



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CAMPUS AGRESTE
NÚCLEO DE TECNOLOGIA
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

ÁLVARO CORDEIRO DOS SANTOS

**UM MÉTODO DE VOLUMES FINITOS NÃO LINEAR COM CORREÇÃO DE
PONTOS HARMÔNICOS PARA SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO MONOFÁSICO
EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO**

Caruaru

2022

ÁLVARO CORDEIRO DOS SANTOS

**UM MÉTODO DE VOLUMES FINITOS NÃO LINEAR COM CORREÇÃO DE
PONTOS HARMÔNICOS PARA SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO MONOFÁSICO
EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Engenharia Civil do Campus Agreste da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, na modalidade de artigo científico, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Civil. Defesa realizada por videoconferência.

Área de concentração: Simulação Numérica em Reservatórios de Petróleo.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Raul Licapa Contreras

Caruaru

2022

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Sra. Odete Cordeiro, por todo amor, apoio e ensinamentos dados a mim ao longo da vida, na verdade, agradeço-a pela vida! Um verdadeiro espelho de ser humano e sabedoria. Minha amada mãe.

Ao Sr. Anicácio Cordeiro por toda coragem e visão que teve ao longo da vida, sempre buscando o bem dos filhos e toda família. Um exemplo de alguém que demonstra o quanto quer bem a uma pessoa com atitudes, não com palavras. Meu amado pai.

Ao Sr. Alex Cordeiro por ser essa pessoa tão companheira e cuidadosa. Um símbolo de fortaleza e do que é ter alguém com quem se possa contar de verdade! Meu amado irmão.

A Srta. Maria Clara por sua chuva de sorrisos e alegria. Seu carisma e carinho. Minha companheira de música e o anjo da minha vida. Minha amada irmã.

Agradeço ao meu professor Sr. Fernando Contreras por toda atenção e dedicação nas pesquisas e simulações. Por sua determinação, garra, contribuição para elevação do nível da engenharia em poços de petróleo!

Agradeço aos meus verdadeiros parentes. Agradeço aos meus verdadeiros amigos.

Agradeço-me.

Um método de volumes finitos não linear com correção de pontos harmônicos para simulação de escoamento monofásicos em reservatórios de petróleo.

A nonlinear finite volume method with harmonic point correction for simulating single-phase flow in oil reservoirs.

Álvaro Cordeiro dos Santos¹

RESUMO

Este trabalho busca apresentar um método não linear de volumes finitos baseados em pontos harmônicos (NLTPFA-H) para simulação de campos de pressão de reservatórios de petróleo com características geológicas adversas, onde as equações governantes são discretizadas utilizando malhas poligonais em geral. Este método usa um estêncil compacto para aproximar o fluxo sobre a superfície de controle, sendo capaz de reproduzir soluções lineares por partes e é muito robusto quando se lida com meios heterogêneos, altamente anisotrópicos e malhas distorcidas. Na construção deste método, primeiro construímos os fluxos unilaterais em cada superfície de controle independentemente e, em seguida, uma expressão de fluxo única é obtida por uma combinação convexa dos fluxos unilaterais. As pressões (ou variáveis auxiliares) nas faces são interpolados utilizando uma estratégia baseado em pontos harmônicos. Atualmente o campo de pressão de um reservatório com geologias complexas podem sofrer oscilações quando se utiliza a aproximação clássica dos pontos harmônicos, devido as características geológicas complexas, gerando resultados que sofrem variações em relação as propriedades e parâmetros reais dos reservatórios. Então, será feita uma correção desses pontos harmônicos, a fim de garantir resultados mais acurados e robustos. Para mostrar o potencial do método desenvolvido, resolver-se-á alguns problemas da literatura usando malhas triangulares e quadrilaterais distorcidas.

Palavras-chave: engenharia de petróleo; NLTPFA-H; simulação numérica; método de volumes finitos.

ABSTRACT

This work seeks to present a nonlinear method of finite volumes based on harmonic points (NLTPFA-H) for simulating pressure fields of oil reservoirs with adverse geological characteristics, where what I believe are controlled are discretized polygonal meshes in general. This method uses a compact stencil to approximate the flow over the control surface, being able to reproduce piecewise linear solutions and is very robust when dealing with heterogeneous media, highly anisotropic and distorted meshes. In constructing this, we first build the one-sided flows on each control surface independently, and then a single-flow expression is satisfied by a convex combination of the one-sided flows. The pressures (or auxiliary variables) on the faces are interpolated using a strategy based on harmonic points. Currently, the pressure field of a complex of reservoirs with geologies can suffer oscillations when using the classical approximation of the harmonic points, due to the complex geological characteristics, generating results that suffer variations in relation to the real properties and parameters of the reservoirs. Then, a

¹Graduando em Engenharia Civil. E-mail: alvarocordeiro@ufpe.br

correction of these harmonic points will be made, in order to guarantee more accurate and robust results. To show the potential of the developed method, some problems from the literature will be solved using triangular meshes and distorted quadrilaterals.

Keywords: petroleum engineering; NLTPFA-H; numerical simulation; finite volume method.

DATA DE APROVAÇÃO: 05 de novembro de 2022.

1 INTRODUÇÃO

Durante os últimos anos diferentes estratégias de interpolação foram propostas no âmbito da simulação numérica, buscando compreender o comportamento de fluidos ed reservatórios de petróleo. Por exemplo, (LIPNIKOV, K. et al., 2007), propuseram um método de interpolação chamado Distância Inversa. Este método é conhecido por preservar a positividade dos pesos de interpolação e alcançar uma acurácia de primeira ordem, onde uma das limitações é não preservar a linearidade. Para lidar com meios descontínuos os autores fazem alguns procedimentos que muitas vezes podem tornar o método numérico caro computacionalmente e a acurácia do método pode ser comprometida por se ter um interpolador de primeira ordem.

Em seguida, (YUANG, G. e SHENG, Z., 2008), propuseram uma interpolação de segunda ordem. Esta técnica de interpolação lida com meios descontínuos e o processo de interpolação está sujeito a solução de sistemas lineares locais e não satisfaz o critério de linearidade nem a preservação da positividade dos pesos de interpolação. Nesse contexto, os autores (AGÉLAS, L. et al., 2009) introduzem uma nova estratégia de interpolação bastante versátil baseada em pontos harmônicos, onde esses pontos são localizados nas faces da malha computacional e são obtidos mediante uma ponderação que leva em conta as propriedades físicas-geométricas. Esta estratégia, fornece soluções exatas para problemas lineares, preserva a positividade dos pesos de interpolação e não precisa dispor matrizes locais.

Em 2013, os autores (GAO, Z. e WU, J., 2013) conseguem uma generalização deste método, utilizando a continuidade de fluxo nas superfícies de controle (faces ou interfaces). Uma limitação dessa estratégia é que os pontos harmônicos podem situarem-se fora das interfaces quando submetidos a meios altamente anisotrópicos com malhas distorcidas. Este fato pode afetar a acurácia e/ou robustez do método numérico. Diversos esforços têm-se proposto para superar essa limitação, como recalcular os pontos harmônicos, mas, segundo resultados observados na literatura, essa estratégia ainda não lida adequadamente com malhas distorcidas e/ou tensores de permeabilidade altamente anisotrópicos, mesmo que os pontos de interpolação sejam localizados nas faces.

Este fato foi analisado na tese de (CONTRERAS, F.R.L., 2016), página 68. Diante desse contexto, também serão analisadas essas oscilações na posição dos pontos harmônicos e propore-se soluções que ajudem a melhorar a robustez e acurácia do método. Tem-se pensado que um processo de otimização pode ajudar a superar de maneira definitiva tais problemas. Em alternativa, (GAO, Z. e WU, J., 2011), formularam um tipo de interpolação capaz de preservar a linearidade, além disso, não se precisa resolver sistema lineares locais para o cálculo e possui uma taxa de convergência de segunda ordem. Este método de interpolação é bastante robusto mesmo para meios anisotrópicos e malhas ligeiramente distorcidas. Uma das desvantagens desta estratégia é que os pesos de interpolação podem ser negativos e a generalização para dimensão 3 (3-D) não é recomendável, já que os pesos de interpolação dependem muito de funções trigo-

nométricas.

Nesse sentido, busca-se reformular as estratégias de interpolação propostas por (GAO, Z. e WU, J., 2011) evitando a utilização de funções trigonométricas e facilitando a implementação em 3-D, seguindo esse contexto, pretende-se investir na preservação da positividade dos pesos de interpolação que são cruciais quando se pretende formular métodos que preservem monotonicidade ou satisfazem o Princípio do Máximo Discreto (PMD). Por outro lado, (GAO, Z. e WU, J., 2013) utilizam uma estratégia de interpolação de segunda ordem baseado em mínimos quadrados, a qual foi inicialmente formulada por (COUDIÈRE, Y. et al., 1999). Esse procedimento de interpolação produz soluções numéricas robustas mesmo para meio heterogêneos e anisotrópicos utilizando malhas não estruturadas. Uma das limitações da interpolação proposta por (GAO, Z. e WU, J., 2013) é que a mesma não preserva linearidade e os pesos de interpolação podem ser negativos quando se trata de meios altamente anisotrópicos e/ou malhas distorcidas, algo que pretende-se resolver com o método trabalhado nesse artigo.

Na simulação de reservatório de petróleo, por exemplo, a previsão confiável da dinâmica dos fluidos no interior do reservatório requer um simulador que pode lidar rigorosamente com meios porosos altamente heterogêneos e tensores de permeabilidade anisotrópica em malhas não ortogonais ditados pela complexa geologia do reservatório, destaca (ZHANG, W. e KOBALSI, M., 2019). As falhas geológicas, comuns nos reservatórios de petróleo, podem gerar descontinuidades em propriedades físicas de interesse, tais como porosidade e permeabilidade, aponta (CONTRERAS, F.R.L., 2016). Essas características impactam diretamente no cálculo dos campos de pressão e velocidade dos fluidos nas rochas, que são informações imprescindíveis na determinação da direção do fluxo e das melhores posições para se perfurar poços e obter o óleo ou gás, e também injetar-se água, afim de empurrá-los, ou simplesmente aumentar a pressão no interior da rocha.

