



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO MATEMÁTICA-LICENCIATURA

MARIA LUANA SABINO DE MELO

**O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO POR
MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS RELACIONADOS A
EQUAÇÕES COM BALANÇAS**

Caruaru

2022

MARIA LUANA SABINO DE MELO

**O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO POR
MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS RELACIONADOS A
EQUAÇÕES COM BALANÇAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Matemática-Licenciatura da
Universidade Federal de Pernambuco, como
requisito para a obtenção do grau de
Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Ensino de
Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos

Caruaru

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Melo, Maria Luana Sabino de.

O desenvolvimento do pensamento algébrico por meio da Resolução de Problemas relacionados a equações com balanças / Maria Luana Sabino de Melo. - Caruaru, 2022.

69 p. : il., tab.

Orientador(a): Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Matemática - Licenciatura, 2022.

Inclui referências, apêndices.

1. Álgebra. 2. Pensamento algébrico. 3. Resolução de problemas. 4. Balanças. 5. Equações. I. Santos, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão. (Orientação). II. Título.

510 CDD (22.ed.)

MARIA LUANA SABINO DE MELO

**O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO POR
MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS RELACIONADOS A
EQUAÇÕES COM BALANÇAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Matemática-Licenciatura da
Universidade Federal de Pernambuco, como
requisito para a obtenção do grau de
Licenciada em Matemática.

Aprovada em: 09/11/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof.^a Dr.^a Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof.^a Dr.^a Simone Moura Queiroz (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Me. Luan Danilo Silva dos Santos (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico este trabalho aos meus pais, Crispim e Lúcia, à minha irmã Lauane e ao meu namorado Ricardo. Foi o apoio e incentivo de vocês que fez com que eu chegasse até aqui.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por estar comigo em todo o tempo, me dando força, coragem e me capacitando de todas as formas para que eu pudesse chegar até aqui. A Ele toda honra e glória.

Agradeço aos meus pais, Crispim e Lúcia, pessoas humildes e guerreiras que sempre deram o melhor por mim, me fizeram ser quem sou e nunca deixaram de me incentivar, apoiar e acreditar na minha capacidade. À minha mãe que sempre se esforçou para entender cada etapa deste trabalho, se alegrando a cada fase concluída e me aconselhando e acalmando diante de todas as frustrações. Vocês são as minhas inspirações diárias, todo o esforço é por vocês, por nós.

À minha irmã Lauane, por nunca duvidar de mim, por me dar suporte e vibrar junto comigo a cada pequena conquista alcançada na vida acadêmica. Obrigada por sempre dizer que vai dar certo quando nem eu mesma acredito.

Agradeço pelo apoio e incentivo de toda minha família, em especial da minha tia Fátima, que me auxiliou na vida pessoal e profissional incontáveis vezes. Guardo na memória o abraço e o choro de alegria ao dar-lhe a notícia do tão sonhado ingresso no ensino superior, em breve essa lembrança se renovará com a conclusão. Obrigada por ter cuidado de mim quando precisei e sempre torcer pelas minhas vitórias.

Agradeço ao meu namorado Ricardo, o conheci na universidade e está concluindo junto comigo esta jornada. Obrigada por ser meu companheiro nos bons e maus momentos, me ajudar, incentivar e estar sempre pronto para me ouvir e aliviar minhas angústias. Essa longa caminhada se tornou bem mais leve com você.

À turma de 2017.2, pessoas inteligentíssimas que sempre se ajudavam nos momentos de necessidade. Às amigas construídas, em especial Allana, Jéssica, Patrícia e Thays, que juntas vivemos momentos intensos de muitas risadas, angústias e principalmente estudo. Vai ficar uma saudade boa de tudo o que vivemos.

Aos meus professores da universidade, em especial Jaqueline Lixandrão, Luan Santos, Luana Rafaela e Simone Queiroz, profissionais ímpares que me inspiraram a fazer a diferença na vida dos meus alunos.

Agradeço à minha orientadora Jaqueline Lixandrão por ter aceitado me guiar na construção deste trabalho. Obrigada pelas inúmeras contribuições e por sempre me tranquilizar dizendo que iria dar certo.

Aos membros da banca, Luan Santos e Simone Queiroz, agradeço por fazerem parte desse momento tão importante para mim e pela colaboração com a melhoria desta pesquisa.

Aos meus alunos do 7º ano, contribuintes essenciais para esta pesquisa que de imediato e de bom grado aceitaram participar, vez ou outra perguntando como estava o andamento do trabalho. Vocês têm um potencial incrível, foi e é um prazer aprender com vocês.

Por fim, agradeço aos meus professores da Educação Básica e a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a minha formação. Essa conquista é de todos nós. Meu muito obrigada.

“A alegria não chega apenas no encontro do achado, mas faz parte do processo da busca. E ensinar e aprender não pode dar-se fora da procura, fora da boniteza e da alegria” (FREIRE, 2004, p. 142).

RESUMO

A álgebra é considerada pelos alunos uma das áreas mais difíceis da Matemática devido ao uso das letras e, se não for trabalhada de maneira construtiva ao longo dos anos, tal discurso se perpetua durante a vida escolar. Assim, nos suscitou o interesse em utilizar a Resolução de Problemas como metodologia para nossa pesquisa a partir do seguinte questionamento: Quais indícios do desenvolvimento do pensamento algébrico apresenta um grupo de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental a partir da resolução de problemas relacionados a equações com balanças? Como base teórica, discorremos sobre algumas concepções acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico, práticas e estudos nessa área, Resolução de Problemas e generalizações operatórias úteis para a apreensão de conceitos relacionados à álgebra. A fim de responder ao nosso problema de pesquisa, realizamos um estudo exploratório com abordagem qualitativa, a partir de uma sequência de problemas. Os participantes são estudantes de uma escola da rede privada de Lajedo – PE que ainda não tinham estudado os procedimentos formais da álgebra. Com o nosso estudo, percebemos que muitos dos procedimentos utilizados nas resoluções se assemelharam com esses métodos, além de utilizar os conceitos de incógnitas e variáveis expressos nos problemas por meio de sólidos geométricos.

Palavras-chave: Álgebra. Pensamento algébrico. Resolução de problemas. Balanças. Equações.

ABSTRACT

Algebra is considered by students as one of the most difficult areas of mathematics due to the use of letters and, if not worked in a constructive manner over the years, such discourse is perpetuated during school life. Thus, we became interested in using Problem Solving as a methodology for our research based on the following question: What are the indications of the development of algebraic thinking in a group of 7th grade students from the resolution of problems related to equations with scales? As a theoretical basis, we discussed some conceptions about the development of algebraic thinking, practices and studies in this area, Problem Solving and operational generalizations useful for the apprehension of concepts related to algebra. In order to answer our research problem, we conducted an exploratory study with a qualitative approach, based on a sequence of problems. The participants are students from a private school in Lajedo - PE who had not yet studied the formal procedures of algebra. With our study, we noticed that many of the procedures used in the resolutions resembled these methods, besides using the concepts of unknowns and variables expressed in the problems by means of geometric solids.

Keywords: Algebra. Algebraic thinking. Problem solving. Scales. Equations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Balança representando a ideia de equivalência	27
Figura 2 –	Equação com balança	28
Figura 3 –	Registro da dupla D2: alternativa <i>b</i> do Problema 1	38
Figura 4 –	Registro da dupla D4: alternativa <i>b</i> do Problema 1	39
Figura 5 –	Resolução da dupla D1: Problema 3	42
Figura 6 –	Resolução da dupla D2: Problema 3	44
Figura 7 –	Resolução da dupla D4: Problema 3	45
Figura 8 –	Resolução da dupla D5: Problema 3	46
Figura 9 –	Resolução da dupla D2: alternativa <i>a</i> do Problema 4	48
Figura 10 –	Registro da dupla D5: Problema 4	49
Figura 11 –	Registro da dupla D2: Problema 5	51
Figura 12 –	Resolução da dupla D1: Problema 6	54
Figura 13 –	Resolução da dupla D2: Problema 6	55
Figura 14 –	Resolução da dupla D4: Problema 6	56

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 –	Etapas de realização da dinâmica	31
Quadro 2 –	Problemas e objetivos	32
Quadro 3 –	Fase do antes	35
Quadro 4 –	Respostas e justificativas para os Problemas 1 e 2	36
Quadro 5 –	Diálogo da dupla D5: alternativa <i>a</i> do Problema 1	37
Quadro 6 –	Diálogo da dupla D2: alternativa <i>a</i> do Problema 2	39
Quadro 7 –	Diálogo da socialização: alternativa <i>b</i> do Problema 1	41
Quadro 8 –	Diálogo da dupla D1: Problema 3	43
Quadro 9 –	Diálogo da dupla D2: Problema 3	44
Quadro 10 –	Respostas e justificativas para os Problemas 4 e 5	47
Quadro 11 –	Diálogo da dupla D5: alternativa <i>a</i> do Problema 5	49
Quadro 12 –	Diálogo da dupla D5: alternativa <i>b</i> do Problema 4	50
Quadro 13 –	Diálogo da socialização: alternativa <i>b</i> do Problema 4	52
Quadro 14 –	Diálogo da socialização: alternativa <i>a</i> do Problema 5	53
Quadro 15 –	Diálogo da dupla D1: Problema 6	54

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	OBJETIVOS	16
2.1	GERAL	16
2.2	ESPECÍFICOS	16
3	PENSAMENTO ALGÉBRICO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES	17
3.1	DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO	17
3.2	PRÁTICAS E ESTUDOS SOBRE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO	19
3.3	A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	24
3.4	GENERALIZAÇÕES OPERATÓRIAS	26
4	METODOLOGIA	29
4.1	NATUREZA DA PESQUISA	29
4.2	CONTEXTO DA PESQUISA	30
4.3	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	30
4.4	OS PROBLEMAS	32
5	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS	35
5.1	BLOCO 1: FASE DO ANTES	35
5.2	BLOCO 2: PROBLEMAS 1 E 2	36
5.2.1	Socialização dos Problemas 1 e 2	41
5.3	BLOCO 3: PROBLEMA 3	42
5.4	BLOCO 4: PROBLEMAS 4 E 5	47
5.4.1	Socialização dos Problemas 4 e 5	52
5.5	BLOCO 5: PROBLEMA 6	53
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	58
	REFERÊNCIAS	60
	APÊNDICE A – LISTA DE PROBLEMAS	63
	APÊNDICE B – OBJETOS PARA RECORTE	69

1 INTRODUÇÃO

A matemática é uma disciplina temida por muitos alunos, seja pela dificuldade em aprendê-la ou por considerá-la abstrata, repleta de regras e sem sentido. Tal discurso é ainda mais enfatizado quando o aluno tem seu primeiro contato com a álgebra, uma área importante para a aprendizagem de diversos conteúdos posteriores e “[...] parte da Matemática que trabalha a generalização e abstração, representando quantidades através de símbolos” (GIL, 2008, p. 11).

De acordo com Souza (2020, p. 18), “[...] a álgebra é conteúdo chave para a compreensão de diversas estruturas na Matemática escolar. Dada sua importância, não é aceitável que haja tantos estudantes desfavorecidos desse tema”. Ademais, é importante que o aluno possa se apropriar dos conceitos, para que sirva de aliada também na compreensão de diversas situações cotidianas (GIL, 2008).

Segundo a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), a álgebra passa a ser vista desde o 1º ano do Ensino Fundamental, por meio de padrões com figuras, objetos ou números naturais. Dessa forma, entendemos que o desenvolvimento de pensamento algébrico precisa ser construído desde muito cedo, pois a brusca passagem da aritmética para a álgebra geralmente causa dificuldades de compreensão e aversão aos alunos, que por vezes já apresentavam dificuldades em aritmética. Assim, considerando que até então realizavam manipulações com algo que para eles era concreto, lidar com incógnitas e variáveis sem associá-las a um significado torna este conteúdo abstrato.

Considerando que um dos primeiros conteúdos a ser ensinado em álgebra é equação do 1º grau, para Van de Walle (2009), além dos diferentes papéis assumidos pelas letras (incógnitas ou variáveis), uma outra razão para as dificuldades pode estar relacionada com o significado do sinal de igualdade, pois nos anos iniciais do ensino fundamental, os alunos entendem que o sinal separa o problema da resposta e nos anos finais, se deparam com problemas nos dois lados da igualdade.

É comum ouvir de muitos alunos que a matemática tornou-se difícil desde o aparecimento de letras entre os números. Motivada por esse discurso, com a intenção de melhorar esse cenário, nos suscitou o interesse em realizar esta pesquisa e analisar o pensamento algébrico de alunos que ainda não tiveram contato com a álgebra formal. Considerando a importância desse conteúdo para a vida escolar e cotidiana, e ainda, que o

desenvolvimento do pensamento algébrico pode ser trabalhado desde muito cedo, percebemos a relevância deste trabalho.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998), é necessário desvencilhar-se do ensino da Matemática centrado em métodos automáticos, no intuito de proporcionar ao aluno a compreensão do meio em que vive e o desenvolvimento de sua capacidade cognitiva.

Nesse contexto, é notório o carecimento de metodologias a serem utilizadas nas aulas de matemática, que objetivem a construção do conhecimento, proporcionando ao aluno o pensamento crítico, tornando-o um sujeito ativo no seu processo de aprendizagem. É necessário que o professor promova momentos de troca de conhecimento, compartilhamento de ideias e formas de raciocínio para que o conhecimento seja construído, ou seja, que se torne um mediador do processo de aprendizagem.

Dessa forma, discutimos a Resolução de Problemas como metodologia a ser utilizada na sala de aula para contribuir com o desenvolvimento do pensamento algébrico, a partir do ambiente de ensino proposto por Van de Walle (2009). Tal proposta consiste no desenvolvimento de tarefas¹ em três etapas: antes – momento em que o docente explica como será a dinâmica para a solução das situações problemas e esclarece os objetivos de maneira introdutória; durante – trata-se da resolução dos problemas pelos alunos e o depois – corresponde ao momento de socialização e discussão coletiva das estratégias utilizadas para chegar ao resultado final.

Segundo o autor supracitado, esta forma de ensino é centrada no aluno, pois a aprendizagem se constrói a partir dos conhecimentos prévios dos mesmos, com a convicção de que podem aprender matemática, fazendo matemática.

Considerando as dificuldades na aprendizagem de álgebra, a resolução de problemas envolvendo a noção de equivalência para a introdução de equação pode se mostrar eficiente. Segundo Van de Walle (2009), atividades como sentenças abertas ou esquema de equilíbrio de uma balança de dois pratos podem fazer com que os alunos desenvolvam procedimentos que lhes permitam compreender os conceitos necessários para a apreensão da álgebra formal, uma vez que podem ser utilizados diversos tipos de figuras ou expressões numéricas antes de envolver incógnitas ou variáveis, assim como também aborda Usiskin (1995). Desta

¹ Conjunto de ações – exercícios, problemas, situações-problemáticas, estratégias de ensino – organizadas pelo professor, visando que conceitos da Matemática sejam compreendidos e desenvolvidos pelos alunos (CHRISTIANSEN; WALTER, 1986).

forma, acreditamos que os alunos podem desenvolver habilidades que só seriam vistas posteriormente.

Diante das considerações citadas, a fim de buscarmos responder a seguinte questão problema de nossa pesquisa: Quais indícios de desenvolvimento do pensamento algébrico apresenta um grupo de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental a partir da resolução de problemas relacionados a equações com balanças? Para tanto, realizamos uma pesquisa de natureza básica do tipo exploratória. Para a investigação e coleta de dados, organizamos uma sequência de problemas envolvendo equações com balanças que foi destinada a alunos do 7º ano do Ensino Fundamental Anos de Finais de uma escola da rede privada de Lajedo – PE. Ao final de nossa pesquisa, os dados foram analisados qualitativamente.

Em suma, organizamos nosso trabalho em seis capítulos, sendo que neste primeiro apresentamos a temática, bem como expressamos as inquietações/motivações que nos levaram a seguir essa linha de estudo. No segundo capítulo, apresentamos os objetivos geral e específicos pautados no intuito de responder ao problema de pesquisa.

O capítulo três aborda a base teórica organizada em quatro tópicos, onde discorremos sobre algumas concepções acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico, práticas e estudos nessa área, Resolução de Problemas como metodologia e generalizações operatórias úteis para a apreensão de conceitos relacionados à álgebra. No quarto capítulo apresentamos a metodologia, mostrando a natureza da pesquisa, o contexto na qual está inserida, o método e os procedimentos realizados para a coleta de dados.

