados e solicitados no problema

Elementos dados	Elementos solicitados
• Tempos • Imagem do zero • O tempo de cada ciclo (5) • Fórmula geral da função (com parâmetros desconhecidos) • Valores intermediários	• Parâmetros • Valores intermediários

Fonte: Autor (2022).

O Quadro 10 apresenta, de forma sucinta, os elementos dados e os solicitados na situação analisada.

A terceira situação encontra-se no problema 33, presente na página 217 do LD analisado. O problema apresenta uma situação onde a função exponencial serve para modelar a perda de temperatura que sofre um corpo em função do tempo, como pode ser visto na Figura 22, subsequente.

Figura 22 - Questão 33 da seção de exercícios.

33. (Unicamp-SP) O processo de resfriamento de um determinado corpo é descrito por: $T(t) = T_A + \alpha \cdot 3^{\beta t}$, onde T(t) é a temperatura do corpo, em graus Celsius, no instante *t*, dado em minutos, T_A é a temperatura ambiente, suposta constante, e α e β são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de −18 °C. Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu 0 °C após 90 minutos e chegou a −16 °C após 270 minutos.

a) Encontre os valores numéricos das constantes α e β.

b) Determine o valor de *t* para o qual a temperatura do corpo no congelador é apenas $\left(\frac{2}{3}\right)$ °C superior à temperatura ambiente.

Fonte: Iezzi *et.al*. (2022, p. 217).

Como visto, a situação traz que o processo de resfriamento de um determinado corpo obedece a uma função exponencial expressa por $T(t) = T_A + \alpha 3^{\beta t}$, onde T_A representa a temperatura ambiente, supostamente constante, e o tempo é medido em minutos, além disso, α e β são constantes. Também é dito no problema que o corpo foi colocado em um congelador que marcava a temperatura de -18°C e que esse mesmo corpo, após ser mantido por 90 minutos no congelador, atingiu 0°C e após 270 minutos, atingiu -16°C. Sendo assim, no item a) do problema, é pedido que sejam determinados os valores numéricos para as constantes α e β.

Para que sejam determinados os valores de α e β, podem-se adotar pares ordenados. Os pares possíveis são (0, 90) e (-16, 270), tais pontos fazem parte da função, tendo em vista que no problema é dito que o corpo, após ser mantido por 90 minutos no congelador, atingiu 0°C e que após 270 minutos, atingiu -16°C. Além disso, é importante lembrar que, nessa situação, T_A vale -18°C, tendo em vista que é a temperatura do ambiente no qual o corpo foi colocado. Sendo assim, α e β valem respectivamente 54 e $\frac{-1}{90}$.

Já no item b) do problema, é pedido que seja determinado o tempo para que a temperatura do corpo seja apenas ($\frac{2}{3}$)°C superior à temperatura ambiente. Como já foram descobertas as constantes α e β no item anterior, podemos reescrever a função, a qual corresponderá a $T(t) = T_A + 54\ x\ 3^{\frac{-t}{90}}$. Como foi pedido que fosse determinado o tempo para que a diferença entre a temperatura do corpo e a do meio no qual ele foi colocado seja apenas ($\frac{2}{3}$)°C superior à temperatura ambiente, teremos que $T(t) - T_A = \frac{2}{3}$°C, sendo assim, seria $\frac{2}{3} = 54\ x\ 3^{\frac{-t}{90}}$. Por fim, o tempo, para que seja possível obter tal diferença entre as temperaturas do meio e do corpo, seria 300 minutos, que corresponde a seis horas.

Neste viés físico-químico que fundamenta a situação, ela difere das outras já discutidas; portanto, a função exponencial assume aqui um novo significado, o qual ainda não conseguimos entender com nossa pesquisa.

O Quadro 11, consecutivo, sistematiza os dados desconhecidos e conhecidos presentes na situação anterior.

Quadro 11- Elementos dados e solicitados no problema 33

Elementos dados	Elementos solicitados
• Tempos • Imagem do zero • Fórmula da função com parâmetros desconhecidos • Valores intermediários	• Valores dos parâmetros que compõem a lei de formação • Valores intermediários

Fonte: Autor (2022).

O Quadro 11 apresenta de forma sucinta os elementos dados e os solicitados na situação analisada.

A quarta situação encontra-se no problema 28, localizado na página 217 do LD analisado. Na situação, a função exponencial serve para modelar a quantidade de pássaros que compõem a população de uma certa espécie. A função que modela a situação é $P(t) = \frac{500}{1+\ 2^{2-t}}$, onde $P(t)$ é a quantidade de pássaros em função do tempo, medido em anos. Além disso, no problema é dito que, para o início do experimento, deve-se adotar t = 0, como pode ser visto na Figura 23, exposta a seguir.

Figura 23 - Problema 28 da seção de exercícios.

28. (UF-PR) Um grupo de cientistas decidiu utilizar o seguinte modelo logístico, bastante conhecido por matemáticos e biólogos, para estimar o número de pássaros, P(t), de determinada espécie numa área de proteção ambiental: $P(t) = \frac{500}{1 + 2^{2-t}}$, sendo *t* o tempo em anos e t = 0 o momento em que o estudo foi iniciado.

a) Em quanto tempo a população chegará a 400 indivíduos?

b) À medida que o tempo *t* aumenta, o número de pássaros dessa espécie se aproxima de qual valor? Justifique sua resposta.

Fonte: Iezzi *et al*. (2022, p. 217).

Como visto no problema, no item a), é pedido que seja determinado o tempo necessário para que a população atinja 400 indivíduos. Nesse sentido, seria preciso substituir na função, *P*(t) por 400, o que resultaria em $400 = \frac{500}{1+ 2^{2-t}}$, logo seria $1+2^{2-t} = \frac{500}{400}$. Sendo assim, seria $2^{2-t} = \frac{5}{4} - 1$, o que corresponde a $2^{2-t} = \frac{1}{4}$ ou $2^{2-t} = 2^{-2}$. Neste sentido, seria t = 4, o que significa que após quatro anos do início do experimento, a população de pássaros será de 400 indivíduos. Trata-se aqui de uma composição de funções bastante complexa que envolve uma função afim, composta com uma exponencial, composta com outra afim, composta com uma hiperbólica. Tão complexo que preferimos aqui não discutir, devido à falta de ferramentas para classificar a hiperbólica, por exemplo.

O Quadro 12, a seguir, contém os elementos dados e os solicitados no problema analisado.

Quadro 12 - Elementos dados e solicitados no problema.

Elementos dados	Elementos solicitados
• Tempos • Imagem do zero • Representação algébrica	• Valores intermediários • Estimativa de crescimento

Fonte: Autor (2022).

O Quadro 12 apresenta, de forma sucinta, os elementos dados e os solicitados na situação analisada durante a discussão da subclasse.

8.5 Síntese da análise

Neste tópico, trazemos uma tabela que apresenta a classificação para as situações presentes nos problemas do LD analisado. Além dessa classificação, a tabela apresenta ainda o contexto e a página na qual se encontra o problema, como se pode ver no Quadro 13, a seguir.

Quadro 13 - Classificação das situações de função exponencial

<table>
<tr><th>Classe</th><th>Subclasse</th><th>Contexto</th><th>Página</th><th>Tipo de problema</th></tr>
<tr><td rowspan="9">Taxa sobre taxa</td><td rowspan="9">Valorização/ crescimento (a > 1)</td><td>Censo populacional</td><td>187</td><td rowspan="3">Problema resolvido</td></tr>
<tr><td>O número e</td><td>200</td></tr>
<tr><td>Introdução à equação exponencial</td><td>205</td></tr>
<tr><td>Área ocupada por algas (34)</td><td>203</td><td>Problema proposto</td></tr>
<tr><td>Investimento (42, 48, 21)</td><td rowspan="2">203
207
215
216</td><td rowspan="2">Exercícios</td></tr>
<tr><td>Crescimento populacional (10, 35, 49, 51,)</td></tr>
<tr><td>Concentração de substância (5)</td><td>214</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Aplicação de fertilizantes (8)</td><td>215</td></tr>
<tr><td>Crescimento populacional (16, 29, 35, 43)</td><td>220
222-224</td><td>Testes</td></tr>
</table>

Fonte: Autor (2022).

Quadro 13 - Classificação das situações de função exponencial (Cont.)

Classe	Subclasse	Contexto	Página	Tipo de problema
	Depreciação/ Desvalorização (0 < a < 1)	Meia-Vida	205	Problema resolvido
		Desvalorização financeira (1, 14, 36, 56) e Trabalho industrial (37)	203 213 214 215	Problema proposto
		Armazenamento de água na seca (46)	207	Exercícios
		Decrescimento Populacional (55)	213	
		Idade de fósseis por meio do carbono (13) e 20 (Decaimento da espessura de um creme no café)	215	
		Desvalorização financeira (25)	216	
		Meia-Vida (31, 19)	217	
		Meia-Vida (19, 21 24, 31, 44) e 20 (Esquecimento de informação)	220 221 222 224	Testes
		Desvalorização financeira (36, 37)	223	
	Composição de duas taxas sobre taxa	Distância (7)	214	Exercícios
		Jogo (34)	223	Testes
Cisão	---------	Reprodução de bactéria (33, 43, 24, 30)	203 207 216 222	Exercícios
		Dobradura de folha (30)	217	
Corrente/ reprodução	---------	Família (Ascendentes)	205	Problema resolvido
		Corrente eletrônica (28)	222	Testes

Fonte: Autor (2022).

O Quadro 13 apresenta as classes e as subclasses encontradas em nossa pesquisa e as classificações para os problemas analisados no LD, bem como a página e o tipo de problema (divisão feita pelos autores do LD) em que se encontram as situações classificadas.

Essa organização garante a classificação para as situações, bem como a conclusão da seleção dos problemas. Isso porque, para as nossas análises, levamos em consideração apenas os problemas contextualizados, como já ressaltado na nossa metodologia.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Fundamentados na Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida pelo Pesquisador Gérard Vergnaud, pudemos analisar as situações que envolvem o conceito e as propriedades de função exponencial presentes em um livro didático. Para as análises, levamos em consideração as situações contextualizadas, deixando para um outro momento aquelas puramente matemáticas. Para a construção da pesquisa, partimos do pressuposto de que o conhecimento matemático é adquirido durante o enfrentamento de diferentes situações, de acordo com a teoria Vergnaud, e assim sendo, caberia analisar e classificar as situações que envolvessem as funções exponenciais.

O enfrentamento de diferentes situações seria fundamental durante o processo de aprendizagem. Além disso, a classificação se torna importante, porque as situações servem de suporte para os alunos e os professores durante os processos de ensino e aprendizagem. Vergnaud defendia ainda a ideia de que o conhecimento matemático deveria ser organizado em campos, cujo domínio leva tempo. Segundo ele, um Campo Conceitual, como o de função exponencial, seria um conjunto de situações, invariantes e representações que estariam ligados e possivelmente interligados durante o processo de aquisição.

Pensando na variedade de situações que apresentam o Campo Conceitual de funções exponenciais, resolvemos fazer a classificação das situações presentes em um LD. A escolha de selecionarmos o livro como material de análise deu-se, porque o livro didático possui um lugar garantido na sala de aula, não só como suporte do professor, como também do aluno nos processos de ensino e aprendizagem.

Na nossa pesquisa, foram caracterizadas três classes de situações: a primeira trata de situações que apresentam o acúmulo de taxas, por isso, foi nomeada de composição entre Taxas (taxa composta). Essa categoria foi dividida em três subclasses em razão do significado que cada uma apresenta: Taxa sobre Taxa com valorização/crescimento (taxa maior que 1), Taxa sobre Taxa com depreciação/desvalorização (taxa entre 0 e 1) e a composição de duas Taxas compostas, situações mistas que apresentam, tanto valorização/crescimento, quanto depreciação/desvalorização.

A segunda classe foi a de Cisão, ela foi criada para englobar as situações que tratam da reprodução de microrganismos ou do crescimento por meio de cisão. Essa classe foi criada partindo de uma situação que traz a reprodução de bactérias; nesse caso, para que a população cresça, as bactérias se dividem e esse processo é chamado de cisão.

Já a terceira classe de situações foi a de Corrente/Reprodução. Essa classe foi criada para representar situações onde há também um crescimento; no entanto diferente daquele que acontece na classe de Cisão. Nesta nova classe, não há divisão de indivíduos para gerar outros, como acontece na reprodução bacteriana. A classe foi criada partindo de duas situações, uma que falava sobre os ascendentes de um casal e outra sobre uma corrente em que cada pessoa encaminha mensagem para um número fixo de pessoas. Em ambos, a função exponencial modelava situações de crescimento, porém um crescimento diferente do de Taxa sobre Taxa, em que uma grandeza é transformada pela aplicação de uma taxa. Nos demais, uma grandeza é transformada por se dividir em duas ou mais, ou uma grandeza reproduz outras, gera novas por corrente ou por reprodução de seres.

Além disso, é importante frisar que houve quatro situações para as quais não conseguimos, com esta pesquisa, gerar uma classificação. Porém as situações foram também discutidas e apresentadas nos resultados e discussões.

Outro fato importante é que o LD reduz muitas situações à Taxa sobre Taxa, algo que pode, tanto facilitar, como dificultar a aprendizagem. Facilitar, quando o estudante não possui maturidade suficiente para entender o contexto modelado pela função e, dificultar, por não propiciar, por vezes, a descoberta de teoremas e esquemas de resolução por parte dos estudantes.

Cabe salientar que, com a nossa pesquisa, buscamos atingir o seguinte objetivo: classificar os tipos de situações envolvendo a função exponencial trazidos por um livro didático do 1º ano do Ensino Médio à luz da teoria dos Campos Conceituais. Esse objetivo foi estipulado com o intuito de responder à seguinte indagação: que tipos de situações envolvendo a função exponencial são trazidos em um livro didático do 1º ano do Ensino Médio?

Para que fosse possível responder à questão de pesquisa, bem como atingir o nosso objetivo geral, foram elencados os seguintes objetivos específicos: I- Identificar classes de situações sobre função exponencial. II- Identificar conceitos e propriedades abordadas nos problemas propostos dos livros didáticos relativos à função exponencial. III- Identificar esquemas possíveis para a resolução das situações propostas em livros didáticos para introduzir o conceito de função exponencial.