Conforme aborda (ZHANG, W. e KOBALSI, M., 2019), o fator chave para obtenção de um método mais robusto e preciso consiste na correção dos pontos harmônicos, que são pontos escolhidos para interpolação da pressão de cada um dos volumes de controle. Ao se deparar com problemas de permeabilidade heterogênea e altamente anisotrópicos em malhas não ortogonais gerais, o ponto harmônico pode estar em qualquer lugar do plano que contenha sua face associada. Contudo, por conta dessas características e do tensor de permeabilidade, muitas vezes, esses pontos estão significativamente deslocados em relação a face do elemento em análise, o que causa dificuldade da decomposição dos vetores conormais e, conseqüentemente, oscilações e imprecisões nos resultados para problemas em meios complexos. Assim, no presente projeto será implementado computacionalmente uma correção dos pontos harmônicos afim de melhorar a robustez e acurácia dos métodos existentes.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Desenvolver e implementar computacionalmente um método de volumes finitos não-linear com uma correção dos pontos harmônicos para simulação de reservatórios petróleo altamente heterogêneo e anisotrópico.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Desenvolver um algoritmo no Matlab corrigindo a posição dos pontos harmônicos e acoplar a um código fonte de um método não linear existente;

- aplicar e comparar o método desenvolvido com problemas presentes na literatura;
- realizar teste de monotonicidade incluindo malhas distorcidas;
- realizar teste de convergência;
- verificar o comportamento do método desenvolvido em meios altamente anisotrópicos e heterogêneos.

2 METODOLOGIA

A equação de pressão para um reservatório de petróleo altamente heterogêneo e anisotrópico é definida pela seguinte equação diferencial:

$$\nabla \cdot \vec{v} = Q(\mathbf{x}) \text{ com } \vec{v} = -\underline{K}(\mathbf{x})\nabla p \text{ em } \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

onde Ω é um subconjunto aberto limitado de \mathbb{R}^2 com $\partial\Omega$ sendo seu limite. p representa a variável escalar pressão, o fluxo \vec{v} representa a velocidade de Darcy para fluxo em meios porosos. $Q(\mathbf{x})$ o termo de fonte ou sumidouro. Em coordenadas cartesianas, o tensor de permeabilidade é geralmente representado por:

$$\underline{K}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{pmatrix} \quad (2)$$

que é uma matriz simétrica definida positiva que pode ser descontínua em todo o domínio Ω . Os índices "x" e "y" representam as linhas e colunas da matriz. O problema descrito pela Eq. (1) só é completamente definido quando usa-se condições de contorno apropriadas, dadas por:

$$p = g_D \text{ em } \Gamma_D \quad (3)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = g_N \text{ em } \Gamma_N \quad (4)$$

onde $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D$ e Γ_N representam os contornos de Dirichlet e Neumann, respectivamente. A pressão g_D é definida sobre Γ_D e o fluxo prescrito g_N é definido sobre Γ_N . Além disso, \vec{n} é o vetor normal unitário. A discretização do domínio contínuo é realizada por um conjunto aberto poligonal $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com contorno denotado por $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ (o fechamento de Ω é denotado por $\overline{\Omega}$). Uma discretização pelo método de volumes finitos envolve a composição de três superconjuntos denotados por $D = (M, E, O)$, onde:

- $M = \{\hat{L}\}$ é uma família finita de volumes de controle, tais que: $\bigcup_{\hat{L} \in M} \hat{L} = \overline{\Omega}$ onde cada volume de controle é considerado uma forma poligonal de início em relação ao baricentro. O volume (área em 2D) de $\hat{L} \in M$ é denotado por $V_{\hat{L}}$ e o cardinal de M é dado por a , que representa o número de volumes de controle.
- $E = \{IJ\}$ é uma família finita de faces em $\overline{\Omega}$, geralmente chamadas de superfícies de controle. Para cada $\hat{L} \in M$, existe um subconjunto de faces do elemento \hat{L} denotado como $E_{\hat{L}}$ de tal modo que: $\bigcup_{IJ \in M} \overline{IJ} = \partial\hat{L}$. Além disso, assume-se que para todos $IJ \in E$, têm-se $IJ \subset \partial\Omega$ ou $IJ \subseteq \hat{L} \cap \hat{R}$, para alguns $(\hat{L}, \hat{R}) \in M \times M$. O conjunto de faces internas e externas são denotados, respectivamente, por $E^{int} = E \cap \partial\Omega$ e $E^{ext} = E \cap \partial\Omega$. Finalmente, o comprimento da borda IJ é dado pela norma euclidiana $\|\vec{IJ}\|$.

- $O = \{x_{\hat{L}}\}_{\hat{L} \in M}$ é uma família de pontos (baricentros dos volumes de controle) de Ω tal que, $\forall \hat{L} \in M, x_{\hat{L}} \in \hat{L}$.

Depois de descrever os componentes que definem o domínio discreto, integra-se a equação de pressão Eq.(1) sobre um volume de controle genérico \hat{L} e aplicando o Teorema da Divergência de Gauss, ele pode ser escrito como:

$$\int_{\partial \hat{L}} \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_{\hat{L}} Q dV \quad (5)$$

onde \vec{n} denota o vetor normal unitário a $\partial \hat{L}$. Assim, utilizando o teorema de valor médio pode-se aproximar ambos os lados da Eq. (5) da seguinte maneira:

$$\int_{\partial \hat{L}} \vec{v} \cdot \vec{n} ds \cong \sum_{IJ \in E_{\hat{L}}} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ}, \quad \int_{\hat{L}} Q dV \cong \overline{Q}_{\hat{L}} V_{\hat{L}} \quad \text{e} \quad \vec{v}_{IJ} = \frac{1}{\|\vec{IJ}\|} \int_{\partial \hat{L}} \vec{v} ds \quad (6)$$

Esse método de volume finito é conservativo e satisfaz a seguinte equação:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} + \vec{v}_{JI} \cdot \vec{N}_{JI} = 0 \quad (7)$$

Na Eq. (7), os fluxos numéricos podem ser aproximados de várias maneiras, cada uma levando a métodos de volumes finitos lineares ou não lineares diferentes (EDWARDS et al., 1998; AAVATSMARK et al., 2002; LE POTIER, 2005; LIPNIKOV, K. et al., 2007; YUANG, G. e SHENG, Z., 2008; GAO, Z. e WU, J., 2011). O fluxo sobre uma face do volume de controle \hat{L} , é expresso como:

$$\int_{IJ} \vec{v} \cdot \vec{n}_{IJ} ds = - \int_{\hat{L}} \underline{K}_{\hat{L}} \nabla p \cdot \vec{n}_{IJ} ds = - \int \nabla p \cdot \underline{K}_{\hat{L}}^T \cdot \vec{n}_{IJ} ds, \quad IJ \in E_{\hat{L}} \quad (8)$$

onde $\underline{K}_{\hat{L}}^T$ representa a matriz transposta de $\underline{K}_{\hat{L}}$. Na Eq. (8), aproximou-se o termo $\nabla p \cdot \underline{K}_{\hat{L}}^T \cdot \vec{n}_{IJ}$, usando uma expansão em Série de Taylor (YUANG, G. e SHENG, Z., 2008). Desde que $\overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},i(IJ)}}$ e $\overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},j(IJ)}}$ são bordas do triângulo $\Delta x_{\hat{L}} x_{\hat{L},i(IJ)} x_{\hat{L},j(IJ)}$, o termo $\underline{K}_{\hat{L}}^T \cdot \vec{n}_{IJ}$ pode ser escrito como uma combinação linear dessas faces como:

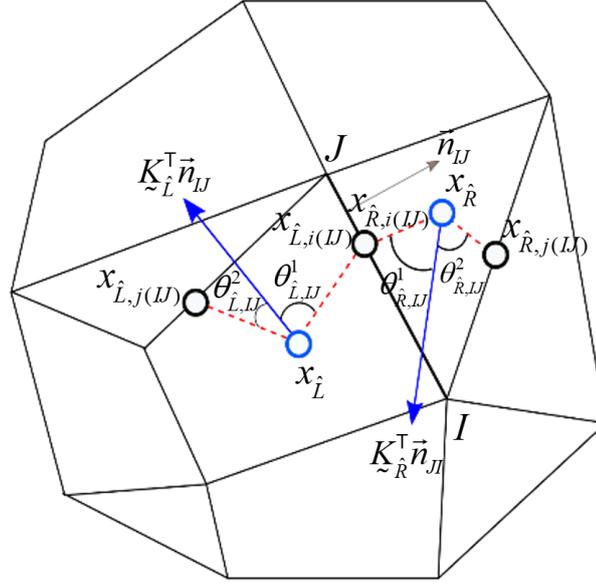
$$\underline{K}_{\hat{L}}^T \cdot \vec{n}_{IJ} = \alpha_{\hat{L},i(IJ)} \overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},i(IJ)}} + \alpha_{\hat{L},j(IJ)} \overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},j(IJ)}} \quad (9)$$

onde $x_{\hat{L},i(IJ)}$ e $x_{\hat{L},j(IJ)}$ são os pontos mostrados na Figura 1 exibida em seguida. Os coeficientes físico-geométricos $\alpha_{\hat{L},i(IJ)}$ e $\alpha_{\hat{L},j(IJ)}$ são dados por:

$$\alpha_{\hat{L},i(IJ)} = \frac{\|\underline{K}_{\hat{L}}^T \cdot \vec{n}_{IJ}\| \sin(\theta_{\hat{L},1})}{\sin(\theta_{\hat{L},1} + \theta_{\hat{L},2})} \quad \text{e} \quad \alpha_{\hat{L},j(IJ)} = \frac{\|\underline{K}_{\hat{L}}^T \cdot \vec{n}_{IJ}\| \sin(\theta_{\hat{L},2})}{\sin(\theta_{\hat{L},1} + \theta_{\hat{L},2})} \quad (10)$$

Na Eq. (10), os coeficientes existem quando os ângulos formados por segmentos $\overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},i(IJ)}}$ (resp. $\overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},j(IJ)}}$) e a co-normal $\underline{K}_{\hat{L}}^T$, satisfaz as condições $0 < \theta_{\hat{L},1}, \theta_{\hat{L},2} < \pi$ e $\theta_{\hat{L},1} + \theta_{\hat{L},2} < \pi$. É importante notar que os coeficientes $\alpha_{\hat{L},i(IJ)}$ e $\alpha_{\hat{L},j(IJ)}$ são não negativos, esta propriedade é essencial em métodos não lineares para garantir as propriedades de preservação monótona ou Princípio do Máximo Discreto (LE POTIER 2005; LIPNIKOV, K. et al., 2007; YUANG, G. e SHENG, Z., 2008; GAO, Z. e WU, J., 2013). Ao substituir-se a Eq. (9) na Eq. (10), obtendo-se a seguinte equação:

Figura 1 - Representação dos parâmetros físicos e geométricos para o método NLTPFA-H.