No capítulo cinco, trazemos a análise e discussão desses dados atrelados às teorias versadas em nossa base teórica. Por fim, o sexto capítulo apresenta nossas considerações finais a partir do trabalho realizado, reiterando nossa aspiração na continuidade e surgimento de novas pesquisas que objetivem melhorias na educação matemática.

2 OBJETIVOS

2.1 GERAL

Analisar indícios do desenvolvimento do pensamento algébrico de um grupo de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental a partir da resolução de problemas relacionados a equações com balanças.

2.2 ESPECÍFICOS

- Identificar as estratégias utilizadas por estudantes do 7º ano na resolução de problemas relacionados a equações com balanças;
- Compreender os processos de conjecturas e argumentação da manifestação do pensamento algébrico a partir de uma sequência de problemas;
- Analisar as possíveis contribuições dos problemas propostos para a manifestação e desenvolvimento do pensamento algébrico.

3 PENSAMENTO ALGÉBRICO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Nesta seção, iniciamos uma reflexão sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do Ensino Fundamental com base nas ideias iniciais de álgebra. Posteriormente, discorreremos sobre experiências vivenciadas por pesquisadores em sala de aula, desde a Educação Infantil até o Ensino Médio, bem como, diversos tipos de atividades relacionadas ao pensamento algébrico.

Em seguida, apresentamos a resolução de problemas como metodologia de ensino, suas possíveis contribuições para o ensino-aprendizagem de Matemática e desenvolvimento do pensamento algébrico. Por fim, trazemos algumas discussões sobre como o pensamento relacional pode auxiliar na compreensão de importantes propriedades aritméticas e conceitos necessários para a aprendizagem de álgebra por meio da relação de equivalência também existente em equações com balanças.

3.1 O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

A álgebra está presente em diversos conteúdos do currículo escolar. Segundo a BNCC (BRASIL, 2018), suas noções básicas começam a partir do 1º ano do Ensino Fundamental, por meio de padrões e sequências de objetos com figuras ou números naturais. No 2º ano, os alunos passam a desenvolver a habilidade de construir sequências, identificar regularidades e determinar elementos ausentes.

No ano seguinte, começam os estudos envolvendo a relação de igualdade com sentenças de adição e subtração e, no 4º ano, os alunos começam a identificar sequências formadas por múltiplos de números naturais, relações entre multiplicação e divisão e propriedades da igualdade. No 5º ano inicia-se a noção de equivalência, grandezas diretamente proporcionais e problemas de partilha, se estendendo também para o 6º ano. Somente no 7º ano que a linguagem algébrica formal é apresentada aos alunos, por meio das expressões algébricas e equação polinomial do 1º grau. Nos demais anos o estudo discorre sobre outros tipos de equações, como representações no plano cartesiano, funções, fatoração, entre outros.

Deste modo, pode-se notar que o pensamento algébrico pode ser desenvolvido desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, trazendo uma base para a consolidação dos conceitos da álgebra.

[...] o domínio da álgebra eleva ao nível superior o pensamento matemático, permitindo entender qualquer operação matemática como caso particular de operação de álgebra, facultando uma visão mais livre, mais abstrata e generalizada e, assim, mais profunda e rica das operações com números concretos (VIGOTSKI, 2001, p. 267).

Partindo desta premissa, cabe a indagação: o que seria pensamento algébrico, e qual a diferença do pensamento aritmético? Segundo Kieran (1996, apud ALMEIDA; CÂMARA, 2014), o pensamento algébrico pode ser representado como a forma de lidar com diversas situações quantitativas de forma relacional, não necessariamente por meio de letras. A ideia de que uma variável é sempre uma letra, é equivocada, pois um traço ou um desenho são equivalentes ao “x” comumente usado nas equações (USISKIN, 1995). Já o pensamento aritmético está relacionado ao domínio de cálculos numéricos à procura de um resultado (KIERAN, 1992, apud ALMEIDA; CÂMARA, 2014).

Pensar algebricamente não pode ser considerado apenas como a manipulação de expressões algébricas em um processo mecânico, pois proporciona ao indivíduo a habilidade de representar, analisar e resolver problemas não apenas no ambiente escolar, mas também no meio em que vive, promovendo aprendizagem e reflexão.

[...] o pensamento algébrico não é uma ideia singular, mas é composto de diferentes formas de pensamento e de compreensão do simbolismo. [...] devemos começar o desenvolvimento dessas formas de pensar desde o início escolar de modo que os estudantes aprendam a pensar produtivamente com as poderosas ideias da matemática, ou seja, que eles possam pensar matematicamente (VAN DE WALLE, 2009, p. 288).

Vigotski (2001) destaca a dificuldade da transição da aritmética para a álgebra ao afirmar que:

[...] a álgebra é mais difícil do que a aritmética para a criança [...] a apreensão da álgebra não repete o estudo da aritmética mas representa um plano novo e superior de desenvolvimento do pensamento matemático abstrato, que reconstrói e projeta para o nível superior o pensamento aritmético anteriormente constituído [...] (p. 314).

Até chegarem ao 7º ano do Ensino Fundamental, foco deste trabalho, os alunos efetuam apenas cálculos numéricos e repentinamente começam a se deparar com letras entre

os números, fazendo-os pensar que a matemática está mais difícil e até mesmo incompreensível. Essa ideia pode estar atrelada ao fato de não se trabalhar a compreensão da simbologia formal o suficiente e, abusando do seu uso, pode afastar o aluno dificultando o processo de aprendizagem. Percebemos que há um processo de maturação do desenvolvimento do pensamento algébrico, logo, se o estudante apresenta dificuldades de compreensão durante esse processo, é possível que não tenha desenvolvido as habilidades necessárias para a compressão de conceitos desejáveis no 7º ano.

É através da linguagem matemática que podemos representar e resolver uma série de problemas do cotidiano, portanto, é fundamental que o professor faça uso de métodos de ensino que possibilitem uma construção significativa do conhecimento. O processo de aprendizagem não depende tão somente do esforço do aluno, para Vale (2012, p. 183), “[...] a aprendizagem matemática durante uma aula de matemática depende grandemente do professor e das tarefas que se propõem aos estudantes”.

Dessa forma, entende-se que o processo de aprendizagem é um conjunto, que pode ser potencializado pelas práticas dos professores em sala de aula. Desta maneira, pode-se considerar que as metodologias utilizadas podem contribuir positiva e negativamente para o aprendizado, o ambiente precisa ser propício para a investigação, com conteúdos abordados de formas diversificadas e contextualizadas que promovam experiências ricas e desafiadoras.

3.2 PRÁTICAS E ESTUDOS SOBRE PENSAMENTO ALGÉBRICO

Segundo a BNCC (BRASIL, 2018), a álgebra pode ser desenvolvida desde o 1º ano do Ensino Fundamental, mas na Educação Infantil, o pensamento algébrico pode ser trabalhado por meio da ludicidade, se encaixando nos campos de aprendizagem, os quais organizam o currículo dessa etapa de ensino. Bagne e Bolognani (2020), pesquisadoras do Grupo Colaborativo em Matemática (Grucomat), trazem uma narrativa de aula e reflexões sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico na Educação Infantil, com crianças de 3 e 4 anos de idade, por meio da construção e percepção de regularidades e padrões, que para as autoras, é a base do pensamento algébrico e pode subsidiar os trabalhos do 1º ano.

Bagne e Bolognani (2020) propuseram tarefas com o objetivo de observar a percepção de regularidades com as crianças dispostas em filas brincando com o próprio corpo, realizando diversas posições. A professora da turma organizou-as realizando um determinado padrão, repetindo-o três vezes e chamou as demais crianças da turma,

questionando-as sobre como continuar a fila. Segundo as autoras, os alunos identificaram a sequência, mas do meio para o final da fila começaram a se desorganizar para brincar com os colegas. As propostas de regularidade seguintes ocorreram de maneira semelhante e pelos diálogos registrados, foi possível notar que os alunos identificaram os padrões mas estavam cansados de permanecer no mesmo lugar e começaram a se dispersar. Assim, as crianças foram convidadas a desenhar sobre a brincadeira realizada e os padrões descobertos.

Houve desenhos aleatórios como bichos e personagens de desenho animado, alguns alunos desenharam colegas em determinada posição, o que mostra que estavam associando à imagem que lembravam e algumas crianças desenharam o padrão realizado na primeira proposta da atividade, mas sem uma preocupação quanto à ordem da sequência da fila.

Mediante a análise dos registros e discussões do Grucomat, Bagne e Bolognani (2020) relataram algumas considerações sobre a atividade realizada. O envolvimento das crianças diante da proposta pode não ter sido o esperado porque a fila tem um outro sentido para elas, organizam-se dessa maneira com o intuito de se deslocarem de maneira organizada pela escola ou para esperarem a vez. Dessa forma, não identificaram um objetivo para estarem posicionadas de certa maneira na fila, o que ocasionou ansiedade e desorganização do padrão proposto pela atividade. Assim, a tarefa escolhida não poderia ser caracterizada como uma brincadeira, pois não desenvolveu o imaginário das crianças segundo as autoras.

Para Bagne e Bolognani (2020), uma sugestão para melhorar o envolvimento das crianças e conseqüentemente, ter um melhor resultado, seria apresentar uma história virtual com uma situação problematizadora onde o desejo de resolução poderia ser despertado. Nessa perspectiva, Camargo (2020), também pesquisadora do Grucomat, traz a narrativa de uma proposta chamada “Na floresta tem lobo?”. A tarefa foi realizada com alunos de 4 e 5 anos de idade. Antes da sua realização, alguns ambientes da escola foram decorados com pedaços de TNT para simbolizar os elementos da floresta pelos quais as crianças iriam passar (caverna, rio e montanha), ao final da realização de todas as etapas, encontravam-se chocolates como tesouro. Segundo Camargo (2020), tais elementos foram pensados com o intuito de tornar a atividade mais lúdica e atraente para as crianças.

Foi explicado para as crianças que a brincadeira seria passear na floresta, mas que teriam que seguir dicas deixadas por uma fada em forma de foto, para que o lobo mau não as vissem e assim, não corressem perigo. Para a autora, esse momento inicial da atividade já despertou a curiosidade e a fantasia nos alunos, que se mostraram animados gritando e batendo palmas. A turma teria que seguir pelo percurso disposta em fila, formando padrões

com diferentes posições corporais em cada etapa. No decorrer da brincadeira, os alunos iam sendo questionados sobre suas posições e rapidamente se organizaram seguindo a dica da foto. Para Camargo (2020), a atividade trouxe a sensação de coletividade, pois as crianças não analisavam apenas as suas posições, mas também a de outros colegas de modo a alcançarem o objetivo que era descobrir o tesouro.

Após a tarefa, os alunos fizeram a representação por meio de desenhos. Segundo a autora, nesses registros foi possível notar tanto os elementos da história, quanto os padrões realizados, o que representa a participação e o envolvimento das crianças. Assim, considera-se que o objetivo de estabelecer o contato com regularidades e padrões foi atingido. Camargo (2020) traz ainda que não é obrigatoriamente necessário que todas as atividades sejam trabalhadas de forma lúdica, mas é importante para um novo conceito pois traz um significado para o aprendizado.

Segundo a BNCC (BRASIL, 2018), nos anos iniciais do Ensino Fundamental, os alunos são capazes de desenvolver a identificação de regularidades, padrões numéricos e não numéricos estabelecendo leis matemáticas. Mescouto, Lucena e Barbosa (2021), trazem um estudo elaborado no 4º ano, fruto de uma dissertação desenvolvida em um projeto de pesquisa chamado Ensino-aprendizagem-avaliação em Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: atividades exploratório-investigativas e formação docente, produzido entre a Universidade Federal do Pará e o Centro Universitário Univates, do Rio Grande do Sul.

Com o intuito de investigar a manifestação do desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes, foram elaboradas tarefas com tipos de objetos em sequência. Na tarefa 1, havia duas frutas formando um padrão de maneira alternada e na 2, azulejos iguais que duplicavam no decorrer das posições; ambas tarefas possuíam questões discursivas questionando os próximos termos da sequência, termos mais distantes, lei de formação e justificativas.

De acordo com os registros das autoras, alguns alunos conseguiram identificar o padrão e estabelecer uma regra geral na tarefa 1, associando as posições das frutas com números pares e ímpares. Dessa forma, possibilitou que eles encontrassem quaisquer termos distantes na sequência. Na tarefa 2, as conclusões foram semelhantes, primeiramente os estudantes reconheceram que os azulejos aumentavam de dois em dois e, com o questionamento da professora sobre a relação entre a quantidade de azulejos e suas posições, chegaram à conclusão de que dobrando o valor posicional, encontrava-se o número de azulejos. Assim, a regra geral foi encontrada e a atividade pôde ser concluída.

As propostas apresentadas até aqui, evidenciam a capacidade de generalização, exploração de padrões e pensamento relacional, oportunizadas por tarefas problematizadoras que estimulam os alunos a discutir, refletir e verificar suas ideias. Tais competências irão se solidificando para alcançar níveis mais avançados de abstração em cada etapa de ensino.

Avançando para os anos finais do Ensino Fundamental, Braga (2012) traz em sua pesquisa de conclusão de curso, atividades para o desenvolvimento do pensamento algébrico que foram realizadas com alunos do 7º ano. Segundo o autor, as atividades foram elaboradas com o objetivo de aproximar os estudantes da linguagem matemática e assim, contribuir para a aprendizagem de equações.

Uma das atividades aplicadas chama-se “balança das equações”. Para realiza-la os alunos receberam os problemas impressos e com imagens de balanças com os pratos em equilíbrio. Em cada prato havia números e expressões algébricas para que os estudantes descobrissem os valores das incógnitas de modo a não desequilibrar a balança. Desta maneira, os alunos podem pensar em estratégias de resolução para que possam ser adicionados ou retirados pesos iguais dos pratos, associando às relações de igualdade mas sem decorar regras para a solução das equações.

Havia questões com diversos níveis de dificuldade e segundo o autor, os alunos conseguiram resolvê-las. No entanto, quando se tratava de operações com frações e contendo parênteses para aplicar a propriedade distributiva da multiplicação, apresentaram mais dificuldades sobre à aritmética, do que com a álgebra. Assim, em alguns momentos necessitaram de ajuda para conseguir compreender e solucionar o problema. O pesquisador também estimulava os alunos a fazer a verificação da solução encontrada substituindo as incógnitas.

Com o intuito de analisar o que os alunos entenderam, além da resolução dos problemas, os alunos foram convidados a criar sua própria equação com balança e resolver. Segundo o autor, também ocorreram mais equívocos relacionados à aritmética.

Braga (2012) relata uma limitação da atividade relatada, que em um dos pratos da balança não poderia haver um peso negativo, pois isso não se aplica a realidade e poderia confundir os alunos. Assim, na elaboração se atentou a criar equações com soluções positivas para que a situação corresponda à balança.

Prosseguindo para o Ensino Médio, os alunos nesta etapa de ensino devem ser capazes de fazer generalizações com um nível maior de abstração, compatível com o conhecimento construído até o momento. Nesta perspectiva, Frare (2020), pesquisadora do Grucomat, traz

uma narrativa de aula sobre duas tarefas aplicadas no 2º ano do Ensino Médio com o objetivo de verificar se os alunos conseguiam identificar regularidades e generalizar utilizando a álgebra, mais especificamente a Progressão Aritmética (PA) e Progressão Geométrica (PG), visto que são conteúdos estudados geralmente no 1º ano.

A primeira tratava-se de uma situação problema onde uma minhoca andando sempre em linha reta, avançava 5 metros e recuava 3 metros todos os dias. Partindo dessa premissa, os alunos foram organizados em grupos e teriam que responder a alguns questionamentos como a distância percorrida em uma determinada quantidade de dias, a existência de regularidades na sequência formada pelas distâncias ou como eles fariam para descobrir quantos metros a formiga teria percorrido em qualquer quantidade de dias.

Segundo a autora, de início já houve um estranhamento por parte dos alunos quanto ao tipo de tarefa, pois não identificaram de maneira imediata as operações que deveriam realizar para concluí-la. Esse momento os incentivou a registrar suas ideias e estratégias de resolução, além de mediar e estimular a problematização com o intuito de levá-los a refletir, investigar e verificar suas hipóteses e não se prenderem a um resultado final.

De acordo com Frare (2020), alguns alunos logo identificaram que o problema se tratava de uma PA de razão 2 e aplicaram a fórmula para determinar a distância solicitada na tarefa. Outros grupos resolveram de maneiras diferentes, escrevendo a sequência até encontrar o termo desejado, usando razão e proporção e identificando a quantidade de metros percorridos por dia e multiplicando pela quantidade de dias. Como a maioria dos estudantes apenas descreviam os procedimentos a serem feitos, foram desafiados a criar uma expressão matemática para representar a situação problema. Dessa forma, foram levados a desenvolver o pensamento algébrico e diversas leis de formação foram criadas, estas, associadas à PA, equação e função.