No que se refere à identificação das classes de situações sobre função exponencial, nosso trabalho conseguiu identificar três: Taxa sobre Taxa (que possui três subclasses), Cisão e Corrente/Reprodução. Esclarecemos que, apesar de as situações contidas nos problemas apresentarem classes diferentes, boa parte dos problemas foram transformados em Taxa sobre Taxa devido à forma como a classe foi escrita.

Nesse viés, a diferenciação das classes só foi possível em razão da identificação dos conceitos e das propriedades relativos à função exponencial. Isso porque, durante nossas análises, levamos em consideração, não só o contexto das situações, como também as propriedades, os conceitos, os elementos dados e os elementos desconhecidos no intuito da classificação. Essa ação foi indispensável, porque, apesar de terem sido escritas como uma situação de acúmulo de Taxas, em algumas situações, a função exponencial possui outro significado, alguns ainda não compreendidos em nossa pesquisa.

No que se refere à identificação de esquemas possíveis para a resolução das situações propostas para introduzir o conceito de função exponencial, foi possível observar que o LD apresenta possíveis caminhos para a resolução de algumas situações. Algo positivo, tendo em vista a importância que possui o LD durante os processos de ensino e aprendizagem. Contudo é importante salientar que as situações poderiam ser resolvidas por outros caminhos, o que o LD não faz.

Nesse sentido, compreendemos que as situações de função exponencial relacionam inúmeros conceitos matemáticos, podendo levar tempo para que o estudante consiga transitar entre as classes de situações encontradas, não só pela estrutura do problema, mas pelo significado assumido pela função.

Esse envolvimento de inúmeros conceitos, como também a importância de diferentes situações durante o ensino deste campo, já foi apontado durante nossa revisão de literatura, em que ficou também evidente que o avanço no entendimento e domínio das classes, por vezes, relaciona-se ao domínio prévio de outros Campos Conceituais.

Apesar de não termos conseguido classificar todas as situações presentes no LD analisado, por questões de tempo, consideramos que o nosso objetivo foi atingido. Com isso, nossa pesquisa sugere o grande potencial de pesquisas futuras que busquem, não só encontrar outras classes de situações, como também investigar como os estudantes conseguem resolver questões englobadas nas classificações e ampliarem seus conhecimentos. Nesse sentido, a pesquisa abre espaço para pesquisas futuras que busquem investigar o Campo Conceitual da função exponencial, assim como suas aplicações.

REFERÊNCIAS

ALEIXO, Daniel Matheus Silva. **Álgebra linear no livro didático do ensino médio: uma discussão por meio da teoria dos registros de representação semiótica**. TCC (TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE GRADUAÇÃO) - Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), 2021.

BENEDITO, Leandro André Barrada; BERNARDES, Aline. Ensino de Funções e as Metarregras do Discurso: refletindo sobre a definição atual de função a partir de algumas definições históricas. **Revista de História da Educação Matemática**, v. 5, n. 2, p. 7-22, 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio. Brasília: MEC/SEMTEC, 1999.

Brasil. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017

CARVALHO, João. **Coleção Explorando o Ensino**. **Matemática. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica**, v. 17, p. 15-25, João Bosco Pitombeira de Carvalho e Paulo Figueiredo Lima, 2010.

CHOPPIN, Alain. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa**, vol. 30, nº. 3, p. 549 - 566, set/dez, 2004.

DA SILVA LOBATO, Fabricio; DA SILVA, Euvaldo Soares; DE SÁ, Pedro Franco. A importância da história da matemática como metodologia no ensino de função. **Brazilian Journal of Development**, v. 7, n. 3, p. 25517-25539, 2021.

DE MACÊDO, Josué Antunes; BRANDÃO, Daniel Pereira; NUNES, Daniel Martins. Limites e possibilidades do uso do livro didático de Matemática nos processos de ensino e de aprendizagem. **Educação Matemática Debate**, v. 3, n. 7, p. 68-86, 2019.

EVES, Howard Whitley. **Introdução à história da matemática**. Unicamp, 1995.

FREITAG, Bárbara; MOTTA, Valéria Rodrigues; COSTA, Wanderley Ferreira. **O estado da arte do livro didático no Brasil**. Brasília: INEP, 1987

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar um Projetos de pesquisa.** 4.ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GITIRANA, Verônica; MAGINA, Sandra; CAMPOS, Tânia; SPINILLO, Alina. **Repensando Multiplicação e Divisão**. Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM Editora, 2014.

GITIRANA, Verônica. **Funções:** aprendizagem e representações. texto disponível on-line, 1999. Disponível em https://drive.google.com/file/d/1wupESEcINSJcdp8G2XN_IwCBrXdLsgKX/view?usp=sharing

GONÇALVES, Adilson. **Introdução à álgebra.** Rio de Janeiro, **Instituto de Matemática Pura e Aplicada**, 1979.

GONÇALVES, Heitor Antônio et al. **Educação matemática e cálculo mental: uma análise de invariantes operatórios a partir da teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud.** Tese (DOUTORADO EM EDUCAÇÃO) - Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro. 2008.

GONÇALVES, Ruth Grossmann. **O emprego do livro didático de Matemática no Ensino Fundamental da rede pública estadual.** Monografia (Especialização em Didática e Metodologia do Ensino Superior). Universidade do Extremo Sul Catarinense. Criciúma. 2007. 40f.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENDZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática Ciência e Aplicações**. São Paulo: Atual Editora, 2004.

IEZZI, Gelson et al. **Conecte: Matemática Ciências e Aplicações**. São Paulo: Saraiva Editora, 2020.

LIMA, Elon Lages et al. **A matemática do ensino médio**. SBM, 1997.

IFRAH, Georges. **Os números:** história de uma grande invenção. Tradução de Stella Maria de Freitas Senra; revisão técnica Antônio José Lopes, Jorge José de Oliveira. - 11 ed. - São Paulo: Globo, 2005.

JUNIOR SILVA, Clovis Gomes da. O Livro Didático de Matemática e o Tempo. **Revista de Iniciação Científica da FFC**, v. 7, n. 1, p.13-21, 2007.

KARDEC, A. **Matemática Online - UNEMAT,** 2017. Acesso em 15 de 04 de 2022, disponível em Matemática online: https://www.youtube.com/channel/UCn-wrX0Xg5MlLGSWAk1eE0g

KARDEC, A. **Matemática Online - UNEMAT,** (2017) . Acesso em 15 de 04 de 2022, disponível em Matemática online: **https://www.youtube.com/channel/UCn-wrX0Xg5MlLGSWAk1eE0g**

KIKUCHI, Luzia Maya. **A Teoria dos Campos Conceituais e a análise dos invariantes operatórios no conteúdo de álgebra**. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, 2019.

MENEZES, Luís. **Matemática, linguagem e comunicação**. **Millenium,** 2000.

MIRANDA, Clarice de Almeida. **Situações-problema que envolvem o conceito de função afim**: uma análise à luz da teoria dos campos conceituais. Dissertação (Educação em ciências e matemática) Universidade do Oeste do Paraná, UNIOESTE, Paraná. 2019.

MOREIRA, Marco Antonio. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em ensino de ciências.** Porto Alegre. Vol. 7, n. 1 (jan./mar. 2002), p. 7-29, 2002.

NUNES, T. et al. As estruturas aditivas: avaliando e promovendo o desenvolvimento dos conceitos de adição e subtração em sala de aula. In: ***Educação Matemática**: números* e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005. 206 p., cap. 2, p. 45-81.

OLIVEIRA, S. L. **Elementos da Radioatividade a partir de primeiros princípios e aspectos ambientais no distrito Uranífero de Lagoa Real-BA**. 87 f. 2014. Dissertação (Ciências Ambientais). Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, UESB, Bahia, 2014.

PIVA, Anderson; MENONCINI, Lúcia; PEREIRA, Pedro Augusto. **APRENDIZAGEM CONCEITUAL DE FUNÇÕES**. Jornada de iniciação científica e tecnologia. Universidade Federal da Fronteira do Sul (UFFS), 2020.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**. Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2012.

ROSSINI, Silvana Teresinha Coronel Medeiros. **A importância do livro didático na produção textual**. 2003. 139f. Monografia (Especialização em Língua Portuguesa e Textualidade). Universidade do Extremo Sul Catarinense. Criciúma.

SÁ, Pedro Franco de; SOUZA, Glageane da Silva; SILVA, Isaac Dayan Bastos da. A Construção do Conceito de Função: Alguns dados históricos**. Traços**. Belém, v. 6, n.11, p. 123-140, 2003

SANTANA, Eurivalda; ALVES, Alex Andrade; NUNES, Célia Barros. A teoria dos campos conceituais num processo de formação continuada de professores. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 29, p. 1162-1180, 2015.

SPINELLI, Janice Valgoi. **Ensino de funções exponenciais a partir de problemas**, **seguindo uma sequência didática.** TCC (TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE GRADUAÇÃO) - Universidade Federal Do Rio Grande Do Sul (UFRJ), Departamento de Matemática Pura e Aplicada, Rio Grande do Sul, 2018.

STEWART, James. **Cálculo**. 7.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

VERCEZE, Rosa Mª. Aparecida N.. SILVINO, Eliziane França M. O Livro Didático e suas implicações na prática do professor nas escolas públicas de Guajará Mirim. **Revista Práxis Educacional Vitória da Conquista,** v. 4, n. 4, p. 83-102 jan./jun. 2008.

VERGNAUD, G. Quelques problèmes théoriques de la didactique à propos d'un exemple: les structures additives. **Atelier International d'Été:** Recherche en Didactique de la Physique. La Londe les Maures, França, 26 de junho a 13 de julho, 1983.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In Nasser, L. (Ed.) **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**. Rio de Janeiro, UFRJ, p. 1-26, 1993

VERGNAUD, G. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. **Revista do GEMPA**, Porto Alegre, Nº 4: 9-19, 1996.

VERGNAUD, G. A Classification of Cognitive Tasks and Operations of Thought Involved in Addition and Subtraction Problems. In. T. Carpenter; T. Romberg; J. Moser (Eds.). **Addition and Subtraction**: a cognitive Perspective. New Jersey: Lawrense Erlbaun, 1982. p. 39-59.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J. **Didáctica das matemáticas.** Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget,1996. p. 155-191.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990

VERGNAUD, G. Multiplicative conceptual field: what and why? In. Guershon, H. e Confrey, J. (Eds.). **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany: State University of New York Press, 1994. p. 41-59.

ANEXO A- QUESTÇOES ANALISADAS QUE SE ENCONTRAM NO CAPÍTULO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS CONTIDAS NO LD.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Qual é o valor de $y = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + 4^{-1}\right]^2$?

Solução:

$$y = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]^2 = \left(\frac{9}{4} + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

Propriedades

As cinco propriedades enunciadas para potência de expoente natural são válidas para potência de expoente inteiro negativo, quaisquer que sejam os valores dos expoentes m e n inteiros.

EXERCÍCIOS

1. Calcule:

a) 5^3
b) $(-5)^3$
c) 5^{-3}
d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$
e) $\left(\frac{1}{50}\right)^{-2}$
f) $\left(-\frac{11}{7}\right)^0$
g) $\left(\frac{3}{2}\right)^1$
h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^0$
i) $-(-2)^5$
j) -10^2
k) 10^{-3}
l) $-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$

2. Calcule:

a) $0{,}2^2$
b) $0{,}1^{-1}$
c) $3{,}4^1$
d) $(-4{,}17)^0$
e) $0{,}05^{-2}$
f) $1{,}25^{-1}$
g) $1{,}2^3$
h) $(-3{,}2)^2$
i) $0{,}6^3$
j) $0{,}08^{-1}$
k) $(-0{,}3)^{-1}$
l) $(-0{,}01)^{-2}$

3. Calcule o valor de cada uma das expressões:

a) $A = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot (-2)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1$

b) $B = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

c) $C = -2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 1^{15} - (-2)^1$

d) $D = \left[\left(-\frac{5}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{5}{2}\right)^{-1}\right]^{-1}$

e) $E = [3^{-1} - (-3)^{-1}]^{-1}$

f) $F = 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}$

4. Escreva em uma única potência:

a) $\frac{11^3 \cdot (11^4)^2 \cdot 11}{11^6}$

b) $\frac{(2^4)^3 \cdot 2^7 \cdot 2^3}{(2^{11})^2}$

c) $\frac{10^{-2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-3}}{(0{,}01)^{-1}}$

d) $\frac{10 \cdot 10^{-5} \cdot (10^2)^{-3}}{(10^{-4})^3}$

5. Coloque em ordem crescente:

$A = (-2)^{-2} - 3 \cdot (0{,}5)^3$, $B = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$ e

$C = \dfrac{-\frac{5}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}$.

6. Sendo $a \cdot b \neq 0$, simplifique as expressões:

a) $\frac{a^5 \cdot (b^2)^3}{a \cdot b^4}$

b) $\frac{(a^2)^5 \cdot (b^3)^3}{a^{-4} \cdot b^{-3}}$

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^8 \cdot \frac{b^{10}}{a \cdot a^2 \cdot a^3}$

d) $(a^{-1} + b^{-1}) \cdot ab$

e) $(a^{-1})^2 + (b^2)^{-1} + 2(ab)^{-1}$

7. Escreva em uma única potência:

a) a metade de 2^{100};
b) o triplo de 3^{20};
c) a oitava parte de 4^{32};
d) o quadrado do quíntuplo de 25^{10}.