Fonte: CONTRERAS, F.R.L. et al. (2016).

$$\int_{IJ} -\underline{K} \nabla p \cdot \vec{n}_{IJ} ds = - \int_{IJ} \left(\alpha_{\hat{L},i(IJ)} \nabla p \cdot \overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},i(IJ)}} + \alpha_{\hat{L},j(IJ)} \nabla p \cdot \overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},j(IJ)}} \right) ds \quad (11)$$

Utilizando um método de diferença finita local para aproximar as derivadas parciais ao longo das direções $\overrightarrow{x_{\hat{L},j(IJ)} x_{\hat{L}}}$ e $\overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},i(IJ)}}$ (YUANG, G. e SHENG, Z., 2008):

$$\int_{IJ} -\underline{K} \nabla p \cdot \vec{n}_{IJ} ds = -\|\vec{IJ}\| \left(\alpha_{\hat{L},i(IJ)} \frac{p_{\hat{L},i(IJ)} - p_{\hat{L}}}{\|\overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},i(IJ)}}\|} + \alpha_{\hat{L},j(IJ)} \frac{p_{\hat{L},j(IJ)} - p_{\hat{L}}}{\|\overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},j(IJ)}}\|} \right) e \|\vec{IJ}\| = \int_{IJ} ds \quad (12)$$

A representação dos parâmetros físicos e geométricos para o método NLTPFA-H pode ser conferida na Figura 1, onde os círculos azuis representam os centróides ou baricentros dos volumes de controle, e os círculos pretos representam os pontos de interpolação, chamam-se de pontos harmônicos.

A Eq. (12) é equivalente a

$$\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} = \|\vec{IJ}\| \left(\xi_{\hat{L},i(IJ)} \left(p_{\hat{L},i(IJ)} - p_{\hat{L}} \right) + \xi_{\hat{L},j(IJ)} \left(p_{\hat{L},j(IJ)} - p_{\hat{L}} \right) \right) \quad (13)$$

onde

$$\xi_{\hat{L},i(IJ)} = \frac{\alpha_{\hat{L},i(IJ)}}{\|\overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},i(IJ)}}\|} \quad e \quad \xi_{\hat{L},j(IJ)} = \frac{\alpha_{\hat{L},j(IJ)}}{\|\overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},j(IJ)}}\|} \quad (14)$$

De maneira análoga, pode-se escrever o fluxo unilateral em relação a um volume de controle \hat{R} , como:

$$\vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ} = \|\vec{IJ}\| \left(\xi_{\hat{R},i(IJ)} \left(p_{\hat{R},i(IJ)} - p_{\hat{R}} \right) + \xi_{\hat{R},j(IJ)} \left(p_{\hat{R},j(IJ)} - p_{\hat{R}} \right) \right) \quad (15)$$

onde $x_{\hat{R},i(IJ)}$ e $x_{\hat{R},j(IJ)}$ são os pontos harmônicos em relação ao volume de controle \hat{R} (ver Figura 1) e os coeficientes são dados por:

$$\xi_{\hat{R},i(IJ)} = \frac{\alpha_{\hat{R},i(IJ)}}{\|x_{\hat{R}} x_{\hat{R},i(IJ)}\|} \quad \text{e} \quad \xi_{\hat{R},j(IJ)} = \frac{\alpha_{\hat{R},j(IJ)}}{\|x_{\hat{R}} x_{\hat{R},j(IJ)}\|} \quad (16)$$

2.1 Construção do fluxo unilateral

Para tornar o NLTPFA-H conservativo, usou-se os fluxos unilaterais para definir o fluxo único na face IJ (FUHRMANN J.; ROHDE, 2014). Logo,

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \mu_{IJ,\hat{L}} \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} - \mu_{IJ,\hat{R}} \vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{JI}, \quad (17)$$

onde $\mu_{IJ,\hat{L}}$ e $\mu_{IJ,\hat{R}}$ são dois parâmetros positivos que devem satisfazer:

$$\mu_{IJ,\hat{L}} + \mu_{IJ,\hat{R}} = 1 \quad (18)$$

Vale salientar que o método de volumes finitos é localmente conservativo, uma vez que para qualquer face \vec{IJ} separando \hat{L} e \hat{R} , retorna-se:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} + \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{JI} = 0 \quad (19)$$

Aplicando-se as Equações (17) e (18) em (19), chega-se em:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} &= \mu_{IJ,\hat{L}} \left(\xi_{\hat{L},i(IJ)} + \xi_{\hat{L},j(IJ)} \right) p_{\hat{L}} - \mu_{IJ,\hat{R}} \left(\xi_{\hat{R},i(IJ)} + \xi_{\hat{R},j(IJ)} \right) p_{\hat{R}} \\ &\quad + \mu_{IJ,\hat{R}} \left(\xi_{\hat{R},i(IJ)} p_{\hat{R},i(IJ)} + \xi_{\hat{R},j(IJ)} p_{\hat{R},j(IJ)} \right) \\ &\quad - \mu_{IJ,\hat{L}} \left(\xi_{\hat{L},i(IJ)} p_{\hat{L},i(IJ)} + \xi_{\hat{L},j(IJ)} p_{\hat{L},j(IJ)} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

onde os coeficientes μ e ξ são coeficientes que recebem parâmetros físico-geométricos. Buscando-se obter um método de volumes finitos não linear baseado na aproximação de fluxo de dois pontos, o terceiro e quarto termos da Eq. (19) deve desaparecer, então:

$$\begin{aligned} \mu_{IJ,\hat{R}} \left(\xi_{\hat{R},i(IJ)} p_{\hat{R},i(IJ)} + \xi_{\hat{R},j(IJ)} p_{\hat{R},j(IJ)} \right) - \mu_{IJ,\hat{L}} \left(\xi_{\hat{L},i(IJ)} p_{\hat{L},i(IJ)} + \xi_{\hat{L},j(IJ)} p_{\hat{L},j(IJ)} \right) &= 0 \\ \mu_{IJ,\hat{L}} + \mu_{IJ,\hat{R}} &= 1 \end{aligned} \quad (21)$$

Após a manipulação algébrica do sistema de Eqs. (20), os parâmetros $\mu_{IJ,\hat{L}}$ e $\mu_{IJ,\hat{R}}$ são dados por:

$$\mu_{IJ,\hat{L}} = \frac{|a_{IJ}^{\hat{R}}| + \varepsilon}{|a_{IJ}^{\hat{R}}| + |a_{IJ}^{\hat{L}}| + 2\varepsilon} \quad \text{e} \quad \mu_{IJ,\hat{R}} = \frac{|a_{IJ}^{\hat{L}}| + \varepsilon}{|a_{IJ}^{\hat{R}}| + |a_{IJ}^{\hat{L}}| + 2\varepsilon} \quad (22)$$

Onde ε representa o erro de interpolação. O fluxo único na face \vec{IJ} pode ser obtido ao se considerar as Eqs. (19) e (18), resultando:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = A_{IJ}^{\hat{L}}(p) p_{\hat{L}} - A_{IJ}^{\hat{R}}(p) p_{\hat{R}} \quad (23)$$

Onde,

$$A_{IJ}^{\hat{L}}(p) = \mu_{IJ,\hat{L}} \left(\xi_{\hat{L},i(IJ)} + \xi_{\hat{L},j(IJ)} \right) \quad \text{e} \quad A_{IJ}^{\hat{R}}(p) = \mu_{IJ,\hat{R}} \left(\xi_{\hat{R},i(IJ)} + \xi_{\hat{R},j(IJ)} \right) \quad (24)$$

Lembrando que os coeficientes ξ na Eq. (24) e os parâmetros $\mu_{IJ,\hat{L}}$, $\mu_{IJ,\hat{R}}$ na Eq. (22) são números reais não negativos, então $A_{IJ}^{\hat{L}}(p) \geq 0$ e $A_{IJ}^{\hat{R}}(p) \geq 0$. Essa condição é fundamental para garantir que o método seja monótono ou preserve o Princípio de Máximo Discreto.

Sempre que, $IJ \in \partial\Omega \cap \hat{L}$, i.e., a face fica sobre o contorno, o fluxo pode ser calculado diretamente através da seguinte equação:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = A_{IJ}^{\hat{L}}(p)p_{\hat{L}} - a_{IJ}^{\hat{L}} \quad (25)$$

onde,

$$A_{IJ}^{\hat{L}}(p) = \mu_{IJ,\hat{L}} \left(\xi_{\hat{L},i(IJ)} + \xi_{\hat{L},j(IJ)} \right) \quad \text{e} \quad a_{IJ}^{\hat{L}} = \left(\xi_{\hat{L},i(IJ)}p_{\hat{L},i(IJ)} + \xi_{\hat{L},j(IJ)}p_{\hat{L},j(IJ)} \right) \quad (26)$$

2.2 Sistema Discreto

Para cada volume de controle genérico \hat{L} , a equação de pressão discreta (1) é dada por:

$$\sum_{IJ \in \partial\hat{L}} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \bar{Q}V_{\hat{L}}, \quad \forall \hat{L} \in \Omega \quad (27)$$

A Eq. (27) pode ser escrita para todos os volumes de controle da malha computacional na seguinte forma matricial:

$$T(p)p = Q(p) \quad (28)$$

Onde $T(p)$ é a matriz de transmissibilidade, a qual é obtida pela montagem das seguintes matrizes que estão associadas a superfície de controle internas, ou seja, das faces em 2D.

$$T(p)_{IJ} = \begin{pmatrix} A_{IJ}^{\hat{L}}(p) & -A_{IJ}^{\hat{R}}(p) \\ -A_{IJ}^{\hat{L}}(p) & A_{IJ}^{\hat{R}}(p) \end{pmatrix} \quad (29)$$

E por matrizes na forma (1×1) :

$$T(p)_{IJ} = A_{IJ}^{\hat{L}} \quad (30)$$

para contornos de Dirichlet. O vetor do lado direito Q é gerado pelo termo de fonte ou sumidouro e os dados do contorno. O sistema não linear da Eq.(30) pode ser resolvido por métodos diferentes iterativos. Seguindo o trabalho de (LIPNIKOV, K. et al., 2007; LE POTIER, 2005; YUANG, G. e SHENG, Z., 2008; YUANG, G. e SHENG, Z., 2011; GAO, Z. e WU, J., 2013; GAO, Z. e WU, J., 2013; GAO, Z. e WU, J., 2015), usou-se o Método de Iteração de Picard junto com o acelerador de Anderson para poder melhorar a eficiência computacional, que pode ser descrito resumidamente a seguir. O Método de Iteração de Picard foi escolhido para resolver o sistema matricial não linear, pois dessa forma, a positividade da solução será preservada após cada iteração. O acelerador de Anderson foi usado para otimizar o algoritmo e as verificações das variáveis da matriz trabalhada. Escolha um pequeno $\varepsilon_{non} > 0$ e um vetor inicial p^0 positivo e repita até que a convergência seja alcançada para a tolerância prescrita ε_{non} , i.e.:

$$\text{Resolver } T(p^{k+1})p^k = Q^k \quad (31)$$

$$\text{Pare se } \|M(p^{k+1})p^{k+1} - F(p^{k+1})\| \leq \varepsilon_{non} \|M(p^0)p^0 - F(p^0)\| \quad (32)$$

2.3 Tratamento de fluxos de fronteira

Quando a superfície de controle (IJ) pertence ao contorno $\Gamma \Gamma_D \subset E_{\hat{L}} \cap E^{ext}$, as pressões são prescritas (condições de contorno de Dirichlet) e a Eq. (15), resulta em:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} = \|\vec{IJ}\| \mathfrak{K}_{\hat{L},IJ} p_{\hat{L}} - g_{\hat{L},IJ} \quad (33)$$

Onde, $\mathfrak{K}_{\hat{L},IJ} = \xi_{\hat{L},i(IJ)} + \xi_{\hat{L},j(IJ)}$ e $g_{\hat{L},IJ} = \xi_{\hat{L},i(IJ)} p_{\hat{L},i(IJ)} + \xi_{\hat{L},j(IJ)} p_{\hat{L},j(IJ)}$, sendo $p_{\hat{L},i(IJ)}$ e $p_{\hat{L},j(IJ)}$ as pressões definidas em Γ_D .