Na segunda tarefa, havia imagens representando muros com pontas. Este muro era representado por cubos posicionados em linha reta e acima da linha havia as pontas, ou seja, cubos posicionados de maneira alternada. As perguntas as quais os alunos teriam que responder também eram problematizadoras e possíveis de associar à uma PA, pois a quantidade de cubos necessários para aumentar o muro horizontalmente seguia um padrão. Segundo Frare (2020), diversas estratégias de resolução foram apresentadas, dentre elas, desenhos representando a sequência, tabelas relacionando o número da figura com a quantidade de cubos, pontas e diferentes leis de formação.

Ao término das tarefas foi realizado um momento de socialização, a fim de verificar as validades das generalizações encontradas e fazer com que os alunos notassem a equivalência das mesmas. Por meio dos diálogos entre a pesquisadora e a turma é possível notar a mediação realizada para que os alunos chegassem em uma lei de formação equivalente fazendo manipulações algébricas para reagrupar termos, mas sem interferir nas respostas dos mesmos. Para Frare (2020), o momento de socialização é essencial, pois possibilita ao estudante fazer reflexões antes não pensadas e ajudar também àqueles que não conseguiram atingir o objetivo.

As vivências apresentadas nesta seção, mostram o quão é possível trabalhar o desenvolvimento do pensamento algébrico em qualquer etapa de ensino por meio de tarefas problematizadoras de acordo com seu nível de conhecimento, que levem o aluno a pensar e desenvolver diferentes estratégias, não se resumindo apenas a operação de algoritmos. Deste modo, a resolução de problemas pode ser tornar uma boa aliada como metodologia de ensino, para contribuir com a aprendizagem da álgebra.

3.3 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Segundo Zuffi e Onuchic (2007), um problema é qualquer situação que possa interessar ao aluno, que o estimule a pensar, seja desafiador e que não tenha um método memorizado de resolução. Van de Walle (2009) contribui com esta ideia quando apresenta algumas características de um problema voltado para a matemática:

- O problema deve começar onde os alunos estão. O projeto ou seleção de tarefas deve levar em consideração a compreensão atual dos estudantes. Eles devem ter as ideias apropriadas para se envolver e resolver o problema e, ainda assim, considerá-lo desafiante e interessante. Os estudantes devem considerar a tarefa algo que faça sentido.
- O aspecto problemático ou envolvente do problema deve estar relacionado à matemática que os alunos vão aprender. Ao resolver o problema ou fazer a atividade, os alunos devem estar preocupados principalmente em dar significado à matemática envolvida e, assim, desenvolver sua compreensão sobre essas ideias. Embora seja aceitável e até mesmo desejável ter contextos para os problemas que os tornem interessantes, esses aspectos não devem ser o foco da atividade. Nem as atividades “não matemáticas” (cortar e colar, colorir gráficos, etc.) devem distrair os estudantes da matemática envolvida.
- A aprendizagem matemática deve requerer justificativas e explicações para as respostas e os métodos. Os estudantes devem compreender que a responsabilidade para determinar se as respostas estão corretas e por que elas estão corretas também é deles. A justificativa deve ser uma parte integrante de suas soluções (p. 57-58, grifos do autor).

Para Polya (1995), é necessário passar por quatro fases para se encontrar a solução de um problema, são elas: compreensão, estabelecimento de um plano, execução e retrospecto.

Na compreensão do problema, o aluno precisa entender o enunciado, identificar os principais dados e a incógnita. Para o estabelecimento de um plano é necessário pensar em cálculos e teoremas estudados que podem ser utilizados na resolução e ainda, em problemas semelhantes que já tenham sido resolvidos. Em seguida, executar o plano traçado verificando cada passo para atingir o objetivo, ao final, é de extrema importância fazer o retrospecto de todo o caminho percorrido, não apenas para verificar a solução e a existência de erros, mas também para consolidar o conhecimento e aperfeiçoar sua habilidade de resolver problemas (POLYA, 1995).

O aluno pode encontrar diversas maneiras de solucionar o problema, não se prendendo a regras e a um método ensinado pelo professor. Assim, entende-se que o ensino nesta perspectiva está centrado no aluno, pois ele busca de sua própria maneira, construir as estratégias de resolução baseado em conhecimentos já existentes, atribuindo significado a todo o processo e desenvolvendo a convicção de que a matemática faz sentido.

Para que a metodologia apresentada cumpra com o seu papel, é importante que o professor planeje e selecione os problemas de acordo com o conhecimento dos seus alunos e as necessidades curriculares. Também é importante que promova um ambiente dinâmico, passível de discussões e reflexões, para que a aprendizagem seja compartilhada. Zuffi e Onuchic (2007) trazem alguns aspectos a serem considerados pelo professor ao utilizar os problemas na sala de aula:

Compreender os dados de um problema, tomar decisões para resolvê-lo, estabelecer relações, saber comunicar resultados e ser capaz de usar técnicas conhecidas são aspectos que devem ser estimulados em um processo de aprendizagem através da resolução de problemas. No decorrer desse processo, a formalização, o simbolismo e as técnicas precisas são introduzidas depois da resolução trabalhada, dando-se liberdade aos alunos, evitando-se direcioná-los para "o que pensar" ou "o que fazer", conduzindo-os somente em casos de maiores dificuldades, ou seja, quando eles não sabem como agir (p. 83, grifos das autoras).

Ainda sob a ótica da resolução de problemas, Van de Walle (2009) propõe uma dinâmica de três fases a fim de organizar os objetivos a serem alcançados pelos alunos e as ações a serem realizadas pelo professor. A dinâmica é organizada em: antes, durante e depois.

Na primeira fase é a introdução, o professor se certifica de que os alunos se familiarizaram com o problema, se possuem os conhecimentos prévios necessários e esclarece suas expectativas que vão além de uma resposta. Na segunda fase, durante o desenvolvimento das atividades, os alunos desenvolvem suas próprias estratégias de resolução enquanto o professor ouvi as indagações e ideias dos alunos e interage com perguntas, dicas ou sugestões cuidadosas que contribuam na construção de conceitos mais elaborados, além de estimular a verificação dos resultados encontrados. Na terceira fase, depois da atividade, professor e alunos debatem sobre os resultados encontrados e os caminhos utilizados, a fim de validar os conceitos matemáticos. Esta é uma fase muito importante para a aprendizagem, pois faz com que os alunos reflitam individual e coletivamente sobre o que investigaram (VAN DE WALLE, 2009). Assim, para compreender os conceitos de álgebra, essa metodologia se mostra muito eficiente.

Para Van de Walle (2009), é necessário ainda, que haja a justificativa na resolução dos problemas, pois é com a argumentação e verificação das conjecturas estabelecidas pelos alunos, que o professor conseguirá compreender e investigar os diversos modos de pensar. Assim, em virtude do que foi discutido acima, a proposta de ensino a partir da resolução de problemas pode se tornar potencializadora para o ensino-aprendizagem, bem como, para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Van de Walle (2009) apresenta uma sequência de atividades que pode ser aplicada com alunos em diversos níveis de ensino visando explorar o desenvolvimento do pensamento algébrico. Dentre as quais, sentenças abertas para investigar o conceito de igualdade, pensamento relacional em relações numéricas nos dois lados da igualdade, uso das incógnitas e variáveis, e resolução de equações do 1º grau utilizando o esquema da balança com dois pratos em equilíbrio.

3.4 GENERALIZAÇÕES OPERATÓRIAS

Autores como Carpenter, Franke e Levi (2003), Ponte, Branco e Matos (2009) e Van de Walle (2009) compartilham do pensamento de que o sinal de igualdade é importante tanto para a aprendizagem da aritmética, quanto da álgebra, mas que seu significado é mal compreendido.

Carpenter, Franke e Levi (2003) afirmam que entender o significado da igualdade é o primeiro passo para a realização de generalizações operatórias, bem como, conseguir

justificar afirmações matemáticas por meio da discussão entre contrastes de ideias. Segundo Van de Walle (2009), algumas situações levam os estudantes a acreditar que tal sinal apenas separa o problema da resposta, onde geralmente opera-se no lado esquerdo e dá-se a resposta no lado direito. Um exemplo está no uso da calculadora, onde a tecla “=” tem apenas a função de fornecer um resultado. Este pensamento impede que os alunos se apropriem de propriedades numéricas e operatórias que são importantes para a aprendizagem da álgebra.

Para Ponte, Branco e Matos (2009), é importante que ao longo dos anos os alunos reconheçam a igualdade saindo do modo habitual, ou seja, da forma $2 + 3 = 5$ por exemplo, para $5 = 2 + 3$, $1 + 4 = 5$, $3 + 2 = 4 + 1$. Deste modo, será possível observar igualdades numéricas e decomposição de números que podem evoluir para situações análogas com subtração, multiplicação e divisão.

Ponte, Branco e Matos (2009) atribuem três significados ao sinal de igualdade: operacional, equivalente e relacional. O primeiro indica uma operação a ser realizada para encontrar um resultado, surgindo em situações aritméticas, como $3 + 6 = 9$ ou na simplificação de expressões algébricas, $2a + 1 - a + 3 = a + 4$. O segundo, pode ser expresso na forma de números e expressões numéricas, como $1 + 6 = 5 + 2$, ou algébricas $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ (válido para qualquer valor de x) e $2b + 1 = 13$ (equivalente para um determinado valor de b). Outro exemplo de equivalência se faz presente na figura abaixo.

Figura 1 - Balança representando a ideia de equivalência



Fonte: Van de Walle (2009).

Os quadrados em branco representam uma incógnita, tendo em vista que podem ser substituídos por outros símbolos, a depender do nível dos alunos. Com este tipo de atividade os estudantes podem, por tentativa e erro, encontrar um só valor que mantenha o equilíbrio da balança, ou seja, que satisfaça a igualdade.

O terceiro e último significado permite fazer uma relação funcional, que pode ser expressa pela relação de dependência em equações com duas variáveis, como $y = 3x + 5$, ou ainda em expressões do tipo $7 + __ = 8 + 1$. Se tratando de situações como neste último exemplo, Van de Walle (2009) caracteriza como pensamento relacional, uma vez o aluno

pode observar as relações numéricas nos dois lados da igualdade e não precisa necessariamente efetuar um cálculo para chegar ao resultado. Esse mesmo pensamento pode ser utilizado em situações envolvendo variáveis, não se limitando apenas aos números. Para o autor, “[...] o pensamento relacional vai além do cálculo e em vez disso se concentra em como uma operação ou série de operações se relaciona com as outras” (VAN DE WALLE, 2009, p. 289-290).

Segundo Van de Walle (2009), o pensamento relacional também pode ser utilizado na resolução de equações com balanças como na Figura 2. Cada forma geométrica representa uma incógnita e o professor pode elaborar diversas situações que façam com que os alunos comparem e encontrem valores que mantenham o equilíbrio da balança.

Figura 2 - Equação com balança



Fonte: Van de Walle (2009).

Como exemplo, atribuir ao cilindro o valor de 12 gramas e questionar a massa das esferas. O aluno pode resolver o problema mentalmente, sem fazer uso dos procedimentos formais da álgebra, considerando que as esferas juntas também devem pesar 12 gramas, visto que a igualdade deve ser mantida. Além da proposta de resolução, o professor pode ainda estimular a passagem da linguagem corrente para a simbolização algébrica, solicitando uma representação para esse problema (a depender do nível da turma), resultando na equação $2x = 12$. Pois, é importante que o aluno não só consiga determinar resultados, como também aprenda a reconhecer e representar situações por meio da álgebra.

4 METODOLOGIA

Nesta seção apresentamos a metodologia que buscou atender ao objetivo principal desta pesquisa: analisar indícios do desenvolvimento do pensamento algébrico de um grupo de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental a partir da resolução de problemas relacionados a equações com balanças.

Iniciamos pelos aspectos referentes à natureza da pesquisa, em seguida, trazemos algumas informações sobre o campo e seus participantes, bem como, os fatores sociais e culturais que podem influenciar nos resultados. Na sequência, relatamos os procedimentos metodológicos que deram início e desenvolvimento à investigação e, por fim, apresentamos os seis problemas propostos que exploram o significado da igualdade e pensamento relacional utilizados visando atender o objetivo principal desta pesquisa.

4.1 NATUREZA DA PESQUISA

Considerando a importância da construção e desenvolvimento do pensamento algébrico, este trabalho é de natureza básica e possui uma abordagem qualitativa, visto que nosso objetivo foi analisar de forma reflexiva os dados coletados. Segundo Zanella (2006, p. 99), esse método “[...] não emprega a teoria estatística para medir ou enumerar os fatos estudados. Preocupa-se em conhecer a realidade segundo a perspectiva dos sujeitos participantes da pesquisa, sem medir ou utilizar elementos estatísticos para análise dos dados”. Para Gerhardt e Silveira (2009, p. 32) “[...] preocupa-se, portanto, com aspectos da realidade que não podem ser quantificados [...]”. Segundo Minayo, (1993, p. 21). “[...] trabalha com o universo dos significados, dos motivos, das aspirações, das crenças, dos valores e das atitudes”.

Nesse sentido, o presente estudo caracteriza-se metodologicamente como exploratório, pois “[...] tem como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses. [...] tem como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições” (GIL, 2002, p. 41).

De acordo com o exposto, os dados da pesquisa foram produzidos por meio de um questionário com tarefas envolvendo equações com balanças, seguindo uma abordagem de resolução de problemas, que foram significativas para analisar a construção do

desenvolvimento do pensamento algébrico considerando o ambiente de ensino proposto por Van de Walle (2009).

4.2 CONTEXTO DA PESQUISA

A escola escolhida para o desenvolvimento deste trabalho foi uma instituição da rede privada da cidade de Lajedo – PE. Inicialmente, como etapas de ensino, eram ofertados na escola (campo da pesquisa) apenas a Educação Infantil e Ensino Fundamental Anos Iniciais. O Ensino Fundamental Anos Finais foi implementado em 2017 e atualmente, ainda conta com apenas uma sala para cada turma (6º, 7º, 8º e 9º anos) com uma média de 9 alunos cada uma.

Os participantes da pesquisa foram estudantes do 7º ano, com idades entre 11 e 13 anos, formando um quantitativo de 10 alunos, 3 meninos e 7 meninas. Foram organizados em cinco duplas, pois consideramos que as discussões entre si são muito proveitosas e podem contribuir para a nossa investigação. Para preservar suas identidades, nomeamos as cinco duplas como: D1, D2, D3, D4 e D5.

Como professora/pesquisadora², tenho³ consciência da facilidade e das dificuldades que os alunos têm na disciplina de Matemática e do rendimento mediante os conceitos trabalhados. Considero uma turma participativa e quase sempre autônoma no desenvolvimento de atividades em sala de aula, um fator que contribuiu para a escolha como participantes da pesquisa.

No período em que a pesquisa foi realizada os alunos estavam aprendendo sobre as operações com números racionais, conteúdo que não apresentavam muitas dificuldades, portanto, ainda não tinham tido o contato com os procedimentos formais da álgebra, outro fator determinante para a escolha da referida turma.

4.3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A pesquisa foi realizada durante quatro aulas de matemática distribuídas entre os dias 27 e 28 de junho de 2022, com duração de 50 minutos cada. Os dados foram coletados por

² Usaremos este termo quando a pesquisadora também desempenhar de forma concomitante a função de professora.

³ Em alguns momentos apresentamos o texto na primeira pessoa do singular, por se tratar de relatos específicos da aluna do curso de Licenciatura em Matemática que desenvolveu a pesquisa de campo.

meio dos registros escritos nos questionários, gravações de áudio e diário de campo. Para ter acesso às discussões realizadas pelas duplas, foi solicitado aos alunos para que levassem seus aparelhos celulares para utilizarem a ferramenta de gravação de áudio.

Conforme mencionado anteriormente, a dinâmica do ambiente de ensino de Van de Walle (2009) foi utilizada e o Quadro 1 apresenta a organização das etapas realizadas e a descrição dos problemas.

Quadro 1 – Etapas de realização da dinâmica

Etapas	Fases	Descrição
1º	Antes	Apresentação de forma coletiva da sequência de problemas.
2º	Durante	Resolução dos problemas 1 e 2.
3º	Depois	Socialização dos problemas 1 e 2.
4º	Durante	Resolução do problema 3.
5º	Durante	Resolução dos problemas 4 e 5.
6º	Depois	Socialização dos problemas 4 e 5.
7º	Durante	Resolução do problema 6.

Fonte: As autoras (2022).

