UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA

CLAUDIA DANIELLE DA SILVA OLIVEIRA

RELAÇÕES ENTRE A PRAXEOLOGIA MATEMÁTICA EM UMA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS E AS TÉCNICAS UTILIZADAS PELOS ESTUDANTES AO RESOLVER TAREFAS ENVOLVENDO RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO.

Recife
2021

CLAUDIA DANIELLE DA SILVA OLIVEIRA

RELAÇÕES ENTRE A PRAXEOLOGIA MATEMÁTICA EM UMA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS E AS TÉCNICAS UTILIZADAS PELOS ESTUDANTES AO RESOLVER TAREFAS ENVOLVENDO RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Linha de pesquisa: Didática da Matemática.

Orientador (a): Profa. Dra. Marilene Rosa dos Santos

Recife

2021

Catalogação na fonte
Bibliotecária Natália Nascimento, CRB-4/1543

O48r Oliveira, Claúdia Danielle da Silva.

Relações entre a praxeologia matemática em uma coleção de livros didáticos e as técnicas utilizadas pelos estudantes ao resolver tarefas envolvendo razões trigonométricas no triângulo retângulo. / Claúdia Danielle da Silva Oliveira. – Recife, 2021.

147 f.: il.

Orientadora: Marilene Rosa dos Santos.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2021.

Inclui Referências.

1. Razões trigonométricas no triângulo retângulo. 2. Teoria antropológica do didático. 3. Praxeologia matemática. I. Santos, Marilene Rosa dos. (Orientadora). II. Título.

370 (23. ed.) UFPE (CE2022-092)

CLAUDIA DANIELLE DA SILVA OLIVEIRA

RELAÇÕES ENTRE A PRAXEOLOGIA MATEMÁTICA EM UMA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS E AS TÉCNICAS UTILIZADAS PELOS ESTUDANTES AO RESOLVER TAREFAS ENVOLVENDO RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestra em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovado em: 13/07/2021

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Marilene Rosa Dos Santos (Orientadora e Presidente)
Universidade de Pernambuco

Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. André Pereira da Costa (Examinador Externo)
Universidade Federal do Oeste da Bahia

Dedico esse trabalho aos meus filhos Paulinho e Pedrinho, que são as minhas maiores inspirações. Por vocês, meus amores, eu movo o mundo.

AGRADECIMENTOS

Considero o ato de agradecer como fundamental para a vida de qualquer pessoa. Chego a essa parte do trabalho com o coração repleto de gratidão por tudo o que vivi e aprendi até aqui. Mas principalmente grata a todos que, de alguma forma contribuíram para que esse momento fosse possível.

Primeiramente agradeço a Deus, pois sem Ele eu tenho certeza que não teria conseguido concluir essa jornada. Ao autor da vida, meu louvor e minha gratidão.

À minha família pelo amor incondicional, representada na pessoa do meu pai Paulo, da minha irmã Paula e da minha mãe Cristina.

À minha mãe, em especial, que esteve sempre presente me ajudando com palavras de apoio, carinho e incentivo. Pelo seu amor, por suas orações e por compartilhar as alegrias das minhas conquistas. Minha mãe, muito obrigada! Eu te amo e te admiro demais.

Aos meus filhos amados, Paulo Jônatas e Pedro Emanuel que são o meu combustível, minha energia e alegria. Vocês ainda não conseguem compreender, mas no futuro vocês verão que tudo isso, e muito mais, eu também faço por vocês e pra vocês. Agradeço a paciência por dias em que não pude parar pra brincar ou ficar um pouco mais com vocês. Esses dias serão recompensados o quanto antes.

Ao meu esposo Edgar, que foi a minha base e porto seguro durante todo esse percurso. Atencioso, compreensivo, amoroso, cuidadoso e muito, muito paciente. Meu leitor mais crítico, atento e pronto a ajudar sempre que eu precisava. Se não foi fácil para mim, também não foi para ele. Mas em meio a tantos medos, perdas, choros e anseios nesses dois últimos anos tão difíceis, conseguimos superar todas as barreiras juntos, porque assim, juntos, nós somos mais fortes.

Aos meus familiares e amigos que, de alguma forma, foram essenciais nessa caminhada, como a minha querida sogra Maria (*in memoriam*) que sempre me apoiou e vibrou com todas as minhas conquistas. Meus cunhados e cunhadas, à minha tia Ângela Patrícia, e a Cida, os quais, cada um ao seu modo, contribuíram para esse momento.

Aos colegas da minha turma do Mestrado, por dividirmos momentos de estudos e aprendizagens. Em especial aos colegas Diego, Luiz, Rayssa e Robson da linha de pesquisa Didática da Matemática, por compartilharmos momentos importantes de leituras, discussões, ensaios e apresentações nos quatro seminários dos quais participamos juntos. Aprendi muito com cada um de vocês.

Às queridas Fadas Sensatas pelas risadas e leveza em momentos de tensão. Cada uma com seu jeitinho especial tornaram esse grupo fundamental para que pudéssemos encontrar apoio uma nas outras.

Às minhas queridas *Les belles femmes* Poliana e Rayssa, minha base dentro dos muros do mestrado. Com os conselhos e as risadas gostosas de Poli, com o carinho e a razão equilibrada de Rayssa,encontrei verdade, amizade e sororidade. Esses dois anos de estudo e pesquisa não teriam sido os mesmos sem a presença forte e marcante dessas duas mulheres maravilhosas. Levarei vocês para a vida.

A todos os nossos professores do EDUMATEC pelas preciosas discussões, ensinamentos e correções, tanto nas aulas das disciplinas, quanto nos seminários ao longo de todo o curso.

Aos grupos de estudo e pesquisa Pró-Grandeza, GRUPEDIMA e o da TAD. Cada participação, leitura, pesquisa, apresentação, palestra e orientação foi de grande importância para a produção desse trabalho.

Aos funcionários da secretaria do EDUMATEC pela prontidão em sempre ajudar nos direcionamentos e questões burocráticas. Em especial a Clara, por sempre atender tão prontamente as dúvidas durante todo o curso.

Aos professores membros da banca, Professora Paula Moreira Baltar Bellemain e Professor André Pereira da Costa, pelo aceite, disponibilidade e olhar cuidadoso para o nosso trabalho desde a qualificação. Referências na Educação Matemática, suas contribuições serviram de inspiração não somente para esse, mas também para os trabalhos futuros.

À minha querida orientadora Professora Marilene Rosa dos Santos, pelos conselhos tão certeiros desde a primeira orientação. Pela disponibilidade em sempre me atender com tanto zelo e atenção. Pela paciência e compreensão nos momentos delicados vividos nesses dois últimos anos e, principalmente, por ter aceitado ser minha parceira nesse trabalho tão importante na vida acadêmica de uma professora pesquisadora. Minha eterna admiração e gratidão!

E finalmente, porém não menos importante, aos queridos estudantes participantes desse estudo, pela disposição em fazer parte de algo tão significativo, contribuindo, assim, para pesquisas em Educação Matemática.

RESUMO

A presente pesquisa teve como objeto de estudo o ensino do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, no qual tivemos por objetivo geral analisar as relações entre a praxeologia matemática presente em uma coleção de livro didático e as técnicas utilizadas pelos estudantes do 3º ano do ensino médio, quanto ao saber razões trigonométricas no triângulo retângulo. Como referencial teórico, nos apoiamos na Teoria Antropológica do Didático (TAD), desenvolvida por Yves Chevallard (1999) e seus colaboradores. Essa teoria nos forneceu ferramentas teóricas e metodológicas para a análise tanto dos livros didáticos como para as respostas dos estudantes, por meio de praxeologias, na qual poderemos observar a realidade matemática, assim como, modelizar as técnicas utilizadas por eles. Em nossa metodologia, optamos por uma abordagem qualitativa com caráter de análise documental, de modo que possibilitou alcançar o nosso objetivo geral. A escolha dos procedimentos metodológicos está dividida em três etapas: análise da coleção do livro didático, análise dos protocolos com as respostas os estudantes, e por fim, a comparação entre alguns elementos da praxeologia matemática dos livros didáticos e as técnicas dos estudantes. Quanto ao procedimento metodológico, aplicamos um teste com 54 estudantes do ensino médio, composto por quatro problemas, extraídos do Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE), mas que apresentavam os mesmos tipos de tarefas na coleção do livro didático. Na análise dos resultados, identificamos nessa coleção seis tipos de tarefas referentes ao saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, totalizando 88 tarefas, as quais a maioria se concentra no primeiro volume da coleção. Quanto aos resultados dos protocolos dos estudantes, percebemos que um terço deles não respondeu nenhuma das tarefas do teste. Todos os demais estudantes que responderam, todos erraram ao menos um dos quatro itens propostos, um total de 58,9% de ocorrências de respostas erradas. Esses erros estão relacionados tanto ao saber razões trigonométricas, quanto a outros saberes. Constatamos nos erros, um distanciamento das técnicas mobilizadas pelos estudantes com as propostas nos livros analisados. Quanto aos acertos (41,1%), observamos que as técnicas por eles mobilizadas, correspondem à esperada pela instituição do ensino médio.

Palavras-chave: Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo. Teoria Antropológica do Didático. Praxeologia Matemática.

ABSTRACT

The present research has as its object of study, the teaching of trigonometric ratios in the right triangle, in which our general objective is to analyze the relationship between the mathematical praxeology present in a textbook collection, and the techniques used by the students in the 3rd grade of high school, regarding the study of trigonometric ratios in the right triangle. As a theoretical framework, we rely on the Anthropological Theory of Didactic (TAD), developed by Yves Chevallard (1999) and his collaborators. This theory provided us with theoretical and methodological tools possible for analysis both textbooks and students responses, through praxeologies, in which we will be able to observe the mathematical reality, as well as model the techniques used by them. In our methodology, we opted for a qualitative approach with a documental analysis character, in a way that made it possible to reach our general objective. The choice of methodological procedures is divided into three stages: analysis of the textbook collection, analysis of the protocols with the students` answers, and finally, the comparison between some elements of the mathematical praxeology of textbooks and the students` techniques. As for the methodological procedure, we applied a test, with 54 high school students, consisting of four problems, extracted from the Educational Assessment System of Pernambuco (SAEPE), but which presented the same type soft asks in the textbook collection. In the analysis of the results, we identified in this collection six types of tasks related to knowing trigonometric ratios in the right triangle, totaling 88 tasks, most of which are concentrated in the first volume of the collection. As for the results of the students` protocols, we noticed that a third of them did not answer any of the test tasks. The other students who answered all missed at least one of the four items proposed, a total of 58,9% of occurrences of wrong answers. These errors are related both to knowing trigonometric reasons, and to other knowledge. We verified in the errors, a distance in the techniques mobilized by the students with the proposals in the analyzed books. As for the correct answers (41.1%), we observed that the techniques they mobilized correspond to those expected by the high school education institution.

Keywords: Trigonometric Ratios in the Rectangle Triangle. Anthropological Theory of Didactics. Math Praxeology.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A aplicação dos saberes relacionada à Trigonometria está associada às necessidades práticas de medição, muito utilizadas em nosso cotidiano e que, por séculos, tem sido fundamental para diversas áreas como a Astronomia, Física, Engenharia, Medicina, Agricultura, entre outras. Por si só, a Trigonometria se faz presente e necessária em diversos campos de estudos, por isso a importância em trazer pesquisas voltadas para esse tema.

O presente trabalho trata-se de uma investigação que tem como objeto de estudo o ensino do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, no qual tomamos como foco, a análise de uma coleção de livros didáticos de matemática e as técnicas de resolução dos estudantes do 3º ano do Ensino Médio.

A Geometria escolar, enquanto campo da Matemática escolar que abriga o objeto de estudo em questão, nos últimos anos tem sido foco de interesse em diversas pesquisas na ótica da Educação Matemática (SENA; DORNELES, 2013; CALDATTO, PAVANELLO, 2015; COSTA; ROSA DOS SANTOS, 2018; KONZEN; BERNARDI; CECCO; 2017; PEREIRA DA COSTA; ROSA DOS SANTOS, 2019; entre outros). Essas pesquisas apresentam diversas abordagens metodológicas, teóricas e de objetos de investigação.

Algumas pesquisas abordam como a Geometria e o seu ensino foram introduzidos no Brasil (VALENTE, 1999; MENESES, 2007; SENA, DORNELES, 2013; CALDATTO, PAVANELLO, 2015; PEREIRA DA COSTA, 2020), resgatando sua história, de modo que seja possível compreender o seu lugar na educação básica e sua importância nos dias atuais.

Essas pesquisas mostram que, assim como em outros campos da matemática, a Geometria surgiu com a necessidade do homem de resolver problemas, e que com o passar do tempo, ela foi se aprimorando para atender a sociedade em diferentes épocas.

Dessa forma, a Geometria é um dos campos da matemática mais antigos e estudados por filósofos, pesquisadores e professores. No entanto, encontramos também na literatura nacional, outros estudos mostrando que nem sempre houve a devida atenção com o ensino e com a aprendizagem da Geometria (MENESES, 2007).

Podemos citar alguns momentos que influenciaram de alguma forma, o ensino da Geometria aqui no Brasil, como por exemplo, o Movimento da Matemática Moderna. Tal movimento, que aconteceu em âmbito internacional, teve como foco central abarcar as novas ideias que surgiram na época com a evolução do conhecimento, ao ensino da matemática (VALENTE, 2008).

Além disso, podemos citar outros fatores, nos quais o campo da Geometria esteve fadado a certo abandono, quanto ao ensino e à aprendizagem (PAVANELLO, 1993), como por exemplo: valorização do campo da Álgebra em detrimento do da Geometria, a insegurança por parte do professor em abordar esse campo em suas aulas, e como consequência, o uso excessivo e quase exclusivo do livro didático, que por muitas vezes se tornava norteador da prática docente (LORENZATTO, 1995).

No entanto, com a crescente preocupação voltada a esse importante campo da matemática apresentado nas pesquisas, o trabalho com a Geometria veio ganhando espaço no ensino da matemática a partir da década de 1990.

Conduzidas por meio do desenvolvimento de pesquisas em Educação Matemática, foi crescendo o reconhecimento e a importância do estudo dessa área da matemática. Tais pesquisas impulsionaram a elaboração de documentos curriculares, dentre eles, os Parâmetros Curriculares Nacionais da Matemática – PCN (BRASIL, 1998).

De acordo com esse documento, é possível encontrar na Geometria um campo fértil para se trabalhar situações problemas com os estudantes. Entendemos que o grande ganho proposto nesse documento para o ensino e para a aprendizagem da Geometria é traçar meios que permitam que esses estudantes estabeleçam conexões com outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1998).

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio norteiam que o estudo da Geometria deve ser capaz de proporcionar aos estudantes possibilidades para resolução de problemas práticos do cotidiano, assim como consigam apreciar a matemática com suas argumentações dedutivas e teoremas (BRASIL, 2006). Esse documento traça todo um percurso para o trabalho docente com os campos da matemática, em especial com a Geometria, enfatizando a importância desse campo para a aprendizagem dos estudantes.

Com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e demais documentos, é possível observar também a preocupação em propiciar o estudo da Geometria articulando com os outros campos da matemática para auxiliar no desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes.

Esse documento enfatiza que, no ensino médio, a Geometria abrange o estudo de um amplo conjunto de procedimentos e conceitos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento (BRASIL, 2018).

No Estado de Pernambuco, seguindo esse mesmo cenário nacional, o papel do ensino da Geometria em seus documentos norteadores para a prática pedagógica de matemática, surge de forma mais ampla, conforme os anos vão passando. De modo que assim, possa contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes (PERNAMBUCO, 2019).

Paralelo a todo esse cenário de resgate do ensino da Geometria na educação básica, nos deparamos com dificuldades conceituais dos estudantes nesse campo da matemática, apresentados nos resultados das avaliações externas realizadas no Brasil. No Estado de Pernambuco, o Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE), tomando como recorte os anos compreendidos entre 2015 a 2018, apresentou resultados preocupantes quanto ao desempenho dos estudantes nos conteúdos referentes ao campo da Geometria.

O desempenho dos estudantes do ensino médio nas questões do SAEPE referente ao saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, tem estado aquém do desejável, com apenas 33% de sucesso no 3º ano do ensino médio, segundo os resultados apresentados pelo Estado de Pernambuco, no intervalo de 2015 a 2018. Ou seja, segundo os dados dessa avaliação externa, aproximadamente dois terços dos estudantes dessa etapa de ensino, finalizam o ensino médio com o conhecimento básico da trigonometria no triângulo retângulo abaixo do desejável, quanto ao seno, cosseno e à tangente.

Acreditamos que esse é um dado importante a ser analisado, principalmente porque é fundamental que os estudantes concluam o ensino médio com os conhecimentos essenciais para a sua formação. E nesse sentido, nosso interesse se volta, particularmente, para o objeto do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, no campo da Geometria, devido aos resultados insatisfatórios apresentados pelos estudantes.

Logo, o nosso intuito é buscar motivos que nos ajudem a compreender a causa pela qual os estudantes têm tido, nos últimos anos, um baixo rendimento nos itens relacionados às razões trigonométricas no triângulo retângulo nas avaliações do SAEPE. Por tanto, procuramos ater o nosso olhar para a coleção de livros didáticos utilizados por esses estudantes, no sentido de observar as informações obtidas mediante as análises. E dessa forma, pretendemos compreender melhor o motivo do baixo desempenho dos estudantes diante desse saber.

Pesquisas anteriores nos auxiliaram em nossa investigação, quanto ao saber razões trigonométricas, dentre elas destacamos os trabalhos de Ramalho (2016) e Pastor (2020). Esse último investigou tarefas presentes nas questões relacionadas à trigonometria no triângulo retângulo, propostas no Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP), observando as resoluções mobilizadas por estudantes do 9º ano do ensino fundamental. Seus resultados mostram dificuldades relacionadas ao saber e as operações aritméticas

Ramalho (2016) investigou a proposta de ensino de trigonometria em livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental, e obteve como resultados que os livros trazem uma abordagem clássica quanto ao ensino de trigonometria, valorizando um trabalho com as técnicas de resolução.

Em nossa investigação, buscamos ampliar os discursos levantados por essas pesquisas, buscando fazer uma articulação entre esses estudos, agora com o olhar voltado para o ensino médio, pois é nessa etapa escolar que a aprendizagem dos saberes relacionados à trigonometria do triângulo retângulo é consolidada.

Concordamos com Ramalho (2016) ao compreender a importância do livro didático na educação básica, considerando que em vários momentos ele assume o norte para o ensino e para a aprendizagem de saberes importantes, tanto na abordagem da prática docente, quanto na aprendizagem dos estudantes. Assim como também consideramos pertinente observar, como os estudantes respondem a essa abordagem presente nos livros por eles utilizados.

Algumas pesquisas realizadas nos últimos anos procuram mostrar a importância e influência do livro didático na educação básica, apresentando também a sua função na prática docente. Dentre elas, podemos citar as pesquisas de Pitombeira e Lima (2010) e Jesus (2017), que mostram como o livro didático exerce um papel importante no ensino e aprendizagem da Matemática.

A importância na investigação do livro didático se faz necessário, de acordo com algumas pesquisas (ROSA DOS SANTOS, 2015; RAMALHO, 2016), pois esse instrumento pode ser, ou não, decisivo para o tipo de aprendizagem que os estudantes venham ter acesso. Para tal, procura-se observar como se dá a abordagem de um determinado conceito.

É notório que o livro didático ainda é uma das primeiras fontes as quais os estudantes recorrem para leitura e estudo, principalmente no ambiente escolar. Corroboramos então com a ideia que “o livro didático está estruturado com os saberes a serem ensinados aos estudantes, e dialoga tanto com o professor quanto com o aluno” (ROSA DOS SANTOS, 2015, p. 21).

Levando em consideração a importância do estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo, e como o mesmo se apresenta nos livros didáticos, além dos baixos resultados referentes a esse saber, trazemos os seguintes questionamentos: a maneira como os livros didáticos abordam esse saber, nos ajuda a compreender porque os estudantes têm tido um fraco desempenho nesse conteúdo? E de que maneira ajudam? O que os livros didáticos trazem como informações que contribuem para que compreendamos porque os estudantes têm tido esse baixo desempenho?

Para que possamos responder a esses questionamentos, nos apoiamos na Teoria Antropológica do Didático (TAD), desenvolvida por Yves Chevallard (1999) e seus colaboradores. A TAD nos dá fundamentação para podermos avançar nesses questionamentos, pois possui um aparato teórico e metodológico suficiente para investigar como a coleção do livro didático aborda o objeto do saber em foco que são as razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Além disso, Chevallard (1999) considera, em sua teoria, que uma instituição impõe aos seus sujeitos (estudantes, no nosso caso), maneiras próprias de fazer e pensar. Dessa forma, consideramos que o livro didático representa a instituição do ensino de matemática, das classes do 1º ao 3º ano do ensino médio brasileiro.

Por meio da modelização da praxeologia matemática, advindas da teorização da TAD, poderá ser observada a realidade matemática apresentada pelo autor do livro, bem como será possível caracterizar as técnicas desenvolvidas pelos estudantes ao resolverem questões referentes ao objeto das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Dessa forma, formulamos o seguinte problema de pesquisa: *quais as relações existentes entre as praxeologias presentes em uma coleção de livro didático e as técnicas utilizadas por estudantes do 3º ano do ensino médio quanto ao saber razões trigonométricas no triângulo retângulo*?

Sendo assim, apresentamos os objetivos que almejamos alcançar em nossa pesquisa:

Objetivo geral: analisar as relações entre a praxeologia matemática presente em uma coleção de livro didático e as técnicas utilizadas pelos estudantes do 3º ano do ensino médio, quanto ao estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

É importante ressaltar o contexto em que essa pesquisa foi desenvolvida. Assim como tantas outras pesquisas em andamento, tanto em solo brasileiro como em outras partes do mundo, fomos surpreendidos por um vírus mortal que assolou o planeta e com ele veio a pandemia da COVID-19, a qual afetou o curso do nosso trabalho.

No meio da pesquisa, quando estávamos iniciando o trabalho em campo com a coleta de dados com os estudantes nas escolas, de repente nos encontramos em quarentena, com todas as escolas fechadas e sem aulas presenciais.

Logo nos vimos na necessidade de direcionarmos a nossa pesquisa para outro caminho, diferente daquele que havíamos idealizado inicialmente, mas que nesse momento não seria mais possível. Além de lutarmos contra o vírus,o medo, um governo negacionista, e todas as dificuldades advindas naquele momento, tivemos também que correr contra o tempo.

Não foram escolhas fáceis, mas foram as necessárias, suficientes e possíveis para o momento. E em meio a tantas dificuldades e perdas, conseguimos fazer ciência e desenvolver uma pesquisa que acreditamos que fará diferença para a educação, área tão carente, mas tão importante para o nosso país.

Dessa forma, acreditamos que nossa pesquisa poderá contribuir para futuros estudos envolvendo a prática docente e aprendizagem dos estudantes, ao trabalhar com esse saber da Geometria.

Logo, nosso texto se encontra estruturado em capítulos e tópicos da seguinte forma: o segundo capítulo aborda o campo da Geometria na educação básica, versa sobre importância desse campo para o ensino e aprendizagem, o livro didático e os documentos norteadores.

Em seguida, abordamos o referencial teórico, discutimos sobre o saber razões trigonométricas e como ele se apresenta nos resultados das últimas avaliações externas do SAEPE, além de pesquisas anteriores relativas a esse saber, e os objetivos da nossa pesquisa.

O quarto capítulo está dedicado aos procedimentos metodológicos que utilizamos para o desenvolvimento da pesquisa, e o quinto destina-se às análises e discussões dos dados. Finalmente, dissertamos nossas considerações finais seguidas das referências e anexos.

2 A GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

No intuito de apresentar o campo da Geometria que abriga o nosso objeto de pesquisa, discutiremos neste capítulo um pouco sobre a importância dessa área, para o ensino e aprendizagem na educação básica.

Procuramos fazer um rápido sobrevoo por seu contexto em solo brasileiro, sua relação com os livros didáticos e como a Geometria se apresenta atualmente nos principais documentos oficiais do Brasil e do Estado de Pernambuco, no sentido de fortalecer e contribuir com as pesquisas já existentes nessa área.

Por se fazer representada em diversas formas no espaço em que vivemos, e também na natureza, a Geometria possui relevante importância no campo educacional, principalmente por ser necessária em diversas outras áreas do conhecimento.

De acordo com algumas pesquisas (CALDATTO; PAVANELLO, 2015; RODRIGUES; KAIBER, 2019; HECK, 2020), a Geometria tem sido um dos principais objetos de estudos e discussões nas últimas décadas, tanto no âmbito da Educação Matemática como no resgate do seu contexto histórico, apresentando a sua importância para os dias atuais.

No tópico a seguir, faremos uma rápida abordagem sobre o ensino da Geometria no Brasil, de modo que possamos encontrar respostas para as dificuldades ainda hoje encontradas no ensino e aprendizagem desse campo.

2.1 O ENSINO DA GEOMETRIA NO BRASIL

O estudo da Geometria tem avançado, e sua importância se faz presente na sociedade, sendo considerada como uma forte ferramenta nos estudos da Matemática e em outras áreas do conhecimento, como por exemplo, nas Artes, Arquitetura, Engenharias, entre outras.

São incertas as origens sobre a Geometria, porém estudos mostram que ela surgiu devido à necessidade que o homem tinha de realizar medições. Caraça (1951) afirma que o historiador grego Heródoto, que viveu no século V antes de Cristo, relatou que o faraó egípcio Sesóstris, dividiu o Egito, dando uma porção igual e retangular para cada morador egípcio. Eles precisavam pagar um tributo referente à sua porção de terra. No entanto, se porventura houvesse enchente no rio Nilo, esse tributo seria recalculado por medidores enviados ao local, de modo que cada um pagasse conforme o que ficou de suas terras.

Heródoto acreditava que dessa forma se originou a Geometria, sendo depois fortemente consolidada pelos gregos com sistematização desse campo. Essa sistematização iniciou-se com Tales de Mileto, seguido por Pitágoras entre outros, que trouxeram muitas contribuições para a matemática e principalmente para a Geometria.

Por volta de 300 a.C., no Egito, Euclides, considerado o “pai da Geometria” devido a sua obra intitulada *Os Elementos*, utiliza métodos por meio de processos dedutivos, axiomáticos e de raciocínio lógico, para apresentar uma narrativa sobre a natureza do espaço bidimensional. Devido a sua grande contribuição para o estudo desse campo da matemática, Euclides está associado ao que conhecemos hoje por geometria euclidiana.

Por muitos séculos, a geometria euclidiana possibilitou estabelecer uma relação da matemática com outras ciências, apresentando axiomas que influenciam estudos que são utilizados na sociedade e comunidade científica em todo o mundo.

Ao longo dos séculos, estudar a Geometria se fez necessário para que o indivíduo fosse capaz de desenvolver habilidades que o auxiliassem em situações cotidianas. Silva Júnior (2020, p. 4) afirma que “cada vez mais a sociedade procura resolver problemas, os quais fazem parte do seu cotidiano, que podem ser problemas fáceis e problemas mais complexos”. O autor ressalta ainda que a geometria possui um papel fundamental nesse sentido, pois ela é capaz de proporcionar uma completa interpretação do ambiente, bem como estimular as estruturas mentais na transição do concreto para o abstrato.

Essa inevitabilidade de conhecer mais sobre a geometria e de como ela poderia auxiliar nos problemas cotidianos e profissionais, trouxe esse campo para o ensino formal na escola. Com o olhar voltado para o Brasil, esse processo ocorreu por volta de 1760, com as “aulas Régis”, no governo do Marques de Pombal, em substituição ao ensino jesuíta, o qual ganha força na formação de militares, que necessitavam desse conhecimento em suas atividades.

Segundo Caldatto e Pavanello (2015), foi nesse período, que o ensino da matemática, em especial o da Geometria, se efetivou no Brasil, delineando-se nos currículos da área. Foi assim até meados do século XIX, com o advento do Colégio Pedro II, o qual era modelo para o ensino secundário nas demais escolas brasileiras.

Mas só no início do século XX, na década de 1920, mudanças importantes para o ensino da matemática e consequentemente para o da Geometria, começaram ocorrer no Brasil, uma vez que se modifica também, o trabalho na sociedade, passando do modo agrícola para o industrial (MENESES, 2007).

Ainda de acordo com Caldatto e Pavanello (2015), o marco importante para essas mudanças foi o Movimento Internacional de Reforma da Matemática, no qual se discutia sobre a necessidade de mudanças para o ensino da matemática. E nessa discussão, o ensino da Geometria foi um dos maiores focos.

> “Os idealizadores do movimento tinham consciência que não era possível nivelar o ensino de matemática com a matemática de ponta, a matemática moderna. Sua intenção era apenas amenizar esse descompasso, motivo pelo qual se recorreu à crítica a Euclides. Isso porque, segundo os idealizadores do movimento, a metodologia utilizada por Euclides nos Elementos gerou problemas tanto no ensino da matemática como no da geometria, dentre os quais, “a separação da geometria e da álgebra”, “a exclusão na geometria de tudo que lembrasse o movimento, o mecânico e o manual”, “o primado da figura sobre o número” (MIORIM, 1998, apudCALDATTO; PAVANELLO, 2015, p. 113-114).

Mas foi com o Movimento da Matemática Moderna, após a década de 1950, que houve significativas reestruturações e modernizações do currículo escolar. Esse Movimento teve como principal objetivo, procurar adaptar o ensino da Matemática do Brasil às novas concepções de alguns países, que se viram na necessidade de reformular o ensino desse saber para uma Matemática mais “moderna”.

Quanto ao ensino da Geometria, a orientação era de que sua abordagem fosse diferente do que se era feito tradicionalmente, de modo que enfatizasse aspectos algébricos, utilizando também a teoria dos conjuntos. Sendo assim, sucederam dificuldades por parte dos professores, que não se encontravam preparados para adotar novos métodos de abordagem da geometria, focando nas noções das figuras geométricas, sem a preocupação de uma sistematização e aplicações práticas em sala de aula.

Para Gonçalves, Grando e Nacarato (2008), até a década de 1960, o ensino da Geometria, assim como o da Matemática como um todo, continha um caráter formal e axiomático, no qual não se questionam os critérios desse ensino. Esse formalismo foi acentuado nessa época, durante o Movimento da Matemática Moderna, e o ensino da Geometria foi o que mais sentiu o peso desse formalismo, sendo muitas vezes relegado ao último plano, no ensino da matemática.

> O ensino da matemática proposto pelo Movimento da Matemática Moderna acabou tendo como principal característica, a excessiva preocupação com as abstrações e teoria do que com a prática. O conteúdo se resumia à apresentação e à memorização de fórmulas, ocorre então nesse período um comprometimento do ensino do cálculo, da geometria e das medidas (LOCATELLI, 2015, p. 77-78).

Alguns autores consideram o Movimento da Matemática Moderna ainda como um dos principais responsáveis pela “contribuição à situação em que se encontra, atualmente, o ensino da Geometria” (CÂMARA DOS SANTOS, 2009, p. 179). Pereira da Costa (2016; 2020), também cita esse movimento como contribuinte para o estado atual, no qual ainda é possível perceber poucas aplicações práticas no ensino da geometria.

Com o passar dos anos, foram identificadas as dificuldades e lacunas causadas por esse Movimento, que de certa forma, tenta “algebrizar a Geometria”. Mas ao final da década de 1970, ocorreram mudanças no sentido de remir o ensino da geometria da forma abstrata e desinteressante, tal qual se apresentava.

No início da década de 1990, surgiram importantes pesquisas que demonstraram preocupação no tocante ao ensino e à aprendizagem da Geometria no Brasil até aquele momento, e que refletem até os dias atuais.

Pavanello (1993) alertava sobre o abandono gradual do ensino da Geometria nas últimas décadas, e ressalta fatos ocorridos no Brasil e no mundo no século XX que contribuíram para esse abandono. Um dos fatos citados pela autora para o descaso e consequentemente, abandono do ensino da Geometria, foi a promulgação da Lei de Diretrizes e Base de 1971. Essa lei 5692/71, possibilitou autonomia às escolas brasileiras, que passaram a ter liberdade para decidirem os programas das diferentes disciplinas de suas instituições.

Dessa forma, os professores se sentiam à vontade para escolher os conteúdos de seu planejamento, e assim, optavam pelo conteúdo em relação ao qual tinham mais segurança para trabalhar em suas aulas. Isso contribuiu para que muitas vezes, a Geometria fosse deixada para o último plano, ou simplesmente não fosse incluída nessa programação, uma vez que boa parte dos professores de matemática não se sentia segura para trabalhar com esse campo da matemática.

Lorenzatto (1995), em consonância com as pesquisas da época, afirmou ainda que o ensino da Geometria era apresentado de forma separada da aritmética e da álgebra nos guias curriculares e nos livros didáticos. O autor traz a questão de que o professor por muitas vezes ensina conteúdos referentes à Geometria, mesmo não tendo o domínio e conhecimento necessários para tal. Logo, o pouco preparo teórico e a fragilidade na formação docente, contribui para que o ensino da Geometria não consiga atingir o seu objetivo nas salas de aula.

Nos anos que se seguiram, várias mudanças começam a ser propagadas, "muitas delas baseadas nos modelos de Van Hiele e no uso de materiais manipulativos em sala de aula, todas com o objetivo comum de resgatar o ensino da Geometria" (RÊGO; RÊGO; VIEIRA, 2012, p. 11). Não obstante, ao final desse século e início dos anos 2000 até hoje, encontramos as avaliações em larga escala, nos quais os resultados apontam dificuldades dos estudantes em matemática, principalmente referente aos saberes da Geometria.

Podemos perceber que o ensino da Geometria no Brasil perpassou por vários momentos importantes, até nos adentrarmos nos dias atuais. E que mesmo diante de esforços e mudanças na tentativa de uma melhoria no ensino e na aprendizagem nesse campo, ainda podemos constatar diversas dificuldades.

Por esse motivo e por sua importância, buscamos fortalecer os estudos nessa área com a nossa pesquisa, de modo que possamos também atender aos nossos objetivos.

2.2 O LIVRO DIDÁTICO NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

O uso do livro didático possui um papel de grande relevância na educação básica brasileira. Apesar de todo o avanço tecnológico e maior acesso a informação de que dispomos hoje, a relação existente entre os sujeitos e esse recurso pedagógico ainda é considerada muito estreita.

O livro didático é um importante norte para o planejamento da prática docente, pois mesmo com todas as orientações advindas das diretrizes e documentos oficiais, esse recurso é o que se encontra prontamente disponível e de fácil acesso ao professor. Logo, o destaque e a importância depositada nele, gera no docente, em especial o de matemática, uma segurança no sentido de alcançar seus objetivos, ao ensinar determinado saber.

Quando se trata de como a Geometria e seus conteúdos vem sendo apresentados nos documentos oficiais e nos materiais didáticos, podemos observar que nas últimas décadas, estudos (PEREIRA DA COSTA; ROSA DOS SANTOS, 2018; 2019) apontam discussões importantes sobre a estrutura e a abordagem desses conteúdos em livros didáticos.

Nos últimos anos, pesquisas (GONÇALVES; GRANDO; NACARATO, 2008) apontavam que ainda havia negligência quanto ao ensino da Geometria. As autoras corroboram que existe uma prevalência no ensino em outros campos da matemática, que não o da Geometria, no qual, um dos agravantes era o tempo insuficiente para abordar todos os conteúdos.

Todavia, Câmara dos Santos (2009) afirma que existe uma valorização excessiva por parte dos professores de matemática em relação ao livro didático, e que devido à grande demanda do trabalho docente, os mesmos não conseguem fazer uma reflexão sobre a abordagem apresentada no livro didático por ele utilizado.

Por décadas, os conteúdos referentes ao campo da Geometria, foram relegados. Geralmente eram apresentados nos últimos capítulos, o que ocasionava, por vezes, eles não serem abordados nas aulas por falta de tempo, ou até mesmo porque os professores não se sentiam seguros para trabalhar com seus alunos determinados saberes desse campo, como dito anteriormente.

> Atualmente, devido ao movimento da educação matemática e com as mudanças ocorridas na forma de organização dos conteúdos do livro didático para atender ao referencial do Programa Nacional do

> Material e Livro Didático (PNLD), essa não é mais a nossa realidade, pois os conteúdos são trabalhados de forma integrada, ou seja, geometria, álgebra e aritmética são apresentadas de forma harmoniosa (TURÍBIO; SILVA, 2017, p. 159).