Quando a superfície de controle (IJ) pertence ao contorno $\Gamma_N \subset E_{\hat{L}} \cap E^{ext}$, os fluxos são impostos (condições de contorno de Neumann) e novamente, a partir da Eq. (4), pode-se escrever:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = -g_N \|\vec{IJ}\| \quad (34)$$

onde g_N é o fluxo dado sobre o contorno Γ_N .

2.4 Cálculo dos Pontos Harmônicos

A interpolação da pressão em pontos auxiliares representados pelas Eq. (13) e (15) desempenha um papel crucial na robustez e precisão do método trabalhado NLTPFA-H. Os vértices da malha são escolhas naturais, mas a interpolação da pressão nos vértices da malha com coeficientes não negativos podem ser uma tarefa difícil. Comparado aos vértices da malha como pontos de interpolação, o ponto harmônico associado à malha é mais atraente principalmente porque a interpolação da pressão envolve pressão em apenas dois elementos vizinhos e a ponderação coeficientes são sempre não negativas. A localização de um ponto harmônico y_σ associado a uma face σ compartilhada por dois elementos L_1 e L_2 é dado pela seguinte equação:

$$y_\sigma = \frac{\lambda_1 d_2 y_1 + \lambda_2 d_1 y_2 + d_1 d_2 (\gamma_1 - \gamma_2)}{\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1} \quad (35)$$

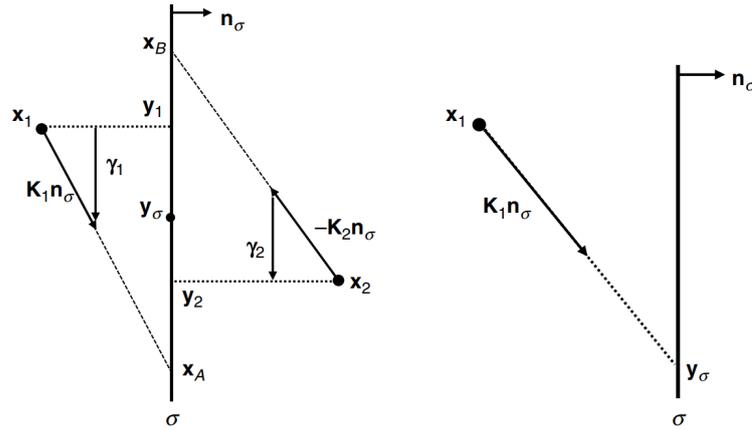
No presente trabalho, a Eq. (35) representa o cálculo dos pontos harmônicos *sem correção*.

O gráfico à esquerda da Figura 2 mostra todas as quantidades relevantes envolvidas na derivação de y_σ . n_σ é o vetor normal unitário para definir σ . Para $I = 1, 2$, x_1 é o centróide do elemento L_1 (volume de controle a esquerda), $\lambda_1 = n_\sigma \cdot K_i n_\sigma$, $\gamma_i = K_i n_\sigma - \lambda_1 n_\sigma$, d_i é a distância de x_i ao plano contendo a face σ , e y_i é a projeção de x_i no plano. A pressão p_σ no ponto harmônico pode ser interpolada usando a pressão nos centróides de L_1 e L_2 :

$$p_\sigma = \frac{\lambda_1 d_2 p_1 + \lambda_2 d_1 p_2}{\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1} \quad (36)$$

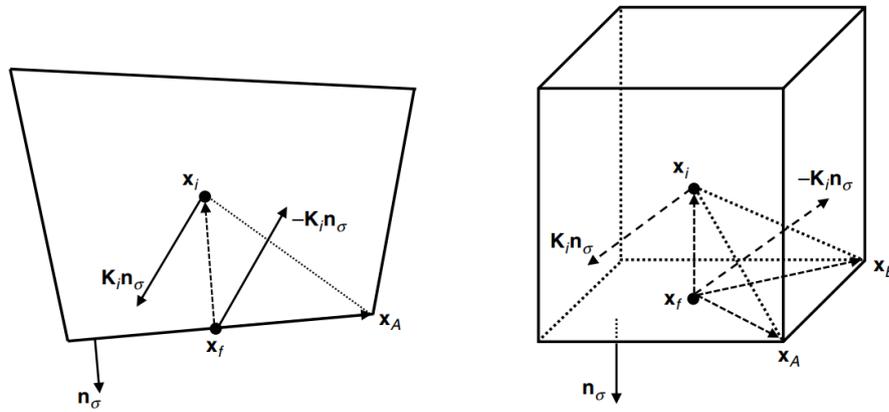
onde p_1 e p_2 são pressões nos centróides L_1 e L_2 , respectivamente. Para a derivação das Eqs. (35) e (36), os leitores são encaminhados para (AGÉLAS, L. et al., 2009). Para uma face $\sigma \in \Gamma_N$, o centróide de σ é escolhido como o ponto de interpolação na literatura. Se a condição de contorno de Dirichlet é aplicado na face, a pressão no centróide da face pode ser calculada diretamente a partir da condição de contorno fornecida. No entanto, se a condição de contorno de Neumann

Figura 2 - Ponto harmônico y_σ ; face interna(esquerda) e face de contorno(direita).



Fonte: ZHANG, W. e KOBAISI, M. (2019).

Figura 3 - Representação das conormais para faces de contorno.



Fonte: ZHANG, W. e KOBAISI, M. (2019).

é aplicada ao contorno, parece não haver uma maneira direta de reconstruir a pressão no centróide consistentemente (SCHNEIDER et al. 2017b). Para contornar este problema, usa-se uma estratégia simples e define-se um ponto de interpolação diferente para face $\sigma \in -N$.

O gráfico à direita da Figura 2 mostra uma face contorno $\sigma \in -N$. \vec{n}_σ é o vetor normal unitário apontando para fora de Ω_1 , e x_1 é o centróide da célula L_1 . O raio originado de x_1 ao longo da direção de $K_1 \vec{n}_\sigma$ cruzará o plano de suporte σ em um ponto y_σ , e este será tomado como novo ponto de interpolação para a face σ . Como o tensor de permeabilidade é definido positivamente, este ponto pode sempre ser encontrado desde que $(x_1 - x_\sigma) \cdot \vec{n}_\sigma < 0$ para qualquer ponto x_σ situado no plano. Dependendo da geometria da malha e do tensor de permeabilidade, este novo ponto de interpolação pode estar dentro das faces σ ou fora, como é o caso das faces internas. O fluxo fora da face σ pode então ser aproximado por:

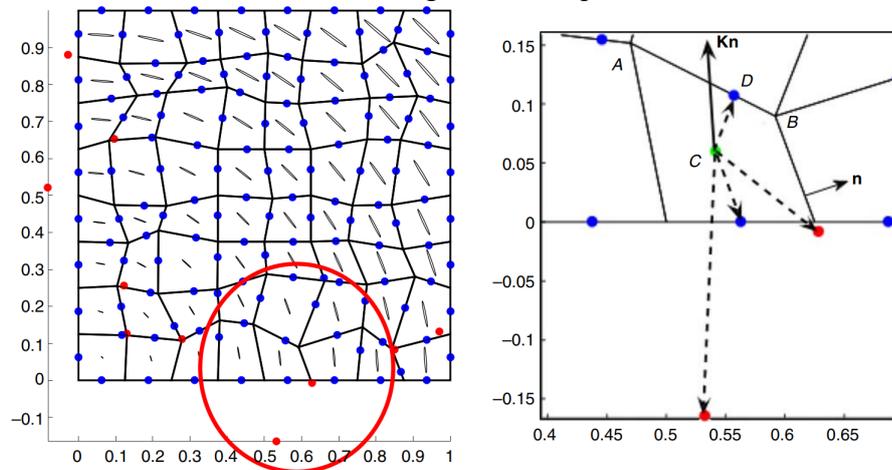
$$f_\sigma = -\nabla p \cdot K_1 n_\sigma |\sigma| = |\sigma| \frac{\|K_1 n_\sigma\|}{\|y_\sigma - x_1\|} \quad (37)$$

Da Eq. (26), a pressão em y_σ é:

$$p_\sigma = p_1 - \frac{\|y_\sigma - x_1\|}{\|k_1 n_\sigma\|} \bar{g}_N \quad (38)$$

Nota-se que embora este tratamento simples das faces no contorno de Neumann forneça uma

Figura 4 - Esquerda: pontos harmônicos (pontos azuis são pontos harmônicos situados dentro da face e pontos vermelhos são pontos situados fora dela), direita: zoom na parte circulada em vermelho do gráfico à esquerda.



Fonte: ZHANG, W. e KOBASI, M. (2019).

fórmula consistente para recuperar a pressão no ponto de interseção y_σ , pode não ser robusto, por exemplo, quando o ponto de interseção fica bem fora da face σ . O vetor conormal pode ser decomposto conforme a Figura 3.

Como mencionado anteriormente, a principal desvantagem do ponto harmônico é que para tensores de permeabilidade heterogênea e anisotropia em uma malha não ortogonal, alguns pontos harmônicos podem estar muito fora de sua face de malha associada. Como resultado, a decomposição de vetores conormais com coeficientes não negativos pode ser difícil. Por exemplo, o gráfico à esquerda da Figura 4 representa as localizações dos pontos harmônicos para uma malha quadrilateral 8×8 distorcida aleatoriamente preenchida por um campo de permeabilidade anisotrópica rotativa. O tensor de permeabilidade de cada elemento é representado pela elipse cujos semieixos são escalados pela raiz quadrada das permeabilidades máxima e mínima, respectivamente.

Embora a maioria dos pontos harmônicos esteja dentro da face (indicados pelos pontos azuis na Figura 4), existem alguns pontos fora da face (indicados pelos pontos vermelhos). O gráfico à direita da Figura 4 mostra uma ampliação dos pontos harmônicos deslocados da face (círculo vermelho do gráfico esquerdo). As quatro setas tracejadas em preto denotam os vetores começando no centróide da célula e terminando nos quatro pontos harmônicos associados às quatro faces da célula quadrilateral. O vetor conormal $K\vec{n}$ associado à face mais à direita é denotado pela seta sólida em preto. Pode-se ver facilmente na figura que decompor $K\vec{n}$ com coeficientes positivo usando pontos harmônicos só é impossível porque o centróide está fora da superfície convexa dos quatro pontos harmônicos associados a este elemento.