8. Sendo $a = (0{,}02)^{-3}$ e $b = (0{,}004)^{-2}$, obtenha o valor de:

a) $a \cdot b^{-1}$

b) $\frac{b}{a}$

c) $a \cdot 10^{-3} + b \cdot 10^{-2}$

9. Sendo $a = \frac{2^{48} + 4^{22} - 2^{46}}{2 \cdot 8^{15}}$, obtenha o valor de $(4a)^{-1}$.

Solução:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{4}{\sqrt{3}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{4(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \dfrac{4(\sqrt{3}+1)}{2} = 2(\sqrt{3}+1)$

c) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{3}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} = \dfrac{3 \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3^3}} = \sqrt[3]{9}$

EXERCÍCIOS

10. Calcule:

a) $\sqrt{169}$ b) $\sqrt[3]{512}$ c) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}$ d) $\sqrt{0{,}25}$ e) $\sqrt[3]{0{,}125}$ f) $\sqrt[5]{100\,000}$

11. Calcule:

a) $\sqrt[4]{256} \cdot \sqrt{25-16}$

b) $\sqrt[3]{1+\sqrt{49}}$

c) $(\sqrt[3]{1\,000} - \sqrt[6]{64})^2$

12. Simplifique os radicais seguintes:

a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt{54}$ c) $\sqrt[3]{54}$ d) $\sqrt{288}$ e) $\sqrt[4]{240}$ f) $\sqrt[3]{3\,000}$

13. Efetue:

a) $\sqrt{32} + \sqrt{50}$

b) $\sqrt{200} - 3\sqrt{72} + \sqrt{12}$

c) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2}$

d) $\sqrt{1\,200} - 2\sqrt{48} + 3\sqrt{27}$

14. Efetue:

a) $\dfrac{\sqrt{192} - \sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{8}}$

15. Efetue:

a) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}$

b) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$

d) $\sqrt{48} : \sqrt{3}$

e) $\sqrt[4]{162} : \sqrt[4]{2}$

f) $\dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}}$

16. Desenvolva os seguintes produtos notáveis:

a) $(\sqrt{3}+1)^2$

b) $(3-\sqrt{2})^2$

c) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$

d) $(\sqrt{11}+\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{11}-\sqrt{2})$

e) $(\sqrt[4]{3}+1)^2$

f) $(2+\sqrt{2})^3$

17. Efetue:

a) $\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{8+\sqrt{15}} \cdot \sqrt{8-\sqrt{15}}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{12}+2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{12}-2}$

d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{10}-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$

18. Racionalize o denominador de:

a) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ d) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ f) $\dfrac{25}{\sqrt[3]{5^2}}$ g) $\dfrac{2}{\sqrt[9]{32}}$

19. Racionalize o denominador de cada uma das seguintes expressões:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

d) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

e) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}-\sqrt{5}}$

20. Efetue:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{8}$

b) $\left(\dfrac{5}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \cdot \sqrt{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \dfrac{12}{\sqrt{6}}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}$

21. Efetue:

a) $(\sqrt{2})^8$

b) $(\sqrt[6]{2})^3$

c) $\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2}} \cdot \sqrt[6]{4}$

d) $(\sqrt[6]{2})^4$

22. Racionalize o denominador de cada uma das seguintes expressões:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{1}{2-\sqrt[3]{2}}$

Sugestão para o item *b*:

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

4. Calcular o valor de $y = 27^{\frac{2}{3}} - 16^{\frac{3}{4}}$.

Solução:

Podemos resolver de duas maneiras:

a) escrevendo as potências na forma de raízes: $y = \sqrt[3]{27^2} - \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[3]{729} - \sqrt[4]{4\,096} = 9 - 8 = 1$

b) usando as propriedades das potências: $y = (3^3)^{\frac{2}{3}} - (2^4)^{\frac{3}{4}} = 3^2 - 2^3 = 9 - 8 = 1$

EXERCÍCIOS

23. Calcule o valor de:

a) $27^{\frac{1}{3}}$

b) $256^{\frac{1}{2}}$

c) $32^{\frac{1}{5}}$

d) $64^{\frac{1}{3}}$

e) $576^{\frac{1}{2}}$

f) $0,25^{\frac{1}{2}}$

g) $\left(\dfrac{27}{1\,000}\right)^{\frac{1}{3}}$

h) $\left(\dfrac{1}{81}\right)^{0,25}$

24. Calcule o valor de:

a) $8^{\frac{2}{3}}$

b) $144^{-\frac{1}{2}}$

c) $(0,2)^{\frac{1}{2}}$

d) $16^{\frac{5}{2}}$

e) $27^{\frac{2}{3}}$

f) $0,09^{-\frac{1}{2}}$

g) $16^{\frac{3}{4}}$

h) $8^{-\frac{1}{2}}$

25. Calcule o valor de cada expressão:

a) $A = 64^{-0,6666...} \cdot 0,5^{0,5}$

b) $B = \left(128^{\frac{1}{7}} + 81^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$

c) $C = 0,001^{-\frac{2}{3}} \cdot 1000^{\frac{5}{6}}$

d) $D = (4 \cdot 10^{-6})^{-\frac{1}{2}}$

26. Qual é o valor de a^b, sendo $a = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$

e $b = \dfrac{2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} - 2^2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}}$?

27. A área da superfície corporal (ASC) de uma pessoa, em metros quadrados, pode ser estimada pela fórmula de Mosteller:

$$ASC = \left(\frac{h \cdot m}{3\,600}\right)^{\frac{1}{2}}$$

em que *h* é a altura da pessoa em centímetros; *m* é a massa da pessoa em quilogramas.

Timothy Tadder/Corbis/Latinstock

O cálculo de superfície corporal é utilizado na fisiologia e em farmacologia. Por exemplo, a dosagem de um medicamento deve ser ministrada considerando as variações físicas de uma pessoa à outra, a fim de garantir a eficácia do tratamento e evitar os efeitos adversos de uma dosagem errada.

a) Calcule a área da superfície corporal de um indivíduo de 1,69 m e 75 kg. Use a aproximação $\sqrt{3} = 1,7$.

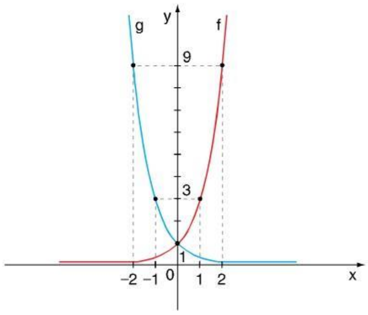
b) Juvenal tem ASC igual a $2\ m^2$ e massa 80 kg. Qual é a altura de Juvenal?

c) Considere dois amigos, Rui e Eli, ambos "pesando" 81 kg. A altura de Rui é 21% maior do que a altura de Eli. A ASC de Rui é *x*% maior do que a ASC de Eli. Qual é o valor de *x*?

Exemplo 4

Vamos construir no mesmo diagrama os gráficos das funções *f* e *g* definidas pelas leis: $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

x	$f(x) = 3^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
−3	$\frac{1}{27}$	27
−2	$\frac{1}{9}$	9
−1	$\frac{1}{3}$	3
0	1	1
1	3	$\frac{1}{3}$
2	9	$\frac{1}{9}$
3	27	$\frac{1}{27}$



Note que, tanto para a função *f* como para a função *g*, tem-se $Im = \mathbb{R}^*_+$.
As curvas obtidas nos exemplos anteriores são chamadas **curvas exponenciais**.

O número *e*

Um importante número irracional em Matemática é o número e = 2,718281828459... . Para introduzi-lo, vamos considerar a expressão $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$, definida em $\mathbb{R}^*$, e estudar os valores que ela assume quando *x* se aproxima de zero:

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$(1 + x)^{\frac{1}{x}}$	2,594	2,705	2,717	2,7182	2,7183

Na tabela podemos notar que, à medida que *x* se aproxima de zero, a expressão $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ fica mais próxima do número $e \cong 2,7183$.

Considerando valores negativos de *x*, porém cada vez mais próximos de zero (por exemplo, $x = -0,1$; $x = -0,01$; $x = -0,001$ etc.), a expressão também fica cada vez mais próxima de $e \cong 2,7183$. Calcule você mesmo com o auxílio de uma calculadora científica.

Dizemos então que o limite de $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$, quando *x* tende a zero, é igual ao número *e*. Representamos esse fato por $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

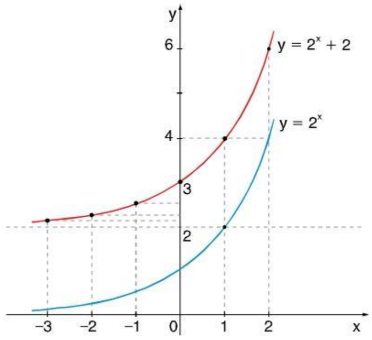
A descoberta do número *e* é atribuída a John Napier, em seu trabalho de invenção dos logaritmos, datado de 1614 (veja capítulo seguinte). Nele, Napier introduziu, de forma não explícita, o que hoje conhecemos como número *e*. Um século depois, com o desenvolvimento do cálculo infinitesimal, o número *e* teve sua importância reconhecida. O símbolo *e* foi introduzido por Euler, em 1739.

Muitas calculadoras científicas possuem a tecla e^x colocada, em geral, como segunda função (veja a tecla 2ndF na imagem seguinte; em alguns modelos a segunda função da tecla é acionada por meio da tecla Shift).

Gráficos com translação

Vamos construir o gráfico da função cuja lei é $y = 2^x + 2$.

x	y
−3	$\frac{1}{8} + 2 = 2{,}125$
−2	2,25
−1	2,5
0	3
1	4
2	6
3	10



Observe que o gráfico obtido é o gráfico da função dada por $y = 2^x$ "deslocado" duas unidades para cima. Como $\forall x \in \mathbb{R}$, $2^x > 0$, temos que $2^x + 2 > 0 + 2$, isto é, $y > 2$. Assim, o conjunto imagem dessa função é:

$$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 2\}$$

De modo geral, o gráfico de $y = a^x + k$, sendo $0 < a \neq 1$ e k uma constante real, pode ser obtido a partir do gráfico de $y = a^x$, deslocando-o k unidades para cima ou k unidades para baixo, conforme k seja positivo ou negativo, respectivamente.

EXERCÍCIOS

28. Construa os gráficos das funções exponenciais definidas pelas leis seguintes, destacando seu conjunto imagem:

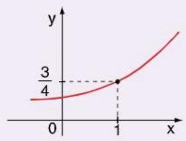
a) $f(x) = 4^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x$

d) $f(x) = 3 \cdot 2^{-x}$

29. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f dada por $f(x) = a \cdot 2^x$, sendo a uma constante real. Sabendo que $f(1) = \frac{3}{4}$, determine o valor de $f(3)$.



30. Represente, em um mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções f e g, definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$, destacando o ponto de interseção:

a) $f(x) = 10^x$ e $g(x) = 10^{-x}$

b) $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \frac{1}{2} \cdot 4^x$

31. Faça o gráfico de cada uma das funções definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ pelas leis seguintes, destacando a raiz (se houver) e o respectivo conjunto imagem:

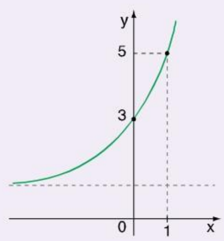
a) $f(x) = 2^x - 2$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$

c) $f(x) = -4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

d) $f(x) = 3^x + 3$

32. O gráfico abaixo representa a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja lei é $f(x) = a + b \cdot 2^x$, sendo a e b constantes positivas.



a) Determine a e b.

b) Qual é o conjunto imagem de f?

c) Calcule $f(-2)$.

33. Em uma experiência sobre deterioração de alimentos, constatou-se que a população de certo tipo de bactéria dobrava a cada hora. No instante em que começaram as observações, havia 50 bactérias na amostra.

a) Faça uma tabela para representar a população de bactérias nos seguintes instantes (a partir do início da contagem): 1 hora, 2 horas, 3 horas, 4 horas, 5 horas.

b) Obtenha a lei que relaciona o número de bactérias (n) em função de tempo (t).

34. Em uma região litorânea, a população de uma espécie de algas tem crescido de modo que a área da superfície coberta por elas aumenta 75% a cada ano, em relação à área coberta no ano anterior. Atualmente, a área da superfície coberta pelas algas é de, aproximadamente, 4 000 m². Suponha que esse crescimento seja mantido.


Edson Grandisoli/ Pulsar Imagens

a) Faça uma tabela para representar a área coberta pelas algas daqui a um, dois, três, quatro e cinco anos, contados a partir desta data.

b) Qual é a lei da função que representa a área (y), em m², que a população de algas ocupará daqui a *x* anos?

c) Esboce o gráfico da função obtida no item b).

35. Os municípios A e B têm, hoje, praticamente o mesmo número de habitantes, estimado em 100 mil pessoas. Estudos demográficos indicam que o município A deva crescer à razão de 25 000 habitantes por ano e o município B, à taxa de 20% ao ano. Mantidas essas condições, classifique em seu caderno como verdadeira (V) ou falsa (F) as afirmações seguintes, corrigindo as falsas.

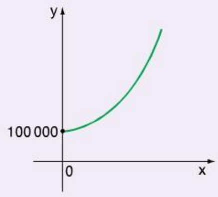
a) Em dois anos, a população do município B será de 140 mil habitantes.

b) Em três anos, a população do município A será de mais de 180 mil habitantes.

c) Em quatro anos, o município A será mais populoso que o município B.

d) A lei da função que expressa a população (y) do município A daqui a *x* anos é $y = 25\,000x$.

e) O esboço do gráfico da função que expressa a população (y) do município B daqui a *x* anos é dado a seguir:



36. Um conjunto de sofás foi comprado por R$ 2 000,00. Com o tempo, por descuido do comprador, o sol foi queimando o tecido do sofá, que perdeu a cor original. Um comerciante do ramo informou ao comprador que em uma situação desse tipo, a cada ano o sofá perde 10% do valor que tinha no ano anterior.


DirectPhoto/Grupo Keystone

a) Faça uma tabela para representar o valor do sofá depois de 1, 2, 3 e 4 anos da data de sua aquisição.

b) Sabendo que o comprador se informou com o comerciante 7 anos depois da compra, que valor o sofá teria nesta data, segundo o comerciante?

c) Qual é a lei da função que relaciona o valor (y), em reais, do conjunto de sofás e o tempo *t*, expresso em anos após a sua aquisição?

37. Em uma indústria alimentícia, verificou-se que, após *t* semanas de experiência e treinamento, um funcionário consegue empacotar *p* unidades de um determinado produto, a cada hora de trabalho. A lei que relaciona *p* e *t* é: $p(t) = 55 - 30 \cdot e^{-0,2t}$ (leia o texto da seção *Aplicações*, página 204).

a) Quantas unidades desse produto o funcionário consegue empacotar sem experiência alguma?

b) Qual é o acréscimo na produção, por hora, que o funcionário experimenta da 1ª para a 2ª semana de experiência? Use a aproximação $e^{0,2} = 1,2$.

c) Qual é o limite máximo teórico de unidades que um funcionário pode empacotar, por hora?