A fase do antes foi realizada apenas no início da sequência de tarefas com algumas orientações sobre a organização da sala e o trabalho a ser realizado. Posteriormente, na “fase do durante” foi entregue o Problema 1 e conforme as duplas finalizavam, o Problema 2 foi sendo distribuído. Ao final dessa etapa, realizamos a socialização dos dois problemas retomando no quadro as respostas obtidas e abrindo espaço para que os alunos discutissem e tentassem chegar a um resultado geral.

Novamente na “fase do durante”, iniciou-se a resolução do Problema 3 que foi entregue junto com as figuras representando os sólidos geométricos já recortados em um envelope para não haver atrasos, no entanto, não houve tempo para a socialização. Mas como os alunos estavam gravando os diálogos, não deixamos de ficar a par das ideias e discussões que os levaram às respectivas criações.

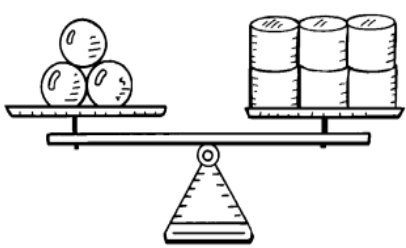
No dia seguinte, também na “fase do durante”, foi entregue o Problema 4 e conforme finalizavam, o Problema 5 já foi sendo resolvido. Ao término dessa fase, iniciamos a socialização dos dois problemas, semelhante a anterior. Concluindo as resoluções, as duplas resolveram o Problema 6 que também não houve tempo para socialização.

4.4 OS PROBLEMAS

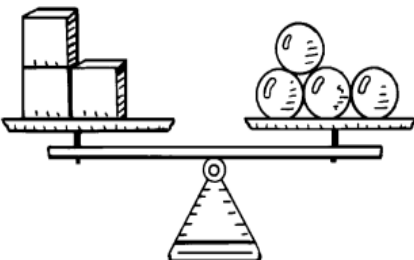
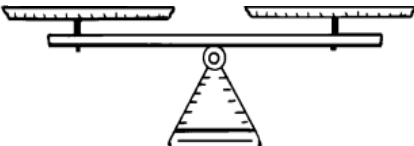
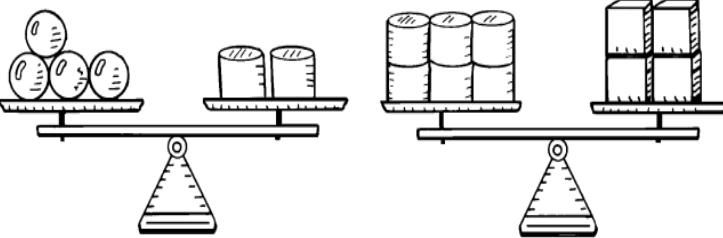
Com o intuito de gerar discussões enriquecedoras e contribuir para a construção do pensamento algébrico, montamos uma sequência com seis problemas (Quadro 2) relacionados a equações que envolvem a noção de igualdade, pensamento relacional e generalizações operatórias, com balanças equilibradas. Dois deles tratam da elaboração de problemas semelhantes aos resolvidos, com o objetivo de analisar a criatividade dos alunos, bem como o entendimento dos conceitos trabalhados nos problemas anteriores.

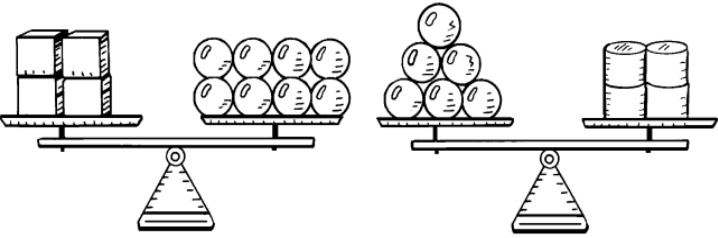
As tarefas foram elaboradas e adaptadas a partir das atividades de Greenes, Findell e Cavanagh (2008), seguindo uma sequência com relação ao nível de dificuldade. Todos os problemas contemplam a relação de equilíbrio entre pratos de balanças que contêm sólidos geométricos representando as variáveis, pois como traz Usiskin (1995), essas formas são equivalentes ao “x” comumente usados nas equações.

Quadro 2 – Problemas e objetivos

Problemas	Objetivos
Problema 1 Considerando que os objetos de mesma forma na figura abaixo têm a mesma massa, responda:  a) Uma esfera equilibra quantos cilindros? Explique como chegou no resultado. b) Quantos cilindros são necessários para equilibrar 6 esferas? Como você descobriu? c) Se um cilindro pesa 5 gramas, qual é o peso⁴ de uma esfera? Justifique a sua resposta.	- Explorar o conceito de igualdade; - Analisar a proporcionalidade dos objetos; - Relacionar a massa dos objetos de um prato para o outro; - Descobrir o valor da massa de um objeto a partir do valor de outro. Observação: O problema 2 é semelhante ao 1, mas no primeiro os alunos se depararam apenas com números inteiros, enquanto no segundo, pertencente ao campo dos números racionais.
Problema 2	

⁴ Reconhecemos que o termo “peso” e “massa” representam grandezas diferentes, no entanto, optamos por não entrar nessa discussão, uma vez que o livro ao qual nos baseamos para elaboração dos problemas utiliza “peso” e é um termo comumente usado pelos alunos.

Considerando que os objetos de mesma forma na figura abaixo têm a mesma massa, responda:  a) Se você adicionar mais 3 cubos no primeiro prato, quantas esferas precisará adicionar para que a balança continue em equilíbrio? Explique como chegou no resultado. b) Se uma esfera pesa 9 gramas, qual é o peso de um cubo? Justifique sua resposta. c) Um cubo equivale a quantas esferas? Como você descobriu?	
Problema 3 Crie um problema semelhante aos anteriores colando os objetos nos pratos da balança. Em seguida, elabore duas perguntas. 	- Desenvolver o conceito de proporcionalidade; - Desenvolver o conceito de variável; - Criar estratégias para relacionar os objetos; - Determinar o equilíbrio entre os pratos a partir da disposição escolhida para os objetos.
Problema 4 Considerando que os objetos de mesma forma na figura abaixo têm a mesma massa, responda:  a) Um cilindro equilibra quantas esferas? Explique como você descobriu. b) Quantas esferas são necessárias para equilibrar 4 cubos? Justifique a sua resposta.	- Explorar o conceito de igualdade em cada balança; - Analisar a proporcionalidade dos objetos entre os pratos e entre as balanças; - Relacionar as massas de objetos em balanças diferentes; - Descobrir o valor da massa de um objeto a partir de um valor dado em outra balança.

c) Se 1 cilindro pesa 12 gramas, qual é o peso de 1 esfera? Como você descobriu?	Observação: O problema 5 é bem semelhante ao 4, mas no quarto os alunos se depararam apenas com números inteiros, enquanto que no quinto, com os números racionais.
Problema 5 Considerando que os objetos de mesma forma na figura abaixo têm a mesma massa, responda:  a) Um cilindro equilibra quantas esferas? Como você descobriu? b) Quatro cilindros equilibram quantos cubos? Explique como você chegou ao resultado. c) Se 1 cilindro pesa 9 gramas, qual é o peso de 1 cubo? Como você descobriu?	
Problema 6 Crie um problema semelhante aos anteriores colando os objetos nos pratos da balança. Em seguida, elabore duas perguntas. 	- Desenvolver o conceito de proporcionalidade; - Desenvolver o conceito de variável; - Criar estratégias para relacionar os objetos; - Determinar o equilíbrio entre os pratos das duas balanças a partir da disposição escolhida para os objetos.

Fonte: As autoras (2022).

Nas folhas com impressas com os problemas foram deixados espaços em branco para que as duplas de alunos explicitassem o raciocínio e/ou caminho que os levaram a chegar em uma resposta.

A seguir, apresentamos a análise e discussão dos dados.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Nesta seção, apresentamos a análise dos resultados de nossa investigação organizada em blocos. Nos quais apresentamos os registros e as discussões de acordo com as fases propostas por Van de Walle (2009). Como já citado, os dados analisados foram produzidos por meio de um estudo de caso realizado pela professora/pesquisadora durante aulas de matemática. Para haver uma melhor compreensão, organizamos a análise em cinco blocos e elaboramos quadros no segundo e no quarto para registrar as respostas dos alunos, bem como cada respectiva justificativa. As respostas iguais e justificativas semelhantes foram colocadas apenas uma vez.

5.1 BLOCO 1: FASE DO ANTES

Trazemos no quadro abaixo o registro do diário de campo da professora/pesquisadora durante a primeira fase da dinâmica.

Quadro 3 – Fase do antes

Pedi que os alunos escolhessem suas próprias duplas para que não houvesse nenhum tipo de atrito que viesse atrapalhar o desenvolvimento da atividade.

Após a organização da sala, expliquei que iriam resolver uma sequência de problemas envolvendo conceitos que já tinham estudado no ano anterior e que em todos os problemas precisaria haver a justificativa do resultado encontrado. Rapidamente surgiu a pergunta: “E se eu fizer ‘de cabeça’?”, respondi que não havia problema, contanto que explicasse o pensamento utilizado para chegar à resposta.

Como há sólidos geométricos nos problemas, para não haver dúvidas sobre as nomenclaturas, questionei sobre o que seriam esferas, cubos e cilindros. Prontamente, começaram a fazer gestos e citar exemplos como bola, cubo mágico e lata de refrigerante, o que deixou claro que não havia problemas de compreensão nesse aspecto. Em seguida, o Problema 1 foi entregue para cada dupla.

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Essa fase foi importante para a compreensão das atividades a serem desenvolvidas e para o esclarecimento de possíveis questionamentos que poderiam vir a ocorrer. Dessa forma, serviu como um preparo para que os alunos pudessem ser mais autônomos no desenvolvimento das fases posteriores.

5.2 BLOCO 2: PROBLEMAS 1 E 2

Apresentamos no quadro abaixo os problemas, respostas e respectivas justificativas referentes aos problemas 1 e 2 na fase do durante.

Quadro 4 – Respostas e justificativas para os Problemas 1 e 2

Problemas	Respostas	Justificativas
P1 - a) Uma esfera equilibra quantos cilindros? Explique como chegou no resultado.	2 cilindros (Todas as duplas)	- (D1 e D2) $6 \div 3 = 2$; - (D3 e D4) Pois 2 cilindros são iguais a 1 esfera; - (D5) Dividindo 3 esferas por 6 cilindros, cada uma fica com 2.
P1 - b) Quantos cilindros são necessários para equilibrar 6 esferas? Como você descobriu?	12 cilindros (Todas as duplas)	- (D1, D4 e D5) Porque para cada esfera são 2 cilindros, e 6×2 é igual a 12; - (D2 e D3) Pois se multiplicarmos a balança por 2, as esferas se transformariam em 6 e consequentemente os cilindros seriam 12.
P1 - c) Se um cilindro pesa 5 gramas, qual é o peso de uma esfera? Justifique a sua resposta.	10 gramas (Quatro duplas)	- (D1, D2, D4 e D5) Porque a esfera é o dobro de um cilindro, se um cilindro corresponde a 5g, multiplicado por 2 é igual a 10g.
	2,5 gramas (Uma dupla)	- (D3) Dividimos o peso do cilindro por 2, chegando no resultado 2,5.
P2 - a) Se você adicionar mais 3 cubos no primeiro prato, quantas esferas precisará adicionar para que a balança continue em equilíbrio? Explique como chegou no resultado.	4 esferas (Quatro duplas)	- (D3 e D4) Fizemos as esferas e os cubos vezes 2, assim, as esferas se tornam 8 e os cubos 6, então retirei o que já estava e ficou 3 cubos e 4 esferas; - (D5) Somando as esferas dá 36, dividindo dá 12, adicionando mais 3 cubos, dá 72 e adicionando mais 4 esferas dá 72; - (D2) Porque se o total pesa 12 e adicionarmos o dobro, ficaria 24 nas duas partes.

	8 esferas (Uma dupla)	- (D1) Porque $3 \times 2 = 6$ cubos e $4 \times 2 = 8$ esferas, pois se adicionarmos 3 cubos seria o dobro de 3, e isso se aplica às esferas, sendo o resultado final 8.
P2 – b) Se uma esfera pesa 9 gramas, qual é o peso de um cubo? Justifique sua resposta.	12 gramas (Todas as duplas)	- (D1, D2, D3 e D5) Porque se uma esfera pesa 9, as outras também pesarão 9 sendo o resultado 36. Cada cubo pesa 12, pois $12 \times 3 = 36$; - (D4) Porque 4×9 é igual 36 e $36 \div 3$ é igual a 12. Ainda, $36 - 27$ é igual a 9 e dividindo para 3 cubos é 3, depois somamos 9 e 3 que é 12.
P2 - c) Um cubo equivale a quantas esferas? Como você descobriu?	Aproximadamente 1,3 esferas (Três duplas)	- (D1 e D3) Porque $12 \div 9 = 1,333...$; - (D2) Corresponde a 1 mais 0,333..., pois $1 \div 3 = 0,333$ e $0,333 + 1 = 1,333... \times 3 = 4$.
	1,3 esferas (Duas duplas)	- (D4 e D5) Porque colocamos 1 parte inteira e 1 parte de 3. Deu 3 porque dividimos 9g por 3 cubos.

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Para analisar cada alternativa, optamos por não seguir a ordem de resolução de cada problema, pois dada a semelhança entre algumas questões, consideramos analisá-las próximas umas das outras de modo a facilitar a compreensão do leitor.

Na alternativa *a* do Problema 1, notamos que a justificativa da D5 não está de acordo com a discussão da dupla na fase do durante.

Quadro 5 - Diálogo da dupla D5: alternativa *a* do Problema 1

D5⁵.1⁶: — É dois, eu acho.
D5.2: — Por que é dois?
D5.1: — Porque essa aqui [esfera] fica com dois [cilindros], essa aqui com dois e essa aqui com dois.
D5.2: É mesmo, entendi. Mas temos que dizer como chegamos ao resultado, como explicamos?
D5.1: Foi dividindo, só não sei como colocar.
D5.2: Dividimos as três esferas pelos seis cilindros e cada uma ficou com dois.

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

⁵ Identificação da dupla.

⁶ Identificação do participante.

Ao iniciar a resolução, a dupla rapidamente chegou na solução do problema agrupando os objetos na figura, mas apresentou dificuldade para formalizar o pensamento por meio de uma operação, então pensou na divisão, mas inverteu a ordem dos valores sem perceber que o resultado numérico seria diferente. Esse fato não indica incompreensão quanto a equivalência entre os objetos, mas do procedimento aritmético. Talvez pensem, assim como é mencionado na multiplicação e divisão, que a ordem de divisor e dividendo não altere o resultado.

A dupla D2, além de usar a divisão para justificar sua resposta, fez um registro para ilustrar seu pensamento, mostrando que dois cilindros equivalem a uma esfera (Figura 3).

Figura 3 - Registro da dupla D2: alternativa *b* do Problema 1

$$\begin{array}{l} 1 \text{ esfera} \times 2 = 2 \text{ esferas} \\ 2 \text{ cilindros} = 1 \text{ esfera} \\ 1 \text{ cilindro} : 2 = 0,5 \text{ esfera} \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Para resolver o item *c* do Problema 2, os alunos utilizaram uma estratégia semelhante à alternativa citada anteriormente, a operação de divisão. Nesse item, foi utilizado o cálculo, pois a relação de equilíbrio não estava tão perceptível quanto no primeiro problema. Por se tratar de um resultado decimal, a mera observação não foi suficiente para algumas duplas.

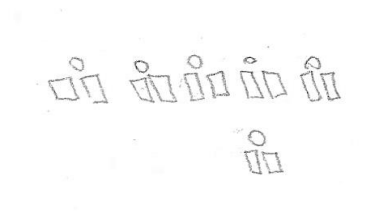
A dupla D2 utilizou a estratégia de agrupar as figuras, distribuindo uma esfera para cada cubo, e como sobrou uma, dividiu para os três cubos, obtendo como resultado 0,333..., no fim, somou com a esfera inteira. Além de fazer o cálculo e chegar à resposta adequada, a dupla ainda realizou uma verificação - a fase do retrospecto, como traz Polya (1995) - ao multiplicar 1,333... pela quantidade de cubos, mostrando que o resultado seriam as 4 esferas presentes no problema.