Pesquisas mais recentes (JESUS, 2017; VASCONCELOS; PIGATTO; LEIVAS, 2020) também apontam que muito das práticas docentes, ainda fica restrito ao que é abordado nos livros didáticos, principalmente referente aos conceitos geométricos. O uso constante desse material se faz presente e de maneira marcante, na prática docente, e na maioria das vezes, como o seu único meio norteador.

Deixar a cargo do livro didático, orientar o quê e como se deve ser abordado determinados conceitos da matemática, e principalmente referentes à geometria, é algo que se observa até os dias atuais. Sendo assim, pode ocorrer que determinados conceitos geométricos não sejam explorados da melhor forma, refletindo nas dificuldades encontradas quanto ao ensino e aprendizagem desse campo.

> O livro didático também é fundamental para o estudante, pois além de proporcionar um diálogo com o professor, é uma ferramenta ao qual se encontra mais acessível para o seu uso por todos os estudantes. Mesmo com o avanço tecnológico, mídias e redes sociais, o livro didático ainda é o meio o qual os estudantes mais utilizam para estudar (TURÍBIO; SILVA, 2017).

É relevante investigar as influências que os livros didáticos podem exercer aos estudantes, visto que não encontramos pesquisas sobre esse tema, principalmente quando se trata dos saberes relacionados à Geometria.

2.3 A GEOMETRIA NOS DOCUMENTOS NORTEADORES

Faz-se necessário, para a compreensão da legitimidade de um determinado saber em uma instituição, analisar as orientações dos documentos oficiais que estão disponíveis para o professor de matemática, e que consequentemente e até mesmo involuntariamente, devem nortear e subsidiar a sua prática docente. Nesse tópico, faremos um percurso nas principais diretrizes brasileiras que regem e orientam o trabalho pedagógico, mais especificamente no ensino médio, quanto ao campo da Geometria.

Nas últimas décadas, podemos observar a importância dada ao ensino e aprendizagem da Geometria nos documentos que norteiam o trabalho do professor de matemática. Essa importância se faz presente nas leituras desses instrumentos, pois evidenciam o estudo e o conhecimento desse campo para uma realidade na qual o estudante possa, não apenas adquirir conceitos específicos, mas também alcançar competências e habilidades para seu desenvolvimento social e físico.

> (..) o estudo de posição e deslocamentos no espaço, das figuras geométricas e das relações entre elementos de figuras planas e espaciais contribui para o desenvolvimento do pensamento geométrico por parte dos estudantes. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes, ao mesmo tempo em que compreende um conjunto de conceitos e procedimentos para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Destacam-se as ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática que são, principalmente, construção, representação e interdependência. (PERNAMBUCO, 2019, p. 360).

Na literatura desses documentos, identificamos os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1998), como um dos precursores em trazer à tona a importância dos conceitos geométricos no ensino e na aprendizagem para os estudantes. Esse documento frisa que por meio desses conceitos, o estudante é capaz de desenvolver “um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” (BRASIL, 1998, p. 39).

Os PCN apresentam propostas de quais conhecimentos, valores, pensamentos e competências são relevantes, socialmente, para o ensino e para a aprendizagem da Geometria, que se encontra no bloco denominado Espaço e Forma desse documento.

Ainda de acordo com esse documento, os estudantes costumam se identificar mais com a Geometria, e se interessam espontaneamente por esse campo, até mais do que por outros campos da Matemática, os quais muitos consideram difíceis e de pouca aplicabilidade na vida futura deles. Assim, “a Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problemas e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente” (BRASIL, 1998, p. 39).

Essa preocupação em trazer o estudo da Geometria como um saber importante para despertar nos estudantes a capacidade de resolver problemas práticos do seu cotidiano, se faz presente também nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM (2006). Segundo esse documento, “no estudo da Geometria, também se podem provocar os alunos com a pergunta: “Como funcionam certos mecanismos do nosso quotidiano ou certos instrumentos de trabalho”?” (BRASIL, 2006, p 92).

Com o olhar voltado para os documentos oficiais que norteiam os docentes de matemática no Estado de Pernambuco, região na qual a nossa pesquisa se insere, encontramos a Base Curricular Comum de Pernambuco – BCC-PE.Em 2009, tal documento já apresentava o ensino da Geometria centrado na exploração do espaço que permeia o estudante, desde os anos iniciais até quando terão condições de explorar as propriedades estudadas, desenvolvendo o pensamento geométrico e raciocínio dedutivo, ao final do ensino médio. Nesse documento também é possível perceber uma orientação para que se haja uma articulação do ensino da Geometria com outras áreas da matemática, como a Álgebra, por exemplo.

No ano de 2012 entraram em vigor os Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio, também no Estado de Pernambuco – PCPE (2012). Documento esse que traz uma reflexão sobre os conteúdos que deveriam ser trabalhados e quais as expectativas de aprendizagem que se espera na aprendizagem dos estudantes.

Nos PCPE indica-se que o estudo da Geometria para o ensino médio deve proporcionar aos estudantes meios que possibilitem desenvolver a capacidade de resolução de problemas práticos do cotidiano. Esse documento ainda enfatiza que a Geometria surge como um campo favorecido da matemática, sendo capaz de trabalhar as ligações entre os métodos lógico-dedutivo e o raciocínio intuitivo (PERNAMBUCO, 2012).

No âmbito nacional, nos deparamos com o mais recente documento norteador de política educacional, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2018), que tem como objetivo central, estabelecer direitos de aprendizagem com as mesmas habilidades e competências, a todos os estudantes brasileiros, independentemente da região, raça ou classe socioeconômica.

No contexto da educação básica, alguns documentos dentre eles a BNCC, apresentam o ensino médio como um direito público de todo cidadão, sendo essa, a etapa final do ensino regular, mesmo reconhecendo a dificuldade em poder garantir esse direito aos jovens que chegam ao término dessa fase.

> Garantir a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental é essencial nessa etapa final da Educação Básica. Além de possibilitar o prosseguimento dos estudos a todos aqueles que assim o desejarem, o ensino médio deve atender às necessidades de formação geral indispensáveis ao exercício da cidadania e construir aprendizagens sintonizadas com as necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes e, também, com os desafios da sociedade contemporânea (BRASIL, 2018, p. 464 - 465).

Na BNCC do ensino médio, as aprendizagens ditas essenciais, estão organizadas por áreas de conhecimento, dentre as quais se encontra a Matemática e suas Tecnologias, estas quais são definidas competências específicas.

> O presente documento ainda enfatiza que nessa área do conhecimento, os estudantes do ensino médio devem "consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exigem maior reflexão e abstração" (BRASIL, 2018, p. 471).

Quanto ao ensino e à aprendizagem da Geometria, a BNCC frisa a importância de relacionar os conceitos e procedimentos específicos desse campo, com os das outras áreas do conhecimento, no âmbito da construção e aplicação dos conhecimentos matemáticos, trazendo assim a possibilidade de desenvolver a perseverança e autoestima do estudante, de modo que eles sejam capazes de buscar soluções para os problemas propostos.

O aspecto funcional da Geometria é apresentado na BNCC, que considera importante o estudo desse campo por trazer também, ideias matemáticas específicas dessa área, que são as transformações geométricas, principalmente as simetrias.

A importância de desenvolver o pensamento geométrico do estudante, como antes citado, também se faz presente na BNCC. O documento afirma que esse pensamento é favorecido pelo estudo do deslocamento e posições no espaço, assim como formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais, pois a Geometria permite "o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento" (BRASIL, 2018, p. 271).

Novamente voltando o nosso olhar para as orientações vigentes no Estado de Pernambuco, apresentamos o Currículo de Pernambuco (2019), documento mais recente do Estado de Pernambuco, e que norteia o trabalho pedagógico do professor de Matemática do ensino fundamental.

O ensino da Geometria nesse documento está de acordo com o que vem sendo proposto na BNCC (2018), uma vez que tem por base, esse documento nacional. A unidade temática desse campo em tal documento se preocupa com o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes, como necessário para a investigação das propriedades, com produções convincentes de conjecturas e argumentos geométricos.

Existe, aqui, a preocupação de trabalhar desde os anos iniciais do ensino fundamental, uma Geometria voltada para o entorno do estudante, com a exploração do seu espaço. Logo, a orientação é para que o docente proponha situações aos seus estudantes, de modo que eles sejam capazes de identificar diferentes figuras geométricas, mas sem a preocupação de apresentar suas expressões matemáticas e definições. O documento apresenta exemplos de como o docente pode trabalhar com seus estudantes de forma lúdica.

Esse trabalho, já introduzido nos anos iniciais deve ser ampliado e aprofundado nos anos finais do ensino fundamental, agora com o estudo das propriedades, de modo que o estudante seja capaz de ampliar seu ponto de vista sobre os objetos geométricos. A orientação é para que o docente possa "levar o estudante à percepção de que as figuras geométricas são caracterizadas por suas propriedades" (PERNAMBUCO, 2019, p. 93). Dessa forma, o estudante será capaz de desenvolver o seu pensamento dedutivo, pois adquiriu habilidades necessárias para aprofundar seus conhecimentos no estudo da Geometria.

Além disso, o pensamento geométrico, de acordo com esse documento, auxilia na resolução de problemas tanto no mundo físico, quanto nas diversas áreas do conhecimento. E ainda em relação à Geometria nesse Currículo, destacam-se principalmente as ideias matemáticas fundamentais de construção, representação e interdependência. Essas ideias também são apresentadas na BNCC, o que nos faz perceber a estreita relação entre esses dois documentos.

Muito do que vem sendo proposto no Currículo de Pernambuco para o ensino fundamental, será ampliado e consolidado no Currículo para o ensino médio, que atualmente está em fase de conclusão para ainda ser homologado. No entanto, achamos interessante apresentar esse documento do ensino fundamental, pois o mesmo abre caminho para que a aprendizagem, não só do campo da Geometria, mas também das outras áreas da Matemática, possa ser complementada e consolidada.

Percebemos uma articulação significativa entre os principais documentos apresentados nessa pesquisa, no que se refere ao estudo do ensino e da aprendizagem no campo da Geometria. A importância quanto a esse campo da Matemática, é visível nos documentos aqui citados, os quais procuram ter o cuidado em propor uma perspectiva norteadora ao docente, em articular meios que favoreçam o desenvolvimento das habilidades e competência dos estudantes.

Logo, o estudo voltado para o ensino da Geometria, de acordo com os documentos e orientações teóricas e metodológicas ao longo dos últimos anos, tem mostrado o quão é importante e necessário para que o estudante seja capaz, ao final do ensino médio, de resolver problemas práticos do seu cotidiano.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E PROBLEMÁTICA DA PESQUISA

Abordaremos neste capítulo elementos presentes na Teoria Antropológica do Didático (TAD) desenvolvida por Yves Chevallard e seus colaboradores. Inicialmente discutimos sobre os elementos primitivos da TAD, os quais nos proporcionam suporte necessário para realizarmos uma análise do nosso objeto de pesquisa relativa à praxeologia matemática presente em uma coleção de livros didáticos de matemática e à modelização das técnicas dos estudantes.

3.1 A Teoria Antropológica do Didático

Nossa pesquisa se apoia teórica e metodologicamente na Teoria Antropológica do Didático (TAD) desenvolvida pelo matemático francês Yves Chevallard (1991, 1994, 1999) e seus colaboradores. Essa teoria apresenta uma visão antropológica, pois toma como foco o estudo das práticas humanas, inseridos em um sistema didático. A TAD é considerada como um prolongamento da Teoria da Transposição Didática (TD), também desenvolvida por Chevallard (1991).

A Transposição Didática tem como objetivo principal o estudo das transformações ocorridas pelo saber, desde a sua produção até que possa se tornar apto a estar entre os objetos de ensino, e assim, chegar a ser um saber ensinado.

Desta feita, entendemos que a TAD trabalha no sentido de explicar essas transformações no sistema didático.

Segundo Chevallard (1999) a TAD estuda o homem perante o saber matemático, e mais especificamente, frente às situações matemáticas dentro do conjunto das atividades humanas, essa teoria caracteriza os “conhecimentos e saberes matemáticos, bem como fatores que interferem nos processos de ensino e de apropriação de conhecimento/saberes pelo aluno” (ALMOULOUD, 2015, p.10).

Em nossa pesquisa, a TAD possibilitou modelizar a praxeologia matemática presente em uma coleção do livro didático adotado na escola e utilizada por estudantes em relação ao saber razões trigonométricas. Também foi possível caracterizar elementos praxeológicos utilizados pelos estudantes, perante os itens apresentados nas avaliações do SAEPE.

Chevallard (1999) tem como base em sua teoria, três conceitos primitivos, que são: *objetos* (o), *instituições* (I) e *pessoas* (X). Assim como também se apoia nos conceitos de relações pessoais de um indivíduo com o objeto, e das relações institucionais de uma instituição com o objeto. Em nossa pesquisa, por exemplo, será considerado como objeto do saber as razões trigonométricas no triângulo retângulo, a instituição será representada pelas classes do 1º ao 3º ano do ensino médio, e os estudantes são os sujeitos envolvidos, representando a pessoa, na teoria.

O *objeto* (O) é toda entidade, seja material ou não, que possa existir para ao menos uma pessoa (X) ou uma instituição (I). Para Chevallard, tudo é objeto, pois para o autor, as pessoas X e as instituições, também poderão ser consideradas objetos. Em outras palavras, o objeto existe apenas se for reconhecido. E conhecer esse objeto, é ter uma relação pessoal de X com O, sendo representada por R(X, O), e a relação Institucional de I com O, representada por R(I, O).

Considerando o saber como um objeto (O), por exemplo, razões trigonométricas, o mesmo será conhecido por um estudante do ensino médio a partir do momento em que acontece uma relação pessoal R(X, O).

Outro conceito primitivo da TAD trazido por Chevallard (1992) é a *instituição* (I), que ele considera como sendo um dispositivo social total, mas que pode ter sua extensão reduzida, e que impõe aos seus sujeitos maneiras próprias de fazer e de pensar. Como por exemplo, um adolescente de 15 anos pode fazer parte de diferentes instituições: sua família restrita (pais e irmãos), a igreja que sua família frequenta (caso tenha uma prática religiosa), a escola na qual estuda, a turma na qual está inserido (1º ano A do ensino médio), o grupo de colegas que tem em seu bairro, etc. Quando um indivíduo se sujeita às regras de uma determinada instituição, ele se torna um sujeito dessa instituição.

Cada instituição possui suas características próprias, “devemos percebê-la não como uma estrutura homogênea, mas sim heterogênea, em que existem várias relações de pessoas X com objetos (O) que pertence a I” (MENEZES, 2010, p.72).

Uma instituição (I) reconhece um objeto (O), quando existe uma relação institucional R(I, O). Esse objeto pode estabelecer diferentes formas de relações, de acordo com cada instituição ao qual ele se relaciona. Consideramos que a relação do objeto do saber razões trigonométricas será diferenciada de uma classe para outra do ensino médio, por exemplo. Pois cada uma dessas classes possui suas próprias características e sujeições, fazendo com que o objeto de saber em questão se relacione de forma distinta de uma para outra.

Para esse autor, todo saber é o saber de uma instituição. Dentro das Instituições, o desenvolvimento dos objetos poderá sofrer modificações com o passar do tempo, envelhecendo, evoluindo, se modificando, ou até mesmo desaparecendo. Como exemplo, o saber razões trigonométricas se apresenta de uma forma no 1º ano do ensino médio diferente de como se apresenta nos anos seguintes. Se inicialmente ele se mostra como um saber matemático com características próprias, no decorrer dos anos, esse objeto pode se apresentar como ferramenta para outros saberes matemáticos, ou simplesmente deixar de existir.

Dentro de cada instituição, cabe a cada indivíduo responder às sujeições por ela imposta. Pois cada um tem também suas próprias maneiras de fazer e de pensar. Chevallard (2003, p. 82) afirma que “de uma maneira geral, é por suas sujeições, pelo fato de que ele é o sujeito de uma multiplicidade de instituições, que o indivíduo X se constitui numa pessoa”. O conceito de pessoa (X), já mencionado várias vezes nesse texto, é o sujeito de uma multiplicidade de instituições, que a elas se sujeitam de acordo com as regras estabelecidas por cada uma dessas instituições.

A noção primitiva de pessoa na TAD considera que o indivíduo não muda. Para Chevallard (1999), quem muda é a pessoa no sistema das relações pessoais de X, e o indivíduo é o invariante. É se relacionando com uma Instituição e se sujeitando a ela, obedecendo a suas regras e formas de pensar e agir, que o indivíduo se torna sujeito nessa relação com a instituição.

A pessoa surge conforme estabelece suas relações com as instituições, ao passar do tempo. Chevallard afirma que uma pessoa está sujeita a várias instituições, e enfatiza que a mesma tem “liberdade” quando surge “o efeito obtido em consequência de uma ou de várias sujeições institucionais contra outras” (CHEVALLARD, 1999, p. 227).

Para esse teórico, acontecerá aprendizagem de X em relação ao O, se houver modificação na relação R(X, O). Sendo assim, se não há alteração nessa relação, e o sujeito não cumpre as regras e sujeições da instituição referente ao objeto, a mudança esperada não ocorre e pode-se dizer que não houve aprendizagem. A aprendizagem do estudante com saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, por exemplo, ocorrerá no momento em que ocorrer modificação na relação desse estudante com esse saber.

Segundo Chevallard (1999), o saber matemático, enquanto forma específica do conhecimento é fruto da ação humana institucional, onde é produzido, utilizado, ensinado e transitado em instituições. Logo, se faz necessário elaborar um *método* de análise para descrever e estudar as condições de realização das práticas institucionais. Para modelar as práticas sociais, em particular a atividade matemática, surge a noção da *Praxeologia* ou *Organização Praxeológica*.

O significado de uma Praxeologia pode ser obtido pela junção das palavras: Prática (práxis) e saber (logos), que será composta por quatros elementos, que são: tipo de tarefa (T), técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ). A tarefa decorre do desenvolver de uma técnica, no qual essa técnica pode ser considerada como uma ‘maneira de fazer’ a tarefa.

A tarefa é a questão a ser resolvida. Chevallard (1999) denomina o termo *gênero* de tarefa para identificar um verbo de ação (calcular, resolver, determinar, entre outros). No entanto, o gênero por si só, não define o saber específico da matemática em estudo.

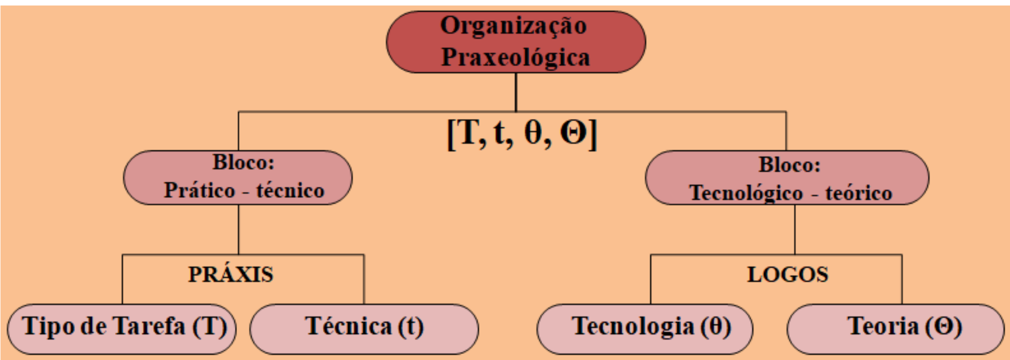
Quanto aos tipos de tarefa, “pode ser descrito como um grupo de tarefas que engloba várias tarefas com atributos comuns” (ROSA DOS SANTOS, 2015, p. 42). Assim, exemplificando podemos dizer que ‘*calcular*’ é o gênero da tarefa, e ‘*calcular* *a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida desse ângulo e a medida de comprimento da hipotenusa'*, caracteriza um tipo de tarefa (T).

Bosch e Chevallard (1999) trazem a noção da *Ecologia* das tarefas e técnicas, que são as condições e necessidades que permitem a produção e utilização destas, nas instituições. Em outras palavras, para que seja possível a existência de uma técnica em uma instituição, é preciso que a mesma seja compreensível, legível e justificável. No entanto, podem existir outras técnicas diferentes dessas, em outras instituições. Dessa forma, os autores consideram que "toda prática institucional pode ser analisada, sob diferentes pontos de vistas e de diferentes maneiras, em um sistema de tarefas relativamente bem delineadas" (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 81).

Chevallard (1999) considera que, a realização de certo tipo de tarefa (T) por uma maneira de executá-la, é denominada de técnica (τ). Aqui, é definido por um *saber-fazer* específico para esse tipo de tarefa. Esse *saber-fazer* não se sustenta por si só, ele necessita de um amparo tecnológico-teórico, aqui denominado *saber.* O *saber* é constituído por uma tecnologia (θ), que possibilitará explicar e dar legitimidade a técnica (τ) que foi aplicada. Assim também, a tecnologia (θ) precisa de uma justificativa que é esclarecida e legitimada pela teoria (Θ).

Logo, essa Praxeologia é articulada por esses elementos, que completos se apresentam como [T, τ, θ, Θ], que segundo Bosch e Chevallard (1999), podem ser divididos em dois importantes blocos. O bloco *prático-técnico* (práxis) é onde situam o tipo de tarefa (T) e a técnica (τ), identificado como o *saber-fazer*. E, o *bloco tecnológico-teórico* (logos) é onde encontramos a tecnologia (θ) e a teoria (Θ), identificada como *saber*, como mostra a figura a seguir.

Figura 1 - Esquema da Organização Praxeológica de Chevallard



Fonte: Autoria própria

Segundo Chevallard (1999), as praxeologias podem ser pontuais, locais, regionais e globais. Quando encontramos ao menos uma técnica, uma tecnologia e uma teoria em torno de um único tipo de tarefa denomina-se praxeologia pontual, e pode ser representada por $[T, \tau, \theta, \Theta]$. A praxeologia local $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$ é quando as praxeologias pontuais se unem, pois estarão centradas em torno de uma tecnologia e são justificadas por uma mesma teoria. Quando a união é das Praxeologias Locais colocando uma mesma teoria em evidência, temos a Praxeologia Regional $[T_{ij}, \tau_{ij}, j, \Theta]$. E, por fim, a Praxeologia Global $[T_{ijk}, \tau_{ijk}, j_k, k]$, que inclui várias teorias.

Nessa movimentação das praxeologias pontuais, locais, regionais e globais, há uma maior visibilidade do bloco tecnológico-teórico (*saber)*, em comparação ao bloco prático-técnico (*saber-fazer)*. Concordamos com Ramalho (2016) quando afirma que:

> Podemos pensar em uma organização pontual em torno da resolução de tipos de tarefas relacionadas à trigonometria, resolvidas por uma mesma técnica e justificadas pelo mesmo discurso tecnológico-teórico. E, já em uma praxeologia local, em torno de diferentes tipos de tarefas, respondidos pelo mesmo discurso tecnológico. Nesse sentido, podemos ampliar essa discussão até chegarmos a uma praxeologia regional em torno de uma teoria (RAMALHO, 2016, p. 32).

Para Chevallard (1999) as praxeologias ou organizações associadas a um saber matemático, podem ser estudadas sob duas perspectivas: a primeira, relativa às atividades matemáticas na qual a realidade matemática pode ser construída, denominada praxeologia ou organização matemática. E a segunda perspectiva, é denominada praxeologia ou organização didática permite conduzir uma praxeologia matemática, que é a maneira como essa realidade matemática pode ser estudada.

Entendemos que os elementos advindos das praxeologias, possibilitam uma análise para a abordagem de um determinado objeto do saber matemático, pertencente a uma instituição.

3.1.1 A Praxeologia ou Organização Matemática

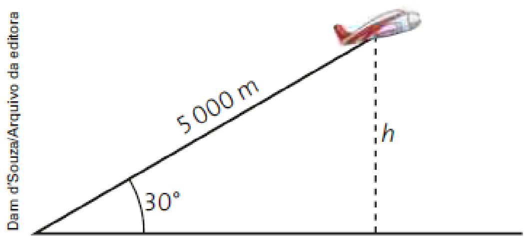
A praxeologia ou organização matemática é relativa às atividades matemáticas em termos de tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria. Envolve a resolução de tipos de tarefas (T), observando o grau de desenvolvimento atribuído aos elementos [T, τ, θ, Θ].

No nosso caso, a praxeologia matemática estudada é relativa ao objeto do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, em uma coleção de livros didáticos de matemática do ensino médio, e as respostas dos estudantes aos itens das avaliações do SAEPE, referente a esse mesmo objeto do saber.

Para um melhor entendimento do leitor, iremos apresentar um exemplo de uma análise praxeológica com um extrato de uma atividade proposta em um livro didático da coleção selecionada para essa pesquisa:

Figura 2 – Calcular a altura do avião em relação ao chão

46. Na figura abaixo, qual é a altura do avião em relação ao chão? 2 500 m



Fonte: Dante (2016, p. 258)

Observando essa atividade, sabemos que para determinar a altura do avião em relação ao chão, deveremos calcular a medida do cateto oposto ao ângulo de 30° do triângulo retângulo, demarcado pela decolagem do avião. Verificamos também que a distância percorrida pelo avião até alcançar essa altura desconhecida é de 5000 metros, o que equivale ao comprimento da hipotenusa desse triângulo retângulo.

De modo que pudéssemos identificar a técnica desenvolvida para essa atividade, proposta pelo autor, verificamos no *Manual do Professor* deste livro didático a sua resolução.

Figura 3 – Cálculo da altura do avião em relação ao chão

46. $\text{sen } 30° = \frac{h}{5000} = \frac{1}{2} \Rightarrow h = 2\,500 \text{ m}$

Fonte: Dante (2016, p. 405)

Tomando como base o modelo praxeológico, modelizamos a atividade da figura 3 conforme apresentaremos no seguinte quadro:

Quadro 1 – Análise praxeológica da atividade 46

Bloco	Elementos	Descrição
Saber-fazer	Tipo de Tarefa (T)	Calcular o cateto oposto a um ângulo agudo de um triângulo retângulo, dadas as abertura do ângulo e a hipotenusa.
	Tarefa (t)	Calcular a altura de um avião, dados a distância percorrida por ele (5000 metros) e o ângulo entre a trajetória e o solo (30°).
	Técnica (τ)	- Identificar a razão trigonométrica a ser utilizada (seno, cosseno, tangente), que na tarefa específica trata-se do seno; - Substituir os valores na razão trigonométrica, que na tarefa específica corresponde a sen 30° = h/5000m = ½ (no qual h representa o comprimento do cateto oposto); - Resolver a equação do 1º grau (no caso, numericamente: h/5000 = ½ $\Leftrightarrow$ h = 5000/2 = 2500 acrescentando a unidade ao final; ou calculando diretamente com as grandezas h/5000 = ½ $\Leftrightarrow$ h = 5000/2 = 2500m).
Saber	Tecnológico-teórico (θ, Θ)	(θ, Θ): - Razões trigonométricas (no caso específico, sen 30° = cateto oposto / hipotenusa); - Semelhança de triângulos; - Álgebra das grandezas; - Equações polinomiais de 1° grau.

Fonte: Autoria própria

Segundo Chevallard (1999) é preciso, primeiramente, que haja uma análise do saber a ser estudado, para que se possa modelizar e determinar uma Praxeologia Matemática a ser estudada.

Surgem alguns questionamentos, propostos por Chevallard (1999), como alguns critérios que se fazem necessários para análise e caracterização de uma Praxeologia Matemática, que são:

- Os tipos de tarefas são claros e bem identificados? São representativas, pertinentes e com razão de ser explicitadas?
- As técnicas são efetivamente elaboradas? Fáceis de utilizar? Seu campo de ação é abrangente? São inteligíveis e podem evoluir?

- O enunciado é bem colocado? É evidente, natural ou conhecido? As justificações são próximas do padrão em matemática? São adaptadas, as condições? É exploratória?
- Os elementos teóricos são explicativos? O que permitem esclarecer e justificar?

Quando existe uma intenção de conduzir uma organização matemática, observando a maneira como se pode construir essa realidade matemática, realizando o estudo do tema, nos deparamos com uma organização de natureza didática, a qual não discutiremos nesse nosso trabalho.

3.1.2 Objetos ostensivos e não ostensivos

Na TAD, surgem outros importantes elementos que se faz necessário mencionarmos, pois utilizamos esse conceito em nosso trabalho. Esses elementos são os objetos ostensivos e os objetos não ostensivos.

Esses objetos na TAD surgem como uma proposta de um modelo epistemológico "que estabelece uma distinção dentro dos elementos que compõem uma organização (ou praxeologia) matemática, a saber: os tipos de tarefas, as técnicas, as tecnologias e as teorias" (MENEZES, 2010, p. 88).

Os objetos ostensivos são aqueles que são perceptíveis, visíveis, audíveis e até palpáveis, por assim dizer. Podemos trazer como exemplos de objetos ostensivos os sons, as figuras, os gestos, as imagens, os gráficos, os escritos, entre outros.

Já os objetos não ostensivos, são como os pensamentos ou as ideias. Não podemos vê-los, mas sabemos que existem em uma instituição, e a eles, é concedida uma existência. Por si só, os objetos não ostensivos não são percebidos, mas, através da manipulação de objetos ostensivos, eles são evocados. Como exemplos de objetos não ostensivos podemos citar os conceitos, as crenças, as ideias, entre outros.

Em alguns momentos do nosso trabalho, observamos como esses elementos ostensivos e não ostensivos se apresentam e se comportam. Podemos trazer como exemplo mais próximo disso, uma tarefa que solicita ao estudante calcular a medida do cateto oposto ao ângulo de 20° no triângulo retângulo, em um dos itens apresentados em uma avaliação externa. Nele encontra-se uma imagem de um triângulo retângulo.

Podemos considerar então que essa representação do triângulo evoca o objeto ostensivo nessa situação, pois é possível observarmos as suas características próprias que determinam o que é um triângulo retângulo.

Concordamos com Ramalho (2016) quando afirma que é significativo evidenciar o papel ostensivo do gráfico (imagem) em uma determinada tarefa, pois quando ele é interpretado, nos fornece elementos que possibilitam a compreensão da tarefa. A autora também salienta a importância do ostensivo, pois o mesmo ajuda a diferenciar tipos de tarefas.

Para que seja possível desenvolver uma técnica, com uma tecnologia capaz de justificar essa técnica, é necessário que invoquemos agora, por exemplo, o objeto não ostensivo razões trigonométricas no triângulo retângulo, que não é visível, pois transita nos conceitos e ideias. No entanto, o mesmo se faz necessário para a resolução de uma tarefa proposta inicialmente.

Nessa evocação, podemos observar também que, para que o estudante possa identificar o objeto ostensivo em triângulo retângulo com suas características específicas, é preciso que o mesmo esteja sendo "guiado" pelo objeto não ostensivo, conforme citado.

3.2 O SABER RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Nesse tópico serão abordados pontos relacionados ao nosso objeto do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo. Esse saber encontra-se inserido no estudo da trigonometria, que por sua vez está contida no campo da Geometria.

A trigonometria, segundo Boyer (1996), se originou a partir de alguns problemas encontrados em antigos papiros de Rhind por volta de 1650 a.C, e neles, havia indícios de uma possível teoria de triângulos semelhantes.

Com as características próprias de um saber originário da Geometria, a trigonometria também surgiu da necessidade de medição. Sua aplicação se estende desde a possibilidade de medir objetos que se encontram a certa distância, até a possibilidade de auxiliar na navegação e determinar a posições relativas das estrelas.

Com o tempo, e o desenvolvimento das necessidades humanas, a trigonometria evolui, sendo possível atuar em diversas áreas do conhecimento, sendo fundamental não apenas no estudo da Matemática, mas também na Física, na Medicina, na Astronomia, na Engenharia, na Arquitetura, e entre tantas outras áreas. A importância do estudo desse saber se faz presente no cotidiano dos indivíduos, na educação básica, na educação técnica e superior.

Barros (2018, p.76), em sua tese, reforça a importância desse saber quando afirma que as suas aplicações "podem fortalecer as razões de ser do estudo desses objetos, permitindo que os alunos tenham acesso a funcionalidades desses saberes, que o ensino da matemática, sem tais aplicações, talvez não seja capaz de reconstruir".

Para que sejam possíveis tais aplicações, se faz necessário a compreensão do estudo desses saberes, no contexto matemático, mais especificamente o saber razões trigonométricas no triângulo retângulo que se situam dentro do estudo da trigonometria.

No entanto, faz-se necessário antes de tratarmos sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo, falarmos rapidamente do que, na matemática, entende-se por razão. Existe uma diferença entre razão e fração que é importante destacar. Ambas, são representadas por um quociente entre dois números a e b, denominados numerador e denominador, respectivamente, e representadas por $\frac{a}{b}$, sendo $b \neq 0$.

Quando trabalhamos com fração, estamos representando, dentre outros significados, uma parte de um todo. Significa dividir algo em partes iguais, no qual os dois números que compõe a fração (numerador e denominador) são números inteiros, sendo o denominador diferente de zero. Ou seja, podemos dizer que: $\frac{a}{b}$ é uma fração, se $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

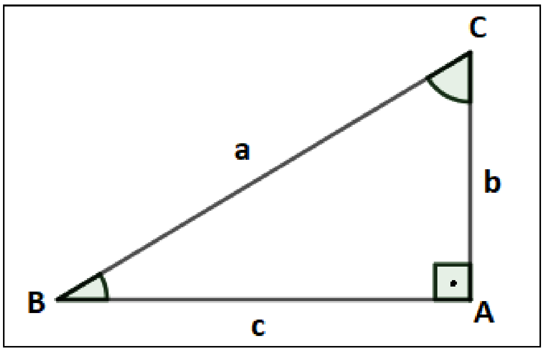
Já em uma razão, tanto o numerador, quanto o denominador (diferente de zero), podem ser números decimais. E quando estamos tratando de razão, o quociente de um número (ou de duas quantidades ou duas medidas) por outro número, possibilita fazer comparações entre duas grandezas, por exemplo. Exemplificando, podemos dizer que $\frac{4,2}{3}$ é uma razão, mas não uma fração, pois o numerador é um número decimal.

Trazendo essa noção de razão para a Geometria, mais especificamente para a trigonometria, podemos determinar as medidas dos elementos pertencentes em triângulo retângulo, fazendo as relações trigonométricas existentes entre eles.

Com o estudo das relações envolvendo os lados de um triângulo retângulo na trigonometria, encontramos o saber razões trigonométricas, a partir dos seus lados e dos ângulos, possibilita que encontremos as relações seno, cosseno e tangente, cuja definição se dá por meio de semelhança de triângulos, como veremos a seguir.

Vamos considerar ABC um triângulo retângulo em A, como representado pela figura abaixo:

Figura 4 – Representação de um triângulo retângulo ABC



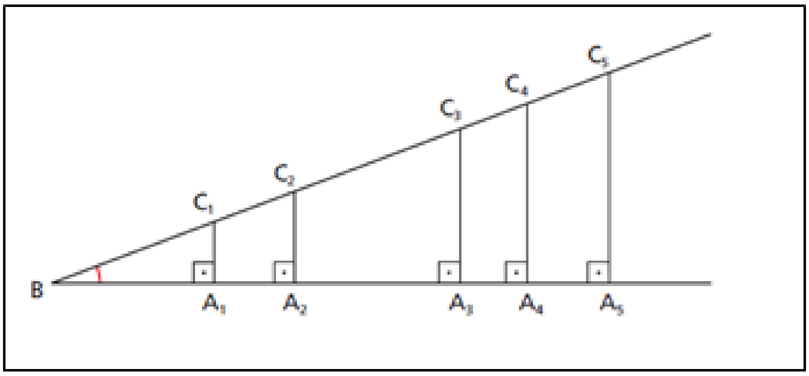
Fonte: autoria própria

Logo:

- **a** é a hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto);
- **b** e **c** são os catetos (lados que formam o ângulo reto);
- $\hat{B}$ e $\hat{C}$são ângulos agudos;
- $\overline{\mathrm{AC}}$é o cateto oposto ao ângulo B;
- $\overline{\mathrm{AB}}$é o cateto adjacente ao ângulo B.

Vamos agora, conforme a figura abaixo e considerando o ângulo agudo $\hat{B}$, marcar sobre a semirreta $\overrightarrow{BA}$os pontosA_1, A_2, A_3,..., e traçar as perpendiculares à semirreta $\overrightarrow{BA}$ passando por cada um desses pontos. Cada uma dessas retas intercepta a semirreta$\overrightarrow{BC}$em um pontoC_1, C_2, C_3, ... Vamos então considerar os segmentos$\overline{A_1C_1}$, $\overline{A_2C_2}$, $\overline{A_3C_3}$, ...