Novas formulações de NTPFA foram propostas em (GAO, Z. e WU, J., 2014) e (GAO, Z. e WU, J., 2015) que apenas exigem que a soma dos coeficientes de decomposição seja positiva. Embora este requisito seja menos restritivo do que o usual requisito de que cada coeficiente de decomposição seja não negativo, ele ainda pode ser violado, especialmente para malhas distorcidas. A dificuldade pode ser contornada pelo algoritmo de busca proposto em (SCHNEIDER et al., 2018), mas ao custo de aumentar potencialmente o estêncil do fluxo unilateral. Além disso, o NTPFA-H ainda exige que cada um dos coeficientes ser não negativos. O exemplo também mostra que alguns pontos harmônicos que estão situados muito fora de suas faces associadas podem causar dificuldade para a decomposição de vetores conormais. Se todos os pontos harmô-

nicos estiverem próximos aos centróides de suas faces associadas, a decomposição de vetores conormais não terá problemas na maioria das vezes, exceto em alguns casos extremos.

Serão apresentadas aqui algumas correções dos pontos harmônicos com objetivo de garantir a positividade dos coeficientes físico geométricos α da Eq. (10).

2.5 Correção dos Pontos Harmônicos Tipo 1

A versão original do cálculo dos pontos harmônicos foi proposta por (AGÉLAS, L. et al., 2009) na seguinte forma:

$$y_\sigma = \frac{h_{\hat{1},IJ} \vec{n}_{IJ}^T K_1 \vec{n}_{IJ} x_1 + h_{\hat{2},IJ} \vec{n}_{IJ}^T K_2 \vec{n}_{IJ} x_2}{h_{\hat{1},IJ} \vec{n}_{IJ}^T K_1 \vec{n}_{IJ} + h_{\hat{2},IJ} \vec{n}_{IJ}^T K_2 \vec{n}_{IJ}} \quad (39)$$

onde $h_{\hat{1},IJ}$ representa as alturas relativas ao elemento L_1 sobre a face σ ou IJ e $h_{\hat{2},IJ}$ representa as alturas relativas ao elemento L_2 sobre a face σ ou IJ .

2.6 Correção dos Pontos Harmônicos Tipo 2

A correção a seguir é utilizada por alguns autores, porém esta correção pode afetar a acurácia do método proposto, pois em malhas muito distorcidas, os pontos harmônicos podem se localizar ainda muito distante da face, como mostram os experimentos numéricos.

$$y_\sigma = \frac{x_I + x_J}{2} \quad (40)$$

onde x_I e x_J são vértices da face IJ .

2.7 Correção dos Pontos Harmônicos Tipo 3

Esta correção foi formulada inicialmente por (ZHANG, W. e KOBAYASHI, M., 2019), onde a Eq. (35) mostra que se os dois tensores de permeabilidade K_1 e K_2 forem iguais ou isotrópicos, o ponto harmônico y_σ será limitado entre os dois pontos de projeção y_1 e y_2 . Sabe-se que a localização do ponto harmônico para tensores de permeabilidade heterogênea e anisotrópica gerais K_1 e K_2 , dá-se uma derivação diferente. Considerando a face σ compartilhada por dois elementos mostrados na Figura 2. Primeiro, busca-se o ponto x_A que está no plano que contém a face σ tal que o vetor $x_A - x_1$ é paralelo a $K_1 n_\sigma$. Da mesma forma, podemos encontrar o ponto x_B de forma que o vetor $x_B - x_2$ seja paralelo a $K_2 n_\sigma$. Assumindo que a pressão desconhecida p é por partes a fim, o fluxo para fora da célula L_1 e L_2 pode ser expresso individualmente como:

$$f_\sigma^1 = -(\nabla p)_1 \cdot K_1 n_\sigma \cdot |\sigma| \approx |\sigma| \frac{\|K_1 n_\sigma\|}{\|y_\sigma - x_1\|} (p_1 - p_A) = |\sigma| \frac{w_1}{l_1} (p_1 - p_A) \quad (41)$$

$$f_\sigma^2 = -(\nabla p)_2 \cdot K_2 n_\sigma \cdot |\sigma| \approx |\sigma| \frac{\|K_2 n_\sigma\|}{\|y_\sigma - x_2\|} (p_2 - p_B) = |\sigma| \frac{w_2}{l_2} (p_2 - p_A) \quad (42)$$

onde $w_i = \|K_i n_\sigma\|$, $i = 1, 2$; $l_1 = \|x_A - x_1\|$ e $l_2 = \|x_B - x_2\|$ e $|\sigma|$ é a área da face. Assumindo que a pressão e o tangencial que parte do gradiente de pressão g_σ são contínuos na face σ . Tomando um ponto arbitrário y no plano contendo a face σ , as pressões nos pontos x_A e x_B podem ser escritas em termos de g_σ e a pressão em y como:

$$p_A = p(y) + g_\sigma \cdot (x_A - y) \quad (43)$$

$$p_B = p(y) + g_\sigma \cdot (x_B - y) \quad (44)$$

Substituindo a Eq. (44) na Eq. (42) e impondo a condição de continuidade de fluxo $f_\sigma^{(1)} + f_\sigma^{(2)} = 0$, pode-se resolver a expressão para $p(y)$ como:

$$p(y) = \frac{\frac{w_1}{l_1}p_1 + \frac{w_2}{l_2}p_2 - g_\sigma \cdot \left[\frac{w_1}{l_1}(x_A - y) + \frac{w_2}{l_2}(x_B - y) \right]}{\frac{w_1}{l_1} + \frac{w_2}{l_2}} \quad (45)$$

A Eq. (45) mostra que a pressão em qualquer ponto do plano que contenha a face σ é uma combinação convexa linear de pressão nos centróides de dois elementos vizinhos somado a um termo responsável pela variação de pressão ao longo da direção tangente. Se for escolhido um determinado ponto y de modo que o último termo no numerador desaparece independentemente do gradiente tangente g_σ , a pressão neste ponto dependerá da pressão nos centróides de apenas dois elementos vizinhos. Igualando $\left[\frac{w_1}{l_1}(x_A - y) + \frac{w_2}{l_2}(x_B - y) \right]$ a zero, pode-se resolver para este ponto particular y denotado como y_σ ,

$$y_\sigma = \frac{\frac{w_1}{l_1}p_1 + \frac{w_2}{l_2}p_2}{\frac{w_1}{l_1} + \frac{w_2}{l_2}} \quad (46)$$

A pressão nesse ponto é então dada por:

$$p(y_\sigma) = \frac{\frac{w_1}{l_1}p_1 + \frac{w_2}{l_2}p_2}{\frac{w_1}{l_1} + \frac{w_2}{l_2}} \quad (47)$$

A partir dos triângulos semelhantes na Figura 1, pode-se mostrar que as seguintes relações se mantêm:

$$\frac{w_1}{l_1} = \frac{\lambda_1}{d_1}, \quad \frac{w_2}{l_2} = \frac{\lambda_2}{d_2} \quad (48)$$

$$x_a - y_1 = \frac{d_1}{\lambda_1}\gamma_1, \quad y_2 - x_B = \frac{d_2}{\lambda_2}\gamma_2 \quad (49)$$

Substituindo a Eq. (36) nas Eqs. (34) e (35), as Eqs. (27) e (28) podem ser recuperados com algumas manipulações algébricas. A Eq. (46) mostra claramente que o ponto harmônico é limitado entre os dois pontos x_A e x_B .

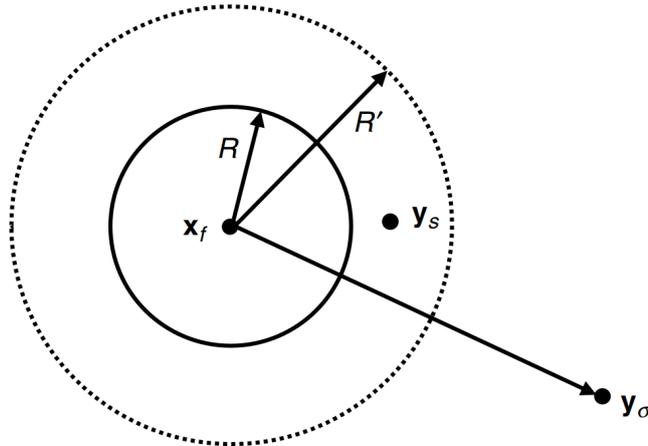
Lembre-se que a dificuldade de decompor vetores conormais com coeficientes não negativos é geralmente causada por aqueles pontos harmônicos que ficam fora de suas faces associadas; propõe-se melhorar a robustez da decomposição da conormal restringindo a posição do ponto de interpolação para que esteja dentro de uma distância prescrita do centróide da face. Para cada ponto harmônico, foi definida uma razão r_σ para quantificar a extensão em que se desvia do centróide da face x_f :

$$r_\sigma = \|y_\sigma - x_f\|/R \quad (50)$$

onde R é um raio equivalente da face definida como $R = 0,5A$ em duas dimensões e A é o comprimento da face em duas dimensões. Agora, deseja-se restringir o ponto de interpolação para uma distância R' do centróide x_f da face f (ver Figura 5).

Se $\|y_\sigma - x_f\| \leq R'$ o ponto harmônico original y_σ pode ser usado diretamente.

Figura - 5 O ponto harmônico y_σ está longe do centróide x_f de sua face associada. Um ponto diferente y_s dentro do raio especificado R' é escolhido como o novo ponto de interpolação.



Fonte: ZHANG, W. e KOBAISI, M. (2019).

Se $\|y_\sigma - x_f\| \geq R'$, um ponto y_σ diferente é escolhido como o novo ponto de interpolação.