Ainda sobre a resolução do item *c* do Problema 2, observamos que duas duplas utilizaram a informação do peso da esfera presente na alternativa *b* de forma diferente das demais. As duplas D4 e D5, deram a seguinte resposta “Porque colocamos 1 parte inteira e 1 parte de 3. Deu 3 porque dividimos 9g por 3 cubos”. Entendemos que esse resultado não é uma aproximação da dízima periódica “1,333...” como apontado pelas outras duplas, mas um equívoco, pois atribuiu ao número 1 a quantidade de esferas e ao 0,3 a quantidade de gramas proporcional referente a parte da esfera. Isso nos faz refletir o quão importante é a justificativa

na solução de um problema e consequentemente, para a aprendizagem matemática, como cita Van de Walle (2009), sem compreender o caminho percorrido até chegar à resposta, poderíamos tê-la interpretado como uma aproximação para a dízima periódica.

Pelas justificativas da alternativa *b* do Problema 1, inferimos que todas as duplas compreenderam o conceito de manter o equilíbrio da balança quando multiplicaram ambos os pratos pelo mesmo valor. O que se relaciona com a resolução de uma equação com os métodos formais da álgebra, realizando operações nos dois lados da igualdade. A dupla D4 também utilizou a relação encontrada no item *a* para resolver o item *b* e fizeram o seguinte registro.

Figura 4 – Registro da dupla D4: alternativa *b* do Problema 1



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

O conceito de manter o equilíbrio da balança ao realizar as multiplicações observado no item anterior, também está presente nas resoluções da alternativa *a* do Problema 2, mas a questão não se refere ao total de figuras no prato, e sim, à quantidade que precisa ser adicionada para manter o equilíbrio da balança. Nesse ponto, a dupla D1 se equivocou e registrou como resultado o total de esferas, mas pela justificativa apresentada não houve nenhuma dificuldade de interpretação do problema, pois o fato foi esclarecido durante a socialização, onde relataram falta de atenção no momento de escrever o resultado final.

Ainda com relação ao item *a* do Problema 2, a dupla D5 utilizou a informação do peso da esfera dado na alternativa *b* e conseguiu encontrar a resposta adequada, já a dupla D2 estipulou um valor para representar a massa dos pratos (Quadro 6).

Quadro 6 – Diálogo da dupla D2: alternativa *a* do Problema 2

- | |
|---|
| <p>D2.1: — E se a gente pegar um valor que dê para dividir os dois? Vamos tentar 12.</p> <p>D2.2: — É, 12 é o total.</p> <p>D2.1: — Então 12 dividido para 3 é 4, cada cubo vale 4 e 12 dividido para 4 é 3, cada esfera vale 3. A gente precisa adicionar mais 3 cubos.</p> <p>D2.2: — Então vai ficar 24, não é?</p> <p>D2.1: — Então vamos precisar de mais 4 esferas, para dar 24 também.</p> |
|---|

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Para as duplas, ainda há grande necessidade de atribuir valores às incógnitas, pois como as manipulações algébricas não lhes foram apresentadas, tendem a resolver grande parte dos problemas utilizando o pensamento aritmético e chegar a um resultado numérico, como traz Kieran (1992, apud, ALMEIDA; CÂMARA, 2014).

O diálogo apresentado no Quadro 6, indica que a dupla pensou no número 12 como um número divisível pela quantidade de cubos e de esferas simultaneamente, mas sabia que outros valores também poderiam ser utilizados para chegar ao resultado. Isso mostra que o conceito de variável foi utilizado, mesmo sem tê-lo visto formalmente. Esse fato nos indica que o pensamento algébrico se faz presente nas estratégias utilizados pela dupla, pois ao substituir uma variável por um valor arbitrário, encontrou o valor de outra pela relação de igualdade.

Na resolução da alternativa *c* do Problema 1, apenas a dupla D3 respondeu de forma diferente das demais. Ao invés de utilizar a relação obtida no item *a*, repetiu o processo de dividir o conteúdo do segundo prato pelo primeiro, sem fazer a interpretação do problema. Quando questionada sobre isso durante a socialização, relatou que tinha invertido, porque na verdade, as esferas pesam mais que os cilindros, visto que estão em menor quantidade. Isso evidencia ainda mais a importância da realização da fase do retrospecto (POLYA, 1995).

Semelhante a esse item, temos a alternativa *b* do Problema 2, onde todos os alunos chegaram ao resultado adequado. A dupla D4 trouxe duas justificativas diferentes para explicar seu resultado, a primeira, como as demais duplas, calculou o valor total em cada prato, e dividiu-o pela quantidade de cubos, o que pela linguagem algébrica, poderíamos responder utilizando $3x = 4 \times 9$. Então, notamos que as duplas fizeram uso das mesmas estratégias comumente usadas na resolução de equações do 1º grau, mesmo sem nunca terem sido apresentados, assim como traz Van de Walle (2009). Na segunda justificativa da dupla D4, descobriu o valor total no prato das esferas, retirou o equivalente a três, o que corresponde a uma esfera para cada cubo, assim cada cubo já corresponderia a 9g. A esfera que sobrou foi dividida em 3 partes, uma parte para cada cubo, consequentemente, 3g para cada cubo que já estava com 9g, totalizando 12g. Dessa forma, a dupla mostrou que não há um método memorizado de resolução, o que é uma das características de um problema, segundo Zuffi e Onuchic (2007).

Nas resoluções e estratégias apresentadas, observamos que o pensamento algébrico se faz presente na fase de desenvolvimento dos problemas entre as duplas. Os alunos realizaram conjecturas que indicam o reconhecimento de incógnitas e variáveis por meio dos

sólidos geométricos utilizados nos problemas, que segundo Usiskin (1995), os objetos são equivalentes às letras. Ademais, percebemos que houve a compreensão do significado da igualdade pois por meio do pensamento relacional realizaram procedimentos que mantiveram o equilíbrio da balança.

5.2.1 Socialização dos Problemas 1 e 2

Seguindo na dinâmica das três fases de Van de Walle (2009), damos continuidade a este bloco trazendo algumas considerações sobre a última fase, a “fase do depois”. Após todas as turmas finalizarem as resoluções, as respostas foram escritas no quadro para que pudéssemos discuti-las a fim de chegarmos a uma resposta/conclusão coletiva. Durante a discussão do Problema 1 algumas duplas apresentaram suas justificativas para as respostas, algumas falas pertinentes surgiram referentes a alternativa *b*, referentes ao significado da igualdade através do equilíbrio das balanças.

Quadro 7 – Diálogo da socialização: alternativa *b* do Problema 1

Professora/pesquisadora: — Por que vocês acham que são 12 cilindros? D3: — É só fazer vezes 2. Professora/pesquisadora: — Por que multiplicar por 2? D2: — Porque vão ficar 6 esferas, que é o dobro de 3, consequentemente, o outro lado também vai dobrar, então vai dar 12. Professora/pesquisadora: — E por que tem que dobrar o outro lado também? D3: — Se não fica um lado maior que o outro. D1: — Ia ficar desigual e não pode.

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Na socialização do Problema 2, houve alguns questionamentos sobre o porquê de todos os alunos terem colocado a mesma resposta na alternativa *c*, mas o seu significado não condiz com o resultado adequado ($1,333...$ ou $\cong 1,3$). Então, começaram a perguntar se mesmo colocando o resultado final igual ao das outras duplas, ainda estaria errado. Diante disso, notamos que os alunos se preocupam muito com o resultado final, se está certo ou errado, independente do caminho percorrido para chegar a resposta. Esse é um aspecto que precisa ser trabalhado em sala de aula, pois sabemos que todo o processo é fundamental para a aprendizagem, não apenas o resultado final.

O momento de socialização foi importante para estimular a participação coletiva e juntos discutirem caminhos, estratégias e conjecturas para a resolução dos problemas. Além

de esclarecer alguns equívocos ocorridos durante as resoluções e solidificar os conceitos que foram sendo descobertos ao longo de cada problema, bem como, o pensamento algébrico que foi sendo desenvolvido.

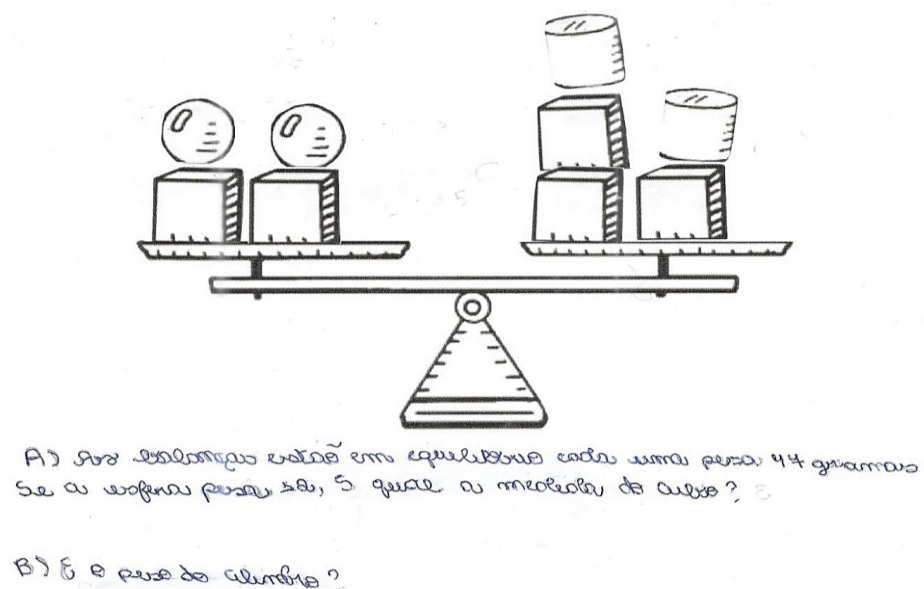
A seguir, apresentamos o segundo bloco de nossa análise.

5.3 BLOCO 3: PROBLEMA 3

Neste bloco, trazemos a análise do primeiro problema abordando a elaboração de questões. Consideramos importante a inclusão desse tipo de atividade ao nosso questionário, pois objetivávamos analisar a criatividade dos alunos e também a relação com os problemas resolvidos anteriormente. A seguir, apresentamos alguns registros e considerações das elaborações do problema 3.

A dupla D1, de forma diferente das demais duplas, utilizou sólidos geométricos diferentes em um mesmo prato, algo que não lhes foi apresentado em nenhum dos problemas propostos.

Figura 5 – Resolução da dupla D1: Problema 3



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Para a elaboração das perguntas, a dupla dispôs os sólidos nos pratos sem um critério específico, com a ideia de atribuir valores a alguma figura e perguntar o peso de outras, ajustando e modificando sempre que necessário. No item *a*, notamos que quando a dupla diz

“as balanças”, está se referindo aos pratos, ou poderia ser “a balança” para manter o sentido, e cada prato tem um peso de 47g. O Quadro 8 traz o diálogo do início da discussão do problema durante a resolução.

Quadro 8 - Diálogo da dupla D1: Problema 3

D1.1: — Aqui [primeiro prato] a gente coloca dois quadradinhos e duas bolinhas, e aqui [segundo prato] três quadradinhos e dois cilindros. D1.2: — Aqui [segundo prato] não vai ficar mais pesado? D1.1: — Calma, é só a bolinha ser mais pesada. Vamos pensar nas medidas de cada um para depois fazer as perguntas. D1.2: — Um número para podermos dividir depois, que seja maior que vinte para não ficar tão fácil. E a bolinha ser mais pesada. D1.1: — Talvez 52, será que dá certo? D1.2: — O peso total dos dois pratos? D1.1: — Não, de um só. D1.2: — E o outro? D1.1: — É igual, não está em equilíbrio?

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

A partir desse diálogo, notamos primeiramente a forma como os sólidos foram chamados, o que posteriormente foi corrigido pela própria dupla no momento da escrita (Figura 5). O participante D1.1 notou que o segundo prato poderia ficar mais pesado por ter mais figuras, mas a relação de equilíbrio foi lembrada pelo colega, afirmando que a esfera poderia ter um peso maior.

Desse modo, a dupla pensou em atribuir 12g para a esfera, e efetuando os cálculos, notou que a esfera não teria o maior valor. Então, concluiu que o valor de 52g estipulado para cada prato, não daria certo. Ao diminuir o valor para 47g e adotar 12,5g como o peso da esfera, cada cubo ficou com 11g e o cilindro, 7g. Atingindo assim, o objetivo de manter a esfera como o sólido mais pesado.

Se a dupla tivesse utilizado o pensamento relacional, teria notado que não haveria necessidade de modificar a massa total de cada prato, pois conforme o valor de cada esfera aumenta automaticamente o valor dos outros sólidos diminui. Segundo Van de Walle (2009), operando a partir desse conceito, uma operação se relaciona com as outras visto que estão na relação de equilíbrio.

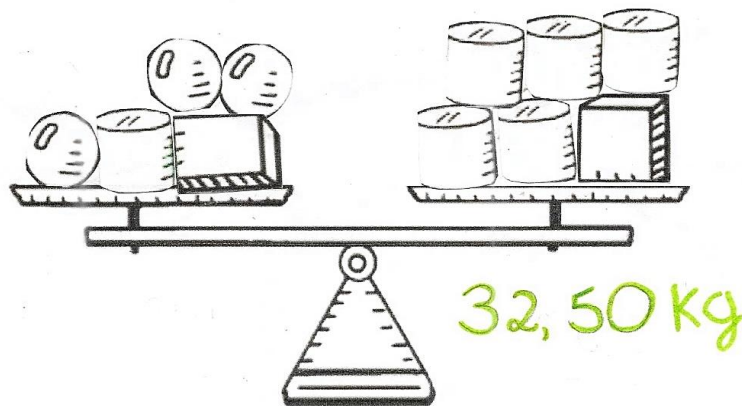
Para resolver ambas as questões criadas pela dupla, poderíamos representá-las algebricamente por $2x + 25 = 47$, utilizando o x para representar a massa do cubo, e ao

descobri-lo, montar a equação para a segunda questão, $2y + 33 = 47$ utilizando o y para a massa do cilindro.

Assim como no diálogo da dupla D1 (Quadro 8), observamos que nas questões da dupla D2 (Figura 6) também houve uma preocupação em elaborar questões com um nível maior de dificuldade, como mostra o Quadro 9.

Figura 6 - Resolução da dupla D2: Problema 3

3) O peso total da balança corresponde a 32,50 Kg, respondendo às questões:



a) Sabendo que o cubo equivale a 5 kg, quantos quilos pesa o cilindro?

b) Cujos que sabemos o valor do cilindro e do cubo, que número corresponde a metade da esfera?

c) Se a balança dobrar de peso, quantos kg equivale um cilindro mais uma esfera?

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Quadro 9 - Diálogo da dupla D2: Problema 3

D2.1: — Vamos supor que cada esfera vale 3 e cada cubo, 5.

D2.2: — Então aqui [primeiro prato] já tem 14, mas 14 fica muito fácil. Vamos colocar um cilindro, valendo 2,25.

D2.1: — Então ficamos com 16,25kg em cada prato. A gente pode colocar no enunciado o peso da balança toda e para responder ainda vai ter que dividir por 2.

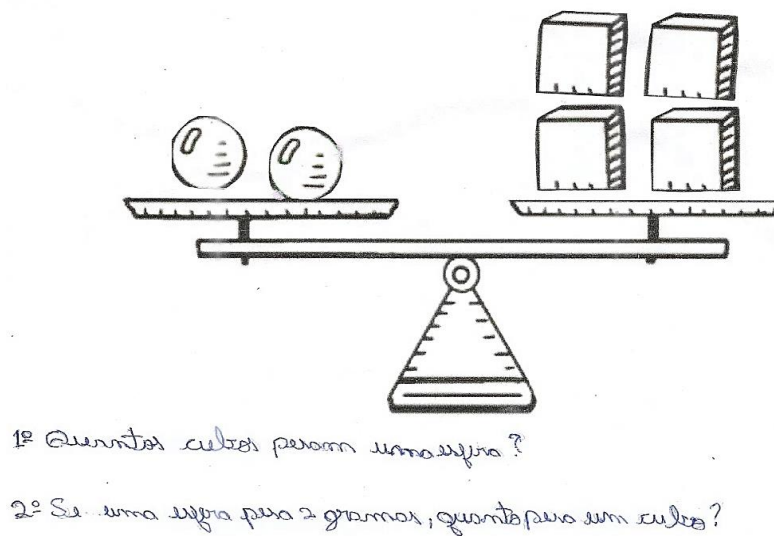
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Observamos que quando a dupla cita “o peso total da balança”, está se referindo a soma da massa nos dois pratos, o que poderia ser interpretado de maneira diferente, pois teoricamente, o suporte da balança também tem uma massa. A dupla criou três questões (Figura 6), onde o item *b* depende do valor encontrado no *a*, mas pede que seja dado o valor

da metade da esfera, adicionando assim, a necessidade de mais atenção ao respondê-lo. No item *c* observa-se que a dupla pensou em explorar o conceito de equilíbrio, associando a necessidade de dobrar a massa dos sólidos, visto que o valor total nos pratos também dobra, o que nos remete aos métodos formais de resolução de uma equação.