Figura 5 – Representações de triângulos semelhantes



Fonte: Iezzi (2013, p. 11)

Podemos observar que todos os triângulosBA_1C_1, BA_2C_2, BA_3C_3... são semelhantes entre si. Logo, de acordo com Iezze (2013), quando o ângulo$\hat{B}$está fixado, temos as seguintes relações:

1ª) $\frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \frac{A_3C_3}{BC_3}$ = ... (o **cateto oposto** a$\hat{B}$e a **hipotenusa** são diretamente proporcionais);

2ª) $\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = \frac{BA_3}{BC_3}$ = ... (o **cateto adjacente** a$\hat{B}$e a **hipotenusa** são diretamente proporcionais);

3ª) $\frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BA_2} = \frac{A_3C_3}{BA_3}$ = ... (os **catetos oposto** e **adjacente** a$\hat{B}$são diretamente proporcionais);

4ª) $\frac{BA_1}{A_1C_1} = \frac{BA_2}{A_2C_2} = \frac{BA_3}{A_3C_3}$= ... (os **catetos adjacente** e **oposto** a$\hat{B}$são diretamente proporcionais).

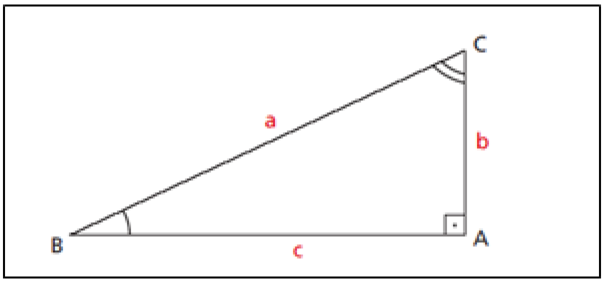
Assim:

- $\mathrm{A_1C_1}$ = medida de$\overline{\mathrm{A_1C_1}}$;
- $\mathrm{BC_1}$ = medida de $\overline{\mathrm{BC_1}}$;
- $\mathrm{A_2C_2}$ = medida de $\overline{\mathrm{A_2C_2}}$, e assim por diante.

Com isso, podemos verificar que as relações anteriores não são dependentes do “tamanho” dos triângulosBA_1C_1, BA_2C_2, BA_3C_3,... No entanto, dependem do valor do ângulo $\hat{B}$.

Desse modo, fixando um ângulo agudo$\hat{B}$, voltemos a considerar o triângulo retângulo seguinte:

Figura 6: Representação de um triângulo retângulo com ângulo agudo em B



Fonte: Iezzi (2013, p. 12)

Assim, referente ao ângulo agudo $\hat{B}$, temos as seguintes relações:

1ª) **Seno:** é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.

$$\boxed{\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a}}$$

2ª) **Cosseno**: é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.

$$\boxed{\cos \hat{B} = \frac{c}{a}}$$

3ª) **Tangente**: é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo.

$$\boxed{\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c}}$$

Sendo assim, as razões seno, cosseno e tangente são denominadas razões trigonométricas em relação ao ângulo $\hat{B}$. A partir das aplicações de conceitos de semelhança de triângulos, constitui-se o bloco tecnológico-teórico do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, objeto da nossa pesquisa.

No tópico seguinte, iremos discutir alguns dados apresentados em uma avaliação em larga escala no Estado de Pernambuco, referentes ao saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, nos últimos anos.

3.3 AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NAS AVALIAÇÕES EXTERNAS DO SAEPE

Durante algum tempo o Governo Federal e os Estados têm promovido avaliações em larga escala para a educação pública do Brasil. Um processo que hoje se encontra mais organizado e estruturado, já vem sendo pensado, aprimorado e trabalhado há alguns anos.

Teve como marco inicial no Brasil o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), em meados da década de 1990. E com o passar dos anos, cada Estado e municípios adquiriram autonomia para propor e criar meios próprios de avaliação em larga escala, de modo que pudessem pensar em políticas públicas para a melhoria do ensino e da aprendizagem dos seus estudantes.

Em nossa pesquisa, apresentamos o Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE), que não diferentemente das demais avaliações em larga escala no Brasil, tem como objetivo promover mudanças na educação proposta pelo estado de Pernambuco, para que seja possível apontar meios para um ensino de qualidade.

A avaliação do SAEPE foi criada em 2000, e desde então aplica testes de múltipla escolha para os estudantes nas disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática das séries do 3°, 5° e 9° anos do Ensino Fundamental e 3° ano do Ensino Médio.

A partir de 2015, as avaliações dos estudantes do 3º ano do Ensino Médio, passaram a ser disponibilizadas para consulta pública e estudo dos itens presentes nesses testes. Isso possibilitou realizar uma análise dos itens referentes ao saber razões trigonométricas no triângulo retângulo. O interesse especificamente para esse saber do campo da Geometria surgiu em decorrência do baixo rendimento dos estudantes nas questões relativas a esse conteúdo, nas últimas edições dessa avaliação.

O SAEPE possui uma Matriz de Referência concernente a cada ano escolar que será avaliado ao final do ano letivo. Cada matriz compõe um determinado número de *Descritores* que são relativos aos conceitos matemáticos que o estudante deve conhecer ao final de cada etapa de ensino.

O descritor *D05 – Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente)*, presentes na Matriz de Referência do SAEPE do 3º ano do Ensino Médio, vem se apresentando constantemente no

Grau de Domínio Baixo, de acordo com as informações presentes na Plataforma Foco Educação de Pernambuco.

Tal Plataforma apresenta dados e informações dos resultados obtidos por estudantes do Estado de Pernambuco nas avaliações do SAEPE e no ENEM, nos últimos anos.

Essas informações são apresentadas no que a Plataforma chama de *Mapa dos Descritores*. Nesse mapa, estão distribuídos todos os trinta e cinco descritores presentes na matriz de referência do SAEPE, do 3º ano do ensino médio. Os descritores estão discriminados por campo da Matemática de acordo com a Matriz (Geometria; Grandezas e Medidas; Números e Operações/Álgebra e Funções, e Estatística, Probabilidade e Combinatória).

A tabela abaixo apresenta a distribuição dos descritores por campo da matemática na Matriz de Referência do 3º ano do Ensino Médio, totalizando 35 descritores nessa modalidade, e como se encontram em seus graus de domínio, respectivamente.

Tabela 1 – Distribuição dos Descritores da Matriz de Referência do SAEPE – 3º Ano do Ensino Médio

Campo	Nº de Descritores na Matriz de Referência	Nº de Descritores no Grau de Domínio Baixo	Valores
Geometria	10	05	50%
Grandezas e Medidas	03	02	67%
Números e Operações/Álgebra	18	05	27%
Estatística	04	01	25%

Fonte: Autoria própria

O Campo da Geometria possui dez descritores, dos quais, de acordo com o Mapa apresentado na Plataforma Foco PE, cinco destes se encontram no Grau de Domínio Baixo, quanto ao resultado dos estudantes apresentados nas últimas avaliações.

Dentre esses cinco descritores, destacamos o descritor D05. Dessa forma, o Mapa orienta uma ação no ensino, no sentido de priorizar o reforço desse e dos demais descritores que se encontram nesse grau de domínio.

De acordo com os resultados apresentados nos últimos três anos do SAEPE, o descritor D05 vem apresentando um pequeno crescimento. No entanto, ainda se apresenta muito aquém do que se considera desejável, em termos de padrões de desempenho dos estudantes, com uma média histórica de 33% em relação ao quadro de domínio.

Dessa forma, esse saber se apresenta dentre os descritores que necessitam de uma ação mais urgente. Priorizar esse descritor, assim como os outros que se encontram numa situação semelhante, nas ações pedagógicas da rede Estadual e municipal é tido como fundamental e necessário.

No entanto, os índices mostram que, mesmo atuando com uma força tarefa para a melhoria do grau de domínio desse descritor, os avanços ainda são ínfimos.

A seguir, apresentaremos uma tabela onde estão presentes os valores referentes ao grau de domínio do descritor D05 da matriz de referência do SAEPE, nos últimos três anos, e consequentemente a sua média histórica. Dessa forma, fica visível o crescimento tímido referente a esse saber.

Quadro 2 - Grau de Domínio do D05 – 3º Ano do Ensino Médio

DESCRITOR	DESCRIÇÃO	AÇÃO	GRAU DE DOMÍNIO			
			2016	2017	2018	MÉDIA HISTÓRICA
D05	*Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente)*	Priorizar	31%	32%	35%	33%

Fonte: Adaptada Plataforma Foco PE

A matriz de referência do SAEPE é um recorte da matriz curricular do Estado de Pernambuco. O estudo do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo está presente nesses dois documentos norteadores. Esse documento aponta para que o ensino desse saber ocorra inicialmente a partir do 9º ano do Ensino Fundamental e seja reforçada e consolidada no 1º ano do Ensino Médio.

Apenas nesses dois momentos na matriz curricular do Estado, encontramos orientação para que esse saber seja trabalhado, com exceção para quando a escola em questão seja em tempo integral, pois o tempo de aula é maior que em uma escola regular.

Nesse caso, a orientação é que, além dos conteúdos comuns a todas as escolas da rede, os conteúdos referentes à trigonometria também sejam trabalhados nesse Ciclo, com os conteúdos trigonométricos básicos, dentre eles, funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente). Logo, o saber razões trigonométricas no triângulo retângulo muito provavelmente será revisto e reforçado. Mas apenas para essas escolas com horário estendido, o que não é a realidade de todas as escolas da rede.

Um ponto importante a ser considerado é o fato de que se o estudante vivenciar esse conteúdo apenas no 9º ano do ensino fundamental e no 1º ano do ensino médio, pode acontecer que quando ele for fazer a avaliação ao final do 3º ano, não tenha mais o reconhecimento desse saber, principalmente se o mesmo não tiver sido efetivamente consolidado como deveria.

Com base nessas informações apresentadas é interessante voltar o olhar também para o livro didático utilizado pelo estudante ao longo do seu ensino médio, e como esse saber vem sendo tratado. Pois, por muitas vezes, o livro didático é uma das principais fontes de pesquisa e estudo que o estudante dispõe para se preparar para as avaliações em larga escala.

A relação do que está sendo abordado no livro didático com o que o estudante efetivamente responde em problemas envolvendo razões trigonométricas, pode elucidar o que vem sendo apresentado nesses últimos resultados, uma vez que se mostram constantemente abaixo do esperado, nos últimos anos.

Iremos discutir, no próximo tópico, estudos e pesquisas referentes ao ensino e aprendizagem da trigonometria, mais especificamente o saber razões trigonométricas no triângulo retângulo.

3.4 PESQUISAS SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Nesse tópico iremos destacar algumas pesquisas sobre o nosso objeto de pesquisa, o ensino do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo e sua relação com conhecimentos mobilizados pelos estudantes sobre esse saber. Sendo o saber pertencente ao estudo da trigonometria, no campo da Geometria.

Encontramos, ao longo de nossa pesquisa, diversos trabalhos que versam sobre a trigonometria, principalmente fazendo o uso de recursos digitais, como softwares de geometria dinâmica no auxílio da prática docente e aprendizagem dos estudantes. Pesquisas apontam como alguns desses recursos tecnológicos têm ganhado espaço dentro da sala de aula, principalmente nas aulas de matemática e em Geometria, apesar das muitas dificuldades que por vezes ainda são encontradas.

No entanto, como o interesse de nossa pesquisa tem foco no livro didático e no que os estudantes respondem em relação ao saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, a nossa busca por pesquisas anteriores foi delimitada, tomando como foco apenas dois pontos: o livro didático e o estudante, ambos voltados para o estudo do objeto do saber em questão.

Em nossa busca, destacamos duas pesquisas que tomam como foco inicial o livro didático. Encontramos o trabalho de Barbosa (2015), que procurou analisar a transposição didática da trigonometria em livros didáticos de matemática do ensino médio; e o trabalho de Ramalho (2016), que buscou caracterizar a proposta de ensino de trigonometria em livros do 9º ano do ensino fundamental.

Tendo os estudantes como participantes de estudo, encontramos os seguintes trabalhos quanto: às concepções dos estudantes para a aprendizagem em trigonometria (FRITZEN, 2011); aos erros cometidos por estudantes na resolução de problemas envolvendo razões trigonométricas no triângulo retângulo (FORTES, 2012); à mobilização da aprendizagem dos estudantes quanto às noções trigonométricas (SANTOS, 2017); à compreensão dos conhecimentos dos estudantes sobre o conceito das razões trigonométricas (VASCONCELOS, 2019); e aos procedimentos mobilizados por estudantes nas resoluções de questões relacionados à trigonometria no triângulo retângulo (PASTOR, 2020).

A seguir, trazemos uma tabela com os trabalhos supracitados, os quais tiveram como foco o livro didático e o estudante quanto ao saber razões trigonométricas. Desse modo, destacamos os trabalhos que se apresentaram mais relevantes para a nossa pesquisa, distribuídos da seguinte forma:

Quadro 3 - Pesquisas em Trigonometria

Ano	Título	Autor	Instituição	Nível	Foco
2015	A trigonometria do ciclo trigonométrico: uma análise da Transposição Didática realizada pelo livro didático na 2ª série do ensino médio à luz da Teoria Antropológica do Didático	Aline Oliveira da Silva Barbosa	UFRPE	Mestrado em Ensino das Ciências e Matemática	Livro Didático
2016	Trigonometria em livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental	Luana Vieira Ramalho	UFMS	Mestrado em Educação Matemática	Livro Didático
2011	Estudo do sistema conceitual de Trigonometria no ensino fundamental: uma Leitura histórico-cultural	Karina Rossa Fritzen	UNESC	Mestrado em Educação	Estudante
2012	Razões trigonométricas no triângulo retângulo: uma análise de erros no ensino médio	Adriana Wachtmann Borges Fortes	UNIFRA	Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e Matemática	Estudante
2017	Uma sequência didática para a aprendizagem das noções de trigonometria fundada na teoria das inteligências múltiplas	Jamison Luiz Barros Santos	UFS	Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática	Estudante
2019	Entre Palavras, Quadros e Números: uma análise ontossemiótica da construção do conceito de razões trigonométricas com a utilização de histórias em quadrinhos	Danilo Monteiro de Vasconcelos	UFPE	Mestrado em Educação em Ciências e Matemática	Estudante
2020	Análise de questões de trigonometria propostas aos alunos do Ensino Fundamental pelo SARESP	Ederson Sales Pastor	PUC-SP	Mestrado em Educação Matemática	Estudante

Fonte: Autoria própria

Dessas pesquisas, trazemos as dissertações de Barbosa (2015) e Ramalho (2016) que, utilizando a Teoria Antropológica do Didático, fazem uma análise de conteúdos referente à trigonometria no triângulo retângulo, presentes nos principais livros didáticos utilizados pelos docentes de matemática nos últimos anos.

Vale ressaltar que, além dessas, não observamos outras pesquisas que investigam a abordagem do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, o que reforça a importância na investigação desse saber em nosso trabalho e em estudos futuros.

A pesquisa realizada por Barbosa (2015) investigou a transposição didática do saber trigonometria nas atividades propostas em três livros didáticos do 2º ano do

Ensino Médio, especificamente, no que se refere ao conceito do ciclo trigonométrico da primeira volta, e analisou as recomendações dos documentos oficiais referente a esse objeto de estudo.

Dentre os resultados, um importante aspecto observado em sua pesquisa, foi "a maneira como algumas informações são tratadas nos textos dos livros didáticos, podendo gerar deturpações quanto ao entendimento, dependendo da interpretação do leitor" (BARBOSA, 2015, p. 142). Observa-se então, a importância de prestar uma vigilância epistemológica mais rigorosa quanto ao saber em questão, abordado nos livros didáticos.

Ramalho (2016), que também realizou uma investigação voltada para o livro didático, objetivou caracterizar a proposta do ensino da trigonometria, buscando analisar a abordagem dos procedimentos de como esse estudo é proposto em quatro livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental, mais adotados nas escolas públicas até o momento de sua pesquisa.

Ancorada na TAD e no Modelo Praxeológico proposto por Gáscon (2003), a autora identificou, analisou e caracterizou as praxeologias matemáticas e didáticas que foram apresentadas nos livros analisados. Os resultados obtidos nas análises mostraram a valorização do trabalho com as técnicas e das suas justificativas na construção do bloco tecnológico-teórico, mesmo observando que o ensino da trigonometria proposto nos livros analisados tenha se diferenciado de um para o outro. Verificou-se também, uma expressiva quantidade de tarefas que diminuem a aplicação do bloco tecnológico-teórico, possibilitando um direcionamento do ensino da trigonometria para uma abordagem clássica.

As pesquisas acima nos remetem ao fato de que o ensino da trigonometria abordado em livros didáticos, ainda tem sido muito pautado em expressões algébricas (as chamadas "fórmulas") e cálculos que são reproduzidos muitas vezes, de forma mecânica. Ressaltamos ainda que, considerando a importância e o lugar do livro didático na prática docente do professor de matemática, pouco ainda é investigado, quando o saber em questão é a trigonometria, e de como esse saber se apresenta neste recurso pedagógico.

Analisar como o saber relativo à trigonometria é mobilizado por estudantes, tem sido objeto de algumas investigações. Dentre elas, destacamos o trabalho de Fritzen (2011) que teve como objetivo analisar o processo de elaboração do pensamento conceitual de trigonometria, mais especificamente o conceito de seno de um ângulo. A pesquisa foi realizada com 32 estudantes do 9º ano do ensino fundamental, ao responderem uma atividade de estudo sob a ótica da teoria histórico-cultural, com o propósito de se apropriarem das noções de trigonometria, tendo como recorte, o conceito seno.

A autora traz o questionamento quanto à recorrência de que no âmbito educacional, o ensino da trigonometria tem o foco voltado apenas ao triângulo retângulo. Para a análise do processo de execução de tarefas por parte dos estudantes, foram tomados três focos: a execução das operações referentes à construção do ciclo trigonométrico, as operações referentes às inter-relações entre as ideias ou significações conceituais e as elaborações conceituais de seno. Os resultados apontaram que, após os estudantes executarem as operações e tarefas da atividade de ensino e estudos elaborados pela pesquisadora, houve progressos nas elaborações conceituais das razões trigonométricas, realizadas pelos estudantes.

O estudo de Fortes (2012) teve como objetivo analisar os erros produzidos por estudantes do ensino médio, na resolução de problemas que envolviam razões trigonométricas no triângulo retângulo, além de preparar atividades com a finalidade de remediar os erros identificados, como produto final.

Foi aplicado também um questionário para os professores, a fim de coletar a opinião dos mesmos em relação aos erros dos estudantes. Esses erros foram categorizados separadamente para cada questão, e também, a autora elaborou e aplicou uma atividade com estudantes da Educação de Jovens e Adultos (EJA), a fim de testar atividades, como proposta para o seu produto final da dissertação.

Observaram-se, pelo número de ocorrências em cada classe de erros, que os estudantes possuem muitas dificuldades relativas à identificação das relações trigonométricas. Essas dificuldades, segundo os docentes participantes da pesquisa, são relacionadas à falta de atenção e de conhecimentos prévios por parte dos estudantes. Foi elaborada, com sugestões dos docentes, uma Webquest com uma sequência de atividades que teve como pretensão minimizar as dificuldades indicadas pelos estudantes, como produto final da pesquisa.

Já a pesquisa de Santos (2017) buscou analisar as potencialidades das Inteligências Múltiplas trazidas por Gardner, no intuito de auxiliar a mobilização da aprendizagem de estudantes do 9º ano do ensino fundamental, referentes às noções de trigonometria (razões trigonométricas no triângulo retângulo – seno, cosseno e tangente) por meio de uma sequência didática. Para isso, a sua pesquisa se apoiou nos argumentos teóricos de Gardner, na Teoria das Inteligências Múltiplas, e na Engenharia Didática de Artigue, para a metodologia de pesquisa, que fundamentou a sequência de atividades reflexivas proposta.

O autor observou que “foi possível motivar a aprendizagem das noções de Trigonometria ao inserir no processo pedagógico a Teoria das Inteligências Múltiplas” (SANTOS, 2017, p. 116). E os resultados apontam na permanência da ampliação de busca pela compreensão e abordagem dos estudos relacionados às razões trigonométricas no triângulo retângulo.

A dissertação de Vasconcelos (2019) teve como objetivo principal investigar as implicações do desenvolvimento de uma sequência didática para o ensino e aprendizagem do conceito de razões trigonométricas. Para isso, utilizou como recurso didático norteador, uma história em quadrinhos (HQ) com estudantes do 1º ano do ensino médio. O autor tomou como base teórico-metodológica o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS).

Em suas análises, o Vasconcelos (2019) percebeu limitações em alguns conteúdos matemáticos por parte dos estudantes, assim como pôde evidenciar também que, mesmo já tendo tido contato com o saber razões trigonométricas, esses estudantes não detinham o domínio desse saber. Os resultados apontam que a abordagem com situações-problema utilizando a HQ, possibilitou o desenvolvimento gradativo da aprendizagem com os estudantes, de modo que os mesmos puderam compreender as razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Selecionamos também o trabalho de Pastor (2020), que discutiu o saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, apresentado em provas do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP). Em sua pesquisa, teve como objetivo investigar quais conjuntos de tarefas estão presentes nas questões desta avaliação em larga escala, e quais técnicas, tecnologias e teorias são mobilizadas pelos estudantes, ao resolverem essas questões.

Como suporte teórico-metodológico, o autor apoia-se na Teoria Antropológica do Didático, a fim de fazer a análise praxeológica das questões do SARESP e identificar as mobilizações dos estudantes. Dos 51 estudantes que responderam ao teste aplicado, 19,60% acertaram todas as quatro questões, enquanto que 21,56% erraram todas as questões.

Dentre os resultados observados, o autor identificou que, mesmo com boa parte dos estudantes participantes tendo mobilizado corretamente as técnicas, alguns dos erros cometidos por eles não estavam relacionados às razões trigonométricas, mas sim, as operações matemáticas básicas. Também observou que às questões selecionadas para a investigação e que são propostas pelo SARESP, partem do mesmo tipo de tarefa, nas quais são necessárias as mesmas técnicas mobilizadas pelos estudantes.

Podemos observar que as pesquisas acima apresentam elementos comuns quanto aos procedimentos mobilizados pelos estudantes. As dissertações de Fritzen (2011), Santos (2017) e Vasconcelos (2019), mesmo com suporte teórico distintos, buscaram elaborar atividades referente ao objeto do saber razões trigonométricas, de modo que fosse possível obter a compreensão dos conhecimentos dos estudantes quanto a esse saber.

Nas pesquisas de Fortes (2012) e Pastor (2020), podemos identificar elementos comuns referentes às análises, quanto aos erros que são cometidos por estudantes com problemas que envolvam as razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Essas pesquisas apontam que, muitos desses erros produzidos pelos estudantes, são relacionados às suas dificuldades em identificar elementos inerentes a trigonometria no triângulo retângulo, assim como à falta de atenção ao responderem as questões, e também que muitos desses erros não são relacionados necessariamente as razões trigonométricas, e sim a operações aritméticas básicas.

A partir das pesquisas acima apresentadas, podemos identificar contribuições desses trabalhos analisados, de modo que proporcionam possibilidades de avanço em nossa investigação quanto aos saberes mobilizados por estudantes. Pois, podemos observar possíveis caminhos ao ensino e à aprendizagem do saber razões trigonométricas, assim como possibilita um maior embasamento ao responder nossa questão de pesquisa.

No entanto, identificamos poucos trabalhos que, em suas análises, tomam o livro didático como papel significativo nas investigações, referente ao conteúdo da trigonometria. Pesquisas realizadas com enfoque para o ensino e aprendizagem da Geometria nos livros didáticos, ainda são incipientes, quando comparadas a outros campos da matemática, como o da Álgebra, por exemplo.

Isso nos reforça a importância de contribuir com investigações que evidenciam como o saber razões trigonométricas se apresenta em livros didáticos, em especial em uma coleção do Ensino Médio, e de como essa abordagem se relaciona com os saberes dos estudantes.

4 METODOLOGIA

Iremos abordar neste capítulo as principais escolhas metodológicas para o desenvolvimento da nossa pesquisa. Almejando alcançar nosso objetivo, e para que seja possível um melhor entendimento da Teoria Antropológica do Didático em nossa pesquisa, optamos por uma abordagem qualitativa, pois entendemos que esse tipo de abordagem permite uma melhor compreensão das relações, dos fenômenos e dos processos existentes nas relações (REIS, 2007).

Trata-se também de uma pesquisa do tipo documental, uma vez que trazemos uma coleção do livro didático em nossas análises, no qual essa técnica de investigação é uma “forma de registro e sistematização de dados, informações, colocando-os em condições de análise por parte do pesquisador” (SEVERINO, 2016, p. 132).

4.1 OBJETIVOS DA PESQUISA

4.1.1 Objetivo Geral

Analisar as relações entre a praxeologia matemática presente em uma coleção de livro didático e as técnicas utilizadas pelos estudantes do 3º ano do ensino médio, quanto ao estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

4.1.2 Objetivos Específicos

- Modelizar a praxeologia matemática de uma coleção de livro didático do ensino médio, quanto ao saber razões trigonométricas no triângulo retângulo;
- Caracterizar elementos praxeológicos utilizados pelos estudantes do ensino médio, em resposta aos itens das últimas avaliações do SAEPE, quanto ao saber razões trigonométricas no triângulo retângulo;
- Comparar a praxeologia matemática presente na coleção do livro didático com as técnicas mobilizadas pelos estudantes frente aos itens das avaliações do SAEPE.

4.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A escolha dos procedimentos metodológicos foi dividida em três etapas: análise da coleção dos livros didáticos, a aplicação do teste com os estudantes, e por fim, a comparação entre elementos da praxeologia matemática dos livros didáticos com as respostas dos estudantes. Na medida em que as análises foram sendo feitas, delineada nessas três etapas, buscamos atender aos nossos objetivos específicos propostos nesta pesquisa.

Com relação à segunda etapa, a pesquisa foi realizada em uma Escola Estadual de Pernambuco, situada na Região Metropolitana do Recife, a qual oferece tanto o ensino fundamental quanto o ensino médio. A escolha por essa escola se deu pelo fato de que ela apresenta os resultados dos últimos anos no SAEPE semelhantes aos que se apresentam na média geral do resultado do Estado de Pernambuco, quanto ao descritor referente ao saber razões trigonométricas no triângulo retângulo. Outro fator importante nessa escolha é o fato de que tanto o docente quanto os estudantes afirmaram que o livro didático adotado na escola é utilizado por eles.

Como público-alvo participante da pesquisa, tivemos 54 estudantes de duas turmas do 3º ano do ensino médio dessa escola, cujas idades variam de 16 a 18 anos. Optamos por estudantes dessa etapa do ensino médio, pelo fato de que os mesmos estarem concluindo a educação básica, além de que estavam prestes a participar da avaliação do SAEPE, que acontece ao final de cada ano, para os que estão no último ano dessa etapa de ensino.

Também como critério de escolha desse público participante, confirmamos antecipadamente com a gestão da escola, que nos últimos anos os estudantes dessa instituição participaram das avaliações externas como o SAEPE, SAEB e o ENEM.

A gestão da escola também confirmou que a Gerência Regional de Educação (GRE) da qual a Escola faz parte, envia regularmente e bimestralmente simulados nos moldes da avaliação do SAEPE, com itens de avaliações anteriores que estão disponíveis, ou com itens muito semelhantes a cada descritor. Além de outros materiais de apoio que também são enviados para os professores e estudantes, contendo atividades referentes aos descritores da Matriz de Referência do Ensino Médio do SAEPE.

Isso nos assegurou que os estudantes dessa instituição, em algum momento durante o ano letivo de 2019, tiveram contato com o descritor D05 – Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).

Inicialmente a ideia seria aplicar com os estudantes um estudo piloto no final de 2019 e, após as devidas observações, correções e ajustes, retornaríamos no ano seguinte para aplicar o teste final para a pesquisa. Os estudantes participantes não seriam os mesmos, mas as suas características sim: alunos dessa mesma instituição, do 3º ano do ensino médio, com o mesmo professor e usuários da mesma coleção de livros didáticos.

No entanto, a nossa pesquisa, assim como tantas outras em andamento no ano de 2020, foi surpreendida pela pandemia do covid-19, a qual impossibilitou o nosso retorno à escola, uma vez que todas as aulas presenciais foram suspensas naquele ano.

Desta feita, em acordo com a orientadora e professores participantes da banca desta pesquisa no momento da qualificação, optamos por adotar o teste inicial como o definitivo, uma vez que o mesmo se apresentou suficiente para coleta de dados para esse trabalho.

4.3 A COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS ANALISADOS

Nesse tópico apresentaremos a coleção dos livros didáticos de matemática do Ensino Médio adotado na instituição de ensino a qual os participantes da pesquisa fazem uso. Salientamos que tanto os estudantes quanto o professor, confirmaram a utilização do livro para estudo e ensino, respectivamente.

A coleção dos livros analisados foi aprovada pelo Programa Nacional do Livro Didático de 2018 (PNLD/2018), que nesse ano teve oito coleções de matemática aprovadas para o ensino médio, os quais foram submetidos à escolha dos professores para serem adotados no triênio de 2018, 2019 e 2020.

A coleção analisada é Matemática Contexto & Aplicação (1º ao 3º ano do ensino médio), do autor Luiz Roberto Dante, publicado pela Editora Ática. Conforme os dados apresentados no Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação

(FNDE), a coleção de matemática para o ensino médio, da autoria de Luiz Roberto Dante, foi uma das mais adotadas no Estado de Pernambuco.

Para que possamos ter uma visão geral da coleção analisada, fizemos uso da resenha oferecida no Guia do PNLD/2018, a qual nos apresenta uma descrição da obra, apresentando como estão organizados os conteúdos.

> Os livros organizam-se em quatro unidades, subdivididas em capítulos. Estes sempre são iniciados por imagens e pequenos textos, relativos à temática a ser estudada. Em geral, a apresentação dos conteúdos é feita em breves explanações, seguidas de exercícios resolvidos e outros propostos. Ao longo dos capítulos, são encontradas as seções *Leitura*; *Um pouco mais*; *Matemática e tecnologia*; *Outros contextos*, que apresentam temas de ampliação cultural e atividades interdisciplinares. Há, ainda, *Vestibulares de Norte a Sul* e *Pensando no Enem*. Questões adicionais e dicas são incluídas nos boxes *Para refletir*, *Você sabia?* e *Fique atento*. Ao final dos volumes, são apresentadas as seções *Caiu no Enem, Respostas*, *Sugestões de leituras complementares*, *Significado das siglas de vestibulares*, *Bibliografia* e *Índice remissivo*(BRASIL, 2017, p. 44).

Na imagem abaixo, trazemos o extrato da resenha dos livros do 1º ao 3º ano do ensino médio dessa coleção em que o estudo da trigonometria se apresenta.

Figura 7 - Descrição dos conteúdos referentes à trigonometria no PNLD

1º ANO – 4 UNIDADES - 8 CAPÍTULOS – 288 PP.	
UNIDADE 4	
8	Trigonometria no triângulo retângulo: semelhança, teorema de Tales, relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo.

2º ANO – 4 UNIDADES - 10 CAPÍTULOS – 280 PP.	
UNIDADE 1	
1	Trigonometria em triângulos quaisquer: seno, cosseno, lei dos senos, lei dos cossenos.
2	Conceitos trigonométricos básicos: arcos e ângulos, circunferência trigonométrica, arcos côngruos.
3	Funções trigonométricas: ideias de seno, cosseno e tangente; redução ao 1º quadrante, noção geométrica de tangente; função seno; função cosseno; senoide.

3º ANO – 4 UNIDADES - 10 CAPÍTULOS – 264 PP.	
UNIDADE 4	
10	Relações e equações trigonométricas: identidades, fórmulas de adição, do arco duplo e do arco metade, equações trigonométricas.

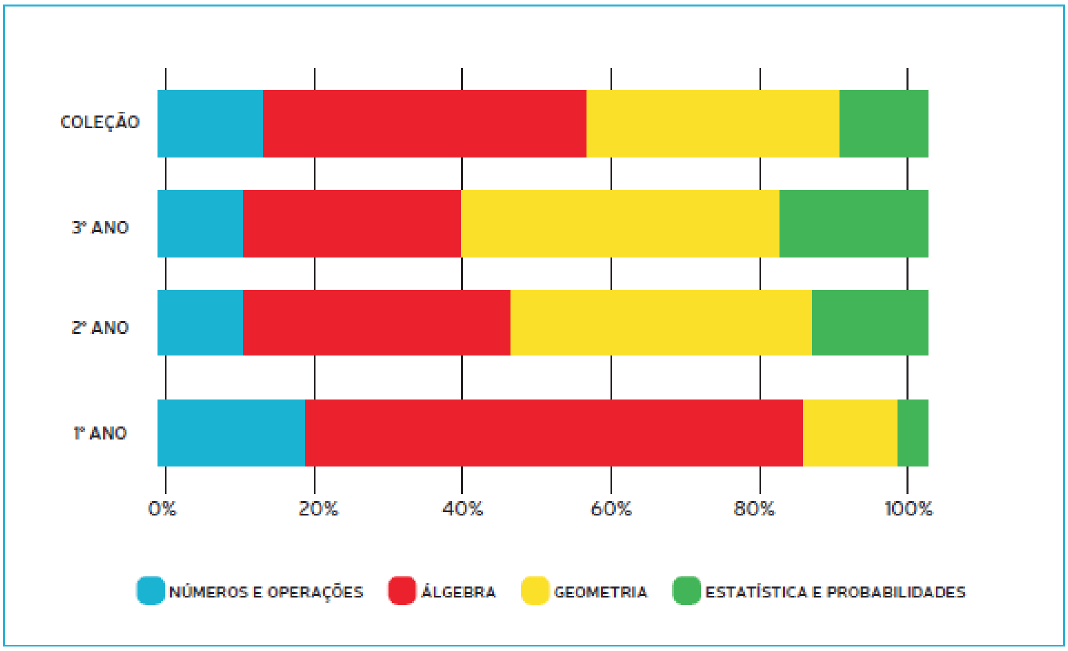
Fonte: adaptado de Brasil, 2017

É indicado no guia de livros didático no PNLD 2018 que a seleção dos conteúdos dos campos distintos da matemática escolar é satisfatória, mesmo que no volume do 1º ano haja uma predominância no trabalho da álgebra, essa distribuição é equilibrada nos demais volumes.

Quanto ao campo da Geometria nessa distribuição, aparece com maior ênfase nos volumes do 2º e 3º ano. Na coleção do 1º ano, o qual está situado o nosso objeto de pesquisa estuda-se a noção de semelhança de triângulos, que se emprega na dedução das relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo. E que de acordo com a descrição dos conteúdos apresentados na figura 5, encontra-se no último capítulo da última unidade desse volume.

Na imagem a seguir, trazemos a distribuição dos campos da matemática presente nos três volumes dessa coleção.

Figura 8 - Organização dos conteúdos da coleção analisada



Fonte: Guia do PNLD, 2017

É importante ressaltar que o guia do PNLD afirma que, no volume 1 desta coleção, mesmo havendo poucas sugestões que favoreçam experimentos práticos nas atividades propostas, o cálculo de distâncias é bem contextualizado historicamente.

O cálculo de distâncias inacessíveis dentro do estudo de trigonometria se faz presente nessa afirmação, o qual é considerado como contextualizados, dentro do seu teor histórico, e que também poderá ser reforçado na prática, a depender do planejamento e dinâmica do professor em suas aulas quando trabalhar com esse saber.

4.3.1 Categorias e critérios de análise da coleção de livros didáticos

Para análise documental da coleção do livro didático de matemática, nos apoiamos na Teoria Antropológica do Didático, em especial a praxeologia matemática do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, presente nessa coleção.

A opção por analisar a coleção completa, se deu pelo fato de que o saber razões trigonométricas no triângulo retângulo se faz presente fortemente no volume 1, perpassando pelos demais volumes. Sendo assim, fez-se necessário uma análise mais abrangente, na qual fosse possível observarmos como esse saber se apresenta em cada volume desta coleção, sendo utilizado ou não, como ferramenta para outros conteúdos da Matemática.

Tal análise possibilitou ter acesso a importantes informações quanto ao nosso objeto de estudo, pois é possível observar a existência de "indicadores linguísticos que dividem o texto do saber ensinado em texto-aula sob a responsabilidade de um hipotético utilizador do livro e exercícios sob a responsabilidade do aluno" (ROSA DOS SANTOS, 2005, p. 48). E para que fosse possível obter informações complementares além de sugestões e resoluções completas dos exercícios apresentados na coleção analisada, optamos por analisar o Manual do Professor.