38. Seja f a função dada pela lei $f(x) = 10^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e considere *a* e *b* números reais quaisquer. Assinale V ou F nas afirmações seguintes corrigindo as falsas.

a) $f(2a) = 2 \cdot f(a)$

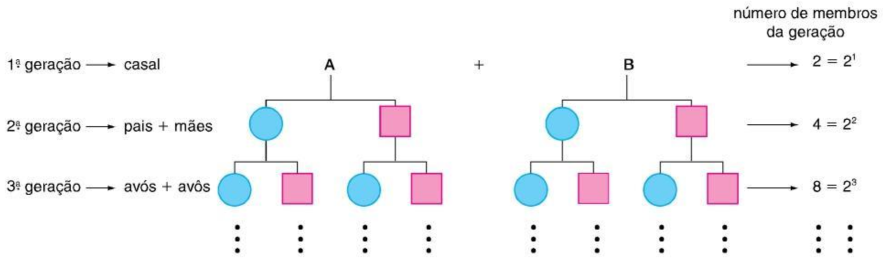
b) $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$

c) $f(a) = f(-a)$

EQUAÇÃO EXPONENCIAL

Introdução

O casal Abel (A) e Beatriz (B) queria saber uma maneira de calcular o número de ascendentes que tinham conjuntamente. Primeiro contaram seus pais/mães (2ª geração), num total de 4 pessoas: 2 de (A) e 2 de (B). Depois contaram os avôs/avós (3ª geração) que eram 8: 4 de (A) e 4 de (B). Então construíram o seguinte esquema:



Eles perceberam que, a cada geração anterior, o número de ascendentes dobrava e concluíram que a lei da função que relaciona o número de membros (y) e a geração (x) ($x = 1, 2, 3, ...$) era: $y = 2^x$.

Em certo momento, Beatriz, que é craque em Matemática, desafiou o marido a responder a pergunta: "Em qual geração o número de ascendentes que tivemos corresponde a 4 096?".

Era preciso determinar x tal que $2^x = 4096$.

Esse é um exemplo de equação exponencial, que vamos estudar agora.

Definição

Uma equação exponencial é aquela que apresenta a incógnita no expoente de pelo menos uma de suas potências.

São exponenciais, por exemplo, as equações $4^x = 8$, $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 81$ e $9^x - 3^x = 72$.

Um método usado para resolver equações exponenciais consiste em reduzir ambos os membros da equação à potência de mesma base a ($0 < a \neq 1$) e, daí, aplicar a propriedade:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Quando isso é possível, a equação exponencial é facilmente resolvida.

Exemplo 5

Vamos retomar o problema sobre o número de ascendentes de Abel e Beatriz.

Para matar a charada que Beatriz propôs, Abel fatorou o número 4 096, obtendo 2^{12}.

Se $2^x = 4096$, temos:

$$2^x = 2^{12} \Rightarrow x = 12$$

4 096 ascendentes corresponde à 12ª geração.

41. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações exponenciais:

a) $11^{2x^2 - 5x + 2} = 1$

b) $9^{x+1} = \sqrt[3]{3}$

c) $0{,}8^x = \left(\frac{5}{4}\right)$

d) $0{,}2^{x+1} = \sqrt{125}$

e) $0{,}25^{x-4} = 0{,}5^{-2x+1}$

f) $\left(\sqrt[3]{25}\right)^x = \left(\frac{1}{125}\right)^{-x+3}$

42. O preço *p*, em unidades monetárias, de uma ação de uma empresa siderúrgica, comercializada em uma bolsa de valores, oscilou de 1990 a 2010 de acordo com a lei:

$$p(t) = 3{,}20 \cdot 2^{\frac{t+1}{5}}$$

em que *t* é o tempo, em anos, contado a partir de 1990.

a) Qual era o valor da ação em 1994? E em 1999?

b) Em que ano a ação passou a valer oito vezes o valor de 1990?

43. Uma maionese mal conservada causou mal-estar nos frequentadores de um clube. Uma investigação revelou a presença da bactéria salmonela, que se multiplica segundo a lei:

$$n(t) = 200 \cdot 2^{at},$$

em que n(t) é o número de bactérias encontradas na amostra de maionese *t* horas após o início do almoço e *a* é uma constante real.

a) Determine o número de bactérias no instante em que foi servido o almoço.

b) Sabendo que após 3 horas do início do almoço o número de bactérias era de 800, determine o valor da constante *a*.

c) Determine o número de bactérias após 12 horas da realização do almoço.

44. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações exponenciais:

a) $10^x \cdot 10^{x+2} = 1000$

b) $2^{4x+1} \cdot 8^{-x+3} = \frac{1}{16}$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x} : 25^{2+x} = 5$

d) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2-1} \cdot 27^{1-x} = 3^{2x+7}$

e) $\left(\sqrt{6}\right)^x : \left(\sqrt[3]{36}\right)^{x-1} = 1$

f) $\left(\sqrt{10}\right)^x \cdot (0{,}01)^{4x-1} = \frac{1}{1\,000}$

45. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações seguintes:

a) $2^{x+2} - 3 \cdot 2^{x-1} = 20$

b) $5^{x+3} - 5^{x+2} - 11 \cdot 5^x = 89$

c) $4^{x+1} + 4^{x+2} - 4^{x-1} - 4^{x-2} = 315$

d) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = \frac{15}{2}$

46. Com a seca, estima-se que o nível de água (em metros) em um reservatório, daqui a *t* meses, seja $n(t) = 3{,}7 \cdot 4^{-0{,}2t}$

Qual é o tempo necessário para que o nível de água se reduza à oitava parte do nível atual?

47. Resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2y} = 8 \\ \frac{1}{3} = 3^{x+y} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \left(\sqrt{7}\right)^x = 49^{y-2x} \\ 2^{y-x} = 1\,024 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 100^x \cdot \sqrt{10^y} = 10 \\ 0{,}1^x \cdot 0{,}01^{\frac{y}{2}} = 0{,}01 \end{cases}$

48. As leis seguintes representam as estimativas de valores (em milhares de reais) de dois apartamentos A e B (adquiridos na mesma data), decorridos *t* anos da data da compra.

apartamento A: $v = 2^{t+1} + 120$

apartamento B: $v = 6 \cdot 2^{t-2} + 248$

a) Por quais valores foram adquiridos os apartamentos A e B, respectivamente?

b) Passados quatro anos da compra, qual deles estará valendo mais?

c) Qual é o tempo necessário (a partir da data de aquisição) para que ambos tenham iguais valores?

49. Na lei $n(t) = 15\,000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{t+k}$, em que *k* é uma constante real, n(t) representa a população que um pequeno município terá daqui a *t* anos, contados a partir de hoje. Sabendo que a população atual do município é de 10 000 habitantes, determine:

a) o valor de *k*;

b) a população do município daqui a 3 anos.

50. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações seguintes:

a) $\frac{100^x - 1}{10^x + 1} = 9$

b) $25^x - 23 \cdot 5^x = 50$

c) $49^x - 42 = 7^x$

d) $4^{x+1} - 33 \cdot 2^x + 8 = 0$

e) $0{,}25^{1-x} + 0{,}5^{-x-2} - 5 \cdot (0{,}5)^{1-x} = 28$

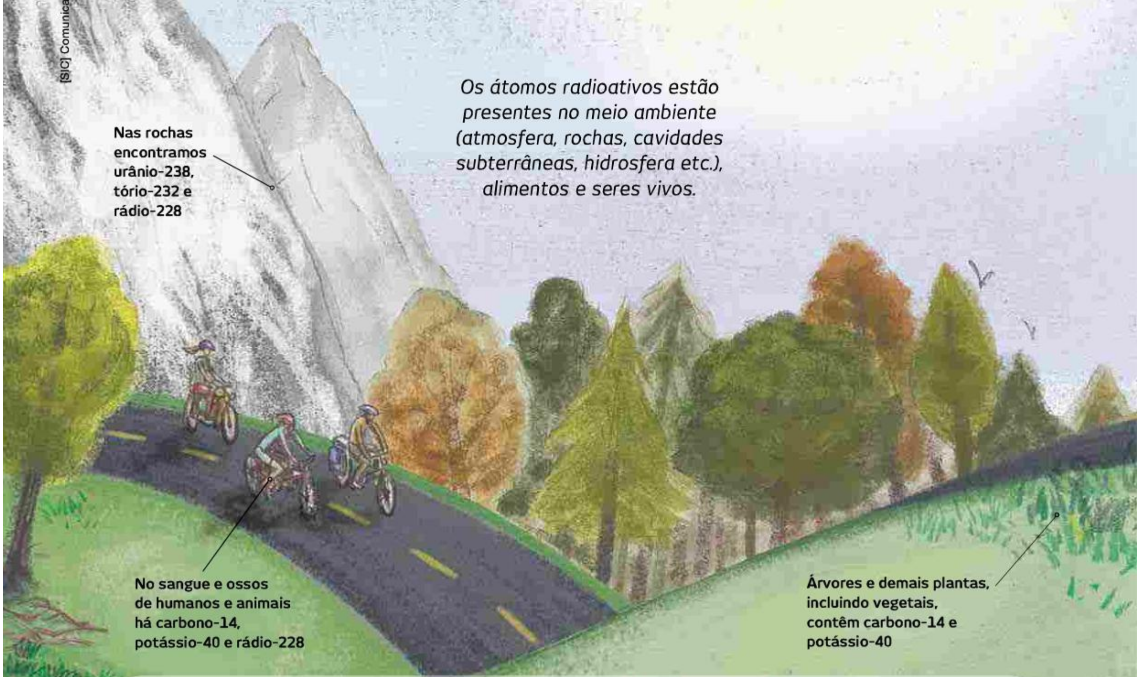
51. A população de insetos em uma região tem crescido à taxa de 200% ao mês, devido a problemas na coleta do lixo. A população atual é estimada em A elementos. Se nenhuma providência for tomada e a taxa se mantiver neste patamar, daqui a quanto tempo haverá 243 · A insetos? (Sugestão: veja o exemplo da introdução do capítulo, página 187.)

Aplicações

Meia-vida, radioatividade e medicamentos

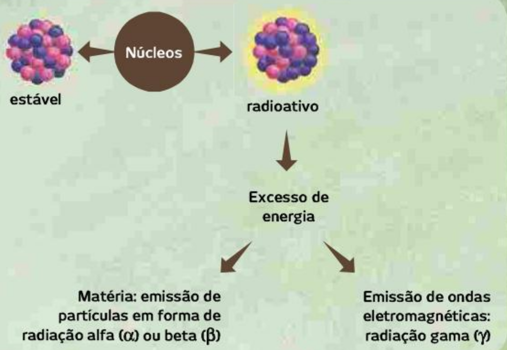
Radioatividade e Matemática

[SIC] Comunicação



Decaimento radioativo

O núcleo de um átomo com excesso de energia tende a se estabilizar emitindo um grupo de partículas (radiação alfa ou beta) ou ondas eletromagnéticas (radiações gama). Em cada emissão de uma das partículas, há variação do número de prótons e nêutrons no núcleo e, deste modo, um elemento químico se transforma em outro. O processo pelo qual se dá a emissão dessas partículas é chamado de **decaimento radioativo**.

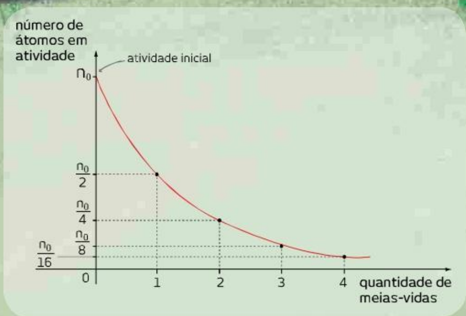


Meia-vida

Considerando uma grande quantidade de átomos de um mesmo elemento químico radioativo, espera-se certo número de emissões por unidade de tempo. Essa "taxa de emissões" é a atividade da amostra.

Cada elemento radioativo se transmuta (desintegra) a uma velocidade que lhe é característica. **Meia-vida** é o intervalo de tempo necessário para que a sua atividade radioativa seja reduzida à metade da atividade inicial.

Após o primeiro período de meia-vida, a atividade da amostra se reduz à metade da atividade inicial, passado o segundo período, a atividade se reduz a $\frac{1}{4}$ da atividade inicial e assim por diante, como mostra o gráfico abaixo.



Exemplos de elementos radioativos

Elemento	Número atômico	Símbolo	Massa	Camadas
Carbono	6	C	12,0	2 4
Rádio	88	Ra	228	2 8 18 32 18 8 2
Tório	90	Th	232	2 8 18 32 18 10 2
Urânio	92	U	238	2 8 18 32 21 9 2

A Lei que define essa função exponencial é $n(x) = \frac{n_0}{2^x}$, sendo x a quantidade de meias-vidas, n_0 o número de átomos correspondente à atividade inicial e $n(x)$ o número de átomos em atividade após x meias-vidas.

Exemplo de meia-vida:

O iodo-131 é um elemento químico radioativo, usado na Medicina Nuclear, em exames e tratamentos de tiroide, e tem meia-vida de 8 dias. Isso significa que, em 8 dias, metade dos átomos deixarão de emitir radiação.

Símbolo internacional de alerta para radioatividade.

Referências bibliográficas:

www.cnen.gov.br/ensino/apostilas/PIC.pdf

www.ird.gov.br

Acesso em: 7 dez. 2012.

Os medicamentos e a Matemática

Amoxicilina é um conhecido antibiótico usado no tratamento de infecções não complicadas, amplamente receitado por médicos no Brasil.

A bula da amoxicilina, como a de todos os medicamentos, contém, entre outros tópicos, a composição, informações ao paciente, informações técnicas e posologia.