A dupla D4 foi a única que elaborou uma questão (Figura 7) sem atribuir valores às variáveis. Notamos apenas um equívoco na escrita, pois trocou a palavra “equilibram” por “pesam”, mostrando uma falta de familiaridade com o termo correto, mas que não impediu a compreensão do problema. Ambas as questões criadas se assemelham com o problema resolvido anteriormente, o que nos remete a uma das fases de resolução, segundo Polya (1995), o estabelecimento de um plano, que diante de um problema, o aluno pensa em procedimentos utilizados em outros já resolvidos.

Figura 7 - Resolução da dupla D4: Problema 3



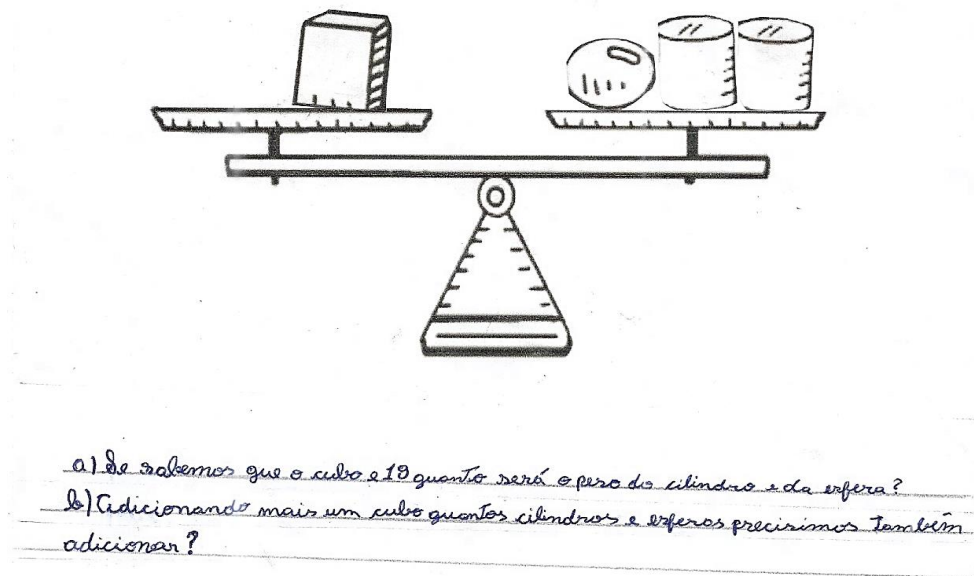
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Na primeira questão temos uma relação de equilíbrio que pode ser resolvida por meio do agrupamento das figuras ou pela divisão, assim como o Problema 1. Na segunda questão, é possível encontrar a massa total de cada prato e descobrir que cada cubo possui 1g ou resolver a equação $4 = 4a$, utilizando por exemplo a letra a para representar a massa do cubo.

Por fim, a solução da dupla D5 (Figura 8), no item *a* traz os três sólidos e dá apenas o valor de um deles e pergunta o peso dos restantes, o que resulta em uma equação com duas variáveis, que possibilita mais de uma única resposta. Pelo diálogo da dupla no momento da resolução, o valor 19 foi atribuído ao cubo, 5 aos cilindros e 9 à esfera, mantendo assim o

equilíbrio. Portanto, poderíamos pensar em uma infinidade de valores para que a igualdade fosse satisfeita, utilizando o pensamento relacional, como trazem Ponte, Branco e Matos (2009) ao se referirem às equações com duas variáveis.

Figura 8 – Resolução da dupla D5: Problema 3



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Ainda referindo ao item *a* criado pela dupla D5, segundo Van de Walle (2009) esse tipo de questão pode contribuir não só para a consolidação do conceito de variável e equação, mas também como um precursor para a aprendizagem de funções. Talvez a dupla tenha pensado em apenas uma combinação de valores, mas em um problema como esse, pode ser explorado o pensamento algébrico e a generalização. No item *b*, a relação de igualdade também foi explorada, visto que para resolvê-lo, basta dobrar a quantidade de cada variável, adicionando mais dois cilindros e uma esfera.

De maneira geral, observamos que todas as duplas criaram questões substituindo as variáveis por valores numéricos e perguntando o valor de outra, o que nos traz novamente ao pensamento aritmético citado por Kieran (1992, apud, ALMEIDA; CÂMARA, 2014). Podemos notar que neste bloco os alunos não só resolveram equações sem os métodos formais da álgebra, como também as criaram, usando desenhos como representações que são equivalente ao “*x*” comumente usado, assim como aborda Usiskin (1995). Desta forma, o Problema 3 trouxe indícios do pensamento algébrico dos alunos.

A seguir, apresentamos o terceiro bloco de nossa análise.

5.4 BLOCO 4: PROBLEMAS 4 E 5

Trazemos no quadro abaixo os problemas, respostas e respectivas justificativas.

Quadro 10 – Respostas e justificativas para os Problemas 4 e 5

Problemas	Respostas	Justificativas
P4 - a) Um cilindro equilibra quantas esferas? Explique como você descobriu.	2 esferas (Todas as duplas)	- (D1, D2, D3 e D4) $4 \div 2 = 2$; - (D5) Porque $6 + 6$ é 12.
P4 - b) Quantas esferas são necessárias para equilibrar 4 cubos? Justifique a sua resposta.	6 esferas (Uma dupla)	- (D3) Pois a balança está equilibrada.
	9 esferas (Uma dupla)	- (D5) Contando os 6 pois $6 + 6$ é 12, então contamos todos os 6 que têm em todos os 12.
	12 esferas (Três duplas)	- (D1, D2 e D4) Porque os cilindros foram triplicados, consequentemente, as esferas também serão triplicadas, e as esferas são o dobro dos cilindros.
P4 - c) Se 1 cilindro pesa 12 gramas, qual é o peso de 1 esfera? Como você descobriu?	6 gramas (Todas as duplas)	- (D1, D2, D3, D4 e D5) Porque se as esferas são a metade dos cilindros, $12 \div 2 = 6$.
P5 - a) Um cilindro equilibra quantas esferas? Como você descobriu?	1,3 esferas (Uma dupla)	- (D5) Porque dividindo uma esfera e pegando outra inteira, dá 9g.
	1,5 esferas (Quatro duplas)	- (D1, D3 e D4) Pois $6 \div 4 = 1,5$; - (D2) Porque $1 + 2 \div 4 = 1,5$ e $1,5 \times 4 = 6$.
P5 - b) Quatro cilindros equilibram quantos cubos? Explique como você chegou ao resultado.	3 cubos (Todas as duplas)	- (D5) Porque $12 + 12 + 12$ dá 36; - (D2, D3 e D4) Se um cubo equivale a 2 esferas, é só tirar um cubo que ficam 6 esferas; - (D1) Porque 4 cubos equivalem a 8 esferas, sendo o dobro de cubos. Então 6 esferas equivalem a 3 cubos.
P5 - c) Se 1 cilindro pesa 9 gramas, qual é o peso de 1 cubo? Como você descobriu?	12 gramas (Todas as duplas)	- (D5) Porque dividindo 48 por 4 dá 12; - (D3 e D4) Porque $9 \times 4 = 36$ e $12 \times 3 = 36$; - (D1 e D2) Porque $9 \times 4 = 36$ e $36 \div 3 = 12$.

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Os itens *a* dos Problemas 4 e 5 foram resolvidos de maneira semelhante pois quatro das cinco duplas utilizaram a operação de divisão ou o agrupamento dos sólidos para chegar ao resultado. Nesses itens, as relações solicitadas necessitam de observação apenas na primeira balança, mas nos próximos, requerem que os alunos relacionem as duas balanças.

Assim como em alguns problemas anteriores, alguns alunos tendem a atribuir valores às variáveis e resolver de forma aritmética. Para fazer a verificação do resultado encontrado por meio da divisão no item *a* do Problema 4, caracterizada também pela fase do retrospecto (POLYA, 1995), a dupla D2 fez o seguinte registro:

Figura 9 – Resolução da dupla D2: alternativa *a* do Problema 4

a) Um cilindro equilibra quantas esferas? Explique como você descobriu.

$$2, \text{ pois } 4:2=2$$

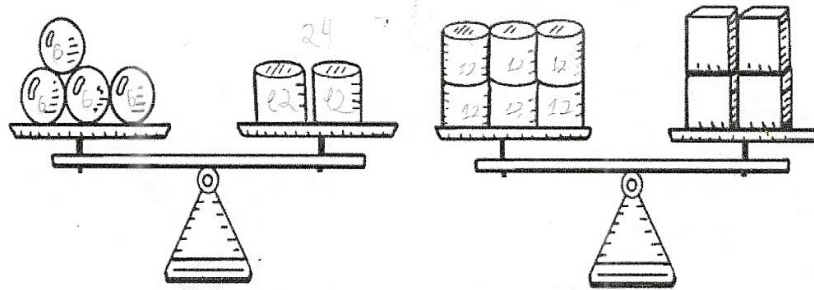
$$B=1 \text{ e } O=0,5 \text{ e } B \times 2 = 2 \text{ e } O \times 4 = 2$$

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

A dupla atribuiu ao cilindro o número 1 e para a esfera, 0,5 e com as multiplicações, buscaram provar que ambos os pratos resultaram em massas iguais, mantendo o equilíbrio da balança.

Entendemos que a referida resolução foi um método utilizado para confirmar o resultado encontrado anteriormente, o que nos remete à fala de Zuffi e Onuchic (2007), quando discorrem sobre a necessidade de deixar o aluno livre para pensar nas conjecturas e formalizações, sem que o professor faça intervenções, salvo nos casos em que o aluno não consegue achar nenhum caminho para seguir.

Ainda nos referindo ao item *a* do Problema 4, a dupla D5 foi a única que não realizou a divisão para encontrar a relação solicitada. Substituiu a variável representada pelo cilindro por 12g, informação que foi dada no item *c*. Dessa forma, a dupla constatou que cada prato equivalia a 24g, assim, concluíram que cada esfera corresponde a 6g e consequentemente, são necessárias duas para equilibrar um cilindro, como mostram os valores escritos no próprio desenho do problema (Figura 10).

Figura 10 – Registro da dupla D5: Problema 4

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Novamente temos a atribuição de valores para as variáveis. Tal ação talvez possa trazer mais segurança para os alunos, pois a aritmética é algo mais comum nas aulas de Matemática. Vale destacar que o pensamento algébrico também foi manifestado, pois a dupla D5 resolveu uma equação utilizando pensamento relacional (VAN DE WALLE, 2009), pois pelos métodos formais, seria equivalente a $4y = 24$ resultando em $y = 6$, utilizando uma incógnita qualquer para representar a massa de uma esfera, por exemplo.

Para haver uma melhor compreensão do pensamento utilizado no item *a* do Problema 5, trouxemos o diálogo da dupla D5 no Quadro 11.

Quadro 11 - Diálogo da dupla D5: alternativa *a* do Problema 5

- D5.1: — Se cada cilindro pesa 9, então aqui [segundo prato] já têm 36.
 D5.2: — Então aqui [primeiro prato] também têm 36.
 D5.1: — Cada esfera vale 6, porque 6×6 é 36.
 D5.2: — E agora como vamos fazer?
 D5.1: — Na minha cabeça deu 1,3.
 D5.2: — Como?
 D5.1: — Fazendo a mesma coisa que fizemos naquele outro [item *c* do Problema 2]. Repartindo uma esfera para cada cilindro, cada um já fica com 6, as que sobram repartimos pelos cilindros. Se tirarmos 3g de cada esfera, e colocarmos nos cilindros, eles vão ficar com 9.
 D5.2: — Então dá 1,3 mesmo.

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Observamos que inicialmente a dupla atribuiu 9g ao cilindro, informação dada no item *c* e por meio do pensamento relacional (VAN DE WALLE, 2009) chegou ao resultado “1,3 esferas”, como no Problema 4, citado anteriormente. Posteriormente, fazendo relação com uma solução realizada anteriormente, estabeleceram a relação de uma esfera para cada cilindro. Partindo desse pensamento, sobram duas esferas que totalizam 12g, então

repartindo em quatro partes, visto que são quatro cilindros, a cada um seriam adicionados 3g, totalizando assim, 9g.

A partir do diálogo apresentado no Quadro 11, observamos que a dupla cometeu um equívoco semelhante ao da dupla D4 no Bloco 2, pois o número “1” se refere a quantidade de esferas e “0,3 a” quantidade de gramas proporcional, portanto, o resultado adequado adicionado à esfera inteira seria meia esfera, ou seja, “0,5”. Assim, reiteramos a importância do processo na resolução de um problema.

Outro ponto importante que destacamos no diálogo da dupla D5, é a estratégia utilizada para encontrar um caminho para a resolução, relacionando com problemas resolvidos anteriormente. Esta pode ser caracterizada como uma das fases das quais Polya (1995) traz para solucionar um problema, o estabelecimento de um plano a partir de informações obtidas em situações anteriores.

Ao analisar os itens *b* dos Problemas 4 e 5, observamos que têm um nível maior de dificuldade devido à necessidade de relacionar as duas balanças. No Problema 4, três das cinco duplas utilizaram a resposta encontrada no item anterior para resolver este item, pois se um cilindro equivale a duas esferas e como seis cilindros equilibram os quatro cubos, então, poderiam multiplica-los por 2. A dupla D1 também fez uso dessa informação, mas primeiro encontrou uma relação entre a quantidade de cilindros da primeira balança e da segunda, descobrindo que triplicou, então para manter o equilíbrio, triplicaram também as esferas. Para confirmar seu raciocínio, realizando o retrospecto (POLYA, 1995) ao reiterar que as esferas são o dobro dos cilindros.

A dupla D5 não conseguia encontrar uma estratégia para a solução, então foi necessário a intervenção da professora/pesquisadora.

Quadro 12 - Diálogo da dupla D5: alternativa *b* do Problema 4

D5.2: — Não estamos conseguindo entender esse. Professora/pesquisadora: — Certo, vamos pensar. Para equilibrar dois cilindros, precisamos de quantas esferas? D5.1: — Quatro. Professora/pesquisadora: — Então se aqui [primeiro prato da segunda balança] vocês têm seis cilindros, quantas esferas serão necessárias para equilibrar estes quatro cubos? D5.2: — Ah, agora eu entendi! Se sabemos que cada cubo equivale a duas esferas, então é só contarmos quantos 6 têm em cada 12. D5.1: — Entendi, então têm 9.

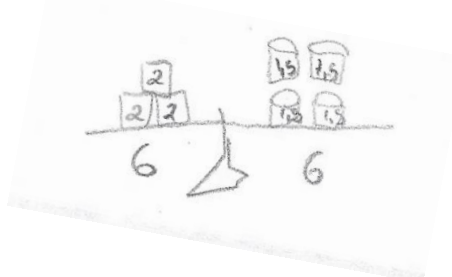
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

O diálogo indica que após a intervenção a dupla utilizou a informação do item *a* para resolver o item *b*. Talvez com a realização do retrospecto (POLYA,1995) a dupla teria reavaliado sua resposta. Mas reiteramos a importância de valorizar o processo na resolução de um problema, algo que sem a justificativa apresentada, não teríamos tomado conhecimento. Segundo Van de Walle (2009, p. 58) “[...] a justificativa deve ser uma parte integrante de suas soluções”.

A dupla D3 trouxe como resposta 6 esferas e uma justificativa que a princípio nos fez pensar que ela foi escrita apenas porque não sabia explicar de outra forma ou até mesmo para não deixar em branco, mas ao ouvir o áudio gravado pela dupla na fase do durante, percebemos que na verdade confundiu “esferas” com “cilindros”, fato que foi esclarecido durante a socialização, então a justificativa realmente está de acordo com a resposta dada.

No item *b* do Problema 5 todas as duplas chegaram ao mesmo resultado. Para confirmar, a dupla D2 realizou o registro representado na Figura 11, onde desenhou uma balança equilibrando 4 cilindros e 3 cubos. Cada cilindro correspondendo a 1,5 esferas (relação encontrada no item *a*), e cada cubo correspondendo a 2 esferas, ambos os pratos totalizando 6, mantendo o equilíbrio da balança.

Figura 11 - Registro da dupla D2: Problema 5



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Ainda com relação ao mesmo item, a dupla D5 o resolveu a partir da informação encontrada no item *a*, onde cada esfera e cilindro correspondem a 6 e 9g, respectivamente. Então cada prato da primeira balança possuía 48g e dividindo pelos quatro cubos, cada um ficou com 12g. Portanto, para equilibrar os 4 cilindros que totalizam 36g são necessários 3 cubos. Para encontrar os resultados, a dupla utilizou o pensamento relacional (VAN DE WALLE, 2009).