Concordamos com Bittar (2017), quando afirma que para auxiliar na organização de intervenções didáticas para os estudantes, é necessário que se leve em conta o contexto de ensino, independente de qual será a escolha teórica. Logo, é relevante entender as propostas dos livros didáticos, pois "se queremos compreender algumas das razões de dificuldades de aprendizagem enfrentadas por alunos, o livro didático utilizado por eles é uma das fontes a serem consultadas" (BITTAR, 2017, p. 365).

Categorizamos cada volume da coleção analisada, utilizando as denominações LD1, LD2 e LD3, para os livros didáticos dessa coleção referente aos volumes 1, 2 e 3, respectivamente.

Como categoria da praxeologia matemática, tomaremos como referência o modelo praxeológico dos tipos de tarefas proposto por Ramalho (2016), cujo objeto do saber foi o ensino da trigonometria. Em seu trabalho, a autora apresentou nos resultados dez tipos de tarefas presentes em livros didáticos de Matemática do 9° ano do Ensino Fundamental referente ao saber razões trigonométricas.

Os tipos de tarefas elencados por Ramalho (2016) referente a esse saber são:

> T_1: Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo.
> T_2: Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida do cateto adjacente e a desse ângulo.
> T_3: Calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo.
> T_4: Calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo, dadas a medida do cateto oposto e a desse ângulo.
> T_5: Calcular a medida da hipotenusa, dadas a medida do cateto oposto a um ângulo e a desse ângulo.
> T_6: Calcular a medida da hipotenusa, dadas a medida do cateto adjacente e de um ângulo.
> T_7: Calcular a medida de um ângulo, dadas as medidas de dois lados de um triângulo.
> T_8: Calcular o valor de uma razão trigonométrica.
> T_9: Calcular o perímetro.
> T_{10}:Calcular a área.

Diante desse arcabouço apresentado por Ramalho (2016) procuramos fazer adaptações necessárias, observando se os tipos de tarefas para o ensino fundamental se repetem, se ampliam ou são suprimidas nos tipos de tarefas que estarão presentes agora na coleção do livro didático para o Ensino Médio. Ou seja, de acordo com a análise documental buscamos observar se há conformidade quanto aos tipos de tarefas apresentados pela autora em sua pesquisa, e dessa forma modelizar os tipos de tarefas presente na coleção analisada em nossa pesquisa.

Ao voltar o nosso olhar especificamente para o quantitativo de tarefas, iremos considerar cada questão apresentada nos livros didáticos dessa coleção de forma individual, ou seja, se uma questão não apresentar nenhum item a, b ou c, por exemplo, essa questão será contada como uma única tarefa. No entanto, se outra questão presente em um desses livros apresentarem vários itens a, b e c, por exemplo, consideramos essa questão contendo três tarefas.

Observamos também, os critérios propostos por Chevallard (1999) e já descritos em nossa fundamentação teórica, para a modelização da praxeologia matemática presente na coleção do livro didático. A seguir, apresentamos um quadro com os questionamentos pertinentes, quanto aos blocos presentes na análise.

Quadro 4 – Critérios para análise em relação à organização matemática

BLOCO	Questionamentos a serem observados
Prático – Técnico [T, t]	Os tipos de tarefas são claros e bem identificados? São representativas, pertinentes e com razão de ser explicitadas? As técnicas são efetivamente elaboradas? Fáceis de utilizar? Seu campo de ação é abrangente? São inteligíveis e podem evoluir? O enunciado é bem colocado? É evidente, natural ou conhecido?
Tecnológico-Teórico [θ, Θ]	As justificações são próximas do padrão em matemática? São adaptadas, as condições? É exploratória?Os elementos teóricos são explicativos? O que permitem esclarecer e justificar?

Fonte: Adaptado de Chevallard (1999)

Também agrupamos, assim como Ramalho (2016) fez em seu trabalho, as tarefas que se apresentavam em: um contexto matemático, ou seja, sem apresentar nenhuma relação com o cotidiano do estudante; ou em um contexto extraescolar, o qual é possível perceber uma contextualização nas atividades, que relacionam com o cotidiano do estudante. Dessa forma, podemos comparar as tarefas presentes na coleção, com as tarefas presentes nos itens aplicados nos testes com os estudantes.

4.4 O TESTE APLICADO COM OS ESTUDANTES

Aplicamos o teste com 54 estudantes do 3º ano do ensino médio, divididos em duas turmas (3º ano A e 3º ano B). O teste continha quatro questões, todas extraídas das últimas edições do SAEPE, especificamente dos anos de 2015 a 2018, referente ao descritor D05 da Matriz de Referência do 3º Ano do Ensino Médio (ver anexo 2).

Cada prova do SAEPE é composta por itens[1], e cada item é referente a um descritor. As avaliações do SAEPE até o ano de 2014 eram restritas ao público, e não era possível consultá-las, pois apenas os resultados da proficiência de cada estudante eram divulgados. Essas provas só começaram a serem disponibilizadas a

[1] Item é como se denomina cada questão a ser respondida nas avaliações do SAEPE. Nessa pesquisa, ao mencionarmos a palavra item, a mesma estará relacionada a uma questão do SAEPE pertencente ao teste aplicado com os estudantes.

partir do ano de 2015, e apenas as provas que eram realizadas pelos estudantes do 3º ano do Ensino Médio.

Desde esse ano, as provas ficaram disponíveis tanto no site do Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação da Universidade Federal de Juiz de Fora (CAEd/UFJF), quanto nas escolas para apreciação dos professores e estudantes, ao final de sua realização. As avaliações das etapas do ensino fundamental anos iniciais e anos finais ainda não podem ser consultadas, visto que não foram disponibilizadas

Analisando as provas disponíveis, percebemos que o descritor D05 referente ao objeto do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo foi contemplado em todas as edições do SAEPE, com ao menos um item, nesses últimos quatro anos, de 2015 a 2018. Dessa forma, teríamos disponíveis quatro itens para a nossa análise.

É importante ressaltar que todos os itens referentes ao D05 que constaram nas avaliações desses últimos quatros anos, apresentaram o objeto ostensivo gráfico ou figura, que também pode ser denominado de suporte do item, evocando assim, o não ostensivo razões trigonométricas no triângulo retângulo. O ostensivo tem um papel particularmente importante quando o saber é trigonometria, o que não fugiu à regra nos itens aqui apresentados como mostraremos a seguir, pois todos eles estão representados por esse tipo de objeto.

Para a construção do nosso teste, e com o intuito de que os estudantes aplicassem uma técnica e justificassem as suas resoluções, optamos em suprimir as alternativas corretas (também denominadas gabarito) e erradas (denominada distratores), que comumente se apresentam nas avaliações externas.

Deixamos reservado em cada questão, um espaço para que os estudantes pudessem esboçar suas respostas, e dessa forma ser possível fazer uma análise *a posteriori* mais precisa das resoluções desenvolvidas, e assim pudéssemos comparar com a análise praxeológica matemática da coleção de livros didáticos desenvolvida a priori. Reforçamos verbalmente com os estudantes a importância de que todas as questões por eles resolvidas fossem devidamente justificadas, para que pudéssemos fazer uma melhor análise das suas respostas.

No entanto, antes de os estudantes serem apresentados as questões, o teste apresenta um rápido questionário para verificar o perfil de cada um deles, e a sua relação com o uso do livro didático, uma vez que o mesmo também é analisado (ver anexo 1).

Foram disponibilizados 100 minutos para a realização do teste, o equivalente ao tempo de duas aulas. A maioria dos estudantes terminou muito antes do tempo proposto. Todos foram orientados a resolverem os itens de forma individual, e não foi permitida nenhuma consulta, seja ela material ou tecnológica.

Para analisar os protocolos após a aplicação do teste adotamos um código formado por dois signos: a letra maiúscula E, indicando estudante; associada a um número natural, para indicar a ordem do aluno, como por exemplo: E01, E02,..., E54.

Para a categorização das técnicas mobilizadas pelos estudantes, observamos os seguintes grupos, dispostos abaixo:

i) o grupo dos estudantes que não responderam;

ii) o grupo dos estudantes que, embora tenham respondido, as técnicas apresentadas não são interpretadas em relação ao objeto razões trigonométricas no triângulo retângulo;

iii) o grupo dos estudantes que utilizaram corretamente as técnicas sobre as razões trigonométricas, mas erraram no cálculo numérico;

iv) o grupo dos estudantes que não erraram no cálculo numérico, porém o discurso tecnológico-teórico não corresponde à trigonometria para a resolução;

v) o grupo dos estudantes que conseguem resolver corretamente, apresentando técnicas que correspondem à esperada pela instituição.

No capítulo seguinte abordaremos a análise praxeológica matemática desenvolvida na coleção de livros didáticos referente ao saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, e a análise das resoluções dos estudantes que participaram do teste aplicado para essa pesquisa.

5 ANÁLISE DOS DADOS

No presente capítulo, expomos as análises realizadas ao longo da nossa pesquisa. Iniciaremos o primeiro tópico com a análise dos livros didáticos pertencentes à coleção investigada. O segundo tópico é destinado à análise *a priori* dos itens presentes no teste aplicado aos estudantes. No terceiro tópico deste capítulo, é feita a análise das resoluções dos estudantes para os itens dos testes.

Por fim, verificamos indicativos de conformidade, ou não, com o que está proposto nos livros didáticos e as respostas dos estudantes.

5.1 ANÁLISE DA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS

Iniciaremos esse tópico trazendo a análise dos três livros didáticos da coleção, procurando observar a praxeologia matemática presente em cada livro, referente ao saber razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Além das análises feitas nos capítulos em que se encontra o saber investigado, para analisarmos a praxeologia matemática também investigamos o *Manual do Professor*, pois nesse complemento podemos encontrar sugestões de atividades complementares, resoluções das atividades propostas e comentários.

Os livros didáticos analisados nessa pesquisa são pertencentes à coleção *Matemática Contexto & Aplicações*, do autor Luiz Roberto Dante, editora ática, cujos volumes 1, 2 e 3 correspondem a cada ano do ensino médio. Em nossa análise, denominamos LD1 para o livro didático destinado ao 1º ano do ensino médio, e LD2 e LD3, para o 2º e 3º ano do ensino médio, respectivamente. E nessa ordem também se deu a nossa investigação.

A princípio, procuramos identificar em cada volume os capítulos que abordavam o nosso objeto de estudo. No LD1, o estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo se apresenta na última unidade desse volume, intitulada *Sequência e Trigonometria*. Nessa unidade estão presentes o capítulo 7, cujo título é *Sequências*, e o capítulo 8 (último capítulo desse volume), intitulado *Trigonometria no Triângulo Retângulo*.

Ainda nesse capítulo 8, encontramos três subtítulos, que são: Semelhanças de triângulos; Relações métricas no triângulo retângulo; e Relações trigonométricas no triângulo retângulo. Em nossa análise do LD1, concentramos nosso foco nesse último subtítulo *Relações trigonométricas no triângulo retângulo*, das páginas 249 até 256, pois é apenas nessa parte do LD1 que se apresenta o objeto do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Como iremos observar nas análises mais a frente, é nesse livro em que iremos encontrar uma maior quantidade de tarefas relacionadas às razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Vale destacar nessa análise, que o saber em questão, objeto de nossa pesquisa, se apresenta em último plano no LD1. Levando em consideração que esse saber matemático, mesmo que tenha sido estudado nos anos finais do ensino fundamental, não tem a obrigatoriedade pela formalização do seu conceito nessa etapa da escolarização. Ou seja, o mesmo deve ser enfatizado e consolidado ao longo do ensino médio, de acordo com os documentos oficiais (PERNAMBUCO, 2012).

Diante dessa observação, caso o professor siga o livro didático como norteador de sua prática e planejamento, correrá o risco de não encontrar tempo hábil para trabalhar esse conteúdo com seus estudantes, principalmente porque os estudantes do 1º ano do Ensino Médio não participam de avaliações em larga escala.

No LD2, diferentemente do LD1, os conteúdos referentes à trigonometria já aparecem nos primeiros capítulos. Segundo o autor do livro, é necessário revisar o que foi estudado em anos anteriores, antes de abordar novos conceitos e relações da Trigonometria. O autor sugere ao professor aproveitar essa revisão para verificar o nível de conhecimentos dos estudantes, retornando, se necessário, o estudo de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo.

O autor orienta ainda o professor a estimular seus estudantes a memorizarem os ângulos notáveis para facilitar e agilizar os cálculos abordados nesse capítulo. Continuando no capítulo 1 do LD2, os dois capítulos seguintes são destinados aos conteúdos relacionados à trigonometria e são voltados para o estudo de arcos e funções trigonométricas. Ao longo do estudo do livro, tarefas envolvendo as razões trigonométricas aparecem esporadicamente como suporte ou ferramenta para resoluções de outras atividades que envolvem outros conceitos.

Quanto ao LD3, ao analisarmos todo o livro, só identificamos conteúdos referentes à trigonometria no capítulo 10, último capítulo desse livro. O quadro abaixo apresenta um resumo dos capítulos de cada livro da coleção analisada, nos quais localizamos os conteúdos referentes à trigonometria.

Quadro 5 – Descrição das unidades e capítulos dos livros didáticos analisados

LIVRO	UNIDADE	CAPÍTULO/TÍTULO
1º ANO LD1	Unidade 4: Sequências e Trigonometria.	Capítulo 8: Trigonometria no triângulo retângulo.
2º ANO LD2	Unidade 1: Trigonometria.	Capítulo 1: Trigonometria em triângulos quaisquer.
		Capítulo 2: Conceitos trigonométricos básicos.
		Capítulo 3: Funções trigonométricas.
3º ANO LD3	Unidade 4: Polinômios, equações algébricas e equações trigonométricas.	Capítulo 10: Relações e equações trigonométricas.

Fonte: Acervo da pesquisa

Podemos observar que com exceção do LD2, os conteúdos referentes à trigonometria se encontram situados no último capítulo da última unidade de cada livro. E quando focamos especificamente no nosso objeto de estudo, o saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, podemos constatar ainda mais essa observação.

De acordo com as nossas análises e como podemos verificar no quadro acima, o nosso foco se concentra em torno do LD1, onde identificamos uma maior quantidade de atividades referente ao saber investigado.

O estudo desse saber é fundamental para a continuidade e consolidação da aprendizagem necessária para os estudos nos anos posteriores, como podemos verificar na descrição dos capítulos pertencentes aos livros do 2º e 3º ano, e conforme orienta os documentos oficiais já citados. Por isso a importância do professor que trabalha com essa coleção ficar atento ao fato de que, mesmo que o estudo das razões trigonométricas se encontre ao final do LD1, é de extrema importância que ele seja trabalhado com seus estudantes.

5.1.1 Organização praxeológica em torno do objeto do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo

Nesse tópico, apresentamos as análises realizadas nos três livros didáticos da coleção, que tratam o saber razões trigonométricas no triângulo retângulo. Procuramos identificar os tipos de tarefas que se apresentam ao menos uma vez em cada volume da coleção analisada.

Para a análise do quarteto praxeológico, focamos nas tarefas propostas em cada livro que apresentassem esse saber, identificando as técnicas e o bloco tecnológico-teórico, de acordo com os critérios apresentados no capítulo anterior.

Dessa forma, procuramos identificar os tipos de tarefas tomando como referência os tipos elencados por Ramalho (2016) em seu trabalho, os quais também se encontram potencialmente presentes nas atividades propostas dos livros didáticos da coleção por nós analisada.

No entanto, durante a categorização dos dados, optamos por apontar os tipos de tarefas na forma mais direta e resumida, pois tal adaptação se mostrou suficiente, atendendo aos critérios de análise do que estamos investigando. Entendemos que dessa forma, conseguimos fazer uma análise mais próxima das tarefas presentes nos livros com as tarefas dos itens apresentados nos testes aplicados com os estudantes.

Vale destacar que durante essa categorização, decidimos substituir os tipos de tarefas T_9 (Calcular o perímetro) e T_{10} (calcular a área), presentes na pesquisa de Ramalho (2016) por *T_G:calcular a medida de uma grandeza a partir de uma razão trigonométrica*, pois acreditamos que ambas as tarefas fazem parte de um campo maior, chamado de Grandezas e Medidas.

Quanto ao cálculo da medida da abertura de um ângulo, não incluímos na tarefa do tipo T_G, pois acreditamos que, como o cálculo de sua medida está relacionado às medidas dos comprimentos dos lados do triângulo retângulo, ficaria melhor para diferenciar esse tipo de tarefa. Logo, optamos por manter conforme o tipo de tarefa apresentado no trabalho de Ramalho (2016), porém com outra nomenclatura (T_A). No tipo de tarefa que categorizamos por T_A: calcular a medida de um ângulo, dadas às medidas de dois lados de um triângulo.

Identificamos o tipo de tarefa T: calcular o comprimento de um lado de um triângulo, dados o comprimento de um de seus lados e a abertura de um de seus ângulos, no qual é possível determinar o seno, cosseno ou tangente de um ângulo. Logo, optamos por subdividir T e categorizar em T_S: calcular o valor do seno de um ângulo, T_C: calcular o valor do cosseno de um ângulo, e T_T: calcular o valor da tangente de um ângulo, para uma melhor análise da nossa investigação.

Logo, categorizamos seis tipos de tarefas em nossa análise nos três volumes da coleção, e que estão apresentados no seguinte quadro:

Quadro 6 - Tipos de tarefas identificados na coleção

Tipos de Tarefas
T_S: Calcular o valor do seno de um ângulo.
T_C: Calcular o valor do cosseno de um ângulo.
T_T: Calcular o valor da tangente de um ângulo.
T_R: Calcular o valor de uma razão trigonométrica.
T_A: Calcular a medida de um ângulo, dadas às medidas de dois lados de um triângulo retângulo.
T_G: Calcular a medida de uma grandeza a partir de uma razão trigonométrica.

Fonte: Autoria própria

Efetuamos um mapeamento das tarefas referente ao saber razões trigonométricas no triângulo retângulo presentes em cada volume da coleção analisada, as quais iremos detalhar no próximo tópico.

5.1.2 Tarefas presentes nos livros didáticos

Iniciamos nossa análise pelo LD1, seguido pelo LD2 e LD3, para um melhor entendimento do leitor. Nessa análise, consideramos apenas nessa a quantidade de tarefas presentes nos livros didáticos que se apresentam propostas aos estudantes.E como já mencionado no capítulo da metodologia, contabilizamos cada questão apresentada nos livros. Caso uma questão tenha dois itens “a” e “b”, por exemplo, iremos contabilizar duas tarefas.

No LD1 identificamos 65 tarefas relacionadas ao saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, sendo mais da metade delas do tipo T_R comum total de 36 tarefas (55,4%). A quantidade e distribuição das tarefas identificadas no LD1 estão apresentadas na tabela a seguir:

Tabela 2: Quantitativos de tarefas pertencentes aos tipos referentes a razões trigonométricas no triângulo retângulo no LD1

Tipos de Tarefas	**LD1**	
	Quant.	**%**
T_S: Calcular o valor do seno de um ângulo	09	13,8
T_C: Calcular o valor do cosseno de um ângulo.	04	6,2
T_T: Calcular o valor da tangente de um ângulo.	10	15,4
T_R: Calcular o valor de uma razão trigonométrica.	36	55,4
T_A: Calcular a medida de um ângulo, dadas às medidas de dois lados de um triângulo retângulo.	03	4,6
T_G: Calcular a medida de uma grandeza a partir de uma razão trigonométrica.	03	4,6
TOTAL	65	100,0

Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com a tabela acima, podemos observar também que não há um equilíbrio quanto à distribuição de tarefas. A predominância de tarefas referentes ao cálculo do valor de uma razão trigonométrica dá indícios de que o autor considera importante que o estudante, ao resolver várias questões desse tipo, possa assimilar bem esse tipo de tarefa. Mais à frente, apresentaremos um exemplo de cada tipo de tarefa, extraídos da coleção dos livros didáticos.

As tarefas do tipo T_T e T_S aparecem com segunda e terceira maior frequência, com quantidades bem próximas, contendo dez (15,4%) e nove (13,8%) tarefas de cada tipo, respectivamente. Já as tarefas do tipo T_C são pouco exploradas no LD1, com apenas quatro tarefas (6,2%), seguidas das tarefas do tipo T_A e T_G apresentando três tarefas (4,6%) de cada tipo.

Podemos observar que, dos seis tipos de tarefas identificados no LD1, três deles possuem frequência menor que 10%, sendo duas delas relacionadas ao cálculo da medida de ângulo e a medida de uma grandeza. Esses dados demonstram a importância dada, nesse volume específico, a um estudo mais focado nas razões trigonométricas, em detrimento de outros campos da matemática.

Como poderemos observar nas análises dos outros dois volumes dessa coleção mais a frente, iremos constatar que a maior concentração das tarefas se concentra nesse primeiro volume LD1. Isso se dá pelo fato de que é nessa etapa da escolaridade dos estudantes que se aprofunda, e muitas vezes, se inicia o estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Quando analisamos o LD2, podemos observar outra realidade quanto ao número de tarefas presente nesse volume relativo ao saber investigado, conforme apresentamos na tabela abaixo.

Tabela 3: Quantitativos de tarefas pertencentes aos tipos referentes a razões trigonométricas no triângulo retângulo no LD2

Tipos de Tarefas	LD2	
	Quant.	%
T_S: Calcular o valor do seno de um ângulo.	04	25,0
T_C: Calcular o valor do cosseno de um ângulo.	04	25,0
T_T: Calcular o valor da tangente de um ângulo.	06	37,4
T_A: Calcular a medida de um ângulo, dadas às medidas de dois lados de um triângulo retângulo.	01	6,3
T_G: Calcular a medida de uma grandeza a partir de uma razão trigonométrica.	01	6,3
TOTAL	16	100,0

Fonte: Dados da pesquisa

Podemos observar que no LD2 o número de tarefas é bem menor que no LD1. Nesse volume não identificamos nenhuma tarefa do tipo $T_{R:}$ *Calcular o valor de uma razão trigonométrica*, a qual foi mais frequente no LD1. Entendemos que como esse tipo de tarefas foi bem enfatizado no ano anterior, o autor considerou revisitar apenas os outros tipos de tarefas.

Mesmo que o LD2 contenha uma menor quantidade de tarefas que o LD1, é importante enfatizar a preocupação do autor em trazer uma revisão logo no início desse livro. No primeiro capítulo, o autor retoma o estudo das razões trigonométricas já estudas no LD1, com atividades e exercícios resolvidos, para logo depois adentrar ao estudo da lei dos senos e lei dos cossenos.

Nessa revisão feita no capítulo inicial do LD2, contém resoluções sobre triângulo retângulo, uma vez que o autor considera importante fazer essa retomada do que foi estudado nos anos anteriores e que servirão como base ou ferramenta para conceitos estudados nos anos seguintes.

Também é possível observar que, diferentemente do LD1, não houve uma disparidade na quantidade de tarefas apresentadas no LD2. Pelo contrário, podemos dizer que houve certo equilíbrio entre elas.

O tipo de tarefa mais abordado foi T_T, com seis tarefas (37,4%), seguido das tarefas do tipo T_S e T_C, com quatro tarefas (25,0%) cada uma, finalizando com tarefas do tipo T_A e T_G, que apresentaram uma tarefa (6,3%) de cada.

Novamente podemos observar a predominância de tarefas que envolvem o cálculo das medidas dos lados do triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente), em detrimento de cálculos que envolvam as medidas de ângulo e outras grandezas.

No LD3 não existe uma unidade ou capítulo específico para o conceito das razões trigonométricas no triângulo retângulo, como se mostrou nos livros analisados anteriormente dessa mesma coleção. As tarefas foram encontradas em diversas partes do livro, servindo como base ou ferramenta para resolução de atividades de conceitos diversos. Apresentaremos a seguir, a tabela que contém os tipos de tarefas identificadas na análise do LD3, dessa coleção.

Tabela 4: Quantitativos de tarefas pertencentes aos tipos referentes a razões trigonométricas no triângulo retângulo no LD3

Tipos de Tarefas	**LD3**	
	Quant.	%
T_T: Calcular o valor da tangente de um ângulo.	03	42,9
T_A: Calcular a medida de um ângulo, dadas às medidas de dois lados de um triângulo retângulo.	04	57,1
TOTAL	07	100,0

Fonte: Dados da pesquisa

Encontramos um total de sete tarefas que foram categorizadas em dois tipos de tarefas, das seis inicialmente identificadas no LD1. Percebe-se uma redução significativa nessa quantidade de tarefas, em relação aos volumes analisados anteriormente.

Identificamos aqui, os dois tipos de tarefas que se fizeram presentes nos três livros didáticos analisados nessa coleção que são T_T e T_A. Podemos observar que a tarefa mais abordada no LD3 é a do tipo T_A, com quatro tarefas (57,1%) desse tipo presentes nesse volume. Enquanto esse tipo de tarefa foi pouco valorizado nos livros analisados anteriormente, aqui, ele ganhou destaque, mesmo considerando que foram poucas tarefas relacionadas ao estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

5.1.3 Uma visão geral da coleção analisada

Podemos observar com os dados já apresentados, que com o avanço do ano escolar no Ensino Médio, a quantidade de tarefas relativas ao objeto do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo na coleção analisada diminui significativamente.

Algumas tarefas foram mais exploradas, enquanto que outras foram escassas. Agrupamos na tabela a seguir, a quantidade referente a cada livro analisado, trazendo uma visão geral da análise feita na coleção completa em relação ao quantitativo de tarefas referente ao saber investigado.

Tabela 5: Quantitativos de tarefas pertencentes aos tipos referentes as razões trigonométricas no triângulo retângulo na coleção analisada

Tipos de Tarefas	LD1	LD2	LD3	Coleção completa
T_S: Calcular o valor do seno de um ângulo.	09	04	0	13
T_C: Calcular o valor do cosseno de um ângulo.	04	04	0	08
T_T: Calcular o valor da tangente de um ângulo.	10	06	03	19
T_R: Calcular o valor de uma razão trigonométrica.	36	0	0	36
T_A: Calcular a medida de um ângulo, dadas às medidas de dois lados de um triângulo retângulo.	03	01	04	08
T_G: Calcular a medida de uma grandeza a partir de uma razão trigonométrica.	03	01	00	04
TOTAL	65	16	7	88

Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com os dados apresentados na tabela acima, foram identificadas em toda a coleção, um total de 88 tarefas dos seis tipos categorizados referentes ao saber razões trigonométricas no triângulo retângulo.

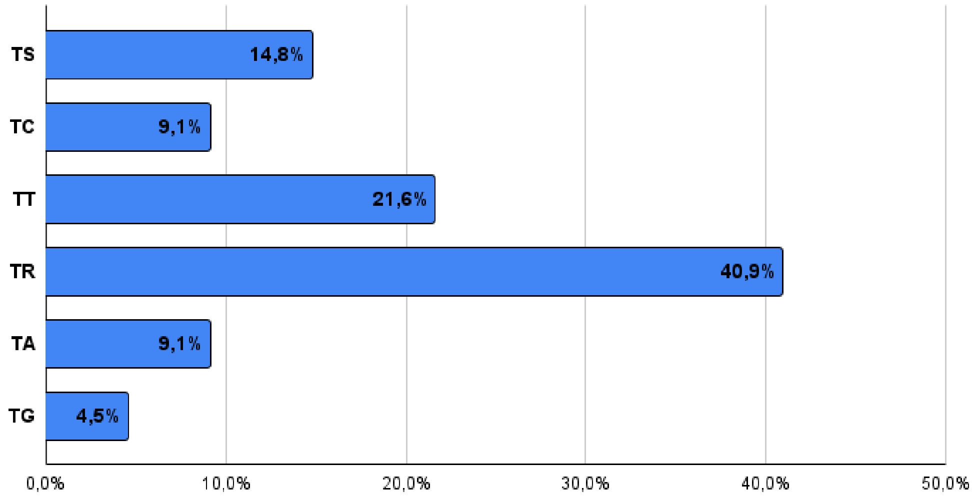
Podemos observar que, dos seis tipos de tarefas categorizados, dois deles estão presentes em todos os volumes dessa coleção, que são as tarefas dos tipos T_T e T_A, os quais são os únicos tipos presentes no LD3. No LD1, identificamos os seis tipos de tarefas categorizados, enquanto que, no LD2, cinco destes tipos de tarefas foram observados, e no LD3, houve ocorrências de apenas dois tipos de tarefas.

Observa-se também que há um decrescimento significativo na quantidade de tarefas do LD1 ao LD3, sendo a maior parte delas concentradas nesse primeiro volume, e a menor quantidade no último. Esses dados indicam o habitat[2] onde mais se desenvolve o nosso objeto de estudo, identificando as condições sob as quais o

[2]O lugar onde vivem os objetos matemáticos com base na TAD.

saber razões trigonométricas no triângulo retângulo vive nessa instituição do ensino médio.

Gráfico 1 – Percentuais das tarefas que apresentam o ostensivo na coleção analisada



Fonte: Dados da pesquisa

Pelo gráfico 1, podemos observar que a maior quantidade de tarefas presentes em toda a coleção analisada é do tipo T_R, com 36 tarefas, o que equivale aproximadamente a 41% das tarefas referentes ao estudo das razões trigonométricas. No entanto, esse tipo de tarefa só foi identificado no LD1, o qual traz uma abordagem mais numérica em sua resolução.

Já a tarefa do tipo T_G, obteve a menor ocorrência em toda coleção, sendo identificada apenas no LD1 e LD2 e em número bem reduzido, se comparado aos demais tipos de tarefas, com apenas quatro ocorrências (4,5%). O tipo de tarefa T_T é o segundo mais explorado ao longo da coleção, com 19 tarefas (21,6%), e esteve presente nos três volumes dessa coleção. Em seguida aparece a tarefa do tipo T_S, sendo identificada do LD1 e LD2, totalizando 13 tarefas (14,8%) em toda coleção. Os tipos de tarefas T_C e T_A obtiveram a mesma quantidade de tarefas, sendo identificadas oito de cada (9,1%) ao longo da coleção.

De modo geral, o gráfico 1indica que não existe um equilíbrio entre os tipos de tarefas distribuídos nos três livros analisados. Sendo a maior parte deles, concentrados no LD1, uma vez que é destinado o último capítulo desse livro ao estudo da trigonometria no triângulo retângulo.

Acreditamos que se essa distribuição da quantidade dos tipos de tarefas fosse mais equilibrada nos três livros didáticos da coleção, seria possível proporcionar melhores condições para a aprendizagem dos estudantes quanto a esse saber, uma vez que seu conhecimento é fundamental para o estudo de outros conteúdos.

De acordo com o que mencionamos no capítulo anterior, durante a nossa análise vimos também a importância de considerar dois aspectos presentes nas tarefas abordadas nos livros didáticos da coleção investigada, que são: observar as questões que se apresentam em um contexto matemático (C_M) ou em um contexto extraescolar (C_E); e observar os ostensivos gráficos por meio de um triângulo retângulo, estando numa posição prototípica[3] ou não.

Entendemos que aprofundando a análise nesses dois aspectos, conseguiremos obter elementos suficientes para uma melhor compreensão das tarefas presentes nos livros da coleção investigada. Assim como, investigar esses aspectos nos itens do SAEPE presentes nos testes aplicados aos estudantes, permitindo uma melhor análise comparativa entre eles.

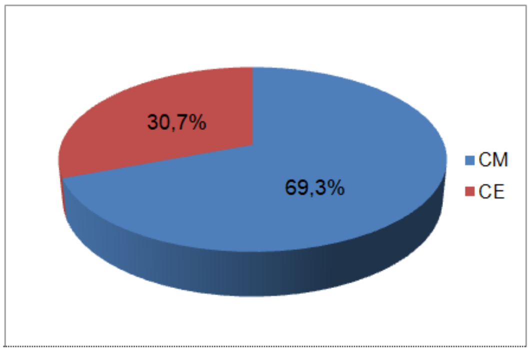
Diante de nossas análises, das 88 tarefas categorizadas, identificamos 61 que se apresentam em um contexto matemático, e 27 se apresentam em um contexto extraescolar, o que equivale a 69,3% e 30,7%, respectivamente.

Percebemos, então, que mesmo reconhecendo o cuidado do autor em apresentar questões que apresentem uma abordagem contextualizada, ainda é possível perceber uma supervalorização quanto às tarefas que explorem a matemática como forma de exercitar o seu cálculo, relativa ao estudo das razões trigonométricas.

---

[3] Posição de uma figura (triângulo retângulo) que apresenta o lado de um de seus catetos apoiado na horizontal e sem inclinação.

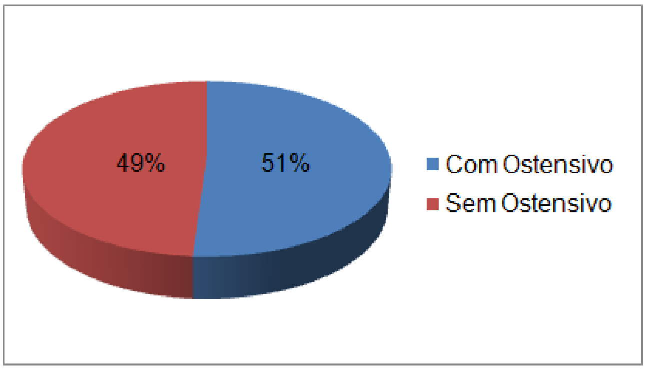
Gráfico 2 – Percentuais das tarefas quanto ao seu contexto matemático e extraescolar na coleção analisada



Fonte: Dados da pesquisa

Quando observamos o ostensivo gráfico representado pela figura do triângulo retângulo, considerando sua posição (prototípica ou não), identificamos que, das 88 tarefas categorizadas, 43 não apresentam a figura do triângulo retângulo no enunciado da questão, ou seja, 48,9% das tarefas. Em contrapartida, 45 tarefas (51,1%) apresentam o ostensivo, sendo que destas, 38 estão em posição prototípica e sete não se apresentam nessa posição.

Gráfico 3 – Percentuais das tarefas que apresentam o ostensivo na coleção analisada



Fonte: Dados da pesquisa

Diante desses dados, observamos que a presença, ou não, dos ostensivos nas tarefas relativas às razões trigonométricas no triângulo retângulo se apresentam de forma equilibrada nos livros didáticos da coleção analisada. Com uma leve predominância desses ostensivos na maior parte das tarefas identificadas, sendo a maioria deles se apresentando na sua posição prototípica.

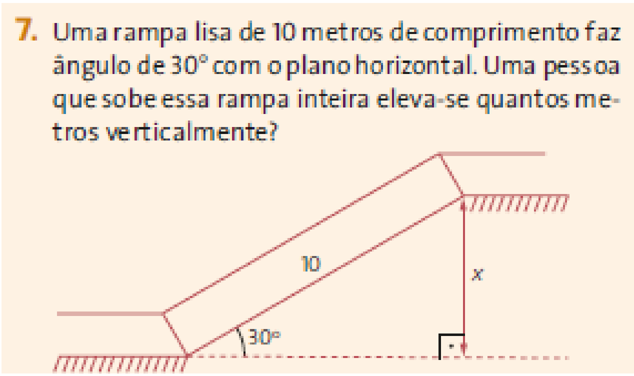
5.1.4 Praxeologias matemáticas presentes na coleção analisada

Apresentamos nesse tópico a análise da praxeologia matemática pontual, em torno de cada tipo de tarefa categorizada ao longo da coleção, apontando as técnicas, e os elementos tecnológico-teóricos que os correspondem, identificado sem alguns exemplos extraídos ao longo da coleção analisada.

5.1.4.1 Análise praxeológica matemática do tipo de tarefa T_S

Foram identificadas treze tarefas do tipo T_S *Calcular o valor do seno de um ângulo* nos dois primeiros volumes da coleção analisada, sendo que destas, nove estão presentes no LD1, e quatro no LD2. A seguir, apresentamos um exemplo presente nessa coleção, na seção *Exercícios resolvidos*, referente a esse tipo de tarefa.

Figura 9 – Exemplo de tarefa do tipo TS no LD1



Fonte: Dante (2016, p. 257).