INFORMAÇÕES TÉCNICAS

Características:

O produto contém como princípio ativo a amoxicilina, quimicamente a D-(-)-alfa-amino p. hidroxibenzil penicilina, uma penicilina semissintética de amplo espectro de ação, derivada do núcleo básico da penicilina, o ácido 6-amino-penicilânico. Seu nível máximo ocorre uma hora após a administração oral, tem baixa ligação proteica e pode ser administrado com as refeições, por ser estável em presença do ácido clorídrico do suco gástrico.

A amoxicilina é bem absorvida tanto pela via entérica como pela parenteral.

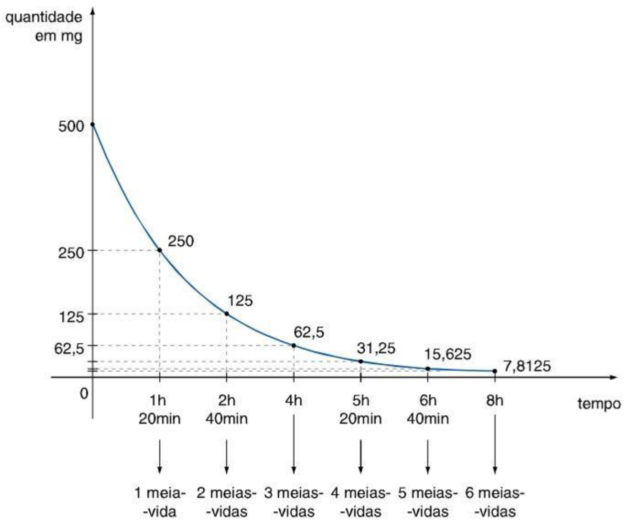
A meia-vida da amoxicilina após a administração do produto é de 1,3 hora.

A amoxicilina não tem ligações proteicas em grande número, aproximadamente 20%. Espalha-se rapidamente nos tecidos e fluidos do corpo.

O que significa a informação destacada na bula?

A cada período de 1,3 hora ou 1 hora e 18 minutos (para facilitar vamos considerar 1 hora e 20 minutos), a quantidade de amoxicilina no organismo decresce em 50% do valor que tinha no início do período.

Considerando que uma cápsula ingerida por um adulto contém 500 mg de amoxicilina, no gráfico abaixo estão representadas as quantidades desse fármaco no organismo, de acordo com o tempo decorrido após a ingestão.



EXERCÍCIOS

52. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações exponenciais:

a) $2^x \geqslant 128$

b) $3^x < 27$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^2$

d) $\frac{1}{25} \leqslant \left(\frac{1}{5}\right)^x$

53. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações exponenciais:

a) $6^{x-2} \geqslant \frac{1}{36}$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-2} > 1$

c) $\left(\sqrt{2}\right)^x \leqslant \frac{1}{16}$

d) $(0{,}01)^x > \sqrt{10}$

54. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes desigualdades:

a) $3^x - \left(\sqrt{3}\right)^x \geqslant 0$

b) $4^{-x+3} > -2$

c) $4^{x^2-3x} > \frac{1}{16}$

d) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-3} < \left(\frac{1}{27}\right)^{x^2-2}$

55. A população de peixes em um lago está diminuindo devido à contaminação da água por resíduos industriais.

Thinkstock/Getty Images

A lei $n(t) = 5\,000 - 10 \cdot 2^{t-1}$ fornece uma estimativa do número de espécies vivas (n(t)) em função do número de anos (t) transcorridos após a instalação do parque industrial na região.

a) Estime a quantidade de peixes que viviam no lago no ano da instalação do parque industrial.

b) Algum tempo após as indústrias começarem a operar, constatou-se que havia no lago menos de 4 920 peixes. Para que valores de *t* vale essa condição?

c) Uma ONG divulgou que, se nenhuma providência for tomada, em uma década (a partir do início das operações) não haverá mais peixes no lago. Tal afirmação procede?

56. A lei seguinte permite estimar a depreciação de um equipamento industrial:

$$v(t) = 5\,000 \cdot 4^{-0{,}02t}$$

em que v(t) é o valor (em reais) do equipamento *t* anos após sua aquisição.

a) Por qual valor esse equipamento foi adquirido?

b) Para que valores de *t* o equipamento vale menos que R$ 2 500,00?

c) Faça um esboço do gráfico da função que relaciona *v* e *t*.

57. Obtenha o domínio de cada função dada por:

a) $y = \sqrt{3^x - 1}$

b) $y = \sqrt{e^x}$

c) $y = \dfrac{x+3}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4}}$

58. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $4^x + 16 > 10 \cdot 2^x$

b) $9^{x+1} - 8 \cdot 3^x - 1 \geqslant 0$

DESAFIO

Quatro participantes de uma gincana precisam cruzar uma pinguela sobre um desfiladeiro à noite. Ela suporta no máximo duas pessoas e existe apenas uma lanterna, sem a qual nada se enxerga. O desfiladeiro é largo demais para que alguém se arrisque a jogar a lanterna. Não são permitidas travessias pela metade. Cada membro do grupo atravessa a ponte em uma velocidade. Os tempos de travessia são:

Participante 1: **1 minuto**

Participante 2: **2 minutos**

Participante 3: **5 minutos**

Participante 4: **10 minutos**

Se duas pessoas atravessam juntas, vale a velocidade da mais lenta. Qual é o tempo mínimo para que o grupo realize a travessia?

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. Um determinado equipamento eletrônico perde $\frac{1}{10}$ de seu valor a cada 3 anos. Sabendo que esse equipamento foi adquirido por R$ 6 000,00, determine:

a) seu valor após 9 anos;

b) a lei da função que relaciona o valor (v) desse equipamento com o tempo (t), anos após a sua aquisição;

c) o valor do equipamento 2 anos após a sua aquisição. Use as aproximações $\sqrt[3]{3} = 1{,}4$ e $\sqrt[3]{100} = 4{,}5$.

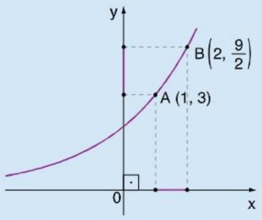
2. (Vunesp-SP) Dado o sistema de equações em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (4^x)^y = 16 \quad (1) \\ 4^x 4^y = 64 \quad (2) \end{cases}$$

a) Encontre o conjunto verdade [solução];

b) Faça o quociente da equação (2) pela equação (1) e resolva a equação resultante para encontrar uma solução numérica para *y*, supondo $x \neq 1$.

3. (UFF-RJ) O gráfico da função exponencial *f*, definida por $f(x) = k \cdot a^x$, foi construído utilizando-se o programa de geometria dinâmica gratuito GeoGebra (http://www.geogebra.org), conforme mostra a figura a seguir:

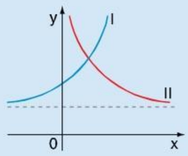


Sabe-se que os pontos A e B, indicados na figura, pertencem ao gráfico de *f*. Determine:

a) os valores das constantes *a* e *k*;

b) f(0) e f(3).

4. Ao lado estão representados os gráficos de duas funções *f* e *g*, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 1 + 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + k$, sendo *k* uma constante real.



a) Associe cada função ao seu respectivo gráfico.

b) Sabendo que os gráficos de *f* e *g* se interceptam em um ponto de abscissa igual a $\frac{1}{2}$, determine o valor de *k*.

c) Determine $a \in \mathbb{R}$ para o qual vale:

$$f(a + 1) + \frac{\sqrt{2}}{2} = g(2a)$$

5. Sob efeito de um medicamento, a concentração de uma substância no sangue de um mamífero dobra a cada 40 minutos. Sabendo que no instante da ingestão desse medicamento a concentração da substância era de 0,4 mg/mℓ de sangue, determine:

a) a concentração da substância duas horas após a aplicação do medicamento;

b) a lei da função que expressa a concentração *c* (em mg/ℓ) da substância de acordo com o tempo *t* (em horas) transcorrido após a aplicação do medicamento;

c) o tempo necessário para que a concentração da substância seja 102,4 mg/ℓ.

6. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2$

b) $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$

c) $16^{2x+3} - 16^{2x+1} = 2^{8x+12} - 2^{6x+5}$

7. (Unifesp-SP) A figura 1 representa um cabo de aço preso nas extremidades de duas hastes de mesma altura *h* em relação a uma plataforma horizontal. A representação dessa situação num sistema de eixos ortogonais supõe a plataforma de fixação das hastes sobre o eixo das abscissas; as bases das hastes como dois pontos, A e B; e considera o ponto O, origem do sistema, como o ponto médio entre essas duas bases (figura 2). O comportamento do cabo é descrito matematicamente pela função $f(x) = 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$, com domínio [A, B].

figura 1

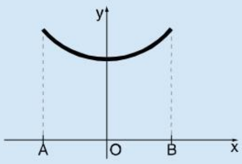


figura 2

a) Nessas condições, qual a menor distância entre o cabo e a plataforma de apoio?

b) Considerando as hastes com 2,5 m de altura, qual deve ser a distância entre elas, se o comportamento do cabo seguir precisamente a função dada?

8. (UF-PE) Diferentes quantidades de fertilizantes são aplicadas em plantações de cereais com o mesmo número de plantas, e é medido o peso do cereal colhido em cada plantação. Se *x* kg de fertilizantes são aplicados em uma plantação onde foram colhidas *y* toneladas (denotadas por *t*) de cereais, então, admita que estes valores estejam relacionados por $y = k \cdot x^r$, com *k* e *r* constantes. Se, para $x = 1$ kg, temos $y = 0{,}2$ t e, para $x = 32$ kg, temos $y = 0{,}8$t, encontre o valor de *x*, em kg, quando $y = 1{,}8$t e assinale a soma dos seus dígitos.

9. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\dfrac{2^x + 1}{1 - x^2} \leqslant 0$

b) $2^x - 1 > 2^{1-x}$

c) $2^{\frac{1}{x}} < 4 \cdot 4^{\frac{x}{2(x-1)}}$

10. (U.F. Uberlândia-MG) Na elaboração de políticas públicas que estejam em conformidade com a legislação urbanística de uso e ocupação do solo em regiões metropolitanas, é fundamental o conhecimento de leis descritivas do crescimento populacional urbano.

Suponha que a lei dada pela função $p(t) = 0{,}5 \cdot (2^{kt})$ expresse um modelo representativo da população de uma cidade (em milhões de habitantes) ao longo do tempo *t* (em anos), contados a partir de 1970, isto é, $t = 0$ corresponde ao ano de 1970, sendo *k* uma constante real.

Sabendo que a população dessa cidade em 2000 era de 1 milhão de habitantes:

a) extraia do texto dado uma relação de forma a obter o valor de *k*;

b) segundo o modelo de evolução populacional dado, descreva e execute um plano de resolução que possibilite estimar em qual ano a população desta cidade atingirá 16 milhões de habitantes.

11. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x^2 + 2x - 5}$.

Qual é o valor mínimo que *f* assume?

12. Discuta, em função de *t*, o número de raízes da equação (na incógnita *x*) $2^x + 2^{-x} = t$.

13. (UF-GO) A teoria da cronologia do carbono, utilizada para determinar a idade de fósseis, baseia-se no fato de que o isótopo do carbono-14 (C-14) é produzido na atmosfera pela ação de radiações cósmicas no nitrogênio e que a quantidade de C-14 na atmosfera é a mesma que está presente nos organismos vivos. Quando um organismo morre, a absorção de C-14, através da respiração ou alimentação, cessa, e a quantidade de C-14 presente no fóssil é dada pela função $C(t) = C_0 \cdot 10^{nt}$, onde *t* é dado em anos a partir da morte do organismo, C_0 é a quantidade de C-14 para $t = 0$ e *n* é uma constante. Sabe-se que 5 600 anos após a morte, a quantidade de C-14 presente no organismo é a metade da quantidade inicial (quando $t = 0$).

No momento em que um fóssil foi descoberto, a quantidade de C-14 medida foi de $\dfrac{C_0}{32}$. Tendo em vista estas informações, calcule a idade do fóssil no momento em que ele foi descoberto.

14. (FGV-SP) Um televisor com DVD embutido desvaloriza-se exponencialmente em função do tempo, de modo que o valor, daqui a *t* anos, será: $y = a \cdot b^t$, com $a > 0$ e $b > 0$.

Se um televisor novo custa R$ 4 000,00 e valerá 25% a menos daqui a 1 ano, qual será o seu valor daqui a 2 anos?

15. Sem usar a calculadora determine o que é maior:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\pi}} \text{ ou } \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

16. Qual é o maior inteiro que satisfaz a inequação:

$2^{2x+2} - 0{,}75 \cdot 2^{x+2} < 1$

17. Sendo $a > 0$ e $b > 0$, simplifique a expressão:

$$\frac{b-a}{a+b} \cdot \left[a^{\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} - \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1}\right]$$

18. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $\dfrac{10^x + 5^x}{20^x} = 6$

b) $\dfrac{10^x + 20^x}{1 + 2^x} = 100$

19. (UF-BA) A temperatura $Y(t)$ de um corpo – em função de tempo $t \geqslant 0$, dado em minutos – varia de acordo com a expressão $Y(t) = Y_a + Be^{kt}$, sendo Y_a temperatura do meio em que se encontra o corpo e B e *k* constantes.

Suponha que, no instante $t = 0$, um corpo, com uma temperatura de 75 °C, é imerso em água, que é mantida a uma temperatura de 25 °C. Sabendo que, depois de 1 minuto, a temperatura do corpo é de 50 °C, calcule o tempo para que, depois de imerso na água, a temperatura do corpo seja igual a 37,5 °C.

20. (U.E. Londrina-PR) A espessura da camada de creme formada sobre um café expresso na xícara, servido na cafeteria A, no decorrer do tempo, é descrita pela função $E(t) = a2^{bt}$, onde $t \geqslant 0$ é o tempo (em segundos) e *a* e *b* são números reais. Sabendo que inicialmente a espessura do creme é de 6 milímetros e que, depois de 5 segundos, se reduziu em 50%, qual a espessura depois de 10 segundos?

Apresente os cálculos realizados na resolução da questão.

21. Um trabalhador aplicou R$ 1 000,00 em uma caderneta de poupança. Vamos admitir que a taxa de rendimento anual da poupança seja constante e igual a 6% ao ano.

a) Qual é a lei que representa o valor (v) acumulado (valor investido + juros) dessa poupança após *n* anos da aplicação inicial?

b) Qual será o valor acumulado após 7 anos da aplicação inicial?