No item *c* do Problema 4 todas as duplas chegaram rapidamente à resposta, visto que a relação entre os cilindros e as esferas já havia sido encontrada no item *a*. No *c* problema 5,

as duplas D1, D2, D3 e D4 multiplicaram os quatro cilindros por 9 para chegar ao valor total de cada prato da segunda balança e assim, fazer relação com as equivalências encontradas nos itens anteriores. A dupla D2, que já sabia que quatro cilindros equilibram três cubos, dividiu 36g (valor total do prato) pelos três cubos, chegando à 12 como resultado. No caso da dupla D5, esse resultado já havia sido encontrado no item *b*.

Em síntese, apesar dos Problemas 4 e 5 terem um nível de dificuldade maior comparados aos 1 e 2, percebemos que as duplas desenvolveram estratégias baseadas nos problemas resolvidos anteriormente e apresentaram um pensamento mais consistente no tocante ao significado da igualdade e na forma como as operações se relacionam. Procedimentos importantes para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

5.4.1 Socialização dos Problemas 4 e 5

Seguindo com o ambiente de ensino proposto por Van de Walle (2009) trazemos algumas considerações sobre a última fase, a “fase do depois” após as resoluções dos Problemas 4 e 5. Com a intenção de consolidar os conceitos vistos nos problemas e esclarecer possíveis equívocos cometidos por falta de compreensão ou atenção, a professora/pesquisadora colocou os problemas e as respostas de todas as duplas no quadro e iniciou a discussão.

O Quadro 13 traz o diálogo da discussão do item *b* do Problema 4.

Quadro 13 - Diálogo da socialização: alternativa *b* do Problema 4

Professora/pesquisadora: — Tivemos três respostas diferentes para este item, 9, 6 e 12. Por que vocês acham que a resposta seria 9? A dupla D5 poderia nos explicar? D5: — Acho que nós erramos. Mas não lembramos mais como fizemos. Professora/pesquisadora: — O que vocês acham, pessoal? D3: — Nós confundimos esferas com cilindros, então achamos que eram 6. D4: — Colocamos 12, porque se 2 cilindros equilibram 4 esferas, é só multiplicar tudo por 3, então vão ser 12 esferas. D2: — Nós também fizemos assim.
--

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Observamos com o diálogo, que a dupla D5 não se sentiu à vontade para tentar esclarecer sua resposta por achar que estava errada. Outra discussão pertinente se desenvolveu no item *a* do Problema 5, como exhibe o Quadro 14.

Quadro 14 - Diálogo da socialização: alternativa *a* do Problema 5

Professora/pesquisadora: — Tivemos aqui duas respostas, uma esfera e meia, e 1,3. O que vocês acham?

D2: — 1,5. Porque se colocar uma bolinha para cada cilindro, vão sobrar duas, então 2 dividido para quatro dá 0,5 e se somar com 1 vai dar 1,5.

D4: — Dividimos 6 por 4.

D1: — Foi, nós também.

Professora/pesquisadora: Também é uma forma de fazer. A dupla que colocou 1,3 quer compartilhar?

D5: — Não, professora, acho que erramos na divisão.

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Novamente a dupla D5 optou por não se explicar, geralmente quando uma dupla começa a demonstrar suas hipóteses e outras começam a concordar, quem colocou uma resposta diferente acaba se reprimindo, pois a ideia do certo ou errado por vezes é imposta, e mostrar que errou pode ser sinônimo de vergonha para os alunos mais tímidos.

Apesar dos equívocos terem ocorrido pela mesma dupla nos dois itens citados, não podemos concluir que a dupla não evoluiu seu pensamento algébrico, pois notamos que os erros ocorreram na parte aritmética por falta de atenção no cálculo, sem prejuízo algum nos raciocínios e nas conjecturas estabelecidas diante da interpretação dos problemas.

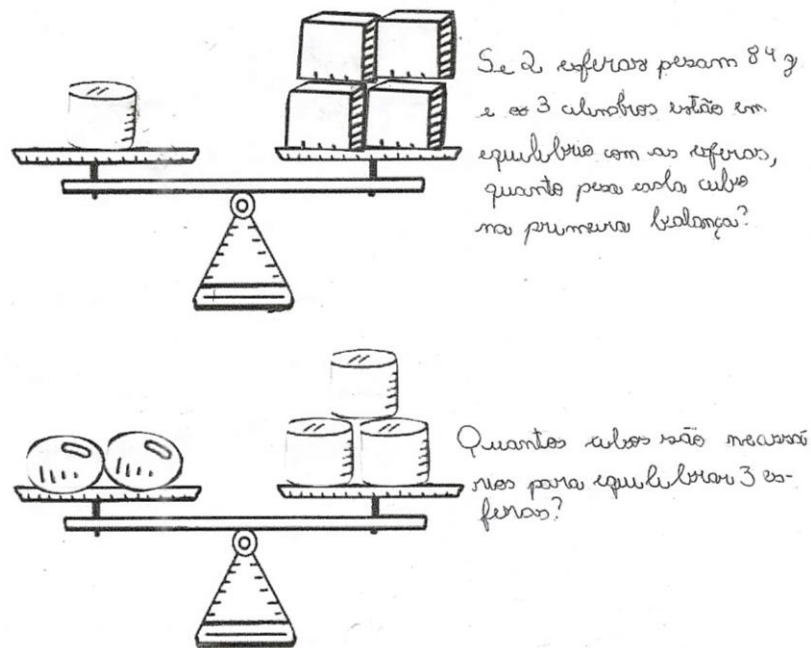
Pelas estratégias das duplas em ambos os problemas entendemos que o conceito de equilíbrio foi sendo consolidado a cada problema resolvido e os procedimentos foram se aperfeiçoando e se assemelhando com os procedimentos formais da álgebra.

A seguir, apresentamos o quinto e último bloco da nossa análise.

5.5 BLOCO 5: PROBLEMA 6

Neste bloco, apresentamos a análise do último problema de nossa sequência, que se trata da elaboração de duas perguntas relacionando duas balanças simultaneamente. Assim como no Problema 3, apenas uma dupla elaborou questões sem a atribuição de valores às variáveis, mas percebemos que todas compreenderam bem o conceito de equilíbrio e respeitaram a igualdade entre os valores dos pratos das balanças. A seguir, trazemos as considerações das resoluções das duplas que mais nos chamaram a atenção.

A dupla D1 elaborou duas perguntas (Figura 12) que relacionam as duas balanças.

Figura 12 - Resolução da dupla D1: Problema 6

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Assim como no Problema 3, a dupla escolheu que a esfera seria o sólido mais pesado, e manteve essa ideia também nesse problema. Ao posicionar os sólidos nas balanças, iniciou-se o diálogo que apresentamos no Quadro 15.

Quadro 15 - Diálogo da dupla D1: Problema 6

- D1.2: — E se dissermos que o cubo pesa 7g? Então, um cilindro sozinho já ia ser bem pesado, e na outra balança as bolinhas iam ser mais pesadas ainda, porque está em equilíbrio.
- D1.1: — As bolinhas, não. Cuidado para não colocar errado.
- D1.2: — É mesmo. Veja aqui, os cubos juntos já vão pesar 28g, então cada cilindro vai pesar 28 também.
- D1.1: — Então é só fazer 28×3 que descobrimos as duas esferas.
- D1.2: — As duas esferas vão pesar 84g.

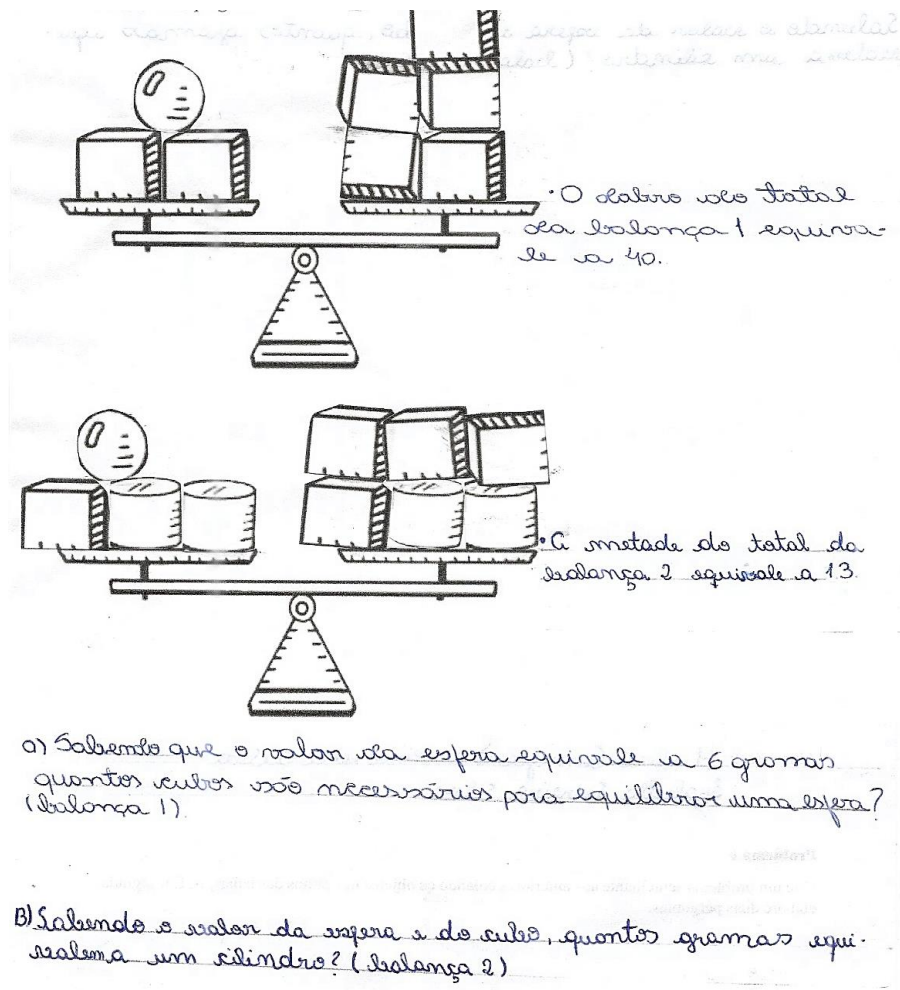
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Primeiramente notamos que a dupla passou a se referir à esfera com a nomenclatura correta no próprio diálogo e também nas perguntas elaboradas. Tendo os valores de cada sólido, a dupla teve o cuidado de relacionar as duas balanças em ambas as questões. Na primeira, podemos descobrir o valor de cada cilindro resolvendo a equação da segunda balança, equivalente a $3a = 84$, encontrando 28g para cada cilindro representado pela letra a . Posteriormente, indo para a primeira balança e resolvendo $4b = 28$, encontramos o valor 7, para o cubo, assim como a dupla estipulou no Quadro 15.

Na segunda questão, já sabendo o valor correspondente de cada sólido, poderiam multiplicar a massa das esferas por 3 totalizando 126g e resolver a equação $7x = 126$, descobrindo a quantidade de cubos que equilibram as três esferas.

Dando continuidade à nossa análise, trazemos a resolução da dupla D2 na Figura 13.

Figura 13 - Resolução da dupla D2: Problema 6



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Semelhante à resolução do Problema 3 pela dupla, também foram adicionadas informações que exigem mais atenção de quem for responder ao problema. Na primeira balança, a dupla traz a informação como sendo o dobro da massa da balança e na segunda, a metade. Novamente, nos atentamos que o peso total da balança corresponde à soma da massa dos dois pratos.

A dupla D2 não elaborou as perguntas relacionando as duas balanças simultaneamente, como fez a dupla D1, indicando ainda, à qual balança se refere cada questão. No item a, foi dado o valor correspondente a uma esfera e sabendo que a massa dos

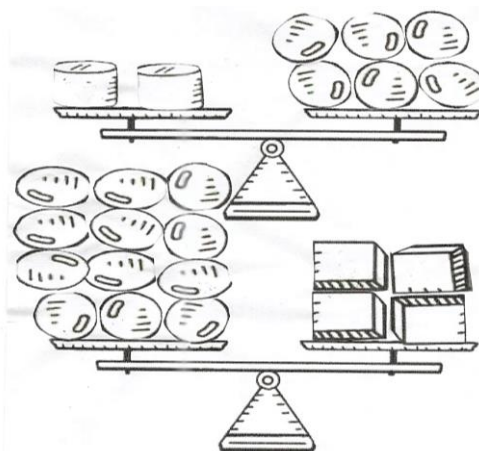
dois pratos juntos é 20, pelo enunciado, temos que em cada prato tem 10g, assim, concluímos que cada cubo tem 2g por meio do pensamento relacional (VAN DE WALLE, 2009) ou resolvendo as equações $2b + 6 = 10$, $5b = 10$ e $2b + 6 = 5b$, que podem ser expressas por meio do primeiro prato, do segundo e dos dois simultaneamente. Após descobrir o valor do cubo, é possível concluir que são necessários três para equilibrar uma esfera.

No item *b*, sabendo que cada prato está com 13g, visto que equivale à metade da massa da balança como disse a dupla no enunciado, e ainda, com os valores encontrados no item anterior, também é possível resolver por meio do pensamento relacional (VAN DE WALLE, 2009) ou por equações. Notamos que o que difere os dois pratos, é que em um contém uma esfera e no outro, três cubos a substitui, portanto, pela relação encontrada no item *a* concluímos que as equações nos dois pratos são equivalente à $2a + 8 = 13$, e cada cilindro pesa 2,5g.

Observamos que ambas as duplas além de resolver equações sem os procedimentos formais da álgebra, elaboraram equações que podem ser resolvidas por meio do pensamento relacional (VAN DE WALLE, 2009), visto que por meio da compreensão do significado da igualdade, as generalizações operatórias justificam os procedimentos realizados, como bem abordam, Carpenter, Franke e Levi (2003).

Para finalizarmos este bloco, trazemos a resolução da dupla D4 (Figura 14) que criou perguntas sem a atribuição de valores às variáveis, apenas explorando a relação de equivalência.

Figura 14 - Resolução da dupla D4: Problema 6



- 1º Quantos cilindros equilibram 12 esferas?
2º Quatro cubos equilibram quantos cilindros?

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

De forma semelhante aos problemas anteriores, a dupla traz na primeira questão a necessidade de dobrar a massa dos dois pratos da balança, visto que 12 esferas são o dobro de 6, sendo assim, como resposta temos 4 cilindros. Essa pergunta nos mostra que a dupla compreendeu o conceito de igualdade e a necessidade de multiplicar ambos os lados para manter o equilíbrio, um procedimento que realizamos ao resolver equações. Ainda, podemos usar a divisão para encontrar que um cilindro equivale a quatro esferas, algo que várias duplas fizeram para resolver outros problemas.

Na segunda questão, agora relacionando as duas balanças simultaneamente, temos que 12 esferas equilibram 4 cubos. Podemos notar que isso resulta na igualdade entre os cubos e os cilindros, pois como no item anterior, um cilindro equivale a três esferas e neste, um cubo também equivale a três esferas.

Neste bloco, identificamos de maneira geral que o conceito de igualdade já está bem consolidado pelas duplas e, considerando que é o último problema da sequência, vemos uma facilidade na associação das figuras em outros pratos, no ato de multiplicar, dividir e descobrir os valores correspondentes de cada sólido. Consequentemente, observamos uma evolução quanto ao desenvolvimento do pensamento algébrico de cada dupla.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para atingir o objetivo geral da nossa pesquisa - analisar indícios do desenvolvimento do pensamento algébrico de um grupo de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental a partir da resolução de problemas relacionados a equações com balanças - preparamos uma sequência de problemas relacionados a equações com balanças que foram resolvidos por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental Anos Finais, os quais ainda não tinham tido contato com os métodos formais de resolução de equações. Notamos diversas estratégias utilizadas pelas duplas, na resolução de problemas sem um método discutido a priori. Tal fato, nos auxilia a constatar que a metodologia utilizada se caracteriza como Resolução de Problemas.

A partir das resoluções dos alunos, compreendemos diversos processos de conjecturas estabelecidos, bem como o desenvolvimento algébrico que foi sendo construído. As duplas como um todo realizaram manipulações, tanto aritméticas quanto algébricas, semelhantes aos métodos utilizados nas resoluções de equações, como por exemplo, a realização de operações em ambos os pratos das balanças. Diversas vezes trabalharam com os conceitos de incógnita e variável ao realizarem manipulações e, mesmo chegando a uma só resposta, diferentes caminhos foram apresentados.