Na figura acima, solicita-se determinar, a elevação de uma rampa medindo 10 metros de comprimento. Podemos observar que essa figura é representada por meio de um triângulo retângulo. Logo, de acordo com a resolução apresentada pelo autor, é preciso identificar: os elementos geométricos *hipotenusa*, que na figura é representada pela rampa e cuja medida é dada; o *ângulo* de 30º referente à inclinação que a rampa faz do chão até a altura desejada; e o *cateto oposto*, representado na figura pela letra x, que é a medida solicitada na questão. Segue então, com a identificação da razão trigonométrica correspondente (seno), para substituir os valores inicialmente apontados na razão e resolver a equação do 1º grau para determinar a medida do cateto oposto, que nesse caso, é a medida que a pessoa eleva-se verticalmente, solicitada nesse problema.

Figura 10 – Resolução da tarefa do tipo TS no LD1

Resolução:

Pelo desenho, temos:

$$\begin{cases} 10 \rightarrow \text{medida da hipotenusa} \\ x \rightarrow \text{medida do cateto oposto ao ângulo de } 30° \end{cases}$$

$$\text{sen } 30° = \frac{x}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{10} \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

Logo, a pessoa eleva-se 5 metros verticalmente.

Fonte: Dante (2016, p. 257).

Quadro 7 – Análise praxeológica relativa ao tipo de tarefa T_S

Tipo de tarefa (T_S)	**Técnica (τ)**	**Elemento Tecnológico-teórico (θ, Θ):**
Calcular o valor do seno de um ângulo	Identificar os elementos geométricos do triângulo retângulo, correspondentes aos seus lados (cateto oposto e hipotenusa). Depois, identificar as medidas dos ângulos apresentados no triângulo retângulo.Identificar a razão trigonométrica seno, e substituir os valores na razão trigonométrica correspondente. Resolver a equação do 1º grau para determinar a medida desejada.	O conceito de Semelhança de triângulos, em trigonometria no triângulo retângulo.

Fonte: Autoria própria

Podemos identificar nesse tipo de tarefa, uma mobilização muito comum nas técnicas utilizadas ao resolver tarefas relativas ao saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, de acordo com a análise realizada na coleção. O problema apresentado nesse tipo de tarefa se apresenta em um contexto extraescolar, que pode ser vivenciado no cotidiano dos estudantes, assim como apresenta também o ostensivo gráfico representado por meio do triângulo retângulo em sua posição prototípica, facilitando a identificação dos elementos necessários para a resolução dessa tarefa.

Na resolução dessa tarefa, ao final dela o autor apresenta um quadro com um lembrete *Fique atento!, n*o qual procura chamar a atenção dos estudantes, quanto à importância de memorizar os ângulos notáveis, uma vez que nessa tarefa, o ângulo

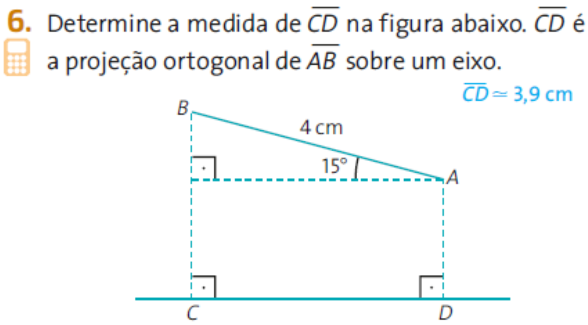
30° nela apresentada, é um ângulo notável. Percebemos o cuidado do autor em enfatizar a memorização dos ângulos notáveis para os estudos de trigonometria.

5.1.4.2 Análise praxeológica matemática do tipo de tarefa T_C

Identificamos oito tarefas do tipo *Calcular o valor do cosseno de um ângulo* nos volumes LD1 e LD2, de forma equilibrada entre eles, com quatro tarefas em cada volume. Não identificamos nenhuma tarefa desse tipo no LD3. Em algumas tarefas propostas ao longo da coleção, o autor sugere ao estudante, o uso da calculadora, e quando relacionada ao estudo da trigonometria, o uso da calculadora científica, de modo a obter facilmente os valores de seno e cosseno de qualquer ângulo.

O extrato do LD2 a seguir, apresenta um exemplo de exercício cuja indicação representada por um desenho da calculadora, permite que o estudante utilize esse recurso tecnológico para resolver esse problema.

Figura 11 – Exemplo de tarefa do tipo T_C no LD2



Fonte: Dante (2016, p. 12).

Nesse exemplo, a tarefa trata de calcular a medida do cateto adjacente ao ângulo de 15°. Um ângulo que não é notável, e por isso entendemos a justificativa do autor em indicar o uso da calculadora, que nesse caso específico deverá ser científica, uma vez que na tarefa não há outros dados fornecidos, além dos que estão postos no enunciado e no ostensivo-figura.

O comando solicita que se determine a medida de um dos lados da figura, e indica que esse lado é a projeção ortogonal do maior lado dessa figura, ou seja, a hipotenusa.

Quadro 8 – Análise praxeológica relativa ao tipo de tarefa T_C

Tipo de tarefa (T_C)	**Técnica (τ)**	**Elemento Tecnológico-Teórico (θ, Θ):**
Calcular o valor do cosseno de um ângulo.	Identificar os elementos geométricos do triângulo retângulo, correspondentes aos seus lados (cateto oposto e hipotenusa). Depois, Identificar as medidas dos ângulos apresentados no triângulo retângulo.Identificar a razão trigonométrica seno, e substituir os valores na razão trigonométrica correspondente. Resolver a equação do 1º grau para determinar a medida desejada. Para determinar a medida do lado, utilizar a calculadora para calcular o valor da razão trigonométrica.	O conceito de Semelhança de triângulos, em trigonometria no triângulo retângulo.

Fonte: Autoria própria

Nesse exemplo, a tarefa apresenta-se em um contexto matemático, o qual não se relaciona com o cotidiano dos estudantes. No entanto, ele requer um conhecimento básico de projeção ortogonal, mas que, em nosso entendimento, não prejudica a sua resolução, caso o estudante não lembre, ou não tenha estudado sobre projeções. O suporte representado pelo ostensivo gráfico se apresenta de forma direta com o triângulo retângulo em sua posição prototípica. Logo, essa apresentação facilita a identificação dos elementos geométricos necessários para a identificação da razão trigonométrica fundamenta para a resolução.

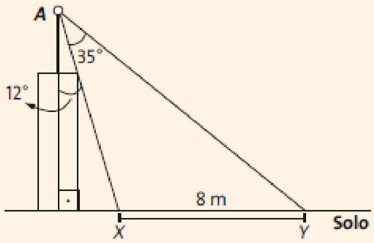
5.1.4.3 Análise praxeológica matemática do tipo de tarefa T_T

Em nossa investigação, identificamos 19 tarefas do tipo *Calcular o valor de uma tangente*, sendo esse, o tipo que obtém a segunda maior quantidade de tarefas em toda coleção. Esse tipo de tarefa foi um dos únicos tipos categorizados, juntamente com $T_{A,}$ que pôde ser identificado nos três volumes da coleção.

Na medida em que prosseguimos as análises em cada livro da coleção, além de constatarmos a diminuição de tarefas referentes ao estudo das razões trigonométricas de um volume para o outro, podemos verificar também que a função desse objeto de estudo se modifica, uma vez que ele passa a ser uma ferramenta para o estudo de outros saberes.

Figura 12 – Exemplo de tarefa do tipo T_T no LD3

8. (Unifor-CE) O síndico do edifício Castel Gandolfo, pensando em melhorar a segurança dos visitantes do condomínio, colocou uma lâmpada no ponto *A* sobre um muro vertical que ilumina a parte entre *X* e *Y* de 8 metros de largura, segundo um ângulo de 35°, como mostra a figura abaixo.



A que altura aproximada foi colocada a lâmpada? Use tg 12° = 0,2 e tg 35° = 0,7.

a) 7,4 m.
b) 7,5 m.
c) 8,5 m.
d) 8,7 m.
e) 9,4 m.

Fonte: Dante (2016, p. 238).

A figura acima exemplifica uma tarefa na qual é dada a projeção de uma lâmpada que foi colocada sobre um muro vertical, assim como medidas referentes aos lados, ângulos e valores das tangentes dos ângulos. Solicita-se que seja calculada a altura em que foi instalada a lâmpada no ponto A, que é a distância de A ao solo.

Para tornar a resolução dessa tarefa mais prática e fácil, o autor sugere dividi-la em etapas, iniciando por encontrar o valor da distância do ponto X à linha vertical que liga o ponto A ao solo. Logo após, calcular a tangente da soma dos dois ângulos discriminados (12° e 35°), finalizando com o uso da tangente da soma, para calcular o valor da distância do ponto A ao solo.

Quadro 9 – Análise praxeológica relativa ao tipo de tarefa T_T

Tipo de tarefa (T_T)	**Técnica (τ)**	**Elemento Tecnológico-Teórico (θ, Θ):**
Calcular o valor da tangente de um ângulo.	Identificar os elementos geométricos do triângulo retângulo, correspondentes aos seus lados (cateto oposto e hipotenusa). Depois, Identificar as medidas dos ângulos apresentados no triângulo retângulo.Identificar a razão trigonométrica seno, e substituir os valores na razão trigonométrica correspondente. Resolver a equação do 1º grau para determinar a medida desejada.	O conceito de Semelhança de triângulos, em trigonometria no triângulo retângulo.

Fonte: Autoria própria

Nesse exemplo, podemos observar que o estudo da razão trigonométrica tangente de um ângulo foi necessário para trabalhar com outros estudos dentro da trigonometria, como a tangente da soma de dois ângulos. Ou seja, um importante aspecto que também identificamos ao longo da análise é que o nosso objeto de estudo é utilizado como ferramenta para o estudo de outros conteúdos, como o exemplo acima. O ostensivo triângulo retângulo, em sua posição prototípica, foi fundamental para a visualização e melhor compreensão dessa tarefa, trazendo o objeto não ostensivo razões trigonométricas no triângulo retângulo para a realização desse problema. A tarefa apresenta um exemplo no contexto extraescolar.

É importante destacar nesse exemplo que, as medidas dos dois ângulos presentes no ostensivo não são notáveis, e nem a soma deles resulta em um ângulo notável. O exemplo apresenta os valores da tangente, sinalizando que o estudante não precisa utilizar a calculadora e nem a tabela trigonométrica para resolvê-la.

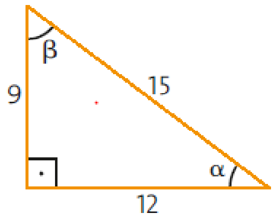
O uso desses instrumentos é mais característico nos volumes LD1 e LD2, mediante o estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo, uma vez que a apresentação e sugestão desses instrumentos são direcionadas de forma mais nítida e direta, nesses dois primeiros volumes da coleção. No entanto, com o conhecimento e experiência dos anos anteriores, nada impede que os estudantes façam uso dos mesmos.

5.1.4.4 Análise praxeológica matemática do tipo de tarefa T_R

O tipo de tarefa com mais número de tarefas identificadas na coleção analisada foi T_R *Calcular o valor de uma razão trigonométrica*, totalizando 36 tarefas, o que equivale a quase 41% das tarefas identificadas em toda a coleção, relativa ao saber razões trigonométricas no triângulo retângulo. No entanto, como já observado, esse tipo de tarefa só foi localizado no volume LD1.

Figura 13 – Exemplo de tarefa do tipo TR no LD1

32. Examine o triângulo retângulo representado abaixo e calcule o valor destas razões:



a) sen α; $\frac{3}{5}$

$\frac{4}{5}$ b) cos α;

c) tan α; $\frac{3}{4}$

$\frac{4}{5}$ d) sen β;

e) cos β; $\frac{3}{5}$

$\frac{4}{3}$ f) tan β.

Fonte: Dante (2016, p. 252).

Esse exemplo apresenta um triângulo retângulo, em relação ao qual foram dadas as medidas de seus lados, e ângulos agudos desconhecidos indicados por α e β. O comando desse exercício proposto no LD1 pede para determinar as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de cada ângulo desse triângulo retângulo.

Quadro 10 – Análise praxeológica relativa ao tipo de tarefa T_R

Tipo de tarefa (T_R)	**Técnica (τ)**	**Elemento Tecnológico-Teórico (θ, Θ):**
Calcular o valor o valor de uma razão trigonométrica.	Identificar os elementos geométricos do triângulo retângulo, correspondentes aos seus lados (cateto oposto e hipotenusa). Depois, Identificar as medidas dos ângulos apresentados no triângulo retângulo.Identificar a razão trigonométrica seno, e substituir os valores na razão trigonométrica correspondente.	O conceito de Semelhança de triângulos, em trigonometria no triângulo retângulo.

Fonte: Autoria própria

Não identificamos nenhuma tarefa desse tipo em que se apresentasse em um contexto extraescolar, da mesma forma em que todas essas 36 tarefas, vinham acompanhadas do ostensivo triângulo retângulo. Em sua grande maioria, as posições dos triângulos retângulos pertencentes a esse tipo de tarefa, se apresentam em posição prototípica, assim como no exemplo da figura 13.

Nessa tarefa especificamente, ao trazer vários itens relacionados a uma mesma tarefa, é possível perceber a intenção do autor em proporcionar ao usuário do LD1, a prática desse tipo de tarefa, de modo que possa identificar corretamente todas as razões trigonométricas relacionadas aos ângulos agudos do triângulo retângulo.

5.1.4.5 Análise praxeológica matemática do tipo de tarefa T_A

Em relação ao tipo de tarefas T_A *Calcular a medida de um ângulo, dada às medidas de dois lados de um triângulo retângulo*, identificamos oito (9,1%), ao longo de toda coleção, com ao menos uma tarefa do tipo T_A em cada volume. No entanto, não é um tipo de tarefa privilegiada, se comparada com as demais.

Figura 14 – Exemplo de tarefa do tipo T_A no LD2

5. Um poste na posição vertical tem sua sombra projetada em uma rua horizontal. A sombra tem 12 metros. Se a altura do poste é de 12 metros, então, qual é a inclinação dos raios solares em relação à rua horizontal? 45°

Fonte: Dante (2016, p. 12).

A figura acima, que apresenta uma questão a qual classificamos com um contexto extraescolar, solicita determinar a inclinação dos raios solares em relação à rua horizontal, ou seja, qual é o ângulo formado nessa inclinação. Observamos que não é fornecido o ostensivo triângulo retângulo, razão pela qual se exigirá do estudante, o reconhecimento de ostensivo a partir das medidas dos lados do triângulo retângulo, obtidas a partir dos dados do enunciado da questão.

Quadro 11 – Análise praxeológica relativa ao tipo de tarefa T_A

Tipo de tarefa (T_A)	**Técnica (τ)**	**Elemento Tecnológico-Teórico (θ, Θ):**
Calcular a medida de um ângulo, dadas às medidas de dois lados de um triângulo retângulo.	Identificar os elementos geométricos do triângulo retângulo, correspondentes aos seus lados (cateto oposto e hipotenusa). Depois, Identificar as medidas dos ângulos apresentados no triângulo retângulo.Identificar a razão trigonométrica seno, e substituir os valores na razão trigonométrica correspondente. Utilizar a tabela trigonométrica para encontrar a medida de um ângulo α,	O conceito de Semelhança de triângulos, em trigonometria no triângulo retângulo.

Fonte: Autoria própria

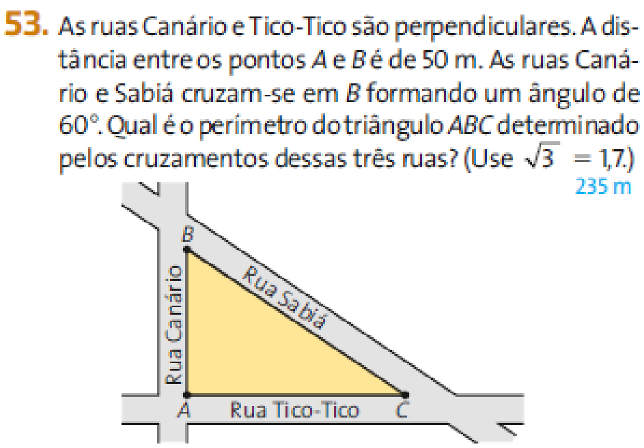
No exemplo acima, para determinar a medida do ângulo que se deseja encontrar, é necessário que o estudante utilize a tabela trigonométrica, caso ele não tenha memorizado as medidas dos ângulos notáveis, como sugeridos pelo autor no LD1 e no LD2. Acreditamos que por não deixar claro essa orientação na questão, e considerando que nesse livro (LD2) a tabela também se encontra disponível para consulta, o autor considera que o estudante já saiba que o ângulo da tangente de 45° é igual a 1.

Levamos em conta que a presença do ostensivo triângulo retângulo em um tipo de tarefa T_A, facilitaria a visualização do ângulo, para determinar a sua medida, a qual possui "uma natureza sensível e certa materialidade, e que tem, para o sujeito, uma realidade perceptível" (Almouloud, 2007, p. 119). Dessa forma, a visualização desse objeto ostensivo, facilitaria a resolução do estudante, nessa tarefa.

5.1.4.6 Análise praxeológica matemática do tipo de tarefa T_G

O tipo de tarefa T_G *Calcular a medida de uma grandeza a partir de uma razão trigonométrica* foi a que menos teve incidência na coleção de livros didáticos analisada. Identificamos quatro tarefas desse tipo, o que equivale a 4,5% de todas as tarefas categorizadas na coleção, quanto ao saber razões trigonométricas no triângulo retângulo. No LD1 foram identificadas três tarefas desse tipo e apenas uma, no LD2, não sendo identificada nenhuma tarefa desse tipo, no último volume dessa coleção.

Figura 15 – Exemplo de tarefa do tipo T_G no LD1


53. As ruas Canário e Tico-Tico são perpendiculares. A distância entre os pontos A e B é de 50 m. As ruas Canário e Sabiá cruzam-se em B formando um ângulo de 60°. Qual é o perímetro do triângulo ABC determinado pelos cruzamentos dessas três ruas? (Use $\sqrt{3} = 1,7$.)
235 m

Fonte: Dante (2016, p. 259).

O exemplo acima apresenta o cruzamento de três ruas (Canário, Sabiá e Tico-Tico), que se encontram nos pontos A, B e C, formando um triângulo retângulo, pois duas dessas ruas, Canários e Tico-Tico, são perpendiculares. Observa-se que essa questão se encontra em um contexto extraescolar, e que o ostensivo triângulo retângulo, se apresenta em sua posição prototípica, facilitando a visualização das três ruas, por ele representadas.

São dadas as medidas da rua Canário e do ângulo formado pelo cruzamento das ruas Canários e Sabiá. O comando dessa questão solicita determinar o perímetro do triângulo formado pelo cruzamento dessas três ruas, ou seja, definido a medida de cada lado desse triângulo retângulo, calcular a soma dessas três ruas.

Quadro 12 – Análise praxeológica relativa ao tipo de tarefa T_G

Tipo de tarefa (T_G)	**Técnica (τ)**	**Elemento Tecnológico-Teórico (θ, Θ):**
Calcular a medida de uma grandeza a partir de uma razão trigonométrica.	Identificar os elementos geométricos do triângulo retângulo, correspondentes aos seus lados (cateto oposto e hipotenusa). Depois, Identificar as medidas dos ângulos apresentados no triângulo retângulo. Identificar a razão trigonométrica seno, e substituir os valores nas razões trigonométricas correspondentes. Resolver a equação do 1º grau para determinar a medida desejada. Utilizar a tabela trigonométrica para encontrar a medida do ângulo de 60° e substituir o valor dado. E Somar a medida de cada lado da figura para encontrar a medida do perímetro.	O conceito de Semelhança de triângulos, em trigonometria no triângulo retângulo.

Fonte: Autoria própria

Para a análise da praxeologia matemática das tarefas analisadas na coleção, investigamos o *Manual do Professor* que apresenta a resolução de cada exercício proposto nos livros didáticos.

No entanto, outra maneira de determinar o perímetro do triângulo retângulo formado pelo cruzamento dessas três ruas, seria encontrar a medida de um dos outros dois lados desse triângulo, e determinar a medida do lado que falta pelo Teorema de Pitágoras, uma vez que também foi objeto de estudo no capítulo 8 desse mesmo volume. No entanto, para a praxeologia desse exemplo acima, modelizamos conforme o que está proposto no *Manual do Professor*, o qual está de acordo com o estudo desse capítulo voltado para o saber razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Esse exemplo trabalha com ângulos notáveis, e solicita usar o valor 1,7, ao invés do número irracional, que, quando substituído na razão trigonométrica, os cálculos resultam em um número natural, facilitando determinar a soma dos lados do triângulo retângulo. Dessa forma, solicita calcular o perímetro do triângulo representado pelo cruzamento das três ruas.

No tópico a seguir, apresentamos a análise praxeológica dos itens selecionados do SAEPE e propostos nos testes que foram aplicados aos estudantes participantes dessa pesquisa.

5.2 ANÁLISE PRAXEOLÓXICA MATEMÁTICA DOS ITENS DO SAEPE PROPOSTOS NO TESTE

O teste aplicado aos estudantes foi composto de quatro itens, todos extraídos das últimas edições do SAEPE, especificamente dos anos de 2015 a 2018, referente ao descritor D05 *Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente)* da Matriz de Referência do 3º ano do ensino médio.

Com o intuito de fazermos uma melhor análise de cada item da avaliação do SAEPE presente no teste aplicado aos estudantes, procuramos identificar inicialmente o tipo de tarefa de cada um desses itens. Apresentamos no quadro a seguir, as quatro tarefas categorizadas nos tipos de tarefas identificados, dos itens do SAEPE de 2015 a 2018.

Quadro 13 – Tipos de tarefas identificadas nos Itens do SAEPE, referente ao D05

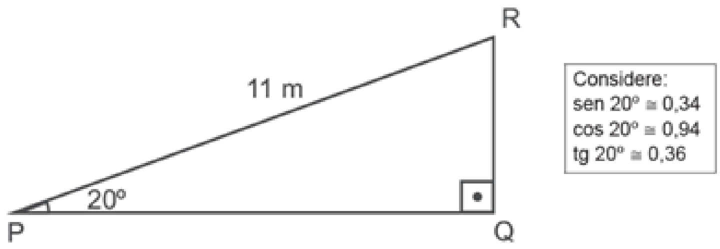
Itens – D05	Tipos de tarefas
SAEPE 2015	T_S: Calcular o valor do seno de um ângulo
SAEPE 2016	T_C: Calcular o valor do cosseno de um ângulo
SAEPE 2017	T_C: Calcular o valor do cosseno de um ângulo
SAEPE 2018	T_T: Calcular o valor da tangente de um ângulo

Fonte: Autoria própria

Como podemos perceber no quadro acima, identificamos dois itens que apresentam o mesmo tipo de tarefa, ou seja, calcular o valor do cosseno de um ângulo. Logo, apesar de o nosso teste conter quatro itens, teremos três tipos de tarefas presentes: uma envolvendo o seno, outra envolvendo a tangente e duas envolvendo o cosseno. Iniciaremos fazendo a análise praxeológica de cada item do SAEPE proposto no teste, para, logo após, fazermos uma comparação dos seus tipos de tarefas que também são enfatizadas nos livros didáticos da coleção analisada.

O item extraído da prova do SAEPE 2015 apresenta o seguinte enunciado: *O telhado da casa de Paulo deixa em sua lateral uma abertura na forma de um triângulo retângulo, conforme mostra o desenho abaixo. Ele irá tampar essa abertura e para isso precisa calcular a medida da altura QR dessa abertura para comprar o material necessário. Qual é a medida da altura QR dessa abertura?*

Figura 16 - Objeto ostensivo do descritor 05 da Matriz de Referência – SAEPE 2015



Fonte: (SAEPE, 2015)

A imagem apresenta um triângulo retângulo na sua posição prototípica, seguida de um quadro que mostra os valores das razões trigonométricas referente ao ângulo de 20°. Mesmo se tratando de um problema do cotidiano (calcular a altura da abertura de um telhado), a figura suporte trazida nessa atividade, se apresenta em sua forma mais clássica de um triângulo retângulo, o que de certa forma pode induzir o estudante a resolver de forma direta, atribuindo os valores apresentados, na técnica por ele utilizada.

Esse item apresenta a medida do ângulo agudo de 20°, a medida da hipotenusa (11 metros), e solicita calcular a altura dessa abertura da lateral do telhado, ou seja, pede para calcular a medida do cateto oposto ao ângulo dado (20°). Logo, iremos encontrar aqui a tarefa do tipo T_S*: Calcular o valor do seno de um ângulo.*

Consideramos como proposta de resolução dessa, e das demais atividades, ou como uma descrição da técnica, as que são abordadas nos livros didáticos da coleção analisada, em concordância com algumas pesquisas já realizadas (RAMALHO, 2016).

Segue o que consideramos como possível resolução dessa atividade.

$$Sen\ 20° = \frac{x}{11m}$$

$$0{,}34 = \frac{x}{11m}$$

$$x = 0{,}34\ .11m$$

$$x = 3{,}74\ m$$

Quadro 14 – Análise praxeológica do item do SAEPE 2015

Tipo de tarefa (T_S)	**Técnica (τ)**	**Elemento Tecnológico-teórico (θ, Θ):**
Calcular o valor do seno de um ângulo.	- Identificar os elementos geométricos do triângulo retângulo, correspondentes aos seus lados (cateto oposto e hipotenusa); - Identificar as medidas dos ângulos apresentadas no triângulo retângulo; - Identificar a razão trigonométrica seno 20°; - Substituir os valores na razão trigonométrica correspondente $sen20° = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$ - Resolver a equação do 1º grau para determinar a medida da altura QR, igual a 3,74m.	O conceito de Semelhança de triângulos, em trigonometria no triângulo retângulo.

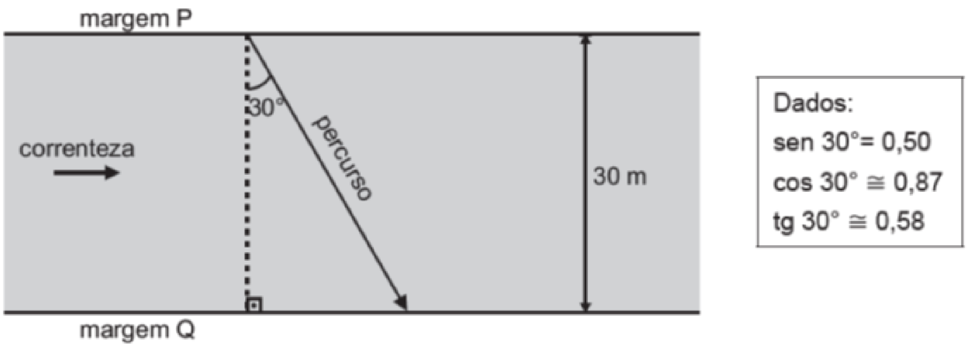
Fonte: Autoria própria

Ressaltamos que nesse e nos demais itens presentes do teste, a presença do ostensivo gráfico se faz presente e é de fundamental importância para proporcionar subsídios que possibilitem uma melhor compreensão da tarefa, e consequentemente, a sua resolução, pois “(...) o ostensivo ganha certa importância, porque ele ajuda a distinguir tipos de tarefas” (RAMALHO, 2016, p.32).

Dentre os possíveis erros dos estudantes ao resolverem esse e os demais tipos de tarefas, destaca-se a gestão da unidade de medida. Poderá ocorrer que o estudante não utilize as unidades ou as utilize de forma inadequada. Assim como, os estudantes podem realizar os cálculos numéricos e só acrescentar ao final, a unidade. Outros possíveis erros podem estar relacionados aos cálculos com números decimais, com dificuldades em resolver equações ou operações aritméticas, como já apontadas na pesquisa de Pastor (2020), mediante nossas investigações.

O segundo item extraído da prova do SAEPE 2016 é do tipo de tarefa T_C *Calcular o valor do cosseno de um ângulo* e apresenta o seguinte enunciado:*Um barco realizou a travessia em um rio partindo da margem P com trajetória retilínea em direção à margem oposta Q. Devido à correnteza desse rio, o percurso do barco foi deslocado 30° em relação à trajetória retilínea predeterminada, conforme representado no desenho abaixo. Qual o percurso aproximado, em metros, realizado pelo barco para atravessar esse rio?*

Figura 17 - Objeto ostensivo relativo ao item do descritor 05 da Matriz de Referência – SAEPE 2016



Fonte: (SAEPE 2016)

Nesse item, diferentemente do primeiro apresentado, o triângulo retângulo não aparece isolado e evidente. No entanto, se apresenta em posição prototípica. Esse problema se revela em um contexto extraescolar, assim como o anterior e como os demais itens do SAEPE presentes no teste, referente ao saber razões trigonométricas no triângulo retângulo.

A figura mostra, de acordo com o enunciado, um desenho simulando as margens (P e Q) de um rio, no qual a distância entre essas margens tem a medida de 30 metros. Saindo do ponto da margem P e levado pela correnteza, o barco faz um percurso que apresenta uma inclinação de 30° em relação à distância entre as margens, formando um triângulo retângulo.

Para determinar a medida desse percurso, ou seja, da hipotenusa desse triângulo retângulo formado, o estudante poderá utilizar a técnica de atribuir o valor dado do cosseno de 30° (0,87), que equivale a razão da distância entre as margens desse rio e o percurso do barco. Para essa atividade, segue uma possível técnica para resolução:

$$\cos 30° = \frac{30\text{m}}{\text{x}}$$
$$0{,}87 = \frac{30\text{m}}{\text{x}}$$
$$0{,}87.\text{x} = 30\text{m}$$
$$\text{x} = \frac{30\text{m}}{0{,}87}$$
$$\text{x} \cong 34{,}48\ \text{m}$$

Quadro 15 – Análise praxeológica do item do SAEPE 2016

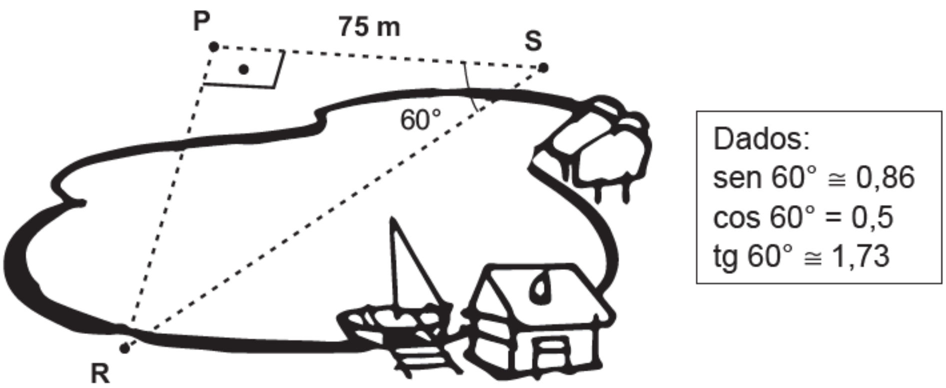
Tipo de tarefa (T_C)	**Técnica (τ)**	**Elemento Tecnológico-Teórico (θ, Θ):**
Calcular o valor do cosseno de um ângulo.	- Identificar os elementos geométricos do triângulo retângulo, correspondentes aos seus lados (cateto adjacente e hipotenusa); - Identificar as medidas dos ângulos apresentadas no triângulo retângulo; - Identificar a razão trigonométrica cosseno 30°; - Substituir os valores na razão trigonométrica correspondente $cos30° = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$ - Resolver a equação do 1º grau para determinar a medida do percurso, igual a 34,48m.	O conceito de Semelhança de triângulos, em trigonometria no triângulo retângulo.

Fonte: Autoria própria

Observamos nesse item que, o ângulo formado pela inclinação do percurso feito pelo barco de uma margem à outra, é um ângulo notável (30°). No entanto, o enunciado acompanha os dados dos valores das razões trigonométricas referente ao ângulo de 30°, o qual não necessita que o estudante tenha memorizado a tabela com os valores dos ângulos notáveis.

O terceiro item retirado da avaliação do SAEPE de 2017 que consta no teste, se apresenta da seguinte forma: *Para estimar a largura RS de um lago, Pedro, que é topógrafo, fez três demarcações próximas às margens desse lago, representadas pelos pontos P, R e S, e utilizou um teodolito para fazer algumas medições. Do ponto S ele avistou os pontos P e R segundo um ângulo de 60º e, do ponto P,* *avistou os pontos R e S segundo um ângulo de 90º, conforme ilustrado no desenho abaixo. Aproximadamente, quanto mede a largura RS desse lago, em metros?*

Figura 18 - Objeto ostensivo do item do descritor 05 da Matriz de Referência – SAEPE 2017



Fonte: (SAEPE 2017)

Esse item se assemelha ao anterior no sentido de trazer o mesmo tipo de T_C *Calcular o valor do cosseno de um ângulo*. Trata-se de determinar a medida de uma distância inacessível, diferenciando apenas quanto ao contexto da atividade. O item se apresenta em um contexto extraescolar, com algumas noções de topografia. Podemos considerar que boa parte dos estudantes não tenha anteriormente visto ou ouvido falar sobre um teodolito, instrumento esse, utilizado pelo topógrafo em sua profissão. Mas mesmo assim, a atividade proporciona meios para que o estudante possa compreender a ideia necessária para resolver esse tipo de tarefa.

A figura apresentada mostra o desenho de um triângulo retângulo em uma posição não prototípica, ou seja, o mesmo se apresenta de forma diferente da figura de um triângulo retângulo que um estudante está comumente acostumado a ver, tanto nos livros didáticos, quanto nas próprias aulas e atividades trazidas pelos professores, bem como difere da sua própria forma de representar um triângulo retângulo.

O ostensivo gráfico remete ao não ostensivo razões trigonométricas, dada a medida de um dos lados (cateto adjacente ao ângulo), a medida do ângulo de 60° e solicita a medida da largura desse lago, cuja atividade considera como sendo a medida do lado RS do triângulo retângulo formado (hipotenusa). Novamente podemos considerar um valor desconhecido, que para resolução remeterá ao algoritmo da equação do 1º grau.

Para possíveis resoluções dessa atividade, considerando os dados das razões apresentadas no quadro ao lado da figura 3, poderemos pensar em duas formas distintas de resolvê-la, como mostraremos a seguir.

Possível resolução 1:

$$cos\ 60° = \frac{75m}{x}$$

$$0{,}5 = \frac{75m}{x}$$

$$0{,}5\ .\ x = 75m$$

$$x = \frac{75m}{0{,}5}$$

$$x = 150\ m$$

Para resolver a tarefa desse tipo, a técnica empregada se dá por meio de substituir o valor cosseno do ângulo e a medida do cateto adjacente a esse ângulo que define cosseno. Resolver a equação do 1º grau para encontrar a medida da hipotenusa desse triângulo retângulo, que é o valor desconhecido representado pela incógnita x, referente à medida da largura desse lago.

Como nos itens anteriores desse teste, esse também apresenta o ostensivo gráfico, o que nos alude ao não ostensivo - noção das razões trigonométricas no triângulo retângulo, na técnica aqui empregada que a legitima e justifica pertencente ao bloco tecnológico – teórico.

Ainda referente a esse mesmo item, podemos observar que 0,5, relativo ao valor cosseno do ângulo de 60°, é igual a $\frac{1}{2}$. Logo, se considerarmos esse valor em sua forma fracionária, poderemos apresentar outra forma de resolver esse problema, como mostramos a seguir.

Possível resolução 2:

$$cos\ 60° = \frac{75m}{x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{75m}{x}$$

$$x = 2\ .75\text{m}$$

$$x = 150m$$

Vale ressaltar que a medida acima encontrada é um valor aproximado, pois a figura apresenta um dos vértices do triângulo fora das margens do lago.

Consideramos a segunda resolução como a mais prática para a resolução desse item, no entanto, o estudante deverá mobilizar o conhecimento de transformação de números decimais para a sua forma fracionária. Ter a noção de que 0,5 é a metade de um inteiro, assim como 0,5 representa a fração $\frac{1}{2}$, já é esperado para os estudantes dessa etapa de ensino.

Pesquisas (BERTONI, 2008; PROCHNOW, 2010; LANSING, 2018) apontam que ainda existem muitas dificuldades apresentadas pelos estudantes quanto ao estudo com números decimais, devido a diversos fatores. O que pode caracterizar o uso, ou não, de uma determinada técnica pelo estudante ao resolver problemas como esse.