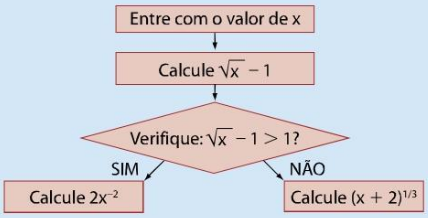
c) Qual será o total de juros acumulados após 10 anos da aplicação inicial?

d) Qual será o valor acumulado após 25 anos da aplicação inicial?

Use as aproximações: $\sqrt{5} = \frac{9}{4}$ e

x	2	3	4	10
$1{,}06^x$	1,1	1,2	1,25	1,8

22. (UF-RJ) Considere o programa representado pelo seguinte fluxograma:



a) Determine os valores reais de *x* para os quais é possível executar esse programa.

b) Aplique o programa para $x = 0$, $x = 4$ e $x = 9$.

23. Faça o que é pedido em cada item.

a) Sabendo que $x + \frac{1}{x} = t$, determine, em função de *t*, o valor de $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

b) Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação: $3^{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{81}{3^{x + \frac{1}{x}}}$.

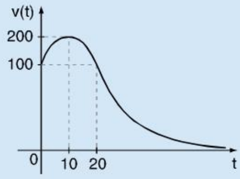
24. (UF-PE) Em uma aula de Biologia, os alunos devem observar uma cultura de bactérias por um intervalo de tempo e informar o quociente entre a população final e a população inicial. Antônio observa a cultura de bactérias por 10 minutos e informa um valor Q. Iniciando a observação no mesmo instante que Antônio, Beatriz deve dar sua informação após 1 hora, mas, sabendo que a população de bactérias obedece à equação $P(t) = P_0 \cdot e^{kt}$, Beatriz deduz que encontrará uma potência do valor informado por Antônio. Qual é o expoente dessa potência?

25. (UE-RJ) Um imóvel perde 36% do valor de venda a cada dois anos. O valor V(t) desse imóvel em *t* anos pode ser obtido por meio da fórmula a seguir, na qual V_0 corresponde ao seu valor atual.

$V(t) = V_0 \cdot (0{,}64)^{\frac{t}{2}}$

Admitindo que o valor de venda atual do imóvel seja igual a 50 mil reais, calcule seu valor de venda daqui a três anos.

26. (UF-BA) O gráfico representa uma projeção do valor de mercado, v(t), de um imóvel, em função do tempo *t*, contado a partir da data de conclusão de sua construção, considerada como a data inicial $t = 0$. O valor v(t) é expresso em milhares de reais, e o tempo *t*, em anos. Com base nesse gráfico, sobre o valor de mercado projetado v(t), pode-se afirmar:



(01) Aos dez anos de construído, o imóvel terá valor máximo.

(02) No vigésimo quinto ano de construído, o imóvel terá um valor maior que o inicial.

(04) Em alguma data, o valor do imóvel corresponderá a 37,5% do seu valor inicial.

(08) Ao completar vinte anos de construído, o imóvel voltará a ter o mesmo valor inicial.

(16) Se $v(t) = 200 \cdot 2^{\frac{(t-10)^2}{100}}$, então, ao completar trinta anos de construído, o valor do imóvel será igual a um oitavo do seu valor inicial.

Dê como resposta certa a soma dos números dos itens escolhidos.

27. (UF-SE) Um atropelamento foi presenciado por $\frac{1}{5}$ da população P de um vilarejo e, 2 horas após esse momento, $\frac{1}{3}$ da população já sabia do ocorrido. Suponha que a função *f*, definida por $f(t) = \frac{P}{1 + k \cdot 2^{-A \cdot t}}$, com *k* e A constantes reais, fornece o número de pessoas que estavam sabendo desse fato, *t* horas após o acontecimento. Analise a veracidade das afirmações abaixo.

(0-0) O valor da constante *k* é 5.

(1-1) O valor da constante A é 2.

(2-2) Se $P = 300$ habitantes, então, após 4 horas do ocorrido, um total de 150 pessoas estavam sabendo do atropelamento.

(3-3) O tempo necessário para que $\frac{2}{3}$ da população soubesse dessa notícia foi 6 horas.

(4-4) Em 10 horas, toda a população do vilarejo estava a par desse fato.

28. (UF-PR) Um grupo de cientistas decidiu utilizar o seguinte modelo logístico, bastante conhecido por matemáticos e biólogos, para estimar o número de pássaros, P(t), de determinada espécie numa área de proteção ambiental: $P(t) = \dfrac{500}{1 + 2^{2-t}}$, sendo *t* o tempo em anos e $t = 0$ o momento em que o estudo foi iniciado.

a) Em quanto tempo a população chegará a 400 indivíduos?

b) À medida que o tempo *t* aumenta, o número de pássaros dessa espécie se aproxima de qual valor? Justifique sua resposta.

29. (UF-SC) Você sabe por que as folhas que utilizamos para impressão são chamadas A4? Esta denominação está formalizada na norma ISO 216 da *International Organization for Standartization.* Pela norma, a série de formatos básicos de papel começa no A0, o maior, e decresce até o A10. Os formatos são construídos de maneira a obter o formato de número superior dobrando ao meio uma folha, na sua maior dimensão. Por exemplo, dobrando-se o A3 ao meio, obtém-se o A4. Em todos os formatos, a proporção entre as medidas dos lados se mantém. Sabe-se que o formato inicial A0 tem 1 m^2 de área.

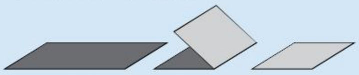
Com estas informações, responda às perguntas a seguir, apresentando os cálculos.

a) Qual é a razão entre a medida do lado maior e a medida do lado menor, em qualquer formato de folha? Expresse o resultado usando radicais.

b) Quais são as dimensões do formato A0? Efetue as operações e expresse o resultado usando radicais.

c) A gramatura do papel exprime o peso, em gramas, de uma folha com 1 m^2. Sabendo que a gramatura do A0 é 75 gramas por metro quadrado, qual é o peso exato, em gramas, de uma resma (500 folhas) de papel A4?

30. (UE-RJ) Considere uma folha de papel retangular que foi dobrada ao meio, resultando em duas partes, cada uma com metade da área inicial da folha, conforme as ilustrações.



Esse procedimento de dobradura pode ser repetido *n* vezes, até resultar em partes com áreas inferiores a 0,0001% da área inicial da folha.

Calcule o menor valor de *n*. Se necessário, utilize em seus cálculos os dados da tabela.

x	9	10	11	12
2^x	$10^{2,70}$	$10^{3,01}$	$10^{3,32}$	$10^{3,63}$

31. (UF-MG) Um grupo de animais de certa espécie está sendo estudado por veterinários. A cada seis meses, esses animais são submetidos a procedimentos de morfometria e, para tanto, são sedados com certa droga.

A quantidade mínima da droga que deve permanecer na corrente sanguínea de cada um desses animais, para mantê-los sedados, é de 20 mg por quilograma de peso corporal. Além disso, a meia-vida da droga usada é de 1 hora – isto é, a cada 60 minutos, a quantidade da droga presente na corrente sanguínea de um animal reduz-se à metade.

Sabe-se que a quantidade q(t) da droga presente na corrente sanguínea de cada animal, *t* minutos após um dado instante inicial, é dada por $q(t) = q_0 \cdot 2^{-kt}$, em que:

- q_0 é a quantidade de droga presente na corrente sanguínea de cada animal no instante inicial; e
- *k* é uma constante característica da droga e da espécie.

Considere que um dos animais em estudo, que pesa 10 quilogramas, recebe uma dose inicial de 300 mg da droga e que, após 30 minutos, deve receber uma segunda dose.

Suponha que, antes dessa dose inicial, não havia qualquer quantidade da droga no organismo do mesmo animal.

Com base nessas informações,

a) calcule a quantidade da droga presente no organismo desse animal imediatamente antes de se aplicar a segunda dose;

b) calcule a quantidade mínima da droga que esse animal deve receber, como segunda dose, a fim de ele permanecer sedado por, pelo menos, mais 30 minutos.

32. Resolva em $\mathbb{R}$ a equação:
$(5^x + 5^{x-1}) \cdot (2^x - 2^{x-1}) = 6000.$

33. (Unicamp-SP) O processo de resfriamento de um determinado corpo é descrito por: $T(t) = T_A + \alpha \cdot 3^{\beta t}$, onde T(t) é a temperatura do corpo, em graus Celsius, no instante *t*, dado em minutos, T_A é a temperatura ambiente, suposta constante, e α e β são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de −18 °C. Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu 0 °C após 90 minutos e chegou a −16 °C após 270 minutos.

a) Encontre os valores numéricos das constantes α e β.

b) Determine o valor de *t* para o qual a temperatura do corpo no congelador é apenas $\left(\dfrac{2}{3}\right)$ °C superior à temperatura ambiente.

TESTES

1. (UF-CE) O expoente do número 3 na decomposição por fatores primos positivos do número natural $10^{63} - 10^{61}$ é igual a:

a) 6
b) 5
c) 4
d) 3
e) 2

2. (UTF-PR) O valor numérico da expressão $\dfrac{\left(36^{\frac{1}{2}} - 8^{\frac{1}{3}} + 625^{\frac{1}{4}}\right)}{(-0,5)^{-2}}$ representa um número:

a) racional positivo.
b) racional negativo.
c) inteiro positivo.
d) irracional negativo.
e) irracional positivo.

3. (PUC-RJ) O valor da expressão $5\,100 \cdot 10^{-5} + 3 \cdot$ $\cdot\ 10^{-4}$ é igual a:

a) 0,0513
b) 5,13
c) 0,5103
d) 3,51
e) 540 000

4. (UF-RS) Um adulto humano saudável abriga cerca de 100 bilhões de bactérias, somente em seu trato digestivo.

Esse número de bactérias pode ser escrito como

a) 10^9
b) 10^{10}
c) 10^{11}
d) 10^{12}
e) 10^{13}

5. (IF-CE) Simplificando a expressão $\left(4^{\frac{3}{2}} + 8^{\frac{-2}{3}} - 2^{-2}\right):$ $: 0,75$, obtemos

a) $\dfrac{8}{25}$
b) $\dfrac{16}{25}$
c) $\dfrac{16}{3}$
d) $\dfrac{21}{2}$
e) $\dfrac{32}{3}$

6. (PUC-RJ) A equação $2^{x^2 - 14} = \dfrac{1}{1\,024}$ tem duas soluções reais. A soma das duas soluções é:

a) -5
b) 0
c) 2
d) 14
e) 1 024

7. (Cefet-MG) O valor da expressão $\sqrt[n]{\dfrac{72}{9^{n+2} - 3^{2n+2}}}$ é

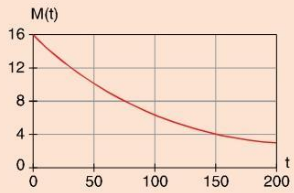
a) 3^{-2}
b) 3^{-1}
c) 3
d) 3^2

8. (Enem-MEC) Dentre outros objetos de pesquisa, a Alometria estuda a relação entre medidas de diferentes partes do corpo humano. Por exemplo, segundo a Alometria, a área A da superfície corporal de uma pessoa relaciona-se com a sua massa *m* pela fórmula $A = k \cdot m^{\frac{2}{3}}$, em que *k* é uma constante positiva.

Se no período que vai da infância até a maioridade de um indivíduo sua massa é multiplicada por 8, por quanto será multiplicada a área da superfície corporal?

a) $\sqrt[3]{16}$
b) 4
c) $\sqrt{24}$
d) 8
e) 64

9. (Unicamp-SP) Em uma xícara que já contém certa quantidade de açúcar, despeja-se café. A curva a seguir representa a função exponencial M(t), que fornece a quantidade de açúcar não dissolvido (em gramas), *t* minutos após o café ser despejado. Pelo gráfico, podemos concluir que



a) $M(t) = 2^{4 - \frac{t}{75}}$
b) $M(t) = 2^{4 - \frac{t}{50}}$
c) $M(t) = 2^{5 - \frac{t}{50}}$
d) $M(t) = 2^{5 - \frac{t}{150}}$

10. (Enem-MEC) A cor de uma estrela tem relação com a temperatura em sua superfície. Estrelas não muito quentes (cerca de 3 000 K) nos parecem avermelhadas. Já as estrelas amarelas, como o Sol, possuem temperatura em torno dos 6 000 K; as mais quentes são brancas ou azuis porque sua temperatura fica acima dos 10 000 K.

A tabela apresenta uma classificação espectral e outros dados para as estrelas dessas classes.

Estrelas da sequência principal

Classe espectral	05	B0	A0	G2	M0
Temperatura	40 000	28 000	9 900	5 770	3 480
Luminosidade	$5 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^4$	80	1	0,06
Massa	40	18	3	1	0,5
Raio	18	7	2,5	1	0,6

Temperatura em Kelvin.

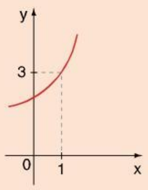
Luminosidade, massa e raio, tomando o Sol como unidade.

Disponível em: <http://www.zenite.nu>. Acesso em: 1º maio 2010 (adaptado).

Se tomarmos uma estrela que tenha temperatura 5 vezes maior que a temperatura do Sol, qual será a ordem de grandeza de sua luminosidade?

a) 20 000 vezes a luminosidade do Sol.
b) 28 000 vezes a luminosidade do Sol.
c) 28 850 vezes a luminosidade do Sol.
d) 30 000 vezes a luminosidade do Sol.
e) 50 000 vezes a luminosidade do Sol.