A partir da derivação do ponto harmônico, sabe-se que a pressão de um ponto arbitrário y que se encontra no plano que contém a face é dada pela Eq. (33). No entanto, o gradiente de pressão g_σ ao longo do plano contendo σ é desconhecido e não se pode calcular a pressão em y_s diretamente. Para superar esse problema, escolheu-se o ponto y_s que minimizará o valor absoluto do último termo no numerador da Eq. (33). A pressão y_s é então interpolada pela mesma equação exata da Eq. (35):

$$p(y_s) = \frac{\frac{w_1}{l_1}p_1 + \frac{w_2}{l_2}p_2 - g_\sigma \cdot \left[\frac{w_1}{l_1}(x_A - y_s) + \frac{w_2}{l_2}(x_B - y_s) \right]}{\frac{w_1}{l_1} + \frac{w_2}{l_2}} \approx \frac{\frac{w_1}{l_1}p_1 + \frac{w_2}{l_2}p_2}{\frac{w_1}{l_1} + \frac{w_2}{l_2}} \quad (51)$$

Como está sendo usado a mesma interpolação de pressão para y_σ e y_s , y pode ser visto como uma correção para a localização de y_σ . Quando o último termo corre o risco de perder a precisão, um problema de minimização é resolvido para manter o efeito da correção o menor possível. Como g_σ é desconhecido e observando que g_σ é paralelo ao plano que contém a face, toma-se y_s como a solução para o seguinte problema de otimização:

$$\text{Minimizar } F(y) = \left\| \frac{w_1}{l_1}(x_A - y_s) + \frac{w_2}{l_2}(x_B - y_s) \right\| \quad (52)$$

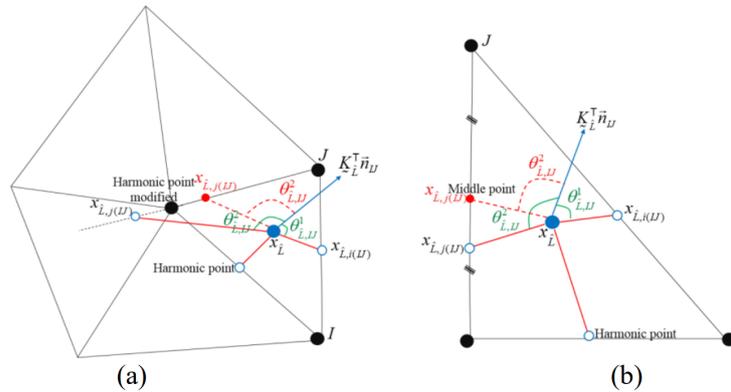
$$\text{Sujeito a } \|y - x_f\| \leq R' \quad (53)$$

Ao resolver o problema de otimização acima, y será o novo ponto de interpolação para a face σ e a interpolação de pressão em y_s é dada pela Eq. (38). Para a face $\sigma \in \Gamma_N$, o novo ponto de interpolação introduzido na subseção anterior também pode desviar-se muito do centróide da face e, portanto, precisar de correção também. Para faces $\sigma \in \Gamma_D$, o centróide da face é considerado o ponto de interpolação e nenhuma correção é necessária.

Quando se lida com problemas com grande anisotropia ou malhas muito distorcidas, os seguintes casos podem acontecer:

Caso 1: Alguns pontos harmônicos podem ficar fora das bordas da malha e a soma dos ângulos $\theta_{\hat{L},IJ}^1 + \theta_{\hat{L},IJ}^2$ (ver Figura 6.a) é maior que 180° . Neste caso, os pontos harmônicos são calculados pela seguinte equação:

Figura - 6 Representação de casos problemáticos: (a) pontos médios harmônicos que estão localizados fora da borda e (b) pontos harmônicos sobre bordas, mas a soma dos ângulos é maior que 180° .



Fonte: CONTRERAS, F.R.L. et al. (2016).

$$x_{IJ} = \frac{h_{\hat{L},IJ} k_{\hat{R},IJ}^{(n)} x_{\hat{R}} + h_{\hat{R},IJ} k_{\hat{L},IJ}^{(n)} x_{\hat{L}}}{h_{\hat{L},IJ} k_{\hat{R},IJ}^{(n)} + h_{\hat{R},IJ} k_{\hat{L},IJ}^{(n)}} \quad (54)$$

Caso 2: Os pontos harmônicos ainda pertencem à aresta, mesmo que a soma dos ângulos $\theta_{\hat{L},IJ}^1 + \theta_{\hat{L},IJ}^2$ seja maior que 180° (ver Figura 6.b). Neste caso, o ponto médio substitui o ponto harmônico

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

3.1 Considerações Matemáticas

Nesta seção, apresentar-se-á alguns exemplos numéricos para mostrar a robustez e acurácia do método NLTPFA-H. Primeiro, será definida brevemente a seguinte norma para avaliar os erros de interpolação. Por exemplo, para a pressão p , usa-se a seguinte norma para o erro do referido campo:

$$\varepsilon_p = \left(\frac{\sum_{\hat{L} \in M} (p(\vec{x}_{\hat{L}}) - p_{\hat{L}}) V_{\hat{L}}}{\sum_{\hat{L} \in M} V_{\hat{L}}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (55)$$

onde $p(\vec{x}_{\hat{L}})$ é a solução analítica avaliada no baricentro ($\vec{x}_{\hat{L}}$) do volume de controle \hat{L} e para o erro no campo do fluxo, usa-se:

$$\varepsilon_F = \left(\frac{\sum_{\hat{L} \in E} ((\vec{F}_n(\vec{x}_{IJ}) - \vec{F}_{IJ}) \vec{n}_{IJ})^2 A_{IJ}}{\sum_{\hat{L} \in E} A_{IJ}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (56)$$

onde o fluxo analítico no ponto médio (\vec{x}_{IJ}) da borda IJ é definido por $\vec{F}_n(\vec{x}_{IJ}) = -K \nabla(\vec{x}_{IJ})$ e A_{IJ} é uma área representativa associada à borda IJ , mais precisamente, é a soma das áreas dos currículos que compartilham a borda IJ .

Agora as taxas de convergência numérica $R_\gamma(\gamma = p, F)$ são obtidas pela seguinte expressão:

$$R_\gamma = \frac{\log(\varepsilon_\gamma(h_2)/\varepsilon_\gamma(h_1))}{\log(h_2/h_1)} \quad (57)$$

Onde h_1 e h_2 denotam os tamanhos de malha de duas malhas sucessivas, por exemplo, $\varepsilon_\gamma(h_1)$ e, por exemplo, $\varepsilon_\gamma(h_2)$, as correspondentes normas dos erros.

Os valores máximo e mínimo do campo escalar são calculados usando a seguinte relação:

$$p_{max} = \max_{\hat{L} \in M} \{p_{\hat{L}}\} \quad \text{e} \quad p_{min} = \min_{\hat{L} \in M} \{p_{\hat{L}}\}, \text{ respectivamente.}$$

As malhas são discretizadas e subdivididas de diferentes formas. Cada parte possui parâmetros e propriedades. Essas pequenas partes são chamadas de Volumes de Controle (CVs). A quantidade de CVs passa a informação de em quantos elementos aquela malha foi subdividida.

3.2 Verificação de preservação de linearidade: drenagem oblíqua

Para verificação do método NLTPFA-H, com intuito de verificar se o mesmo reproduz soluções lineares exatas por partes em meios heterogêneos e anisotrópicos, foi utilizado o problema de (HERBIN, R. e HUBERT, F., 2008), presente na literatura. O domínio é definido como:

$$\Omega_1 = \{\vec{x} \in \Omega \text{ tal que } \square_1(\vec{x}) < 0\} \quad (58)$$

$$\Omega_2 = \{\vec{x} \in \Omega \text{ tal que } \square_1(\vec{x}) > 0, \square_2(\vec{x}) < 0\} \text{ e } \square = \square_1 \cup \square_2 \cup \square_3 \quad (59)$$

$$\Omega_3 = \{\vec{x} \in \Omega \text{ tal que } \square_2(\vec{x}) > 0\}, \quad (60)$$

Onde,

$$\square_1(\vec{x}) = y - 0.2(x - 0.5) - 0.475 \quad (61)$$

$$\square_2(\vec{x}) = \square_1(\vec{x}) - 0.05 \quad (62)$$

$$\vec{x} = (x, y) \in \Omega \quad (63)$$

Neste problema, considerou-se uma configuração para qual a solução analítica é dada por:

$$p(\vec{x}) = 2 - x - 0.2y, \quad (64)$$

e o perfil da solução é representado na Figura 7.

As condições de contorno de Dirichlet não homogêneo são dadas por:

$$g_D(\vec{x}) = 2 - x - 0.2y \quad (65)$$

para $\vec{x} = (x, y) \in \partial\Omega$ e o tensor de difusão heterogêneo e anisotrópico é dado por:

$$\underline{K} = \mathfrak{R}_\square \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} R_\square^{-1} \text{ e } \square = \arctan(0.2) \quad (66)$$

onde \mathfrak{R}_\square é matriz de rotação, $\alpha = 100$, $\beta = 10$ em Ω_2 e $\alpha = 1$, $\beta = 0$: 1 em $\Omega_1 \cup \Omega_3$.

Conforme (HERBIN, R. e HUBERT, F., 2008), o referido problema retrata uma situação presente na engenharia de fluxo subterrâneo. Discretizou-se o domínio usando uma malha oblíqua ver a Figura 7, e obteve-se os seguintes erros: $\varepsilon_u = 1.8043 \cdot 10^{-13}$ e $\varepsilon_F = 6.3265 \cdot 10^{-13}$, mostrando que o método NLTPFA-H preserva linearidade. Na Tabela 1 observa-se que não é necessária nenhuma correção, já que nenhum ponto harmônico cai fora da face.

Como esse é um problema que possui um pequeno custo computacional, a tolerância para o erro não linear adotada foi na ordem de 10^{-15} . Não é necessário o cálculo de taxas de convergências, por se tratar de soluções exatas. As pressões máximas e mínimas foram, respectivamente, 1.9461 e 0.8538. Os resultados podem ser conferidos logo abaixo através da Tabela 1.

Figura 7 - (a) Malha oblíqua (b) campo de pressão obtido pelo método NLTPFA-H.



(a) Adaptado de HERBIN, R. e HUBERT, F. (2008); (b) Autor (2022).

Tabela 1 - Teste de preservação de linearidade usando o NLTPFA-H.

Método	CVs = 210	
SEM CORREÇÃO	ε_u	$1.1135 \cdot 10^{-14}$
	ε_F	$7.0287 \cdot 10^{-14}$
	Iterações	32
CORREÇÕES TIPOS 1, 2 E 3	ε_u	$1.1135 \cdot 10^{-14}$
	ε_F	$7.0287 \cdot 10^{-14}$
	Iterações	32
	Faces corrigidas	0

Fonte: Autor (2022).

Conforme notado na Tabela 1, não se fez nenhuma correção, gerando o mesmo resultado numérico para os erros nos campos de pressão e de velocidade. Por a solução ser exata, não houve taxa de convergência.

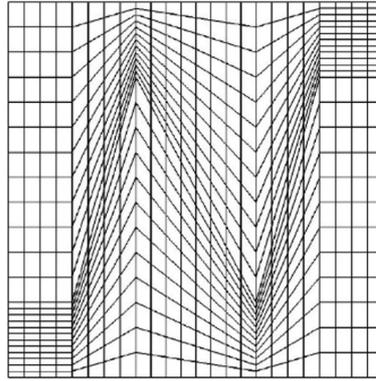
3.3 Teste de convergência: meio poroso altamente heterogêneo e anisotrópico

Este problema foi adaptado de (YUANG, G. e SHENG, Z., 2016) e consiste em um domínio quadrado de dimensões $[0; 1]^2$ com um tensor de permeabilidade que varia em função da posição e é definido por:

$$\underline{K}(\vec{x}) = \mathfrak{R}_\theta \begin{pmatrix} k_1(\vec{x}) & 0 \\ 0 & k_2(\vec{x}) \end{pmatrix} R_\theta^{-1} \text{ e } \theta = 5\pi/12 \quad (67)$$

A malha utilizada para o teste de convergência nesse problema é exibida na Figura 8.