Quadro 16 – Análise praxeológica do item do SAEPE 2017

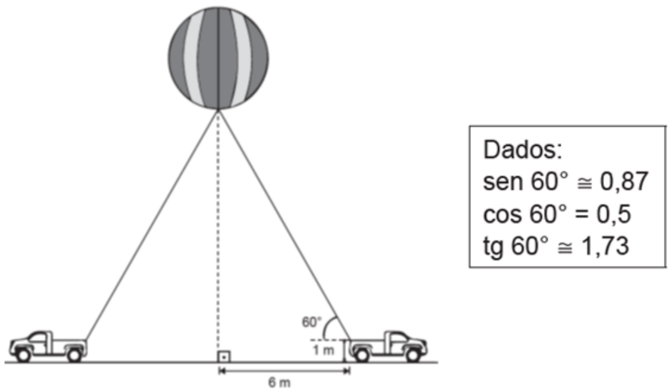
Tipo de tarefa (T_C)	**Técnica (τ)**	**Elemento Tecnológico-Teórico (θ, Θ):**
Calcular o valor do cosseno de um ângulo.	- Identificar os elementos geométricos do triângulo retângulo, correspondentes aos seus lados (cateto adjacente e hipotenusa); - Identificar as medidas dos ângulos apresentadas no triângulo retângulo; - Identificar a razão trigonométrica cosseno 60°; - Substituir os valores na razão trigonométrica correspondente $cos60° = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$ - Resolver a equação do 1º grau para determinar a medida da largura RS do lago, igual a 150m.	O conceito de Semelhança de triângulos, em trigonometria no triângulo retângulo.

Fonte: Autoria própria

É interessante ressaltar que também nesse item, o ângulo apresentado é um ângulo notável, porém não colocado em sua forma mais usual, como apresentado nos livros didáticos analisados. Aqui, mais uma vez o estudante não necessita ter memorizado os valores da tabela dos ângulos notáveis, pois pelos dados fornecidos no item, basta apenas que seja substituído o valor na razão trigonométrica referente a esse ângulo.

No quarto e último item retirado da avaliação do SAEPE de 2018 identificamos o tipo tarefa T_T: *Calcular o valor da tangente de um ângulo*, dadas a medida do cateto adjacente e oposto ao ângulo. E teve como enunciado: *Em um balão de propaganda cheio com gás hélio, foram fixadas duas cordas que estavam amarradas em veículos distintos, conforme representado no desenho abaixo. De acordo com esse desenho, qual é a altura desse balão em relação ao solo?*

Figura 19 - Objeto ostensivo do item do descritor 05 da Matriz de Referência – SAEPE 2018



Fonte: SAEPE 2018

Nesse último item, talvez o mais elaborado dentre os itens do SAEPE disponíveis e apresentados anteriormente no teste, o estudante deverá mobilizar conhecimentos de perpendicularidade, e identificar a altura que se apresenta, como um dos lados do triângulo retângulo formado. Sendo esse lado, o cateto oposto ao ângulo dado, ou seja, a altura desse balão em relação ao solo, subtraindo 1 metro, é o cateto oposto ao ângulo de 60°. Além disso, o estudante deverá ter o cuidado para não se esquecer de somar essa medida de 1 metro, em seus cálculos finais, referente à altura da traseira da camionete, como mostra a figura 19. Como uma possível técnica para a resolução dessa atividade, temos:

$$tg\ 60° = \frac{x}{6m}$$

$$1{,}73 = \frac{x}{6m}$$

$$x = 1{,}73\ .6m$$

$$x = \ 10{,}38m$$

$$Altura\ do\ balão\ em\ relação\ ao\ solo:$$
$$10{,}38m + 1m = 11{,}38m$$

É importante observar que o valor encontrado referente ao cateto oposto ao ângulo do triângulo retângulo formado, ainda não é o valor final solicitado no item, pois ele requisita determinar a altura do balão em relação ao solo. Deve-se considerar então altura restante da caminhonete em relação ao solo, pois essa medida não é considerada no ostensivo triângulo retângulo formado na figura. Para isso, a técnica termina com a soma das medidas do valor do cateto oposto encontrado e da altura da caminhonete ao solo.

Em outras palavras, esse valor x encontrado não se refere à altura desse balão em relação ao chão, pois ainda será necessário adicionar a esse valor, a medida de 1 metro referente à altura da traseira da camionete ao chão. Um detalhe a mais nessa atividade, que pode passar despercebido ao estudante, mesmo que ele desenvolva uma técnica aceitável e coerente. Logo, a resposta correta seria o valor de 11,38 m.

Quadro 17 – Análise praxeológica do item do SAEPE 2018

Tipo de tarefa (T_T)	**Técnica (τ)**	**Elemento Tecnológico-Teórico (θ, Θ):**
Calcular o valor da tangente de um ângulo.	- Identificar os elementos geométricos do triângulo retângulo, correspondentes aos seus lados (cateto oposto e cateto adjacente); - Identificar as medidas dos ângulos apresentadas no triângulo retângulo; - Identificar a razão trigonométrica tangente 60°; - Substituir os valores na razão trigonométrica correspondente $tg\ 60° = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$ - Resolver a equação do 1º grau para determinar a medida da altura do balão em relação a camionete, igual a 10,38 m; - Somar a medida encontrada a uma medida dada para encontrar a medida total da altura do balão em relação ao solo, igual a 11,38 m.	O conceito de Semelhança de triângulos, em trigonometria no triângulo retângulo.

Fonte: Autoria própria

Mais uma vez, se faz presente o ostensivo gráfico, que evoca o não ostensivo razões trigonométricas em sua definição, justificando e legitimando assim, o bloco tecnológico-teórico dessa técnica desenvolvida. Esse ostensivo se apresenta na posição prototípica, na qual o item retrata um contexto extraescolar. E mais uma vez, para o trabalho com o ângulo notável, não foi preciso a memorização da sua medida por parte dos estudantes, uma vez que seus valores foram fornecidos nos dados presentes no quadro ao lado da figura.

Constatamos que todos os itens do teste estão de acordo com o que propõe a Matriz de Referência do SAEPE do 3º Ano do ensino médio *D05 - Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente)*. Todos os itens se apresentam em forma de problema, trazendo um contexto em que o estudante possa reconhecer como do cotidiano, sendo alguns mais elaborados que outros, mas todos envolvem tarefas com razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Podemos observar ao longo da análise feita nesses quatro itens presente no teste, que, mesmo sendo tipos de tarefas distintas, a estrutura entre eles é semelhante. Ambas requerem praticamente as mesmas técnicas, assim como apresentam o mesmo bloco tecnológico-teórico. Todos se apresentam em um contexto extraescolar, com a presença de uma figura que facilita a sua visualização e compreensão do que é pedido. O ostensivo triângulo retângulo se apresenta, em sua grande maioria, na posição prototípica, pois somente um dos itens não se encontrava nessa posição.

No entanto, quando comparamos esses aspectos,contexto extraescolar ou contexto matemático, objetos ostensivos ou não ostensivos, e se estão em posição prototípica ou não, com as tarefas identificadas nos livros analisados, percebemos que a predominância por alguns desses aspectos não ocorre da mesma forma, como ocorre nos livros didáticos analisados.

Observamos que pouco mais de um terço (30,7%) das tarefas identificadas nos três volumes da coleção, se apresentam em um contexto escolar. Esses dados indicam que os itens que são propostos na avaliação do SAEPE, não são do tipo de tarefas que os estudantes estão mais propensos a encontrar nos livros por eles utilizados, principalmente quando se trata de um contexto extraescolar.

Assim como pouco mais da metade (51%) das tarefas nos livros da coleção, apresentam o ostensivo triângulo retângulo, referentes ao objeto do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo. Quando comparamos com os itens do SAEPE disponibilizados das últimas avaliações, em todos eles o ostensivo se faz presente. Desses ostensivos, apenas em um dos itens, se encontra em uma posição não prototípica.

Outro aspecto que observamos foi que, com exceção do primeiro item, os demais apresentam ângulos notáveis. E em todos os itens, são dados os seus valores nas razões trigonométricas correspondentes, de modo que não seja necessário que os estudantes tenham memorizado. O que difere da ênfase que se é dada nos livros didáticos analisados, estimulando o estudante a memorizar os ângulos notáveis, sugerindo a facilitação no momento em que for preciso utilizá-los.

Em relação aos tipos de tarefas, dos seis categorizados nos livros didáticos, identificamos três, presentes nos itens do SAEPE, que são T_S, T_C, e T_T, relacionados ao cálculo do valor do seno, cosseno e tangente. Ao longo de toda coleção, observamos uma ocorrência de 35,5% desses três tipos de tarefas, o que ainda é inferior ao tipo de tarefa T_R *Calcular o valor de uma razão trigonométrica* (40,9%). Ou seja, nenhum dos tipos de tarefas presentes nos itens do teste, pertence ao tipo de tarefa que foi mais enfatizada nessa coleção. Assim como Pastor (2020), percebemos também a ausência de outros tipos de tarefas, como T_A e T_G, identificadas nos livros da coleção analisada.

Enquanto que no livro didático LD1, assim como em toda a coleção, predomina um tipo de tarefa (T_R), nos itens do SAEPE a predominância é de outros tipos que diferem desse.

Ou seja, a grande maioria das tarefas que os estudantes encontram em seus livros quanto ao objeto do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, difere das que eles encontraram nas avaliações externas. Essa distinção pode ocasionar algumas das dificuldades dos estudantes, apresentadas nos resultados dessas avaliações. Parece haver um descompasso, o que pode levar os estudantes a errarem nessas avaliações.

No próximo tópico, iremos apresentar a análise realizada a partir das técnicas mobilizadas pelos estudantes participantes dessa investigação, ao responderem os itens presentes no teste, quanto ao saber razões trigonométricas no triângulo retângulo.

5.3 ANÁLISE DAS TÉCNICAS DOS ESTUDANTES

Nosso intuito nesse tópico é analisar elementos praxeológicos utilizados pelos estudantes, de acordo com o que responderam nos itens presentes no teste. Aplicamos o teste em uma escola da rede estadual, na região metropolitana da cidade do Recife, no Estado de Pernambuco. Participaram desse momento 54 estudantes de duas turmas do 3º ano do ensino médio, no final do ano de 2019, e os mesmos estavam por participar da avaliação do SAEPE desse mesmo ano, nos dias seguintes.

Como relatamos anteriormente, esse teste que aplicamos inicialmente seria o teste piloto para que, após observações e adequações, voltássemos para aplicar o teste final e definitivo no ano seguinte, com estudantes também do 3° ano do ensino médio. Desse modo, poderíamos colher entrevistas com os participantes, para melhor compreensão das técnicas aplicadas ou compreender o motivo às abstenções as questões do teste.

No entanto, no início do ano letivo de 2020, fomos surpreendidos pela pandemia do covid-19, de modo que todas as aulas presenciais foram suspensas, o que nos impossibilitou voltar para aplicarmos um novo teste. Logo, procuramos trabalhar com o que seria possível dentro dessa nova realidade, e tomamos novos direcionamentos, considerando o material presente nos protocolos, o qual fornecia dados suficientes para a nossa investigação, com a caracterização das técnicas entregues pelos estudantes.

De acordo com o que mencionamos no capítulo quatro, o teste era composto por quatro questões, ou *itens*, quanto ao estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo, todas extraídas das últimas avaliações do SAEPE que estão disponíveis para consulta pública, referentes aos anos de 2015 a 2018.

Observamos que, dos 54 testes aplicados, 18 estudantes (33,3%) entregaram o teste totalmente em branco, ou seja, um terço dos estudantes participantes não respondeu a nenhuma das questões, assim como não justificaram o motivo pelo qual não tentaram responder. Enquanto que 36 deles (66,7%) responderam ao menos um dos quatro itens presentes do teste. A figura abaixo apresenta a descrição dos itens presentes nos testes aplicados aos estudantes.

Figura 20 – Descrição dos itens presentes nos testes

Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com os dados apresentados na figura acima, e considerando os 36 testes entregues com ao menos um dos itens respondidos, obtivemos 46 itens que foram respondidos corretamente, o que corresponde a um pouco mais de 41% das ocorrências, contra quase 59% dos itens respondidos que apresentaram erros.

Esses números nos mostraram a necessidade de olharmos de maneira mais específica para os protocolos dos estudantes que responderam mobilizando alguma técnica, principalmente quanto aos erros apresentados, e o que os levou a cometerem determinados erros. Mas também não poderemos desconsiderar totalmente o número significativo dos 104 itens que não foram respondidos, se pensarmos na relação desses dados com os resultados do SAEPE.

Apresentamos na tabela a seguir, o quantitativo de acertos, erros e abstenções relativos aos 216 itens dos 54 testes aplicados aos estudantes.

Tabela 6: – Quantitativo de acertos, erros e abstenções dos itens nos testes aplicados

Questões/Itens Tipos de tarefa	**Acertos**	**%**	**Erros**	**%**	**Abstenções**	**%**
1 – SAEPE2015 (Tarefa do tipo T_S)	10	18,5	21	38,9	23	42,6
2 – SAEPE 2016 (Tarefa do tipo T_C)	07	13	21	38,9	26	48,1
3 – SAEPE 2017 (Tarefa do tipo T_C)	17	31,5	09	16,7	28	51,8
4 – SAEPE 2018 (Tarefa do tipo T_T)	12	22,2	15	27,8	27	50

Fonte: Dados da pesquisa

Considerando acertos e erros juntos, podemos observar que houve um equilíbrio em relação à quantidade dos itens respondidos e os que foram deixados em branco, em todas as quatro questões presentes no teste.

Mas quando focamos apenas os itens respondidos, percebemos que houve uma predominância dos itens respondidos com erros, em comparação aos itens com acertos, com exceção do item da terceira questão do teste, pois a quantidade de acertos (31,5%) foi maior que a quantidade de erros (16,7%).

O curioso é que o tipo de tarefa da segunda questão (T_C), que teve mais erros que acertos, é o mesmo tipo de tarefa dessa terceira questão, como identificamos no tópico anterior desse capítulo, e apesar disso, houve essa diferença. Observando os protocolos dos estudantes, essa diferença pode ter ocorrido devido ao valor do cosseno de 60° (0,5), em relação ao qual, ao realizar os cálculos, os estudantes demonstram menos dificuldades, do que realizar cálculos envolvendo o valor do cosseno de 30° (0,87).

Ao considerarmos as respostas certas ou erradas dos estudantes, quanto aos itens do teste referente ao objeto do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, identificamos as técnicas, dentre as anteriormente categorizadas, que são:

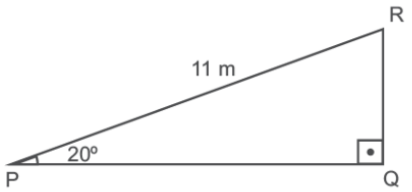
- Do grupo dos estudantes que, embora tenham respondido, as técnicas apresentadas não são interpretadas quanto ao objeto razões trigonométricas no triângulo retângulo, pois: ou se referem a outro objeto matemático; ou a técnica se apresenta de forma confusa para compreensão;
- Do grupo dos estudantes que utilizaram corretamente as técnicas sobre as razões trigonométricas, mas erraram no cálculo numérico;
- Do grupo dos estudantes que não erraram no cálculo numérico, porém o discurso tecnológico-teórico não corresponde à trigonometria para a resolução;
- Do grupo dos estudantes que conseguem resolver corretamente, apresentando técnicas que correspondem à esperada pela instituição.

Ao analisarmos cada questão do teste, conseguimos identificar as técnicas desenvolvidas pelos estudantes, verificando qual a regularidade da técnica, buscando observar e compreender quais caminhos os levou nesse processo de resolução.

Iniciaremos apresentando os resultados dos protocolos a partir da primeira questão do teste, como veremos a seguir:

Figura 21 – Primeira questão do teste do tipo T_S

1) (SAEPE – 2015) O telhado da casa de Paulo deixa em sua lateral uma abertura na forma de um triângulo retângulo, conforme mostra o desenho abaixo. Ele irá tampar essa abertura e para isso precisa calcular a medida da altura QR dessa abertura para comprar o material necessário.



Considere:
sen 20º ≅ 0,34
cos 20º ≅ 0,94
tg 20º ≅ 0,36

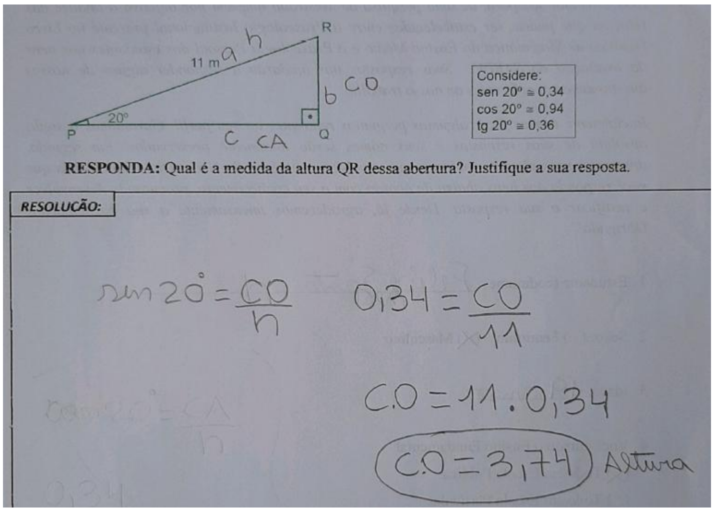
RESPONDA: Qual é a medida da altura QR dessa abertura? Justifique a sua resposta.

Fonte: Acervo da pesquisa

De acordo com as análises das técnicas mobilizadas pelos estudantes referentes a essa primeira questão do teste, observamos um grupo de dez estudantes que conseguiram resolver corretamente essa questão, identificando corretamente os elementos geométricos do triângulo retângulo correspondentes aos lados dos catetos e da hipotenusa. Assim como, identificaram os ângulos e a razão trigonométrica, substituindo os seus respectivos valores, e resolveram a equação do 1º grau, mostrando conformidade com as técnicas esperadas pela instituição, que estão em consonância com as técnicas apresentadas nos livros didáticos da coleção analisada.

No entanto, observamos que desses dez estudantes, seis deles não utilizaram a unidade de medida (m), nem no desenvolvimento da sua técnica, e nem ao final da resposta, como se apresenta nos livros didáticos analisados e por eles utilizados. A figura abaixo apresenta o protocolo de um desses estudantes com técnicas semelhantes às dos outros cincos.

Figura 22 – Técnica desenvolvida pelo estudante E03 na questão 1



Fonte: Dados da pesquisa

O estudante E03 mobilizou as seguintes técnicas: identificar os elementos geométricos cateto oposto, cateto adjacente e a hipotenusa do triângulo retângulo; identificar as medidas dos ângulos apresentadas no triângulo retângulo; identificar a razão trigonométrica seno; substituir os valores na razão trigonométrica, e resolver a equação do 1º grau para determinar a medida da altura QR, de 3,74m.

Podemos observar que, mesmo que o estudante tenha tido a preocupação e o cuidado em determinar que o resultado encontrado seja a altura solicitada na questão, o mesmo não identificou a unidade de medida referente a essa altura. Ao longo de nossas análises, constatamos que não identificar a unidade de medida correspondente aos lados do triângulo retângulo, é recorrente na maioria das técnicas desenvolvidas.

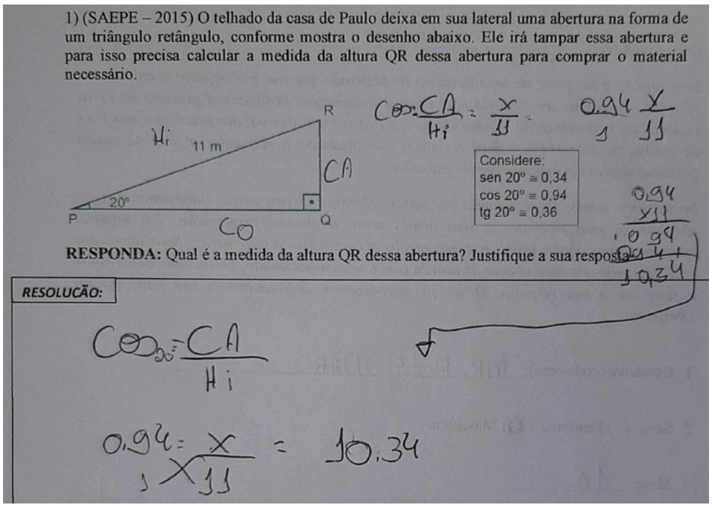
Ocorreram alguns casos observados nas análises dos protocolos em que o mesmo estudante identifica corretamente a unidade de medida em uma das questões, mas esquece de representá-la em outra questão. Isso nos sugere que talvez o estudante tenha o conhecimento, mas não tenha a prática em utilizar corretamente a unidade de medida, por, provavelmente, preocupar-se mais em desenvolver corretamente a técnica e chegar ao resultado numérico correto.

Não identificamos, dentre os estudantes que responderam as questões do teste, algum que utilizou outro objeto ostensivo. A maioria deles, quando identificavam os elementos geométricos do triângulo retângulo, utilizavam o próprio ostensivo trazido na questão, como fez o estudante E03, na figura 21.

Dos 21 estudantes que não mobilizaram corretamente suas técnicas de modo que pudessem chegar ao resultado esperado, observamos que a maioria deles não conseguiu identificar corretamente a razão trigonométrica seno, confundindo com o cosseno. Bem como, estudantes que não conseguem identificar corretamente os elementos geométricos cateto oposto e a hipotenusa, e se confundem ao desenvolverem os seus cálculos.

No extrato abaixo, o estudante E22 confundiu a razão trigonométrica, assim como não identificou corretamente os elementos geométricos, confundindo o cateto oposto, pelo cateto adjacente. No entanto, o estudante resolveu corretamente os cálculos numéricos.

Figura 23 – Técnica desenvolvida pelo estudante E22 na questão 1

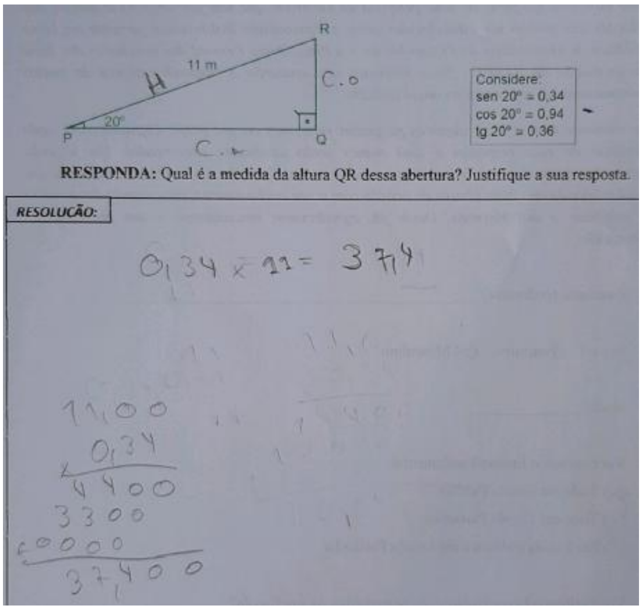


Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos que esse estudante, semelhante a outros que responderem essa questão, demonstra que possui pouco conhecimento sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo, ainda não consolidado.

Alguns estudantes se encontram no grupo dos que mobilizaram corretamente conhecimentos referentes às razões trigonométricas, mas erraram no desenvolvimento das operações aritméticas. A seguir, apresentaremos o extrato de um dos estudantes que nos chamou a atenção quanto ao erro no cálculo numérico.

Figura 24 – Técnica desenvolvida pelo estudante E05 na questão 1

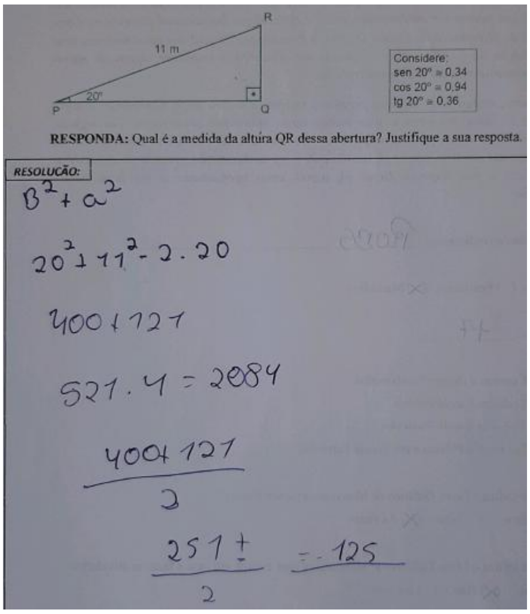


Fonte: Dados da pesquisa

O estudante E05 identifica corretamente os elementos geométricos no ostensivo triângulo retângulo (catetos e hipotenusa) e, apesar de simplificar a técnica, pois não desenvolve a resolução identificando a razão trigonométrica seno, ele substitui os valores apontados, corretamente. Porém, o estudante erra o número decimal, no deslocamento da vírgula, e assim, erra a medida solicitada que seria 3,74m.

Abaixo, apresentamos o extrato do protocolo de um estudante que pertence ao grupo dos que, embora respondam, as técnicas apresentadas são de difícil compreensão e não correspondem ao objeto do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Figura 25 – Técnica desenvolvida pelo estudante E13 na questão 1



Fonte: Dados da pesquisa

Podemos observar que a técnica mobilizada pelo estudante E13 não condiz com a esperada pela instituição, pois embora tenha respondido, não foi possível ser interpretada em relação ao objeto das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Esse estudante utiliza as medidas da hipotenusa e do ângulo apresentadas no ostensivo, no desenvolvimento de sua técnica, na tentativa de trabalhar com o Teorema de Pitágoras, ou o quadrado da diferença de dois números.

Vale ressaltar que, com exceção do estudante E13, os estudantes E03, E22 e E05reconheceram o ostensivo triângulo retângulo ao representar nele, os elementos geométricos cateto oposto, cateto adjacente e a hipotenusa. Essa constatação corrobora coma pesquisa de Ramalho (2016) a qual aponta que, ao ser interpretado, o ostensivo fornece elementos que possibilitam compreender a tarefa.

No quadro a seguir, e nos três quadros seguintes nesse tópico, apresentaremos as técnicas mobilizadas pelos estudantes ao resolverem cada uma das quatro questões do teste, mediante a análise. Ressaltamos que nesses quadros, estarão presentes as técnicas que não estão em conformidade com a instituição, identificadas nos protocolos de cada questão correspondente. Abaixo, o quadro apresenta as técnicas que identificamos nos protocolos dos estudantes que responderam a primeira questão:

Quadro 18 – Técnicas mobilizadas pelos estudantes na questão 01

Tipo de tarefa (T_S)	**Técnicas**
Calcular o valor do seno de um ângulo.	- Identificar a razão trigonométrica cosseno, ao invés da razão seno; - Resolver os cálculos numéricos incorretamente; - Somar o quadrado da medida do ângulo agudo apresentado no triângulo retângulo pelo quadrado da medida da hipotenusa e realizar cálculos para encontrar a medida desejada.

Fonte: Autoria própria

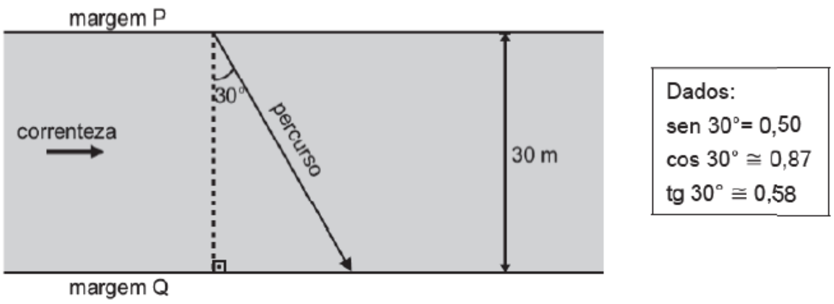
Logo, quanto à primeira questão, destacamos 12 estudantes que identificaram a razão trigonométrica cosseno, ao invés do seno, sete estudantes que cometeram erros nos cálculos numéricos e dois estudantes que mobilizaram técnicas que não correspondem ao objeto razões trigonométricas no triângulo retângulo. Dessa forma, ao resolverem a questão, não conseguiram obter a medida correta do cateto oposto ao ângulo de 20° correspondente a altura QR, de 3,74m.

Quando apresentamos os quadros relativos às técnicas dos estudantes que divergiram da instituição, não trazemos neles os elementos do bloco tecnológico-teórico, pois, como dito antes, não conseguimos realizar entrevistas com os estudantes, de modo que fosse possível compreender as justificativas para as suas técnicas.

A segunda questão do teste é o tipo de tarefa T_C *calcular o valor do cosseno de um ângulo* cujas análises das técnicas mobilizadas pelos estudantes apresentaremos a seguir:

Figura 26 – Segundo questão do teste do tipo T_C

2) (SAEPE – 2016) Um barco realizou a travessia em um rio partindo da margem P com trajetória retilínea em direção à margem oposta Q. Devido à correnteza desse rio, o percurso do barco foi deslocado 30° em relação à trajetória retilínea predeterminada, conforme representado no desenho abaixo.



RESPONDA: Qual o percurso aproximado, em metros, realizado pelo barco para atravessar esse rio?

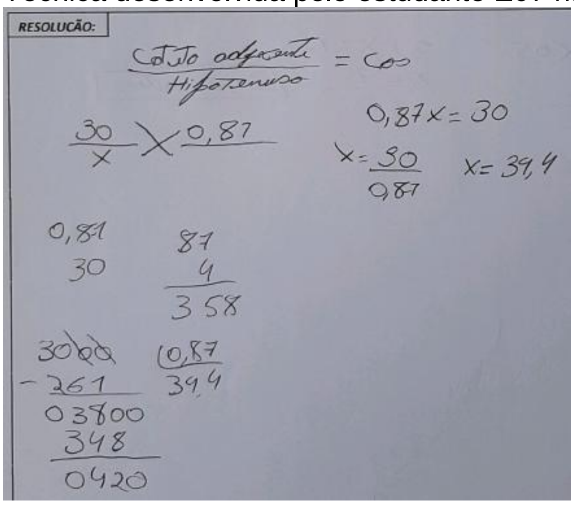
Fonte: Acervo da pesquisa

Observamos que a quantidade de erros dessa questão foi igual da questão anterior, apesar de os tipos de tarefas serem diferentes. No entanto, essa questão obteve o menor índice de acertos, dentre as quatro questões presentes no teste.

Em relação aos sete estudantes que obtiveram acertos nessa questão, todos pertencem ao grupo dos estudantes que conseguiram apresentar técnicas que correspondem à esperada pela instituição.

Esses estudantes identificaram corretamente os elementos geométricos do triângulo retângulo correspondentes aos seus lados, além das medidas dos ângulos e da razão trigonométrica cosseno; substituíram os valores nessa razão, e resolveram a equação do primeiro grau para determinar a medida de 34,48m. No entanto, nenhum deles acrescentou a unidade de medida (metros) ao final. Ou seja, existe uma preocupação com os aspectos numéricos, deixando em segundo plano a grandeza utilizada. Segue na figura a seguir, uma resolução que se assemelha a dos demais:

Figura 27 – Técnica desenvolvida pelo estudante E07 na questão 2

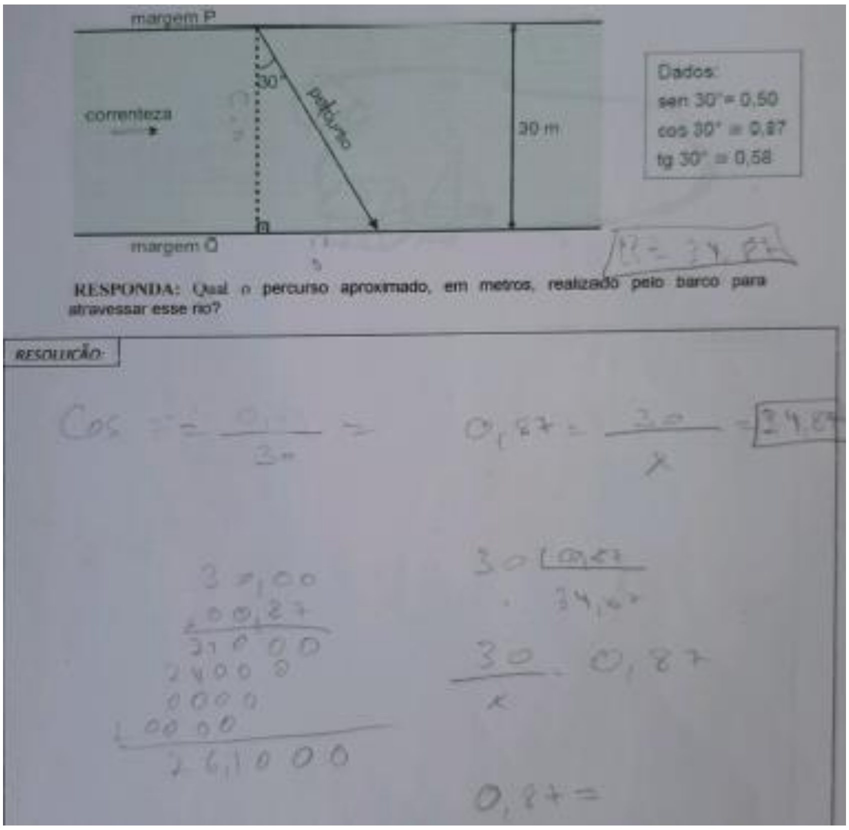


Fonte: Dados da pesquisa

Verificamos que, dentre os 21 estudantes que erraram no desenvolvimento das técnicas, alguns mobilizaram corretamente os conhecimentos quanto às razões trigonométricas no triângulo retângulo, porém erraram no cálculo numérico. A seguir, apresentamos resoluções que evidenciam esses erros:

Outros estudantes identificaram corretamente os elementos geométricos catetos e hipotenusa, no entanto, se confundiram ao identificar a razão trigonométrica cosseno corretamente. Alguns estudantes mobilizaram técnicas que não correspondem ao objeto razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Figura 28 – Técnica desenvolvida pelo estudante E05 na questão 2

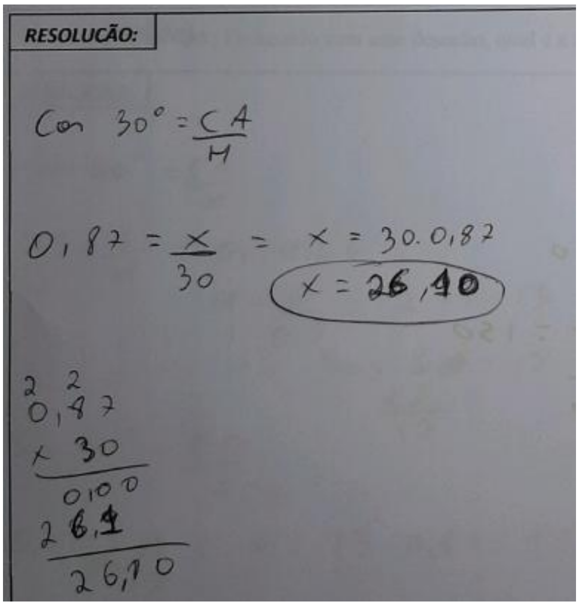


Fonte: Dados da pesquisa

Podemos observar que o estudante E05 aplicou corretamente as técnicas de identificar os elementos geométricos e o ângulo. Também identificou a razão trigonométrica cosseno substituindo corretamente os valores nessa razão. No entanto, o estudante errou no desenvolvimento das operações aritméticas, ao realizar o algoritmo da divisão com número decimal.

Encontramos aqui, estudantes que pertencem ao grupo dos que mobilizam corretamente os conhecimentos sobre as razões trigonométricas, mas erraram no cálculo numérico.

Figura 29 – Técnica desenvolvida pelo estudante E04 na questão 2

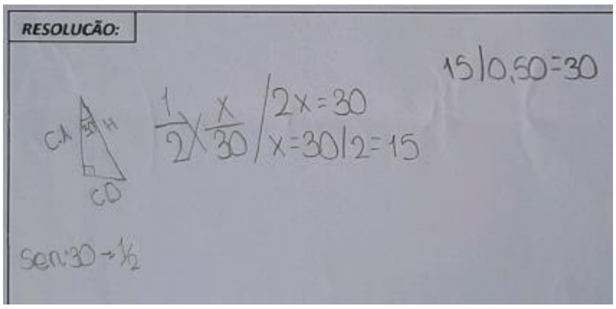


Fonte: Dados da pesquisa

A técnica desenvolvida pelo estudante E04 demonstra que o mesmo possui conhecimentos sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo, pois identificou corretamente os elementos geométricos cateto adjacente e a hipotenusa na sua razão e ângulo correspondente. No entanto, ao substituir os valores na razão, trocou as medidas do cateto adjacente e da hipotenusa. Essa confusão ocasionou o resultado final errado, mesmo ele tendo mobilizado corretamente o cálculo numérico.