Reiterando o que trouxemos em nossas discussões, parte da dificuldade relacionada às equações está atrelada ao significado da igualdade. Assim, acreditamos que a sequência de problemas proposta envolvendo balanças em equilíbrio possibilitou a compreensão de conceitos algébricos, pois trata-se de uma situação prática que pode ser vista no cotidiano. Além disso, acreditamos que as figuras usadas podem evitar uma possível aversão que as letras utilizadas nas equações, visto que com elas, o discurso de que a matemática fica mais difícil já está bem enraizado.

A proposta motivou os alunos a resolver os problemas, uma vez que não havia elementos que lhes causassem estranheza. Seus conhecimentos relacionados à aritmética os levaram a desenvolver o pensamento algébrico e resolver equações com habilidades que só seriam apresentadas em aulas posteriores.

Uma limitação para os problemas escolhidos está no fato de não ser possível atribuir valores negativos às variáveis, uma vez que fugiríamos da realidade existente no contexto, pois não se representa massa com números negativos. Em contrapartida, esquemas com balanças podem ser explorados também para o ensino e aprendizagem de inequações ao

representá-las em desequilíbrio, ficando aqui uma sugestão para o estudo do desenvolvimento do pensamento algébrico com base nas relações de desigualdade.

Considerando o cenário onde buscamos a participação ativa do aluno para que o mesmo seja protagonista de sua aprendizagem, tendo o professor como mediador desse processo, não defendemos apenas a Resolução de Problemas como metodologia, pois existem diversas tendências de ensino que podem ser utilizadas na sala de aula para este fim. É necessário que esse tema esteja presente nas formações de professores e nos cursos de licenciatura para que atuais e futuros professores possam se capacitar e buscar melhorias para a educação do nosso país.

Perfazendo o nosso trabalho, destacamos que a pesquisa não se finda aqui. Aspiramos que esta Monografia possa contribuir e vir a proporcionar reflexão e suscitar novas inquietações daqueles que também almejam melhorias na educação e acreditam em um ensino de matemática significativo.

REFERÊNCIAS

GREENES, Carole; FINDELL, Carol; CAVANAGH, Mary. **Algebra Readiness Made Easy: Grade 6**, 2008.

ALMEIDA, Jadilson Ramos; CÂMARA, Marcelo. Pensamento algébrico e formação inicial de professores de matemática. **Em Teia| Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 5, n. 2, p. 1-17, 2014.

BRAGA, Bruno Bastos. **Atividades para o desenvolvimento do pensamento algébrico no Ensino Fundamental**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, p. 82. 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BAGNE, Juliana; BOLOGNANI, Marjorie Samira Ferreira. Um, dois, três, vamos começar outra vez: reflexões acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico. *In*: NACARATO, Adair Mendes; CUSTÓDIO, Iris Aparecida (org.). **Narrativas de aulas de matemática de uma comunidade de investigação como prática de formação docente**. 14. ed. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2019. p. 35-44.

CAMARGO, Giancarla Giovanelli. Vamos passear na floresta? Possibilidade de trabalho com padrões na educação infantil a partir de uma sequência corporal. *In*: NACARATO, Adair Mendes; CUSTÓDIO, Iris Aparecida (org.). **Narrativas de aulas de matemática de uma comunidade de investigação como prática de formação docente**. 14. ed. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2019. p. 45-59.

CARPENTER, Thomas P.; FRANKE, Megan Loef; LEVI, Linda. **Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school**. Portsmouth, NH: Heinemann, 2003.

CHRISTIANSEN, Bent; WALTHER, Gerd. Tarefa e actividade. *In*: CHRISTIANSEN, Bent; HOWSON, Geoffrey; OTTE, Michael (Org.). **Perspectives on mathematics education**. Dordrecht: D. Reidel, 1986. p. 234-307. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/mestrado-bibliografia.htm>. Acesso em: 20 de abr. de 2022.

FRARE, Rosangela Eliana Bertoldo. Tarefas sobre sequências no ensino médio: identificando regularidades e fazendo generalizações. *In*: NACARATO, Adair Mendes; CUSTÓDIO, Iris Aparecida (org.). **Narrativas de aulas de matemática de uma comunidade de investigação como prática de formação docente**. 14. ed. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2019. p. 161-177.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 30. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2004.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo (orgs.). **Métodos de Pesquisa**. 1. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GIL, K. H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem da álgebra**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Católica do Rio Grande do Sul. Rio Grande do Sul, p. 120. 2008.

MESCOUTO, Juliana Batista; DE LUCENA, Isabel Cristina Rodrigues; BARBOSA, Elsa. Tarefas exploratório-investigativas de ensino-aprendizagem-avaliação para o desenvolvimento do pensamento algébrico. **Educação Matemática Debate**, v. 5, n. 11, p. 1-22, 2021.

MINAYO, Maria Cecília de Souza (org.); DESLANDES, Suely Ferreira; GOMES, Romeu. **Pesquisa social: teoria, método e criatividade**. 25. ed. Petrópolis: Vozes, 1993. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=PtUbBAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA7&dq=Pesquisa+social:+teoria,+m%C3%A9todo+e+criatividade&ots=5P3LfpGZVI&sig=JVfQ_fGcN6-c2V01teu4W6lu_7A#v=onepage&q=Pesquisa%20social%3A%20teoria%2C%20m%C3%A9todo%20e%20criatividade&f=false>. Acesso em: 2 de maio de 2022.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no ensino básico**. Portugal: Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular – DGIDC, Lisboa, 2009.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do Trabalho Científico**. 23. ed. São Paulo: Cortez, 2007.

SOUSA, C. C. C. **Uma proposta de introdução ao conceito de equivalência para o ensino de equações de primeiro grau com uma incógnita com foco em estudantes com um histórico de dificuldades de aprendizagem**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo. São Paulo, p. 271. 2020.

TRIPP, David. **Pesquisa-ação: uma introdução metodológica**. Educação e pesquisa, v. 31, p. 443-466, 2005.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

VALE, Isabel. **As tarefas de padrões na aula de matemática: um desafio para professores e alunos.** Interacções, v. 8, n. 20, p. 181-207, 2012.

VAN DE WALLE, J. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.** 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem.** São Paulo: Martins Fontes, 2001.

YIN, Robert K. **Estudo de caso: planejamento e métodos.** 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

ZANELLA, Liane Carly Hermes. **Metodologia da Pesquisa.** Florianópolis: SEaD/UFSC, 2006.

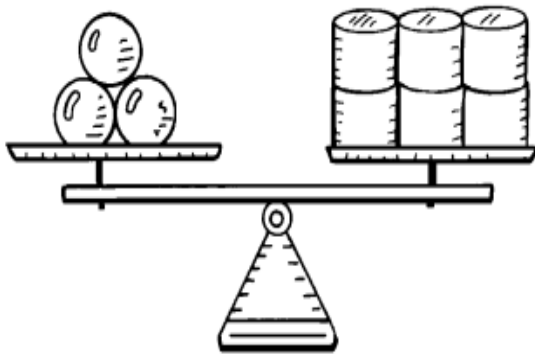
ZUFFI, Edna Maura; ONUCHIC, Lourdes. O ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas e os processos cognitivos superiores. **UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 11, p. 79-97, 2007. 07.

APÊNDICE A – LISTA DE PROBLEMAS

Alunos (as): _____

Problema 1

Considerando que os objetos de mesma forma na figura abaixo têm a mesma massa, responda:



a) Uma esfera equilibra quantos cilindros? Explique como chegou no resultado.

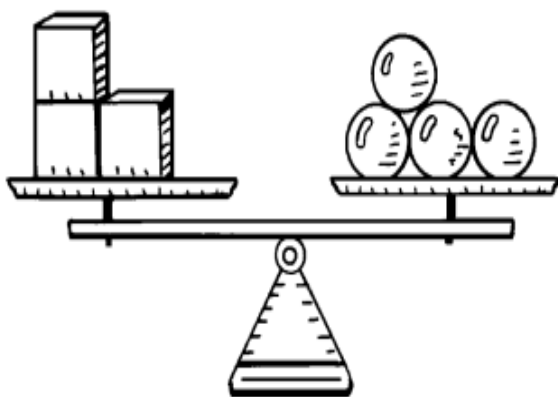
b) Quantos cilindros são necessários para equilibrar 6 esferas? Como você descobriu?

c) Se um cilindro pesa 5 gramas, qual é o peso de uma esfera? Justifique a sua resposta.

Alunos (as): _____

Problema 2

Considerando que os objetos de mesma forma na figura abaixo têm a mesma massa, responda:



- a) Se você adicionar mais 3 cubos no primeiro prato, quantas esferas precisará adicionar para que a balança continue em equilíbrio? Explique como chegou no resultado.

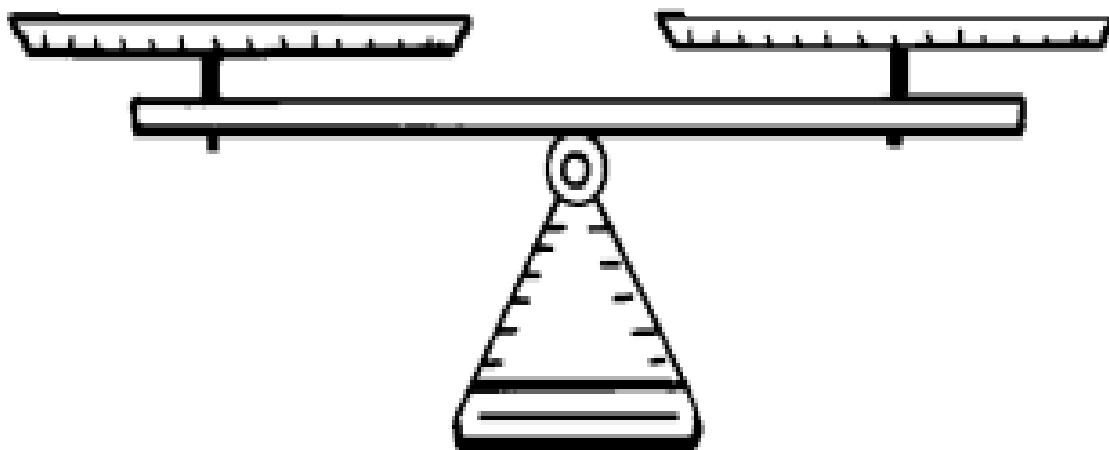
- b) Se uma esfera pesa 9 gramas, qual é o peso de um cubo? Justifique sua resposta.

- c) Um cubo equivale a quantas esferas? Como você descobriu?

Alunos (as): _____

Problema 3

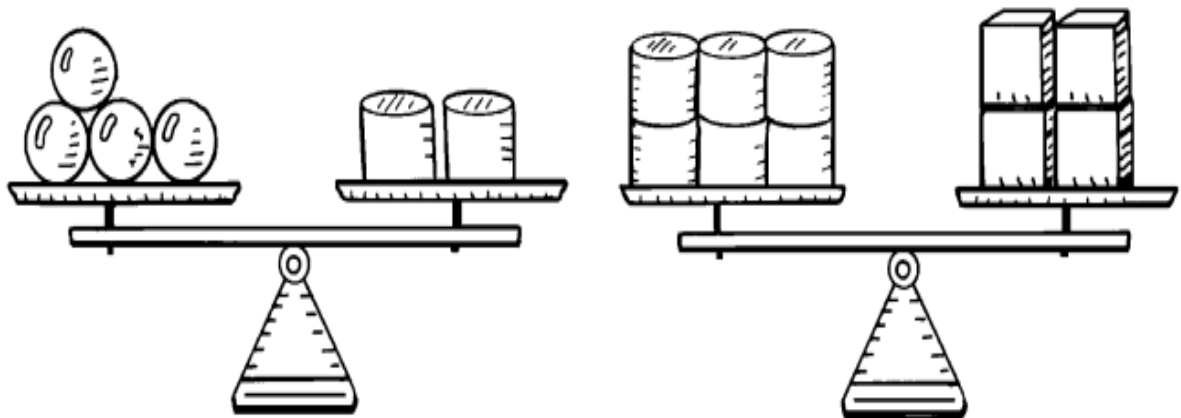
Crie um problema semelhante aos anteriores colando os objetos nos pratos da balança. Em seguida, elabore duas perguntas.



Alunos (as): _____

Problema 4

Considerando que os objetos de mesma forma na figura abaixo têm a mesma massa, responda:



a) Um cilindro equilibra quantas esferas? Explique como você descobriu.

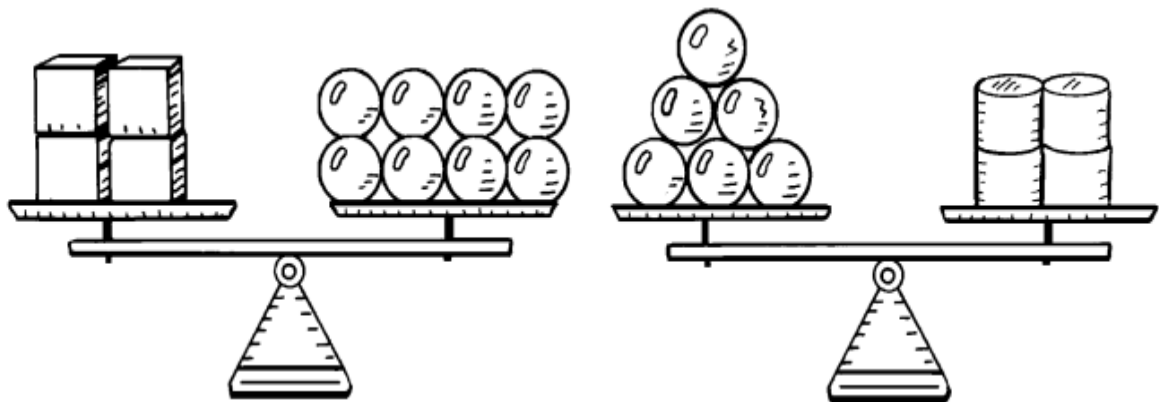
b) Quantas esferas são necessárias para equilibrar 4 cubos? Justifique a sua resposta.

c) Se 1 cilindro pesa 12 gramas, qual é o peso de 1 esfera? Como você descobriu?

Alunos (as): _____

Problema 5

Considerando que os objetos de mesma forma na figura abaixo têm a mesma massa, responda:



a) Um cilindro equilibra quantas esferas? Como você descobriu?

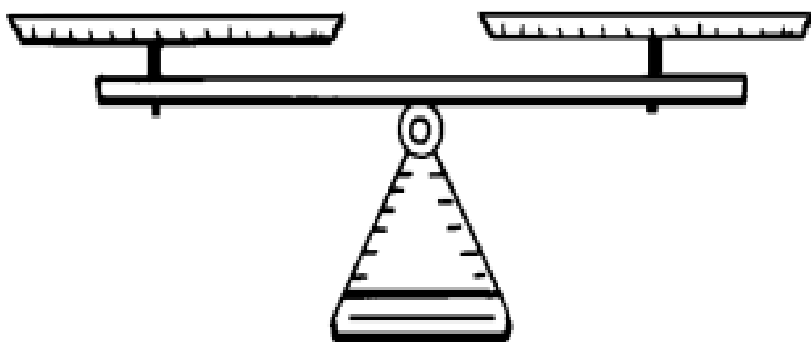
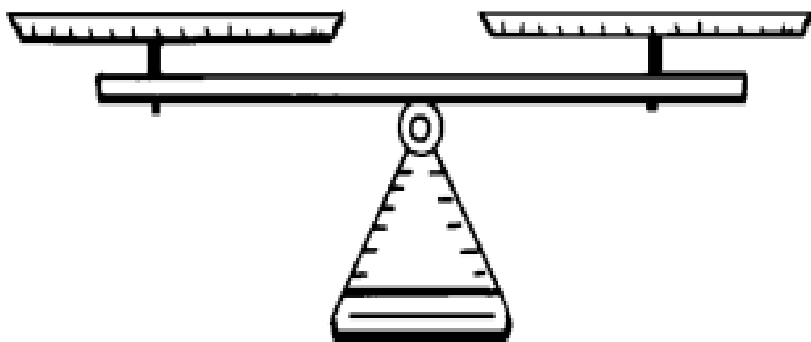
b) Quatro cilindros equilibram quantos cubos? Explique como você chegou ao resultado.

c) Se 1 cilindro pesa 9 gramas, qual é o peso de 1 cubo? Como você descobriu?

Alunos (as): _____

Problema 6

Crie um problema semelhante aos anteriores colando os objetos nos pratos das balanças. Em seguida, elabore duas perguntas.



APÊNDICE B – OBJETOS PARA RECORTE