Figura 8 - Malha quadrilateral Kershaw com 576 CVs.



Fonte: Adaptado de YUANG, G. e SHENG, Z. (2016).

Onde $k_1(\vec{x}) = 1 + 2x^2 + y^2$ e $k_2(\vec{x}) = 1 + x^2 + 2y^2$. A solução analítica do problema é dada por:

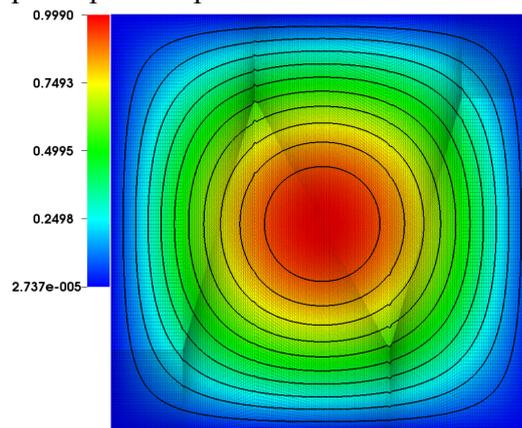
$$p(\vec{x}) = \sin(\pi x)\sin(\pi y) \quad (68)$$

e as condições de contorno de Dirichlet são obtidas diretamente pela imposição da solução analítica sobre a borda da malha.

Por se tratar de um método não linear, o NLTPFA-H exige uma demanda computacional considerável, principalmente ao trabalhar com as malhas mais refinadas. Apesar disso, busca-se resultados satisfatórios e com uma boa ordem de precisão. Visto isso, foi utilizada uma tolerância para o erro não linear na ordem de 10^{-10} , para a malha da Figura 8, afim de se realizar o teste de convergência.

Os resultados dos erros e taxas de convergência para a malha quadrilateral levemente distorcida podem ser observados na Tabela 2.

Figura 9 - Campo de pressão para a malha de Kershaw com 36864 CVs.



Fonte: Autor 2022.

O campo de pressão para a malha da Figura 8 pode ser visto através da Figura 9. É de conhecimento que o método NLTPFA-H resolve, geralmente, problemas de difusão em meios heterogêneos e altamente anisotrópicos. Para poder analisar a robustez e acurácia do método proposto, foram tomados alguns exemplos da literatura. As malhas usadas no presente trabalho foram desenvolvidas no pré-processador chamado Gmsh. Após isso, o método é implementado através de um algoritmo baseado nas faces das malhas (CONTRERAS, F.R.L. et al., 2016), desenvolvido em Matlab. Logo obtém-se o campo pressão e usando-se um pós-processador

Tabela 2 - Erros e taxas de convergência usando o método NLTPFA-H.

CVs		144	576	2 314	9 216	36 864
SEM CORREÇÃO	ε_p	0.0254	0.0138	0.0054	0.0016	$4.5039 \cdot 10^{-04}$
	R_p	-	0.8802	1.3536	1.8073	1.8288
	ε_F	0.3920	0.1860	0.0742	0.0256	0.0083
	R_F	-	1.0755	1.3258	1.5352	1.6249
	Iterações	29	43	69	74	97
	<hr/>					
COR. TIPO 1	ε_p	0.0253	0.0138	0.0053	0.0016	$4.5001 \cdot 10^{-04}$
	R_p	-	0.8744	1.3806	1.7279	1.8300
	ε_F	0.3964	0.1871	0.0744	0.0257	0.0083
	R_F	-	1.0831	1.3304	1.5335	1.6305
	Iterações	29	43	69	75	82
	Faces corrig.	11	23	43	85	171
<hr/>						
COR. TIPO 2	ε_p	0.0749	0.0399	0.0198	0.0090	0.0043
	R_p	-	0.9085	1.0108	1.1375	1.0655
	ε_F	0.8457	0.5201	0.3298	0.2236	0.1630
	R_F	-	0.7013	0.6571	0.5606	0.4560
	Iterações	25	42	47	61	71
	Faces corrig.	11	23	43	85	171
<hr/>						
COR. TIPO 3	ε_p	0.0475	0.0338	0.0167	0.0075	0.0035
	R_p	-	0.4909	1.0171	1.1548	1.0995
	ε_F	0.6040	0.4326	0.2635	0.1736	0.1253
	R_F	-	0.4815	0.7152	0.6020	0.4704
	Iterações	26	39	50	64	73
	Faces corrig.	11	23	43	85	171

Fonte: Autor (2022).

chamado Visit, plota-se essa pressão, como pode ser visto na Figura 9, onde têm-se o campo de pressão obtido pelo (AUTOR, 2022), adaptando uma malha de (YUANG, G. e SHENG, Z., 2016).

Perceba que há um grande nível de anisotropia da malha de Kershaw (Figura 8). Valores para os resultados e erros dos campos de pressão e velocidade, taxas de convergência de ambos os campos, quantidade de iterações necessárias para tolerância do erro podem ser acompanhados através da Tabela 2.

Note que para o teste sem correção dos pontos e utilizando a 1ª correção, a precisão utilizando a malha mais refinada e o método NLTPFA-H teve ordem superior a 1, 8 para o campo de pressão. Deve-se salientar que os pontos harmônicos sem correção ainda conseguiram representar adequadamente o campo de pressão, isto porque, esses pontos não caíram muito longe da face. Já para o campo de velocidades, foi obtida uma taxa de convergência superior a 1, 6. Usando as correções tipo 2 e 3, os erros para ambos os campos foram maiores e as taxas de convergência relativamente menor.

A malha quadrilateral estruturada altamente distorcida (Kershaw), possui regiões distorcidas, o que exige maior esforço computacional e torna a matriz levemente mal condicionada, devendo ser condicionado utilizando algum pré-condicionador. Devido ao seu formato, sua taxa de convergência demora um pouco mais para atingir valores satisfatórios, o que só ocorre a partir de 9216 CVs, conforme observado na Tabela 2. A correção tipo 1 foi a que apresentou melhores resultados para os erros dos campos de pressão e velocidade, e as taxas de convergência, se comportando bem para esses casos de alta anisotropia e heterogeneidade, garantindo

resultados satisfatórios, dentro do esperado para esses problemas.

3.4 Teste de Princípio de Máximo Discreto (PMD)

A finalidade do problema a seguir é verificar as possíveis violações do Princípio Máximo Discreto (PMD).

3.4.1 Meio altamente heterogêneo e anisotrópico

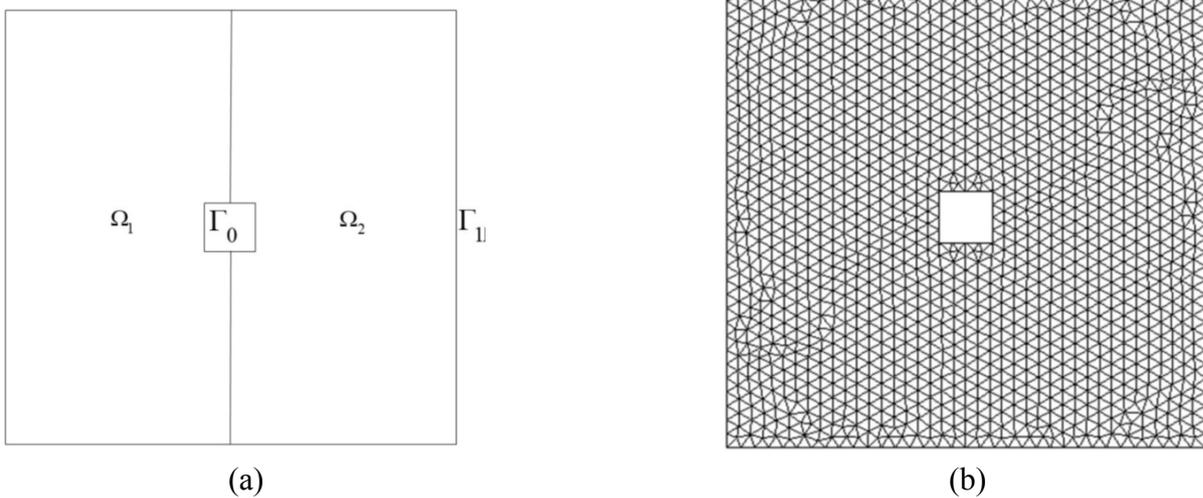
O problema trabalhado nesse tópico foi adaptado de (QUEIROZ, L. et al., 2014) e, novamente, foi testado o método NLTPFA-H para um meio heterogêneo e extremamente anisotrópico. Para este exemplo, considera-se um domínio quadrado unitário com um furo interno definido como: $\Omega = [0, 1]^2 / [4/9, 5/9]^2$ (ver Fig. 10.a), e tal que o limite é a união disjunta de Γ_0 e Γ_1 . Além disso, defini-se $g_D = 2$ em Γ_0 , $g_D = 0$ em Γ_1 e o tensor de difusão é dado por:

$$\underline{K}(\vec{x}) = \Re_{\theta} \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix} R_{\theta}^{-1} \quad \text{para } \vec{x} = (x, y) \in \square_1, \quad x \leq 0.5 \quad (69)$$

$$\underline{K}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 10^3 x_1^2 + y & -(1 - 10^3) x_1 y_1 \\ -(1 - 10^3) x_1 y_1 & x_1^2 + 10^3 y_1^2 \end{pmatrix} \quad \text{para } \vec{x} = (x, y) \in \Omega_2, \quad x > 0.5 \quad (70)$$

onde $\theta = \pi/2$, $x_1 = x + 10^{-3}$ e $y_1 = y + 10^{-3}$.

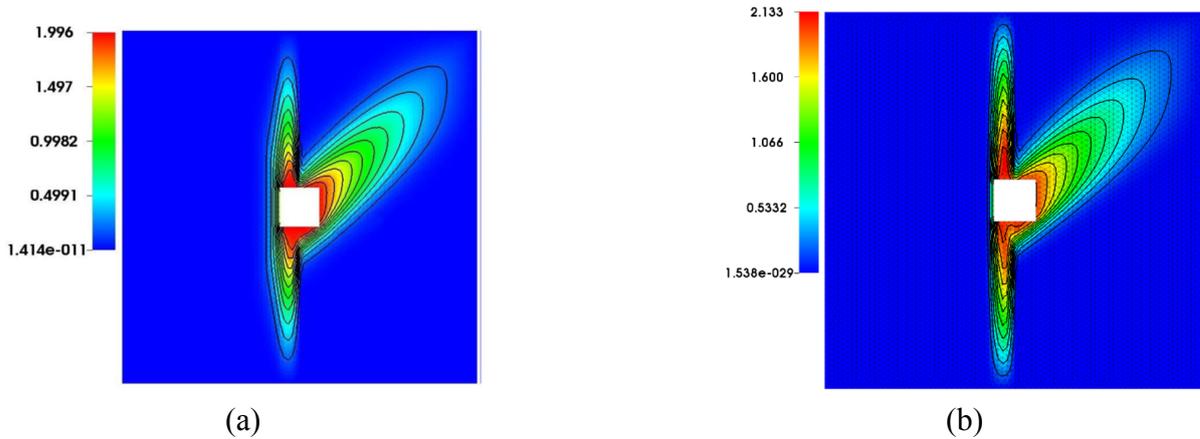
Figura 10 - (a) Esboço do domínio computacional e (b) malha triangular não estruturada com 2730 CVs.