Ainda na análise dos protocolos da segunda questão, identificamos estudantes que confundiram a razão trigonométrica cosseno pelo seno ou pela tangente. Vejamos nas figuras abaixo, a resolução de dois estudantes que tomamos como exemplos, e suas técnicas se assemelham aos demais que mobilizaram técnicas equivalentes:

Figura 30 – Técnica desenvolvida pelo estudante E02 na questão 2

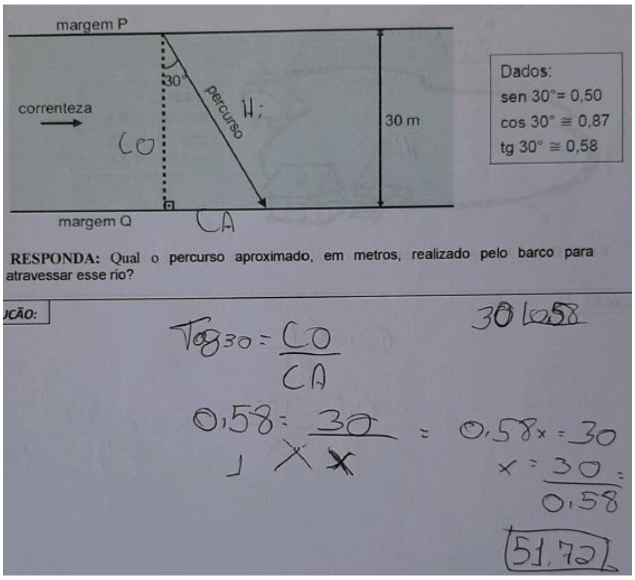


Fonte: Dados da pesquisa

No extrato do protocolo do estudante E02, podemos observar no desenvolvimento da sua técnica que o mesmo reconheceu corretamente os elementos geométricos do triângulo retângulo, inclusive desenhando o ostensivo triângulo e identificando nele os catetos, a hipotenusa e ângulo. Contudo, confundiu a razão trigonométrica a ser trabalhada na tarefa, considerando o seno, ao invés do cosseno, assim como se equivocou ao substituir os valores na razão, trocando a medida do cateto pela da hipotenusa.

Ainda em relação à técnica do estudante E02, vale destacar que ele representou os valores dos dados apresentados na tarefa em forma fracionária. Para o seno 30°, o estudante considerou o valor apresentado na tabela de ângulos notáveis, o que dá indícios de conformidade com as técnicas ensinadas na coleção do livro didático, que se apresenta em fração. Todavia, diante das análises observamos que as maiorias dos estudantes optam por considerar os dados do quadro trazidos nas questões.

Figura 31 – Técnica desenvolvida pelo estudante E22 na questão 2



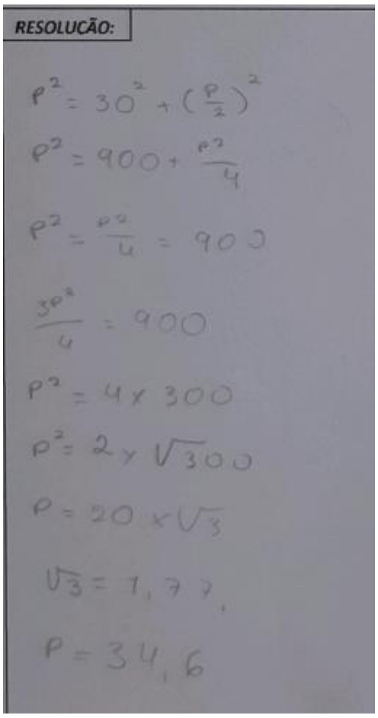
Fonte: Dados da pesquisa

Na figura 31, apresentamos o extrato do protocolo do estudante E22, no qual podemos observar que ele não identificou corretamente os elementos geométricos no ostensivo triângulo retângulo, e errou ao identificar a razão trigonométrica cosseno, considerando a razão tangente. Esse estudante efetuou corretamente os cálculos numéricos.

Nos dois exemplos acima (E02 e E22), podemos perceber que os estudantes pertencem ao grupo dos que, mesmo que tenham respondido, reconhecem objeto do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, mas se confundem nas substituições dos valores nas razões trigonométricas correspondentes.

Identificamos também, ainda na segunda questão, estudantes que utilizaram o teorema de Pitágoras em suas técnicas, para encontrar a medida da hipotenusa, e que fazem parte do grupo que respondem, mas não correspondem ao objeto do saber razões trigonométricas. O extrato abaixo apresenta o protocolo do estudante E26, semelhante aos demais:

Figura 32 – Técnica desenvolvida pelo estudante E26 na questão 2



Fonte: Dados da pesquisa

Notamos que a técnica mobilizada pelo estudante E26 não está em conformidade com as técnicas apresentadas nos livros didáticos analisados, quanto ao objeto do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo. Conjecturamos que, por se tratar de uma questão que apresenta o ostensivo triângulo retângulo em posição prototípica, o estudante tenha considerado substituir as medidas dos catetos na relação de Pitágoras para obter a medida da hipotenusa.

No quadro a seguir, apresentamos as técnicas mobilizadas pelos estudantes, ao resolverem a segunda questão do teste, mediante a análise:

Quadro 19 – Técnicas mobilizadas pelos estudantes na questão 02

Tipo de tarefa (T_C)	**Técnicas**
Calcular o valor do cosseno de um ângulo.	- Identificar a razão trigonométrica seno, ao invés da razão trigonométrica cosseno; - Identificar a razão trigonométrica tangente, ao invés da razão trigonométrica cosseno; - Resolver os cálculos numéricos incorretamente; - Substituir incorretamente as medidas dos lados do triângulo retângulo nas razões trigonométricas; - Substituir a medida dos catetos do triângulo retângulo no Teorema de Pitágoras para encontrar a medida da hipotenusa.

Fonte: Autoria própria

Destacamos nessa segunda questão que dos 21 estudantes que responderam, porém não correspondente à instituição, 10 deles responderam com técnicas que não correspondem ao objeto razões trigonométricas no triângulo retângulo, cinco identificaram a razão trigonométrica tangente em vez do cosseno, e três identificaram o seno, em vez do cosseno.

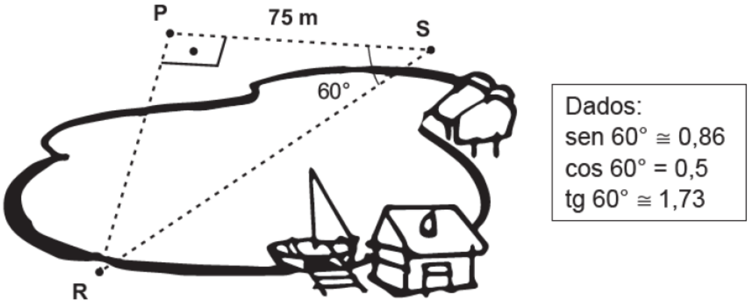
Podemos observar nessa questão que, a maioria dos estudantes optou por desenvolver uma técnica por meio do teorema de Pitágoras, talvez pelo fato de que o objeto ostensivo apresentado nessa questão, seja muito semelhante a posição prototípica utilizada quando eles estudaram esse objeto, anteriormente.

Ainda podemos também destacar um número considerável de oito estudantes que identificaram incorretamente a razão trigonométrica, assim como ocorreu na primeira questão.

Dando continuidade, passaremos para a análise dos protocolos dos estudantes referente à terceira questão do teste.

Figura 33 – Terceira questão do teste do tipo T_C

3) (SAEPE - 2017) Para estimar a largura RS de um lago, Pedro, que é topógrafo, fez 3 demarcações próximas às margens desse lago, representadas pelos pontos P, R e S, e utilizou um teodolito para fazer algumas medições. Do ponto S ele avistou os pontos P e R segundo um ângulo de 60º e, do ponto P, avistou os pontos R e S segundo um ângulo de 90º, conforme ilustrado no desenho abaixo.



RESPONDA: Aproximadamente, quanto mede a largura RS desse lago, em metros?

Fonte: Acervo da pesquisa

A terceira questão é do tipo T_C *Calcular o valor do cosseno de um ângulo*. No entanto, essa questão obteve o maior índice de acertos (31,5%), em comparação com a segunda questão que obteve o menor índice (13%), mesmo ambas pertencente ao mesmo tipo de tarefa.

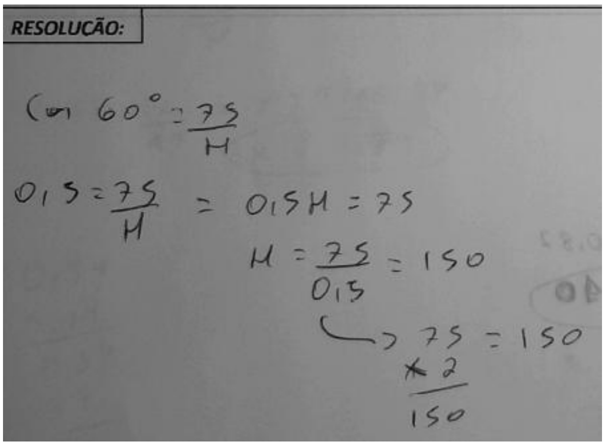
Podemos observar que a terceira questão se diferencia da segunda quanto ao ostensivo triângulo retângulo, que não se apresenta na posição prototípica como ocorre na segunda questão. Ambas se apresentam em um contexto extraescolar e com ângulos notáveis, porém, como já dito anteriormente, o ângulo apresentado nessa questão, possui menor grau de dificuldade na resolução dos cálculos.

No ostensivo, nessa questão, a medida do cateto adjacente (75m) está próxima a esse lado, o que facilita a sua identificação. O mesmo não ocorre na segunda questão, pois nela o estudante deverá ter uma atenção maior, quanto a identificá-lo. Esses aspectos, nessas duas questões do mesmo tipo, podem ter sido uma das causas na diferença de acertos e erros entre elas, favorecendo para que essa terceira questão tenha obtido uma maior quantidade de respostas corretas.

Verificamos que os 17 estudantes que acertaram essa questão, mobilizaram técnicas que apresentam conformidade com as técnicas esperadas pela instituição. Esses estudantes identificaram os elementos geométricos cateto adjacente e hipotenusa corretamente; identificaram as medidas dos ângulos no triângulo retângulo, e a razão trigonométrica cosseno; substituíram os valores na razão e resolveram a equação do 1º grau para determinar a medida encontrada de 150 m.

No entanto, nenhum desses estudantes acrescentou a unidade de medida no valor encontrado. A seguir, segue o extrato de um dos estudantes que mobilizou corretamente as técnicas, de acordo com a esperada pela instituição:

Figura 34 – Técnica desenvolvida pelo estudante E27 na questão 3

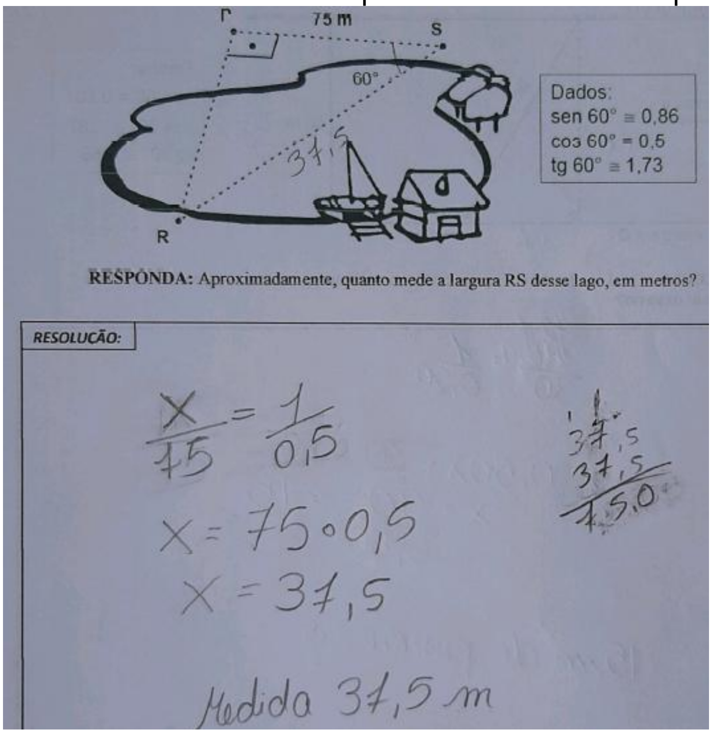


Fonte: Dados da pesquisa

Identificamos que todos os estudantes que responderam corretamente utilizaram os dados fornecidos no quadro apresentado na questão, mesmo se tratando de um ângulo notável. Também observamos que a posição não prototípica do ostensivo triângulo retângulo, não provocou muitas dificuldades no desenvolvimento das técnicas apresentadas por estes estudantes, ainda que o ostensivo triângulo apresentado nessa questão seja mais complexo se comparado com a questão anterior.

Em relação aos nove estudantes que não conseguiram êxito nessa questão do teste, observamos que algumas de suas técnicas indicavam que os estudantes mobilizavam conhecimentos sobre as razões trigonométricas, mas erravam nos cálculos numéricos. A seguir apresentaremos extratos com os procedimentos de alguns estudantes que destacamos e que se assemelham aos demais.

Figura 35 – Técnica desenvolvida pelo estudante E16 na questão 3

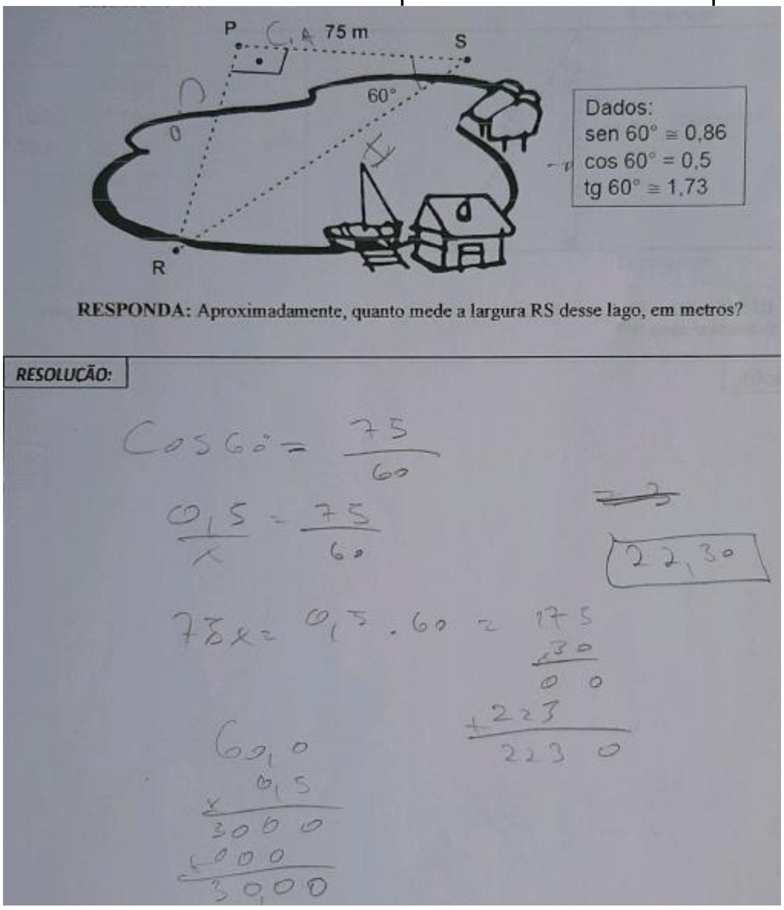


Fonte: Dados da pesquisa

O extrato da figura 35 revela que o estudante E16 consegue mobilizar conhecimentos relacionados à razão trigonométrica no triângulo retângulo, identificando os elementos geométricos e as medidas dos ângulos. Ao considerar o valor 0,5 na sua resolução, apontado no quadro da terceira questão, o estudante dá indícios de que conseguiu identificara razão trigonométrica cosseno. Ou talvez o tenha reconhecido, caso o valor 0,5 seja mais presente na sua vida e em seus estudos.

Porém, o estudante comete erros nas operações matemáticas, não conseguindo obter a medida correta, pois em vez de multiplicar a medida do cateto adjacente por dois, ele efetua a divisão desse lado, por dois.

Figura 36 – Técnica desenvolvida pelo estudante E05 na questão 3



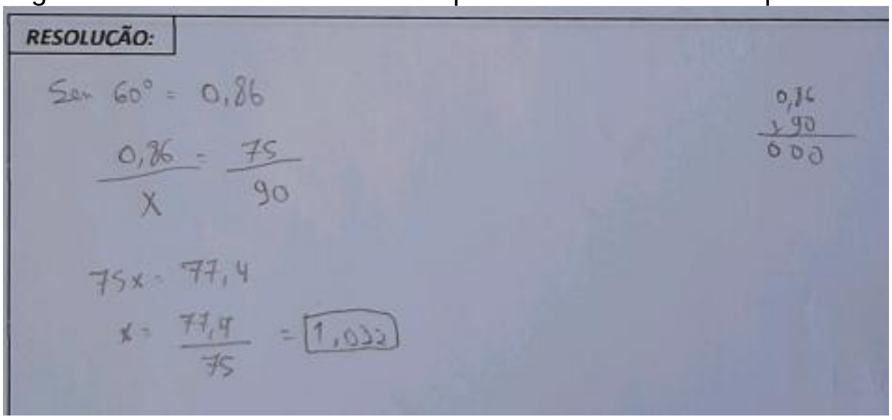
Fonte: Dados da pesquisa

Podemos observar no extrato da figura acima, que o estudante E05 identifica corretamente os elementos geométricos cateto oposto, cateto adjacente e a hipotenusa no ostensivo triângulo retângulo; identifica as medidas dos ângulos apresentadas no triângulo retângulo e identifica a razão trigonométrica cosseno.

Contudo, o estudante considerou a medida do ângulo de 60° como sendo a medida da hipotenusa, substituindo equivocadamente na razão, assim como cometeu erros no cálculo numérico, de forma que, ao desenvolver a resolução, não obtém a medida correta da hipotenusa ao ângulo de 60°.

No extrato da figura abaixo, destacamos o protocolo do estudante E14, que nos chamou a atenção quanto à sua técnica, por apresentar outro erro quanto à identificação da razão trigonométrica, como veremos a seguir.

Figura 37 – Técnica desenvolvida pelo estudante E14 na questão 3



Fonte: Dados da pesquisa

Ao mobilizar a sua técnica, podemos perceber que o estudante E14 não consegue identificar corretamente os elementos geométricos e a razão trigonométrica, pois considerou a razão seno em sua resolução, ao invés do cosseno. Ainda podemos constatar que o estudante tomou o valor do seno de 60° como sendo a medida do cateto oposto, na substituição da razão trigonométrica, assim como a medida do ângulo de 90º, ao substituí-la na razão. Ainda mobilizou a técnica de resolver a equação do 1º grau, porém não obtendo o resultado esperado.

No quadro a seguir, apresentamos as técnicas mobilizadas pelos estudantes ao resolverem a terceira questão do teste, mediante a análise:

Quadro 20 – Técnicas mobilizadas pelos estudantes na questão 03

Tipo de tarefa (T_C)	**Técnicas**
Calcular o valor do cosseno de um ângulo.	- Identificar a razão trigonométrica seno, ao invés da razão trigonométrica cosseno; - Resolver os cálculos numéricos incorretamente; - Substituir a medida do ângulo agudo dado no triângulo retângulo, no denominador da razão que define o cosseno; - Substituir o valor do seno de um ângulo no numerador da razão que define seno.

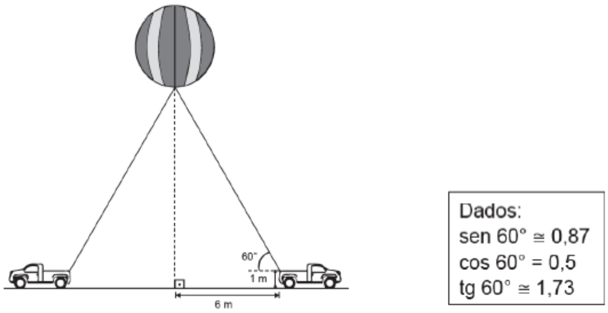
Fonte: Autoria própria

Diante dessas análises, destacamos que dos nove estudantes cujas técnicas não corresponderam à esperada: seis estudantes identificaram corretamente a razão trigonométrica cosseno, porém erram ao efetuar os cálculos numéricos; um estudante identificou a razão trigonométrica seno, ao invés do cosseno, e dois estudantes apresentaram respostas que não correspondem ao objeto razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Apresentaremos a seguir, a análise de algumas técnicas dos estudantes referentes à quarta e última questão apresentada no teste.

Figura 38 – Quarta questão do teste do tipo T_T

4) (SAEPE - 2018) Em um balão de propaganda cheio com gás hélio, foram fixadas duas cordas que estavam amarradas em veículos distintos, conforme representado no desenho abaixo.



RESPONDA: De acordo com esse desenho, qual é a altura desse balão em relação ao solo?

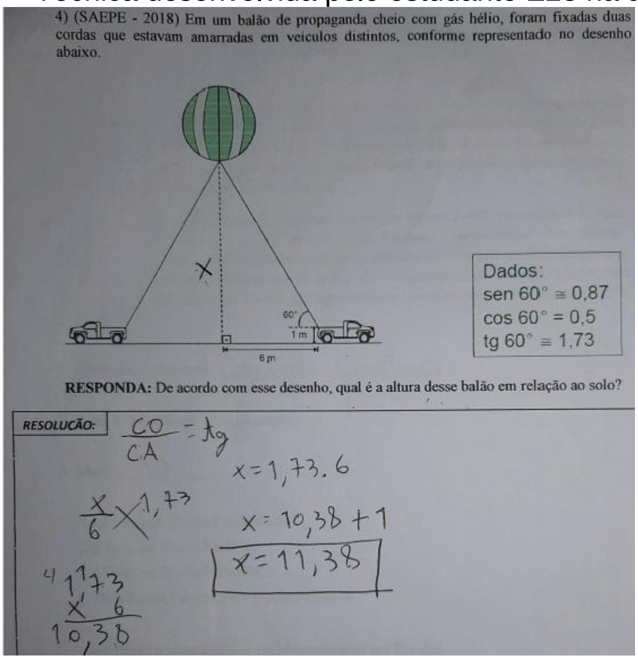
Fonte: Acervo da pesquisa

Essa última questão do teste, referente ao item do SAEPE do ano de 2018, é do tipo T_T *Calcular o valor da tangente de um ângulo*. Mediante a análise, observamos que nessa questão do teste, houve uma equivalência na quantidade de estudantes que responderam com os que se abstiveram de respondê-la. Ou seja, dos 54 estudantes participantes dessa pesquisa, 27 estudantes tentaram responder algo nessa questão, contra 27 que a deixaram em branco. Dos estudantes que mobilizaram alguma técnica na sua resolução, 12 deles (22,2%) acertaram e 15 não acertaram (27,8%).

Vale ressaltar que, apesar dessa questão necessitar da mobilização de técnicas semelhantes das questões anteriores (determinar o valor de uma razão seno, cosseno ou tangente), ela se diferencia quanto à necessidade de uma técnica a mais, em comparação com as que a antecederam. Esse detalhe pode explicar alguns dos erros apresentados nos protocolos dos estudantes, pois eles podem ter seguido a sequência lógica de resolução das três primeiras questões, sem se ater ao detalhe de mobilizar mais uma técnica ao final, para obter o valor solicitado.

No extrato a seguir, apresentaremos o protocolo de um estudante que mobilizou técnicas de acordo com a esperada pela instituição e que se assemelham as demais que acertaram essa questão:

Figura 39 – Técnica desenvolvida pelo estudante E23 na questão 4



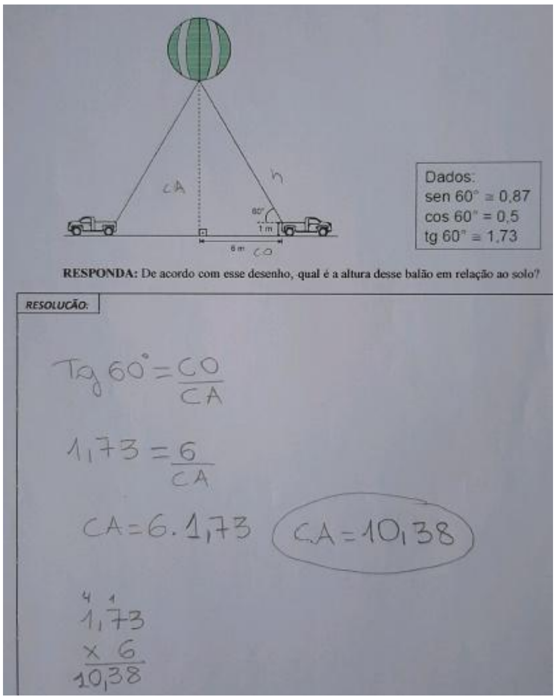
Fonte: Dados da pesquisa

Observamos que o estudante do extrato acima mobiliza corretamente: as técnicas de identificar os elementos geométricos do triângulo retângulo correspondentes aos seus lados; identificar as medidas dos ângulos apresentados no triângulo retângulo; identificar a razão trigonométrica tangente; substituir os valores na razão trigonométrica correspondente; resolver a equação do 1º grau para determinar a medida da altura do balão em relação à caminhonete, e, por fim, somar a medida encontrada à outra medida dada (1m), para encontrar a medida total, referente à altura do balão em relação ao solo.

Em relação à análise das técnicas dos estudantes que não obtiveram o resultado esperado, identificamos o grupo de estudantes que mobilizaram corretamente os conhecimentos sobre as razões trigonométricas, mas erraram no cálculo numérico, ou não adicionaram a medida dada, ao final da encontrada.

Destacamos algumas que nos chamaram atenção e que se assemelham as outras resoluções, mas não chegaram ao resultado correto.

Figura 40 – Técnica desenvolvida pelo estudante E03 na questão 4

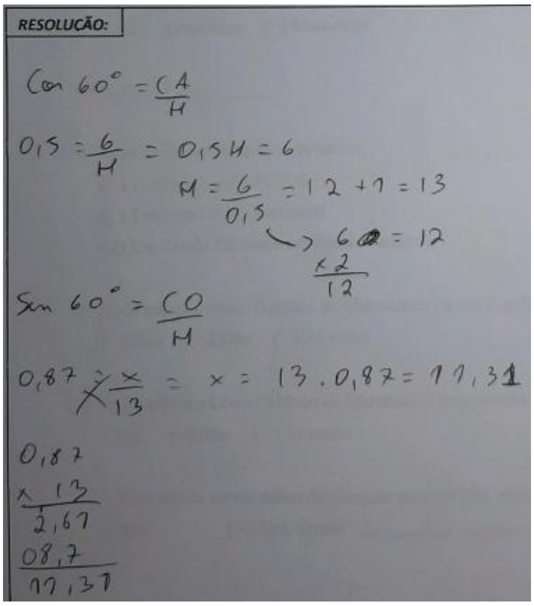


Fonte: Dados da pesquisa

As técnicas mobilizadas pelo estudante E03 referente à quarta questão foram as mais identificadas dentre os estudantes que não conseguiram determinar a medida final solicitada. Todo o seu desenvolvimento corresponde ao esperado pela instituição, no entanto, faltou mobilizar a técnica de somar a medida encontrada a outra medida dada (1m), para encontrar a medida total, referente à altura do balão em relação ao solo.

Na figura 41, logo abaixo, o estudante E04 considera as razões trigonométricas seno e cosseno na mobilização de suas técnicas, como mostra o extrato do seu protocolo. Como não conseguimos avançar com entrevistas aos estudantes por causa da pandemia, não poderemos afirmar com certeza qual o motivo pelo qual ele tenha desenvolvido dessa forma, a sua resolução. Mas considerando que a tangente de um ângulo é definida pela razão do seno pelo cosseno, podemos inferir que o estudante tenha considerado esse conhecimento de estudos anteriores, na tentativa de resolver e encontrar a medida solicitada.

Figura 41 – Técnica desenvolvida pelo estudante E04 na questão 4

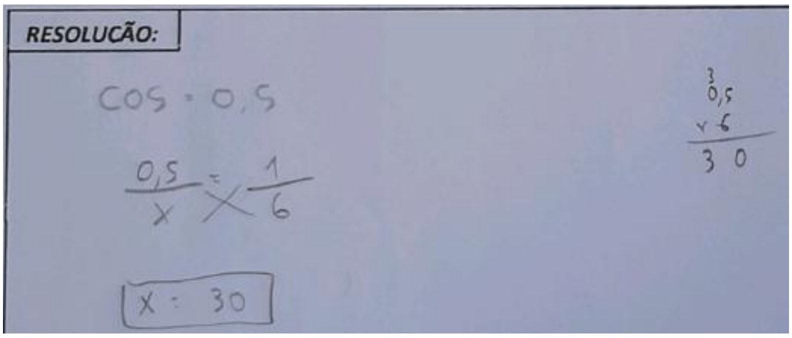


Fonte: Dados da pesquisa

O estudante E04 identificou os elementos geométricos cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa do triângulo retângulo; identificou as medidas dos ângulos apresentadas no triângulo retângulo; identificou a razão trigonométrica seno e cosseno; substituiu os valores nessas razões correspondentes, e resolveu a equação do 1º grau para determinar a medida. No entanto, não podemos afirmar qual dessas medidas encontradas pelo estudante, foi por ele considerada.

Também identificamos em nossa análise, estudantes que, ao identificar a razão trigonométrica tangente, consideraram o cosseno, em suas resoluções.

Figura 42 – Técnica desenvolvida pelo estudante E14 na questão 4



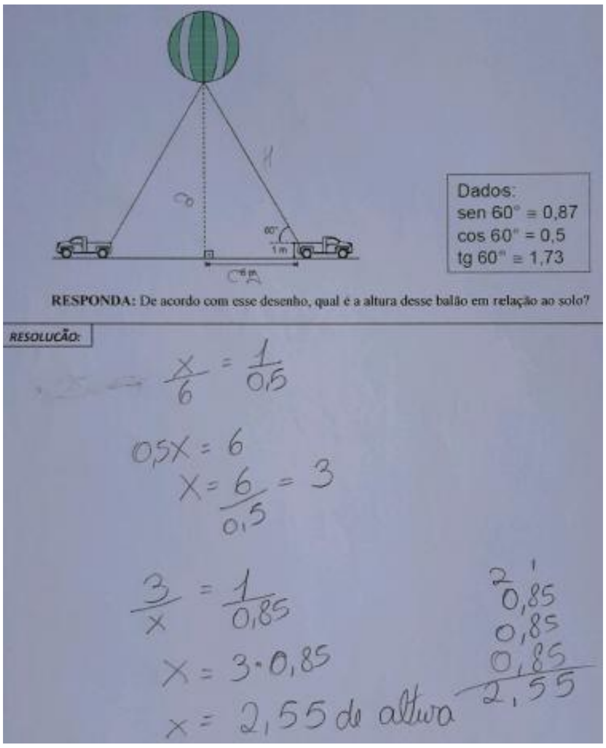
Fonte: Dados da pesquisa

O estudante E14 identificou equivocadamente a razão trigonométrica cosseno e errou ao substituir os valores na razão, pois ele substituiu o valor do cosseno de

60° no numerador da razão que define cosseno. Assim como errou nos cálculos numéricos, obtendo uma medida que não corresponde à esperada.

No extrato abaixo, trazemos o desenvolvimento do estudante E16, o qual também se equivocou ao identificar na razão trigonométrica, os seus valores.

Figura 43 – Técnica desenvolvida pelo estudante E16 na questão 4



Fonte: Dados da pesquisa

O estudante E16 identifica corretamente os elementos geométricos cateto oposto, cateto adjacente e a hipotenusa do triângulo retângulo. No entanto, sua técnica não deixa claro qual razão trigonométrica ele considera na sua resolução. Desse modo, seria necessária uma entrevista para entender quais foram os motivos de suas escolhas ao desenvolver a sua técnica.

No quadro a seguir, apresentamos as técnicas utilizadas pelos estudantes ao resolverem a terceira questão do teste, mediante a análise:

Quadro 21 – Técnicas mobilizadas pelos estudantes na questão 04

Tipo de tarefa (T_T)	Técnicas
Calcular o valor da tangente de um ângulo.	- Identificar a razão trigonométrica cosseno, ao invés da razão trigonométrica tangente; - Resolver os cálculos numéricos incorretamente, substituindo o valor do cosseno de um ângulo no numerador da razão que define cosseno.

Fonte: Autoria própria

Destacamos que dos 15 estudantes que erraram essa quarta questão, nove deles mobilizaram corretamente as técnicas esperadas, exceto somar ao final, a medida dada na questão (1m), com a medida encontrada. Apenas dois estudantes identificaram incorretamente a razão trigonométrica cosseno, ao invés da razão trigonométrica tangente. E quatro estudantes erraram nos cálculos numéricos.

Por meio da análise realizada, ressaltamos que as 46 repostas corretas, apresentavam técnicas que estavam de acordo com a esperada pela instituição. No entanto, dos 66 erros identificados, observamos que das técnicas mobilizadas erroneamente pelos estudantes: 23 delas identificavam incorretamente as razões trigonométricas; 20 estavam relacionadas ao erro no desenvolvimento dos cálculos numéricos; 14 não consideravam a trigonometria no triângulo retângulo para a resolução das questões, e nove delas, apesar de responderem tudo corretamente, não utilizaram a última técnica necessária para obter a medida correta.

Podemos inferir, de acordo com esses resultados, que, além do número de abstenções, as maiores dificuldades apresentadas pelos estudantes participantes, se refere à identificação correta das razões trigonométricas, o que indica que a maioria dos estudantes está concluindo o ensino médio com dificuldades relacionadas ao objeto do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo. Esses dados já confirmam o que vem sendo apresentado nos resultados das últimas avaliações do SAEPE, referente a esse saber.

Outro dado importante apresentado nessa nossa análise se refere ao fato das dificuldades dos estudantes ao desenvolverem corretamente cálculos numéricos, quanto às operações aritméticas, principalmente envolvendo multiplicação e divisão de números decimais.

Infelizmente, não encontramos justificativas dos estudantes quanto as suas respostas, mesmo tendo sido solicitado pela pesquisadora que o fizessem, antes e durante a aplicação do teste. Se fosse possível, poderíamos obter esclarecimentos sobre as resoluções, principalmente para compreender as 14 respostas dos estudantes que resolveram com técnicas que não correspondem ao estudo da trigonometria no triângulo retângulo.

Diante das várias resoluções apresentadas pelos estudantes ao responderem as questões do teste e a caracterização de suas técnicas, podemos identificar aproximações e distanciamentos com as técnicas apresentadas pela instituição. No próximo tópico, apresentaremos uma breve discussão nesse sentindo.

5.4 COMPARATIVO ENTRE A PRAXEOLOGIA MATEMÁTICA PRESENTE NA COLEÇÃO DO LIVRO DIDÁTICO COM AS TÉCNICAS MOBILIZADAS PELOS ESTUDANTES

Mediante as análises realizadas ao longo desse trabalho, conseguimos identificar alguns pontos importantes a respeito das aproximações e distanciamentos referentes à praxeologia matemática presente nos livros didáticos da coleção investigada, com as técnicas que utilizadas pelos estudantes ao resolverem as tarefas propostas no teste.

Como já mencionado no início desse capítulo, categorizamos seis tipos de tarefas presentes nos capítulos dos livros didáticos referentes ao objeto do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, que são:

T_S: Calcular o valor do seno de um ângulo;

T_C: Calcular o valor do cosseno de um ângulo;

T_T: Calcular o valor da tangente de um ângulo;

T_R: Calcular o valor de uma razão trigonométrica;

T_A: Calcular a medida de um ângulo, dadas às medidas de dois lados de um triângulo retângulo;

T_G: Calcular a medida de uma grandeza a partir de uma razão trigonométrica.

Dentre as técnicas necessárias para a resolução desses tipos de tarefas, conseguimos verificar dez, ao longo da análise dos três volumes da coleção, conforme apresenta o quadro a seguir:

Quadro 22 - Descrição das técnicas presentes na coleção de livros didáticos

τ_1: Identificar os elementos geométricos do triângulo retângulo correspondentes ao seus lados (cateto oposto, cateto adjacente, hipotenusa).
τ_2: Identificar as medidas dos ângulos apresentas no triângulo retângulo.
τ_3:Identificar a razão trigonométrica (seno, cosseno, tangente).
τ_4: Substituir os valores na razão trigonométrica correspondente. $sen\, \alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$ $cos\, \alpha = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$ $tg\, \alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$
τ_5: Resolver a equação do 1º grau para determinar a medida desejada.
τ_6: Utilizar a calculadora para calcular o valor da razão trigonométrica ou a medida de um ângulo.
τ_7: Utilizar a tabela trigonométrica para encontrar a medida de um ângulo ou o valor de uma razão trigonométrica definida pela razão trigonométrica atribuída.
τ_8: Somar a medida de cada lado da figura para encontrar a medida do perímetro.
τ_9: Calcular a tangente da soma de dois ângulos pela regra geral $tg\,(a+b) = \frac{tg\,a + tg\,b}{1 - tg\,a\,.tg\,b}$
τ_{10}: Somar a medida encontrada, a uma medida dada para encontrar a medida total solicitada.