11. (Mackenzie-SP) Na figura temos o esboço do gráfico de $y = a^x + 1$. O valor de 2^{3a-2} é:



a) 16
b) 8
c) 2
d) 32
e) 64

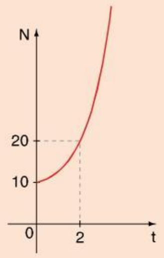
12. (UF-PB) A metade do número $2^{21} + 4^{12}$ é:

a) $2^{20} + 2^{23}$
b) $2^{\frac{21}{2}} + 4^6$
c) $2^{12} + 4^{21}$
d) $2^{20} + 4^6$
e) $2^{22} + 4^{13}$

13. (Cefet-SP) "Já falei um bilhão de vezes para você não fazer isso ..." Qual filho nunca ouviu esta frase de seu pai? Suponhamos que o pai corrija seu filho 80 vezes ao dia. Quantos dias ele levará para corrigi-lo um bilhão de vezes?

a) $1,25 \cdot 10^5$
b) $1,25 \cdot 10^6$
c) $1,25 \cdot 10^7$
d) $1,25 \cdot 10^8$
e) $1,25 \cdot 10^9$

14. (UF-RN) A pedido do seu orientador, um bolsista de um laboratório de biologia construiu o gráfico a seguir a partir dos dados obtidos no monitoramento do crescimento de uma cultura de micro-organismos.



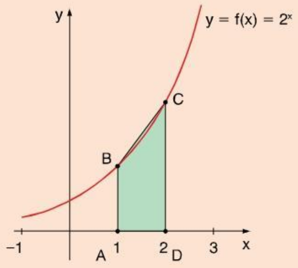
Analisando o gráfico, o bolsista informou ao orientador que a cultura crescia segundo o modelo matemático, $N = k \cdot 2^{at}$, com *t* em horas e N em milhares de micro-organismos.

Para constatar que o modelo matemático apresentado pelo bolsista estava correto, o orientador coletou novos dados com t = 4 horas e t = 8 horas.

Para que o modelo construído pelo bolsista esteja correto, nesse período, o orientador deve ter obtido um aumento na quantidade de micro-organismos de

a) 80 000
b) 160 000
c) 40 000
d) 120 000

15. (U.F. Juiz de Fora-MG) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = 2^x$. Na figura abaixo está representado, no plano cartesiano, o gráfico de *f* e um trapézio ABCD, retângulo nos vértices A e D e cujos vértices B e C estão sobre o gráfico de *f*.



A medida da área do trapézio ABCD é igual a:

a) 2
b) $\frac{8}{3}$
c) 3
d) 4
e) 6

16. (U.E. Ponta Grossa-PR) Certa população de insetos cresce de acordo com a expressão $N = 500 \cdot 2^{\frac{t}{6}}$, sendo t o tempo em meses e N o número de insetos na população após o tempo t. Nesse contexto, assinale o que for correto (indique a soma).

(01) O número inicial de insetos é de 500.

(02) Após 3 meses o número de insetos será maior que 800.

(04) Após um ano o número total de insetos terá quadruplicado.

(08) Após seis meses o número de insetos terá dobrado.

17. (ESPM-SP) O valor de y no sistema $\begin{cases} (0{,}2)^{5x+y} = 5 \\ (0{,}5)^{2x-y} = 2 \end{cases}$ é igual a:

a) $\frac{-5}{2}$

b) $\frac{2}{7}$

c) $\frac{-2}{5}$

d) $\frac{3}{5}$

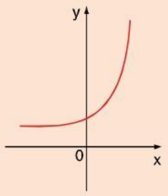
e) $\frac{3}{7}$

18. (UF-RS) Considere a função f tal que

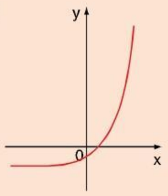
$f(x) = k + \left(\frac{5}{4}\right)^{2x-1}$, com $k > 0$.

Assinale a alternativa correspondente ao gráfico que pode representar a função f.

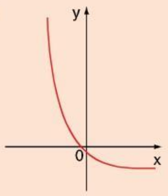
a)



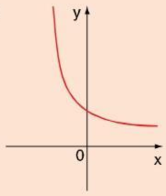
b)



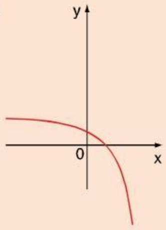
c)



d)



e)



19. (UFF-RJ) A automedicação é considerada um risco, pois a utilização desnecessária ou equivocada de um medicamento pode comprometer a saúde do usuário: substâncias ingeridas difundem-se pelos líquidos e tecidos do corpo, exercendo efeito benéfico ou maléfico. Depois de se administrar determinado medicamento a um grupo de indivíduos, verificou-se que a concentração (y) de certa substância em seus organismos alterava-se em função do tempo decorrido (t), de acordo com a expressão $y = y_0 \cdot 2^{-0{,}5t}$, em que y_0 é a concentração inicial e t é o tempo em hora. Nessas circunstâncias, pode-se afirmar que a concentração da substância tornou-se a quarta parte da concentração inicial após:

a) $\frac{1}{4}$ de hora

b) meia hora

c) 1 hora

d) 2 horas

e) 4 horas

20. (UF-PR) Um importante estudo a respeito de como se processa o esquecimento foi desenvolvido pelo alemão Hermann Ebbinghaus no final do século XIX.

Utilizando métodos experimentais, Ebbinghaus determinou que, dentro de certas condições, o percentual P do conhecimento adquirido que uma pessoa retém após t semanas pode ser aproximado pela fórmula $P = (100 - a) \cdot b^t + a$, sendo que a e b variam de uma pessoa para outra. Se essa fórmula é válida para um certo estudante, com $a = 20$ e $b = 0{,}5$, o tempo necessário para que o percentual se reduza a 28% será:

a) entre uma e duas semanas.

b) entre duas e três semanas.

c) entre três e quatro semanas.

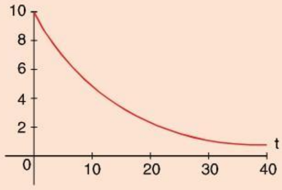
d) entre quatro e cinco semanas.

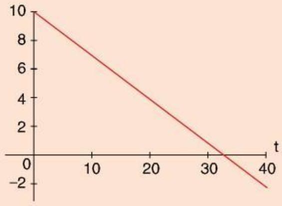
e) entre cinco e seis semanas.

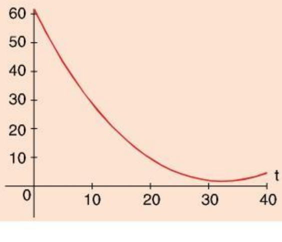
21. (UF-PE/U.F. Rural-PE) A informação dada a seguir deverá ser utilizada nesta e na questão que segue. Suponha que um teste possa detectar a presença de esteroides em um atleta, quando a quantidade de esteroides em sua corrente sanguínea for igual ou superior a 1 mg. Suponha também que o corpo elimina $\frac{1}{4}$ da quantidade de esteroides presentes na corrente sanguínea a cada 4 horas. Se um atleta ingere 10 mg de esteroides, passadas quantas horas não será possível detectar esteroides, submetendo o atleta a este teste? Dado: use a aproximação $10 \cong \left(\frac{4}{3}\right)^8$.

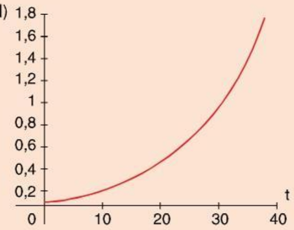
a) 28
b) 29
c) 30
d) 31
e) 32

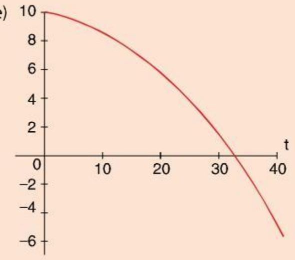
22. (UF-PE/U.F. Rural-PE) Qual dos gráficos a seguir melhor expressa a quantidade de esteroides na corrente sanguínea do atleta, ao longo do tempo, a partir do instante em que este tomou a dose de 10 mg?

a)


b)


c)


d)


e)


23. (Cefet-MG) O produto das raízes da equação exponencial $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$ é igual a

a) −2
b) −1
c) 0
d) 1

24. (Aman-RJ) Na pesquisa e desenvolvimento de uma nova linha de defensivos agrícolas, constatou-se que a ação do produto sobre a população de insetos em uma lavoura pode ser descrita pela expressão $N(t) = N_0 \cdot 2^{kt}$, sendo N_0 a população no início do tratamento, N(t), a população após *t* dias de tratamento e *k* uma constante, que descreve a eficácia do produto. Dados de campo mostraram que, após dez dias de aplicação, a população havia sido reduzida à quarta parte da população inicial. Com estes dados, podemos afirmar que o valor da constante de eficácia deste produto é igual a

a) 5^{-1}
b) -5^{-1}
c) 10
d) 10^{-1}
e) -10^{-1}

25. (Udesc-SC) Se *x* é solução da equação $3^{4x-1} + 9^x = 6$, então x^x é igual a:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{1}{2}$
d) 1
e) 27

26. (Fuvest-SP) Seja $f(x) = a + 2^{bx+c}$, em que *a*, *b* e *c* são números reais. A imagem de *f* é a semirreta $]-1, \infty[$ e o gráfico de *f* intercepta os eixos coordenados nos pontos $(1, 0)$ e $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$. Então, o produto abc vale

a) 4

b) 2

c) 0

d) −2

e) −4

27. (Insper-SP) Considerando *x* uma variável real positiva, a equação $x^{x^2-6x+9} = x$ possui três raízes, que nomearemos *a*, *b* e *c*. Nessas condições, o valor da expressão $a^2 + b^2 + c^2$ é

a) 20

b) 21

c) 27

d) 34

e) 35

28. (UFF-RJ) A comunicação eletrônica tornou-se fundamental no nosso cotidiano, mas, infelizmente, todo dia recebemos muitas mensagens indesejadas: propagandas, promessas de emagrecimento imediato, propostas de fortuna fácil, correntes etc. Isso está se tornando um problema para os usuários da internet, pois o acúmulo de "lixo" nos computadores compromete o desempenho da rede!

Pedro iniciou uma corrente enviando uma mensagem pela internet a dez pessoas, que, por sua vez, enviaram, cada uma, a mesma mensagem a outras dez pessoas. E estas, finalizando a corrente enviaram, cada uma, a mesma mensagem a outras dez pessoas. O número máximo de pessoas que receberam a mensagem enviada por Pedro é igual a:

a) 30

b) 110

c) 210

d) 1 110

e) 11 110

29. (FGV-RJ) Espera-se que a população de uma cidade, hoje com 120 000 habitantes, cresça 2% a cada ano. Segundo esta previsão, a população da cidade, daqui a *n* anos, será igual a:

a) $120\,000 \cdot 1{,}02^n$

b) $120\,000 \cdot 2^n$

c) $120\,000 \cdot (1 + 1{,}02n)$

d) $120\,000 \cdot (0{,}02)^n$

e) $120\,000 \cdot 1{,}02n$

30. (Acafe-SC) Um dos perigos da alimentação humana são os microrganismos, que podem causar diversas doenças e até levar a óbito. Entre eles, podemos destacar a *Salmonella*. Atitudes simples como lavar as mãos, armazenar os alimentos em locais apropriados, ajudam a prevenir a contaminação pelos mesmos. Sabendo que certo microrganismo se prolifera rapidamente, dobrando sua população a cada 20 minutos, pode-se concluir que o tempo que a população de 100 microrganismos passará a ser composta de 3 200 indivíduos é:

a) 1 h e 35 min.

b) 1 h e 40 min.

c) 1 h e 50 min.

d) 1 h e 55 min.

31. (Fuvest-SP) Uma substância radioativa sofre desintegração ao longo do tempo, de acordo com a relação $m(t) = c \cdot a^{-kt}$, em que *a* é um número real positivo, *t* é dado em anos, m(t) a massa da substância em gramas e *c*, *k* são constantes positivas. Sabe-se que m_0 gramas dessa substância foram reduzidos a 20% em 10 anos. A que porcentagem de m_0 ficará reduzida a massa da substância, em 20 anos?

a) 10%

b) 5%

c) 4%

d) 3%

e) 2%

32. (Udesc-SC) Sejam *f* e *g* as funções definidas por $f(x) = \sqrt{(25)^x - 2 \cdot (5)^x - 15}$ e $g(x) = x^2 - x - \frac{35}{4}$. A é o conjunto que representa o domínio da função *f* e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \leqslant 0\}$, então o conjunto $A^C \cap B$ é:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} \leqslant x < \frac{7}{2}\right\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{7}{2}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{5}{2} \text{ ou } x > \frac{7}{2}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} \leqslant x < 1\right\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3 \text{ ou } x \geqslant 5\}$

33. (UF-PI) O gráfico da função $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(t) = \frac{B}{1 + Ae^{-Bkt}}$, na qual A, B e *k* são constantes positivas, é uma curva denominada

26. (Fuvest-SP) Seja $f(x) = a + 2^{bx+c}$, em que *a*, *b* e *c* são números reais. A imagem de *f* é a semirreta $]-1, \infty[$ e o gráfico de *f* intercepta os eixos coordenados nos pontos $(1, 0)$ e $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$. Então, o produto abc vale

a) 4

b) 2

c) 0

d) −2

e) −4

27. (Insper-SP) Considerando *x* uma variável real positiva, a equação $x^{x^2-6x+9} = x$ possui três raízes, que nomearemos *a*, *b* e *c*. Nessas condições, o valor da expressão $a^2 + b^2 + c^2$ é

a) 20

b) 21

c) 27

d) 34

e) 35

28. (UFF-RJ) A comunicação eletrônica tornou-se fundamental no nosso cotidiano, mas, infelizmente, todo dia recebemos muitas mensagens indesejadas: propagandas, promessas de emagrecimento imediato, propostas de fortuna fácil, correntes etc. Isso está se tornando um problema para os usuários da internet, pois o acúmulo de "lixo" nos computadores compromete o desempenho da rede!
Pedro iniciou uma corrente enviando uma mensagem pela internet a dez pessoas, que, por sua vez, enviaram, cada uma, a mesma mensagem a outras dez pessoas. E estas, finalizando a corrente enviaram, cada uma, a mesma mensagem a outras dez pessoas. O número máximo de pessoas que receberam a mensagem enviada por Pedro é igual a:

a) 30

b) 110

c) 210

d) 1 110

e) 11 110

29. (FGV-RJ) Espera-se que a população de uma cidade, hoje com 120 000 habitantes, cresça 2% a cada ano. Segundo esta previsão, a população da cidade, daqui a *n* anos, será igual a:

a) $120\,000 \cdot 1{,}02^n$

b) $120\,000 \cdot 2^n$

c) $120\,000 \cdot (1 + 1{,}02n)$

d) $120\,000 \cdot (0{,}02)^n$

e) $120\,000 \cdot 1{,}02n$

30. (Acafe-SC) Um dos perigos da alimentação humana são os microrganismos, que podem causar diversas doenças e até levar a óbito. Entre eles, podemos destacar a *Salmonella*. Atitudes simples como lavar as mãos, armazenar os alimentos em locais apropriados, ajudam a prevenir a contaminação pelos mesmos. Sabendo que certo microrganismo se prolifera rapidamente, dobrando sua população a cada 20 minutos, pode-se concluir que o tempo que a população de 100 microrganismos passará a ser composta de 3 200 indivíduos é:

a) 1 h e 35 min.

b) 1 h e 40 min.

c) 1 h e 50 min.

d) 1 h e 55 min.