Fonte: Adaptado de CONTRERAS, F.R.L. et al. (2019).

O resultado para o campo de pressão obtido com o método NLTPFA-H pode ser conferido através da Figura 11.b, e na Figura 11.a, tem-se um resultado de referência obtido pelo método SSEPS (Small Stencil and Extremum-Preserving Scheme) proposto por (GAO, Z. e WU, J., 2013), que também aplicaram o SSEPS ao problema de Queiroz. Note que este método respeita os valores extremos, ou seja, satisfaz o critério de PMD (Princípio do Máximo Discreto). Enquanto na Figura 11.b, apresenta-se o campo de pressão obtido pelo método NLTPFA-H, nota-se que este método produz soluções positivas como esperado, enquanto o extremo superior foi violado (métodos não lineares monótonos violam o PMD), isso acontece porque a matriz de coeficientes não é simétrica. Para o teste de monotonicidade, note que a tolerância foi na

Figura 11 - Meio altamente heterogêneo e anisotrópico: (a) a solução de referência foi obtida com o método SSEPS e (b) foi obtida com o método NLTPFA-H, usando uma malha de 5184 CVs.



Fonte: (a) GAO, Z. e WU, J. (2013); (b) Autor (2022).

Tabela 3 - Teste de monotonicidade usando o método NLTPFA-H.

CVs		324	1 296	5 184
CORREÇÃO TIPO 1	P_{\max}	1.9491	2.1637	2.1304
	P_{\min}	-	0.000	0.000
	Iterações	50	77	87
	Faces corrigidas	24	42	22
CORREÇÃO TIPO 2	P_{\max}	1.9491	2.1637	2.1304
	P_{\min}	$3.4273e^{-21}$	0.000	0.000
	Iterações	46	75	85
	Faces corrigidas	24	42	22
CORREÇÃO TIPO 3	P_{\max}	1.9491	2.1637	2.1304
	P_{\min}	$2.5935e^{-21}$	0.000	0.000
	Iterações	78	68	87
	Faces corrigidas	24	42	22

Fonte: Autor (2022).

ordem de 10^{-10} . Resultados mostrando os valores máximos e mínimos e número de iterações para uma sequência de malhas refinadas é apresentado na Tabela 3. Nesta tabela pode-se observar que o método NLTPFA-H ultrapassa os valores limites superiores, isto também acontece porque malhas mais refinadas apresentam anisotropia de malha além da anisotropia do meio, o que compromete a construção da matriz não linear. Por outro lado, na mesma tabela, observa-se que os pontos harmônicos sem correção não foram contabilizados já que eles não conseguiram entregar os parâmetros dados na Eq. (10) sujeito as suas restrições, isso aconteceu porque os pontos harmônicos caíram muito distante da face. As correções conseguiram representar o campo de pressão com certas oscilações na parte superior, violando o limite da pressão definida através do domínio.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho busca obter a implementação da correção ao se fazer a interpolação da pressão nos pontos harmônicos, buscando garantir a positividade dos resultados numéricos, assegurando a robustez e acurácia na simulação numérica em meios altamente heterogêneos e

anisotrópicos. Ao utilizar-se os métodos existentes, notou-se que o método se comportava muito bem em meios anisotrópicos e heterogêneos mantendo a positividade do campo de pressão, contudo, submetido a malhas com anisotropia elevada, viola o PMD. Nos resultados, observou-se que o método, utilizando pontos harmônicos sem correção não consegue calcular os parâmetros necessários para construir o método NLTPFA-H, isso acontece, porque os pontos harmônicos situam-se distante da face. Esta última desvantagem é usual em métodos não lineares baseado na aproximação do fluxo por dois pontos. Baseado nisso foi implementado um limitador para a distância desse ponto harmônico até o centro da célula, toda vez que o mesmo for localizado fora dela. Para abranger ainda mais os testes, foram utilizadas 3 tipos de correções diferentes. Nos 3 problemas simulados, não houve alteração nos resultados para o teste de preservação linear, porque o cálculo do campo de pressão naquele ponto utiliza a mesma aproximação, o que era esperado devido ao seu resultado exato. No teste de convergência, obteve-se resultados mais robustos utilizando a primeira correção, a simplificada. Se tratando do teste de monotonicidade, todas as correções apresentaram resultados mais robustos comparados a simulação sem a correção dos pontos harmônicos. Como esperado, o ajuste nos pontos harmônicos melhorou a robustez do método não linear trabalhado, contudo, o PMD ainda não foi atendido, gerando um desafio que pretende-se estudar futuramente.

REFERÊNCIAS

AGÉLAS, L.; EYMARD, R.; HERBIN, R. **A nine-point finite volume scheme for the simulation of diffusion in heterogeneous media.** *Comptes Rendus Mathematique*, Elsevier, v. 347, n. 11, p. 673–676, 2009.

AAVATSMARK, I. **An introduction to multipoint flux approximations for quadrilateral grids.** *Computational Geosciences*, Springer, v. 6, n. 3-4, p. 405–432, 2002.

COUDIÈRE, Y.; VILA, J. P.; VILLEDIEU, P. **Convergence rate of a finite volume scheme for a two dimensional convection-diffusion problem.** *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, v. 33(3), p. 493-516, 1999.

CARVALHO, D. K. E. de. **Uma Formulação do Método dos Volumes Finitos com Estrutura de Dados por Aresta para a Simulação de Escoamentos em Meios Porosos.** Tese de Doutorado, Universidade Federal de Pernambuco, 2015.

CONTRERAS F. R. L. **Métodos de volumes finitos robustos para a simulação de escoamentos bifásicos de água e óleo em reservatórios de petróleo.** Tese de doutorado. Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), 2016.

CONTRERAS, F. R.; LYRA, P. R.; CARVALHO, D. K. **A new multipoint flux approximation method with a quasi-local stencil (MPFA-QL) for the simulation of diffusion problems in anisotropic and heterogeneous media.** *Applied Mathematical Modelling*, 70, 659–676, 2019.

EWING, R. E. **The mathematics of reservoir simulation.** SIAM, 1983.

FUHRMANN J., O. M.; ROHDE, C. **Finite Volumes for Complex Applications VII-Methods and Theoretical Aspects.** [S.l.]: Springer-Verlag, 2014.

GAO, Z.; WU, J. **A linearity-preserving cell-centered scheme for the heterogeneous and anisotropic diffusion equations on general meshes.** *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley Online Library, v. 67, n. 12, p. 2157–2183, 2011.

GAO, Z.; WU, J. **A small stencil and extremum-preserving scheme for anisotropic diffusion problems on arbitrary 2d and 3d meshes.** *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 250, p. 308-331, 2013.

GAO, Z.-M.; WU, J.-M. **A linearity-preserving cell-centered scheme for the anisotropic diffusion equations. In: Finite Volumes for Complex Applications VII-Methods and Theoretical Aspects.** [S.l.]: Springer, 2014. p. 293–301.

GAO, Z.-M.; WU, J. 2015. **A Second-Order Positivity-Preserving Finite Volume Scheme for Diffusion Equations on General Meshes.** *SIAM J Sci Comput* 37 (1): A420–A438. <https://doi.org/10.1137/140972470>.

LE POTIER, C. **Schema volumes finis monotone pour des operateurs de diffusion forte-**

ment anisotropies sur des millages de triangle nonstructures, C. C. Acad. Sci, Paris, I341: 787–792, 2005.

LIPNIKOV, K., SHASHKOV, M., SVYASTSKIY, D. & VASSILEVSKI, Y. **Monotone finite volume schemes for diffusion equations on unstructured triangular and shape-regular polygonal meshes**. *Journal of Computational Physics*, 227(1):492–512, 2007.

QUEIROZ, L.; SOUZA, M.; CONTRERAS, F.; LYRA, P.; CARVALHO, D. **On the accuracy of a nonlinear finite volume method for the solution of diffusion problems using different interpolations strategies**. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley Online Library, v. 74, n. 4, p. 270–291, 2014.

SCHNEIDER, M., FLEMISCH, B., and Helmig, R. 2017b. **Monotone Nonlinear Finite-Volume Method for Nonisothermal Two-Phase Two-Component Flow in Porous Media**. *Int J Numer Methods Fluids* 84 (6): 352–381. <https://doi.org/10.1002/flid.4352>.

YUAN, G.; SHENG, Z. **Monotone finite volume schemes for diffusion equations on polygonal meshes**. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 227, n. 12, p. 6288–6312, 2008.

SCHNEIDER, M., FLEMISCH, B., Helmig, R. et al. 2018. **Monotone Nonlinear Finite-Volume Method for Challenging Grids**. *Comput Geosci*: 1–22. <https://doi.org/10.1007/s10596-017-9710-8>.

SHENG, Z.; YUAN, G. **The finite volume scheme preserving extremum principle for diffusion equations on polygonal meshes**. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 230, n. 7, p. 2588-2604, 2011.

SHENG, Z.; YUAN, G. **A new nonlinear finite volume scheme preserving positivity for diffusion equations**. *Journal of Computational Physics* 315 (2016) 182–193. doi: 10.1016/j.jcp.2016.03.053.

ZHANG, W. e KOBALSI, M., 2019. **Cell-Centered Nonlinear Finite-Volume Methods With Improved Robustness**. *SPE J.* 25 (2020): 288–309. doi: <https://doi.org/10.2118/195694-PA>

ÁLVARO CORDEIRO DOS SANTOS

**UM MÉTODO DE VOLUMES FINITOS NÃO LINEAR COM CORREÇÃO
DE PONTOS HARMÔNICOS PARA SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO
MONOFÁSICO EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Engenharia Civil do Campus Agreste da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, na modalidade de artigo científico, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Civil. Defesa realizada por videoconferência.

Área de concentração: Simulação Numérica em Reservatórios de Petróleo.

Aprovado em 05 de novembro de 2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fernando Raul Licapa Contreras (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Mariana Fernandes dos Santos Villela (Avaliadora)
Universidade Federal de Pernambuco

Dr. Gustavo Galindez Ramirez (Avaliador)
Universidade Federal de Pernambuco