Fonte: Autoria própria

O discurso tecnológico-teórico que justifica e legitima as técnicas apresentadas referentes ao objeto do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo nos livros didáticos da coleção, corresponde ao estudo de Semelhança de Triângulos.

Antes de compararmos essa análise com as técnicas mobilizadas pelos estudantes, é importante destacar os tipos de tarefas contidos no teste e aplicado aos estudantes participantes. Observamos que os itens que compuseram as quatro questões desse teste pertenciam a três tipos de tarefas categorizadas inicialmente na análise dos livros didáticos, que foram:

- 1ª questão: T_S *Calcular o valor do seno de um ângulo;*
- 2ª questão: T_C *Calcular o valor do cosseno de um ângulo;*
- 3ª questão: T_C *Calcular o valor do cosseno de um ângulo;*
- 4ª questão: T_T *Calcular o valor da tangente de um ângulo.*

Essa observação se faz importante porque podemos verificar que o teste propôs tarefas que foram contempladas no estudo da coleção de livros didáticos, totalizando uma ocorrência de 45,5% de tarefas desses três tipos (T_S, T_C e T_T), nos três volumes dessa coleção. Ou seja, não houve tipos de tarefas observadas nas avaliações do SAEPE presentes no teste, que fossem distintas das que são trabalhadas na instituição, quanto aos tipos de tarefas.

Ainda observando os tipos de tarefas presentes nos livros didáticos e no teste, podemos constatar que todos os quatro itens do SAEPE se apresentam em um contexto extraescolar, ou seja, questões contextualizadas que envolvam situações usuais do cotidiano. Em contrapartida, ao longo da análise das tarefas presentes nos três volumes, constatamos que 69,3% das tarefas de apresentam em um contexto matemático.

Verificamos ainda que, o ostensivo gráfico triângulo retângulo esteve presente nos quatro itens propostos no teste, enquanto que na análise realizada da coleção de livros didáticos, observamos uma ocorrência de pouco mais da metade (51%) das tarefas identificadas nessa coleção, quanto ao objeto razão trigonométrica no triângulo retângulo.

Quanto às técnicas categorizadas nos livros didáticos, observamos que seis delas (τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, τ_5 eτ_{10}) foram mobilizadas pelos estudantes ao resolverem as tarefas presentes no teste, o que sugere conformidade por parte dos estudantes, quanto a esse objeto do saber. Assim como, proximidade com a instituição do ensino da matemática para essa etapa escolar.

No entanto, algumas técnicas utilizadas pelos estudantes apresentaram diferenças em relação às identificadas na análise da coleção, ou não são reconhecidas pela instituição, quando trabalhadas com o objeto razões trigonométricas no triângulo retângulo. Essas técnicas foram:

Quadro 23 - Descrição das técnicas mobilizadas pelos estudantes distintas da instituição

τ_{11} : Identificar a razão trigonométrica incorreta.
τ_{12} : Resolver os cálculos numéricos incorretamente.
τ_{13} : Somar o quadrado da medida do ângulo agudo apresentado no triângulo retângulo pelo quadrado da medida da hipotenusa e realizar cálculos para encontrar a medida desejada.
τ_{14}: Substituir incorretamente as medidas dos lados do triângulo retângulo, nas razões trigonométricas.
τ_{15}: Substituir a medida dos catetos do triângulo retângulo no Teorema de Pitágoras para encontrar a medida da hipotenusa.

Fonte: A autora (2021)

Quanto ao discurso tecnológico-teórico elaborado pelos estudantes, não foi possível de ser identificado, de modo que nos possibilitasse verificar diferenças e aproximações com o discurso trazido na coleção de livros didáticos analisada, uma vez que ficamos impossibilitados de realizar entrevistas com os estudantes e eles não justificaram a resolução dos itens do teste.

Podemos inferir que, de modo geral, as relações entre as praxeologias presentes na coleção de livros didáticos de matemática e as técnicas dos estudantes quanto ao estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo, apresentam distanciamentos e aproximações. Distanciamentos quando suas técnicas não correspondem às esperadas pela instituição, ocasionando erros nas respostas dos estudantes. E apresentam aproximações, quando os estudantes mobilizam as técnicas esperadas pela instituição.

Portanto, podemos concluir que o estudo dessas relações traz respostas para entendermos as dificuldades apresentadas pelos estudantes nos resultados das avaliações externas nos últimos anos, principalmente quando observamos o número de abstenções, e as respostas erradas. Mesmo observando que parte desses estudantes reconhecem elementos do objeto do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, muito deles apresenta dificuldades em outros saberes matemáticos, o que dificulta a aprendizagem do objeto desse estudo em questão.

Por fim, no próximo tópico apresentaremos as nossas considerações finais, seguidas das referências da nossa pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O nosso trabalho teve como objetivo analisar as relações entre a praxeologia matemática presente em uma coleção de livros didáticos e as técnicas utilizadas pelos estudantes do 3º ano do ensino médio, quanto ao estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Para alcançar tal objetivo, buscamos responder ao seguinte questionamento: quais relações existentes entre a praxeologia matemática presente em livros didáticos e as técnicas mobilizadas por estudantes do 3º ano do ensino médio relativas às razões trigonométricas no triângulo retângulo?

De modo que pudéssemos atender a esse questionamento, tomamos como suporte teórico para a realização dessa pesquisa, a Teoria Antropológica do Didático (TAD), desenvolvida por Yves Chevallard (1999) e seus colaboradores. A TAD apresenta ferramentas que, a partir das noções da praxeologia matemática, nos possibilitou modelizar o saber presente nos livros didáticos da coleção analisada e caracterizar as técnicas utilizadas pelos estudantes.

O nosso interesse quanto ao tema dessa pesquisa surgiu na tentativa de buscar compreender os índices de insucessos elevados dos estudantes, frente às avaliações externas, mais especificamente o SAEPE, quanto aos estudos voltados para o campo da Geometria. Dentre eles, identificamos dificuldades dos estudantes relativas aos conteúdos relacionados à trigonometria no triângulo retângulo.

De acordo com a média histórica de crescimento do grau de domínio quanto a conhecimentos necessários para resolver problemas que envolvam razões trigonométricas no triângulo retângulo, esse crescimento não ultrapassa 33% dos acertos apresentados pelos estudantes, nos últimos anos.

Em nosso trabalho, dissertamos brevemente sobre a importância do campo da Geometria na educação básica, e como o estudo desse campo se desenvolveu e se apresenta atualmente no ensino da educação matemática brasileira. Além de apresentar o seu papel do livro didático e discutir como esse campo se apresenta nos documentos oficiais. Desse modo, buscamos contribuir e fortalecer com as pesquisas voltadas ao estudo de saberes matemáticos em Geometria.

Como participantes da pesquisa, escolhemos 54 estudantes de duas turmas do 3º ano do ensino médio de uma escola pública estadual de Pernambuco, a qual apresentava resultados no SAEPE semelhantes ao da média histórica registrada nos últimos anos. Um dos critérios de escolha desse público foi procurar saber se o professor e estudantes utilizavam os livros didáticos durante as aulas, além do fato de que esse público de estudantes se submete, ao final dessa etapa de escolaridade, à participação nas avaliações em larga escala, especialmente o SAEPE.

Elaboramos um teste com quatro itens do SAEPE, referente ao descritor da matriz de referência D05, que tratam de problemas que envolvam razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente), que foram aplicados aos estudantes.

É importante ressaltar que a nossa metodologia precisou ser, no decorrer da pesquisa, modificada por motivo de força maior. Ao final do ano de 2019, iniciamos a aplicação do teste que foi idealizado para ser o piloto dessa pesquisa. O mesmo seria analisado de modo que pudéssemos voltar no ano seguinte para aplicar o teste definitivo da pesquisa, com as devidas alterações, caso necessário. Assim como faríamos entrevistas com os estudantes, de modo que fosse possível compreender as escolhas dos desenvolvimentos de suas respostas frente às questões presentes no teste.

No entanto, no início do ano de 2020, fomos surpreendidos pela pandemia do Covid-19, a qual nos impossibilitou de voltarmos à pesquisa em campo para aplicarmos o teste com os estudantes. Nesse mesmo ano, todas as aulas presenciais foram canceladas. Perante esse novo cenário, nos vimos diante de um grande desafio para desenvolver a pesquisa, pois tínhamos como intenção inicial na construção metodológica, voltar com os estudantes.

Desse modo, optamos por utilizar os dados já coletados com o teste inicial, o qual passou a ser o definitivo, pois observamos que o mesmo apresentava elementos suficientes para desenvolvermos a pesquisa aqui apresentada.

Iniciamos com a análise praxeológica dos livros didáticos da coleção, ao fazermos o mapeamento das tarefas quanto ao objeto do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, presente em cada volume dessa coleção.

Logo, para atingirmos o nosso primeiro objetivo específico, modelizamos a praxeologia matemática em torno desse objeto, no qual foram identificados seis tipos de tarefas, categorizadas em: $T_{S:}$ Calcular o valor do seno de um ângulo, com 14,8% de ocorrência em toda coleção; T_C: Calcular o valor do cosseno de um ângulo, com 9,1%; T_T: Calcular o valor da tangente de um ângulo, com 21,6%; T_R: Calcular o valor de uma razão trigonométrica, com 40,9%; T_A: Calcular a medida de um ângulo, dadas às medidas de dois lados de um triângulo retângulo, com 9,1%; e T_G: Calcular as medida de uma grandeza a partir de uma razão trigonométrica, com 4,5%.

Identificamos dez técnicas que são utilizadas quando trabalhadas em torno da resolução dos tipos de tarefas presentes nos livros didáticos da coleção, relacionadas às razões trigonométricas no triângulo retângulo. Essas técnicas são legitimadas e justificadas pelo mesmo discurso tecnológico-teórico do conceito de semelhança de triângulos.

Mediante as análises, observamos que a maior quantidade de tarefas identificadas (T_R) se encontra no primeiro volume dessa coleção (LD1), enquanto que tarefas referentes ao tipo T_G, tiveram menor ocorrência, nos três volumes (LD1, LD2 e LD3). Isso sugere que, mesmo considerando os três anos do ensino médio, apresentados nessa coleção de livros didáticos, o que predomina é o cálculo de razões trigonométricas, e não de comprimentos, utilizando uma razão trigonométrica no triângulo retângulo.

Destacamos ainda nas análises a priori dos livros didáticos, o elemento objeto ostensivo na figura do triângulo retângulo. Destes, identificamos que em um pouco mais da metade (51%) das tarefas presentes nessa coleção, apresentam o ostensivo. Identificamos também se as tarefas se apresentam em um contexto matemático (69,3%) ou em um contexto extraescolar (30,7%).

No segundo momento, realizamos uma análise praxeológica a priori dos itens propostos pelo SAEPE, e que estavam presentes no teste aplicado aos estudantes. Observamos que dos quatro itens, três deles pertencem aos tipos de tarefas T_S, T_C e $T_{T.}$Ressaltamos que o tipo de tarefa mais presente nos livros didáticos analisados não é o mesmo de nenhum dos tipos identificados nos itens do SAEPE.

Isso indica que, caso o professor não trabalhe com seus estudantes outros tipos de tarefas de forma equilibrada quanto ao saber razões trigonométricas, o estudo pode ficar focado apenas na utilização de técnicas para calcular o valor de uma razão trigonométrica.

Quanto à caracterização das técnicas dos estudantes, efetuamos a análise das respostas por eles utilizadas, quanto às tarefas propostas no teste que aplicamos. De modo que pudéssemos verificar as relações existentes entre a instituição ensino da matemática do ensino médio representada pelos livros didáticos com as técnicas dos estudantes, realizamos uma análise comparativa.

Para isso, tomamos como referência a modelização da praxeologia matemática realizada a partir da análise dos livros, e as respostas dos estudantes no teste.

Desta feita, logo observamos que um terço dos estudantes participantes (33,3%) entregou o teste totalmente em branco, sem tentar resolver nenhuma das quatro questões. Como não foi possível um retorno para entrevistas, não temos como obter uma resposta mais concreta sobre os motivos pelos quais esses estudantes não responderam a nenhuma das questões.

No entanto, não podemos deixar de considerar a relação dessas respostas em branco com os resultados do SAEPE. Quando comparamos essas abstenções com a média histórica dos resultados dessa avaliação em larga escala nos últimos anos (33%), percebemos semelhança, o que sugere que esses resultados também são provenientes dos estudantes que não respondem aos itens referentes ao descritor do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo.

De modo que pudéssemos apontar as relações entre a praxeologia matemática presente nos livros didáticos da coleção analisada e as técnicas utilizadas pelos estudantes ao responderem as questões do teste, referentes ao objeto do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, buscamos observar os acertos e erros presentes nos protocolos. Esses registros são indicadores dessa relação que almejamos verificar.

Dos 36 estudantes que responderam ao menos uma questão do teste, podemos identificar em suas técnicas aproximações e distanciamentos com a esperada pela instituição. Observamos 46 questões certas, e 66 erros. Desses acertos, identificamos que as técnicas dos estudantes se aproximam da esperada pela instituição, pois os mesmos conseguem mobilizar técnicas que estão em conformidade com as trabalhadas nos livros didáticos analisados.

Quanto aos erros, observamos variedades de elementos em suas técnicas, uma vez que a maioria deles (23 erros) está relacionada à dificuldade em identificar corretamente uma razão trigonométrica. Outros erros mostram que alguns estudantes possuem conhecimento sobre o objeto do saber razões trigonométricas, porém, 20 desses erros estão relacionados a outros campos do conhecimento da matemática, além da geometria, a álgebra e aritmética. Outros 14 erros mostram que as técnicas dos estudantes não correspondiam ao saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, como quando os estudantes utilizam o teorema de Pitágoras. Enquanto que nove estudantes apenas erraram por descuido ou falta de atenção, ao responderem tudo corretamente, faltando acrescentar uma simples técnica ao final da sua resolução.

Esses dados acima revelam que os estudantes, além de deixarem os itens do SAEPE em branco, possuem dificuldades principalmente referentes ao próprio objeto do saber e em operações matemáticas. Sugerindo que a relação existente nos livros didáticos utilizados pelos estudantes, quanto ao objeto do saber razões trigonométricas existe, pois alguns estudantes conseguiram mobilizar técnicas que correspondem com as esperadas, porém essa relação ainda está distante do que poderia ser. Essa distância nessa relação se apresenta também nos baixos índices apresentados nas avaliações externas do SAEPE.

Dentre os fatores que também poderiam contribuir para eventuais erros e abstenções, podemos destacar alguns diante das análises realizadas. Algumas dessas dificuldades podem estar relacionadas com a questão da organização curricular, como o fato de no LD1, as razões trigonométricas se encontrarem no último capítulo, sendo esse volume o que concentra a maior quantidade de tarefas relativas a esse objeto do saber. Assim como observamos que nos outros dois volumes, o objeto do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo se apresenta como ferramenta necessária para o desenvolvimento de outros conteúdos.

Os itens do SAEPE propostos no teste são tarefas do tipo que não correspondem à maioria trabalhada na coleção de livro didático. Do mesmo modo que o uso dos ângulos notáveis, apresentados nos dados da questão do teste, diverge do proposto no ensino da coleção. Nas questões do teste, os valores apresentados não fazem uso de raízes, evitando o uso com números irracionais, os quais apresentam valores aproximados com duas casas decimais.

Essa relação entre como está nos livros didáticos e como é apresentado nos itens do SAEPE aos estudantes, nos trazem indícios de certo distanciamento entre as instituições, o que, ocasionalmente, pode favorecer não somente aos erros apresentados nas respostas dos estudantes, como também no grande número de abstenções das questões.

Quanto às técnicas apresentadas pelos estudantes, observamos conformidades com as técnicas apresentadas nos livros didáticos, quando ocorrem acertos. Já em relação ao bloco tecnológico-teórico, observamos elementos do estudo da semelhança de triângulos, assim como está apresentado nos livros didáticos, porém não realizamos entrevistas com os estudantes de modo que fosse possível uma melhor comparação.

Portanto, podemos observar que quanto aos acertos, as técnicas mobilizadas pelos estudantes correspondem à esperada pela instituição, que foram:

- τ_1- Identificar os elementos geométricos do triângulo retângulo correspondentes aos seus lados (cateto oposto, cateto adjacente, hipotenusa);
- τ_2 – Identificar as medidas dos ângulos apresentadas no triângulo retângulo;
- τ_3 - Identificar a razão trigonométrica (seno, cosseno, tangente);
- τ_4 - Substituir os valores na razão trigonométrica correspondente;

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

$$cos\ \alpha = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

$$tg\ \alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

- τ_5 - Resolver a equação do 1º grau para determinar a medida desejada;
- τ_8 - Somar a medida de cada lado da figura para encontrar a medida do perímetro;
- τ_{10} - Somar a medida encontrada, a uma medida dada para encontrar a medida total solicitada.

Em relação às técnicas mobilizadas, a maiorias dos estudantes que responderam apresentou erros em suas resoluções, de modo que observamos em suas técnicas um distanciamento quanto às esperadas pela instituição, que foram:

- τ_{11} - Identificar a razão trigonométrica incorreta;
- τ_{12} - Resolver os cálculos numéricos incorretamente;
- τ_{13} - Somar o quadrado da medida do ângulo agudo apresentado no triângulo retângulo pelo quadrado da medida da hipotenusa e realizar cálculos para encontrar a medida desejada;
- τ_{14} - Substituir incorretamente as medidas dos lados do triângulo retângulo, nas razões trigonométricas;
- τ_{15} - Substituir a medida dos catetos do triângulo retângulo no Teorema de Pitágoras para encontrar a medida da hipotenusa;

Os resultados apontados neste trabalho foram ao encontro com as pesquisas anteriormente realizadas e aqui mencionadas, em especial aos trabalhos de Ramalho (2016) e ao de Pastor (2020), pois ambos tiveram como objeto do saber as razões trigonométricas no triângulo retângulo, sendo o primeiro voltado para a análise de coleções de livros didáticos e o segundo, com as técnicas mobilizadas pelos estudantes frente a questões de uma avaliação externa. No entanto, os dois observaram esse saber no 9º ano do ensino fundamental. Buscamos fazer um diálogo com esses autores, de modo que ampliássemos o estudo desse objeto do saber no ensino médio.

Crentes de que essa dissertação não esgotou todas as possibilidades de pesquisas nessa área, para trabalhos futuros sugerimos pesquisas que possam observar como esse objeto do saber se apresenta por parte do docente que leciona esse conteúdo no ensino médio, quais os materiais por ele elaborados e utilizados, assim como quais são as suas escolhas e tomadas de decisões ao fazê-lo.

Outra questão que também ficou em aberto nessa pesquisa e que pode ser fruto de futuras investigações é observar, por meio de entrevistas com os estudantes, quais seriam as suas justificativas para as técnicas por eles mobilizadas. Podendo também, buscar elementos da praxeologia pessoal com o saber.

Almejamos que essa pesquisa possa auxiliar o professor a identificar as dificuldades dos seus estudantes quanto ao objeto do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo, no momento em que trabalha com o livro didático. E dessa forma, contribuir para a sua aprendizagem, tanto no fortalecimento desse objeto ao longo de todo o ensino médio, e, consequentemente, quanto aos resultados das avaliações em larga escala a que os estudantes irão se submeter ao longo da sua vida escolar.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Teoria antropológica do didático:** metodologia de análise de materiais didáticos. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. n 42, p. 09-34, 2015.

ARAÚJO, A. J. **O ensino de álgebra no Brasil e na França:** estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático. 2009. 290f. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

BARBOSA, A. O. S. **A Trigonometria do Ciclo Trigonométrico: uma análise da Transposição Didática realizada pelo livro didático na 2ª série do Ensino Médio à luz da Teoria Antropológica do Didático.** Dissertação (Mestrado), UFRPE. Recife, 2015.

BARROS, A. L. S. **Ecologia de saberes matemáticos no ensino técnico integrado ao ensino médio.** 2018. 284f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

BITTAR, M. **A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos.** Zetetiké, Campinas/SP, v. 25, ISSN 2176-1744, 2017.

BOSCH, M. e CHEVALLARD, Y. Ostensifs et sensibilitéauxostensifsdansl'activité mathématique. In: **RecherchesenDidactique des Mathématiques**. Grenoble: La PenséeSauvage. 1999. p. 77-124.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução Elza F. Gomide. Editora Edgard Blucher LTDA. 2.ed. 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília, 2000.

_______, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio.** Volume 2, 2006.

________, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica I. **Guia de Livros Didáticos**: PNLD/2013. Brasília: MEC/SEF, 2012.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (**BNCC**). Brasília: Ministério da Educação, 2018.

CALDATTO, M. E.; PAVANELLO, R. M. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Revista Quadrante**. Vol. XXIV nº 01, 2015.

CÂMARA DOS SANTOS, M. **O Cabri-Géomètre e o Desenvolvimento do Pensamento Geométrico: O Caso dos Quadriláteros.** In: BORBA, R.;

GUIMARÃES, G. (Orgs). **A Pesquisa em Educação Matemática: Repercussões na Sala de Aula.** São Paulo: Cortez, 2009, p. 177 – 211.

CÂMARA DOS SANTOS, M.; ROSA DOS SANTOS, M. **A Praxeologia Matemática e Didática da aula de Dona Rosa.** In: LIMA, A. P. A. B. (Orgs). **Fenômenos didáticos em uma aula de introdução à Álgebra:** múltiplos olhares e perspectivas teóricas. Recife: Editora UFPE, 2017, p. 53 – 74.

CARAÇA, B. J. Conceitos Fundamentais da Matemática. Lisboa: Fotogravura Nacional, 1951.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de ladidactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. In **Recherchesen Didactique dês Mathématiques 12(1)**. Grenoble: La Pensée Sauvage. 1991. P.73-111.

______. Analysedes pratiques enseignantes et didactiquedesmathématiques: l’approcheanthropologique. In :**L’UNIVERSITE D’ETE**, 1998, p.91-118. Actesdel’Université d’été La Rochelle. Clermont-Ferrand, France: IREM, 1998.

______. L’analysedes pratiques enseignantesenThéorie Anthropologie Didactique. In: **Recherchesen Didactiques dês Mathématiques 19(2)**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1999. p. 221-266.

COSTA, A. P. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental:** um estudo sob a luz da teoria vanhieliana. 2016. Dissertação(Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

COSTA, A. C.; SANTO, M. R. Os quadriláteros notáveis no 8º ano do ensino fundamental: um estudo sob a ótica da teoria antropológica do didático. **Remat**, São Paulo, v. 15. N, 19, p. 353-372, mai./ago. 2018.

COSTA, A. C.; SANTO, M. R. O estudo de quadriláteros notáveis no livro didático de Matemática: um olhar para a organização matemática. **Revemop**, Ouro Preto, v.1, n. 2, p.229-247, mai./ago. 2019.

DANTE, L. R. **Matemática – Contexto & Aplicações.** Luiz Roberto Dante – 1° ano. Ensino Médio. 3° Ed. Editora Ática, 2016.

______. 2° ano. Ensino Médio. 3° Ed. Editora Ática, 2016.

______. 3° ano. Ensino Médio. 3° Ed. Editora Ática, 2016.

FORTES, A. W. B. **Razões trigonométricas no triângulo retângulo**: uma análise de erros no ensino médio. 2012. 97f. Dissertação (Mestrado profissionalizante em ensino de física e matemática) – Pró-Reitoria de Pós-Graduação Pesquisa e Extensão, Universidade Franciscana, Santa Maria, 2012.

FRITZE, K.R. **Estudo do sistema conceitual de trigonometria no Ensino Fundamental**: uma leitura histórico-cultural. 2011. 123f. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade do Estado de Santa Catarina, Criciúma, Santa Catarina, 2011.

GONÇALVES, L. M. G.; GRANDO, R. C.; NACARATO, A. M. **Compartilhando saberes em geometria:** Investigando e aprendendo com nossos alunos, Campinas, vol. 28, n. 74, p. 39 – 56, jan/abr. 2008.

HECK, M. F. Ensino e Aprendizagem de Geometria na Educação Básica: análise dos artigos publicados nos anais do V, VI e VII SIPEM. **EMD**, São Paulo, v. 7, n. 3, p. 123-143, 2020.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar –** Trigonometria. São Paulo: Atual Editora, 2013, p. 11-12.

JESUS, F. J. A. **Uso(s) do livro didático por professores de matemática dos anos finais do ensino fundamental de escolas da rede estadual de Aracajú/SE.** 2017. 129f. Dissertação (Mestrado em Ensino e Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2017.

KONZEN, S.; BERNARDI, L. T. S.; CECCO, B. L. **O campo do ensino de geometria no Brasil:** do Brasil colônia ao período do regime militar, Chapecó, v. 2, n. 2, p. 58 – 70, dez. 2017.

LOCATELLI, S. C. **O ensino de geometria:** o que revelam as tarefas escolares. 2015. 148f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Maringá, 2015.

LORENZATTO, **S. Por que não ensinar geometria?** A Educação Matemática em Revista. São Paulo: SBEM, n.4, 1995.

LIMA, P. F.; CARVALHO, J; B. P. F. **Coleção Explorando o Ensino.** Capítulo 7: Geometria. Volume 17, Brasília, 2010, p.135-166.

Matriz de Referência de Matemática do SAEPE: Disponível em: http://www.saepe.caedufjf.net/wp-content/uploads/2016/06/SAEPE-2016-MATRIZ-MT-9EF-C01.pdf. Acesso em: 25 mai. 2019.

MENESES, Ricardo Soares de. **Uma história da geometria escolar no Brasil: de disciplina a conteúdo de ensino.** Dissertação de mestrado (2007). Programa de Estudos Pós-graduação em Educação Matemática. PUC-SP.

MENEZES, Marcus Bessa de. **Praxeologia do Professor e do aluno: uma análise das diferenças no ensino de equações do segundo grau.** 2010. 178f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

PASTOR, E. P. **Análise de questões de trigonometria propostas aos alunos do Ensino Fundamental pelo SARESP**. 2020. 92f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontificia Universidade Católica, São Paulo, 2020.

PAVANELO, R. M. **O Abandono do Ensino da Geometria no Brasil: Causas e Consequências.** Zetetiké. São Paulo, n.1, 1993.

PEREIRA DA COSTA, A.; ROSA DOS SANTOS, M. . Os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes de uma Licenciatura em Matemática no Estado de Pernambuco: um estudo sob a ótica da teoria de Van-Hiele. **EDUCAÇÃO ON-LINE** (PUCRJ), v. 25, p. 63-86, 2017.

PEREIRA DA COSTA, A.; ROSA DOS SANTOS, M. . Uma análise praxeológica do ensino de triângulos no 8º ano do ensino fundamental. **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA**-RS, v. 2, p. 189-197, 2018.

PEREIRA DA COSTA, A. A geometria na educação básica: um panorama sobre o seu ensino no Brasil. **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO**, v.9, p.128-152, 2020.

PERNAMBUCO. Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio. Recife: Secretaria de Educação, 2012.

PERNAMBUCO. Currículo de Pernambuco para o Ensino Fundamental. Recife: Secretaria de Educação, 2019.

RAMALHO, L. V. **Trigonometria em livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental**. 2016. 88f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2016.

RÊGO, R. G.; RÊGO, R. M.; VIEIRA, K. M. **Laboratório de ensino de Geometria.** 1. Ed. Campinas: Autores Associados, 2012. 146 p.

REIS, M. F. C. T. **Metodologia da Pesquisa Científica**. Curitiba: IESDE Brasil S.A., 2007.

RODRIGUES, D. S.; KAIBER, C. T. A Geometria Espacial no Ensino Médio: contribuições da utilização de uma Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA). **Perspectivas de Educação Matemática**. Mato Grosso do Sul, v. 12, n. 28, p. 149 – 167, 2019.

ROSA DOS SANTOS, M. **Resolução de problemas envolvendo área de paralelogramo:** um estudo sob a ótica do contrato didático e das variáveis didáticas. 2005. 150f. Dissertação (Doutorado), Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, UFRPE. Recife, 2005.

ROSA DOS SANTOS, M. **A transposição didática do conceito de área de figuras geométricas planas no 6º ano do ensino fundamental:** um olhar sob a ótica da teoria antropológica do didático. 2015. Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, Tese (Doutorado), UFRPE. Recife, 2015.

SANTOS, J. L. B. **Uma sequência didática para a aprendizagem das noções de trigonometria fundada na teoria das Inteligências múltiplas**. 2017. 139f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2017.

SENA, R. M.; DORNELES, B .V. **Ensino de Geometria**: Rumos da Pesquisa (1991-2011). REVEMAT, Florianópolis (SC), v. 08, n. 1, p. 138-155, 2013.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do Trabalho Científico**. 24 ed. São Paulo: Cortez, 2016.

SILVA JÚNIOR, R. S. Uma proposta de ensino de geometria plana no ensino fundamental: a matemática presente no cotidiano dos estudantes. **Research, Societyand Development**, v. 9, n. 7, p. 1-12, 2020.

Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE): Disponível em: <http://www.saepe.caedufjf.net/>. Acesso em: 18 mai 2020.

TURÍBIO, S. R. T.; SILVA, A. C. A influência do livro didático na Prática pedagógica do professor que ensina matemática. **RPD**, Mato Grosso, v. 2, n. 2, p. 158-178, jul/dez, 2017.

VALENTE, W. R. **Uma história de matemática escolar no Brasil (1730-1930)**. 2ed. São Paulo: Editora Annablume, 1999.

VALENTE, W. R. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. **Zetetiké**, São Paulo, v. 16, n. 30, p. 139-161, jul/dez. 2008.

VASCONCELOS, D. M. **Entre palavras, quadros e números**: uma análise ontossemiótica da construção do conceito de razões trigonométricas com a utilização de histórias em quadrinhos. 2019. 170f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciência e Matemática) – Centro Acadêmico do Agreste, Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2019.

VASCONCELOS, J.; PIGATTO, A. G.; LEIVAS, J. C. P. Uma análise sobre a geometria nos livros didáticos e na provinha Brasil. **Góndola**, Francisco José das Caldas, v. 15, n. 3, p. 547-568, 2020.

ANEXO 1

TESTE

1 Estudante (codinome):____

2 Sexo: ( ) Feminino ( ) Masculino

3 Idade: _______________

4 Você cursou o Ensino Fundamental:
( ) Todo em Escola Pública
( ) Todo em Escola Particular
( ) Em Escola Pública e em Escola Particular

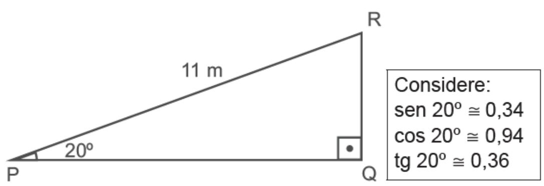
5 Você utiliza o Livro Didático de Matemática na sua Escola?
( ) Sim ( ) Não ( ) Às vezes

6 Você utiliza o Livro Didático de Matemática para estudar em casa e fazer as atividades?
( ) Sim ( ) Não ( ) Às vezes

7 Você utiliza outros meios de pesquisa para estudar, além do Livro Didático?
( ) Não ( ) Sim. Quais?
____

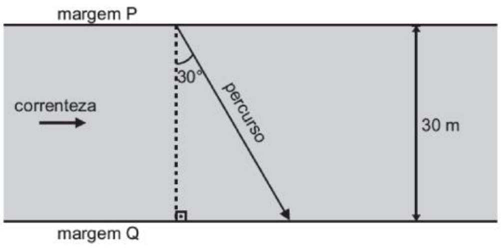
PROBLEMAS

1) (SAEPE – 2015) O telhado da casa de Paulo deixa em sua lateral uma abertura na forma de um triângulo retângulo, conforme mostra o desenho abaixo. Ele irá tampar essa abertura e para isso precisa calcular a medida da altura QR dessa abertura para comprar o material necessário.



RESPONDA: Qual é a medida da altura QR dessa abertura? Justifique a sua resposta

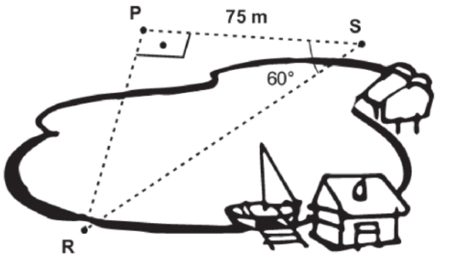
2) (SAEPE – 2016) Um barco realizou a travessia em um rio partindo da margem P com trajetória retilínea em direção à margem oposta Q. Devido à correnteza desse rio, o percurso do barco foi deslocado 30° em relação à trajetória retilínea predeterminada, conforme representado no desenho abaixo.



Dados:
sen 30°= 0,50
cos 30° ≅ 0,87
tg 30° ≅ 0,58

RESPONDA: Qual o percurso aproximado, em metros, realizado pelo barco para atravessar esse rio?

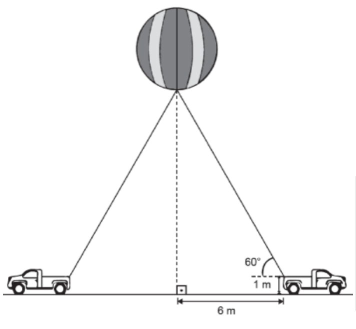
3) (SAEPE - 2017) Para estimar a largura RS de um lago, Pedro, que é topógrafo, fez 3 demarcações próximas às margens desse lago, representadas pelos pontos P, R e S, e utilizou um teodolito para fazer algumas medições. Do ponto S ele avistou os pontos P e R segundo um ângulo de 60º e, do ponto P, avistou os pontos R e S segundo um ângulo de 90º, conforme ilustrado no desenho abaixo.



Dados:
sen 60° ≅ 0,86
cos 60° = 0,5
tg 60° ≅ 1,73

RESPONDA: Aproximadamente, quanto mede a largura RS desse lago, em metros?

4) (SAEPE - 2018) Em um balão de propaganda cheio com gás hélio, foram fixadas duas cordas que estavam amarradas em veículos distintos, conforme representado no desenho abaixo.



Dados:
sen 60° ≅ 0,87
cos 60° = 0,5
tg 60° ≅ 1,73

RESPONDA: De acordo com esse desenho, qual é a altura desse balão em relação ao solo?

ANEXO 2

MATRIZ DE REFERÊNCIA DE MATEMÁTICA — SAEPE

3º ANO DO ENSINO MÉDIO

I – GEOMETRIA

D01 Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.

D02 Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais.

D03 Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.

D04 Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema.

D05 Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).

D06 Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.

D07 Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.

D08 Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.

D09 Relacionar a determinação do ponto de interseção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.

D10 Reconhecer, dentre as equações do 2º grau com duas incógnitas, as que representam circunferências.

II. GRANDEZAS E MEDIDAS

D11 Resolver problema envolvendo perímetro de figuras planas.

D12 Resolver problema envolvendo área de figuras planas.

D13 Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

III. NÚMEROS E OPERAÇÕES/ÁLGEBRA E FUNÇÕES

D14 Identificar a localização de números reais na reta numérica.

D15 Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.

D16 Resolver problema que envolva porcentagem.

D17 Resolver problema envolvendo equação do 2º grau.

D18 Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela.

D19 Resolver problema envolvendo uma função do 1º grau.

D20 Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.

D21 Resolver problema envolvendo P.A./P.G. dada a fórmula do termo geral.

D22 Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de 1º grau por meio de seus coeficientes.

D23 Reconhecer a representação algébrica de uma função do 1º grau dado o seu gráfico ou vice-versa.

D24 Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo de uma função polinomial do 2º grau.

D25 Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do 1º grau.

D26 Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.

D27 Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial.

D28 Resolver problema que envolva função exponencial.

D29 Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente) reconhecendo suas propriedades.

D30 Determinar a solução de um sistema linear.

D35 Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto.

IV. ESTATÍSTICA, PROBABILIDADE E COMBINATÓRIA

D31 Resolver problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples.

D32 Resolver problema que envolva probabilidade de um evento.

D33 Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.
D34 Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.