31. (Fuvest-SP) Uma substância radioativa sofre desintegração ao longo do tempo, de acordo com a relação $m(t) = c \cdot a^{-kt}$, em que *a* é um número real positivo, *t* é dado em anos, m(t) a massa da substância em gramas e *c*, *k* são constantes positivas. Sabe-se que m_0 gramas dessa substância foram reduzidos a 20% em 10 anos. A que porcentagem de m_0 ficará reduzida a massa da substância, em 20 anos?

a) 10%

b) 5%

c) 4%

d) 3%

e) 2%

32. (Udesc-SC) Sejam *f* e *g* as funções definidas por $f(x) = \sqrt{(25)^x - 2 \cdot (5)^x - 15}$ e $g(x) = x^2 - x - \frac{35}{4}$. A é o conjunto que representa o domínio da função *f* e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \leqslant 0\}$, então o conjunto $A^C \cap B$ é:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} \leqslant x < \frac{7}{2}\right\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{7}{2}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{5}{2} \text{ ou } x > \frac{7}{2}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} \leqslant x < 1\right\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3 \text{ ou } x \geqslant 5\}$

33. (UF-PI) O gráfico da função $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(t) = \frac{B}{1 + Ae^{-Bkt}}$, na qual A, B e *k* são constantes positivas, é uma curva denominada curva logística. Essas curvas ilustram modelos de crescimento populacional, diante da influência de fatores ambientais no tamanho possível de uma população, também descrevem expansão de epidemias e, até, boatos numa comunidade! Sendo assim, considere a seguinte situação: admita que, *t* semanas após a constatação de uma forma rara de gripe, aproximadamente $f(t) = \frac{36}{1 + 17e^{-1,5t}}$ milhares de pessoas tenham adquirido a doença. Nessas condições, quantas pessoas haviam adquirido a doença quando foi constatada a existência dessa gripe?

a) 1 000 pessoas
b) 2 000 pessoas
c) 2 500 pessoas
d) 3 600 pessoas
e) 4 100 pessoas

34. (Aman-RJ) Um jogo pedagógico foi desenvolvido com as seguintes regras:

- Os alunos iniciam a primeira rodada com 256 pontos;
- Faz-se uma pergunta a um aluno. Se acertar, ele ganha a metade dos pontos que tem. Se errar, perde metade dos pontos que tem;
- Ao final de 8 rodadas, cada aluno subtrai dos pontos que tem os 256 iniciais, para ver se "lucrou" ou "ficou devendo".

O desempenho de um aluno que, ao final dessas oito rodadas, ficou devendo 13 pontos foi de

a) 6 acertos e 2 erros.
b) 5 acertos e 3 erros.
c) 4 acertos e 4 erros.
d) 3 acertos e 5 erros.
e) 2 acertos e 6 erros.

35. (Fuvest-SP) Quando se divide o Produto Interno Bruto (PIB) de um país pela sua população, obtém-se a renda *per capita* desse país. Suponha que a população de um país cresça à taxa constante de 2% ao ano. Para que sua renda *per capita* dobre em 20 anos, o PIB deve crescer anualmente à taxa constante de, aproximadamente,

Dado: $\sqrt[20]{2} \cong 1,035$.

a) 4,2%
b) 5,2%
c) 6,4%
d) 7,5%
e) 8,9%

36. (Mackenzie-SP) Um aparelho celular tem seu preço *y* desvalorizado exponencialmente em função do tempo (em meses) *t*, representado pela equação $y = p \cdot q^t$, com *p* e *q* constantes positivas. Se, na compra, o celular custou R$ 500,00 e, após 4 meses, o seu valor é $\frac{1}{5}$ do preço pago, 8 meses após a compra, o seu valor será:

a) R$ 25,00
b) R$ 24,00
c) R$ 22,00
d) R$ 28,00
e) R$ 20,00

37. (FGV-SP) O valor de um carro decresce exponencialmente, de modo que seu valor, daqui a *x* anos, será dado por $V = Ae^{-kx}$, em que $e = 2,7182...$ Hoje, o carro vale R$ 40 000,00 e daqui a 2 anos valerá R$ 30 000,00. Nessas condições, o valor do carro daqui a 4 anos será:

a) R$ 17 500,00
b) R$ 20 000,00
c) R$ 22 500,00
d) R$ 25 000,00
e) R$ 27 500,00

38. (Unama-PA) Psicólogos têm chegado à conclusão que, em várias situações de aprendizado, a taxa com que uma pessoa aprende é rápida no início e depois decresce. A curva de aprendizado de um indivíduo, obtida empiricamente, é representada por $f(t) = 90(1 - 3^{-0,4t})$, onde *t* é o tempo, em horas, destinado à memorização das palavras constantes de uma lista. O número máximo de palavras que esse indivíduo consegue memorizar é 90, mesmo quando lhe é permitido estudar por várias horas. Nestas condições, o tempo gasto por esse indivíduo para memorizar 60 palavras é:

a) 1h e 30min.
b) 1h e 45min.
c) 2h e 5min.
d) 2h e 30min.

39. (UF-PB) Uma indústria de equipamentos produziu, durante o ano de 2002, peças dos tipos A, B e C. O preço P de cada unidade, em reais, e a quantidade Q de unidades, produzidas em 2002, são dados na tabela a seguir:

curva logística. Essas curvas ilustram modelos de crescimento populacional, diante da influência de fatores ambientais no tamanho possível de uma população, também descrevem expansão de epidemias e, até, boatos numa comunidade! Sendo assim, considere a seguinte situação: admita que, t semanas após a constatação de uma forma rara de gripe, aproximadamente $f(t) = \dfrac{36}{1 + 17e^{-1,5t}}$ milhares de pessoas tenham adquirido a doença. Nessas condições, quantas pessoas haviam adquirido a doença quando foi constatada a existência dessa gripe?

a) 1 000 pessoas
b) 2 000 pessoas
c) 2 500 pessoas
d) 3 600 pessoas
e) 4 100 pessoas

34. (Aman-RJ) Um jogo pedagógico foi desenvolvido com as seguintes regras:

- Os alunos iniciam a primeira rodada com 256 pontos;
- Faz-se uma pergunta a um aluno. Se acertar, ele ganha a metade dos pontos que tem. Se errar, perde metade dos pontos que tem;
- Ao final de 8 rodadas, cada aluno subtrai dos pontos que tem os 256 iniciais, para ver se "lucrou" ou "ficou devendo".

O desempenho de um aluno que, ao final dessas oito rodadas, ficou devendo 13 pontos foi de

a) 6 acertos e 2 erros.
b) 5 acertos e 3 erros.
c) 4 acertos e 4 erros.
d) 3 acertos e 5 erros.
e) 2 acertos e 6 erros.

35. (Fuvest-SP) Quando se divide o Produto Interno Bruto (PIB) de um país pela sua população, obtém-se a renda *per capita* desse país. Suponha que a população de um país cresça à taxa constante de 2% ao ano. Para que sua renda *per capita* dobre em 20 anos, o PIB deve crescer anualmente à taxa constante de, aproximadamente,

Dado: $\sqrt[20]{2} \cong 1,035$.

a) 4,2%
b) 5,2%
c) 6,4%
d) 7,5%
e) 8,9%

36. (Mackenzie-SP) Um aparelho celular tem seu preço y desvalorizado exponencialmente em função do tempo (em meses) t, representado pela equação $y = p \cdot q^t$, com p e q constantes positivas. Se, na compra, o celular custou R$ 500,00 e, após 4 meses, o seu valor é $\frac{1}{5}$ do preço pago, 8 meses após a compra, o seu valor será:

a) R$ 25,00
b) R$ 24,00
c) R$ 22,00
d) R$ 28,00
e) R$ 20,00

37. (FGV-SP) O valor de um carro decresce exponencialmente, de modo que seu valor, daqui a x anos, será dado por $V = Ae^{-kx}$, em que $e = 2,7182...$ Hoje, o carro vale R$ 40 000,00 e daqui a 2 anos valerá R$ 30 000,00. Nessas condições, o valor do carro daqui a 4 anos será:

a) R$ 17 500,00
b) R$ 20 000,00
c) R$ 22 500,00
d) R$ 25 000,00
e) R$ 27 500,00

38. (Unama-PA) Psicólogos têm chegado à conclusão que, em várias situações de aprendizado, a taxa com que uma pessoa aprende é rápida no início e depois decresce. A curva de aprendizado de um indivíduo, obtida empiricamente, é representada por $f(t) = 90(1 - 3^{-0,4t})$, onde t é o tempo, em horas, destinado à memorização das palavras constantes de uma lista. O número máximo de palavras que esse indivíduo consegue memorizar é 90, mesmo quando lhe é permitido estudar por várias horas. Nestas condições, o tempo gasto por esse indivíduo para memorizar 60 palavras é:

a) 1h e 30min.
b) 1h e 45min.
c) 2h e 5min.
d) 2h e 30min.

39. (UF-PB) Uma indústria de equipamentos produziu, durante o ano de 2002, peças dos tipos A, B e C. O preço P de cada unidade, em reais, e a quantidade Q de unidades, produzidas em 2002, são dados na tabela a seguir:

Tipo	P	Q
A	0,25	2^{15}
B	2,00	4^{7}
C	4,00	8^{4}

Com base nas informações acima e sabendo-se que a receita de cada tipo é dada, em reais, pelo produto $P \cdot Q$, é correto afirmar:

a) A receita do tipo B foi maior que a do tipo C.

b) A receita do tipo B foi igual à do tipo C.

c) A receita do tipo A foi igual à do tipo C.

d) A receita do tipo A foi maior que a do tipo C.

e) A receita do tipo C foi maior que a do tipo B.

40. (Udesc-SC) O conjunto solução da inequação $\left[\sqrt[3]{(2^{x-2})}\right]^{x+3} > 4^x$ é:

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 6\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6 \text{ ou } x > 1\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 6\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < 1\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\sqrt{6} \text{ ou } x > \sqrt{6}\right\}$

41. (Enem-MEC) Muitos processos fisiológicos e bioquímicos, tais como batimentos cardíacos e taxa de respiração, apresentam escalas construídas a partir da relação entre superfície e massa (ou volume) do animal. Uma dessas escalas, por exemplo, considera que "o cubo da área S da superfície de um mamífero é proporcional ao quadrado de sua massa M".

HUGHES-HALLETT, D. et al. Cálculo e aplicações. São Paulo: Edgard Blucher, 1999 (adaptado).

Isso é equivalente a dizer que, para uma constante $k > 0$, a área S pode ser escrita em função de M por meio da expressão:

a) $S = k \cdot M$

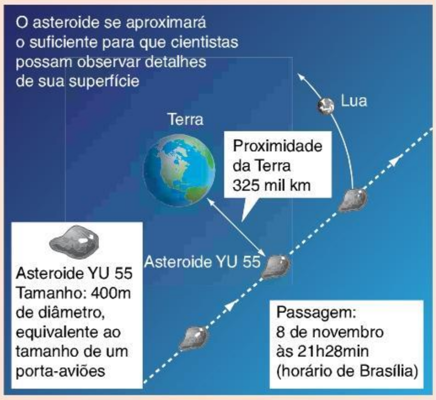
b) $S = k \cdot M^{\frac{1}{3}}$

c) $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{1}{3}}$

d) $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{2}{3}}$

e) $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{2}$

42. (Enem-MEC) A Agência Espacial Norte-Americana (NASA) informou que o asteroide YU 55 cruzou o espaço entre a Terra e a Lua no mês de novembro de 2011. A ilustração a seguir sugere que o asteroide percorreu sua trajetória no mesmo plano que contém a órbita descrita pela Lua em torno da Terra. Na figura, está indicada a proximidade do asteroide em relação à Terra, ou seja, a menor distância que ele passou da superfície terrestre.



Fonte: NASA
Disponível em: <http://noticias.terra.com.br> (adaptado)

Com base nessas informações, a menor distância que o asteroide YU 55 passou da superfície da Terra é igual a

a) $3{,}25 \cdot 10^2$ km.

b) $3{,}25 \cdot 10^3$ km.

c) $3{,}25 \cdot 10^4$ km.

d) $3{,}25 \cdot 10^5$ km.

e) $3{,}25 \cdot 10^6$ km.

43. (UFPE) As populações de duas cidades, em milhões de habitantes, crescem, em função do tempo *t*, medido em anos, segundo as expressões $200 \cdot 2^{\frac{t}{20}}$ e $50 \cdot 2^{\frac{t}{10}}$, com $t = 0$ correspondendo ao instante atual. Em quantos anos, contados a partir de agora, as populações das duas cidades serão iguais?

a) 34 anos

b) 36 anos

c) 38 anos

d) 40 anos

e) 42 anos

44. (Unifesp-SP) Sob determinadas condições, o antibiótico gentamicina, quando ingerido, é eliminado pelo organismo à razão de metade do volume acumulado a cada 2 horas. Daí, se K é o volume da substância no organismo, pode-se utilizar a função $f(t) = K\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$ para estimar a sua eliminação depois de um tempo *t*, em horas. Neste caso, o tempo mínimo necessário para que uma pessoa conserve no máximo 2 mg desse antibiótico no organismo, tendo ingerido 128 mg numa única dose, é de:

a) 12 horas e meia.

b) 12 horas.

c) 10 horas e meia.

d) 8 horas.

e) 6 horas.